

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA GEOLÓGICA MINERA Y METALÚRGICA



“FRACTALES Y SU IMPLICANCIA EN GEOLOGIA”

INFORME DE SUFICIENCIA
PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO GEOLOGO

ELABORADO POR:
JOSE ALBERTO MAMANI CONDORI
ASESOR:
ING. CESAR RAMIRO SANTIAGO CHIRINOS

LIMA-PERU

2013

DEDICATORIA:

“A Dios que me dio fuerzas para seguir adelante, a mis padres y hermana por su continuo apoyo durante todo este tiempo”.

INDICE

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES DE LA TEORIA FRACTAL.....14

1.1 Caos y Fractales.....14

1.2 Cronología de la Teoría Fractal.....15

CAPÍTULO II

CONCEPTOS y FUNDAMENTOS BASICOS DE LA TEORIA FRACTAL.....19

2.1 Concepto de Fractal.....19

2.2 Concepto de Dimensión Fractal.....21

2.2.1 Dimensión Topológica y Dimensión Fractal.....22

2.2.2 Dimensión Hausdorff-Besicovitch.....24

2.2.3 Dimensión Minkowski-Bouligand.....26

2.2.4 Relación entre las dimensiones fractales.....27

2.3 Escalamiento, Auto-similitud y Auto-afinidad.....28

2.4 Tipos de Fractales.....29

2.4.1 Fractales Lineales.....29

2.4.2 Fractales No Lineales.....35

2.4.3 Fractal Matemático y Fractal Natural.....39

CAPITULO III

PATRONES FRACTALES EN GEOLOGIA REGIONAL Y LOCAL.....42

3.1 Fractales Auto-similares.....43

3.2	Fractales Auto-afines.....	44	
3.3	Patrones fractales en Geología Regional y Local.....	46	
CAPITULO IV			
ANALISIS FRACTAL EN GEOLOGIA.....			48
4.1	Algunos Métodos usados para un Análisis Fractal.....	48	
4.2	Análisis Fractal en Tectónica y Sismología.....	55	
4.3	Análisis Fractal en Drenaje Superficial.....	57	
4.4	Análisis Fractal de la Ley del Mineral y su Tonelaje.....	61	
4.5	Análisis Fractal en Topografía.....	63	
CAPITULO V			
ALGUNAS APLICACIONES DEL ANALISIS FRACTAL.....			65
5.1	Delineación y explicación de anomalías geoquímicas usando modelos fractales en Heqing área, Provincia de Yunnan, China.....	65	
5.2	Análisis Fractal como discriminación de sistemas filonianos auríferos.....	71	
5.3	Análisis Fractal de principales fallas en India a escala regional.....	75	
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....			79
BIBLIOGRAFIA.....			81

RELACION DE TABLAS

TABLA 1	Calculo de parámetros del Conjunto de Cantor.....	30
TABLA 2	Calculo de parámetros de la Curva de Koch.....	31
TABLA 3	Calculo de parámetros del Triangulo de Sierpinski.....	32
TABLA 4	Calculo de parámetros de la Curva de Peano.....	33
TABLA 5	Calculo de parámetros de la Curva de Hilbert.....	34
TABLA 6	Dimensión fractal de la Costa de Islandia por el Método de la Regla.....	50
TABLA 7	Dimensión fractal de la Costa de Islandia por el Método Celdas Cuadrículadas.....	52
TABLA 8	Thresholds y Dimensión fractal de los modelos N-S y C-A de los elementos típicos en Heqing.....	68

RELACION DE FIGURAS

Figura 1	Cronología de la Teoría Fractal. Felix Hausdorff.....	17
Figura 2	Cronología de la Teoría Fractal. Benoit Mandelbrot.....	17
Figura 3	Esquema entre dimensión euclidiana (D_e), dimensión fractal (D_f)..	23
Figura 4	Construcciones fractales con dimensiones fractales asociadas.....	24
Figura 5	Contenido de Hausdorff de un conjunto.....	24
Figura 6	Dimensión Hausdorff-Besicovitch para la costa de Gran Bretaña....	25
Figura 7	Estimando dimensión box-counting de la costa de Gran Bretaña....	26
Figura 8	Triangulo de Sierpinski.....	27
Figura 9	Curva de Koch.....	28
Figura 10	Superficie auto-afín generado mediante computadora.....	29
Figura 11	Movimiento Browniano.....	29
Figura 12	Construcción del Conjunto de Cantor.....	30
Figura 13	Construcción de la Curva de Koch.....	31
Figura 14	Construcción del Triangulo de Sierpinski.....	32
Figura 15	Construcción de la Curva de Peano.....	33
Figura 16	Construcción de la Curva de Hilbert.....	34
Figura 17	Representación del Conjunto de Julia.....	36
Figura 18	Representación del Conjunto de Mandelbrot.....	36
Figura 19	Atractor de Lorenz en tres dimensiones.....	37

Figura 20	Movimiento Browniano en tres direcciones.....	39
Figura 21	Ejemplos de fractales naturales y fractales matemáticos.....	41
Figura 22	Ejemplo de fractal auto-afín camino aleatorio.....	44
Figura 23	Elevación h como una función de posición x a lo largo de una dirección lineal.....	46
Figura 24	Método de Regla para estimar la dimensión fractal.....	49
Figura 25	Relación entre la resolución y la longitud del perímetro de la Costa de Islandia.....	51
Figura 26	Método de Celdas Cuadrículadas para estimar dimensión fractal... 	52
Figura 27	Conteo estadístico de las celdas cuadrículadas para estimar la dimensión fractal.....	53
Figura 28	Método espectral. Periodograma en topografía.....	55
Figura 29	Dimensión fractal de la actividad sísmica.....	57
Figura 30	Grafico de una red de drenajes.....	58
Figura 31	Sistema ordenado de una corriente.....	58
Figura 32	Dependencia del número de corrientes de varios ordenes con su longitud media para la red de drenaje.....	60
Figura 33	Ley promedio acumulado en cinco años vs el tonelaje acumulado de mineral (1906-1976), USA.....	62
Figura 34	Análisis fractal en topografía.....	64
Figura 35a	Modelos fractales Number-Size.....	67
Figura 35b	Modelos fractales Concentration-Area.....	68

Figura 36	Contornos de Anomalía de Au.....	69
Figura 37	Mapa de ubicación y esquema geológico del área La Codosera.....	72
Figura 38a	Grafico frecuencia acumulada de venas vs espesor de venas en Sondaje.....	73
Figura 38b	Grafico frecuencia acumulada de venas vs espesor de venas en Afloramiento.....	74
Figura 39	Maoa sismo-tectonico de la India.....	75
Figura 40a	Imagen de entrada dividida en cuadrícula regular.....	76
Figura 40b	Ajuste lineal para estimar la dimensión fractal.....	76
Figura 40c	Distribución espacial de la dimensión fractal estimada. (India).....	77

RESUMEN

Desde la concepción de los fractales por Mandelbrot, podemos usar la geometría fractal como ciencia descriptiva, aplicable a geología. El análisis fractal, la determinación de la dimensión fractal de una estructura y de otras magnitudes relacionadas es una herramienta que se revela útil si se la sabe emplear. Con un análisis fractal podemos discriminar y caracterizar fenómenos que desde el punto de vista clásico eran considerados inclasificados. Las publicaciones de fractales relacionados con ciencias de la tierra aun mantienen un crecimiento moderado a diferencia de otras ciencias en las cuales poseen una evolución exponencial.

En la naturaleza, los sistemas geológicos son esencialmente heterogéneos, no existe una porción de roca que sea exactamente igual a otra muy próxima, y la Geometría Fractal ha servido de ayuda a la hora de poder cuantificar, mediante la dimensión fractal y formular modelos que permitan reproducir sistemas de gran complejidad mediante la simple repetición de un proceso no lineal.

Fractales han sido aplicados a diversos problemas geológicos, podríamos mencionar casos de petróleo y reservas de mineral. Si los procesos físicos y químicos presentan una escala invariante, entonces la distribución fractal debe ser aplicable.

Debido a que la geología presenta varios casos de procesos con escala invariable, los fractales son útiles pues proveen una forma de cuantificar estos procesos de escala invariante. Los fractales nos podrían ayudar a analizar y predecir condiciones ambientales, terremotos y volcanes. Podrían ser útiles en la caracterización geométrica y escalamiento en minerales. También podrían ayudar en la medición de fronteras y costas. Conociendo los conceptos de los fractales, estos serían una nueva alternativa en la resolución de problemas geológicos.

ABSTRACT

From conception of fractals by Mandelbrot, fractal geometry can be used as descriptive science applicable to geology. Fractal analysis, the determination of the fractal dimension of a structure, and other related quantities is a tool that reveals useful if it knows how to use. With a fractal analysis can discriminate and characterize phenomena from the classical view were considered unclassified. Fractals publications related earth sciences still maintain moderate growth unlike other sciences in which they have an exponential evolution.

In nature, geological systems are essentially heterogeneous, there is a piece of rock that is exactly like another very close, and Fractal Geometry has been helpful to be able to measure time by the fractal dimension and develop models to reproduce complex systems by simply repeating a nonlinear process.

Fractals have been applied to various geological problems could mention cases of oil and mineral reserves. If physical and chemical processes exhibit a scale invariant, then the fractal distribution should be applicable.

Because the geology present several cases of scale-invariant processes, fractals are useful because they provide a way of quantifying these processes scale invariant. Fractals we could help analyze and predict environmental conditions, earthquakes and volcanoes. They may be helpful in characterizing mineral geometric scaling. They may also help in measuring borders and coasts. Knowing the concepts of fractals, they would be a new alternative in solving geological problems.

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por finalidad mostrar de forma breve los conceptos básicos de la Teoría Fractal y explicar cómo estos conceptos pueden ser aplicados en la geología. El interés en el estudio de fractales se debe en parte a que es una teoría poco difundida en la aplicación de problemas geológicos. En la naturaleza podemos ver muchos procesos y fenómenos geológicos que presentan un comportamiento fractal. Por ejemplo las líneas costeras y los drenajes fluviales son formas fractales.

Conceptos fractales pueden ser aplicados a problemas geológicos en una variedad de caminos. Uno de ellos, la distribución de frecuencias. Bajo una variedad de circunstancias, la distribución de frecuencias de fragmentos, fallas, depósitos minerales, depósitos de petróleo, y movimientos sísmicos han mostrado ser fractales. Conceptos de fractales pueden también ser aplicados a distribuciones continuas como la topografía.

El presente trabajo está dividido en 5 principales capítulos. Los dos primeros enfocados en cómo se desarrollo la teoría fractal y sus principales conceptos. Los capítulos restantes explican la relación existente entre los fractales y la geología, se muestra algunos métodos del análisis fractal, explicamos algunos modelos fractales usados en geología y ejemplos de algunas aplicaciones de fractales.

Si bien el presente trabajo no profundiza demasiado en la teoría de los fractales, se observa la importancia que puede tener en geología. Los fractales son otra herramienta que podemos usar para un mejor entendimiento de los procesos naturales.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES DE LA TEORIA FRACTAL

1.1 Caos y Fractales

Durante mucho tiempo la naturaleza ha tratado de ser descrita con los métodos clásicos, basados en el orden total y continuo de las cosas, las teorías de Newton veían al mundo como un compuesto de bloques mecánicos en interrelación, partes separadas de la realidad que responden a una causa – efecto. Sin embargo, descubrimientos en termodinámica y mecánica cuántica llevaron a los científicos a cuestionar estas ideas y ver una naturaleza menos ordenada y menos predecible. Esto contribuyó a que emergiera un nuevo paradigma en la ciencia, La teoría del Caos, esta teoría ve la realidad como un todo donde cualquier factor por pequeño que parezca, puede afectar el comportamiento y la evolución de la naturaleza.

El caos existente en la naturaleza, muchas veces lo intentamos medir con patrones y reglas equivocadas, con formas regulares, simétricas y euclideas, cuando

en realidad esta naturaleza se asemeja más a las formas fractales. Se considera fractal a aquel objeto o estructura que consta de fragmentos con orientación y tamaño variable pero de aspecto similar.

Con esta nueva perspectiva la ciencia ha encontrado las herramientas y el idioma adecuado para entender mejor nuestro complejo mundo físico.

Podemos decir que la geología también avanza dentro de la ciencia del Caos, pues no se deja reducir exclusivamente a procesos simples, aleatorios y lineales para su estudio. La complejidad emerge de la sencillez y se disfraza de caos.

1.2 Cronología de la Teoría Fractal

Los Fractales son los objetos matemáticos que constituyen la Geometría de la Teoría del Caos, aunque es importante destacar que no todos los fractales son caóticos como veremos más adelante. Los objetos fractales fueron creados mucho antes de haberse desarrollado formalmente la Geometría Fractal o la Teoría del Caos. De hecho, se pueden encontrar y reconocer figuras con características fractales como la del triángulo de Sierpinski en grabados de tela de hace varias décadas atrás, hasta en los años de 1400 se hallaron grabados japoneses con estas estructuras.

Antes de que Newton, Leibniz y colaboradores crearan en el siglo XVII lo que hoy conocemos como Cálculos, Análisis Matemático o Cálculo Infinitesimal, se conocían funciones con enormes irregularidades y discontinuidades, pero los científicos de aquella época supusieron que esas mismas funciones discontinuas eran muy escasas y que raramente surgirían en sistemas naturales, por lo que las consideraban excepciones a la matemática tradicional y simplemente las dejaban de lado, o si no las ignoraban realizaban aproximaciones a través de redondeos, lo cual aún hoy en día se continua haciendo con éxito en diferentes sistemas, pero dichos redondeos se vuelven peligrosos en sistemas con una dinámica caótica.

Un grupo de matemáticos comenzó a darse cuenta que en la naturaleza se daba muy seguido el fenómeno de irregularidades y que no eran excepciones como se suponía. Fue un periodo crítico que va desde 1875 hasta 1925, iniciado por Georg Cantor en 1877, seguido posteriormente por Giuseppe Peano en 1890, Helge Van Koch en 1904 y Felix Hausdorff en 1919.

La necesidad de incorporar los aspectos más irregulares de la naturaleza no era posible de satisfacerse con la matemática clásica, vinculada a las estructuras regulares de la geometría de Euclides y a la evolución continua propia de la dinámica de Newton. Se hacía imperioso el surgimiento de una matemática y una geometría nueva, que diera cuenta no solo de estas raras figuras inventadas por los

matemáticos de fines del siglo XIX, sino que de los objetos naturales que nos rodean. Desde esta necesidad comienza a surgir la Geometría Fractal.

Para dar respuesta a estas estructuras “monstruosas” o “patológicas” que no se ajustaban a las dimensiones con números enteros, tal como indica la geometría de Euclides, surgen los trabajos de Félix Hausdorff en 1919. En ellos se demuestra que la dimensión que ocupa cada objeto, podría calcularse si se encuentra el factor de escala mediante el cual matemáticamente dicho objeto se puede reproducir. Esto es, para ciertas figuras ideales se puede decir que su dimensión no es un entero sino que una fracción (Mandelbrot, 1977/1987).



Fig. 1. Félix Hausdorff



Fig. 2. Benoit Mandelbrot

Si bien muchos autores aportaron y prepararon el camino para el surgimiento de una geometría nueva, la comunidad científica reconoce que el padre de la Geometría Fractal es Benoit Mandelbrot (Chapman, 2003).

En 1958 Mandelbrot trabajaba en IBM en un problema bastante común en las líneas telefónicas como era el ruido de fondo. La cuestión era difícil de resolver debido a la complejidad de construir un modelo matemático que representase

fielmente al patrón con el que se difundía el ruido. En 1945 había estudiado los trabajos de Gastón M. Julia, en especial "Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles" (Inspirado en dicha lectura y con ayuda de las facilidades computacionales logró crear las primeras ilustraciones de su ensayo de 1975), y un poco después los trabajos de Cantor. Aplicando estos conocimientos y partiendo del conjunto de Cantor observo que el nuevo modelo representaba bastante bien al ruido de fondo de las líneas telefónicas. Desde ese instante, su campo de investigación se centró en el análisis de las estructuras que presentaban un elevado número de irregularidades.

En 1967 publicó en Science «¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?», donde se exponen sus ideas tempranas sobre los fractales. En 1982 publicó su libro "Fractal Geometry of Nature", en el que explicaba sus investigaciones en este campo. Mandelbrot sostuvo que los fractales, en muchos aspectos, son más naturales, y por tanto mejor comprendidos intuitivamente por el hombre, que los objetos basados en la geometría euclidiana, que han sido suavizados artificialmente. (wikipedia biografía).

La teoría de fractales no se desarrolló independiente de otras disciplinas, La teoría de fractales se ha nutrido de la matemática (N. Wiener, B. Mandelbrot, L. F. Richardson), de la física (J.B. Perrin) y de otras disciplinas tan diversas que quedan contenidas en los trabajos de B. B. Mandelbrot.

CAPÍTULO II

CONCEPTOS Y FUNDAMENTOS BASICOS DE LA TEORIA FRACTAL

2.1. Concepto de Fractal

Por ser esta una área del conocimiento nueva y por lo tanto actualmente en desarrollo, la definición de fractales aun es cambiante, la primera definición establecida por Mandelbrot en 1975 es: "Fractales es el conjunto de formas generadas normalmente por procesos matemáticos repetitivos y que se caracterizan por: 1) tener el mismo aspecto a cualquier escala de observación, 2) tener longitud infinita, 3) no ser diferenciables y 4) tener dimensión fraccional o fractal". Actualmente, aun y que se mantienen las cuatro características mencionadas su acepción es: "Formas geométricas que pueden ser separadas en partes, cada una de las cuales es una versión reducida del todo".

La 'Geometría Fractal' es conocida como la 'Geometría de la naturaleza'. La palabra 'fractal', inicialmente propuesta por Mandelbrot, se refiere a algo quebrado

o roto. Se asocia con las discontinuidades en las funciones matemáticas. Son algoritmos iterativos computacionales que permiten describir sistemas naturales, caóticos y dinámicos. Esto quiere decir, que el objeto fractal tiene “alguna” relación con el todo. Los objetos fractales poseen dos características esenciales: Auto-similitud (que puede ser perfecta o estadística), y Dimensión fractal.

Los fractales lineales deben de seguir varios pasos para ser generados:

1. Se escoge una imagen generadora. Puede ser cualquiera, desde una recta hasta la cara de un personaje.
2. Se decide “el algoritmo de transformación de la imagen generadora”.
3. Repite algoritmo infinita veces o con límite determinado como variable en software.

Los Fractales complejos se desarrollan bajo la misma lógica, solo que en lugar de repetir una imagen infinitas veces, se repite una ecuación en el dominio de los números complejos. El ejemplo más utilizado en los medios académicos ha sido el Conjunto de Mandelbrot.

Los Fractales Caóticos, son los elementos geométricos de la Teoría del Caos (estudio de ciertos tipos de sistemas dinámicos de parte de la física, la matemática, entre otros, los cuales son muy sensibles a variaciones iniciales, pudiendo generar grandes diferencias en el comportamiento futuro), conocidos también como

Atractores. Se generan a través de mediciones provenientes del mundo real, como Ecuaciones Diferenciales o Series de tiempo. Cuando uno modela un sistema natural caótico, tiene como finalidad encontrar un Atractor.

2.2. Concepto de Dimensión Fractal

La característica principal de un fractal es lo que se conoce con el nombre de dimensión fractal, este número es independiente de la escala que estemos utilizando, y en cierto modo este número indica el grado de irregularidad de un objeto.

La dimensión fractal es un exponente que da cuenta de cuan completamente parece llenar un fractal el espacio conforme se amplía el primero hacia escalas mas y mas finas. No existe una única dimensión fractal sino una serie de dimensiones que frecuentemente resulta equivalentes pero no siempre. Entre estas definiciones esta la dimension de Hausdorff-Besicovitch, la dimensión de empaquetamiento, la dimensión de homotecia y las dimensiones de Renyi. Ninguna de estas dimensiones debería ser tratada como universal, ya que a veces la discrepancia entre ellas está asociada a diferencias en la estructura interna del fractal. Aunque para un buen numero de fractales clásicos los valores de las diferentes definiciones de dimensión fractal de todas estas dimensiones coinciden, en general no son equivalentes.

2.2.1. Dimensión Topológica y Dimensión Fractal

La dimensión topológica es fácil de comprender ya que nos habla de la conectividad de los puntos del objeto de medida. En 1912, H. Poincare observo que la recta es unidimensional, debido a que podemos separar dos segmentos cualesquiera de ella, cortándola en un solo punto (conjunto de dimensión 0), mientras que el plano es bidimensional, porque para separar dos cualesquiera de sus puntos debemos cortarlo a lo largo de una curva cerrada (conjunto de dimensión 1), un sólido es tridimensional, porque para separar dos cualesquiera de sus puntos debemos cortarlo a lo largo de una superficie cerrada (conjunto de dimensión 2). Esto nos sugiere la naturaleza inductiva de la dimensión topológica: *un espacio es n -dimensional, si se pueden separar dos puntos cualesquiera de el suprimiendo un subconjunto de $(n-1)$ dimensiones, mientras no siempre es posible obtener el mismo resultado suprimiendo un conjunto de menos dimensiones.* En los Elementos de Euclides, ya se define, implícitamente y de forma inductiva, el concepto de dimensión topológica euclidiana. Se dice que una figura es unidimensional, si su frontera está compuesta de puntos; bidimensional, si su frontera está compuesta de curvas y tridimensional, si su frontera está compuesta de superficies.

La dimensión (en el sentido topológico) de un objeto ante una transformación se debía de conservar. Pero ciertos matemáticos como Cantos, Peano, Hildert habían

creado conjuntos de puntos y curvas que no cumplían con esto. Dichos objetos matemáticos no se pueden caracterizar por parámetros invariantes.

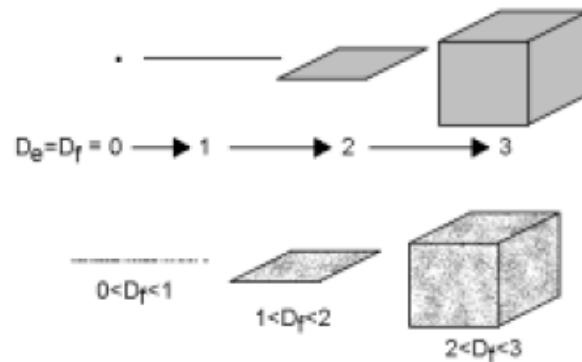


Fig. 3 Esquema para la comparación simplificada entre dimensión euclidiana (D_e) y dimensión fractal (D_f)

El problema con estos objetos matemáticos era que la noción de invarianza topológica estaba equivocada. Existen diferentes nociones del concepto de dimensión, todas ellas son de naturaleza topológica. La más importante es la dimensión de Hausdorff y de aquí Mandelbrot se basa para su concepto de dimensión fractal.

En la figura 3, en la parte superior se representan 4 objetos considerados por la geometría euclidiana en alguna de las 3 dimensiones o bien cero. Si estos cuerpos fueran continuos en el espacio, su dimensión fractal coincidiría con la dimensión euclidiana ($D_f = D_e$), sin embargo en la parte inferior al ir amplificando el cubo o las representaciones de la línea y el plano, en determinada escala de amplificación nos encontraremos que estos objetos tienen espacios vacíos, están llenos de “poros”, por lo que de acuerdo a la geometría fractal, la línea, el plano y el cubo tienen una dimensión que no es un número entero sino una fracción, dependiendo de tantos

espacios vacíos tengan. La dimensión fraccional fractal de la línea será entre $\langle 0,1 \rangle$, el plano entre $\langle 1,2 \rangle$, y el cubo entre $\langle 2,3 \rangle$.

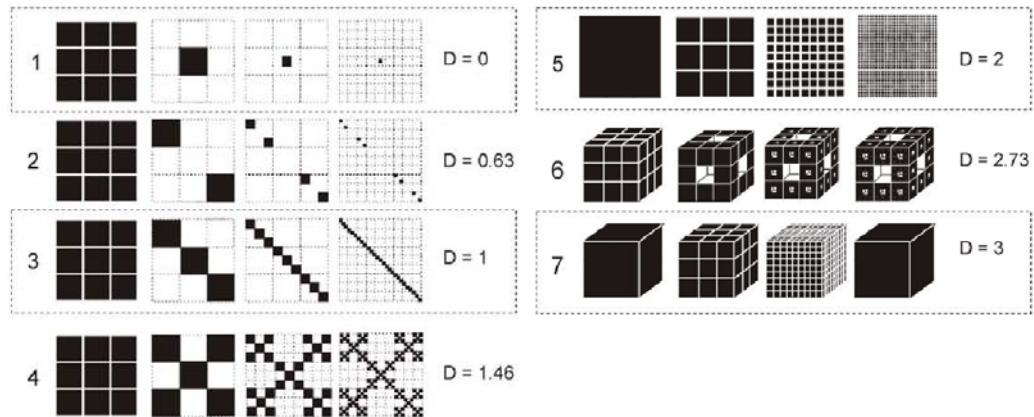


Fig. 4. Diferentes construcciones fractales de un *Conjunto de Cantor* (2), una *Alfombra de Sierpinsky* (4) y de una *Esponja de Menger* (6), con sus dimensiones fractales asociadas.

2.2.2. Dimensión Hausdorff-Besicovitch

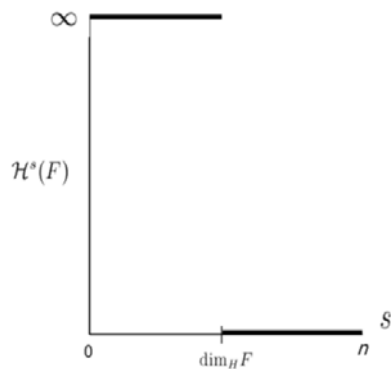


Fig. 5. Contenido de Hausdorff de un conjunto: para valores inferiores a la dimensión de Hausdorff el contenido de Hausdorff es infinito, para valores superiores el contenido es cero. Solo para un valor igual a la dimensión de Hausdorff el contenido es una cantidad positiva y finita.

Una definición matemática de D_f es la que se conoce como la dimensión Hausdorff-Besicovitch, por haber sido planteada primero por estos investigadores. Esta caracterización de la dimensión fractal mediante la dimensión de Hausdorff-Besicovitch se basa en considerar una cubierta abierta por n bolas abiertas (n -esferas) del conjunto fractal, es decir, para un fractal contenido en el plano Euclideo se consideran círculos abiertos, y para una un fractal contenido en el espacio

Euclideo tridimensional se consideran esferas (para un fractal que sea un subconjunto de la recta real se emplean intervalos abiertos). De todos los recubrimientos posibles se considera el ínfimo formado por bolas de diámetro mayor igual que un cierto tamaño ε . Una vez computado ese ínfimo se considera el límite $\varepsilon \rightarrow 0$.



Fig. 6. Ejemplo de estimación de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para la costa de gran Bretaña

El tipo más simple de dimensión surge de una visión puramente geométrica del fractal como un subconjunto de \mathbf{R}^n . Si $N(\varepsilon)$ denota el numero más pequeño de esferas necesarias para cubrir un fractal, entonces $N(\varepsilon)$ es inversamente proporcional a ε^n , espacio de una esfera, así que $N(\varepsilon) = C \cdot \varepsilon^{-n}$ para una constante C . Resolviendo n y permitiendo $\varepsilon \rightarrow 0$, nosotros obtenemos la **dimensión fractal** (o dimensión de capacidad o un límite superior para la dimensión de Hausdorff-Besicovitch)

$$n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon) - \ln C}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \text{ entonces } n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el término $\ln C / \ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ también tiende a 0. (" n " es la dimensión fractal)

2.2.3. Dimensión Minkowski-Bouligand

En geometría fractal, la dimensión de Minkowski-Bouligand, también conocido como **box-counting dimensión** es otra forma de determinar la dimensión fractal de un conjunto S en un espacio Euclideo \mathbb{R}^n , o más, generalmente en espacio métrico (X, d) .

Para calcular la dimensión fractal S imaginemos este fractal en una cuadrícula uniformemente espaciado, y contamos cuantas cajas necesitamos para cubrir el conjunto. La dimensión es calculada viendo como este número de cajas cambia conforme nosotros hacemos una grilla más fina usando un algoritmo para el conteo de cajas. Supongamos que $N_{(\epsilon)}$ es el numero de cajas con longitud de lado ϵ requerido para cubrir el conjunto. Entonces la dimensión de conteo de cajas es

$$\text{dim}_{\text{box}}(S) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \left(\frac{1}{\epsilon}\right)}$$

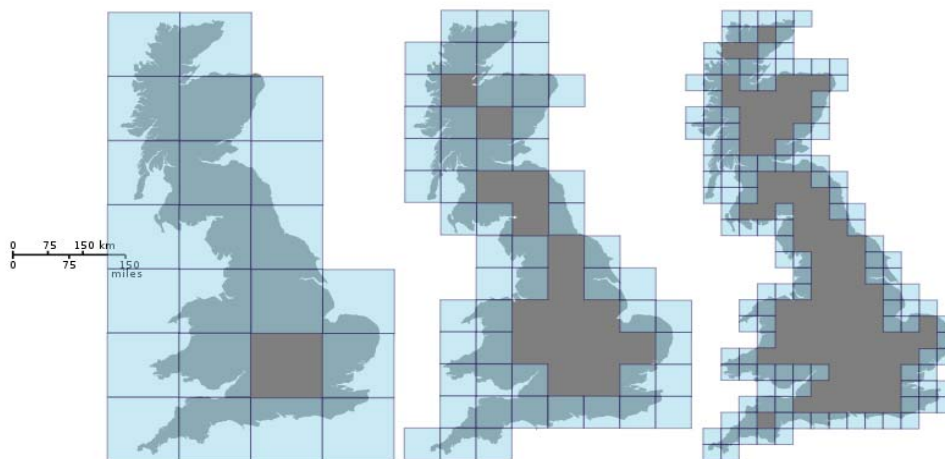


Fig. 7. Estimando la dimensión box-counting de la costa de Gran Bretaña

Por ejemplo, la dimensión fractal para el triángulo de Sierpinski está dado por:



Fig. 8. Construcción del triángulo de Sierpinski

$$D_{MB} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{\log \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^k}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$$

2.2.4. Relación entre las dimensiones fractales

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch siendo similar numéricamente a otras dimensiones fractales, en general resulta no mayor que todas ellas, siendo para la mayoría de fractales clásicos coincidente con el resto de dimensiones fractales (generalmente más sencillas de calcular). De hecho ha podido demostrarse la siguiente cadena de desigualdades:

$$D_T \leq D_{HB} \leq D_{MB}$$

Donde: D_T es la dimensión topológica que es siempre un entero.

D_{HB} es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch que para fractales clásicos suele ser un número irracional.

D_{MB} es la dimensión de Minkowski-Bouligand o de conteo de cajas, a veces llamada dimensión de Hausdorff.

2.3. Escalamiento, Auto-similitud y Auto-afinidad

La Auto-similitud es fundamental en todos los fractales. Se refiere a aquellos objetos que presentan características parecidas cuando son observadas a diferente escala. De tal forma que si se hace una sucesión de fracciones en diferentes tamaños, las fracciones del objeto resultante tendrán características en general similares. En una idealización matemática, la propiedad de auto-similitud de un fractal puede continuar infinitamente por muchos estados. En la vida real la escala de invarianza solo existe para un rango de escalas.

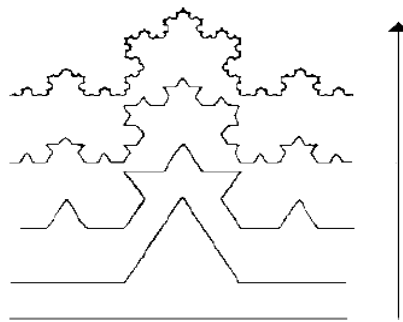


Fig. 7. Construcción de la curva de V. Koch.

La generación de fractales auto-similares se puede lograr mediante procedimientos repetitivos. Por ejemplo la curva de Von Koch (Fig. 9).

Por su característica de escalamiento igual en todas direcciones, podemos decir que estos fractales son isotrópicos auto-similares. Otros objetos naturales o matemáticos, tales como las superficies de los objetos y los perfiles generados por el movimiento browniano, solo mantienen su aspecto durante el escalamiento si este se hace diferente en al menos una de las direcciones, es decir son fractales anisotrópicos los cuales se conocen como objetos o fractales auto-afines.

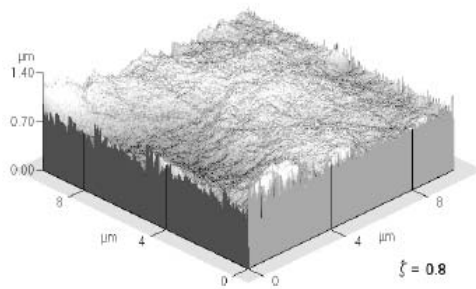


Fig. 8. Superficie auto-afín generada mediante computadora, simulando la rugosidad de superficies de fractura más comunes

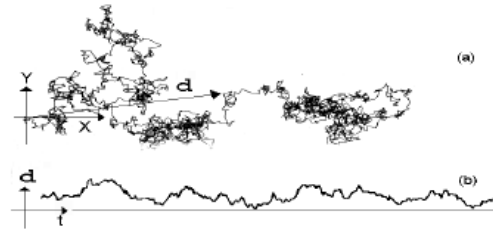


Fig. 9. Movimiento browniano esquematizado como (a) la posición X,Y en función del tiempo y (b) la distancia al origen en función del tiempo.

De acuerdo a Mandelbrot, los fractales pueden presentar 3 clases diferentes de autosimilitud; **autosimilitud exacta** (el fractal resulta idéntico a cualquier escala); **cuasiautosimilitud** (con el cambio de escala, las copias del conjunto son muy semejantes, pero no idénticas) **autosimilitud estadística** (fractal tiene dimensiones estadísticas o de número que se conserven con la variación de la escala).

2.4. Tipos de Fractales

Existen una gran variedad de fractales, los cuales pueden generarse a través de la iteración infinita de un proceso geométrico o a través de la iteración infinita de formulas matemáticas complejas. (Esta iteración se realiza mediante el uso de algoritmos) Podemos clasificar según como se generaron en Lineales y No Lineales.

2.4.1. Fractales Lineales

Son aquellos fractales que se generan a través de iteraciones de un patrón geométrico bien especificado, estos fractales se caracterizan por su autosimilitud exacta. También conocidos como los monstruos matemáticos.

Conjunto de Cantor

Es el primer fractal conocido, fue ideado por Georg Cantor en 1883 como ejemplo de longitud cero cuyos puntos se pueden identificar uno a uno con todos los puntos de una recta (que tiene longitud infinita). Para construir el conjunto de Cantor se toma un segmento de determinada longitud y se divide en 3 sub-segmentos de igual longitud, se suprime el segmento central y el proceso se repite con los dos nuevos segmentos resultantes. El resultado de iterar este proceso infinitas veces es el conjunto de Cantor.

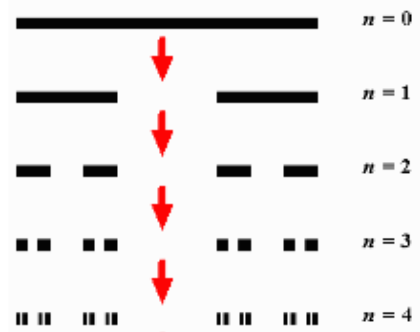


Fig. 12. Construcción del Conjunto Cantor

Dimensión Fractal del conjunto de Cantor

De la tabla 1 deduciremos la razón de medida ε para el cálculo de la Dimensión

Tabla 1 Cálculo de parámetros del Conjunto de Cantor

Numero de Iteraciones	0	1	2	3	k
Longitud de segmento	1	1/3	1/9	1/27	$(1/3)^k$
Numero de segmentos	1	2	4	8	2^k

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^k}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309$$

Como se puede observar la dimensión obtenida para esta fractal está entre 0 y 1.

Curva de Koch

Fue ideada por Helge von Koch en 1904 como ejemplo de curva de longitud infinita contenida en un recinto acotado y sin tangente en cualquier punto. Para su construcción consideramos un segmento de recta de determinada longitud, lo dividimos en 3 partes iguales y reemplazamos el tercio central por un triángulo equilátero de lado $1/3$ (el triángulo no tendrá base), quedándonos ahora con 4 segmentos. Aplicamos el proceso anterior a cada uno de estos segmentos, quedándonos ahora con 16 segmentos. Repitiendo infinitas veces el proceso para cada nuevo segmento que se genere obtenemos la curva de Koch.

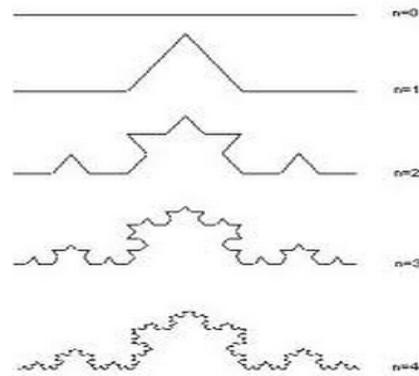


Fig. 13. Construcción de Curva de Koch

Dimensión Fractal de la Curva de Koch

De la tabla 2 deduciremos la razón de medida ε para el cálculo de la Dimensión

Tabla 2 Cálculo de parámetros de la Curva de Koch

Numero de Iteraciones	0	1	2	3	k
Longitud de segmento	1	$1/3$	$1/9$	$1/27$	$(1/3)^k$
Numero de segmentos	1	4	16	64	4^k

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 4^k}{\log \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3} \right)^k} \right)} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619$$

Como se puede observar la dimensión obtenida para esta fractal está entre 1 y 2.

Triangulo de Sierpinski

El triangulo de Sierpinski fue ideado por Waclaw Sierpinski en 1915. Para su construcción se parte de un triangulo equilátero de lado 1. El primer paso consiste en dividirlo en 4 triángulos equiláteros iguales (lo que se consigue uniendo los puntos medios de los lados) y eliminar el triangulo central. En cada triangulo restante repetimos el proceso de división-eliminación descrito para el primer triangulo. Repitiendo el proceso infinitamente, obtendríamos el llamado triangulo de Sierpinski.



Fig. 14. Construcción del triangulo de Sierpinski

Dimensión Fractal del Triangulo de Sierpinski

De la tabla 3 deduciremos la razón de medida ε para el cálculo de la Dimensión

Tabla 3 Cálculo de parámetros del Triangulo de Sierpinski

Numero de Iteraciones	0	1	2	3	k
Lado de cada triángulo	1	1/2	1/4	1/8	$(1/2)^k$
Numero de triángulos	1	3	9	27	3^k

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{\log \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^k}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$$

Como se puede observar la dimensión obtenida para esta fractal está entre 1 y 2.

Curva de Peano

En 1890 Giuseppe Peano, e inmediatamente después en 1891 David Hilbert discuten las curvas que se encuentran en un plano y bajo ciertas reglas iterativas llegan a llenar completamente dicho plano, dramáticamente demuestran que nuestra idea con respecto a las curvas es bastante limitada. Para la construcción de la curva de Peano, empezamos con un segmento de determinada longitud y lo reemplazamos por 9 sub-segmentos de longitud $1/3$ del segmento original. Repitiendo infinitas veces el proceso para cada nuevo segmento que se genere obtenemos la curva de Peano.

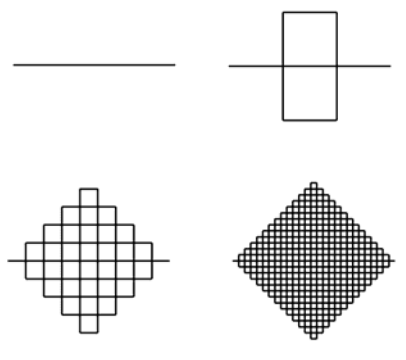


Fig. 15. Construcción de Curva de Peano

Dimensión Fractal de la Curva de Peano

De la tabla 4 deduciremos la razón de medida ϵ para el cálculo de la Dimensión

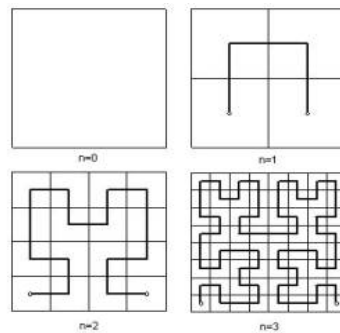
Tabla 4 Cálculo de parámetros de la Curva de Peano

Numero de Iteraciones	0	1	2	3	k
Longitud de segmento	1	$1/3$	$1/9$	$1/27$	$(1/3)^k$
Numero de segmentos	1	9	81	729	9^k

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 9^k}{\log \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^k}\right)} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$$

Curva de Hilbert

En 1891 David Hilbert dio una explicación de la construcción de la curva de Peano, basándose en un algoritmo parecido al de Peano, ideó una curva con idéntica propiedad pero de más sencilla elaboración. En un proceso infinito de repeticiones, en el límite, pasa por todos los puntos de un cuadrado, llenándolo. Entonces, ¿es una curva o es una superficie?; ¿Cuál es su dimensión? Para su construcción dibujamos un cuadrado de lado unidad. Lo dividimos en cuatro partes iguales y unimos sus centros tal como indica la figura. Seguidamente, se divide cada uno de los cuadrados en cuatro partes y se repite el proceso; se conectan sus centros, comenzando siempre por el cuadrado inferior izquierdo y terminando en el cuadrado inferior derecho. Este proceso se repite indefinidamente y se obtiene la curva de Hilbert.



Dimensión Fractal de la Curva de Hilbert

De la tabla 5 deduciremos la razón de medida ε para el cálculo de la Dimensión

Tabla 5 Cálculo de parámetros de la Curva de Hilbert

Numero de Iteraciones	0	1	2	3	k
Longitud de segmento	1	1/2	1/4	1/8	$(1/2)^k$
Numero de segmentos	1	3	15	63	$(4^{k+1})-1$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(4^{k+1} - 1)}{\log \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^k}\right)} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

2.4.2. Fractales No Lineales

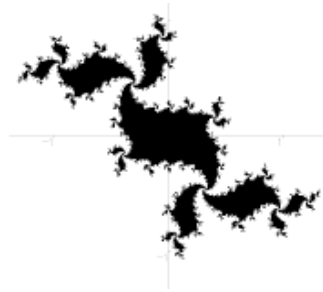
Hasta ahora nos hemos referido a un tipo de fractales caracterizado por la autosemejanza; son los llamados *fractales deterministas lineales*. Pero también existen otros *fractales deterministas no lineales*. Estos empezaron a utilizarse en 1976 por el biólogo Robert Hay en la simulación de poblaciones de insectos por iteraciones de una función: la población $p(n)$ en un año n se calcula a partir de la población en el año anterior $p(n - 1)$ y una ley determinista pronto lleva a un comportamiento aparentemente caótico de la población. Los llamados sistemas caóticos presentan una evolución errática, pero no aleatoria, pues se rigen por unas normas de transición. Son famosos por su belleza los fractales obtenidos en las iteraciones de funciones de variable compleja (los números complejos tienen dos componentes (x, y) , llamadas parte real y parte imaginaria, y pueden ser representados como puntos en el plano).

Los fractales No Lineales se generan a partir de distorsiones complejas o justamente como lo dice su nombre, distorsiones no lineales. *La mayoría de los objetos fractales puramente matemáticos y naturales son no lineales.*

Estos fractales no lineales presentan una estructura similar, pero no exactamente igual a su original. Si vemos de cerca una parte específica de un fractal se parecerá al original pero tendrá unas pequeñas variaciones.

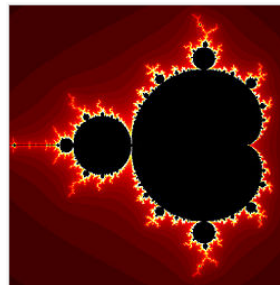
Conjunto de Julia

Durante la I Guerra Mundial, Gaston Julia (1893 - 1978) trabajó con una familia de funciones de variable compleja muy sencilla: $z_n^2 + c = z_{n+1}$, siendo c una constante (número complejo). Dado un valor inicial z_0 e iterando, se obtienen z_1, z_2, z_3 , etc. Aquellos valores iniciales z_0 que daban lugar a una sucesión acotada los representó en negro; y en blanco, los que producían una sucesión hacia el infinito. Así obtuvo el famoso **Conjunto de Julia**.



Conjunto de Mandelbrot

En 1979, Benoit Mandelbrot (1924-2010) aplicó colores diferentes a los posibles valores de c , según el número de iteraciones necesarias para asegurar la convergencia de la anterior serie z_n (algoritmo de tiempo de escape). Así obtuvo el **Conjunto de Mandelbrot**. En la imagen de ejemplo, observamos que el rojo oscuro indica que al cabo de pocos cálculos se sabe que el punto no está en el conjunto mientras que el blanco informa de que se ha tardado mucho más en comprobarlo.



Atractores

Los atractores son los objetos geométricos de la Teoría del Caos, poseen una estructura fractal y autosimilitud estadística. Se requieren métodos de medición más complejos que la dimensión fractal. Se generan a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales. Uno de los atractores más conocidos y populares es el Atractor de Lorenz, el cual se asocia entre otras cosas al clima meteorológico. Lorenz en su modelo meteorológico comprobó que mínimas variaciones en las entradas se convertían, en poco tiempo, en grandes variaciones en la salida. A esto se lo denomina efecto mariposa. Este efecto se puede explicar con la siguiente frase: "Si hoy, una mariposa agita sus alas en Pekin, puede cambiar el tiempo de Nueva York el mes que viene". Ecuaciones estudiadas por Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = -\partial(x - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy$$



Fig. 19. Atractor de Lorenz

Donde ∂ es el número de Prandtl (viscosidad / conductividad térmica), r es el número de Rayleigh (diferencia de temperatura entre base y tope) y b es la razón entre la longitud y altura del sistema.

La geometría fractal y la teoría de los sistemas dinámicos están íntimamente ligados, ya que la región del espacio hacia la que tiende asintóticamente una órbita caótica tiene estructura fractal (atractores extraños). Por tanto, la geometría fractal permite estudiar el soporte sobre el que se definen los sistemas dinámicos caóticos.

Movimiento Browniano

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo polen en una gota de agua). Recibe su nombre en honor al escocés Robert Brown biólogo y botánico quien lo observa en 1827 este fenómeno, él observo que pequeñas partículas de polen se desplazaban en movimientos aleatorios sin razón aparente.

La explicación del movimiento browniano se encuentra hoy bien asentada. Un grano de polen o de polvo suspendido en un fluido se ve sometido al bombardeo continuo de las moléculas de éste. Una sola molécula difícilmente podría tener suficiente ímpetu para que su efecto sobre la partícula en suspensión lo recogiera el microscopio. Pero cuando muchas moléculas chocan con la partícula en la misma dirección, simultáneamente, producen una reflexión observable de su trayectoria. El movimiento browniano es un efecto doblemente aleatorio: la trayectoria de partícula en suspensión deviene imprevisiblemente en razón de las fluctuaciones arbitrarias de la velocidad de las moléculas circundantes. Por otro lado, como el microscopio es esencialmente un filtro que sólo pone de manifiesto los efectos de fluctuaciones de cierta magnitud en el entorno molecular local, el movimiento observado sólo insinúa la complejidad de la trayectoria real. Si el poder de resolución del microscopio se incrementa en un factor de 10, 100 o 1000, se detectarán los efectos del bombardeo por grupos progresivamente menores de moléculas. A un mayor aumento, partes de la trayectoria de la partícula que inicialmente habían aparecido como rectas se observarán ahora dotadas de una

estructura quebrada e irregular. La trayectoria de una partícula en el movimiento browniano fue uno de los primeros fenómenos naturales en los que se reconoció una autosimilitud a cada grado de aumento, una propiedad clave de los objetos geométricos que Benoit B. Mandelbrot ha denominado fractales.

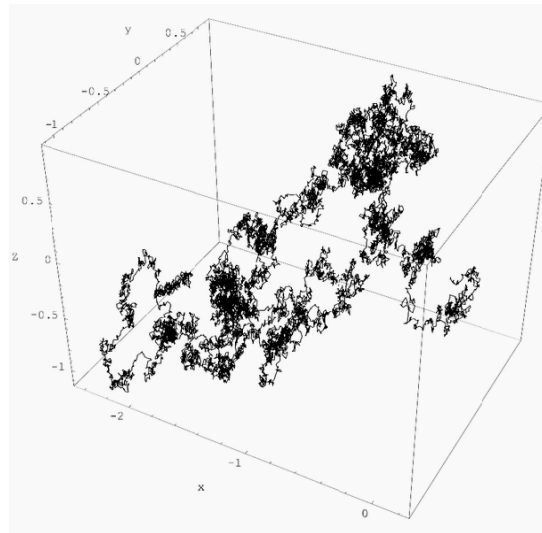


Fig. 20. Movimiento Browniano en tres direcciones

2.4.3. Fractal Matemático y Fractal Natural

La geometría fractal suele considerarse como la geometría que describe los sistemas caóticos que encontramos en la naturaleza. Los fractales son un lenguaje, una manera de describir una geometría. La geometría fractal describe en algoritmos, como crear un fractal. Los computadores traducen estas instrucciones a los magníficos patrones que vemos como imágenes fractales.

Un **fractal ideal** es una figura geométrica que los matemáticos crean por medio de un algoritmo iterativo o regla repetitiva que tiene una forma, bien sea sumamente

irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Los fractales matemáticos cumplen con la propiedad de autosimilitud.

Un **fractal natural** es un elemento de la naturaleza que puede ser descrito mediante la geometría fractal. Las nubes, las montañas, el sistema circulatorio, las líneas costeras o los copos de nieve son fractales naturales. Esta representación es aproximada, pues las propiedades atribuidas a los objetos fractales ideales, como el detalle infinito, tienen límites en el mundo natural. Se extiende solo a un rango de escalas (por ejemplo a escala cercana a la atómica su estructura difiere de la estructura macroscópica).

Tanto los objetos **fractales matemáticos** como los **naturales** quedan caracterizados por su dimensión fractal, la cual es un parámetro invariante a cualquier cambio de escala de observación.

Para finalizar la idea de fractal matemático y fractal natural preguntamos; ¿Qué significado tiene decir que un objeto real, tal como una costa, es un fractal? Lo que se quiere decir, siguiendo a Mandelbrot, es que puede definirse un modelo matemático fractal que aproxima satisfactoriamente al objeto real en toda una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo que llamaremos corte superior e inferior. Entonces, siendo estrictos, en el mundo real no existen

fractales, como tampoco existen rectas ni esferas. Hablar de la dimensión fractal de una costa no es más absurdo que hablar del radio de la Tierra, ya que esta no es exactamente una esfera.

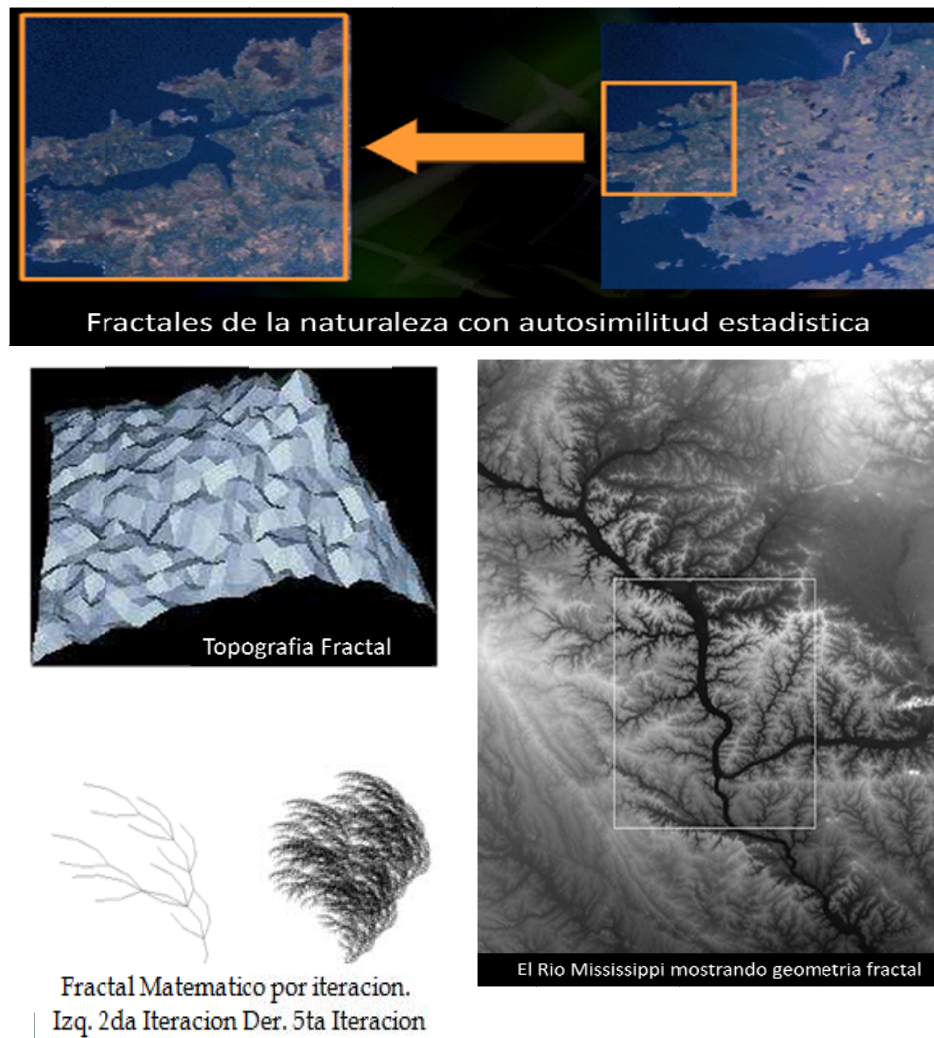


Fig. 21. Algunos fractales naturales y fractales matemáticos

CAPITULO III

PATRONES FRACTALES EN GEOLOGIA REGIONAL Y LOCAL

A partir de los descubrimientos de Mandelbrot sobre la organización fractal de la Naturaleza, alejándose de la geometría clásica euclidiana, estos conceptos comenzaron a aplicarse en otras ramas del conocimiento. En geología estos conceptos se empezaron a utilizar, principalmente en los campos de Geomorfología y Sismología, cuando en la zona de la falla de San Andres en California, se descubrió que los sismos de magnitud 6 o menor tenían una distribución fractal en el espacio y en el tiempo, al comprobar que los temblores se presentaban en grupos autosemejantes y no en intervalos regulares. Por otra parte, Turcotte comprobó que las relaciones tonelaje-ley de algunos yacimientos de Hg, Cu y U de Estados Unidos presentaban también distribuciones fractales.

3.1. Fractales Autosimilares

Un fractal estadísticamente auto-similar es por definición isotrópico. Una definición formal para fractal auto-similar en dos dimensiones sería cuando $f(rx, ry)$ es estadísticamente similar a $f(x, y)$ donde r es un factor de escala.

En muchos contextos geológicos la distribución fractal puede ser considerada como una distribución estadística. Es la única distribución estadística que tiene escala invariante; así es una base fundamental para su aplicabilidad a muchos problemas geológicos. Unos pocos ejemplos de fractales autosimilares son:

La relación de Korcak para el número de islas con un área mayor que un valor específico es un fractal con $D = 1.3$ (Mandelbrot, 1975). Cargill y otros autores (1980, 1981) han sugerido que la relación entre tonelaje y ley en depósitos minerales económicos tendrían una distribución fractal. (Turcotte, 1986). Ivanhoe (1976) ha sugerido que la relación fractal (ley de potencia) podría ser aplicable a las estadísticas número-tamaño para campos de petróleo. Terremotos tienen una relación fractal entre tamaño y frecuencia de ocurrencia. Gutenberg y Richter (1954) establecieron una relación empírica para el número de sismos N ocurriendo en un específico intervalo de tiempo con magnitudes más grandes que m de la forma: $\log N = -bm + a$. Donde a y b son constantes. Esta relación es válida regionalmente y globalmente, el valor b es generalmente cercano a 0.9. Aki (1981) mostró la equivalencia entre la ecuación fractal y la ecuación de Gutenberg-Richter cuando la magnitud m es convertida al área de ruptura r^2 , el resultado es la relación

simple de $D = 2b$. Entonces $D = 1.8$ es para sismicidad. McClelland y otros autores (1989) han publicado estadísticas de frecuencia-volumen para erupciones volcánicas que correlacionan bien con la ecuación fractal cuando $D = 2.14$

3.2. Fractales Autoafines

Un fractal estadísticamente autoafin no es isotrópico. Una definición formal de un fractal autoafin en dos dimensiones del espacio xy es que $f(r x, r^H y)$ sea estadísticamente similar a $f(x,y)$ donde H es la medida de Hausdorff; nosotros relacionaremos H a la dimensión fractal en adelante. Métodos espectrales son generalmente aplicados a fractales autoafines.

Como un específico ejemplo de un fractal autofin, considerar la caminata aleatoria mostrada en la figura 22

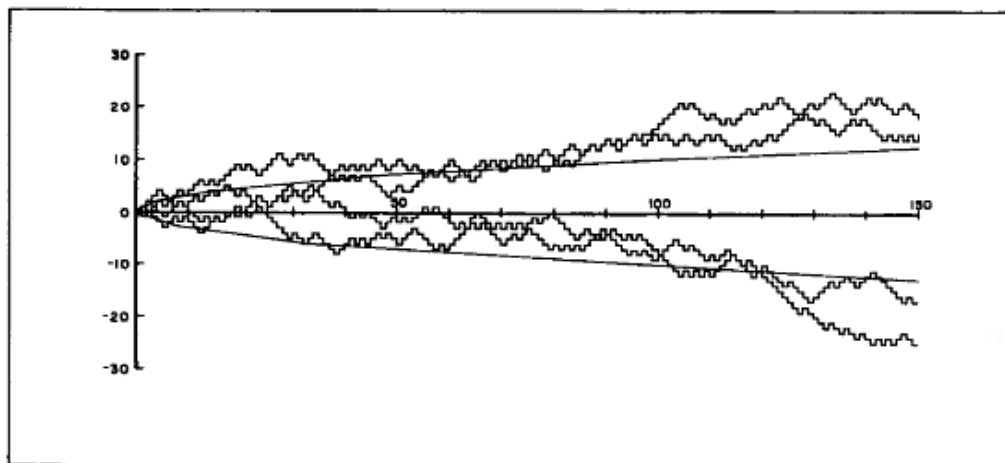


Figure 5. The zig-zag lines are four examples of a random walk (Brownian noise). The solid lines ($y = \sqrt{x}$) represent the mean dispersion of the walk.

Avanza un paso adelante, tira una moneda si es cara el paso es a la derecha si es cruz el paso es a la izquierda. Da otro paso adelante y repite el proceso; esto es el ruido browniano. La amplitud del ruido depende de la longitud del paso adelante. Para ruido browniano $D = 3/2$, la amplitud es proporcional a la longitud de onda. Ruido browniano es una buena aproximación estadística para topografía y batimetría (Bell 1975).

Las secciones transversales topográficas también son consideradas como fractales autoafines, donde la elevación h sería una función de posición x a lo largo de una trayectoria lineal. Figura 23

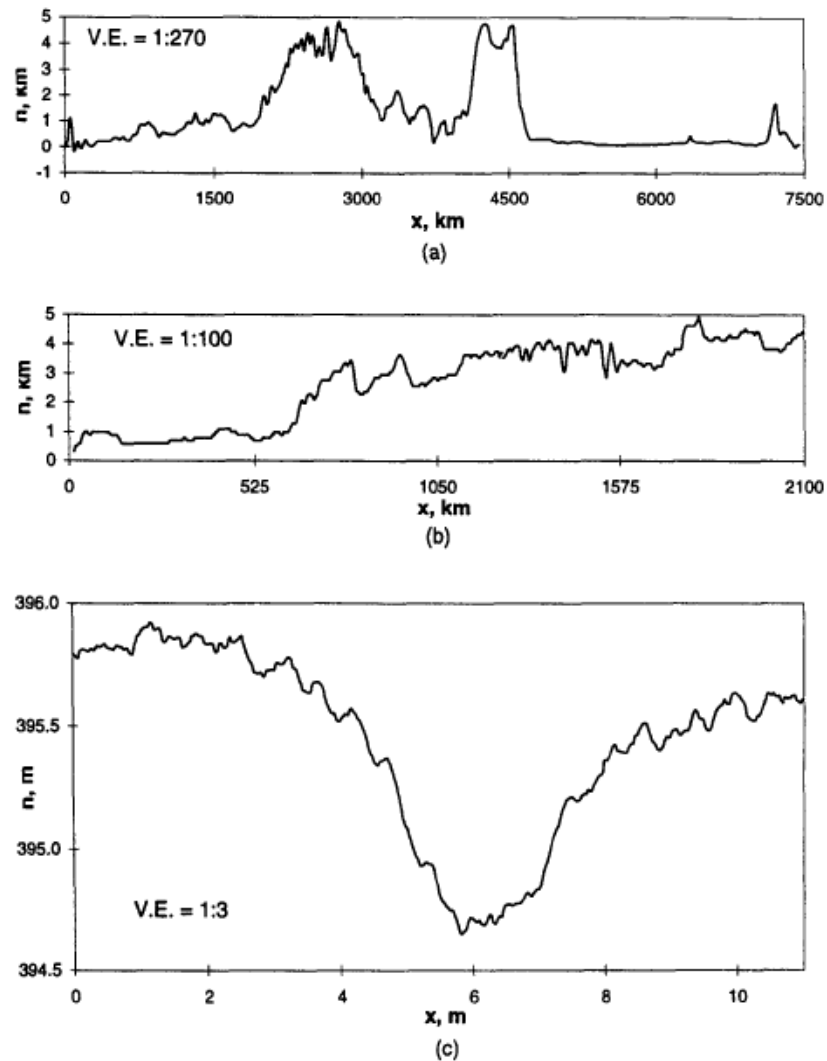


Fig. 23. Elevación n como una función de posición x a lo largo de un dirección lineal. Mostramos 3 ejemplos (a) Topografía de la tierra a lo largo de 7500km desde 70W, 55S a 70W, 12N (b) Topografía de Venus en Región Ovda (c) Elevación a lo largo de una pequeña quebrada en la Tierra

3.3. Patrones fractales en Geología Regional y Local

En **Geología Regional** podemos decir que una red hidrográfica de un sistema fluvial, o la disposición de coladas en un cono volcánico presentan un comportamiento fractal. En una red hidrográfica el proceso de ramificación y subramificación da su naturaleza fractal a los ríos. La morfología de las lavas

cordadas, o la distribución de precipitados minerales en cualquier cueva natural o antropica da lugar a formas fractales.

Si analizamos la **Geología Local** de un área, muchas veces es sencillo observar como, por ejemplo, un pliegue en un estrato se encuentra formado a su vez por pequeños micropliegues, y estos a su vez por otros, comportamiento que se da en un rango no muy reducido de escalas. Otros ejemplos se dan en los macizos fracturados. En estos casos se observara que existe un comportamiento repetitivo, una semejanza estadística en las estructuras que es invariante a los cambios de escala. Esto es una de las características que permite sugerir que nos encontramos ante un comportamiento fractal.

Cuando nos referimos a Geología Regional y Geología Local definimos el área a analizar. Podemos encontrar fractales tanto a nivel regional como a nivel local. Dependiendo el tamaño del objeto natural en el cual enfocamos nuestro análisis. Muchos fenómenos geológicos son de escala invariante. Por ejemplo la distribución frecuencia-tamaño de fragmentos de roca, fallas, sismos, erupciones volcánicas, depósitos minerales y depósitos de petróleo.

CAPITULO IV

ANALISIS FRACTAL EN GEOLOGIA

4.1 Algunos Métodos usados para un Análisis Fractal

El termino fractales abarca un amplio rango de objetos, desde repetir periódicamente formas que tienen una definición matemática exacta hasta patrones estocásticos de ocurrencia natural que solo pueden ser descritos de forma probabilística.

Como todos los conceptos matemáticos, los fractales son una abstracción. Muchos objetos naturales aparecen como fractales bajo ciertos rangos de escala, y sería muy útil considerarlos como fractales para intenciones de análisis o modelo. Sin embargo a diferencia de las abstracciones matemáticas, el fractal natural de objetos reales cambia o desaparece a alguna escala extrema.

Aunque la característica esencial de un objeto fractal es su dimensión, este atributo es difícil de definir en una manera aplicable universalmente. Una medida

de la dimensionalidad es aplicable a un objeto auto-similar compuesto de m copias de si mismo escalado por un factor r . Esta medida es llamada dimensión fractal de similaridad y está definido como: $D_s = -\log m / \log r$. Desafortunadamente, esta definición es útil solo para fractales construidos matemáticamente.

Un conjunto de métodos se ha ido desarrollando en las aplicaciones de todo tipo para estimar valores de la dimensión. Aquí solo mencionaremos algunos de estos métodos:

Método de la Regla o Compass

La forma más directa de estimar la dimensión fractal de una línea arbitraria, como la línea de costa de una isla o el margen de un poro de roca carbonatada visto en una microfotografía, es el método de la regla o compass. El contorno se aproxima por una serie de segmentos de línea recta de longitud constante.

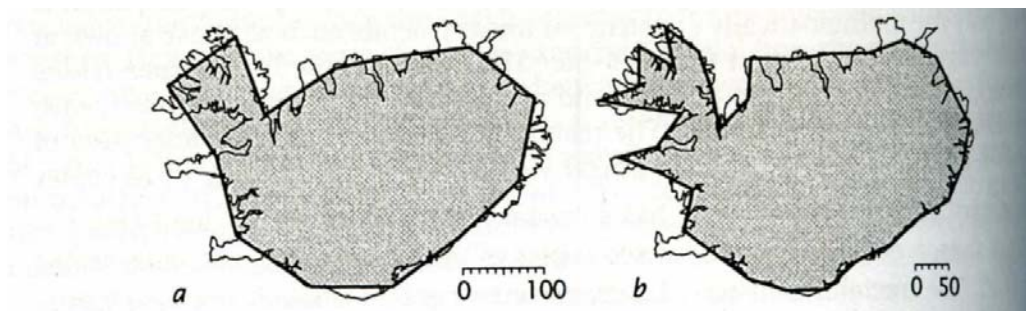


Fig. 24. Método de la regla para estimar la dimensión fractal

La figura 24 muestra la aplicación del método para la línea de costa en un mapa de Islandia. Usando una longitud de medida de 100km la línea de costa de Islandia se estima en 1400km. Si modificamos la longitud de medida a 50km la línea de costa

de Islandia se estima en 1650km. En la **tabla 6** mostramos las diferentes longitudes de medida usadas para circunscribir la línea de costa de Islandia.

Tabla 6: Estimando la dimensión fractal de la Costa de Islandia por el Método de la Regla

Longitud de línea de segmento, r	Numero de segmentos, n	Estimación de la longitud, nr	$\log 1/r$	$\log nr$
200	6	1200	-5.298	7.09
100	14	1400	-4.605	7.24
80	20	1600	-4.382	7.38
50	33	1650	-3.912	7.41
40	46	1840	-3.689	7.52
20	112	2240	-2.996	7.71

Nota que la longitud de medida, r , parece relacionado inversamente a la estimación del perímetro de la línea de costa, nr . Equivalentemente, se puede afirmar que hay una relación directa entre la resolución, $1/r$, y el perímetro. La relación entre la resolución y la longitud de la línea siendo medida es más aparente en un grafico bilogaritmico. (Ver figura 25).

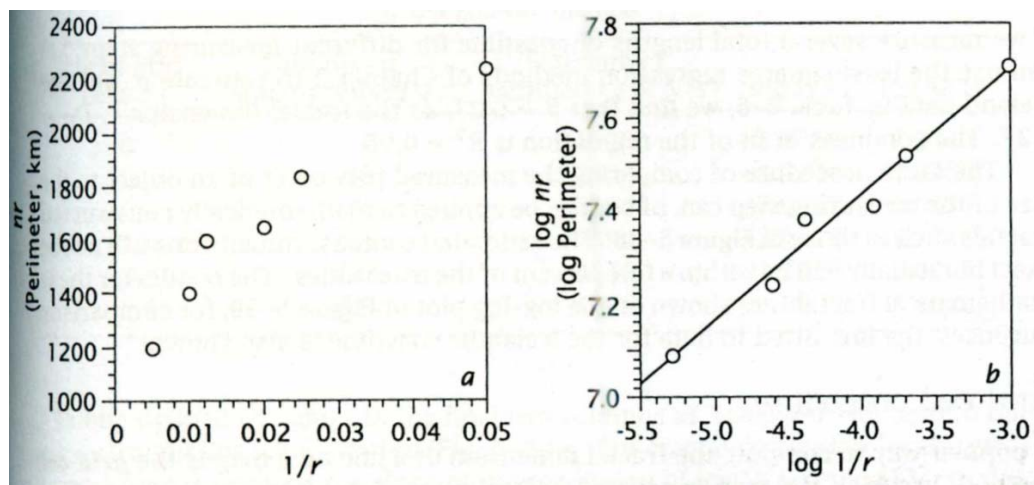


Fig. 25. (a) Perímetro (km) de la costa de Islandia vs resolución (inverso de la longitud).
(b) Logaritmo del perímetro vs logaritmo de la resolución

La relación entre la resolución y el perímetro estimado es más evidente en una escala logarítmica. Nosotros podemos usar esta relación para estimar la dimensión fractal. El procedimiento fue desarrollado originalmente por L.F. Richardson. Se trata de estimar la pendiente de una línea recta que fue ajustada mediante regresión. Es decir, nos ajustamos a la ecuación lineal: $\log nr = \alpha + \beta \log(1/r)$. La pendiente de esta línea, está relacionada a la dimensión fractal como: $D = 1 + \beta$.

Entonces para la línea de costa de Islandia, podemos encontrar $\beta = 0.27$, así la dimensión fractal es $D = 1.27$. El ajuste de regresión fue de $R^2 = 0.98$.

Método Celdas Cuadradas

Es uno de los métodos más usados para calcular la dimensión fractal de una línea en un mapa. Consiste en cubrir el mapa con una grilla cuadrada, y simplemente contar el número de cuadrados en la cual aparece la línea. La línea será vista en solo unos pocos cuadrados para una grilla gruesa, pero si los cuadrados de la grilla son más pequeños, nosotros contaremos un largo número de ellos que incluyan partes de la línea. Podríamos obtener un estimado de la longitud de la línea multiplicando el número de cuadrados ocupados por el tamaño del cuadrado. El tamaño de los cuadrados de grilla nosotros hemos ubicado sobre el mapa determina la resolución en cual la longitud de la línea es medida. **(Ver Figura 26)**

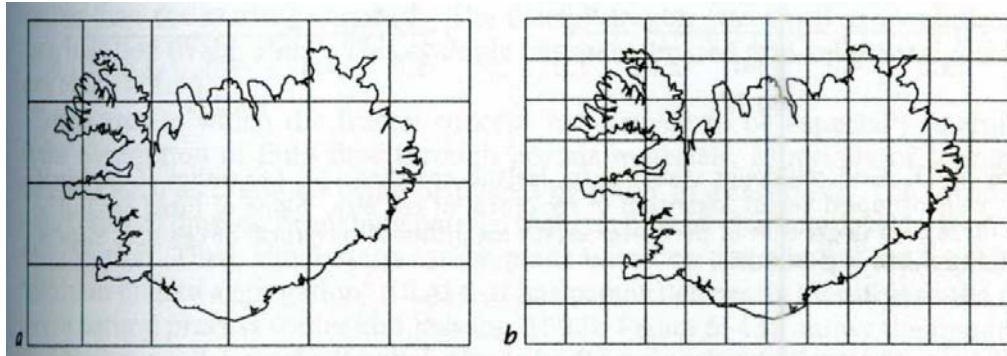


Fig. 26. Método Celdas Cuadradas para estimar la dimensión fractal. (a) Celdas cuadradas de 100km. (b) Celdas cuadradas de 50km

Del recuento del número de cuadrados que contienen parte de la línea de costa de Islandia, y para diferentes tamaños de cuadrícula, podemos construir **la tabla 7**, donde las dos últimas columnas contienen los logaritmos del inverso de tamaño de celda y el número de celdas.

Tabla 7: dimensión fractal de la Costa de Islandia por el Método Celdas Cuadradas

Tamaño de celdas cuadradas, s	Numero de celdas cuadradas N (s)	Estimación de perímetro s x N(s)	log 1/s	log N(s)
100	19	1900	-4.6052	2.9444
50	46	2300	-3.912	3.8286
20	155	3100	-2.9957	5.0434
11.5	321	3692	-2.4423	5.7714
5.7	743	4235	-1.7405	6.6107
2.85	1645	4688	-1.0473	7.4055

Si graficamos estas dos últimas columnas, veremos que tienden a caer a lo largo de una línea recta. La dimensión fractal de este método Celdas de cuadrícula será dado por la pendiente de la línea de regresión entre log N(s) y log (1/s).

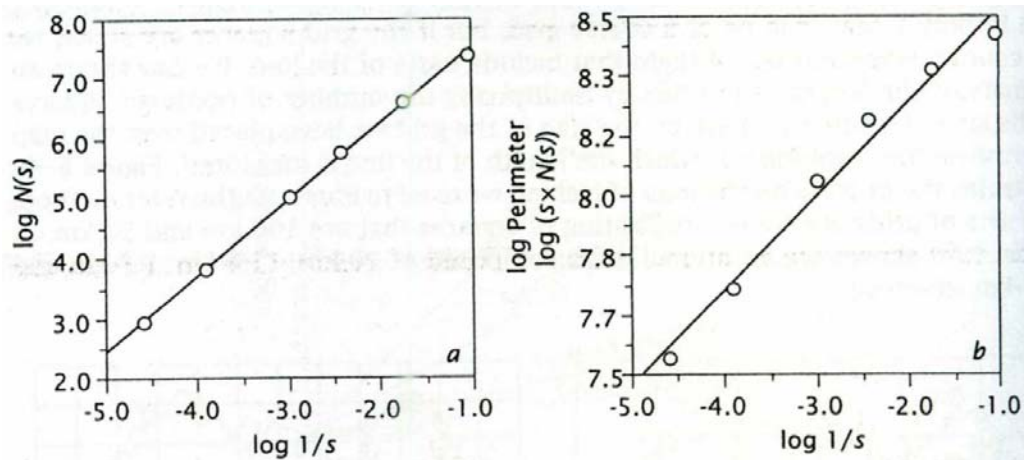


Fig. 27. Conteo estadístico de las celdas cuadradas para la línea de costa Islandia. (a) Logaritmo del número de celdas ocupadas vs Logaritmo del tamaño de celda recíproco, pendiente 1.26. (b) Logaritmo del perímetro vs logaritmo del tamaño de celda recíproco, pendiente 0.26

En este ejemplo, la línea de regresión es $\log N_{(s)} = 8.79 + 1.26 \log(1/s)$.

Entonces la dimensión fractal estimada de la línea de costa de Islandia es $D = 1.26$

Nosotros también podemos usar el método de Richardson para calcular la dimensión fractal si asumimos que el número de celdas multiplicado por el tamaño de celda representa el perímetro de línea y la resolución es $1/s$. Graficando en una escala logarítmica tendríamos la ecuación lineal $\log N_{(s)}s = \alpha + \beta \log(1/s)$. (Ver **figura 27**) Entonces la pendiente para esta otra gráfica sería $\beta = 0.26$, dando la misma dimensión fractal estimada de $D = 1 + 0.26 = 1.26$. El número pequeño de tamaños de celda usados en este ejemplo limita la exactitud de la computación.

Un fractal no necesita ser un único objeto contiguo. Una imagen consistente de líneas como trazas de fracturas puede tener una dimensión fractal.

Un área en cual el concepto fractal ha sido probado ser específicamente útil es en la descripción de un flujo de fluido a través de materiales porosos, especialmente fluidos inmiscibles como el petróleo siendo desplazado por agua en un reservorio. La invasión de agua forma un complejo patrón de ramificación que puede ser mejor caracterizado por su dimensión fractal.

Método Espectral

Los métodos de la transformada de Fourier nosotros usamos para análisis espectral. El análisis espectral ha sido ampliamente usado para estimar la dimensión fractal de perfiles topográficos y batimétricos, y perfiles de la textura en superficie de suelos y planos de fractura (Gallant y otros, 1994). Dichos perfiles son ideales para el análisis espectral pues los registros casi nunca se valoran dobles.

El primer paso consiste en calcular un periodograma de la línea perfil. Entonces, el logaritmo de la potencia, s_k^2 , es graficado contra el logaritmo del inverso del número armónico, k . La pendiente de la regresión lineal de $\log s_k^2$ en $\log(1/k)$ da un estimado de la dimensión fractal, D_F : $D_F = \frac{5-\beta}{2}$. Donde β es el coeficiente encontrado para la pendiente estimada por la regresión. **Ver figura 28**

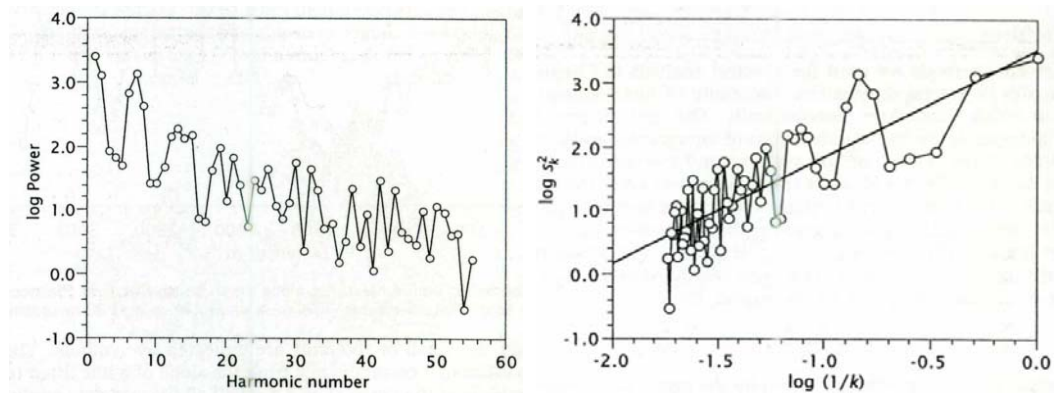


Fig. 28. (a) Periodograma de un perfil topográfico (b) Logaritmo de poder vs logaritmo de $1/k$ (inverso del número de onda) con pendiente 1.69

4.2 Análisis Fractal en Tectónica y Sismología

Los terremotos presentan tantas propiedades fractales, que constituyen uno de los fenómenos fractales más interesantes y más estudiados (Takayasu, 1990). Dos de las leyes empíricas más analizadas en sismología matemáticamente se describen como leyes de potencia: la ley de Omori (Omori, 1894) y la ley de Gutenberg y Richter o Isimoto-Aida (Gutenberg y Richter, 1944). Estas leyes de escalado, describen a los terremotos como fractales en el tiempo y en el espacio.

La ley de Gutenberg y Richter está relacionada directamente con la dimensión fractal de la distribución espacial de epicentros (Aki, 1981, King, 1983, Hirata, 1989), en concreto con la denominada *dimensión de recubrimiento* y la *dimensión de correlación*. Además, el exponente crítico, el *parámetro b*, que describe la distribución de tamaños de terremotos, está relacionado directamente, con la dimensión fractal de la distribución del tamaño de las fallas sismogénicas.

Muchas regiones del mundo tiene redes sísmicas densas que pueden monitorear terremotos de magnitud tan pequeña como dos o menos. La red sísmica mundial es capaz de monitorear terremotos que se producen en cualquier parte del mundo, con una magnitud superior a cuatro. Varias correlaciones estadísticas se han utilizado para relacionar la frecuencia de ocurrencia de terremotos con su magnitud, pero la más aceptada es la relación logarítmica lineal: $\log N = -bM + a$ (Gutenberg and Richter, 1954). Donde b y a son constantes, N es el número de sismos por unidad de tiempo con una magnitud mayor que M producida en un área específica.

La relación frecuencia-magnitud es aplicable sobre un amplio rango de tamaños de terremotos a nivel local y global. La constante b varía de región en región pero esta generalmente entre 0.8 y 1.2. La constante a es una medida del nivel de sismicidad regional.

La dimensión fractal de la actividad sísmica regional o mundial es simplemente el doble del valor b . La relación empírica frecuencia-magnitud dada es totalmente equivalente a una distribución fractal (Aki, 1981) **Figura 29**.

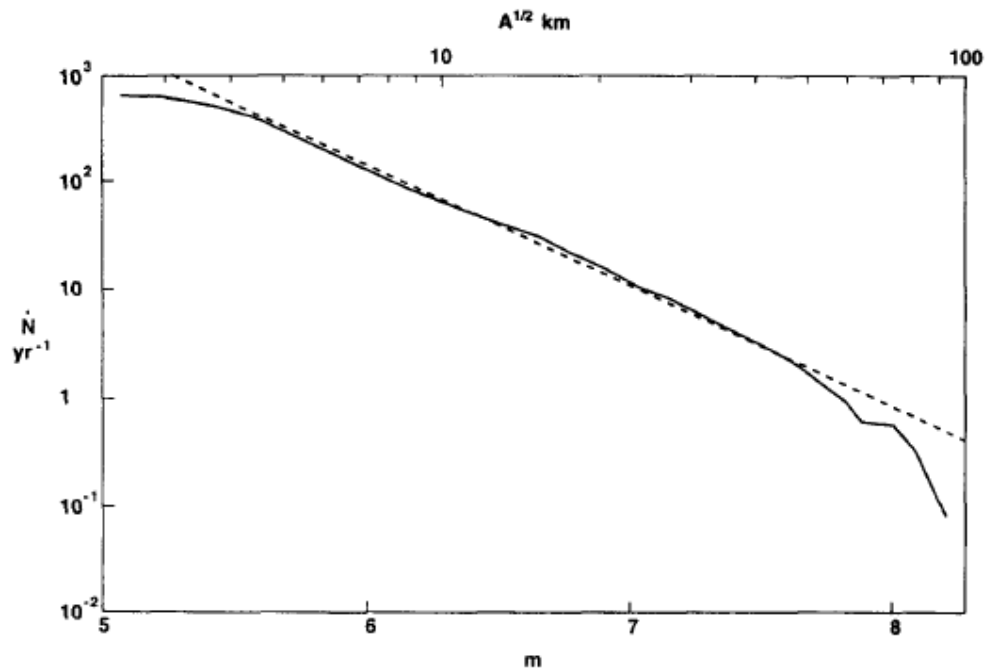


Fig. 29. Numero de sismos mundial por año, N , con magnitudes mayores a m como una función de m . La línea sólida es la distribución acumulada de magnitudes de momento del Catalogo Harvard Centroid Moment Tensor para el periodo enero 1977 a junio 1989 (Frohlich & Davis, 1993). La línea segmentada representa la ecuación de Gutenberg con $b=1.11$ ($D=2.22$) y $a=6 \times 10^8 \text{ yr}^{-1}$

4.3 Análisis Fractal en Drenaje Superficial

Relieve evoluciona como resultado de los procesos tectónicos que se produce en ellos y los procesos erosiónales que destruyen ellos. Relieves son un ejemplo clásico de un fenómeno complejo que puede ser cuantificado usando conceptos fractales.

En los procesos que afectan en la geomorfología debemos considerar las redes de drenaje. Sobre una gran fracción de áreas de tierra, el agua fluye hacia el océano. El area superficial que drena al océano a través de un rio define la cuenca de ese rio. Torrentes pequeños se unen a torrentes más largos, torrentes largos se unen para formar ríos, y así sucesivamente. Un típico ejemplo de redes de drenaje es

dado en **Figura 30**. Mucho antes que cualquier concepto de fractal o árbol de fractales fuera introducido, un sistema de flujo ordenado fue introducido por Horton (1945) y Strahler (1957). (**Figura 31**).

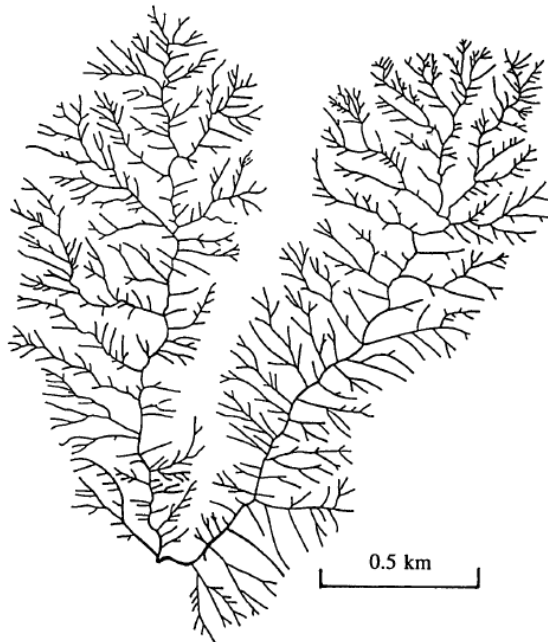


Fig. 30. Red de drenaje en los cañones de Volfe y Bell, Montañas de San Gabriel, cerca de Glendora, California, obtenido del mapeo de campo (Maxwell, 1960).

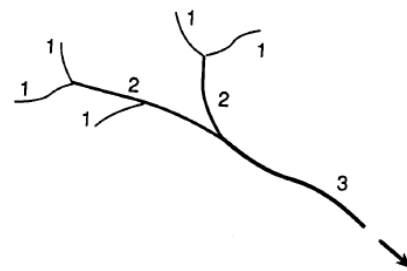


Fig. 31. Ilustración de Strahler (1957) sistema ordenado de la corriente.

En este sistema las corrientes de un mapa topográfico estándar que no tienen afluentes aguas arriba se definen como corrientes de primer orden ($i=1$). Cuando dos corrientes de primer orden se combinan forman una corriente de segundo orden ($i=2$). Cuando dos corrientes de segundo orden se combinan forman una corriente de tercer orden ($i=3$), y así sucesivamente. Notar que una corriente de primer orden puede también juntarse con una de segundo orden, tercer orden, y otras de mayor orden. Del mismo modo corriente del segundo orden pueden

juntarse con corrientes del tercer orden y así sucesivamente. Nos referiremos a estos como afluentes secundarios.

Horton (1945) definió la relación de bifurcación como $R_b = N_i/N_{i+1}$ donde N_i representa el número de corrientes de orden i . Es la relación entre el número de corrientes de un orden y el número de corrientes del siguiente orden mayor. Horton también introdujo la relación longitud orden, definido como $R_r = r_{i+1}/r_i$ donde r_{i+1} representa la longitud media de corrientes de orden $i+1$.

Empíricamente, ambos R_b y R_r son encontrados a ser casi constantes para un rango de ordenes de corriente en alguna cuenca de drenaje dada. Estas son conocidas como las leyes de Horton. Tomando la definición de dimensión fractal $D = \frac{\ln(N_i/N_{i+1})}{\ln(r_{i+1}/r_i)}$ es decir $D = \frac{\ln R_b}{\ln R_r}$. Parámetros normales del orden de corrientes están directamente relacionados a la dimensión fractal de la red. La validez de la ley de Horton implica que las redes de drenajes son arboles fractales.

En la Figura 32 se muestra la dependencia del número de corrientes de varios órdenes con su longitud media para la red de drenaje de la Figura 30.

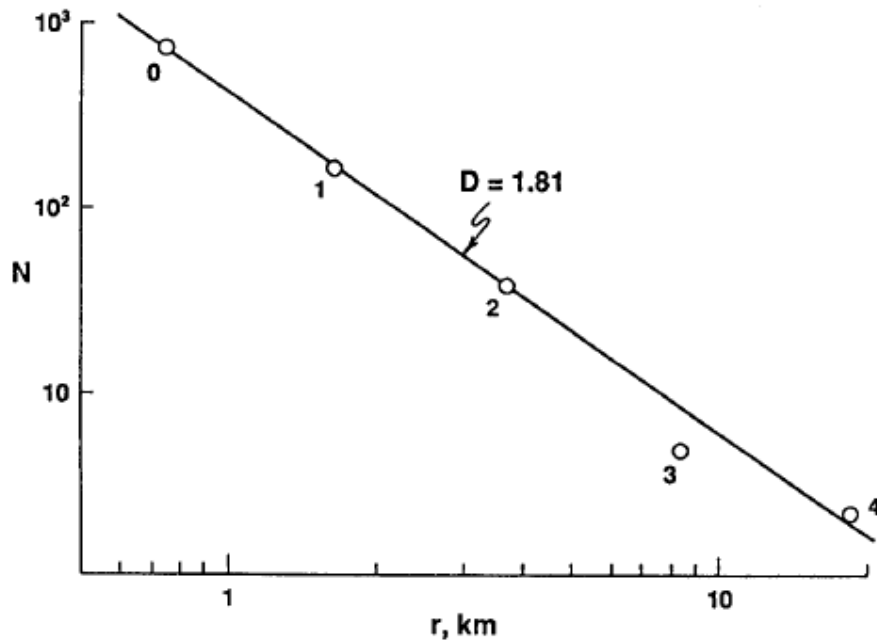


Fig. 32. Dependencia del número de corrientes N de varios ordenes 0-4 con su longitud promedio r para el ejemplo mostrado en la figura 30. La regla de poder, línea recta correlaciona tomando $D=1.81$.

Las corrientes más pequeñas en este mapa basadas en estudios de campo son de un orden menor que las corrientes más pequeñas en el mapa topográfico de esta región; referiremos a estas corrientes como corrientes de orden 0. Las corrientes de mayor orden en esta región son de cuarto orden. Se observa que los resultados correlacionan bien con la ecuación $D = \frac{\ln(N_i/N_{i+1})}{\ln(r_{i+1}/r_i)}$ tomando $D=1.81$.

4.4 Análisis fractal de la ley del mineral y su tonelaje

Cargill y otros autores (1980, 1981) han sugerido que la relación fractal puede ser aplicado a la relación entre tonelaje y ley en depósitos de minerales económicos.

Tratamientos estadísticos de la ley del mineral y el tonelaje de los depósitos minerales económicos han servido de base para la estimación de reservas de mineral. El objetivo es determinar el tonelaje de mineral con leyes por encima de un valor específico.

Lasky (1950) argumenta que la ley del mineral y el tonelaje obedecen a una distribución log-normal. Sin embargo otros autores han sugerido una distribución fractal (relación lineal). Una relación fractal sería esperada si los mecanismos de concentración tienen escala invariante. Sugieren que la relación lineal es obtenida si el logaritmo del tonelaje es graficado con el logaritmo de la ley media. Un modelo simple que da este resultado fue propuesto por Turcotte (1986). La relación fractal entre ley de mineral y tonelajes es:

$$\frac{C}{C_0} = \left(\frac{M_0}{M}\right)^{\frac{D}{3}}; M = M_0 \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{3}{D}}$$

Donde M es la masa de la ley mineral más alta, con una concentración media C. La referencia M_0 es la masa de la roca del cual el mineral fue obtenido, con una concentración media C_0 . Como todas las distribuciones fractales que ocurren naturalmente, hay límites en la aplicación de la relación fractal. El límite inferior en

la ley del mineral es C_0 . El límite superior es C que no puede exceder la unidad, que correspondería a mineral puro.

Usando los registros de producción de oro en vetas, Cargill (1981) mostro datos acumulados de producción de oro en vetas en los Estados Unidos. Los puntos graficados en la **Figura 33** representan la ley promedio acumulada en cinco años versus el tonelaje acumulado de mineral para el periodo 1906 – 1976.

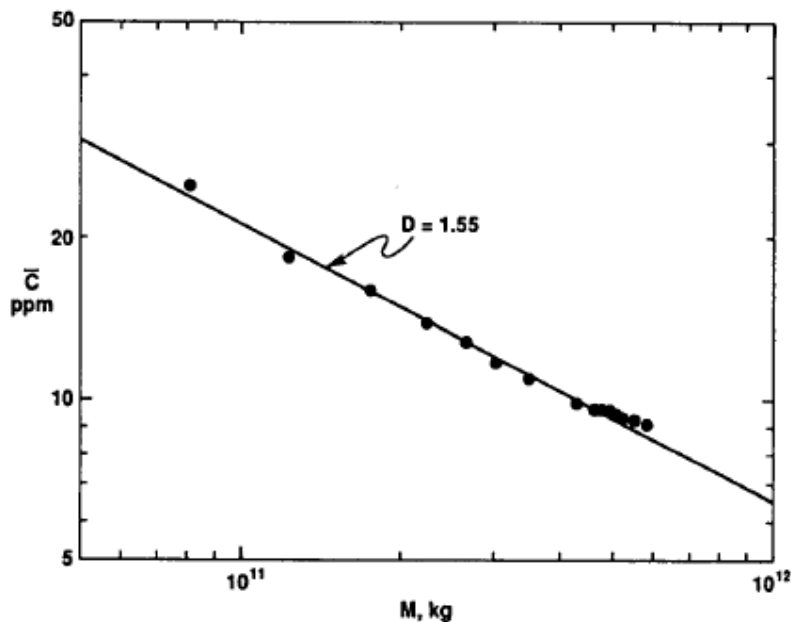


Fig. 33. Dependencia del tonelaje de mineral acumulado M con ley media C para producción de oro en veta en los Estados Unidos (Cargill, 1981). Correlaciona con la ecuación dando $D=1.55$. Una buena correlación con la relación fractal es obtenida usando $D=1.55$. La

concentración media de la corteza es introducida como una referencia de concentración. Tomando $C_0 = 3\text{ppb}$ (Taylor and McLennan, 1985) para el oro, encontramos que la correlación lineal de la **Figura 33** está dada por:

$$M = 3 * 10^{18} \left(\frac{3 * 10^{-9}}{C} \right)^{1.94}$$

Con M en kilogramos. De acuerdo con el modelo fractal de oro en vetas en los Estados Unidos se ha concentrado a partir de una masa de la corteza continental de $3 \cdot 10^{18}$ kg. Suponiendo una densidad media de la corteza de $2.7 \cdot 10^3$ kg/m³, el oro se concentro de un volumen de corteza de 10^6 km³ o sobre el 0.4 por ciento del volumen total de la corteza.

4.5 Análisis Fractal en Topografía

La Topografía es un ejemplo de fractales auto-similares y fractales auto-afines. Un mapa topográfico es usualmente un ejemplo de fractal auto-similar. Una sección transversal del mapa topográfico con elevación graficada versus la posición a lo largo de una trayectoria lineal no es un fractal auto-similar, sin embargo; es usualmente un fractal auto-afín.

Métodos espectrales son generalmente aplicados a fractales auto-afines. Considerar la serie senoidal de Fourier para la altura de la topografía $h(x)$ a lo largo de una trayectoria lineal de longitud L. La representación Fourier es:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right); \lambda_n = \frac{L}{n}$$

Donde L es la longitud de la trayectoria, A_n es la amplitud asociada con la longitud de onda λ_n . Con $n = 1, 2, \dots$ El perfil es un fractal si los coeficientes de amplitud A_n tienen una distribución de ley de potencia con las longitudes de onda λ_n . Esto sería:

$$A_n = C \lambda_n^{\frac{5-2D}{2}}$$

Donde C es una constante. Esta relación se deriva del recuento de número de cajas rectangulares de diferentes tamaños que se requieren para cubrir el perfil (Voss, 1988).

Una expansión espectral global de la topografía y batimetría fue llevada a cabo por Rapp (1989); sus resultados los vemos en la figura 34. Donde observamos que la

ecuación $A_n = C \lambda_n^{\frac{5-2D}{2}}$ concuerda bien con los datos cuando $D = 1.5$ y $A_n = 10^{-4} \lambda_n$.

La dimensión fractal de la topografía está generalmente cerca a 1.5, siendo una medida de la rugosidad de la topografía.

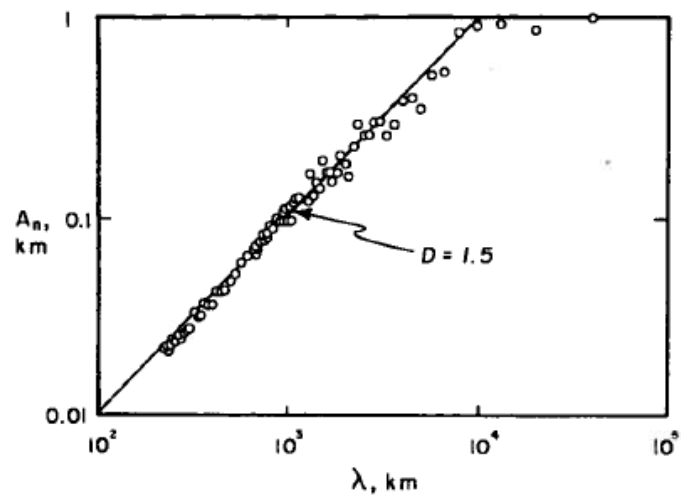


Fig. 34. Dependencia de los coeficientes de amplitud A_n con las longitudes de onda para la topografía de la Tierra. (Rapp, 1989.)

CAPITULO V

ALGUNAS APLICACIONES DEL ANALISIS FRACTAL

5.1 Delineación y explicación de anomalías geoquímicas usando modelos fractales en el área de Heqing, Provincia de Yunnan, China

En esta publicación de una revista de exploración geoquímica se utilizan 2 modelos fractales para determinar el threshold de las anomalías geoquímicas de las muestras de stream sediment, el modelo Concentration-Area y el modelo Number-Size. Los threshold obtenidos de los 2 modelos son muy parecidos y definen la distribución de elementos en 3 grupos, cada uno de los cuales es principalmente correlacionado a un tipo de roca. Esta publicación revela que varios eventos geológicos pueden ser caracterizados por los diferentes modelos fractales de distribución de elementos.

La aplicación de los modelos fractales también sugiere que la diferente intensidad de mineralización puede ser distinguida por la distribución fractal de los objetos

geológicos. Entonces, con el incremento de mineralización, las dimensiones de los modelos fractales de la ley, espesor de venillas, y densidad de estructuras regional tienden a ser más pequeñas. La dimensión más pequeña denota una mayor proporción de los objetos con mayor intensidad o densidad.

El modelo fractal Number-Size fue usado para describir la distribución geoquímica sin tener en cuenta la distribución espacial. El modelo es expresado por: $N_{(\geq r)} = cr^{-D}$ Donde r es la concentración del elemento; $N_{(\geq r)}$ es la frecuencia acumulada de la concentración del elemento más grande o igual a r ; c es una constante, y D es el exponente de escala o dimensión fractal de distribución de la concentración.

El modelo fractal Concentration-Area fue usado para analizar la estructura en mapas geoquímicos, en el mapa el área $A_{(r \geq r_i)}$ encerrado por contornos con concentración r_i tiene una relación power-law con r_i como sigue: $A_{(r \geq r_i)} = cr_i^{-D}$ Donde D es la dimensión fractal para el modelo Concentration-Area.

Ambos modelos en una escala bilogarítmica muestran gráficas que se aproximan a líneas rectas con pendiente $-D$.

Las distribuciones de concentración de varios elementos han mostrado tener características bifractales. Las gráficas en coordenadas logarítmicas se ajustan a 3

segmentos de línea para la mayoría de los elementos y 2 segmentos de línea para unos pocos elementos. Los modelos fractales N-S, C-A pueden observarse en las figuras 35a, 35b. Los thresholds y las dimensiones fractales obtenidas pueden encontrarse en la tabla 8.

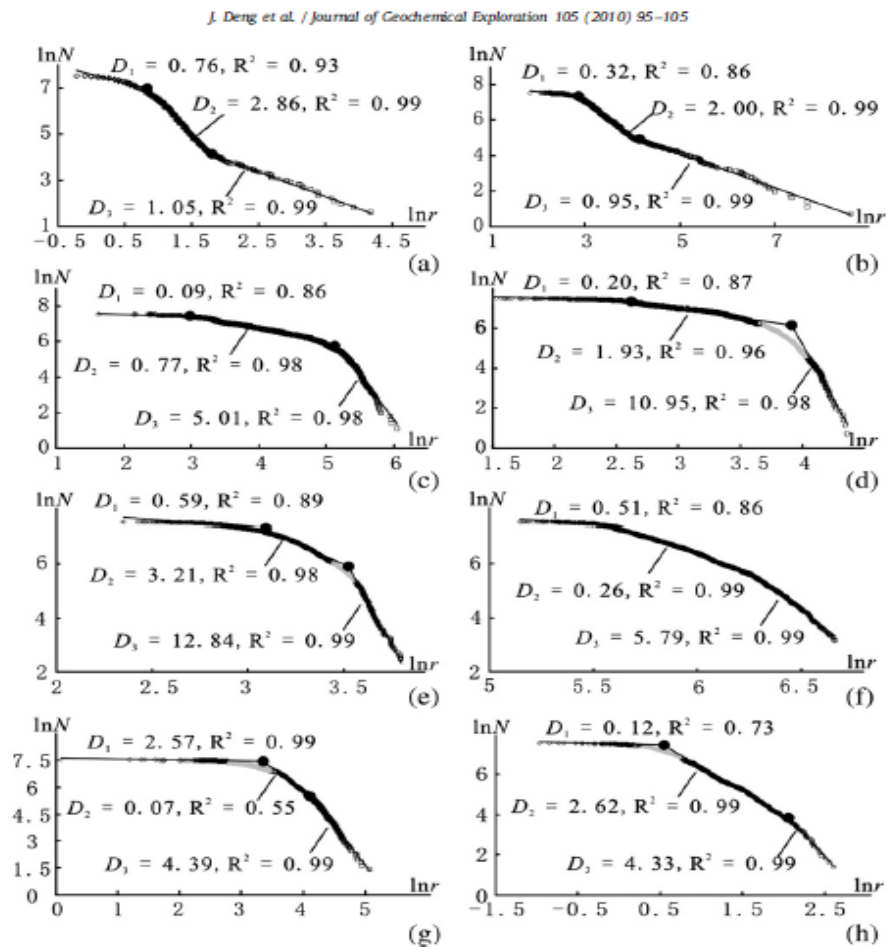


Fig. 35a. Modelo N-S de los elementos típicos en el área Heqing, Provincia Yunnan, China.
 (a) Au, (b) Pb, (c) Cu, (d) Co, (e) Y, (f) Zr, (g) U, (h) Li.

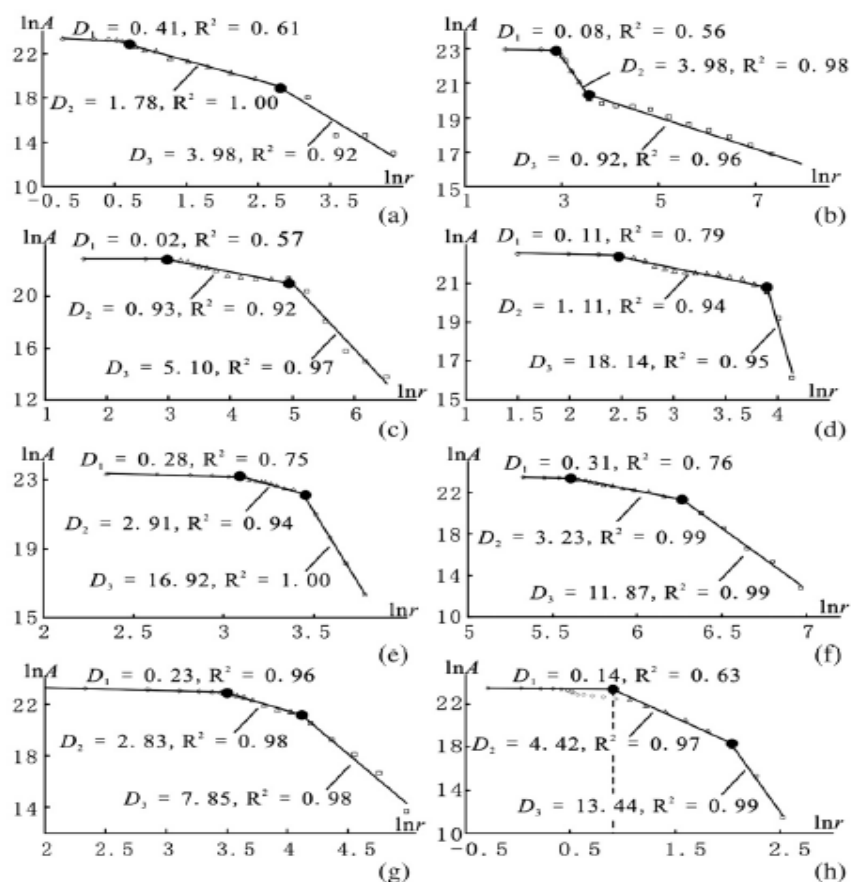


Fig. 35b. Modelo C-A de los elementos típicos en el area Heqing, Provincia Yunnan, China.
(b) Au, (b) Pb, (c) Cu, (d) Co, (e) Y, (f) Zr, (g) U, (h) Li.

Table 2
Thresholds and fractal dimensions of the N-S and C-A models of the typical elements in the Heqing area, Yunnan Province, China.

Element	T_1	D_1		T_2		D_2		T_3		D_3		r_{\max}
		N-S	C-A	N-S	C-A	N-S	C-A	N-S	C-A	N-S	C-A	
Au	0.8	0.76	0.41	2.3	2.03	2.86	1.78	6.1	24.4	1.05	3.98	120
Pb	6.3	0.32	0.08	17.2	17.2	2.00	3.98	62	45.8	0.95	0.92	5686.5
Cu	5.1	0.09	0.02	24.4	19.5	0.77	0.93	173.3	140.6	5.01	5.1	1333.3
Co	4.5	0.2	0.11	11.9	13.7	1.93	1.11	49	55.7	10.95	18.14	81.1
Y	10.5	0.59	0.28	22.1	22.06	3.21	2.91	33.2	31.36	12.84	16.92	64.7
Zr	172	0.51	0.31	272	271.99	2.6	3.23	526	525.98	5.79	11.97	1260
U	1.1	0.07	0.23	1.6	1.9	2.57	2.83	7.6	7.6	4.39	7.85	185.7
Li	0.38	0.12	0.14	31.8	33.1	2.62	4.42	57.1	57.1	4.33	13.44	16.19

r_{\min} and r_{\max} represent the element minimum and maximum concentrations respectively. The bold italicized numbers denote the thresholds used in this paper.

El modelo fractal N-S para el Au comprende 3 segmentos de línea en coordenadas bilogarithmicas. Las concentraciones en el segmento 1 están distribuidas en estratos Jurasicos y Cretácicos con una dimensión fractal relativamente pequeña. El segmento 2 esta principalmente distribuido en el Triásico en la parte Este, rocas maficas Emeishan en la parte central y en lugares donde las intrusiones magmaticas se desarrollan en la parte SE, la dimensión fractal es mayor que en el primer segmento. El segmento 3, corresponde a áreas mineralizadas alrededor del depósito Beiya, con una dimensión fractal menor muestra que las leyes altas dominan en las áreas mineralizadas.

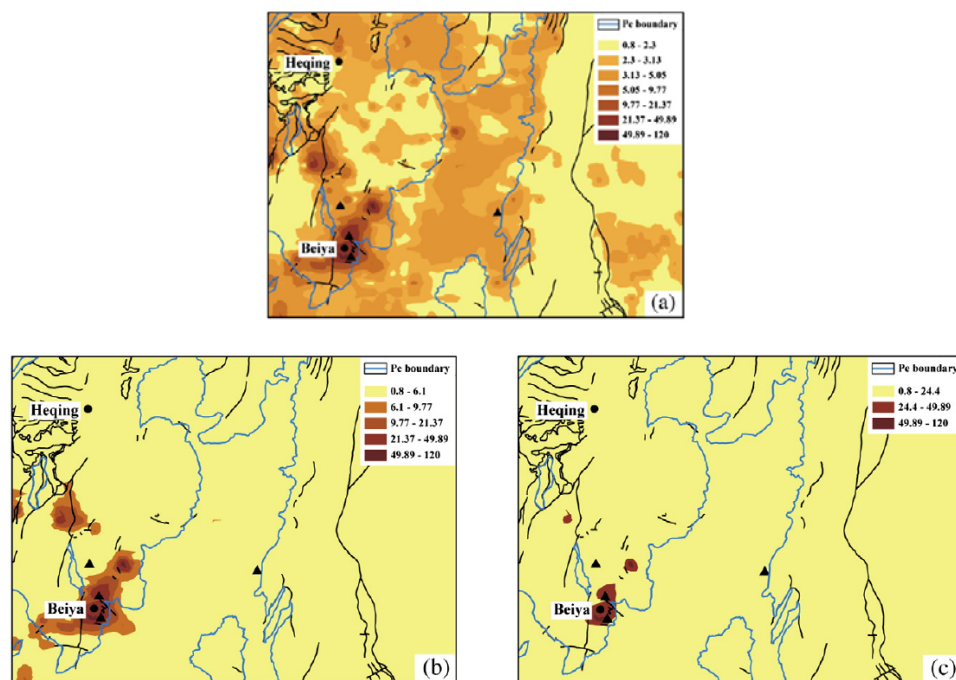


Fig. 36 Contornos de Anomalia de Au (a) Anomalia de Au con primer threshold en el modelo N-S (b) Anomalia de Au con segundo threshold en modelo N-S (c) Anomalia de Au con segundo threshold en el modelo C-A

El modelo fractal C-A de Au comprende también 3 segmentos de línea en coordenadas bilogarithmicas. La dimensión fractal incrementa del segmento 1 hacia el segmento 3, indicando que conforme aumenta el contornos de concentración, el área encerrada decrece, más rápidamente en la zona mineralizada que en la zona no mineralizada.

La dimensión fractal obtenida de los diferentes modelos son diferentes, y ellos pueden revelar la distribución de la data desde diferentes perspectivas.

El area de Heqing, localizado en la cordillera de Sanjiang, China, comprende el yacimiento polimetálico de oro de Beiya relacionado a pórfidos alcalinos, series de rocas maficas volcánicas Emeishan y series sedimentarias. La explicación y delineación de las anomalías geoquímicas en la región pueden proveer importante información para entender los sistemas de mineralización de la región Heqing. 2 modelos fractales fueron aplicados en la determinación del threshold geoquímico.

De acuerdo con los thresholds, la concentración de elementos puede ser dividida dentro de 3 segmentos de concentración o población, cada uno de los cuales esta generalmente distribuido en el área dominado por un solo tipo de evento geológico. Además, indica que las series sedimentarias, rocas volcánicas y eventos de mineralización se caracterizan por los diferentes patrones fractales de la distribución de elementos.

5.2 Análisis fractal como discriminación de sistemas filonianos auríferos (La_Codosera, España)

El área de La Codosera, situada en el borde sur de la Zona Centro-Ibérica, próxima al límite con Ossa Morena (**Figura 37**); puede considerarse como una zona de transición entre ambos terrenos. Las rocas del Complejo Esquisto Grauvaquico (CEG) (Precámbrico Superior-Cámbrico Inferior) ocupan los núcleos de los anticlinales y son las más antiguas del área. El Paleozoico (Ordovícico Inferior-Devónico Medio) queda restringido a estrechos sinclinales. El batolito de Albuquerque intruye principalmente en los materiales del CEG y hacia el Oeste atraviesa el sinclinal de La Codosera. La integración de las características geoquímicas de los fluidos mineralizadores (Robert, 1991) en un modelo geométrico “domino” de fracturación tardihercínica, en un contexto transpresivo (Sanderson, 1991) que explica la evolución estructural de ese sector, está siendo muy útil en la exploración minera de la región. La Tipología de los yacimientos, *Gumiel (1991)*, tiene en cuenta que las mineralizaciones de oro se concentran en zonas favorables (zonas de dilatación) en determinadas estructuras (fallas de extensión), y si las condiciones son idóneas, se pueden desarrollar sistemas filonianos.

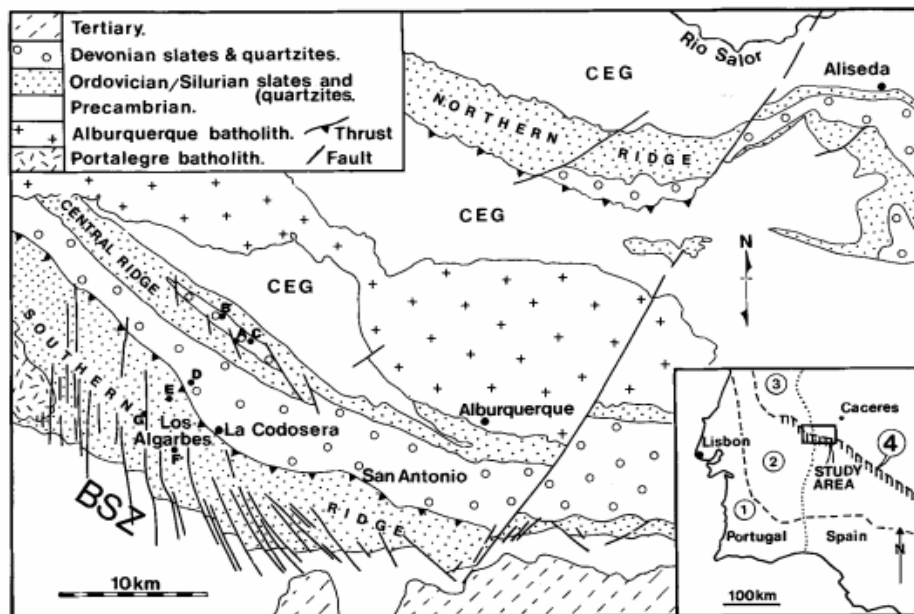


FIG. 1. Location map and geological outline of the La Codosera area. Inset shows the locations of terrain boundaries: South Portuguese Zone (1); Ossa-Morena Zone (2); Central Iberian Zone (3); B.S.Z. Badajoz Shear Zone (4 on inset). Central Ridge Prospects: A = Chirriato; B = Peñon; C = the 100 m E-W Vcin. Los Algarbes area prospects: D = Perla de Anibal; E = Portilla Larga; F = Los Algarbes; G = Portilla Arriba. Zone Central Iberia (3); Zone Badajoz Shear (4).

La organización y distribución de los diferentes sistemas filonianos que existen en el área, presentan una característica común que es su irregularidad. Si analizamos a detalle esa irregularidad podríamos discriminar cuales son los conjuntos de venas auríferas y porque la precipitación y concentración metálica en oro se produce en unos y no en otros grupos de venas. Esta irregularidad de los diferentes conjuntos filonianos la podríamos cuantificar mediante un análisis fractal, al obtener su dimensión fractal.

Sanderson y otros autores comprueban que los espesores de las venas en el área de La Codosera muestran distribuciones bilogarítmicas de influencia (power law) que pueden interpretarse como el resultado de geometrías fractales auto-afines. Se

ha elegido el espesor de las venas porque es una dimensión lineal que se puede medir directamente y porque refleja el gradiente de desplazamiento (apertura).

Aplicando la relación fractal: $N_{(t)}=Ct^{-D}$, donde N es la frecuencia acumulada del numero de venas con espesor > que t, C es una constante de proporcionalidad, t el espesor y D la dimensión fractal. Se obtuvo que la dimensión fractal D de los sistemas filonianos con mineralización de oro es menor que la de los sistemas estériles. Esto aplica para diferentes intervalos de sondeo así como para el total del mismo. También es extensivo en afloramientos, mediante toma de datos en transversales a los diferentes conjuntos filonianos. (Figura 38a, Figura 38b)

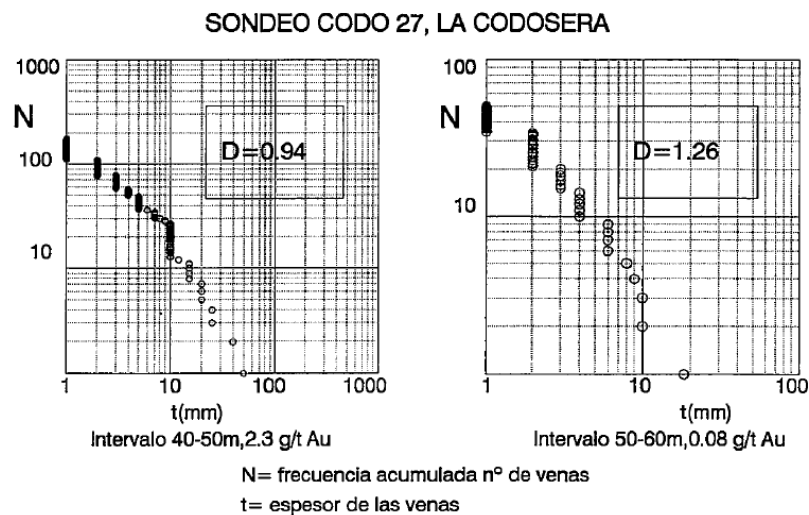


Fig. 4.—Diagramas log-N logt por intervalos de sondeos, La Codosera.

Fig. 4.—logN-logt drill-core intervals diagram, La Codosera.

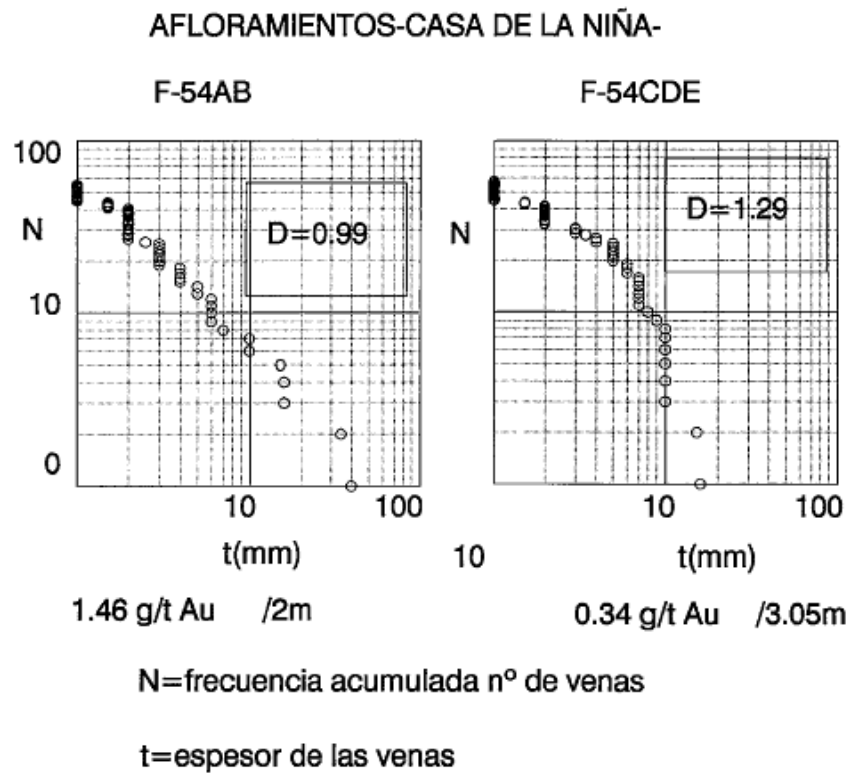


Fig. Fig. 5.—Diagrama logN-logt del análisis de venas en afloramientos de La Casa de La Niña, La Codosera.

Fig. Fig. 5.—logN-logt diagram of the vein analysis in outcrops of the Casa de La Niña, La Codosera.

Las vetas de oro muestran valores más bajos D que las venas estériles y los altos valores de C estas asociados con leyes más altas. En resumen, el análisis de la geometría fractal en venas, a partir del estudio de testigos de sondeo y en afloramientos permite la caracterización de los diferentes grupos de venas mediante sus parámetros escalares C y D.

5.3 Análisis Fractal de Principales Fallas en India a Escala Regional

El concepto de fractal ha sido aplicado en varios campos, incluyendo análisis en la distribución de las fallas. La dimensión fractal D_f de las fallas ha sido relacionado cuantitativamente con la sismicidad como $D_f = 2b$, donde b es la pendiente de la distribución frecuencia-magnitud (Turcotte, 1989; Gutenberg and Richter, 1944).

Para examinar las características fractales de las principales distribuciones de fallas, en la India, emplearon el método box-counting de forma tal que cuantifican los patrones tectónicos predominantes.

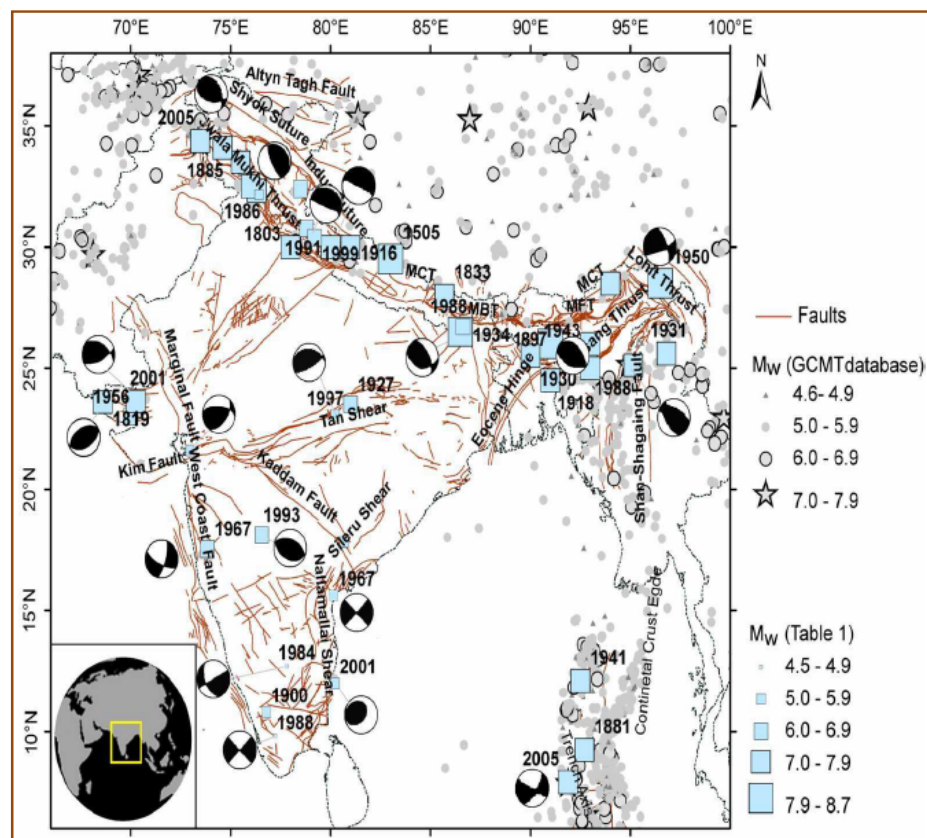


Fig. 39 Mapa sismo-tectónico de la India.

En el mapa la mayoría de las actividades sísmicas son atribuidas a la convergencia de las placas tectónicas India-Eurasia que describen la extensión de la región Himalaya. Mientras las partes norte de la llanura Indo-Gangetica y la península precámbrica India muestran una sismicidad baja a moderada (Dasgupta et al. 2000; Kayal, 2008).

Una estructura auto-similar siguiendo una distribución fractal exhibiría una relación de Ley de potencia entre el número de objetos más grandes que un tamaño específico y el mismo tamaño de tal manera que: $N_{(r)} \sim r^{(-D)}$. En el método box-counting para análisis de fallas, $N_{(r)}$ es el número de cuadros que contiene una línea de falla y D es la dimensión fractal o más específicamente una dimensión de capacidad (Mandelbrot, 1983). En el caso de un sistema de fallas, el cálculo implica la división de un área cuadrada de longitud R que encierra el sistema en una cuadrícula regular de cuadrados de longitud r (Hirata, 1989). Después de esto la dimensión fractal se estima como la pendiente del ajuste lineal en la grafica entre $\log N_{(r)}$ y $\log r$.

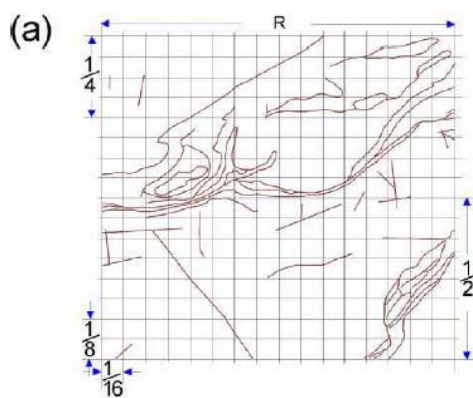


Fig. 40a Imagen de entrada dividida en una cuadrícula regular

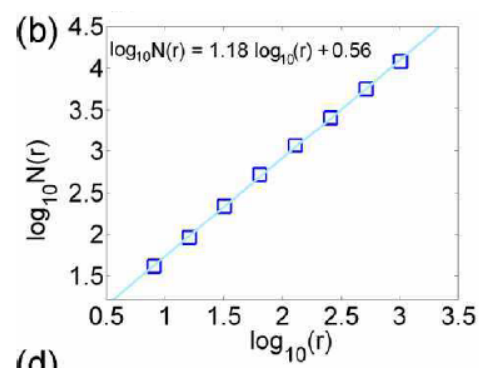


Fig. 40b Ajuste Lineal para estimar la dimensión fractal

La Figura 40a representa una imagen de entrada dividida en una cuadrícula regular a diferentes escalas. La Figura 40b representa el ajuste lineal entre $\log N(r)$ y $\log r$, usado para estimar la dimensión fractal.

Hirata (1989) clasifico los mapas como mapas con mega-fallas Tipo I y mapas sin mega-fallas Tipo II. Dimension fractal estimada del mapa para mega-fallas cuantifica la geometría de la falla y la Dimensión fractal estimada del mapa sin mega-fallas proporciona la medida de la distribución espacial y la geometría de la falla. En el caso de la India predomina un mapa sin mega-fallas (Tipo II). La distribución espacial de la dimensión fractal estimada se muestra en la Figura 40c, donde los valores varían desde 0.88 hasta 1.36 a lo largo de la región de estudio.

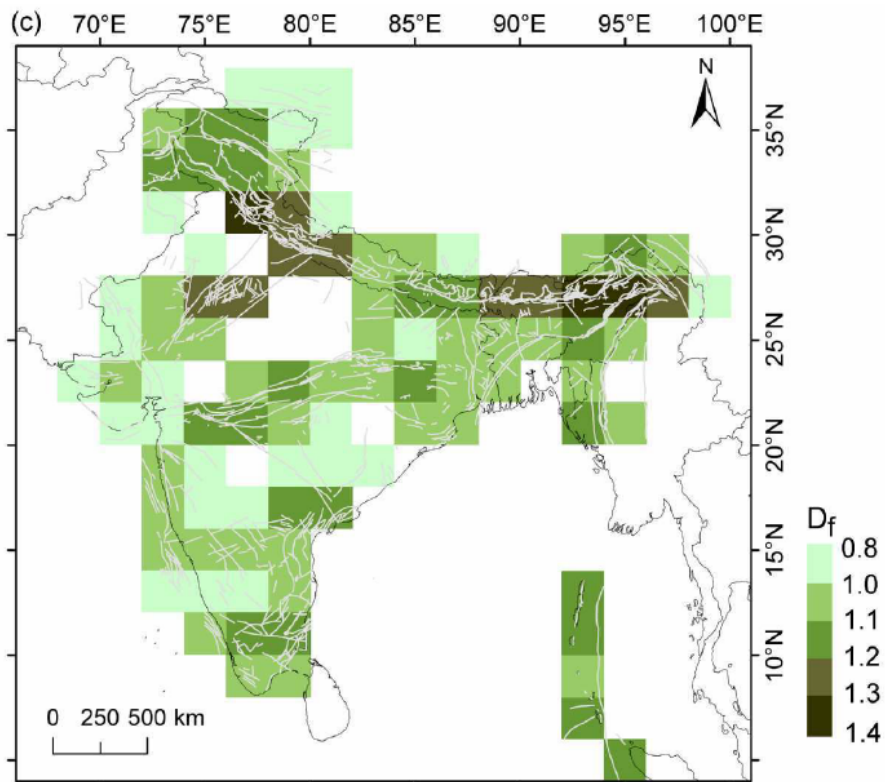


Fig. 40c Distribución espacial de la dimensión fractal estimada. (India)

La diferencia en la distribución espacial de la dimensión podría deducirse de las variaciones de la actividad sísmica, con más altos valores mayor actividad (Turcotte, 1986). Valores altos de dimensión (>1.2) son vistos al NW del Himalaya, en consecuencia, alta sismicidad es inferida en la zona de varios sismos históricos. Del mismo modo dimensiones más altas son también observadas en la parte NE de la región de estudio.

En la región NW de la llanura Indo-Gangética fallas presentan también valores altos de dimensión. Alta sismicidad con bajos a moderados sismos son predichos en estas zonas debido a la geometría de las fallas principales. Valores moderados de la dimensión son observados en los alrededores de la cordillera del Himalaya. Valores bajos en la península de la India indican patrones aislados de las fallas subyacentes y zonas débiles.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- ✓ Los fractales son una nueva geometría que complementa la geometría euclidiana, define adecuadamente el concepto de dimensión el cual es aplicado a toda clase de objetos: matemáticos, naturales, regulares e irregulares.
- ✓ En el desarrollo de este trabajo se ha conseguido explicar de forma resumida los conceptos básicos usados en fractales, así como también ciertas metodologías utilizadas en un análisis fractal.
- ✓ Los fractales permiten aprovechar información que antes no se tenía en cuenta, por considerar demasiado estocástica y carente de utilidad cualitativa.
- ✓ La teoría de fractales como parte de sistemas dinámicos no-lineales viene a complementar las matemáticas clásicas las cuales muchas veces no se apegan a fenómenos naturales reales.

- ✓ Estructuras aparentemente muy irregulares, como lo es la distribución de huecos kársticos, poseen un grado de ordenación interna definido por la dimensión fractal. El grado de ordenación se reproduce de escalas de decenas de metros hasta kilómetros, sobre un mismo macizo o formación caliza.
- ✓ No todos los objetos presentan características fractales. Para afirmar que un objeto es fractal es necesario aplicar la geometría adecuada y así determinar su dimensión fractal.
- ✓ En fracturas al aumento de la dimensión fractal influenciado por el aumento en la intensidad de fracturamiento se traduce como una dinámica en el crecimiento de las redes de fracturas.
- ✓ El análisis fractal en imágenes de las redes de fracturas sería una nueva opción para caracterizar el comportamiento y los atributos de los patrones de fracturamiento.
- ✓ Los fractales son una herramienta más que podemos utilizar en la solución de problemas geológicos, proveen una forma de cuantificar procesos de escala invariante.
- ✓ El desarrollo de algoritmos que generen fractales representativos de procesos geológicos, ayudaría en el análisis y predicción de estos procesos geológicos, tales como terremotos, erupciones volcánicas, condiciones ambientales, etc.

BIBLIOGRAFIA

1. Amelia M. Rodríguez (2000); Revista cubana de Física (vol.17, No 1-2)
2. Carlos P. Bartolomé (1995); Aplicación de la geometría fractal en las ciencias de la Tierra. Universidad Politécnica de Madrid.
3. Donald L. Turcotte (1997); Fractals and chaos in Geology and Geophysics. Cambridge University Press. Second Edition
4. Donald L. Turcotte (1991); Fractals in geology: What are they and what are they good for?; Geological Society of America (vol1, No1)
5. Gumiel P. (1996); Fractales, su importancia en geología. Simulación de patrones fractales naturales. Geogaceta, 20(6). Madrid
6. Gumiel P., Campos R., Sanderson J. y Roberts S (1992); El uso del análisis fractal como discriminación de sistemas filonianos auríferos en el área de La Codosera, Extremadura (España). Geogaceta, 12. Madrid.
7. John C. Davis (2002); Statistics and Data Analysis in Geology. Edition 2002.

8. José M. Gutiérrez (2000); *Fractales y Caos en Sistemas no Lineales. Aplicaciones.* Universidad de Cantabria. España.
9. Jung D. (2010); *Delineation and explanation of geochemical anomalies using fractal models in the Heqing area, Yunnan Province, China.* *Journal of Geochemical Exploration* 105, 95-105
10. Raúl P. López (2003); *Sobre la Teoría del Caos Aplicada en Sismo-tectónica: Geometría Fractal de Fallas y Terremotos.* Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Geológicas. Madrid.
11. Raúl R. Miranda (1995); *Teoría de Fractales: Aplicación Experimental e Implicaciones en la Metodología de la Ciencia.* Universidad Autónoma de Nueva León, Facultad de Filosofía y Letras. México 1995.
12. Sangit C., & Mustafa R. (1992); *Chaos, Fractals and Statistics.* *Statistical Science* (vol 7, No 1, 49-121)
13. Sengupta P., Nath S., Thingbaijam K. y Mistri S. (2011). *Fractal Analysis of Major Faults in India on a Regional Scale.* *Journal Geological Society of India* (vol. 78, pp. 226-232).
14. Virgilio A., Carlos G. (2001); *Fractales: fundamentos y aplicaciones Parte I: Concepción geométrica en la ciencia e ingeniería.* Universidad Autónoma de Nueva León. Ingenierías (Vol. 4, No10). México.