

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**SOFTWARE ALTERNATIVO PARA EL
CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS
MATRICIALES ELÉCTRICOS DE LÍNEAS DE
TRANSMISIÓN**

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ELECTRICISTA

PRESENTADO POR:

RAZIEL WILSON PUESCAS CASTRO

**PROMOCIÓN
2003 - I**

**LIMA – PERÚ
2006**

**SOFTWARE ALTERNATIVO PARA EL CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS
MATRICIALES ELÉCTRICOS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN**

A mi familia, profesores y amigos; y a todos aquellos que de una u otra forma han hecho posible la realización de este proyecto

SUMARIO

El presente trabajo consta de la realización de un programa de cálculo de para la matriz de impedancia serie y admitancias de líneas de transmisión. El objetivo fue la realización de un programa cuya interfaz con el usuario sea amigable y sencilla, de manera que el uso del mismo sea directo y casi intuitivo.

En una primera parte se presenta y desarrolla el fundamento teórico del programa, posterior a lo cual se establece la estructura del programa y las premisas sobre las cuales se desarrollará. Luego se presenta un vistazo al programa en sí y se describen las diferentes pantallas y operaciones relacionadas con el uso del mismo.

Finalmente se presentan una serie de ejemplos teóricos los cuales son comparados con los resultados obtenidos mediante el uso del software, siendo los resultados excelentes

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	
PLANEAMIENTO DE INGENIERÍA DEL PROBLEMA	
1.1 Descripción de Proyecto	2
1.2 Justificación	2
1.3 Objetivo	3
1.4 Síntesis del trabajo	3
CAPÍTULO II	
DESARROLLO TEÓRICO.	
2.1. Impedancia Serie de Líneas de Transmisión	4
2.1.1 Resistencia de la Línea.	4
2.1.2 Impedancia Serie de Líneas de Transmisión Monofásicas	8
2.1.3 Ecuaciones de Jhon Carson	11
2.1.4 Impedancia Serie de la Línea Trifásica	14
a) Impedancia Serie de una Línea Trifásica con Hilo de Guarda	16
b) Impedancia Serie de Líneas Trifásicas con Conductores Agrupados en cada Fase	19
2.2 Admitancia Paralelo de Líneas de Transmisión.	21
2.2.1 Conductancia de Líneas de Transmisión.	22
2.2.2 Capacitancia Monofásica	22
2.2.3 Capacitancia para Líneas de Transmisión	24
2.3 Transposición de Conductores en Líneas de Transmisión	26
2.3.1 Método General de Transposiciones	27
2.3.2 Línea No Transpuesta	30
2.3.3 Línea con Transposiciones Parciales	31
2.3.4 Línea de Transmisión con Circuitos Múltiples	32

2.3.5	Transformación Lineal de Componentes Simétricas	33
2.3.6	Transformación de un Sistema Trifásico de Circuitos Múltiples	36

CAPÍTULO III

ASPECTOS COMPUTACIONALES

3.1	Consideraciones	39
3.2	Procedimiento para el cálculo de la Matriz Z_{abc} e Y_{abc}	41
3.3	Diagrama de bloque del programa	43
3.4	Elaboración de un Aplicativo mediante Software	44

CAPÍTULO IV

CÁLCULO DEL PROGRAMA

4.1	Ejemplo 1	49
4.2	Ejemplo 2	55
4.3	Aplicación a las Líneas Típicas del Perú	60
4.3.1	LT. 138 y 60 kV San Gabán – Mazuko	60

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	63
---------------------------------------	-----------

ANEXOS

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

La línea de transmisión es el elemento más común de los que conforman las redes eléctricas. Los elementos que conforman sus instalaciones constituyen una gran autopista a través de las cuales fluye la energía eléctrica desde los centros de generación hasta centros de consumo.

La Terminología Eléctrica del Código Nacional de Electricidad Clasifica los niveles de voltaje al cual se realiza la transmisión de energía eléctrica, en tres categorías: transmisión, subtransmisión y distribución.

En nuestro país, los niveles de voltajes hasta 1 kV son considerados de baja tensión, los de niveles mayores de 1 kV hasta 33 kV son considerados de media tensión, los niveles mayores de 33 kV hasta 50 kV son considerados redes de transmisión de subtransmisión y los mayores de 50 kV a 220 kV son considerados como transmisión en alta tensión.. Por último, niveles de tensión menores a 22.9 kV están relacionados con redes de distribución.

En el Perú, la transmisión de energía eléctrica es aérea, de modo que el aislante común entre los conductores es el aire circundante.

Por lo general las corrientes que transportan cada fase de la línea de transmisión no están balanceadas; por lo cual, puede haber una corriente de retorno en los conductores neutros conectados a la tierra y en ésta. La corriente de retorno por la tierra se dispersa debajo de la línea, buscando la trayectoria de retorno de impedancia más baja.

En base a esto, es necesario desarrollar un modelo matemático que represente el comportamiento de la línea de transmisión aérea de corriente alterna y trifásica que considera la impedancia de retorno por tierra en los cálculos de los parámetros ya conocidos; tales como, la Resistencia serie, Inductancia serie, Conductancia en derivación y Capacitancia en derivación.

CAPÍTULO I

PLANEAMIENTO DE INGENIERÍA DEL PROBLEMA

1.1 Descripción del proyecto

El proyecto consiste en desarrollar una herramienta digital (aplicativo) de análisis amigable para el cálculo de la matriz de impedancia serie y la matriz de admitancias de líneas de transmisión trifásicas típicas del Perú.

Esta herramienta permitirá el cálculo de la matriz Z e Y para múltiples conductores por fase.

Si las corrientes de fase no están balanceadas, puede haber una corriente de retorno en los conductores neutros conectados a la tierra y en ésta. La corriente de retorno por la tierra se dispersa debajo de la línea, buscando la trayectoria de retorno de impedancia más baja.

Para tal efecto, el aplicativo considera las ecuaciones de John R. Carson para el cálculo de la impedancia de un circuito, considerando el efecto de retorno por tierra; el cual hace que la tierra se pueda reemplazar por un conjunto de conductores “de retorno por tierra” ubicado directamente debajo de los conductores aéreos.

1.2 Justificación

Durante los proyecto de transmisión es necesario analizar la forma que tomará la disposición de los conductores de tal manera que el proyecto sea diseñado con la mejor alternativa técnica y económica. Técnicamente, es necesario analizar varias alternativas de configuración considerando si la potencia a transportar será en simple terna, doble terna, un conductor por fase o múltiples conductores por fase y disponer de varias alternativas técnicas incluyen la mejor; sabiendo que, los parámetros de la línea varían con la configuración de la misma y éste a su vez influye en la eficiencia de la línea.

En ese sentido, la elaboración de un aplicativo facilitará el análisis al realizar los cálculos de una manera más eficiente. Además se puede acceder al código fuente para realizar modificaciones, o cualquier tipo de cambio en el programa, ya sea, en el método utilizado en el algoritmo de cálculo o en la presentación o manipulación de los dato

1.3 Objetivo

Desarrollar una herramienta computacional de cálculo para la matriz de impedancia serie y admitancias de líneas de transmisión, con una interfaz amigable para el usuario.

Desarrollar el programa de cálculo considerando las diferentes configuraciones que puede adoptar la línea de transmisión con múltiples conductores por fase durante el transporte de la energía.

1.4 Síntesis del trabajo

El presente trabajo consta de la realización de un programa de cálculo de para la matriz de impedancia serie y admitancias de líneas de transmisión. El objetivo fue la realización de un programa cuya interfaz con el usuario sea amigable y sencilla, de manera que el uso del mismo sea directo y casi intuitivo.

En una primera parte se presenta y desarrolla el fundamento teórico del programa, posterior a lo cual se establece la estructura del programa y las premisas sobre las cuales se desarrollará. Luego se presenta un vistazo al programa en sí y se describen las diferentes pantallas y operaciones relacionadas con el uso del mismo.

Finalmente se presentan una serie de ejemplos teóricos los cuales son comparados con los resultados obtenidos mediante el uso del software, siendo los resultados excelentes.

CAPÍTULO II

DESARROLLO TEÓRICO

2.1 Impedancia Serie de Líneas de Transmisión

2.1.1 Resistencia de la Línea

Durante el transporte de energía eléctrica la resistencia de los conductores causa pérdidas de potencia por transmisión, las cuales están dadas por la expresión I^2R , donde I es la corriente que fluye a través de conductor y R es la resistencia del mismo. Estas pérdidas de potencia se acostumbra a considerar aceptable en peajes de interconexiones para valores $\leq 3\%$ por kilómetro, lo cual depende de un diseño adecuado de la línea, tomando en consideración factores como el calibre de conductores, número de los mismos por fase, tipo de material e influencia del medio ambiente, entre otros.

a.) Resistencia de Corriente Directa

Cuando se transporta una corriente continua a través de un conductor la corriente se distribuida uniformemente en toda la sección transversal. Su resistencia de c.d. puede calcularse mediante la expresión siguiente:

$$R_0 = \frac{\rho l}{A} \quad \Omega \quad (2.1)$$

donde:

ρ = resistividad del conductor (Ω -m)

l = longitud del conductor (m)

A = área efectiva de la sección transversal del conductor (m^2)

La resistividad depende del material del conductor. El cobre recocido es el estándar internacional para medir la resistividad ρ (o la conductividad σ , en donde $\sigma = 1/\rho$).

Para los conductores trenzados, las capas alternadas de hilos describen espirales en direcciones opuestas para mantener los hilos unidos. La formación de la espiral hace que los hilos sean 1 o 2% más largos que la longitud real del conductor. Como resultado, la resistencia cd de un conductor trenzado es 1 o 2% mayor que la calculada a partir de la ecuación (2.1), para una longitud especificada del conductor.

b.) Efecto de la Temperatura Sobre la Resistencia.

La resistencia de los metales para los conductores varía linealmente sobre las condiciones normales de operación. Un cambio en la temperatura causara una variación en la resistencia, en forma prácticamente lineal. Esta variación esta de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\rho_{T_2} = \rho_{T_1} \left(\frac{T + t_2}{T + t_1} \right) \quad (2.2)$$

donde ρ_1 y ρ_2 son las resistividades a las temperaturas t_1 y t_2 , respectivamente. La constante T depende del material conductor y se define como la temperatura a la cual la resistencia del conductor es igual a cero. Para el aluminio T es aproximadamente 228. Puede concluirse que un incremento de temperatura causa un aumento a la resistencia y viceversa.

c.) Efecto Piel

Para la corriente continua, la distribución es uniforme en toda la sección transversal del conductor. Sin embargo para la corriente alterna la distribución de corriente no es uniforme. Conforme aumenta la frecuencia, la corriente en un conductor cilíndrico sólido tiende a agolparse hacia la superficie del mismo, con menor densidad de corriente en el centro de éste. Este fenómeno se conoce como efecto piel.

Al aumentar la frecuencia, aumenta la pérdida en el conductor, la cual hace que se incremente la resistencia de ca. A la frecuencia de transmisión de potencia (60Hz), la resistencia de ca es al menos un pequeño porcentaje más alta que la de cd. Normalmente los fabricantes de conductores proporcionan la resistencia de cd, a 50 y 60 Hz de los conductores con base en datos de prueba.

Para entender mejor este efecto, será necesario considerar lo siguiente:

1. A partir de la figura 2.1, donde se muestra un conductor seccional izado transversalmente, en el cual se ha dibujado dos filamentos hipotéticos iguales además del centro, se hará el análisis.



Figura 2.1 Sección transversal de un conductor mostrando dos de sus filamentos

2. Las dimensiones del conductor son uniformes, es decir si se secciona el conductor en diferentes tramos, todas las sesiones transversales resultaran ser iguales.
3. La corriente será la misma para toda la longitud del conductor, esto es, la corriente que entra por un extremo del conductor, será la misma que saldrá por el otro extremo.
4. Apoyándose en las dos suposiciones anteriores, puede suponerse que cualquier sección transversal del conductor será una superficie equipotencial.

Al medir una caída de tensión en cada uno de los filamentos, esta será la misma para ambos (suposición 4). En corriente directa, la condición anterior se satisface con la densidad de corriente uniforme que resultara en caídas de tensión por resistencia uniformes. Si se trata de corriente alterna, además de la caída de tensión por resistencia, existirá un voltaje inducido en cada filamento, resultante del campo magnético variante producido por la corriente en el propio conductor. Las líneas de flujo de este campo

magnético circularan de acuerdo al eje del conductor y algunas encerrarán al filamento B sin hacerlo con el A, debido a la posición geométrica de ambos. Las reactancias alejadas del centro (como la del filamento A), serán menores que las de los filamentos alrededor del centro del conductor (como el filamento B), Por lo tanto, para producir caídas de tensión iguales, las densidades de corriente deben ser mayores cerca de la periferia del conductor, para compensar la reactancia menor.

El resultado final es que la energía electromagnética no se transmite en el interior del conductor sino que viaja en las regiones que rodean el conductor debido a que la distribución de densidades de corriente a través de la sección transversal del conductor no es uniforme, siendo este fenómeno conocido como efecto piel, el cual causara que la resistencia de c.d. se incremente ligeramente. Esta es la llamada resistencia de c.a. Por otro lado, la inductancia debida al flujo interno en el conductor se vera disminuida.

Por lo cual, se concluye que la resistencia de ca se expresa mediante la formulas siguiente:

$$R_{ca} = R_{cd} \alpha_R \quad (2.3)$$

y para la inductancia interna se tiene que:

$$(L_i)_{ca} = (L_i)_{cd} \alpha_L \quad (2.4)$$

donde α_R y α_L son ligeramente mayor y menor que la unidad, respectivamente.

d.) Efecto Corona

El efecto corona ocurre cuando un valor elevado de la intensidad del campo eléctrico en la superficie de un conductor debidos a altas densidades de carga hace que el aire se ionice eléctricamente y se vuelve conductor. Las pérdidas de potencia real debida al efecto corona, llamadas pérdidas por efecto corona, depende de las condiciones meteorológicas, en particular la lluvia, y de las irregularidades de la superficie del conductor.

Una ionización extrema resultara en la presencia de arcos eléctricos entre conductores. Este efecto puede detectarse audiblemente por el zumbido que produce y visualmente por el aura luminosa que se presenta en cada conductor de fase.

El efecto corona producirá pérdidas e interferencias radiofónicas. Tales pérdidas serán relativamente pequeñas en ambientes secos y tienden a incrementarse en ambientes más húmedos, llegando inclusive a magnitudes 15 veces mayores.

Este fenómeno influye en la eficiencia de operación de la línea de transmisión, debido a que su existencia producirá pérdidas adicionales. Tales pérdidas por corona se expresan en kW/Km., pero resulta difícil de obtener un modelo analítico que permita calcularlas de manera exacta, debido a la gran cantidad de variables involucradas. Los resultados son obtenidos usando relaciones empíricas y métodos estadísticos. Sin embargo, el efecto corona debe tomarse en cuenta para diseñar adecuadamente las líneas de transmisión.

2.1.2 Impedancia Serie Líneas de Transmisión Monofásicas.

Este parámetro está compuesto por los efectos resistivo e inductivo de la línea. Se considerará el efecto de retorno por tierra.

Para las condiciones normales de diseño, la reactancia correspondiente a la inductancia, $x_L = \omega L$, es la parte dominante de la impedancia serie, la cual determina el efecto sobre la capacidad de transmitir y la caída de tensión. Este dominio de la inductancia sobre la resistencia se aprecia por medio de la relación $x/r \gg 1$ para líneas de transmisión de alta tensión.

El efecto de retorno por tierra consiste en considerar que las corrientes en las líneas tienen una trayectoria de retorno a través de los neutros de los equipos conectados a tierra. La tierra se simula por medio de un conductor ficticio de longitud infinita, situada debajo de la superficie del terreno que tiene una resistividad uniforme y paralela a la línea. A este conductor se le supone un radio medio geométrico, denotado por D_{sg} , igual a

la unidad de longitud de las coordenadas entre los conductores de la línea. La figura 2.2 representa esta situación.

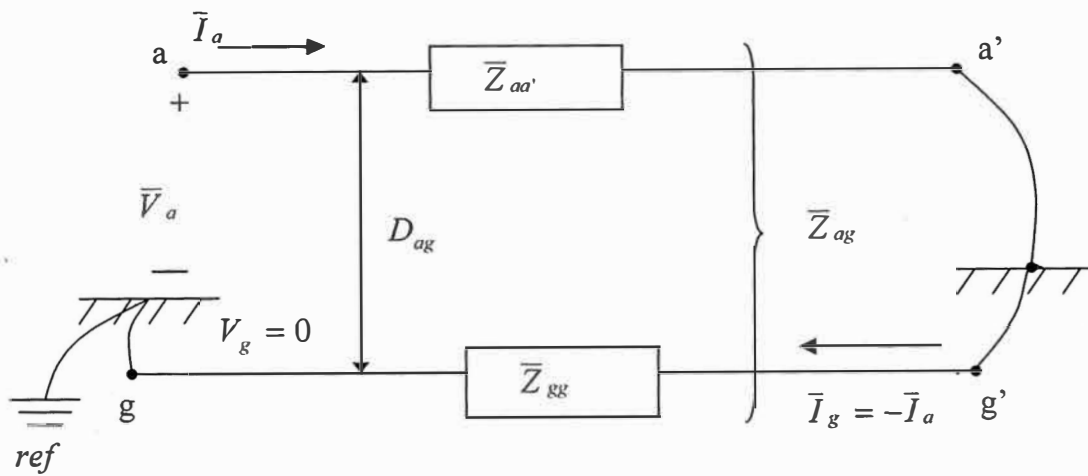


Figura 2.2 Línea monofásica considerando el efecto de retorno por tierra

De la Figura 2.2 se observa que las caídas de tensión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{V}_a \\ \Delta \bar{V}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_a - \bar{V}_{a'} \\ \bar{V}_g - \bar{V}_{g'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{aa'} & \bar{z}_{ag} \\ \bar{z}_{ga} & \bar{z}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_g \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Sabiendo que $\bar{V}_g = \bar{V}_{g'} = \bar{V}_{a'} = 0$, se deduce que $\bar{V}_g - \bar{V}_{a'} = 0$. Restando renglones en la ecuación (2.5):

$$\bar{V}_a - \bar{V}_{a'} - (\bar{V}_g - \bar{V}_{g'}) = \bar{V}_a - \bar{V}_g = \bar{V}_a \quad (2.6)$$

Además,

$$\bar{z}_{aa'} \bar{I}_a + \bar{z}_{ag} \bar{I}_g - \bar{z}_{ga} \bar{I}_a - \bar{z}_{gg} \bar{I}_g = (\bar{z}_{aa'} - \bar{z}_{ag}) \bar{I}_a + (\bar{z}_{ag} - \bar{z}_{gg}) \bar{I}_g = \bar{V}_a \quad (2.7)$$

Esta expresión puede escribirse en términos de una sola corriente, resultando:

$$\bar{V}_a = (\bar{z}_{aa'} - \bar{z}_{ag}) \bar{I}_a + (\bar{z}_{ag} - \bar{z}_{gg}) (-\bar{I}_a) = (\bar{z}_{aa'} + \bar{z}_{gg} - 2\bar{z}_{ag}) \bar{I}_a = \bar{z}_{aa} \bar{I}_a \quad (2.8)$$

donde:

$$\bar{z}_{aa} = \bar{z}_{aa}' + \bar{z}_{gg} - 2\bar{z}_{ag} \quad (2.9)$$

cuyas componentes son impedancias primitivas, las cuales, a su vez, están definidas por las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}_{aa}' &= r_a + j\omega kL_a \\ \bar{z}_{gg} &= r_g + j\omega kL_g \\ \bar{z}_{ag}' &= j\omega kM_{ag} \end{aligned} \right\} \Omega/ul \quad (2.10)$$

donde r_a es la resistencia del conductor de la línea, r_g es la resistencia del supuesto conductor que representa al efecto de retorno por tierra; ω es la frecuencia en rad/s; L_a y L_g son las inductancias propias de la línea y del efecto de retorno por tierra, respectivamente, mientras que M_{ag} representa al efecto mutuo inductivo entre ambos conductores; ul representa cualquier unidad de longitud y k es una constante de conversión por unidades de longitud.

Sustituyendo la expresión (2.10) en (2.9) se tiene que:

$$\bar{z}_{aa} = (r_a + r_g) + j\omega k(L_a + L_g - 2M_{ag}) \quad (2.11)$$

donde las inductancias están definidas por las expresiones siguientes:

$$L_a = \ell n \frac{2S}{D_{sa}} - 1 \quad L_g = \ell n \frac{2S}{D_{sg}} - 1 \quad M_{ag} = \ell n \frac{2S}{D_{ag}} - 1 \quad (2.12)$$

En estas expresiones (2.12), S es la longitud del conductor a . Si se suman las inductancias, tal como se describe en (2.11),

$$L_a + L_g - 2M_{ag} = \ell n \frac{D_{ag}^2}{D_{sa}D_{sg}} \quad (2.13)$$

Sabiendo que $D_{sg} = 1$, se definirá a la constante D_e cómo:

$$D_e = \frac{D_{ag}^2}{D_{sg}} \quad (2.14)$$

y substituyendo en la ecuación (2.12), la impedancia de la línea dada por:

$$\bar{z}_{aa} = (r_a + r_g) + j\omega k \ln \frac{D_e}{D_{sa}} \quad (2.15)$$

En las expresiones anteriores, D_{sa} es la Radio Medio Geométrico (RMG) del conductor a .

Para calcular el valor de la resistencia del efecto de retorno por tierra, Carson encontró que, empíricamente, esta puede calcularse mediante las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} r_g &= 1.588 \times 10^{-3} f \quad \Omega / mi \\ r_g &= 9.869 \times 10^{-4} f \quad \Omega / km \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde f es la frecuencia en ciclos /s o Hz. El cálculo de la constante D_e está dado por:

$$D_e = 2160 \sqrt{\frac{\rho}{f}} \quad ft \quad (2.17)$$

siendo ρ la resistividad de la tierra en $\Omega - m$.

2.1.3 Ecuaciones de Carson

La impedancia de la línea de transmisión puede ser separado en dos componentes: la impedancia propia y la impedancia mutua. El primero, es la proporción de la caída de tensión por unidad de longitud de la corriente que fluye en el conductor y retorna a través de la tierra. La impedancia mutua Z_{ij} entre conductores i y j es la proporción del voltaje inducido por unidad de longitud en el conductor i debido a la corriente en el

conductor j . A causa de la simetría del circuito, Z_{ij} es igual a Z_{ji} . Ambos la impedancia propia y mutua son influenciados por la corriente de retorno por tierra. La tierra puede ser considerada como un conductor infinito. La corriente que fluye en la línea de transmisión causa una corriente de retorno por tierra inducido magnéticamente que se propaga afuera debajo de las líneas, buscando la ruta de retorno de más baja impedancia. Influenciado por el efecto skin y de proximidad, la distribución de la corriente de retorno por tierra inducido en el suelo es difícil de determinar. Sin embargo mucho ingenieros electricistas destacados han estudiado este problema durante los pasados 100 años y obtenido soluciones precisos usando varios métodos, incluyendo el método del Dr. Jhon R. Carson's.

En 1926 Carson publicó sus ecuaciones para calcular la impedancia de un circuito, considerando el efecto de retorno por tierra. Estas ecuaciones actualmente son muy utilizadas para el cálculo de parámetros de líneas de transmisión aérea y subterránea.

Carson supone que la tierra es una superficie uniforme, plana, sólida e infinita con una resistividad constante. Cualquier efecto en los extremos de la línea en los puntos de aterrizamiento son despreciables para frecuencias de estado estacionario. Las ecuaciones de Carson se muestran a continuación:

$$Z_{ii-g} = (r_i + 6.4374 \times 10^{-4} \omega P) + j \left[x_i + 3.2187 \times 10^{-4} \omega \ln \frac{24 S_{ii}}{d_i} + 6.4374 \times 10^{-4} \omega Q \right] \Omega / \text{milla} \quad \dots\dots (2.18)$$

$$Z_{ij-g} = (6.4374 \times 10^{-4} \omega P) + j \left[3.2187 \times 10^{-4} \omega \ln \frac{S_{ii}}{D_{ij}} + 6.4374 \times 10^{-4} \omega Q \right] \Omega / \text{milla} \quad \dots\dots (2.19)$$

ó también:

$$Z_{ii-g} = (r_i + R_{ii-g}) + j(x_i + X_{ii-g}) \quad (2.20)$$

$$Z_{ij-g} = R_{ij-g} + jX_{ij-g} \quad (2.21)$$

donde:

R_i = Resistencia interna del conductor i

x_i = Reactancia interna del conductor i

R_{ii-g} = Componente resistiva externa de la auto impedancia Z_{ii-g} considerando el efecto de retorno por tierra.

X_{ii-g} = Componente reactiva externa de la auto impedancia Z_{ii-g} considerando el efecto de retorno de la tierra

R_{ij-g} = Componente resistiva de la impedancia mutua Z_{ij-g} considerando efecto por tierra.

X_{ij-g} = Componentes reactiva de la impedancia mutua Z_{ij-g} considerando efecto por tierra.

Las componentes internas r_i y x_i para un conductor particular se obtienen de las manuales de conductores.

Los factores P_{ii} , P_{ij} , Q_{ii} y Q_{ij} se determinan mediante las Series de Carson siguientes:

$$P = \frac{\pi}{8} - \frac{k}{3\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{k^2}{16} \left(0.6728 + \ln \frac{2}{k} \right) \cos 2\theta + \frac{k^2}{16} \theta \sin 2\theta + \frac{k^3}{45\sqrt{2}} \cos 3\theta - \frac{\pi k^4}{1536} \cos 4\theta$$

(2.22)

$$Q = -0.0368 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{k} + \frac{k}{3\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{\pi k^2}{64} \cos 2\theta + \frac{k^3}{45\sqrt{2}} \cos 3\theta - \frac{k^4 \theta}{384} \sin 4\theta - \frac{k^4}{384} \cos 4\theta \left(\ln \frac{2}{k} + 1.0895 \right)$$

(2.23)

donde

$$k = 8.565 \times 10^{-4} S_{ij} \sqrt{f/\rho} \quad \text{y} \quad \theta = \begin{cases} \text{Arc sin } \frac{m_{ij}}{S_{ij}}, & \text{para conductores diferentes } i \neq j \\ 0, & \text{para el mismo conductor } i = j \end{cases}$$

f : Frecuencia Hz

ρ : Resistividad del terreno. Ω -m.

Las distancias S_{ij} y D_{ij} se calculan de acuerdo la Figura 2.3, mostrado a continuación:

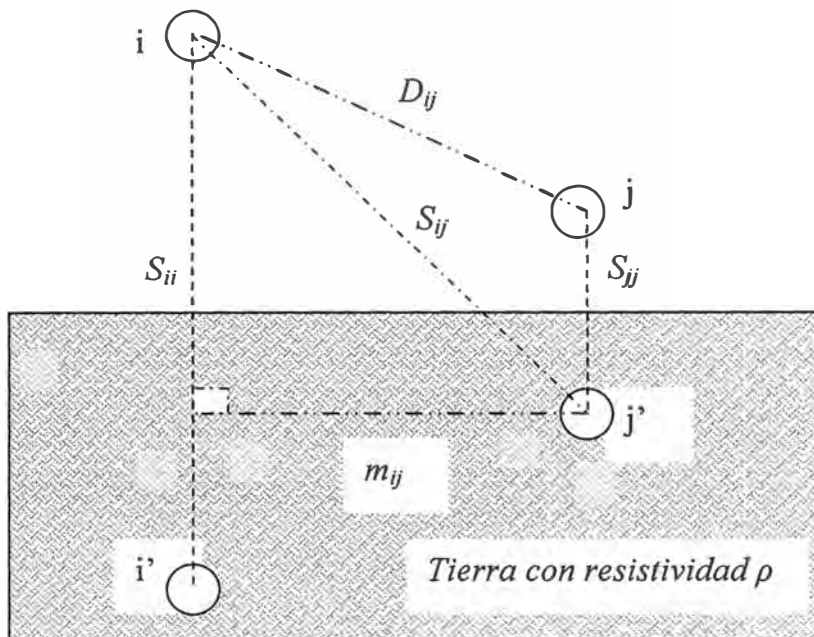


Figura 2.3 Conductores de la línea monofásica y sus imágenes

2.1.4 Impedancia Serie de la Línea Trifásica

Para calcular la impedancia serie de una línea trifásica, considerando el efecto de retorno por tierra, se procede en forma similar al cálculo de la impedancia serie de la línea monofásica. La configuración de los circuitos se muestra en la Figura 2.4, identificándose impedancias, voltajes y corrientes.

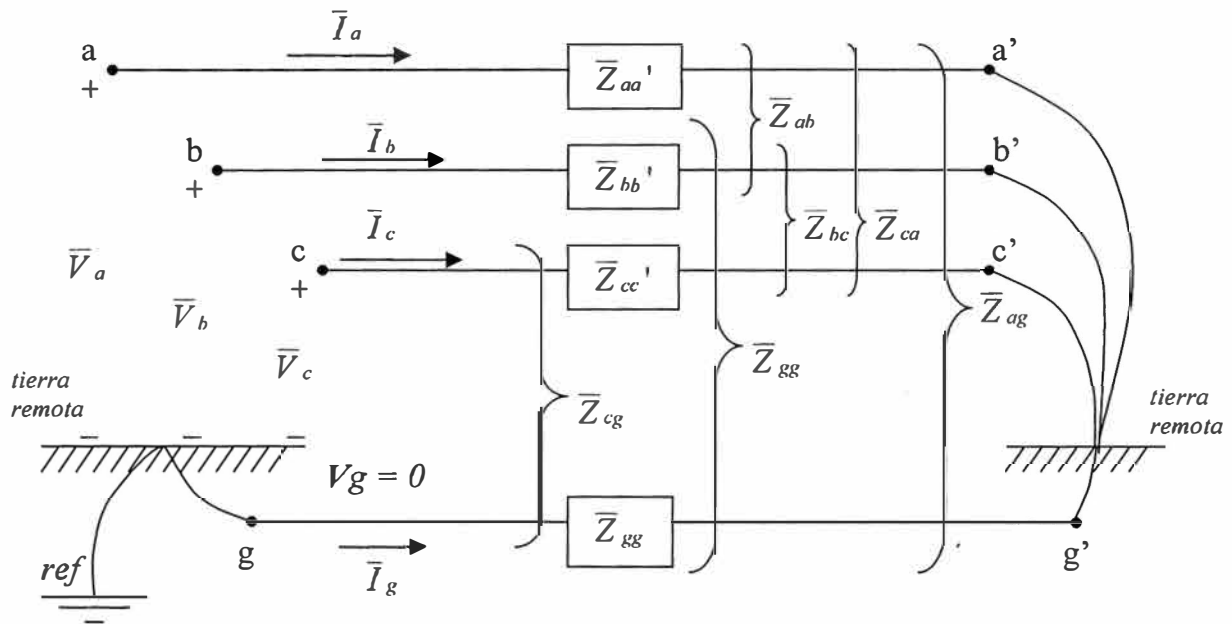


Figura 2.4. Línea Trifásica incluyendo el efecto de retorno por tierra

De la figura 2.4, se observa que:

$$\bar{I}_g = -(\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c) \quad (2.24)$$

y las caídas de tensión, en la dirección dada a las corrientes, es expresan como sigue:

$$\begin{bmatrix} V_{aa'} \\ V_{bb'} \\ V_{cc'} \\ V_{gg'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a - V_{a'} \\ V_b - V_{b'} \\ V_c - V_{c'} \\ V_g - V_{g'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{aa'} & \bar{z}_{ab'} & \bar{z}_{ac'} & \bar{z}_{ag} \\ \bar{z}_{ba'} & \bar{z}_{bb'} & \bar{z}_{bc'} & \bar{z}_{bg} \\ \bar{z}_{ca'} & \bar{z}_{cb'} & \bar{z}_{cc'} & \bar{z}_{cg} \\ \bar{z}_{ga} & \bar{z}_{gb} & \bar{z}_{gc} & \bar{z}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \\ \bar{I}_g \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Extendiendo al caso trifásico lo visto en la sección anterior, se tiene:

$$V_a' - V_g' = 0; \quad V_b' - V_g' = 0; \quad V_c' - V_g' = 0; \quad \bar{V}_g = 0. \quad (2.26)$$

Además, se conoce el valor de \bar{I}_g , y partiendo de estas condiciones, puede establecerse el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{aa} & \bar{Z}_{ab} & \bar{Z}_{ac} \\ \bar{Z}_{ba} & \bar{Z}_{bb} & \bar{Z}_{bc} \\ \bar{Z}_{ca} & \bar{Z}_{cb} & \bar{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

y en forma mas compacta, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\bar{V}_i = \bar{Z}_{ij} \bar{I}_i \quad (2.28)$$

donde los elementos de la diagonal principal de la matriz Z_{ij} definidas en (2.27), son las impedancias serie propias de cada fase y se calcula de acuerdo a la ecuación (2.20); es decir:

$$Z_{ii} = Z_{ii-g} = (r_i + R_{ii-g}) + j(x_i + X_{ii-g}) \quad \text{con } i = a, b, c \quad (2.29)$$

Del mismo modo los elementos fuera de la diagonal son las impedancias serie mutuas entre fases, y se calculan de acuerdo a la ecuación (2.21); es decir:

$$Z_{ij} = Z_{ij-g} = R_{ij-g} + jX_{ij-g} \quad \text{con } i \neq j, \quad i, j = a, b, c \quad (2.30)$$

En ambos casos, las unidades estarán dadas en Ω/ul

a) Impedancia Serie de una Línea Trifásica con Hilos de Guarda

Las líneas de transmisión que se encuentran instaladas arriba de los 1000 msnm se colocan cables de guarda con la finalidad de proteger a la línea contra descargas atmosféricas. La figura 2.5 representa una línea de estas características conteniendo dos hilos de guarda.

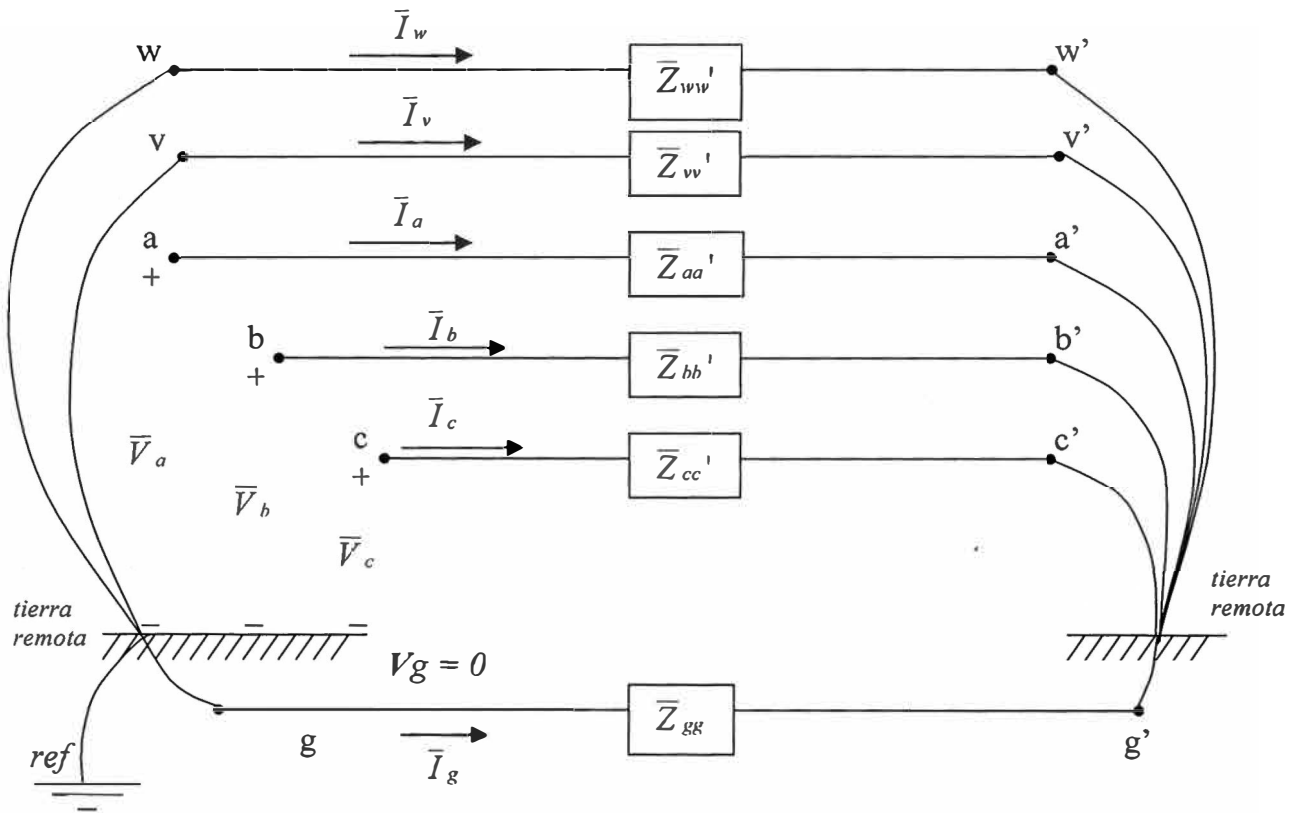


Figura 2.5. Línea trifásica con dos hilos de guarda

Para este circuito, el conjunto de ecuaciones que resulta es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \\ \bar{V}_v \\ \bar{V}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{aa}'' & \bar{z}_{ab}'' & \bar{z}_{ac}'' & \bar{z}_{av}'' & \bar{z}_{aw}'' \\ \bar{z}_{ba}'' & \bar{z}_{bb}'' & \bar{z}_{bc}'' & \bar{z}_{bv}'' & \bar{z}_{bw}'' \\ \bar{z}_{ca}'' & \bar{z}_{cb}'' & \bar{z}_{cc}'' & \bar{z}_{cv}'' & \bar{z}_{cw}'' \\ \bar{z}_{va}'' & \bar{z}_{vb}'' & \bar{z}_{vc}'' & \bar{z}_{vv}'' & \bar{z}_{vw}'' \\ \bar{z}_{wa}'' & \bar{z}_{wb}'' & \bar{z}_{wc}'' & \bar{z}_{wv}'' & \bar{z}_{ww}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \\ \bar{I}_v \\ \bar{I}_w \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Nótese que en las ecuaciones (2.31), ya se ha realizado el proceso de reducir el efecto de retorno por tierra y donde cada elemento de las mismas se determina ya sea con la ecuación (2.29) o la (2.30). Considerando la partición matricial mostrada en (2.31) y compactando cada bloque submatricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{abc} \\ \bar{V}_{vw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_A & \bar{z}_B \\ \bar{z}_C & \bar{z}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{abc} \\ \bar{I}_{vw} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

El objetivo es que, a partir de (2.32), se obtenga un modelo matricial equivalente trifásico. Esto significa que se debe obtener un conjunto de ecuaciones que incluya

únicamente a las fases a, b, c, y que, además, tenga incluidos los efectos de los conductores de guarda. Para esto, se aplica el procedimiento que se describe a continuación.

De la figura 2.5, se observara que los voltajes de los conductores de guarda son iguales a cero. Si de realiza la operación indicada en (2.32), se obtiene:

$$\bar{V}_{abc} = \bar{z}_A \bar{I}_{abc} + \bar{z}_B \bar{I}_{vw} \quad (2.33)$$

$$0 = \bar{z}_C \bar{I}_{abc} + \bar{z}_D \bar{I}_{vw} \quad (2.34)$$

Resolviendo el segundo expresión se tiene que

$$\bar{I}_{vw} = -\bar{z}_D^{-1} \bar{z}_C \bar{I}_{abc} \quad (2.35)$$

Reemplazando (2.35) en (2.33):

$$\bar{V}_{abc} = \bar{z}_A \bar{I}_{abc} + \bar{z}_B \bar{z}_D^{-1} \bar{z}_C \bar{I}_{abc} \quad (2.36)$$

Despejando el valor de \bar{I}_{abc} se obtiene

$$\bar{V}_{abc} = \left(\bar{z}_A - \bar{z}_B \bar{z}_D^{-1} \bar{z}_C \right) \bar{I}_{abc} \quad (2.37)$$

o bien

$$\bar{V}_{abc} = \bar{z}_{abc} \bar{I}_{abc} \quad (2.38)$$

en donde

$$\bar{z}_{abc} = \bar{z}_A - \bar{z}_B \bar{z}_D^{-1} \bar{z}_C = \begin{bmatrix} \bar{z}_{aa} & \bar{z}_{ab} & \bar{z}_{ac} \\ \bar{z}_{ba} & \bar{z}_{bb} & \bar{z}_{bc} \\ \bar{z}_{ca} & \bar{z}_{cb} & \bar{z}_{cc} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Podrá observarse que el conjunto de ecuaciones (2.31), se ha reducido de cinco renglones a tres. El efecto de los conductores de guarda esta representado por el término negativo de (2.37). Este procedimiento es aplicable también a cualquier número de circuitos con cualquier número de hilos de guarda. La única condición es que los voltajes de la parte inferior del vector correspondiente a los voltajes sean igual a cero.

b) Impedancia Serie de líneas Trifásicas con Conductores Agrupados en Cada Fase (formación de haces)

Con la formación de haces se reduce la intensidad del campo eléctrico en las superficies de los conductores, lo cual, a su vez, reduce o elimina el efecto corona, pérdida indeseable de potencia, interferencia en las comunicaciones y ruido audible. La formación de haces también reduce la reactancia en serie de la línea al incrementar el RMG del haz; asimismo, permiten el transporte de altas cantidades de energía. En caso de que se utilizara un conductor único en cada fase, este tendrá que ser de un calibre que, desde un punto vista de esfuerzos mecánicos, será impráctico.

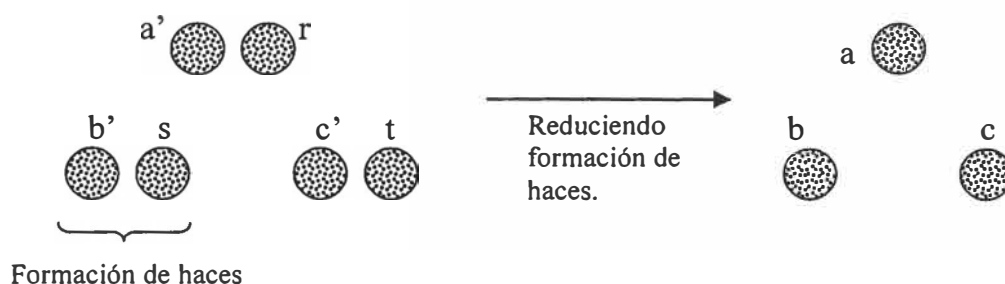


Figura 2.6. Modelo de la línea trifásica con dos conductores agrupados por fase.

La figura 2.6 muestra la secuencia para resolver el problema de modelar la línea trifásica en formación de haces con dos conductores agrupados en cada fase. Por otro lado, la figura 2.7 muestra el circuito representativo, en este caso, para la fase a de la línea. Es de suponerse que para las demás fases los circuitos serán semejantes y, además, estarán acoplados entre sí.

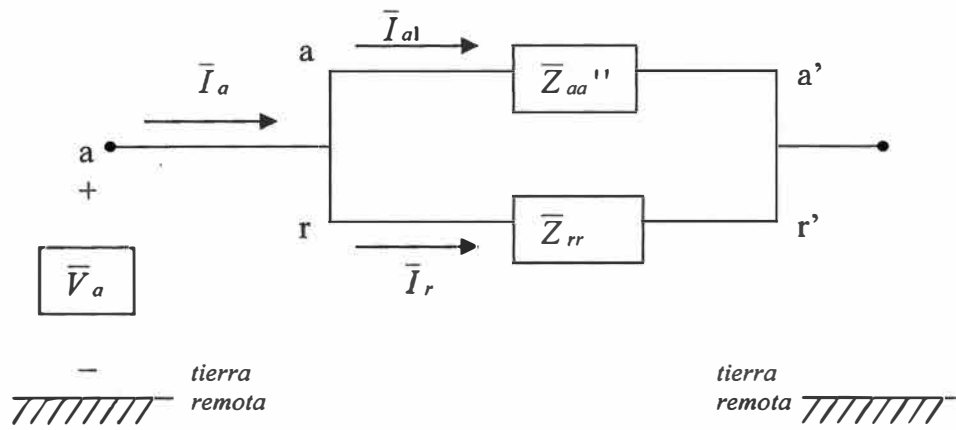


Figura 2.7. Conductores agrupados para la fase a.

Utilizando las ecuaciones (2.29) y (2.30), puede calcularse la matriz de coeficientes para el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \\ \bar{V}_r \\ \bar{V}_s \\ \bar{V}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{aa}'' & \bar{Z}_{ab}'' & \bar{Z}_{ac}'' & \bar{Z}_{ar} & \bar{Z}_{as} & \bar{Z}_{at} \\ \bar{Z}_{ba}'' & \bar{Z}_{bb}'' & \bar{Z}_{bc}'' & \bar{Z}_{br} & \bar{Z}_{bs} & \bar{Z}_{bt} \\ \bar{Z}_{ca}'' & \bar{Z}_{cb}'' & \bar{Z}_{cc}'' & \bar{Z}_{cr} & \bar{Z}_{cs} & \bar{Z}_{ct} \\ \bar{Z}_{ra} & \bar{Z}_{rb} & \bar{Z}_{rc} & \bar{Z}_{rr} & \bar{Z}_{rs} & \bar{Z}_{rt} \\ \bar{Z}_{sa} & \bar{Z}_{sb} & \bar{Z}_{sc} & \bar{Z}_{sr} & \bar{Z}_{ss} & \bar{Z}_{st} \\ \bar{Z}_{ta} & \bar{Z}_{tb} & \bar{Z}_{tc} & \bar{Z}_{tr} & \bar{Z}_{ts} & \bar{Z}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \\ I_r \\ I_s \\ I_t \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

De la figura 2.7, puede observarse las siguientes relaciones de corriente:

$$\bar{I}_a = \bar{I}_{a1} + \bar{I}_r, \quad \bar{I}_b = \bar{I}_{b1} + \bar{I}_s, \quad \bar{I}_c = \bar{I}_{c1} + \bar{I}_t \quad (2.41)$$

Así como también las siguientes relaciones de voltaje:

$$\bar{V}_r - \bar{V}_a = 0, \quad \bar{V}_s - \bar{V}_b = 0, \quad \bar{V}_t - \bar{V}_c = 0 \quad (2.42)$$

Entonces, efectuando las restas indicadas, el conjunto de ecuaciones (2.40) se modificara y, en forma compacta, resultara en el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{abc} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A & \bar{Z}_B \\ \bar{Z}_C & \bar{Z}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{abc} \\ \bar{I}_{rst} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

donde:

$$\bar{Z}_A = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{aa}'' & \bar{Z}_{ab}'' & \bar{Z}_{ac}'' \\ \bar{Z}_{ba}'' & \bar{Z}_{bb}'' & \bar{Z}_{bc}'' \\ \bar{Z}_{ca}'' & \bar{Z}_{cb}'' & \bar{Z}_{cc}'' \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\bar{Z}_B = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{ar} - \bar{Z}_{aa}'' & \bar{Z}_{as} - \bar{Z}_{ab}'' & \bar{Z}_{at} - \bar{Z}_{ac}'' \\ \bar{Z}_{br} - \bar{Z}_{ba}'' & \bar{Z}_{bs} - \bar{Z}_{bb}'' & \bar{Z}_{bt} - \bar{Z}_{bc}'' \\ \bar{Z}_{cr} - \bar{Z}_{ca}'' & \bar{Z}_{cs} - \bar{Z}_{cb}'' & \bar{Z}_{ct} - \bar{Z}_{cc}'' \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\bar{Z}_C = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{ra} - \bar{Z}_{aa}'' & \bar{Z}_{rb} - \bar{Z}_{ab}'' & \bar{Z}_{rc} - \bar{Z}_{ac}'' \\ \bar{Z}_{sa} - \bar{Z}_{ba}'' & \bar{Z}_{sb} - \bar{Z}_{bb}'' & \bar{Z}_{sc} - \bar{Z}_{bc}'' \\ \bar{Z}_{ta} - \bar{Z}_{ca}'' & \bar{Z}_{tb} - \bar{Z}_{cb}'' & \bar{Z}_{tc} - \bar{Z}_{cc}'' \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\bar{Z}_D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

donde cada elemento de la submatriz anterior se determina mediante las expresiones:

$$D_{pq} = \bar{z}_{pq} - \bar{z}_{iq} - \bar{z}_{ph} + \bar{z}_{ih} \quad (2.48)$$

$$i, h = a, b, c$$

$$p, q = r, s, t$$

Finalmente, la matriz equivalente trifásica \bar{z}_{abc} se calcula mediante la ecuación (2.39).

2.2 Admitancia Paralelo de Líneas de Transmisión

La admitancia en paralelo de líneas de transmisión esta formada básicamente por dos parámetros: conductancia y capacitancia. Sin embargo, el primero de ellos se desprecia por las razones que se describen a continuación.

2.2.1 Conductancia de Líneas de Transmisión.

Concretamente, para este parámetro todavía no existe un modelo matemático preciso y con la simplicidad apropiada para poderlo manejar. Este parámetro resulta de la observación de las “corrientes de fuga” describiendo una trayectoria de las fases a tierra. Principalmente, estas corrientes fluyen a través del aislador hacia la torre, siendo función de la eficiencia del aislador, la cual varía significativamente con el calor, humedad atmosférica, contaminación y salinidad del ambiente, entre otros factores. Por esta razón, obtener un modelo matemático representativo de este fenómeno, resulta una tarea compleja. Por otro lado, es común despreciar el efecto de estas corrientes de fuga, debido a que representan un porcentaje muy pequeño con respecto a las corrientes nominales de la línea.

2.2.2 Capacitancia Monofásica

A partir de la ecuación de teoría de campo eléctrico:

$$\xi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \text{ V/m} \quad (2.49)$$

Donde $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, q es la carga en Coulombs. De acuerdo a la Figura 1.10, la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 esta dada por:

$$V_{12} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_2}{D_1} \text{ Vol} \quad (2.50)$$

donde ϵ es la permitividad del medio circundante.

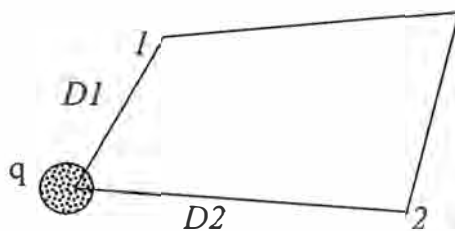


Figura 2.8 Esquema para analizar la caída de potencial entre dos puntos

A partir de la ecuación (2.50), puede encontrarse la expresión para una línea monofásica, la cual se representa por la Figura 2.9.

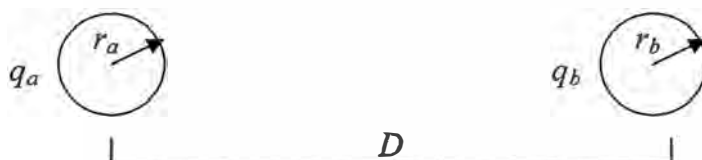


Figura 2.9 Línea monofásica para el análisis de capacitancias

La diferencia de potencial entre los dos conductores es la siguiente:

$$V_{ab} = \frac{q_a}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D}{r_a} + \frac{q_b}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_b}{D} \quad (2.51)$$

Y sabiendo que $q_a = -q_b$ la ecuación anterior se simplifica como sigue:

$$V_{ab} = \frac{q_a}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D^2}{r_a r_b} \text{ F/m} \quad (2.52)$$

Por definición, la capacitancia es:

$$C = \frac{q}{V_{ab}} \text{ F/ul} \quad (2.53)$$

Substituyendo (2.52) en (2.53), y considerando que $r_a = r_b = r$,

$$C_{ab} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/r)} \text{ F/m} \quad (2.54)$$

2.2.3 Capacitancia para líneas de Transmisión

En esta sección, se presentara el método general para determinar capacitancias para una línea con cualquier número de conductores, incluyendo hilos de guarda y considerando el efecto de tierra.

La figura 2.10 muestra el esquema de cargas-imágenes, para considerar el efecto de tierra en el cálculo de capacitancias. Con este método, los voltajes involucrados se determinan mediante la ecuación siguiente:

$$V_i = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{j=1}^n q_j \ln \frac{H_{ij}}{D_{ij}} \quad (2.55)$$

donde:

H_{ij} = Distancia entre el conductor i y la imagen del conductor j . Si $i = j$, H_{ii} es la distancia del conductor i a su propia imagen.

D_{ij} = Distancia entre los conductores i y j . Si $i = j$, H_{ii} es el radio exterior del conductor i .

q_j = Carga del conductor j .

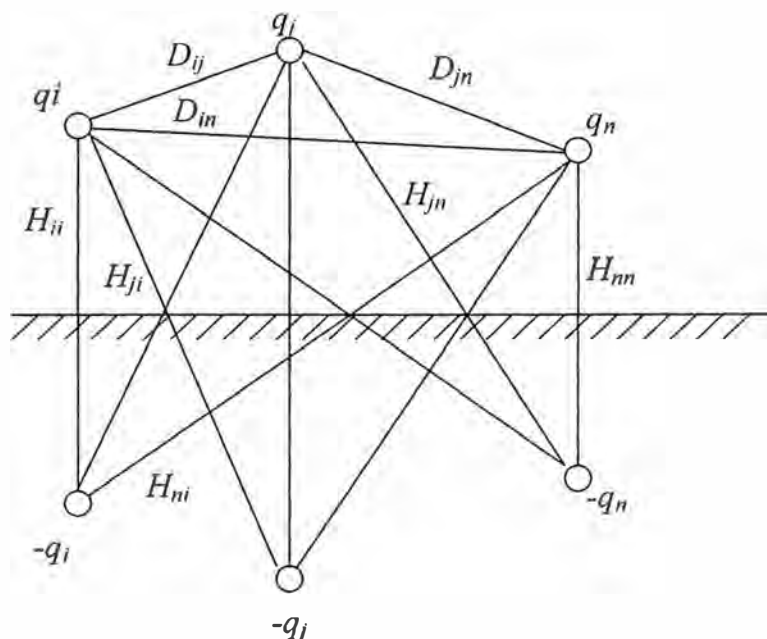


Figura 2.10 Conductores con sus respectivas imágenes, representados por cargas.

La ecuación (2.55) puede compactarse para obtener:

$$V = P q \quad (2.56)$$

donde V es el vector de voltajes, P es una matriz de coeficientes de potencial y q es el vector que contiene a las cargas. La matriz de coeficientes de potencial se define como:

$$\left. \begin{aligned} P_{ii} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{H_{ii}}{r_i}; & i = j & \text{ en } F^{-1} \text{ m} \\ P_{ij} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{H_{ij}}{r_j}; & i = j & \text{ en } F^{-1} \text{ m} \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

donde r es el radio exterior del conductor i . Si la ecuación anterior se escribe en la forma siguiente:

$$q = P^{-1}V \quad \text{coul/m} \quad (2.58)$$

se podrá definir:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{F/ul} \quad (2.59)$$

En términos fasoriales, para la densidad de carga Q y el voltaje V , la ecuación (2.58) se escribe como:

$$Q = CV \quad (2.60)$$

multiplicando ambos miembros por $j\omega$

$$I = j\omega Q = j\omega CV \quad (2.61)$$

y sabiendo que $I = YV$, entonces

$$Y = j\omega C \quad (2.62)$$

donde Y , es la admitancia en paralelo de la línea de transmisión.

2.3 Transposición de Conductores en Líneas de Transmisión

Hasta este momento, se ha calculado los parámetros de la línea de transmisión en base a sus unidades correspondientes, por unidad de longitud. En esta sección, se obtendrán los parámetros considerando la longitud de la línea, a fin de observar el efecto de las transposiciones sobre los mismos.

A manera de ilustración, únicamente se observará el efecto de la transposición sobre la impedancia serie, debido a que el efecto sobre la admitancia en derivación es similar.

El equivalente trifásico de la impedancia serie relacionando voltajes y corrientes es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{aa} & \bar{Z}_{ab} & \bar{Z}_{ac} \\ \bar{Z}_{ba} & \bar{Z}_{bb} & \bar{Z}_{bc} \\ \bar{Z}_{ca} & \bar{Z}_{cb} & \bar{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Aquí, es clara la existencia de acoplamientos mutuos, de modo que las corrientes de cualquier conductor producirán caídas de tensión en los conductores adyacentes, Además, estas caídas de tensión pueden ser diferentes entre si, aun para corrientes balanceadas, debido a que las impedancias mutuas dependen del arreglo Físico de los conductores de la línea.

Únicamente se tendrá un efecto balanceado de los acoplamientos mutuos cuando la línea tenga un espaciamiento triangular equilátero, es decir, que $D_{ab} = D_{bc} = D_{ca}$. Sin embargo, este tipo de arreglo es pocas veces utilizado en la realidad, debido a cuestiones del diseño mecánico de la línea.

Otra manera para balancear las impedancias mutuas consiste en la realización de transposiciones a lo largo de la línea. Una transposición es una rotación física de los conductores que puede ejecutarse a intervalos o irregulares de la distancia total de la línea.

2.3.1 Método General de Transposiciones

Este método permite obtener parámetros de la línea con cualquier número de transposiciones y a cualquier distancia que se desee para cada transposición, tal como muestra la Figura 2.11, donde se presenta la transposición completa de la línea consistente en dos rotaciones.

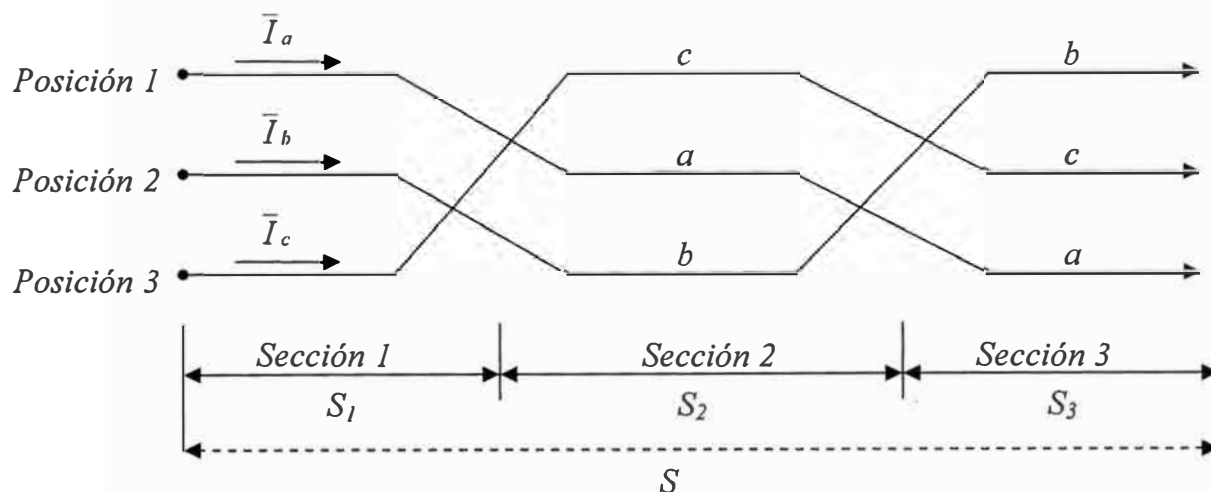


Figura 2.11 Esquema de la Transposición completa de una línea de transmisión

Matemáticamente, para lograr las rotaciones se utiliza las dos matrices de rotación siguientes:

$$R_{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

y su inversa:

$$R_{\phi}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

pudiéndose comprobar que $R_{\phi}^{-1} = R'_{\phi}$

Un ciclo completo de transposición está dado por las transformaciones lineales definidas como:

$$R_{\phi} V_{abc} = \left(R_{\phi} Z_{abc} R_{\phi}^{-1} \right)^R_{\phi} I_{abc} \quad (2.66)$$

que es llamada “Transformación R_ϕ ”.

$$R_\phi^{-1}V_{abc} = (R_\phi^{-1}Z_{abc}R_\phi)R_\phi^{-1}I_{abc} \quad (2.67)$$

que es llamada “Transformación R_ϕ^{-1} ”.

Si se desea analizar el efecto de la transposición, sin tomar en cuenta la longitud S de la línea, entonces se define lo siguiente para un ciclo completo:

$$f_k = \frac{S_k}{S}; \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.68)$$

donde:

$$\sum f_k = 1 \quad (2.69)$$

Partiendo de la figura 2.11, el cálculo de parámetros con transposiciones, para cada una de las secciones es como sigue:

Primera sección:

$$Z_{(1)} = (Z_{abc})(s_1) \quad \Omega \quad (2.70)$$

Segunda sección

$$Z_{(2)} = (R_\phi^{-1}Z_{abc}R_\phi)(s_2) \quad \Omega \quad (2.71)$$

Tercera sección

$$Z_{(3)} = (R_\phi Z_{abc}R_\phi^{-1})(s_3) \quad \Omega \quad (2.72)$$

Por ultimo, se tendrá la impedancia serie total de la línea de transmisión:

$$Z_{abc} = Z_{(1)} + Z_{(2)} + Z_{(3)} \quad \Omega \quad (2.73)$$

De acuerdo a lo anterior, puede observarse que con este método puede calcularse transposiciones en cantidades y longitudes que se desee.

2.3.2 Línea No Transpuesta

La figura 2.12 muestra una línea no transpuesta. El modelo matricial permite observar el mayor grado de desbalance que puede existir entre los acoplamientos mutuos se presenta en este caso, cuya impedancia de la línea, considerando su longitud, se determina como sigue:

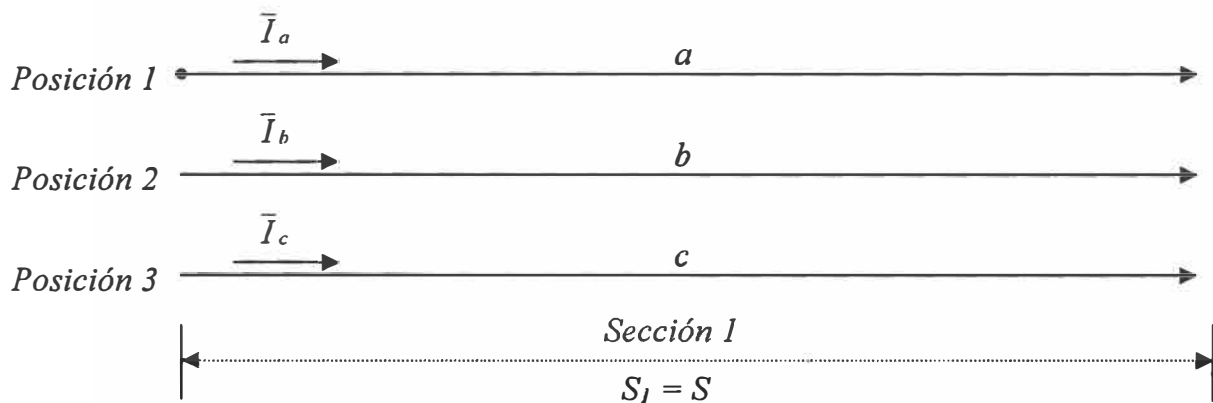


Figura 2.12 Línea no Transpuesta

$$s_1 = S \quad (2.74)$$

$$s_2 = s_3 = 0 \quad (2.75)$$

$$Z_{abc} = Z_{(1)} \quad (2.76)$$

2.3.3 Línea con Transposiciones Parciales

Una transposición parcial es la que resulta de dividir a la línea en solo dos secciones de longitud haciendo una rotación, tal como lo muestra la Figura 2.13.

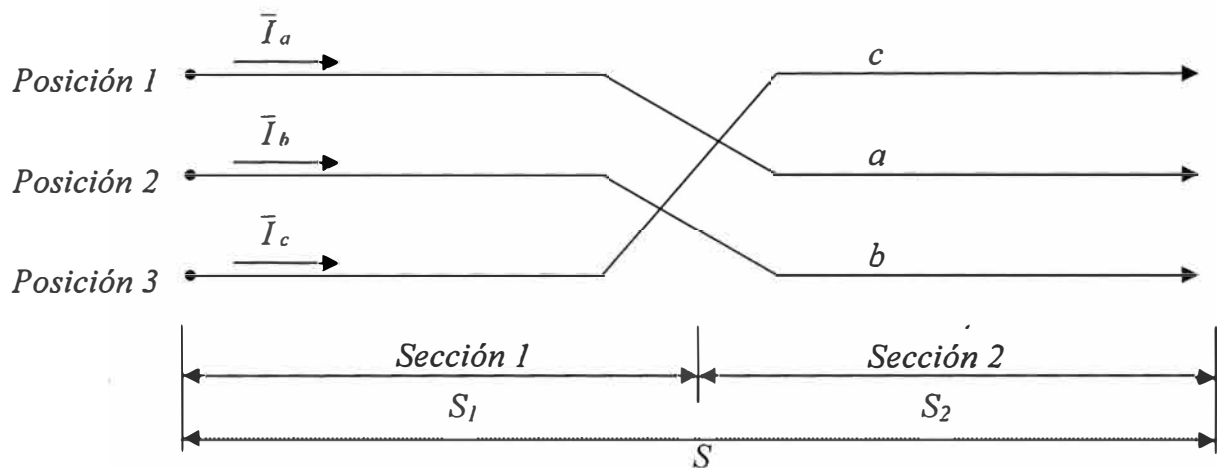


Figura 2.13 Línea de transmisión con transposición parcial

En este caso,

$$S = s_1 + s_2 \quad (2.77)$$

$$s_3 = 0 \quad (2.78)$$

$$Z_{abc} = Z_{(1)} + Z_{(2)} \quad (2.79)$$

donde, la rotación se logra aplicando las ecuaciones (2.70) y (2.71) para calcular $Z_{(1)}$ y $Z_{(2)}$ respectivamente.

El grado de desbalance para el caso de líneas con transposiciones parciales será menor que el caso de tener una línea no transpuesta, debido a que una rotación ayuda considerablemente al balanceo de los efectos mutuos.

En general, los resultados de las dos secciones anteriores serán los siguientes:

$$\bar{Z}_{abc} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{aa} & \bar{Z}_{ab} & \bar{Z}_{ac} \\ \bar{Z}_{ba} & \bar{Z}_{bb} & \bar{Z}_{bc} \\ \bar{Z}_{ca} & \bar{Z}_{cb} & \bar{Z}_{cc} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

donde:

$$\bar{Z}_{ab} \neq \bar{Z}_{ac}, \bar{Z}_{bc} \neq \bar{Z}_{ba}, \bar{Z}_{ca} \neq \bar{Z}_{cb} \quad (2.81)$$

Las transposiciones completas de línea son las que permiten balancear perfectamente los efectos propios y mutuos. Sin embargo, cualquier tipo de transposición, ya sea parcial o total, económicamente resultará costosa, además de que los desbalances en los acoplamientos mutuos son relativamente pequeños.

Ante una transposición ideal, se tendrá el siguiente modelo trifásico de la línea de transmisión:

$$\bar{Z}_{abc} = \begin{bmatrix} \bar{Z} & \bar{M} & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{Z} & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{M} & \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Para todos los casos anteriores, se obtiene un modelo trifásico de los efectos serie y derivación de la línea de transmisión. Sin embargo, cuando se tiene el caso de dos líneas de transmisión sobre un mismo derecho de vía o dos o más líneas físicamente cercanas entre si, el modelo que se obtiene será de orden mayor.

2.3.4 Línea de Transmisión con Circuitos Múltiples

Cuando una línea de transmisión contiene dos o más circuitos en paralelo, entonces se habla de un sistema de transmisión de circuitos múltiples. Para este tipo de sistemas, las ecuaciones de voltaje pueden escribirse de la manera siguiente:

$$\bar{V}_p = \bar{Z}_p \bar{I}_p \quad (2.83)$$

donde:

$$\mathcal{V}_p = \begin{bmatrix} \overline{V}_a \\ \overline{V}_a \\ \overline{V}_a \\ \vdots \\ \overline{V}_A \\ \overline{V}_B \\ \overline{V}_C \end{bmatrix}; \quad \mathcal{I}_p = \begin{bmatrix} \overline{I}_a \\ \overline{I}_b \\ \overline{I}_c \\ \vdots \\ \overline{I}_A \\ \overline{I}_B \\ \overline{I}_C \end{bmatrix}; \quad \overline{Z}_p = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{aa} & \overline{Z}_{ab} & \overline{Z}_{ac} & \cdots & \overline{Z}_{aA} & \overline{Z}_{aB} & \overline{Z}_{aC} \\ \overline{Z}_{ba} & \overline{Z}_{bb} & \overline{Z}_{bc} & \cdots & \overline{Z}_{bA} & \overline{Z}_{bB} & \overline{Z}_{bC} \\ \overline{Z}_{ca} & \overline{Z}_{cb} & \overline{Z}_{cc} & \cdots & \overline{Z}_{cA} & \overline{Z}_{cB} & \overline{Z}_{cC} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{Z}_{Aa} & \overline{Z}_{Ab} & \overline{Z}_{Ac} & \cdots & \overline{Z}_{AA} & \overline{Z}_{AB} & \overline{Z}_{AC} \\ \overline{Z}_{Ba} & \overline{Z}_{Bb} & \overline{Z}_{Bc} & \cdots & \overline{Z}_{BA} & \overline{Z}_{BB} & \overline{Z}_{BC} \\ \overline{Z}_{Ca} & \overline{Z}_{Cb} & \overline{Z}_{Cc} & \cdots & \overline{Z}_{CA} & \overline{Z}_{CB} & \overline{Z}_{CC} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

El orden del conjunto de ecuaciones (2.83) será de 3 veces el número de circuitos múltiples. Por ejemplo, para una línea con dos circuitos múltiples, el modelo matricial será de orden 6.

Ante la presencia de circuitos múltiples se tiene que construir el modelo matricial de la siguiente manera:

1. Conductores principales de A
2. Conductores principales de B
3. Conductores agrupados de A
4. Conductores agrupados de B
5. Hilos de guarda de A
6. Hilos de guarda de B

El orden de la matriz será igual al número total de conductores y siempre será cuadrada y simétrica. Después de que se ha formado la matriz general, se harán las operaciones necesarias para reducirla, hasta obtener una matriz equivalente de orden $3N$ donde N es el número de circuitos soportados en un mismo derecho de vía.

2.3.5 Transformación Lineal de Componentes Simétricas

Considerando que se tiene un sistema trifásico balanceado perfectamente, cuya matriz de coeficientes es la siguiente:

$$\mathbf{Z}_{abc} = \begin{bmatrix} \bar{Z} & \bar{M} & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{Z} & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{M} & \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Una transformación lineal, permite trasladar un conjunto de ecuaciones definido en un marco de referencia a otro. Para ello, puede formalmente plantearse el problema de pasar de un sistema de coordenadas de fase (abc) al sistema de coordenadas de secuencia (012). En este caso, se parte de la relación lineal:

$$\mathbf{V}_{abc} = \mathbf{Z}_{abc} \mathbf{I}_{abc} \quad (2.86)$$

El cual puede trasladarse al marco de referencia de las componentes simétricas, aplicando la transformación lineal siguiente:

$$\mathbf{V}_{abc} = \mathbf{T}_s \mathbf{V}_{012} = \mathbf{Z}_{abc} \mathbf{I}_{abc} = \mathbf{Z}_{abc} \mathbf{T}_s \mathbf{I}_{012} \quad (2.87)$$

o también,

$$\mathbf{T}_s \mathbf{V}_{012} = \mathbf{Z}_{abc} \mathbf{T}_s \mathbf{I}_{012} \quad (2.88)$$

Premultiplicando ambos miembros por \mathbf{T}_s^{-1} :

$$\mathbf{V}_{012} = \mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{Z}_{abc} \mathbf{T}_s \mathbf{I}_{012} \quad (2.89)$$

y de aquí, se obtiene que:

$$\mathbf{V}_{012} = \mathbf{Z}_{012} \mathbf{I}_{012} \quad (2.90)$$

Donde:

$$\mathbf{Z}_{012} = \mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{Z}_{abc} \mathbf{T}_s \quad (2.91)$$

Para el modelo trifásico perfectamente balanceado, se define la matriz de transformación lineal como:

$$T_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

donde $a = 1\angle 120^\circ$, $a^2 = 1\angle 240^\circ$. La inversa de T_S , será:

$$T_S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Es fácilmente demostrable que realizando el producto matricial de la ecuaciones (2.91), se obtiene una matriz diagonal de la forma:

$$Z_{012} = \begin{bmatrix} Z + 2M & & \\ & Z - M & \\ & & Z - M \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

donde se nota que los elementos diagonales son exactamente los valores propios de Z_{abc} . La matriz (2.94) representará tres circuitos monofásicos desacoplados electromagnéticamente entre sí. Este concepto se ilustra en la Figura 2.14, donde se muestra un circuito trifásico y sus respectivas redes de secuencias monofásicas y desacopladas.

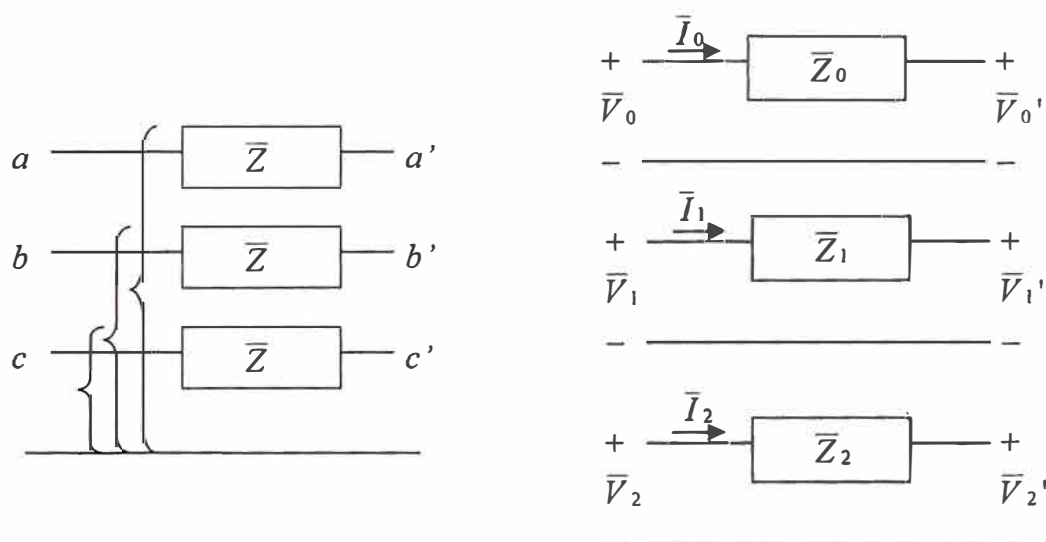


Figura 2.14 Red trifásica y redes monofásicas de secuencia desacopladas

2.3.6 Transformación de un Sistema Trifásico de Circuitos Múltiples

Cuando una red eléctrica contiene dos o más circuitos trifásicos acopados magnéticamente, entonces se habla de un sistema de circuitos múltiples. Para este tipo de sistemas las ecuaciones de voltaje pueden escribirse de la manera siguiente:

$$V_p = z_p I_p \quad (2.95)$$

donde:

$$V_p = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ \vdots \\ V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}; \quad I_p = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ \vdots \\ I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}; \quad Z_p = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} & \cdots & z_{aA} & z_{aB} & z_{aC} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} & \cdots & z_{bA} & z_{bB} & z_{bC} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} & \cdots & z_{cA} & z_{cB} & z_{cC} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{Aa} & z_{Ab} & z_{Ac} & \cdots & z_{AA} & z_{AB} & z_{AC} \\ z_{Ba} & z_{Bb} & z_{Bc} & \cdots & z_{BA} & z_{BB} & z_{BC} \\ z_{Ca} & z_{Cb} & z_{Cc} & \cdots & z_{CA} & z_{CB} & z_{CC} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Mediante una transformación lineal, puede establecerse que:

$$\begin{aligned} V_p &= TV \\ I_p &= TI \end{aligned} \quad (2.97)$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} T_s & & \\ & \ddots & \\ & & T_s \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Los vectores de voltaje y corriente de secuencia serán los siguientes:

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_0 \\ V_1 \\ V_n \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_0 \\ I_1 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

De manera similar al caso del circuito trifásico único, se tiene la expresión relacionando voltajes y corrientes de secuencia:

$$V = ZI \quad (2.100)$$

donde:

$$Z = T^{-1}Z_p T \quad (2.101)$$

En este caso, se tiene un modelo matemático en el marco de referencia de fase, caracterizado por acoplamiento mutuo entre fases, el cual se convierte en varios circuitos desacoplados entre sí, al pasar el marco de referencia de secuencias.

Sin embargo, debe recordarse que la transformación de componentes simétricas se obtiene partiendo de un modelo de circuito trifásico perfectamente balanceado. Esto implica que para modelos que no cumplan con esta condición, el desacoplamiento de los circuitos de secuencia no será total. De hecho, una situación típica se presenta al aplicar

la transformación al modelo de una línea con circuitos múltiples, donde se observa un fuerte acoplamiento entre las componentes de secuencia cero.

El tratamiento de las transposiciones para líneas de transmisión con múltiples circuitos, es semejante a la aplicación de la transformación de componentes simétricas, es decir, las transformaciones lineales se aplican en forma de bloques diagonales, cuyo número dependerá de los circuitos múltiples involucrados.

CAPÍTULO III

ASPECTOS COMPUTACIONALES

3.1 Consideraciones

Para el cálculo de la matriz de impedancias de la línea de transmisión se considerara que los conductores de fase están integrados por un conductor principal y varios conductores agrupados. Entonces, la matriz de impedancias serie general debe construirse bajo el siguiente orden:

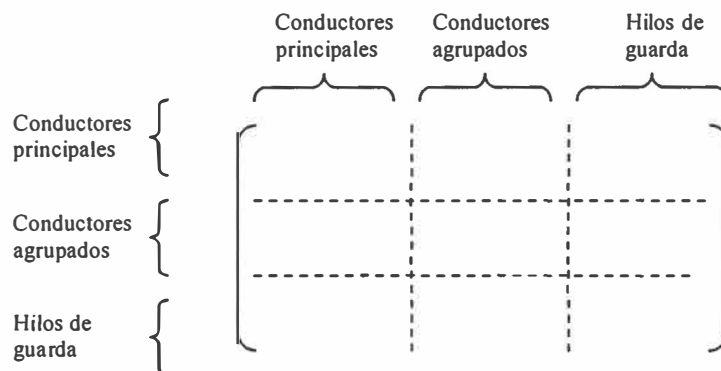


Figura 3.1. Forma general de la matriz de impedancias serie

Entonces la matriz de impedancias serie general será de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}
 \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} & \bar{Z}_{14} & \cdots & \bar{Z}_{1(3+N)} & \bar{Z}_{1(3+N+1)} & \cdots & \bar{Z}_{1(3+N+Ng)} \\
 \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} & \bar{Z}_{24} & \cdots & \bar{Z}_{2(3+N)} & \bar{Z}_{2(3+N+1)} & \cdots & \bar{Z}_{2(3+N+Ng)} \\
 \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} & \bar{Z}_{34} & \cdots & \bar{Z}_{3(3+N)} & \bar{Z}_{3(3+N+1)} & \cdots & \bar{Z}_{3(3+N+Ng)} \\
 \hline
 \bar{Z}_{41} & \bar{Z}_{42} & \bar{Z}_{43} & \bar{Z}_{44} & \cdots & \bar{Z}_{4(3+N)} & \bar{Z}_{4(3+N+1)} & \cdots & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \bar{Z}_{(3+N)1} & \bar{Z}_{(3+N)2} & \bar{Z}_{(3+N)3} & \bar{Z}_{(3+N)4} & \cdots & \bar{Z}_{(3+N)(3+N)} & \bar{Z}_{(3+N)(3+N+1)} & \cdots & \cdots \\
 \hline
 \bar{Z}_{(3+N+1)1} & \bar{Z}_{(3+N+1)2} & \bar{Z}_{(3+N+1)3} & \bar{Z}_{(3+N+1)4} & \cdots & \bar{Z}_{(3+N+1)(3+N)} & \bar{Z}_{(3+N+1)(3+N+1)} & \cdots & \bar{Z}_{(3+N+1)(3+N+Ng)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \bar{Z}_{(3+N+Ng)1} & \bar{Z}_{(3+N+Ng)2} & \bar{Z}_{(3+N+Ng)3} & \bar{Z}_{(3+N+Ng)4} & \cdots & \bar{Z}_{(3+N+Ng)(3+N)} & \bar{Z}_{(3+N+Ng)(3+N+1)} & \cdots & \bar{Z}_{(3+N+Ng)(3+N+Ng)}
 \end{bmatrix}$$

donde:

N = número de conductores agrupados.

N_g = número de cables de guarda.

Cuando la línea de transmisión sea el tipo multicircuitos, esto es, que la torre de transmisión soporte más de un circuito, o que se tengan varias torres sobre un mismo derecho de vía, entonces el orden anterior se modificara. Supóngase que se tienen dos circuitos A y B soportados en una misma torre de transmisión. En este caso, el orden para la formación de la matriz general de impedancias serie será como sigue:

1. Conductores principales de A
2. Conductores principales de B
3. Conductores agrupados de A
4. Conductores agrupados de B
5. Hilos de guarda de A
6. Hilos de guarda de B

El orden de la matriz será igual al número total de conductores y siempre será cuadrada y simétrica. Después de que se ha formado la matriz general, se harán las operaciones necesarias para reducirla, hasta obtener una matriz equivalente de orden $3N$ donde N es el número de circuitos soportados en un mismo derecho de vía.

Para el cálculo de los elementos de la matriz de impedancia seria se debe de tener en cuenta la enumeración de los conductores. Por ejemplo, para una línea de transmisión que lleva dos circuitos A y B con 3 conductores por fase y dos cables de guarda la enumeración será como sigue:

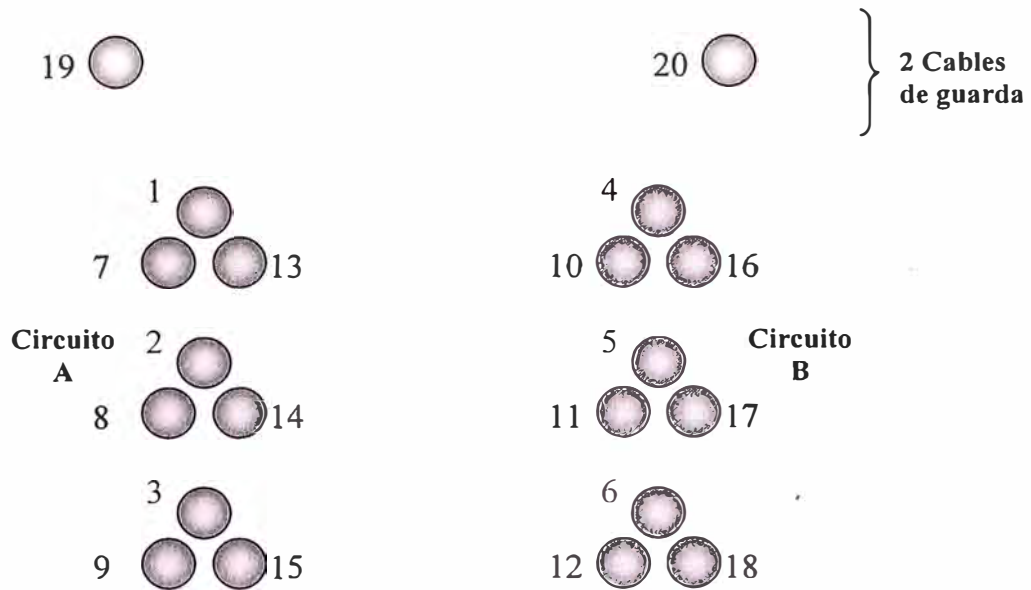


Figura 3.2 Enumeración de los conductores

3.2 Procedimiento para el cálculo de la Matriz Zabc e Yabc

Los procedimientos generales que se deben de seguir para el desarrollo del aplicativo son los siguientes:

- a) **Lectura de datos:** Los datos que deben ingresarse al programa son: número total de conductores, número de hilos de guarda, resistencia de cada conductor, radio medio geométrico de cada conductor, radio exterior de cada conductor, coordenadas geométricas de cada conductor, frecuencia y resistividad del terreno.
- b) **Formación de la Matriz de Distancias entre Conductores:** Las distancias se calculan en base a las coordenadas geométricas de los conductores. Considerando como referencia a la tierra para el eje vertical. Luego de la figura 2.3 se observa que los elementos de la Matriz de distancias pueden calcularse mediante la siguiente ecuación:

$$D_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ; i \neq j \quad (3.1)$$

$$S_{ij} = H_{ij} = \sqrt{(x_i - x_{j'})^2 + (y_i - y_{j'})^2} \quad (3.2)$$

$$m_{ij} = x_{j'} - x_i, \quad i \neq j \quad (3.3)$$

$$m_{ii} = 0 \quad (3.4)$$

donde:

x_i, x_j = coordenadas horizontales de los conductores i y j , respectivamente.

y_i, y_j = coordenadas verticales de los conductores i y j , respectivamente.

$x_{j'}, y_{j'}$ = coordenadas horizontales y verticales de la imagen del conductor j .

Podrá observarse que $D_{ij} = D_{ji}$, de modo que es suficiente formar una matriz de distancias entre conductores triangular superior o inferior, sin incluir la diagonal.

- c) **Cálculo de la Matriz General de Impedancias Serie:** El orden de la matriz será igual al número total de conductores que formen la línea de transmisión. Los elementos de la diagonal se determinan con la ecuación (2.29) y los de fuera de la diagonal mediante la ecuación (2.30).
- d) **Reducción de hilos de Guarda y Conductores Agrupados en las Fases:** Primeramente aplicando la ecuación (2.39) se obtiene el equivalente trifásico de la impedancia serie de la línea de transmisión reduciendo los hilos de guarda, y luego se aplican las ecuaciones (2.44) al (2.47) para reducir los conductores agrupados.
- e) **Construcción de la Matriz de Coeficientes de Potencial:** Los elementos de la matriz de coeficientes de potencial se define como:

$$P_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{H_{ii}}{r_i}; \quad i = j \quad (3.5)$$

donde r_i es el radio exterior del conductor i .

Asimismo,

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ell n \frac{H_{ij}}{D_{ij}}; \quad i \neq j \quad (3.6)$$

- f) **Cálculo de la Matriz Y_{abc}** : Para el cálculo de la matriz Y_{abc} se tiene que reducir primero los Hilos de Guarda y Conductores Agrupados de la matriz de coeficientes de potencial; para lo cual, se procede en forma similar al descrito en d).

Luego, la matriz de admitancias en derivación trifásica, se obtiene al invertir la matriz de coeficientes de potencial reducida, y multiplicándola por el término jw , tal como lo muestran las ecuaciones (2.59) y (2.62). El orden de la matriz por invertir es de 3, únicamente. La forma general de la matriz de admitancias en derivación será la siguiente:

$$Y_{abc} = \begin{bmatrix} y_{aa} & -y_{ab} & -y_{ac} \\ -y_{ba} & y_{bb} & -y_{bc} \\ -y_{ca} & -y_{cb} & y_{cc} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Los signos de los elementos en (2.63) se deben a que todos los elementos de la matriz de coeficientes de potencial P son positivos.

3.3 ¹ Diagrama de bloque del programa.

A continuación, se muestra el diagrama de bloques para calcular las impedancias serie y admitancias de una línea de transmisión mediante un programa de computadora digital; la cual, se muestra en las figuras 3.3 y 3.4, como se muestra.

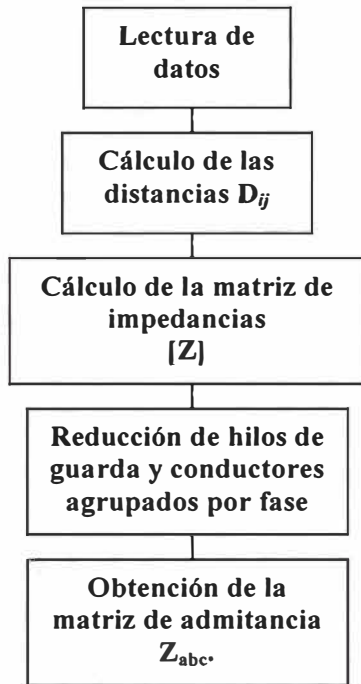


Figura 3.3
Diagrama de bloques de un programa de computadora digital para el cálculo de impedancias serie de líneas de transmisión.

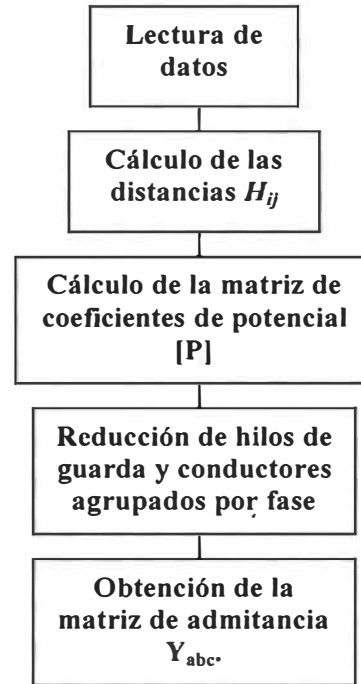


Figura 3.4 Diagrama de bloques para el cálculo de la matriz de admitancias en derivación Y_{abc} para líneas de transmisión trifásicas.

3.4 Elaboración de un Aplicativo mediante Software.

A continuación, se muestra una breve descripción de los principales características del aplicativo elaborado en Visual Basic.

Presentación del programa:

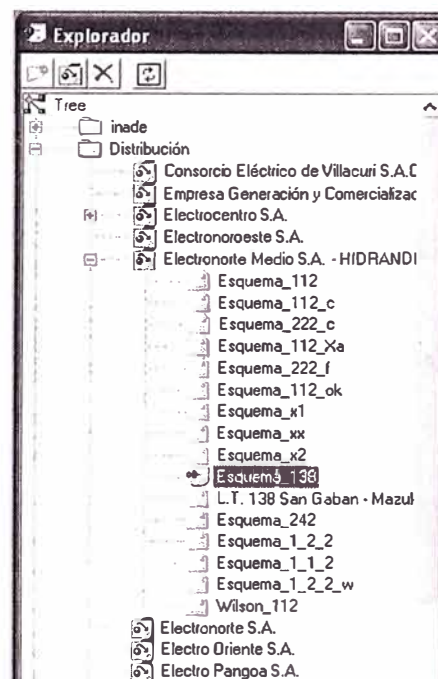


Menú principal:



- 1.- Abre la ventana de Explorados de Esquemas.
- 2.- Abre la Ventana de Diseño de Esquemas.
- 3.- Guarda la configuración de un esquema de una torre.
- 4.- Modo de Carga de un esquema grabado.
- 5.- Modo de Diseño de un esquema.
- 6.- Hace más grande el esquema diseñado.
- 7.- Hace más pequeño el esquema diseñado.
- 8.- Muestra la numeración de los conductores.
- 9.- Graficar un haz de conductores Activos.
- 10.- Graficas un conductor de guarda.
- 11.- Mover gráfico del conductor.
- 12.- Borrar gráfico del conductor.
- 13.- Hacer un conductor equidistante a otro respecto del eje vertical.

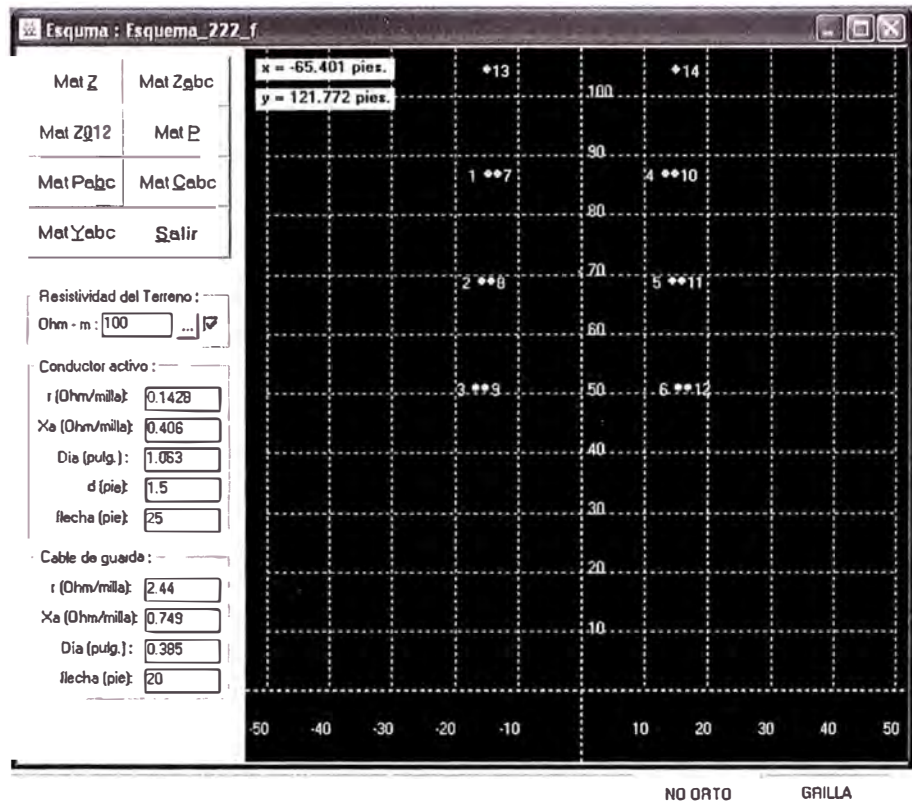
Explorador de esquemas:



Ventana de Diseño de esquemas:

Botones:

Mat <u>Z</u>	Mat <u>Z</u> _{abc}
Mat <u>Z</u> ₀₁₂	Mat <u>P</u>
Mat <u>P</u> _{abc}	Mat <u>C</u> _{abc}
Mat <u>Y</u> _{abc}	Salir



Donde:

Mat Z: Muestra la Matriz de Impedancia Seria sin reducción de cables de guarda ni conductores agrupados.

Mat Z_{abc}: Muestra la Matriz de Impedancia Seria reducida.

Mat Z₀₁₂: Muestra la Matriz de Componentes Simétricas de **Mat Z_{abc}**

Mat P: Muestra la Matriz de Coeficientes de Potenciales sin reducción de cables de guarda ni conductores agrupados.

Mat P_{abc}: Muestra la Matriz de Coeficientes de Potenciales reducida.

Mat C_{abc}: Muestra la Matriz de Capacitancias reducida.

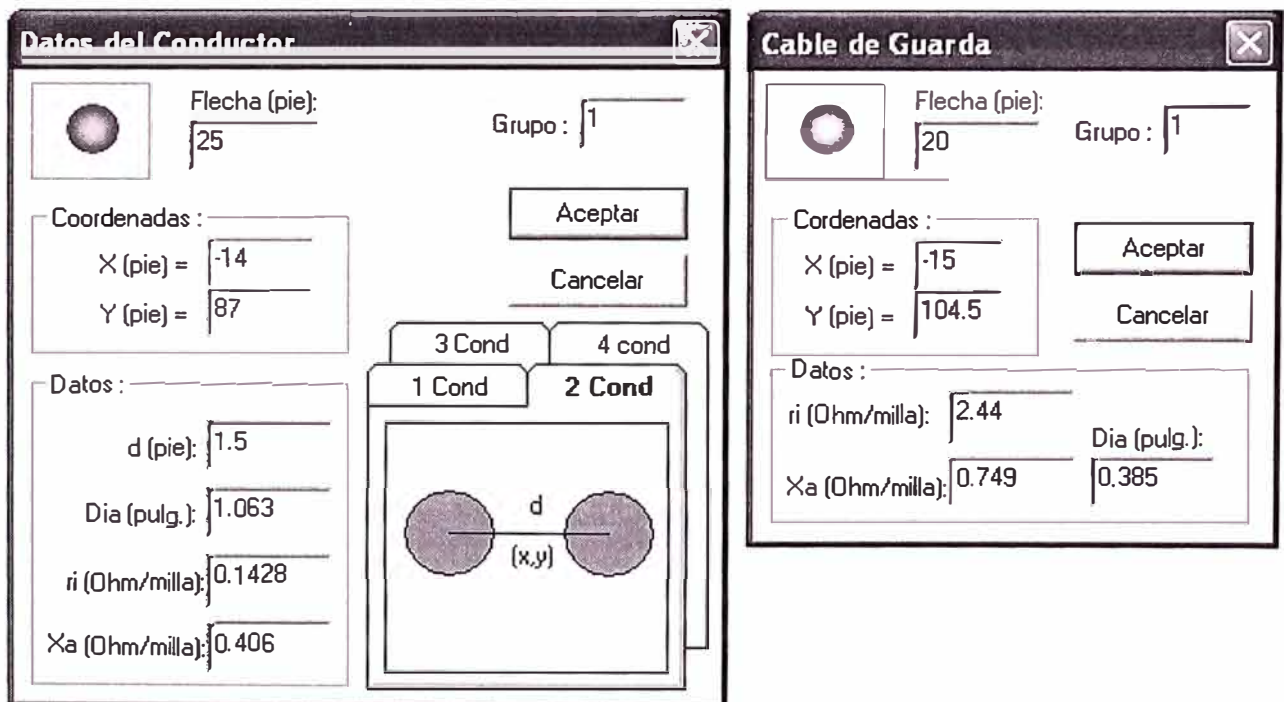
Mat Y_{abc}: Muestra la Matriz de Admitancia reducida.

Salir: Cierra la ventana de Diseño de Esquemas.

Cambiar la Resistividad del Terreno: Presionar el botón de puntos (...) y mostrará la ventana de *Resistividad del Terreno* que me permite ingresar del valor deseado.



Ingreso de Datos:



Datos de conductor:

Flecha: Ingreso de la flecha del conductor en pie.

X: Ingreso de la coordenada horizontal respecto al origen de coordenadas en pies

Y: Ingreso de la coordenada Vertical respecto al origen de coordenadas en pies

r1: Resistencia interna del conductor en ohm / milla

xa: Reactancia inductiva a 1 pie de separación en ohm / milla

dia: Diámetro exterior del conductor en pulgadas.

Grupo: Numeración de grupo del haz de conductores.

Datos del Cable de Guarda:

Flecha: Ingreso de la flecha del cable de Guarda en pie.

X: Ingreso de la coordenada horizontal respecto al origen de coordenadas en pies

Y: Ingreso de la coordenada Vertical respecto al origen de coordenadas en pies

r1: Resistencia interna del cable de guarda en ohm / milla

xa: Reactancia inductiva a 1 pie de separación en ohm / milla

dia: Diámetro exterior del cable de guardas en pulgadas.

Num.: Numeración del cable de guarda.

CAPÍTULO IV CÁLCULO DEL PROGRAMA

4.1 Ejemplo 1

Una línea de transmisión de 161 kV con conductor de fase Grosbel 636 MCM (26/7) ACSR y conductor de guarda con 7 hebras N° 8 ACW se muestra en la figura 4.1. La resistividad del terreno es de $100 \Omega\text{-m}$. Se desea encontrar la matriz de impedancia serie de los conductores trifásicos equivalente del circuito. Los parámetros de los circuitos pueden ser obtenidos de la tabla de datos de los conductores que se muestra a continuación. Asumir flecha 0 para ambos conductores y frecuencia de 60 Hz.

Conductor	Resistencia interna $R_1 (\Omega / \text{mile})$	Reactancia inductiva a 1 pie de separación $X_a (\Omega / \text{mile})$	Diámetro (pulg.)
636 MCM (26/7)ACSR	0.1618	0.412	0.990
7 hebras No. 8 ACW	2.440	0.749	0.385

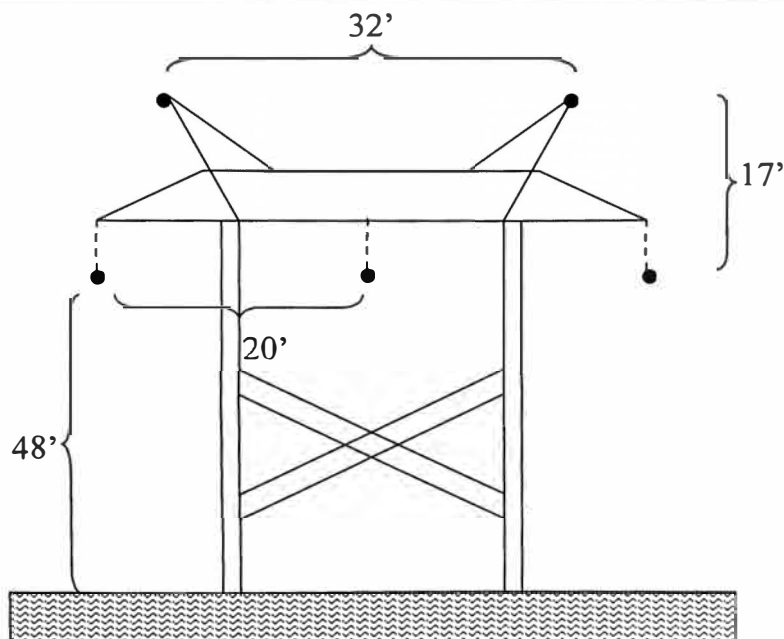


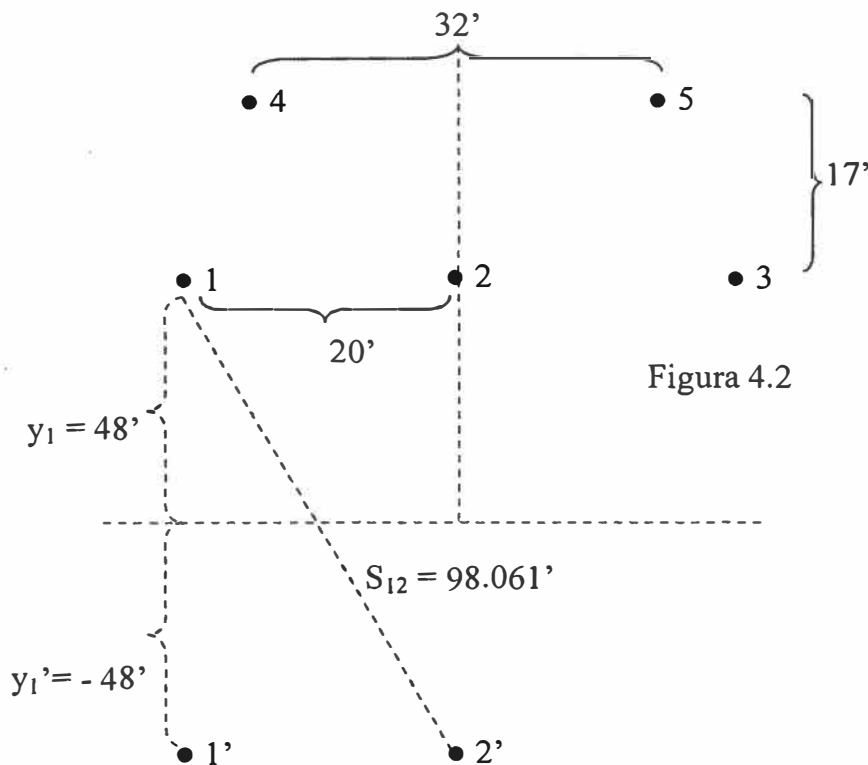
Figura 4.1

Calculando la inductancia interna:

$$X_i = X_a - 0.004657 * f * \log\left(\frac{24}{Dia_i}\right)$$

$$X_{i \text{ Conductor}} = 0.412 - 0.004657 * 60 * \log\left(\frac{24}{0.990}\right) = 0.02512176092 \Omega / mil$$

$$X_{i \text{ Cable de Guarda}} = 0.749 - 0.004657 * 60 * \log\left(\frac{24}{0.385}\right) = 0.2475108119 \Omega / mil$$



Conductor i	Xi (pie)	Yi (pie)	Xi' (pie)	Yi' (pie)
Conductor 1	-20	48	-20	-48
Conductor 2	0	48	0	-48
Conductor 3	20	48	20	-48
Conductor 4	-16	65	-16	-65
Conductor 6	16	65	16	-65

$$Dia_1 = 0.990 \text{ pulg.}$$

$$D_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-20 - 0)^2 + (48 - 48)^2} = 20 \text{ pie}$$

$$S_{11} = H_{11} = \sqrt{(x_1 - x_{1'})^2 + (y_1 - y_{1'})^2} = \sqrt{(-20 + 20)^2 + (48 + 48)^2} = 96 \text{ pie}$$

$$S_{12} = H_{12} = \sqrt{(x_1 - x_{2'})^2 + (y_1 - y_{2'})^2} = \sqrt{(-20 - 0)^2 + (48 + 48)^2} = 98.061 \text{ pie}$$

$$k_{11} = 8.565 \times 10^{-4} S_{11} \sqrt{f/\rho} = 8.565 \times 10^{-4} * 96 \sqrt{60/100} = 0.0636904$$

$$k_{12} = 8.565 \times 10^{-4} S_{12} \sqrt{f/\rho} = 8.565 \times 10^{-4} * 98.061 \sqrt{60/100} = 0.06505779059$$

$$\theta_{11} = 0 \text{ rad}$$

$$\theta_{12} = \text{Arc sin } \frac{m_{12}}{S_{12}} = \text{Arc sin } \frac{20}{98} = 0.20987059 \text{ rad}$$

Reemplazando en las ecuaciones (2.22) y (2.23) se tiene:

$$P_{11} = \frac{\pi}{8} - \frac{k_{11}}{3\sqrt{2}} \cos \theta_{11} + \frac{k_{11}^2}{16} \left(0.6728 + \text{In } \frac{2}{k_{11}} \right) \cos 2\theta_{11} + \frac{k_{11}^2}{16} \theta_{11} \sin 2\theta_{11} + \frac{k_{11}^3}{45\sqrt{2}} \cos 3\theta_{11} - \frac{\pi k_{11}^4}{1536} \cos 4\theta_{11}$$

$$P_{11} = 0.3787355852$$

$$P_{12} = \frac{\pi}{8} - \frac{k_{12}}{3\sqrt{2}} \cos \theta_{12} + \frac{k_{12}^2}{16} \left(0.6728 + \text{In } \frac{2}{k_{12}} \right) \cos 2\theta_{12} + \frac{k_{12}^2}{16} \theta_{12} \sin 2\theta_{12} + \frac{k_{12}^3}{45\sqrt{2}} \cos 3\theta_{12} - \frac{\pi k_{12}^4}{1536} \cos 4\theta_{12}$$

$$P_{12} = 0.3787080778$$

$$Q_{11} = -0.0368 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{k_{11}} + \frac{k_{11}}{3\sqrt{2}} \cos \theta_{11} - \frac{\pi k_{11}^2}{64} \cos 2\theta_{11} + \frac{k_{11}^3}{45\sqrt{2}} \cos 3\theta_{11} - \frac{k_{11}^4 \theta}{384} \sin 4\theta_{11} - \frac{k_{11}^4}{384} \cos 4\theta_{11} \left(\ln \frac{2}{k_{11}} + 1.0895 \right)$$

$$Q_{11} = 1.705044194$$

$$Q_{12} = -0.0368 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{k_{12}} + \frac{k_{12}}{3\sqrt{2}} \cos \theta_{11} - \frac{\pi k_{12}^2}{64} \cos 2\theta_{11} + \frac{k_{12}^3}{45\sqrt{2}} \cos 3\theta_{11} - \frac{k_{12}^4 \theta}{384} \sin 4\theta_{12} - \frac{k_{12}^4}{384} \cos 4\theta_{12} \left(\ln \frac{2}{k_{12}} + 1.0895 \right)$$

$$Q_{12} = 1.69211054$$

Reemplazando en las ecuaciones (2.18) y (2.19) se tiene que:

$$Z_{ii} = Z_{ii-g} = \left(r_i + 6.4374 \times 10^{-4} \omega P_{11} \right) + j \left[x_i + 3.2187 \times 10^{-4} \omega \ln \frac{24 S_{ii}}{Dia_i} + 6.4374 \times 10^{-4} \omega Q_{11} \right]$$

$$Z_{11} = 0.1618 + 6.4374 \times 10^{-4} \times 377 \times 0.3787 + j \left(\frac{0.0251 + 3.2187 \times 10^{-4} \times 377 \times \ln \frac{24 \times 96}{0.99}}{6.4374 \times 10^{-4} \times 377 \times 1.7050} + \right)$$

$$Z_{11} = 0.2537 + j1.3796399$$

$$Z_{12} = Z_{12-g} = \left(6.4374 \times 10^{-4} \omega P_{12} \right) + j \left[3.2187 \times 10^{-4} \omega \ln \frac{S_{12}}{D_{12}} + 6.4374 \times 10^{-4} \omega Q_{12} \right]$$

$$Z_{12} = \left(6.4374 \times 10^{-4} \times 2\pi 60 \times 0.3787 \times 0.3787 \right) + j \left[\frac{3.2187 \times 10^{-4} \times 2\pi 60 \times \ln \frac{98.061}{20}}{6.4374 \times 10^{-4} \times 2\pi 60 \times 1.69211} + \right]$$

$$Z_{12} = 0.0919 + j0.6033$$

y así sucesivamente hasta hallar todo los elementos de la matriz de impedancia serie, la cual se muestra a continuación:

$$Z_{abcwv-g} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2537 + j1.3787 & 0.0919 + j0.6033 & 0.0919 + j0.5192 & 0.0914 + j0.6203 & 0.0913 + j0.5204 \\ 0.0919 + j0.6033 & 0.2537 + j1.3787 & 0.0919 + j0.6033 & 0.0914 + j0.5851 & 0.0914 + j0.5851 \\ 0.0919 + j0.5192 & 0.0919 + j0.6033 & 0.2537 + j1.3787 & 0.0913 + j0.5204 & 0.0914 + j0.6203 \\ 0.0914 + j0.6203 & 0.0914 + j0.5851 & 0.0913 + j0.5204 & 2.5308 + j1.7170 & 0.0908 + j0.5475 \\ 0.0913 + j0.5204 & 0.0914 + j0.5851 & 0.0914 + j0.6203 & 0.0908 + j0.5475 & 2.5308 + j1.7170 \end{bmatrix} \end{matrix} \Omega / \text{mile}$$

Aplicando la transformación $Z_{zbc-g} = Z_A - Z_B Z_D^{-1} Z_C$, a la matriz de arriba puede reducirse a una matriz Z_{abc-g} de 3 por 3, donde:

$$Z_A = \begin{bmatrix} 0.2537 + j1.3787 & 0.0919 + j0.6033 & 0.0919 + j0.5192 \\ 0.0919 + j0.6033 & 0.2537 + j1.3787 & 0.0919 + j0.6033 \\ 0.0919 + j0.5192 & 0.0919 + j0.6033 & 0.2537 + j1.3787 \end{bmatrix}$$

$$Z_B = \begin{bmatrix} 0.0914 + j0.6203 & 0.0913 + j0.5204 \\ 0.0914 + j0.5851 & 0.0914 + j0.5851 \\ 0.0913 + j0.5204 & 0.0914 + j0.6203 \end{bmatrix}$$

$$Z_C = \begin{bmatrix} 0.0914 + j0.6203 & 0.0914 + j0.5851 & 0.0913 + j0.5204 \\ 0.0913 + j0.5204 & 0.0914 + j0.5851 & 0.0914 + j0.6203 \end{bmatrix}$$

$$Z_D = \begin{bmatrix} 2.5308 + j1.7170 & 0.0908 + j0.5475 \\ 0.0908 + j0.5475 & 2.5308 + j1.7170 \end{bmatrix}$$

Este circuito de cinco conductores se reduce a un modelo equivalente de 3 conductores descritos por la matriz de impedancia serie:

$$Z_{abc-g} = \begin{bmatrix} 0.3545 + j1.2128 & 0.1942 + j0.4343 & 0.1894 + j0.3548 \\ 0.1942 + j0.4343 & 0.3593 + j1.2060 & 0.1942 + j0.4343 \\ 0.1894 + j0.3548 & 0.1942 + j0.4343 & 0.3545 + j1.2128 \end{bmatrix} \Omega / \text{mile}$$

Resolviendo el problema anterior a través del aplicativo en Visual Basic se tiene:

MATPARA Principal Esquema Ventana

Explorar Esquema Guardar Cargar Diseño Acercar Alejar Energía Guarda Número

Explorador

Tree

- Distribución
 - Consortio Eléctrico de Villacuri S.A.C.
 - Empresa Generación y Comercialización
 - Electrocentro S.A.
 - Electronoroste S.A.
 - Electronorte Medio S.A. - HIDRANDINA
 - Esquema_xo
 - Esquema_112
 - Esquema_112_c
 - Esquema_222_c
 - Esquema_242
 - Esquema_222_f
 - Esquema_112_Xa
 - Esquema_1_1_2
 - Esquema_1_2_2
 - Esquema_1_2_2_w
 - Wason_112
 - Electronorte S.A.
 - Electro Oriente S.A.
 - Electro Pangoa S.A.
 - Electro Sur Este S.A.A.
 - Electro Sur Medio S.A.A.
 - Electrosur S.A.
 - Electro Ucayali S.A.
 - Edelhor S.A.A.
 - Empresa de Distribución Eléctrica Cafete
 - Empresa Municipal de Servicios Eléctrico
 - Empresa de Servicios Eléctricos Municipi
 - Empresa Municipal de Servicio Eléctrico
 - Luz del Sur S.A.A.
 - INADE - Proyecto Especial Chavinochic
 - Servicios Eléctricos Rioja S.A.
 - Sociedad Eléctrica del Sur Oeste S.A.
 - Flindin Puno S.A.A.

Esquema

Mat Z Mat Zabc

Mat Z012 Mat P

Mat Pabc Mat Cabc

Mat Yabc Salir

Resistividad del Terreno:

Ohm - m: 100

Conductor activo:

r (Ohm/milla): 0.1618

Xa (Ohm/milla): 0.412

Dia (pulg.): 0.99

d (pie): 0

Ilecha (pie): 0

Cable de guarda:

r (Ohm/milla): 2.44

Xa (Ohm/milla): 0.749

Dia (pulg.): 0.385

Ilecha (pie): 0

x = -25.489
y = 30.447

MATPARA - [(Sin Título)]

Archivo

Explorar Esquema Guardar Cargar Diseño Acercar Alejar Energía Guarda Número

FECHA : 05/02/2006
HORA : 10:20:59 p.m.
MATRIZ DE IMPEDANCIA SERIE
Resistividad del terreno (ohm - m): 100

	1	2	3	4	5
1	0.2537 + j 1.3787	0.0919 + j 0.6033	0.0919 + j 0.5192	0.0914 + j 0.6203	0.0913 + j 0.5204
2	0.0919 + j 0.6033	0.2537 + j 1.3787	0.0919 + j 0.6033	0.0913 + j 0.5851	0.0913 + j 0.5851
3	0.0919 + j 0.5192	0.0919 + j 0.6033	0.2537 + j 1.3787	0.0913 + j 0.5204	0.0914 + j 0.6203
4	0.0914 + j 0.6203	0.0913 + j 0.5851	0.0913 + j 0.5204	2.5308 + j 1.7170	0.0908 + j 0.5475
5	0.0913 + j 0.5204	0.0913 + j 0.5851	0.0914 + j 0.6203	0.0908 + j 0.5475	2.5308 + j 1.7170

MATPARA - [(Sin Titulo)]			
Archivo			
Explorar	Esquema	Guardar	Cargar
Diseño	Acercar	Alejar	
FECHA : 05/02/2006			
HORA : 10:23:35 p.m.			
MATRIZ DE Zabc			
Resistividad del terreno (ohm - m): 100			
	1	2	3
1	0.3545 + j 1.2128	0.1942 + j 0.4344	0.1894 + j 0.3548
2	0.1942 + j 0.4344	0.3593 + j 1.2060	0.1942 + j 0.4344
3	0.1894 + j 0.3548	0.1942 + j 0.4344	0.3545 + j 1.2128

4.2 Ejemplo 2

Para el caso de una línea de transmisión con múltiples circuitos por fase como se muestra en la figura 4.3. Asumir que la resistividad de la tierra es de $100 \Omega\text{-m}$, frecuencia de 60 Hz, conductor es de 795 MCM (45/7) ACSR y cable de guarda de 7 hebras No. 8 ACW.

En el ejemplo anterior, no hemos considerado el efecto de la flecha en los conductores de fase y del cable de guarda. Ahora tomaremos en cuenta las flechas cuando calculemos los parámetros de la línea. En este ejemplo asumimos

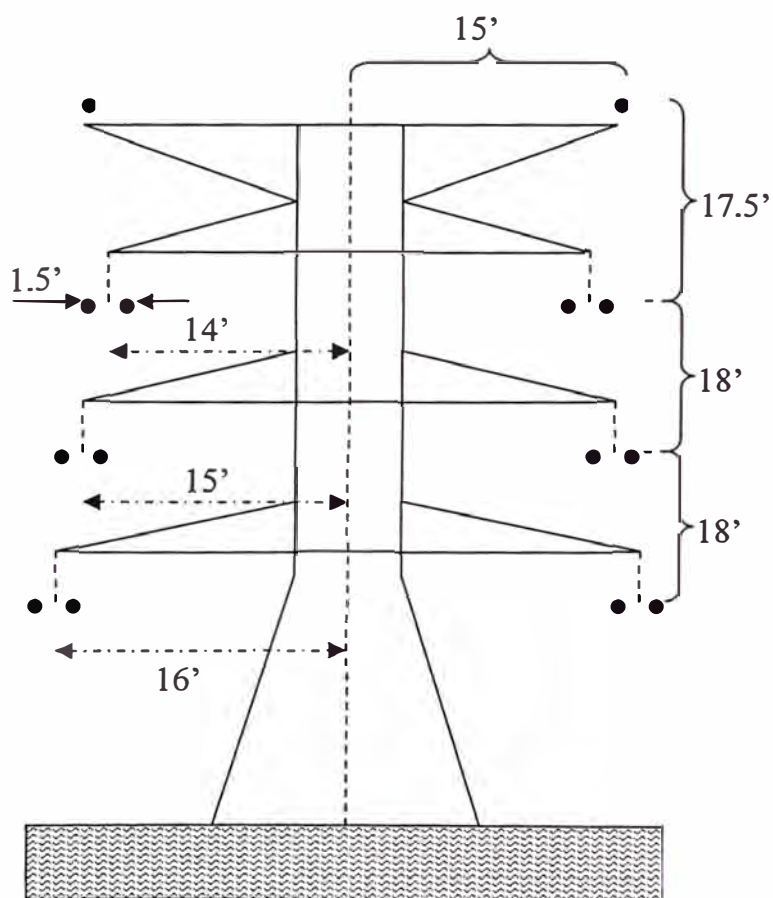


Figura 4.3

que la flecha para los conductores de fase es de 25 pies y para el cable de guarda es de 20 pies

Conductor	Resistencia interna $R_1 (\Omega / \text{mile})$	Reactancia inductiva a 1 pie de separación $X_a (\Omega / \text{mile})$	Diámetro (pulg.)
795 MCM (45/7)ACSR	0.1428	0.406	1.063
7 hebras No. 8 ACW	2.440	0.749	0.385

Tomando en cuenta las flechas se emplea la ecuación siguiente:

$$Y_i = Y_i - \frac{2}{3} \text{ flecha (pies)}$$

i	X_i	Y_i	X_i'	Y_i'
1	-14.75	70.3	-14.75	-70.3
2	-15.75	52.3	-15.75	-52.3
3	-16.75	34.3	-16.75	-34.3
4	13.25	70.3	13.25	-70.3
5	14.25	52.3	14.25	-52.3
6	15.25	34.3	15.25	-34.3
7	-13.25	70.3	-13.25	-70.3
8	-14.25	52.3	-14.25	-52.3
9	-15.25	34.3	-15.25	-34.3
10	14.75	70.3	14.75	-70.3
11	15.75	52.3	15.75	-52.3
12	16.75	34.3	16.75	-34.3
13	-15	91.16	-15	-91.16
14	15	91.16	15	-91.16

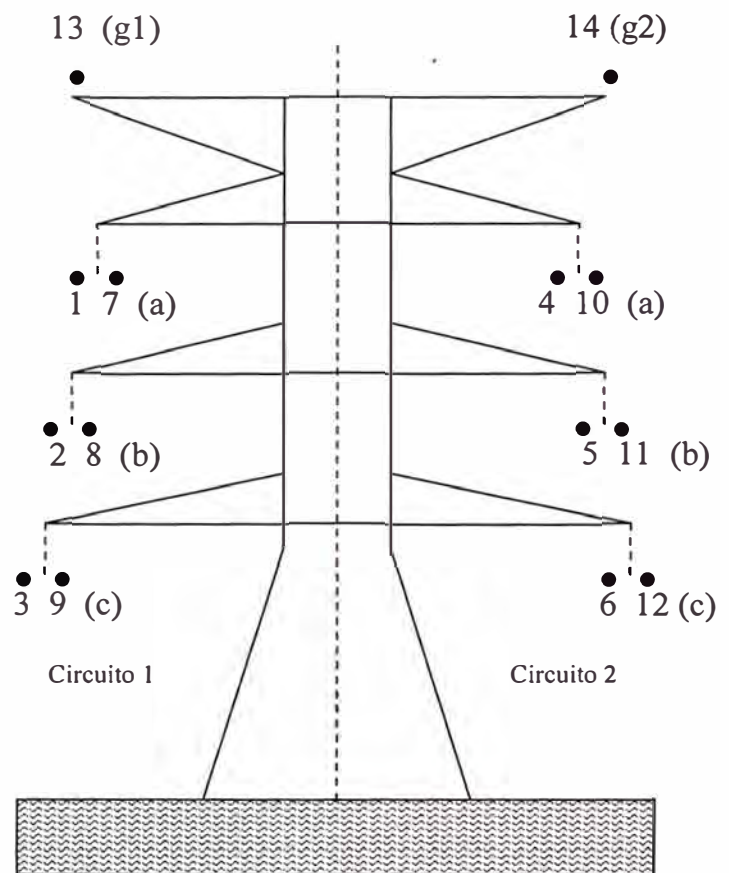


Figura 4.4

Se procede igual que en el ejemplo anterior, aplicando las formulas de Carson's y se obtiene una matriz de dimensión 14 dado que son 14 conductores. La matriz de impedancia que muestro a continuación está separada en una matriz de componentes reales y una matriz de componentes imaginarias. Los elementos de la matriz está en Ω /milla.

La matriz con elementos reales está dado por:

Parte real de $Z_{(abc)^1(abc)^2 g^1 g^2} =$

a1	b1	c1	a ²	b ²	c ²	a ¹	b ¹	c ¹	a ²	b ²	c ²	g ¹	g ²	
.2333	.0910	.0916	.0904	.0910	.0916	.0905	.0910	.0916	.0904	.0910	.0916	.0898	.0897	s <i>Main</i>
.0910	.2324	.0922	.0910	.0916	.0922	.0910	.0916	.0922	.0910	.0916	.0922	.0903	.0903	b <i>conductors</i>
.0916	.0922	.2356	.0916	.0922	.0928	.0916	.0922	.0928	.0916	.0922	.0928	.0909	.0909	c <i>ofcircuit1</i>
.0904	.0910	.0916	.2333	.0910	.0916	.0804	.0910	.0916	.0905	.0910	.0916	.0897	.0898	a <i>Main</i>
.0910	.0916	.0922	.0910	.2344	.0922	.0910	.0916	.0922	.0910	.0916	.0922	.0903	.0903	b <i>conductors</i>
.916	.0922	.0928	.0916	.0922	.2356	.0916	.0922	.0928	.0916	.0922	.0928	.0909	.0909	c <i>ofcircuit2</i>
.0905	.0910	.0916	.0904	.0910	.0916	.2333	.0910	.0916	.0904	.0910	.0916	.0898	.0898	a <i>Bundled</i>
.0910	.0916	.0922	.0910	.0916	.0922	.0910	.2344	.0922	.0910	.0916	.0922	.0903	.0903	b <i>conductors</i>
.0916	.0922	.0928	.0916	.0922	.0928	.0916	.0922	.2356	.0916	.0922	.0928	.0909	.0909	c <i>ofcircuit1</i>
.0904	.0910	.0916	.0905	.0910	.0916	.0904	.0910	.0916	.2333	.0910	.0916	.0898	.0898	a <i>Bundled</i>
.0910	.0916	.0922	.0910	.0916	.0922	.0910	.0916	.0922	.0910	.2344	.0922	.0903	.0903	b <i>conductors</i>
.0916	.0922	.0928	.0916	.0922	.0928	.0916	.0922	.0928	.0916	.0922	.2356	.0909	.0909	c <i>ofcircuit2</i>
.0898	.0903	.0909	.0897	.0903	.0909	.0898	.0903	.0909	.0898	.0903	.0909	2.529	.0891	g <i>Groundwires</i>
.0897	.0903	.0909	.0898	.0903	.0909	.0898	.0903	.0909	.0898	.0903	.0909	.0891	2.529	g <i>ofcircuit</i>

Parte imaginaria de $Z_{(abc)^1(abc)^2 g^1 g^2} =$

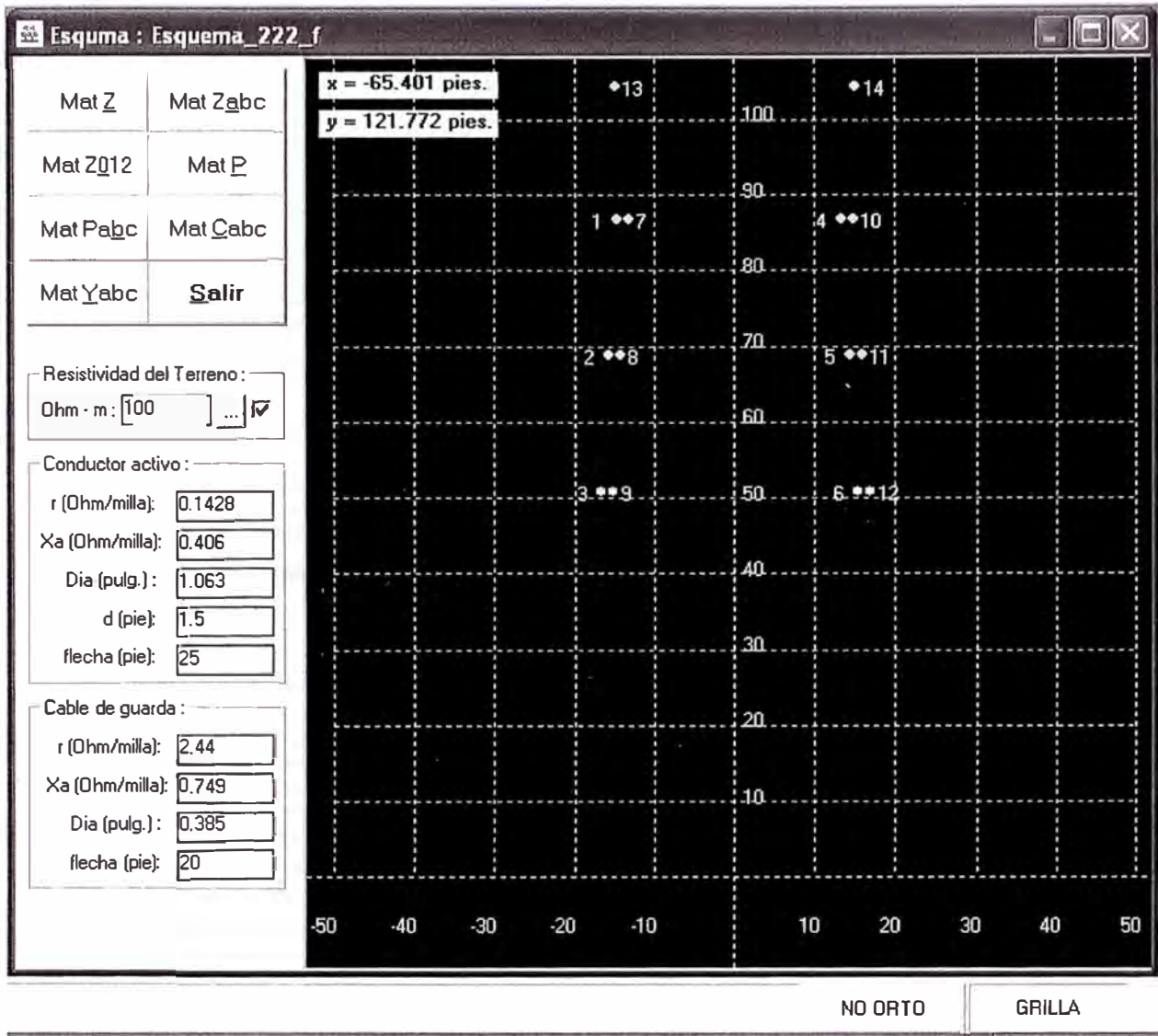
1.374	.6164	.5316	.5573	.5345	.0916	.9188	.6165	.5318	.5636	.5389	.4998	.5928	.5303
.6164	1.373	.6151	.5345	.5480	.0922	.6154	.9174	.6152	.5389	.5539	.5317	.5200	.4920
.5316	.6151	1.371	.4973	.5273	.0928	.5312	.6141	.9161	.4998	.5317	.5448	.4744	.4586
.5573	.5345	.4973	1.374	.6164	.0916	.5636	.5389	.4998	.9188	.6165	.5318	.5303	.5928
.5345	.5480	.5273	.6164	1.373	.0922	.5389	.5539	.5317	.6154	.9174	.6152	.4920	.5200
.4973	.5273	.5392	.5316	.6151	.2356	.4989	.5317	.5448	.5312	.6141	.9161	.4586	.4744
.9188	.6154	.5312	.5636	.5389	.4998	1.374	.6164	.5316	.5703	.5435	.5023	.5924	.5343
.6165	.9174	.6141	.5389	.5539	.5317	.6164	1.373	.6151	.5435	.5602	.5361	.5200	.4942
.5318	.6152	.9161	.4998	.5317	.5448	.5316	.6151	1.371	.5023	.5361	.5506	.4744	.4599
.5636	.5389	.4998	.9188	.6154	.5312	.5703	.5435	.5023	1.374	.6164	.5316	.5343	.5924
.5389	.5539	.5317	.6165	.9174	.6141	.5435	.5602	.5361	.6164	1.373	.6151	.4942	.5200
.4998	.5317	.5448	.5318	.6152	.9161	.5023	.5361	.5506	.5316	.6151	1.371	.4599	.4744
.5928	.5200	.4744	.4744	.0903	.4586	.5924	.5200	.4744	.5343	.4942	.4599	1.719	.5569
.5303	.4920	.4586	.4586	.0903	.4744	.5343	.4942	.4599	.5924	.5200	.4744	.5569	1.719

Reduciendo el efecto de los conductores de guarda y la formación de haces se obtiene una matriz de impedancia de dimensión 6.

$$Z_{(abc-g)(abc-g)^2} =$$

0.2585 + j0.9855	0.1754 + j0.4694	0.1673 + j0.3948	0.1858 + j0.4035	0.1748 + j0.3925	0.1670 + j0.3632
0.1754 + j0.4694	0.2367 + j1.0111	0.1583 + j0.4901	0.1748 + j0.3925	0.1650 + j0.4203	0.1581 + j0.4070
0.1673 + j0.3948	0.1583 + j0.4901	0.2234 + j1.0274	0.1670 + j0.3632	0.1581 + j0.4070	0.1519 + j0.4286
0.1858 + j0.4035	0.1748 + j0.3925	0.1670 + j0.3632	0.2585 + j0.9855	0.1754 + j0.4694	0.1673 + j0.3948
0.1748 + j0.3925	0.1650 + j0.4203	0.1581 + j0.4070	0.1754 + j0.4694	0.2367 + j1.0111	0.1583 + j0.4901
0.1670 + j0.3632	0.1581 + j0.4070	0.1519 + j0.4286	0.1673 + j0.3948	0.1583 + j0.4901	0.2234 + j1.0274

Resolviendo el problema anterior a través del aplicativo en Visual Basic se tiene:



(Sin Título)

FECHA : 26/02/2006
 HORA : 07:04:08 p.m.
 MATRIZ DE IMPEDANCIA SERIE Z
 Unidades : Ohm / mil
 Resistividad del terreno (ohm - m): 100

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.2333 + j 1.3744	0.0910 + j 0.6168	0.0916 + j 0.5321	0.0904 + j 0.5641	0.0910 + j 0.5394	0.0916 + j 0.5003	0.0905 + j 0.9192	0.0910 + j 0.6170
2	0.0910 + j 0.6168	0.2344 + j 1.3731	0.0922 + j 0.6155	0.0910 + j 0.5394	0.0916 + j 0.5544	0.0922 + j 0.5321	0.0910 + j 0.6159	0.0916 + j 0.9179
3	0.0916 + j 0.5321	0.0922 + j 0.6155	0.2356 + j 1.3717	0.0916 + j 0.5003	0.0922 + j 0.5321	0.0928 + j 0.5452	0.0916 + j 0.5317	0.0922 + j 0.6145
4	0.0904 + j 0.5641	0.0910 + j 0.5394	0.0916 + j 0.5003	0.2333 + j 1.3744	0.0910 + j 0.6168	0.0916 + j 0.5321	0.0904 + j 0.5708	0.0910 + j 0.5440
5	0.0910 + j 0.5394	0.0916 + j 0.5544	0.0922 + j 0.5321	0.0910 + j 0.6168	0.2344 + j 1.3731	0.0922 + j 0.6155	0.0910 + j 0.5440	0.0916 + j 0.5606
6	0.0916 + j 0.5003	0.0922 + j 0.5321	0.0928 + j 0.5452	0.0916 + j 0.5321	0.0922 + j 0.6155	0.2366 + j 1.3717	0.0916 + j 0.5027	0.0922 + j 0.5366
7	0.0905 + j 0.9192	0.0910 + j 0.6159	0.0916 + j 0.5317	0.0904 + j 0.5708	0.0910 + j 0.5440	0.0916 + j 0.5027	0.2333 + j 1.3744	0.0910 + j 0.6168
8	0.0910 + j 0.6170	0.0916 + j 0.9179	0.0922 + j 0.6145	0.0910 + j 0.5440	0.0916 + j 0.5606	0.0922 + j 0.5366	0.0910 + j 0.6168	0.2344 + j 1.3731
9	0.0916 + j 0.5322	0.0922 + j 0.6157	0.0928 + j 0.9166	0.0916 + j 0.5027	0.0922 + j 0.5366	0.0928 + j 0.5510	0.0916 + j 0.5321	0.0922 + j 0.6155
10	0.0904 + j 0.5577	0.0910 + j 0.5349	0.0916 + j 0.4978	0.0905 + j 0.9192	0.0910 + j 0.6170	0.0916 + j 0.5322	0.0904 + j 0.5641	0.0910 + j 0.5394
11	0.0910 + j 0.5349	0.0916 + j 0.5485	0.0922 + j 0.5278	0.0910 + j 0.6159	0.0916 + j 0.9179	0.0922 + j 0.6157	0.0910 + j 0.5394	0.0916 + j 0.5544
12	0.0916 + j 0.4978	0.0922 + j 0.5278	0.0928 + j 0.5397	0.0916 + j 0.5317	0.0922 + j 0.6145	0.0928 + j 0.9166	0.0916 + j 0.5003	0.0922 + j 0.5321
13	0.0898 + j 0.6007	0.0904 + j 0.5245	0.0909 + j 0.4776	0.0898 + j 0.5374	0.0904 + j 0.4972	0.0909 + j 0.4625	0.0898 + j 0.6003	0.0904 + j 0.5245
14	0.0898 + j 0.5333	0.0904 + j 0.4950	0.0909 + j 0.4611	0.0898 + j 0.6003	0.0904 + j 0.5245	0.0909 + j 0.4776	0.0898 + j 0.5374	0.0904 + j 0.4972

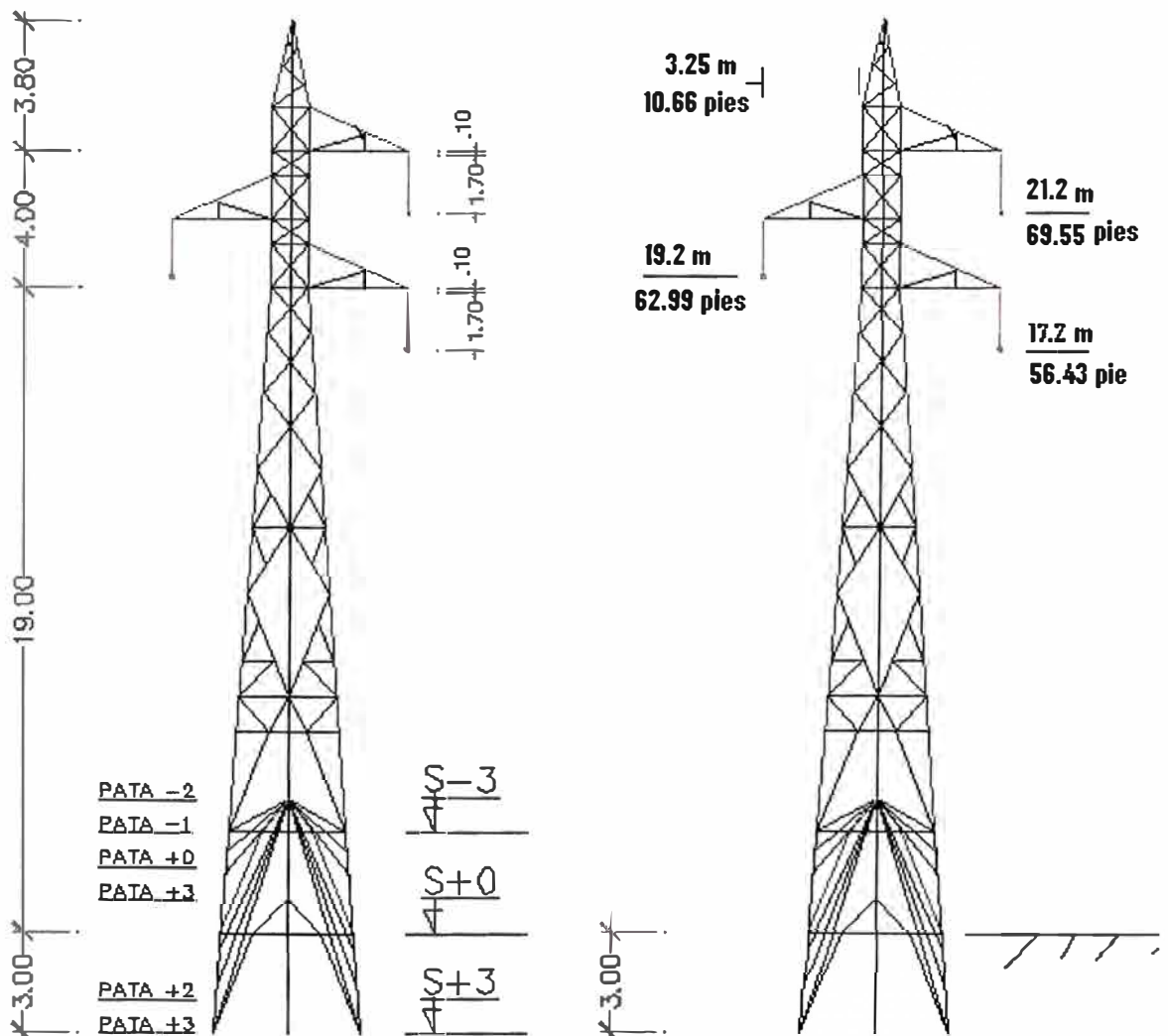
(Sin Título)

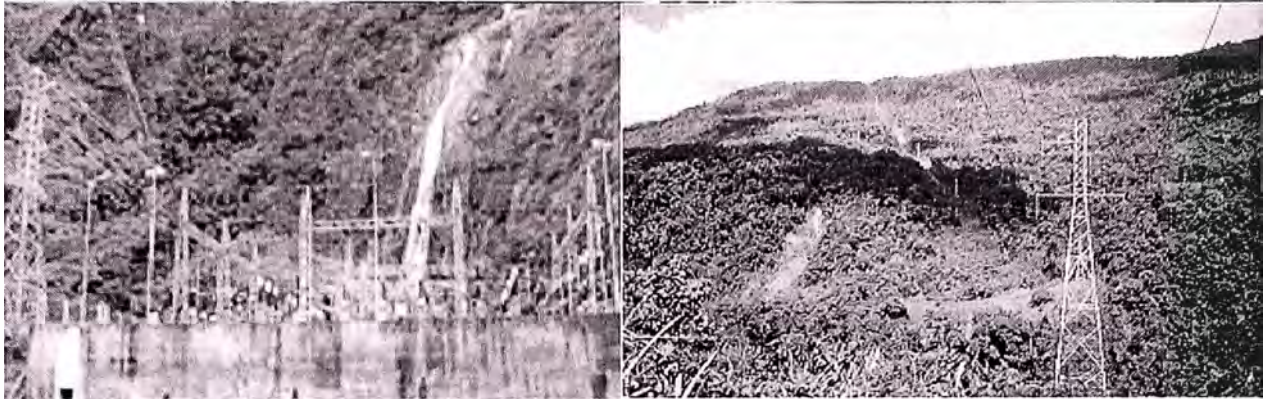
FECHA : 26/02/2006
 HORA : 07:09:46 p.m.
 MATRIZ DE IMPEDANCIA SERI REDUCIDA Zabc
 Unidades : Ohm / mil
 Resistividad del terreno (ohm - m): 100

	1	2	3	4	5	6
1	0.2608 + j0.9831	0.1772 + j0.4676	0.1688 + j0.3933	0.1880 + j0.4012	0.1765 + j0.3908	0.1684 + j0.3617
2	0.1772 + j0.4676	0.2380 + j1.0098	0.1594 + j0.4890	0.1765 + j0.3908	0.1663 + j0.4190	0.1592 + j0.4060
3	0.1688 + j0.3933	0.1594 + j0.4890	0.2244 + j1.0266	0.1684 + j0.3617	0.1592 + j0.4060	0.1528 + j0.4278
4	0.1880 + j0.4012	0.1765 + j0.3908	0.1684 + j0.3617	0.2608 + j0.9831	0.1772 + j0.4676	0.1688 + j0.3933
5	0.1765 + j0.3908	0.1663 + j0.4190	0.1592 + j0.4060	0.1772 + j0.4676	0.2380 + j1.0098	0.1594 + j0.4890
6	0.1684 + j0.3617	0.1592 + j0.4060	0.1528 + j0.4278	0.1688 + j0.3933	0.1594 + j0.4890	0.2244 + j1.0266

4.3 Líneas Típicas del Perú

4.3.1 LT. 138 San Gabán – Mazuko (Futura línea)





S.E. San Gabán 138 kV

Línea en 138 kV

Línea de Transmisión San Gabán – Mazuko 138 KV: Las principales características de este tramo de línea son las siguientes:

- Tensión Nominal	:	138 kV
- Número de Ternas	:	Una
- Longitud	:	68 km
- Conductor	:	200 mm ² Al Aluminio
- Cable de Guarda	:	50 mm ² Acero EHS
- Estructuras	:	Torres Metálicas
- Aisladores	:	Poliméricos

Conductor	Resistencia interna $R_1 (\Omega / \text{mile})$	Reactancia inductiva a 1 pie de separación $X_a (\Omega / \text{mile})$	Diámetro (pulg.)
200 mm ² AAAC	0.322	0.459	0.721

Asumiendo una flecha de 20 pies para los conductores sin considerar cable de guarda y una resistividad del terreno promedio de 100 Ω -m, se tiene que:

Conductor i	X_i (pie)	Y_i (pie)	X_i' (pie)	Y_i' (pie)
Conductor 1	-10.66	62.99	-10.66	-62.99
Conductor 2	10.66	69.55	10.66	-69.55
Conductor 3	10.66	56.43	10.66	-56.43

Mediante el programa se tiene los resultados de la matriz de impedancia serie, como se muestra a continuación:

(Sin Título)			
FECHA : 13/02/2006			
HORA : 05:53:40 a.m.			
MATRIZ DE IMPEDANCIA SERIE Z			
Unidades : Ohm / mil			
Resistividad del terreno (ohm - m): 100			
	1	2	3
1	0.4138 + j 1.4259	0.0916 + j 0.5904	0.0920 + j 0.5899
2	0.0916 + j 0.5904	0.4134 + j 1.4263	0.0918 + j 0.6545
3	0.0920 + j 0.5899	0.0918 + j 0.6545	0.4142 + j 1.4254

MATRIZ DE COMPONENTES SIMÉTRICOS Z(012):

(Sin Título)			
FECHA : 13/02/2006			
HORA : 05:58:03 a.m.			
MATRIZ DE COMPONENTES SIMÉTRICOS Z(012)			
Unidades : Ohm / mil			
Resistividad del terreno (ohm - m): 100			
	1	2	3
1	0.5974 + j 2.6491	0.0004 + j -0.0211	-0.0004 + j -0.0218
2	-0.0004 + j -0.0218	0.3220 + j 0.8143	0.0000 + j 0.0429
3	0.0004 + j -0.0211	0.0000 + j 0.0429	0.3220 + j 0.8143

MATRIZ DE COEFICIENTES DE POTENCIAL P:

(Sin Título)			
FECHA : 13/02/2006			
HORA : 05:59:50 a.m.			
MATRIZ DE COEFICIENTES DE POTENCIAL P			
Unidades : m / nF			
Resistividad del terreno (ohm - m): 100			
	1	2	3
1	145.4171 + j 0.0000	28.3038 + j 0.0000	26.0349 + j 0.0000
2	28.3038 + j 0.0000	147.6437 + j 0.0000	36.3234 + j 0.0000
3	26.0349 + j 0.0000	36.3234 + j 0.0000	142.8745 + j 0.0000

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES:

1. El algoritmo del programa funciona de manera apropiada tal y como se diseño. La consigna de un programa modular y flexible para el análisis de los sistemas de transmisión se obtuvo de manera que el usuario puede construir cualquier topología para el sistema de transmisión con múltiples circuitos trifásicos donde cada fase usa más de un conductor, es decir en formación de haces.
2. El programa es capaz de almacenar y cargar los datos de cada perfil o esquema de distribución de conductores diseñado, dado que los datos es almacenado en una base de datos en Access; el cual, facilita el trabajo con el mismo, y sobre todo se obtuvo una interfaz amigable para el usuario, el cual de manera casi intuitiva puede entender y manipular las diferentes pantallas del software.
3. El uso del software es sencillo y directo de manera que se pueden obtener los resultados de manera rápida y simple.
4. La variedad de perfiles que el usuario puede realizar cubre la totalidad de los casos; esto se debe a la flexibilidad que el programa nos permite.
5. Los datos calculados para los diversos elementos que integran la matriz de impedancia serie de la línea de transmisión, son consecuentes con la teoría, y se observa que sus resultados son correspondientes.
6. Se observa de los resultados obtenidos que la topología seleccionada de la torre afecta la reactancia serie de la línea de transmisión.
7. En general los resultados obtenidos con el programa se ajustan a lo predicho por la teoría y la facilidad de análisis de los diversos perfiles mediante el uso del programa es evidente.

RECOMENDACIONES:

1. El programa se puede optimizar mucho más, de forma tal que permita seleccionar el tipo de conductor deseado obtenidos de la base de datos, a fin de cargar automáticamente los parámetros del conductor y evitar tenerlos que ingresar.
2. La principal mejora que se puede implementar para el programa es el cálculo de la matriz de corrientes I , caída de tensiones tensión y la ejecución de otro tipo de estudios como la regulación de la línea sujeto a la tipo de topología de la torre, entre otros; esto podría realizarse para versiones posteriores del programa.
3. Asimismo, se puede hacer análisis de fallas dado que conociendo la matriz de impedancia y las tensiones para una falla fase – tierra la cual se hace cero, es posible conocer las corriente en todas las fase e inclusive en el cable de guarda la cual será diferente de cero.

ANEXO A

(Invited Review Paper)

A Review of Methods for Calculation of Frequency-dependent Impedance of Overhead Power Transmission Lines

YAW-JUEN WANG AND SHI-JIE LIU

*Department of Electrical Engineering
National Yunlin University of Science and Technology
Touliu, Yunlin, Taiwan, R.O.C.*

(Received October 23, 2000; Accepted May 18, 2001)

ABSTRACT

This paper reviews the three most commonly used methods for calculation of frequency-dependent impedance of overhead transmission lines: Carson's method, the complex depth of earth return method and the finite element method. The historical path along which these methods were developed is also reviewed. This is followed by an illustrative example that compares the frequency-dependent impedances of a 500 kV transmission line calculated using the three methods. It is concluded that the complex depth of earth return method can, in most cases, replace Carson's method without impairing the calculation accuracy, and that the finite element method, though more complicated and computationally more cumbersome, is capable of treating problems resulting from practical geometric allocation of transmission conductors and is a promising method for use in the near future.

Key Words: Carson's method, complex depth of earth return, finite element method, frequency-dependent impedance

I. Introduction

The history of the electrical power industry can be traced back to Edison's Pearl Street Power Station in New York City in 1882 that supplied 110-V DC power. Then in 1889, the first single-phase AC line between Oregon and Portland (US) began to operate. The first three-phase AC transmission line became operational in Germany in 1891 (Glover and Sarma, 1989). The transmission of electric power from DC to polyphase AC implies that the working frequency of the power system has increased from zero Hz to several different values. For instance, the early Central European and American electric railways were operated at $16\frac{2}{3}$ Hz and 25 Hz, respectively (Hill, 1994). Modern electric power systems work at 50 or 60 Hz, and some special power systems, such as those used in aircraft, submarines and military equipment, are designed to operate at 400 Hz.

The change of power transmission technology from DC to AC allowed the voltage level to be shifted easily by transformers, and the increase in the operational frequency also allowed the volumes and weights of power system components to be reduced. However, several types of disturbances arising from the increase in frequency, such as harmonics, transients and electromagnetic interference, have become new challenges to electrical engineers, and the frequency-dependent impedance of transmission lines has also become one of the

most important power system parameters. For instance, an electrical engineer needs to know the power line impedance from the fundamental frequency (i.e., 50/60 Hz) to about the 25th harmonic frequency (i.e., 1,250/1,500 Hz) to conduct harmonic analysis, and that from DC to about 1 MHz to conduct transient analysis. It is noteworthy that calculation of frequency-dependent impedance is important not only in power engineering, but also in other areas involving high frequency applications like communications and semiconductor microchip design. In fact, as the frequency increases to several GHz (10^9 Hz), a small segment of the conductor in a microchip behaves just like a 100-km-long power transmission line working at 60 Hz. Consequently, the methods for calculating power line frequency-dependent impedance are also applicable to the analysis of electromagnetic interference in printed circuit boards and integrated circuits.

This paper discusses three most commonly used methods for calculating the frequency-dependent impedance of overhead power transmission lines: Carson's method, the complex depth of earth return method and the finite element method. An example of a three-phase 500 kV transmission line is then used to compare the three methods.

II. Literature Review

The term "frequency-dependent impedance" in this paper

refers to the frequency response of the distributed series inductance and resistance of a transmission line. That is, it refers to the distributed resistance and inductance parameters as functions of frequency. In most textbooks on power system engineering, the transmission line parameters are calculated based on the assumption that DC or very low frequency conditions prevail. For example, the well known solution that the internal inductance of a straight solid cylindrical conductor is equal to $\mu_0/(8\pi)$ H/m, is derived under DC conditions. This assumption, which may be acceptable in analyses of only the fundamental frequency (e.g., load flow studies, voltage drop calculations etc.), no longer holds in analyses involving harmonics and transients in which the voltage and current in the transmission line are rich in high frequency components. Because of the skin and proximity effects, the line impedance varies considerably at high frequencies, necessitating calculation of the transmission line impedance over the whole frequency range.

Transmission line impedance can be separated into two components: self impedance and mutual impedance. The former is the ratio of the voltage drop per unit length to the current flowing in the conductor and returning through the earth. The mutual impedance Z_{ij} between conductors i and j is the ratio of the induced voltage per unit length in conductor i to the current in conductor j . Because of the symmetry of the circuit, Z_{ij} is equal to Z_{ji} . Both the self and mutual impedances are influenced by the earth return current. The earth can be considered as a semi-infinitely extended non-ideal conductor. The currents flowing in the transmission line cause a magnetically induced earth return current that spreads out under the lines, seeking the lowest impedance return path. Influenced by the skin and proximity effects, the distribution of the induced earth return current in the ground is hard to determine. However, many outstanding electrical engineers have studied this problem over the past 100 years and obtained accurate solutions using various methods, including Carson's method, the complex depth of earth return method and the finite element method.

In 1926, J.R. Carson in the US (Carson, 1926) and F. Pollaczek in Germany (Pollaczek, 1926, 1931) almost simultaneously published a method for determining the AC transmission line frequency-dependent impedance considering earth return. This method is now called the Carson/Pollaczek model, or simply Carson's method. Carson's method is still the standard method for calculation of the frequency-dependent impedance of overhead transmission lines. It must be emphasized that Carson's method does not provide a closed-form solution. It expresses the impedance by means of an improper integral that has to be expanded into a infinite series for computation. Hence, if not properly applied, Carson's method may cause considerable truncation errors at high frequencies.

In 1976, 50 years after the publication of Carson's method, C. Gary, a research engineer with the French Electricity Board (Electricité de France, EDF), proposed an approach in

which the earth could be replaced by a set of earth return conductors located directly under the overhead lines at a complex depth (Gary, 1976). That is, the distances between the imagined earth return conductors and the overhead lines are "complex numbers"! As a result, the transmission line impedance can be written in a simple algebraic form. Surprisingly, Gary's proposition was found to be equally accurate over the whole frequency range than Carson's method. When calculating high frequency impedance using Carson's method, we must increase the term number of the infinite series to avoid truncation errors. On the other hand, Gary's method does not encounter this problem and is a powerful tool that can replace Carson's method. Unfortunately, Gary's proposition did not receive much attention from the power engineering community. There might be two reasons. Electrical engineers at that time still doubted the validity of Gary's proposition. Furthermore, in Gary's paper, there was no rigorous theoretical proof. Five years later, A. Deri, a professor at Budapest University in Hungary, derived a mathematical relation between Carson's method and the complex ground return, and proved that Gary's formulae were indeed a closed-form approximation of Carson's improper integral and were valid over the whole frequency range (Deri *et al.*, 1981). This was a milestone in the development of power engineering. Since then, the complex depth of earth return method has found widespread application in electric power engineering.

The error of the complex depth of earth return method increases with the ratio of the horizontal distance between conductors to their heights (d/h). Fortunately, the d/h ratio of typical power transmission lines is very small. The resulting error is less than 0.5%. However, for cases involving crosstalk between power lines and communication lines, the d/h ratio can be very large. An error as large as 15% is possible. Alvarado and Betancourt (1983) proposed a modified method that reduced the error of the complex depth of earth return method to less than 2.5%.

The finite element method (FEM) (Cristina and Feliziani, 1989; Triantafyllidis *et al.*, 1999; Papagiannis *et al.*, 2000) has been one of the most rapidly developing topics in electrical engineering in recent years. It has been used to solve Maxwell's equations that govern the distribution of electric and magnetic fields. The FEM can also be used to calculate the frequency-dependent impedance of transmission lines. It is able to display the distribution of earth return current in the ground, and to show the distribution of the magnetic field around the conductors. The advantage of the FEM lies in its ability to handle irregular terrain geometry in the vicinity of transmission lines. For example, when the transmission lines are located besides a lake or cliff, or when they cross a river, the FEM is capable of considering the effect of the terrain variation on the line impedance. On the other hand, Carson's method and the complex depth of earth return method are not applicable to problems involving terrain irregularities. The inconveniences of the FEM include the high cost of the software, much longer

computational time and the necessity of training individuals to use the FEM software.

III. Mathematical Formulation

1. Carson's Method

A. Self Impedance

Self impedance includes three components: the reactance of the loop inductance L_{ii} assuming that the line and the earth are perfect conductors, the internal impedance of line Z_c , and the impedance of the ground Z_g . The impedance of conductor i can then be written as

$$Z_{ii} = j\omega L_{ii} + Z_c + Z_g \quad (1)$$

The loop inductance is given by

$$L_{ii} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_i}{r_i}, \quad (2)$$

in which μ_0 is the permeability constant, equal to $4\pi \times 10^{-7}$ H/m by definition, r_i is the radius of the conductor and h_i is the average height of the conductor above the ground.

The internal impedance Z_c of the conductor is calculated using a tubular conductor model as shown in Fig. 1, in which the inner and outer radii q and r of a hollow cylindrical conductor are indicated. The solid line indicates a special case of the model for q equal to zero.

The internal impedance of conductor Z_c is given by

$$Z_c = R_d \frac{j}{2} m r (1 - S^2) \times \frac{(ber\ mr + j\ bei\ mr) + \phi(ker\ mr + j\ kei\ mr)}{(ber'\ mr + j\ bei'\ mr) + \phi(ker'\ mr + j\ kei'\ mr)}, \quad (3)$$

where $R_d = 1/[\pi\sigma(r^2 - q^2)]$ is the DC resistance of the conductor, q and r are the inner and outer radii of the conductor, $S = q/r$ is the ratio of the inner to the outer radius, which is zero for a solid line, $m = \sqrt{\omega\mu\sigma}$ is a variable related to the frequency, ω is the radian frequency, σ is the conductivity and μ is the permeability of the conductor. The variable ϕ in Eq. (3) is given by

$$\phi = -\frac{ber'\ mq + j\ bei'\ mq}{ker'\ mq + j\ kei'\ mq}, \quad (4)$$

where ber , bei , ker and kei are Kelvin's functions which belong to the Bessel function family, and ber' , bei' , ker' and kei' are their derivatives, respectively (Andrews, 1992). Kelvin's functions are often defined as

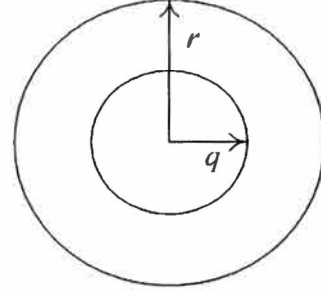


Fig. 1. The tubular conductor model.

$$ber\ x + j\ bei\ x = I_0(x\sqrt{j}), \quad (5)$$

$$ker\ x + j\ kei\ x = K_0(x\sqrt{j}), \quad (6)$$

where I_0 and K_0 are the modified Bessel functions of the 1st and the 2nd kinds of order zero, respectively. Many scientific Fortran libraries provide subroutines for calculation of Kelvin's functions with satisfactory accuracy, which makes application of the tubular conductor model easier. It is noteworthy that the inner radius q equals zero for a solid line, leading to the result $\phi = 0$.

The ground impedance Z_g is expressed by

$$Z_g = R_g + jX_g \quad (7)$$

Calculation of Z_g will be discussed in the next section.

B. Mutual Impedance

The mutual impedance Z_{ij} of two conductors i and j , both parallel to the ground with their respective heights above the ground being h_i and h_j , has two components. The first component is the mutual inductance L_{ij} between the two conductors when the conductors and the ground are perfectly conductive. The second component is the impedance of the earth return path Z_{gm} that is common to the currents in conductors i and j . The mutual impedance Z_{ij} can be written as

$$Z_{ij} = j\omega L_{ij} + Z_{gm} \quad (8)$$

The mutual inductance L_{ij} is given by

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D'_{ij}}{D_{ij}}, \quad (9)$$

where D_{ij} is the distance between conductors i and j , and D'_{ij} is the distance between conductor i and the image of conductor j (c.f., Fig. 2). The impedance of the earth return path Z_{gm} is

$$Z_{gm} = R_{gm} + jX_{gm} \quad (10)$$

Carson's correction terms for the self and mutual impedances due to the earth path impedances Z_g and Z_{gm} are given by (Carson, 1926; Meliopoulos, 1988)

$$R_g = 4\omega \times 10^{-7} \left\{ \frac{\pi}{8} - b_1 k + b_2 [(C_2 - \ln k) k^2] + b_3 k^3 - d_4 k^4 - \dots \right\}, \quad (11)$$

$$X_g = 4\omega \times 10^{-7} \left\{ \frac{1}{2} (0.6159315 - \ln k) + b_1 k - d_2 k^2 + b_3 k^3 - b_4 [(C_4 - \ln k) k^4] + \dots \right\}, \quad (12)$$

$$R_{gm} = 4\omega \times 10^{-7} \left\{ \frac{\pi}{8} - b_1 k_m \cos \theta + b_2 [(C_2 - \ln k_m) k_m^2 \cos 2\theta + \theta k_m^2 \sin 2\theta] + b_3 k_m^3 \cos 3\theta - d_4 k_m^4 \cos 4\theta - \dots \right\}, \quad (13)$$

$$X_{gm} = 4\omega \times 10^{-7} \left\{ \frac{1}{2} (0.6159315 - \ln k_m) + b_1 k_m \cos \theta - d_2 k_m^2 \cos 2\theta + b_3 k_m^3 \cos 3\theta - b_4 [(C_4 - \ln k_m) k_m^4 \cos 4\theta + \theta k_m^4 \sin 4\theta] + \dots \right\}, \quad (14)$$

where

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad (15)$$

$$b_2 = \frac{1}{16}, \quad (16)$$

$$b_i = b_{i-2} \frac{\text{sign}}{i(i+2)}, \quad (17)$$

$$C_i = C_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2}, \quad (18)$$

$$C_2 = 1.3659315, \quad (19)$$

$$d_i = \frac{\pi}{4} b_i. \quad (20)$$

In Eq. (17), the *sign* of coefficient b_i changes every four terms. That is, *sign* = +1 when $i = 1, 2, 3, 4$; *sign* = -1 when $i = 5, 6, 7, 8$ and so on. Variables k and k_m in Eqs. (11) – (14) are frequency-related and are given by

$$k = 4\pi\sqrt{5} \times 10^{-4} (2h_i) \sqrt{f\rho}, \quad (21)$$

$$k_m = 4\pi\sqrt{5} \times 10^{-4} D'_{ij} \sqrt{f\rho}, \quad (22)$$

where f refers to the frequency and ρ to the resistivity of the ground. The angle θ is indicated in Fig. 2. It is the angle between $i - i'$ and $i - j'$, and is expressed by

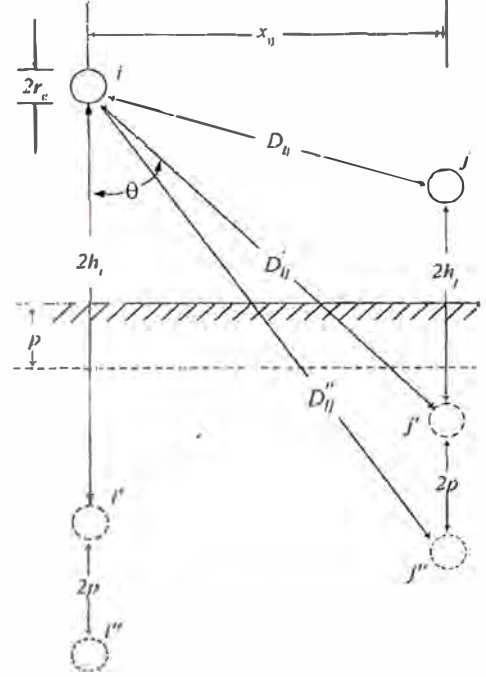


Fig. 2. Allocation of conductors i and j and their images i' and j' . p is the skin depth of the soil.

$$\theta = \sin^{-1}(x_{ij}/D'_{ij}). \quad (22)$$

2. The Complex Depth of Earth Return

Carson's infinite series for calculating Z_g and Z_{gm} (c.f., Eqs. (11) – (14)) converge very quickly at low frequencies. However, they converge slowly at high frequencies. The number of terms required to obtain accurate results increases rapidly with the frequency. The complex depth of earth return method assumes that the current in conductor i returns through an imagined earth path located directly under the original conductor at a depth of $(h_i + 2p)$ as shown in Fig. 2, in which i'' refers to the imagined earth return conductor of conductor i and p to the skin depth of the ground. In other words, the earth can be replaced by a set of earth return conductors. The distance between a conductor and its imagined earth return conductor equals twice its height above the ground plus the skin depth of the ground (i.e., $2(h_i + p)$). It must be emphasized that this distance is a complex number since the skin depth p is a complex number. Thus, the self and the mutual impedances can be written as

$$Z_{ii} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2(h_i + p)}{r_i} + Z_c, \quad (23)$$

$$Z_{ij} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(h_i + h_j + 2p)^2 + x_{ij}^2}}{\sqrt{(h_i - h_j)^2 + x_{ij}^2}} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D''_{ij}}{D_{ij}}, \quad (24)$$

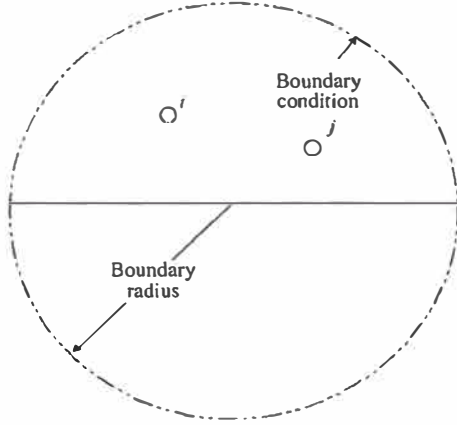


Fig. 3. The geometric model, boundary radius and boundary conditions of the FEM.

where

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{j\omega\mu_0}}, \quad (25)$$

and the distances h_i , h_j , x_{ij} , p , D_{ij} and D_{ij}'' are clearly indicated in Fig. 2.

3. The Finite Element Method

The finite element method (FEM) has developed rapidly as a topic of research in electrical engineering. It is a numerical method that can be used to calculate the electromagnetic fields, electromagnetic forces, energy storage in electromagnetic fields, power dissipation, eddy current, thermal conduction etc. Calculation of the transmission line impedance using the FEM requires that an appropriate boundary be defined first. All bodies (including the air and the ground) included in the boundary are modeled as areas. Each area has its own geometric shape and physical properties, such as conductivity, permeability, nonlinearity of magnetization etc. All areas are subdivided into first order triangular finite elements. The boundary conditions must then be given to allow Maxwell's equations to be solved correctly according to the nature of the problem.

In this paper, the boundary radius has been chosen to be six times (the absolute value of) the skin depth of the ground p . The ground can be considered as a semi-infinite conductor. The current density of the ground induced current attenuates exponentially as depth increases. When the depth reaches $6|p|$, the current density is reduced to e^{-6} (approximately 0.25%) of the density at the surface and can be neglected without causing perceptible errors. The boundary condition of the magnetic field is set to be the *Dirichlet* condition, assuming that there is no normal component of the magnetic field at the boundary.

Figure 3 shows the boundary and the geometric models

of two conductors i and j , the air and the ground. We use Fig. 3 to show how the self and the mutual impedances of conductors i and j are formulated using the FEM. Although Fig. 3 shows only two conductors, the method of calculation is general one and can be extended to calculating the impedances of any number of conductors. The FEM formulation proposed in this paper is different from those proposed by Triantafyllidis *et al.* (1999) and Papagiannis *et al.* (2000), in which the voltage drop per unit length on each conductor is obtained using the FEM and is then divided by the driving current to find the self or mutual impedance. This paper proposes a new approach that combines the energy method and the two-port network theory to obtain the impedance in an indirect way.

A. Self Impedance

The FEM is able to calculate the active and reactive power that is dissipated in each area included in the defined boundary at sinusoidal steady-state at a specified frequency. When calculating the self impedance of conductor i , a current I_i is applied to conductor i and returns through the ground, and the current in conductor j is set to be zero. Under this condition, the active power P_i and reactive power Q_i dissipated within the whole boundary can be used to find the self impedance of conductor i by

$$Z_{ii} = R_{ii} + jX_{ii} = \frac{P_i + jQ_i}{I_i^2} \Big|_{I_j=0} \quad (26)$$

The impedance given by Eq. (26) includes the impedances of the conductor and the earth return path. A similar method can be used to find the self impedance of conductor j :

$$Z_{jj} = R_{jj} + jX_{jj} = \frac{P_j + jQ_j}{I_j^2} \Big|_{I_i=0} \quad (27)$$

B. Mutual Impedance

Having obtained the self impedances Z_{ii} and Z_{jj} , we can simultaneously apply currents I_i and I_j to conductors i and j . For convenience of formulation, we take $I_i = I_j = I$ and use the FEM to calculate the complex power $P_{ij} + jQ_{ij}$ dissipated within the boundary. Let the voltage drops per unit length of conductors i and j be denoted by V_i and V_j , respectively. Then, V_i and V_j can be written as

$$\begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} \\ Z_{ji} & Z_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ I_j \end{bmatrix}, \quad (28)$$

The complex power can be written as the product of the voltage

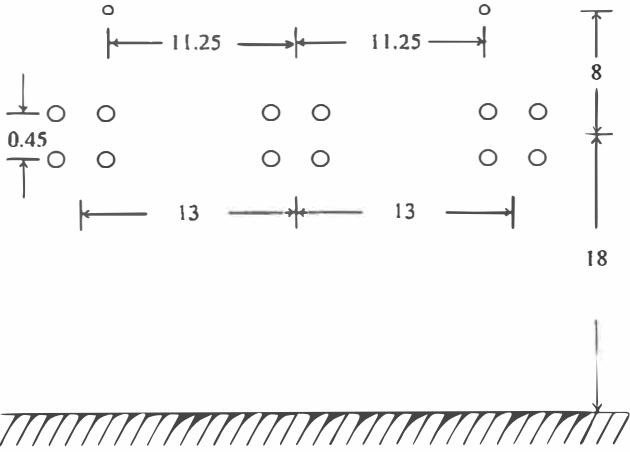


Fig. 4. Allocation of conductors for a 500 kV transmission line (unit: m).

and current vectors:

$$P_{ij} + jQ_{ij} = [V_i \ V_j] \begin{bmatrix} I_i^* \\ I_j^* \end{bmatrix} = Z_{ii}I_i^2 + Z_{jj}I_j^2 + Z_{ij}I_iI_j^* + Z_{ji}I_jI_i^*, \quad (29)$$

where the asterisk refers to the conjugate operation. Using the relations $I_i = I_j = I$ and $Z_{ij} = Z_{ji}$, Eq. (29) can be reduced to

$$P_{ij} + jQ_{ij} = (Z_{ii} + Z_{jj} + 2Z_{ij})I^2. \quad (30)$$

The mutual impedance is, therefore, given by

$$Z_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{P_{ij} + jQ_{ij}}{I^2} - Z_{ii} - Z_{jj} \right]. \quad (31)$$

IV. Numerical Examples

Figure 4 shows the allocation of the conductors of a 500 kV, three-phase transmission line. Each phase is composed of a four-conductor bundle. The bundle conductor's diameter is 23.7 mm, and the DC resistance of each bundle conductor is 0.108 Ω/km. The bundle spacing is 0.45 m. Two shield wires are located at the top. The shield conductor's diameter is 14.84 mm, and the DC resistance of each conductor is 0.374 Ω/km. The soil resistivity ρ is assumed to be 100 Ω-m.

The frequency-dependent impedance of the 500 kV line was calculated using the aforementioned three methods. For convenience of comparison, we assumed that the transmission line fully transposed, so that its impedance matrix was symmetric and could be reduced to the positive-, negative- and zero-sequence impedances. It is noted here that for a trans-

mission line, the positive- and the negative-sequence impedances are equal.

Figure 5 shows the meshing of the conductors and their surroundings. It can be seen that the elements near the conductors are smaller, and that those far away from the conductors are larger. In general, the elements must be made smaller at places where the field gradient or the current density gradient is high to maintain a high level of computational accuracy.

1. Primitive Impedance Matrix and Combination of Bundle Conductors

The transmission line shown in Fig. 4 is composed of 14 conductors. Any of the previously discussed three methods can be used to find the self and mutual impedance of the 14 conductors and to then obtain a 14×14 primitive impedance matrix Z_p . In our illustrative example, the conductors are numbered sequentially from phases A, B and C. The shield wires are numbered 13 and 14. The inverse of Z_p yields the primitive admittance matrix Y_p , which can be written as

$$Y_p = Z_p^{-1} = \begin{bmatrix} [Y_{p11}]_{4 \times 4} & [Y_{p12}]_{4 \times 4} & [Y_{p13}]_{4 \times 4} & [Y_{p14}]_{4 \times 2} \\ [Y_{p21}]_{4 \times 4} & [Y_{p22}]_{4 \times 4} & [Y_{p23}]_{4 \times 4} & [Y_{p24}]_{4 \times 2} \\ [Y_{p31}]_{4 \times 4} & [Y_{p32}]_{4 \times 4} & [Y_{p33}]_{4 \times 4} & [Y_{p34}]_{4 \times 2} \\ [Y_{p41}]_{2 \times 4} & [Y_{p42}]_{2 \times 4} & [Y_{p43}]_{2 \times 4} & [Y_{p44}]_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

In Eq. (32), Y_p has been partitioned according to the conductor allocation into several minor matrices $[Y_{p_{km}}]$, which refer to the self admittance matrix of the k th group of conductors of the same voltage if $k = m$ or to the mutual admittance matrix between the k th and the m th groups of conductors if $k \neq m$. For the case of $k = m$, because of their equal voltage, all the conductors of the k th group can be treated as a single conductor whose self admittance equals the sum of all the elements of $[Y_{p_{km}}]$. Similarly, for the case of $k \neq m$, the mutual admittance between the k th and the m th groups is the sum of all the elements

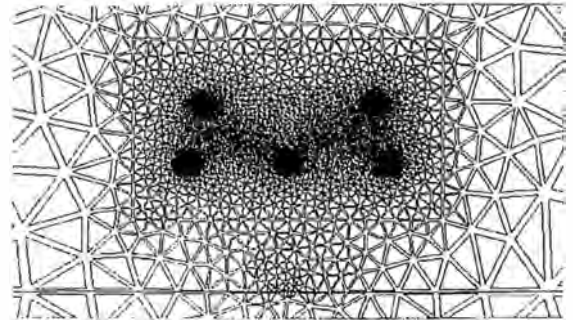


Fig. 5. Meshing of the conductors and their surroundings for finite element analysis.

of $[Y_{p_{km}}]$. Consequently, the conductors of the same voltage can be combined, and the 14×14 admittance matrix Y_p can be reduced to a 4×4 matrix Y_r , which is given by

$$Y_r = \begin{bmatrix} y_{r11} & y_{r12} & y_{r13} & y_{r14} \\ y_{r21} & y_{r22} & y_{r23} & y_{r24} \\ y_{r31} & y_{r32} & y_{r33} & y_{r34} \\ y_{r41} & y_{r42} & y_{r43} & y_{r44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad (33)$$

where $y_{r_{km}}$ is equal the sum of all the elements of $[Y_{p_{km}}]$. The inverse of Y_r yields

$$Z_r = Y_r^{-1} = \begin{bmatrix} z_{r11} & z_{r12} & z_{r13} & z_{r14} \\ z_{r21} & z_{r22} & z_{r23} & z_{r24} \\ z_{r31} & z_{r32} & z_{r33} & z_{r34} \\ z_{r41} & z_{r42} & z_{r43} & z_{r44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} Z_{LL} & Z_{LT} \\ Z_{TL} & Z_{TT} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Since the electric potential of the shield wires is zero, Z_r can be reduced to a 3×3 matrix Z by eliminating the shield wires:

$$Z = Z_{LL} - Z_{LT}Z_{TT}^{-1}Z_{TL} = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

2. Sequence Impedances

It is assumed in our example that the line is fully transposed. The resulting impedance matrix is

$$Z_{ip} = \frac{1}{3} \left(\begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{bb} & z_{bc} & z_{ba} \\ z_{cb} & z_{cc} & z_{ca} \\ z_{ab} & z_{ac} & z_{aa} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{cc} & z_{ca} & z_{cb} \\ z_{ac} & z_{aa} & z_{ab} \\ z_{bc} & z_{ba} & z_{bb} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} z_s & z_m & z_m \\ z_m & z_s & z_m \\ z_m & z_m & z_s \end{bmatrix}, \quad (36)$$

where

$$z_s = (z_{aa} + z_{bb} + z_{cc})/3 \quad (37)$$

$$z_m = (z_{ab} + z_{bc} + z_{ca})/3. \quad (38)$$

The sequence impedance matrix of the line becomes

$$Z_{sys} = A^{-1}Z_{ip}A = \begin{bmatrix} z_0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

and $a = \exp(j2\pi/3)$ is the Fortescue operator, and z_0, z_1 and z_2 are the zero-sequence, positive-sequence and negative-sequence impedances, respectively. From Eq. (39), we have

$$z_0 = z_s + 2z_m, \quad (41)$$

$$z_1 = z_2 = z_s - z_m. \quad (42)$$

3. Comparison of the Calculation Results

The zero-sequence inductance L_0 , positive-sequence inductance L_1 , zero-sequence resistance R_0 and positive-sequence resistance R_1 based on frequencies varying from DC to 2,000 Hz were calculated using the three methods, and the results are shown in Fig. 6. Over the frequency range from DC to 2,000 Hz, the complex depth of earth return method and the FEM produced results that are in good agreement with those obtained using Carson's method. The discrepancies in the zero-sequence inductance and resistance results produced by the three methods are very small. The discrepancy in the positive-sequence inductance results is evident at frequencies near 500 Hz. The differences between the positive-sequence resistances obtained using the three methods increase with frequency.

The zero-sequence resistance and inductance are related to the zero-sequence currents that flow in the phase conductors and return through the ground. This is sometimes called the ground mode, in which both the conductors and the ground are excited. On the other hand, the positive-sequence resistance and inductance are related to the positive-sequence currents that sum to zero and do not flow through the ground. This is called the line mode since the ground is not excited. The zero-sequence resistance and inductance shown in Fig. 6 reveal that the three methods are equally accurate in calculating the ground impedance, which is the major part of the zero-sequence impedance. The greater discrepancies in the positive-sequence resistance and inductance results may be explained by the proximity effect between conductors that is not considered in the combination of bundle conductors when using Carson's method or the complex earth return method. The FEM, on the other hand, takes into account the proximity effect and may give more accurate results.

Figure 7 is similar to Fig. 6 except for a wider frequency range from 1 Hz to 10^5 Hz. The zero-sequence resistance and inductance results obtained using the three methods are in very good agreement. Figure 7(b) shows the positive-sequence inductance. Both the FEM and the complex depth of earth

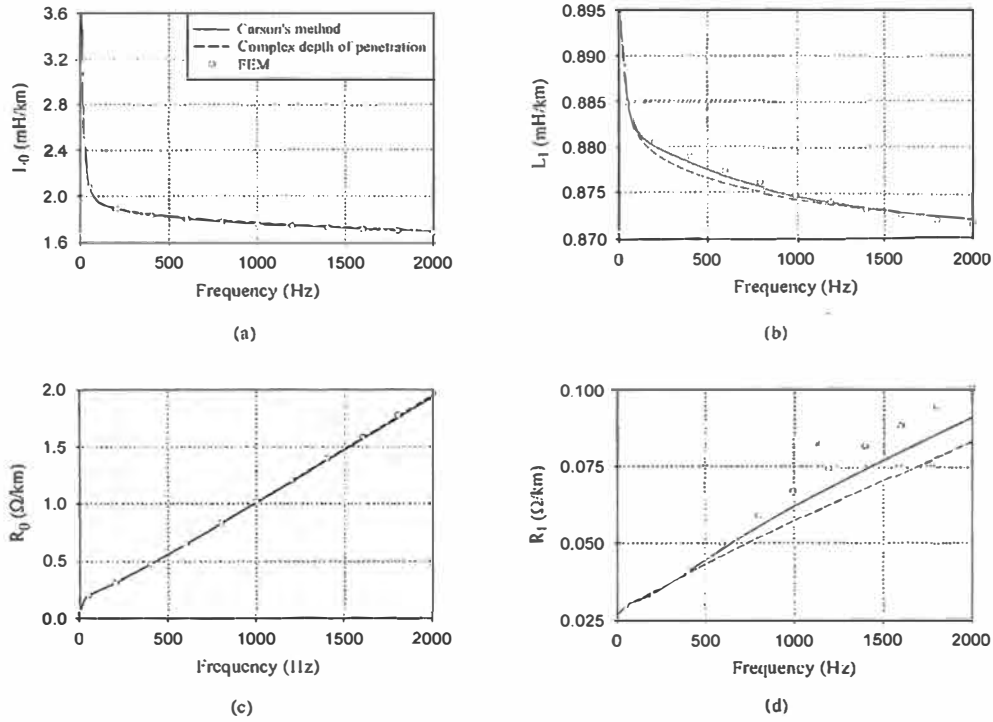


Fig. 6. Comparison of (a) zero-sequence inductance, (b) positive-sequence inductance, (c) zero-sequence resistance and (d) positive-sequence resistance results obtained using Carson's method (solid lines), the complex depth of earth return method (dashed lines) and the FEM (scattered dots) over the frequency range from 0 to 2,000 Hz.

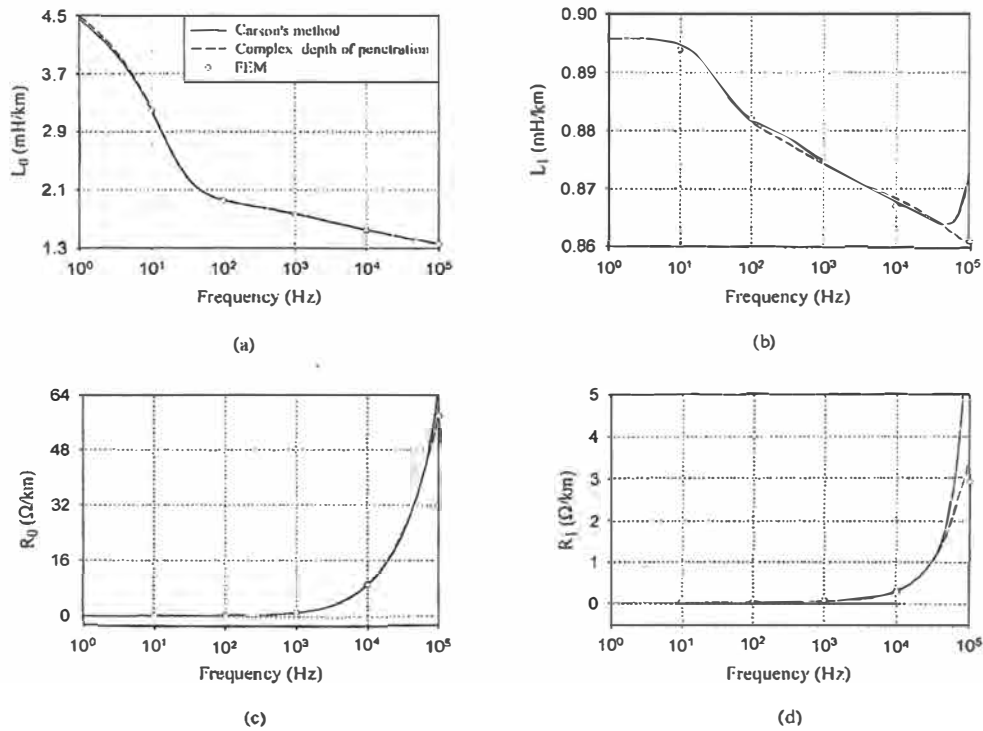


Fig. 7. Comparison of (a) zero-sequence inductance, (b) positive-sequence inductance, (c) zero-sequence resistance and (d) positive-sequence resistance results obtained Carson's method (solid lines), the complex depth of earth return method (dashed lines) and the FEM (scattered dots) over the frequency range from 1 to 10^5 Hz.

return method gave very similar results, but the inductance obtained using Carson's method failed to converge to a correct value at frequencies beyond 40 kHz. This result stems from the use of Carson's correction terms in Eqs. (11) – (14). We deliberately used only the first eight terms from the infinite series in the calculations. To obtain acceptable accuracy when using Carson's method at high frequencies, more terms from the infinite series must be calculated. Figure 7(d) also shows that the positive-sequence resistance obtained using Carson's method diverges from those obtained using the FEM and the complex depth of earth return method.

V. Conclusions

Three methods for calculating the frequency-dependent impedance of overhead power transmission lines have been reviewed in this paper, including the early Carson's method (Carson, 1926), the more recent complex depth of earth return method (Gary, 1976), and the latest method, the FEM (Triantafyllidis *et al.*, 1999). A 500 kV three-phase transmission line has also been analyzed using the three methods for the purpose of comparison.

Carson's method is the classic method for dealing with this problem. It is still the only method that provides a complete analytical solution to the problem, but the solution is expressed in terms of improper integrals that have to be expanded into infinite series to allow calculation. The series converge slowly at high frequencies. The increased speed and memory capacity of modern computers has greatly reduced the difficulty of calculating infinite series. However, care still needs to be taken when using Carson's method to calculate high frequency impedance to avoid possible truncation errors. Carson's method is important because it gives insight into how and to what degree the earth impedance is influenced by the frequency and the electrical properties of soil.

The complex depth of earth return method is indeed a closed-form approximation of Carson's method. Besides its contribution to the approximation theory, it provides an explanation for the imagined earth return conductors. The complex depth of earth return method is simple, easy to use and accurate. It can replace Carson's method in almost all cases in which power line impedance is calculated.

The FEM is new and promising. It is derived neither from Carson's method, nor from the complex depth of earth return. The FEM attacks the problem from a completely different angle. It applies a numerical method to calculate the distribution of the magnetic fields in the conductors, in the air and in the ground. The electric power dissipation and magnetic energy storage in all the areas in the boundary are then obtained and used to indirectly find the impedance. The FEM is powerful. It is able to consider the skin effect and proximity effect simultaneously and gives accurate results. The inconveniences of the FEM include the high cost of software and hardware, long computation time and the need

for experience in using the software.

Having given a detailed introduction to the three methods and compared them, the authors also wish to remind the reader to note the historical path along which the three methods developed. Numerous efforts have been made by electrical engineers over the past 75 years to find solutions. An interesting and important point to be made is that it is always possible to find a newer and better solution to an old problem. The problem of determining the frequency-dependent impedance of an overhead transmission line as discussed in this paper is an example. We expect that the current generation of electrical engineers will find a new method for dealing with this old problem.

Nomenclature

Z_{ii}	self impedance of conductor i (Ω/m)
Z_{ij}	mutual impedance of conductors i and j (Ω/m)
μ_0	permeability of the free space (H/m)
r_i	radius of conductor i (m)
h_i	height of conductor i (m)
h_j	height of conductor j (m)
Z_c	internal impedance of conductor (Ω/m)
m	variable used in the Bessel function (m^{-1})
ω	radian frequency (Rad/s)
μ	permeability of conductor (H/m)
R_d	DC resistance (Ω/m)
r	outer radius (m)
q	inner radius (m)
Z_{gm}	Carson's correction terms of mutual impedance (Ω/m)
Z_g	Carson's correction terms of self impedance (Ω/m)
d_{ij}	distance between conductors i and j (m)
D_{ij}	distance between conductors i and the image of conductor j (m)
D_{ij}''	distance between conductor i and the complex image of conductor j (m)
θ	angle included between $i - i'$ and $i - j'$ (deg)
b_i, c_i, d_i	coefficients of Carson's infinite series
ρ	soil resistivity ($\Omega\cdot m$)
x_{ij}	horizontal distance between conductors i and j (m)
R_{ii}	self resistance of conductor i (Ω/m)
R_{ij}	mutual resistance of conductors i and j (Ω/m)
L_{ii}	self inductance of conductor i (H/m)
L_{ij}	mutual inductance of conductors i and j (H/m)
p	skin depth of the ground (m)
σ_c	conductor conductivity ($\Omega\cdot m$) ⁻¹
P	active power (W/m)
Q	reactive power (Var/m)
Z_o	primitive impedance matrix (Ω/m)
Y_p	primitive admittance matrix (S/m)
Z_p	reduced primitive impedance matrix (Ω/m)
Y_r	reduced primitive admittance matrix (S/m)
Z	impedance matrix after eliminating shield wires (Ω/m)
Z_{tp}	impedance matrix of transposed line (Ω/m)
Z_{sys}	sequence impedance matrix (Ω/m)
Z_0	zero-sequence impedance (Ω/m)
Z_1	positive-sequence impedance (Ω/m)

References

Alvarado, F. L. and R. Betancourt (1983) An accurate closed-form approxi-

- mation for ground return impedance calculations. *Proceedings of the IEEE*, 71(2), 279-280.
- Andrews, L. C. (1992) *Special Functions of Mathematics for Engineers*, 2nd Ed. McGraw-Hill, New York, NY, U.S.A.
- Carson, J. R. (1926) Wave propagation in overhead wires with ground return. *Bell System Technical Journal*, 5, 539-554.
- Cristina, S. and M. Feliziani (1989) A finite element technique for multiconductor cable parameter calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25(4), 2986-2988.
- Deri, A., G. Tevan, A. Semlyen, and A. Castanheira (1981) The complex ground return plane: a simplified model for homogeneous and multi-layer earth return. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 100(8), 3686-3693.
- Gary, C. (1976) Approche complète de la propagation multifilaire en haute fréquence par utilisation des matrices complexes. *EDF Bulletin de la Direction des Études et Recherches, Série B-Réseaux Électriques Matériels Électriques*, 3/4, 5-20.
- Glover, J. D. and M. Sarma (1989) *Power System Analysis and Design*. PWS-KENT, Boston, MA, U.S.A.
- Hill, R. J. (1994) Electric railway traction – Part I Electric traction and DC traction motor drives. *Power Engineering Journal*, 8(1), 47-56.
- Meliopoulos, A. P. S. (1988) *Power System Grounding and Transients*. Marcel Dekker, New York, NY, U.S.A.
- Papagiannis, G. K., D. G. Triantafylidis, and D. P. Labridis (2000) A one-step finite element formulation for the modeling of single and double-circuit transmission lines. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(1), 33-38.
- Pollaczek, F. (1926) Über das feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung. *Elektrische Nachrichten Technik*, 3(9), 339-359.
- Pollaczek, F. (1931) Sur le champ produit par un conducteur simple infiniment long parcouru par un courant alternatif. *Revue Générale d'Électricité*, 29(22), 851-867.
- Triantafyllidis, D. G., G. K. Papagiannis, and D. P. Labridis (1999) Calculation of overhead transmission line impedances: a finite element approach. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 14(1), 287-293.

架空輸電線頻變阻抗計算方法之評論

王耀諄 劉士傑

國立雲林科技大學電機工程系

摘要

本文評論計算架空輸電線頻變阻抗的三種主要方法：卡森法、複數深度法及有限元素法。本文除了討論這三種方法的理論基礎與數學模型，對這三種方法演進的歷史軌跡也略加著墨。作者並以—500千伏的架空輸電線為例，比較三種方法的計算結果。比較的結果顯示，複數深度法幾乎在所有的情況下都可以替代卡森法而不致引起太大的誤差；有限元素法雖然使用上較為複雜，計算時間也最長，但是可以計算在任何實際地形情況下的輸電線阻抗，可說是最具潛力的一種方法。

ANEXO B

NAPS, University of Waterloo, Canada, October 23-24, 2000

Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return

By JOHN R. CARSON

I

THE problem of wave propagation along a transmission system composed of an overhead wire parallel to the (plane) surface of the earth, in spite of its great technical importance, does not appear to have been satisfactorily solved.¹ While a complete solution of the actual problem is impossible, on account of the inequalities in the earth's surface and its lack of conductive homogeneity, the solution of the problem, where the actual earth is replaced by a plane homogeneous semi-infinite solid, is of considerable theoretical and practical interest. The solution of this problem is given in the present paper, together with formulas for calculating inductive disturbances in neighboring transmission systems.

The axis of the wire is taken parallel to the z -axis at height h above the xz -plane and passes through the y -axis at point O' as shown in Fig. 1. herewith. The "image" of the wire is designated by O'' .

For $y > 0$ (in the dielectric) the medium is supposed to have zero conductivity, while for $y < 0$ (in the ground) the conductivity of the medium is designated by λ . The xz -plane represents the surface of separation between dielectric and ground.

We consider a wave propagated along the z -axis and the current, charge and field are supposed to contain the common factor $\exp(-\Gamma z + i\omega t)$, which, however, will be omitted for convenience in the formulas. The propagation constant, Γ , is to be determined. It is assumed, *ab initio*, as a very small quantity in c.g.s. units.²

In the ground ($y \leq 0$) the axial electric force is formulated as the

¹ See Rudenberg, Zt. f. Angewandte Math. u. Mechanik, Band 5, 1925. In that paper the current density in the ground is assumed to be distributed with radial symmetry. The resulting formulas are not in agreement with those of the present paper. Since this paper was set up in type I have learned that formulas equivalent to equations (26), (28), (31) for the *mutual impedance* of two parallel wires were obtained by my colleague, Dr. G. A. Campbell, in 1917. It is to be hoped that his solution will be published shortly.

² The simplifying assumptions introduced in this analysis are essentially the same as those employed and discussed in "Wave Propagation Over Parallel Wires: The Proximity Effect," *Phil. Mag.*, Vol. xli, April, 1921.

general solution, symmetrical with respect to x , of the wave equation; thus

$$E_z = - \int_0^{\infty} F(\mu) \cos x\mu e^{\gamma\sqrt{\mu^2+i\alpha}} d\mu, \quad y \leq 0 \quad (1)$$

where

$$\alpha = 4\pi\lambda\omega,$$

λ = conductivity of ground in elm. c.g.s. units,

$$i = \sqrt{-1},$$

$\omega/2\pi$ = frequency in cycles per second.

(In the following analysis and formulas, elm. c.g.s. units are employed throughout).

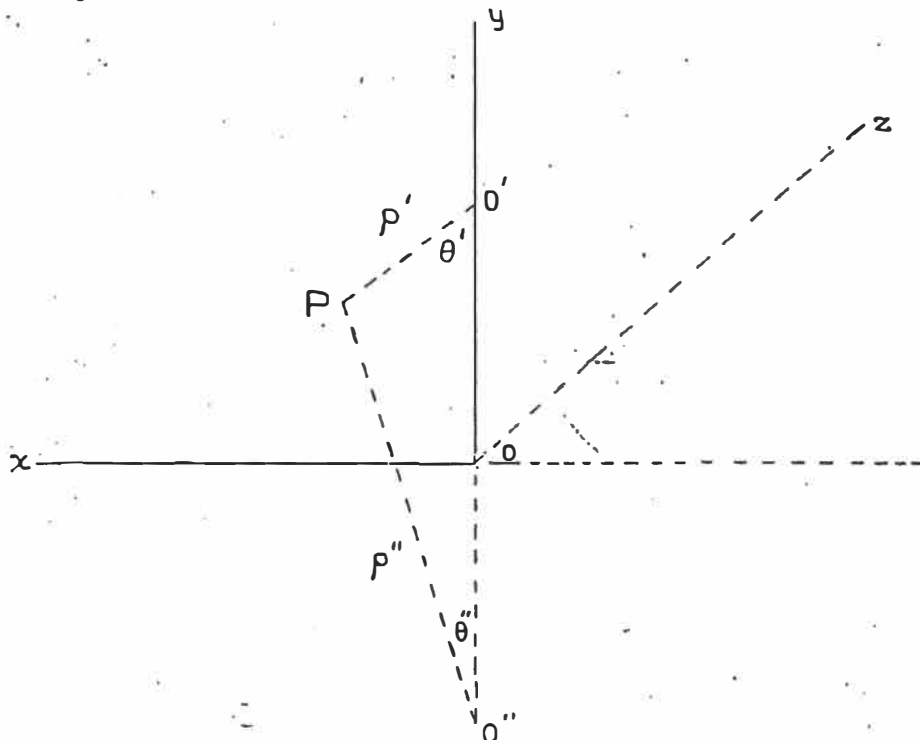


Fig. 1

Assuming that in the ground E_x and E_y are negligible compared with E_z , we have from the formula, $\text{curl } E = -\frac{\partial}{\partial t} H$,

$$i\omega H_x = -\frac{\partial}{\partial y} E_z$$

$$i\omega H_y = \frac{\partial}{\partial x} E_z.$$

Also at the surface of separation of the two media ($y=0$), II_x and II_y must be continuous. Equating the values of II_x and II_y at $y=0$, as given by (2), (3) and by (7), (8) and (9), (10), we have

$$\frac{1}{i\omega} \sqrt{\mu^2 + i\alpha} F(\mu) = 2I.e^{-h\mu} + \phi(\mu),$$

$$\frac{1}{i\omega} \mu.F(\mu) = 2I.e^{-h\mu} - \phi(\mu),$$

whence

$$F(\mu) = \frac{i\omega e^{-h\mu}}{\sqrt{\mu^2 + i\alpha} + \mu} 4I, \quad (11)$$

$$\phi(\mu) = \frac{(\sqrt{\mu^2 + i\alpha} - \mu)e^{-h\mu} 2I}{\sqrt{\mu^2 + i\alpha} + \mu}, \quad (12)$$

which determines the functions $F(\mu)$ and $\phi(\mu)$.

Inserting the value of $F(\mu)$, as given by (11) in (1), the axial electric force E_z in the ground ($y \leq 0$) and therefore the distribution of current density in the ground is expressed as a Fourier integral in terms of the frequency $\omega/2\pi$, the current I in the wire, the height h of the wire above ground, and the conductivity λ of the ground. Similarly the insertion of $\phi(\mu)$, as given by (12) in formulas (7) and (8) gives the magnetic field II'_x , II'_y in the dielectric. Thus

$$E_z(x, y) = E_z = -i\lambda\omega I \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu h}}{\sqrt{\mu^2 + i\alpha} + \mu} e^{y\sqrt{\mu^2 + i\alpha}} \cos x\mu d\mu, \quad y \leq 0. \quad (13)$$

This can be further simplified if we write

$$x' = x\sqrt{\alpha}$$

$$y' = y\sqrt{\alpha}$$

$$h' = h\sqrt{\alpha},$$

whence

$$E_z = -4\omega I \int_0^{\infty} (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-h'\mu} e^{y'\sqrt{\mu^2 + i}} \cos x'\mu d\mu, \quad y' \leq 0. \quad (14)$$

The axial electric force in the dielectric is now to be formulated. This is always derivable from a vector and a scalar potential; thus

$$E_z = -i\omega A_z - \frac{\partial}{\partial z} V, \quad (15)$$

where A_z is the vector potential of the axial currents, and V the scalar potential. Consequently,

Whence, in the ground

$$H_x = \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty \sqrt{\mu^2 + i\alpha} \cdot F(\mu) \cdot \cos x\mu \cdot e^{y\sqrt{\mu^2 + i\alpha}} d\mu, \quad (2)$$

$$H_y = \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty \mu \cdot F(\mu) \cdot \sin x\mu \cdot e^{y\sqrt{\mu^2 + i\alpha}} d\mu, \quad (3)$$

it being understood that $y \leq 0$. The function $F(\mu)$ in the preceding formulas is to be determined by the boundary conditions.

In the dielectric, H_x and H_y may be regarded as composed of two components; thus

$$H_x = H_x^0 + H_x',$$

$$H_y = H_y^0 + H_y',$$

where H_x^0, H_y^0 designate the field due to the current I in the wire, and H_x', H_y' the field of the ground current.

Neglecting axial displacement currents in the dielectric, and assuming that the wire is of sufficiently small radius so that the distribution of current over its cross section is symmetrical, we have

$$H_x^0 = \frac{\cos \Theta'}{\rho'} \cdot 2I, \quad (4)$$

$$H_y^0 = \frac{\sin \Theta'}{\rho'} \cdot 2I, \quad (5)$$

where

$$\rho' = \sqrt{x^2 + (y-h)^2},$$

$$\cos \Theta' = \frac{h-y}{\rho'}, \quad (6)$$

$$\sin \Theta' = x/\rho'.$$

The secondary magnetic field H_x', H_y' is taken as

$$H_x' = \int_0^\infty \phi(\mu) \cos x\mu \cdot e^{-y\mu} d\mu, \quad (7)$$

$$H_y' = - \int_0^\infty \phi(\mu) \sin x\mu \cdot e^{-y\mu} d\mu. \quad (8)$$

At the surface of separation $y=0$, H_x^0, H_y^0 are expressible as the Fourier integrals

$$H_x^0 = 2I \int_0^\infty \cos x\mu \cdot e^{-h\mu} d\mu, \quad (9)$$

$$H_y^0 = 2I \int_0^\infty \sin x\mu \cdot e^{-h\mu} d\mu. \quad (10)$$

$$E_z(x,y) - E_z(x,0) = -i\omega(A_z(x,y) - A_z(x,0)) - \frac{\partial}{\partial z}(V(x,y) - V_0). \quad (16)$$

Here $E_z(x,0)$ is the axial electric intensity at the surface of the ground plane ($y=0$), and

$$A_z(x,y) - A_z(x,0) = \int_0^y II_z(x,y) dy. \quad (17)$$

$V(x,y) - V_0$ is the difference in the scalar potential between the point x,y and the ground, which is due to the charges on the wire and on the surface of the ground. For convenience, it will be designated by V .

By means of (16) and the preceding formulas we get ³

$$E_z = -4\omega I \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-(h'+y)\mu} \cos x'\mu d\mu - i 2\omega I \log(\rho''/\rho') - \frac{\partial}{\partial z} V, \quad y \geq 0 \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned} \rho' &= \sqrt{(h-y)^2 + x^2} \\ &= \text{distance of point } x,y \text{ from wire,} \\ \rho'' &= \sqrt{(h+y)^2 + x^2} \\ &= \text{distance of point } x,y \text{ from image of wire.} \end{aligned}$$

The first two terms on the right hand side of (18) represent the electric force due to the varying magnetic field; the term $-\frac{\partial}{\partial z} V$ represents the axial electric intensity due to the charges on the surface of the wire and the ground. If Q be the charge per unit length, V is calculable by usual electrostatic methods on the assumption that the surface of the wire and the surface of the ground are equipotential surfaces, and their difference of potential is Q/C where C is the electrostatic capacity between wire and ground.⁴

II

By aid of the preceding analysis and formulas, we are now in a position to derive the propagation constant, Γ , and characteristic impedance, K , which characterize wave propagation along the system. Let z denote the "internal" or "intrinsic" impedance of the wire per

³ As a check on this formula note that together with (14) it satisfies the condition of continuity of E_z at $y=0$.

⁴ See "Wave Propagation Over Parallel Wires: The Proximity Effect," *Phil. Mag.*, Vol. xli, Apr., 1921.

unit length. (With small error this may usually be taken as the resistance per unit length of the wire.) The axial electric intensity at the surface of the wire is then zI . Equating this to the axial electric intensity at the surface of the wire as given by (18) and replacing $\partial/\partial z$ by $-\Gamma$, we have

$$zI = -4\omega I \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-2h'\mu} d\mu - i 2\omega I \log(\rho''/a) + \Gamma V. \quad (19)$$

Writing $V = Q/C$ and

$$i\omega Q = \Gamma I - GV = \Gamma I - \frac{G}{C} Q,$$

where G is the leakage conductance to ground per unit length, we have, solving for Γ ,

$$\Gamma^2 = (G + i\omega C) [z + i2\omega \log(\rho''/a)] + 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-2h'\mu} d\mu. \quad (20)$$

Writing this in the usual form

$$\Gamma^2 = (R + iX)(G + i\omega C), \quad (21)$$

the characteristic impedance is given by

$$K^2 = \frac{R + iX}{G + i\omega C} \quad (22)$$

and the series impedance per unit length of the circuit is

$$R + iX = Z = z + i2\omega \log(\rho''/a) + 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-2h'\mu} d\mu. \quad (23)$$

It will be observed that the first two terms on the right hand side of (23) represent the series impedance of the circuit if the ground is a perfect conductor; the infinite integral formulates the effect of the finite conductivity of the ground.

The mutual impedance⁵ Z_{12} between two parallel ground return circuits with wires at heights h_1 and h_2 above ground and a separation x between their vertical planes is given by

$$Z_{12} = i2\omega \log(\rho''/\rho') + 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-(h_1 + h_2)\mu} \cos x'\mu d\mu, \quad (24)$$

⁵ It will be noted that the mutual impedance is equal to the axial electric intensity at the axis of the second wire due to the varying magnetic field of unit current in the first wire and its accompanying distribution of ground current.

where

$$\begin{aligned} \rho'' &= \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + x^2} \\ \rho' &= \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + x^2} \\ h_1' &= h_1 \sqrt{\alpha} \\ h_2' &= h_2 \sqrt{\alpha} \\ x' &= x \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

From the preceding the series *self impedance* of the ground return circuit may be conveniently written as

$$Z = Z^0 + Z' \tag{25}$$

and the *mutual impedance* as

$$Z_{12} = Z_{12}^0 + Z'_{12} \tag{26}$$

where Z^0, Z_{12}^0 are the self and mutual impedances respectively, on the assumption of a perfectly conducting ground, and

$$Z' = 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-2h'\mu} d\mu, \tag{27}$$

$$Z'_{12} = 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-(h_1' + h_2')\mu} \cos x'\mu d\mu. \tag{28}$$

The calculation of the circuit constants and the electromagnetic field in the dielectric depends, therefore, on the evaluation of an infinite integral of the form

$$J(p, q) = J = \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) e^{-p\mu} \cos q\mu d\mu. \tag{29}$$

In terms of this integral

$$Z' = 4\omega J(2h', 0) \tag{30}$$

$$Z'_{12} = 4\omega J(h_1' + h_2', x'). \tag{31}$$

To the solution of the infinite integral $J(p, q)$ we now proceed.

III

The solution of equation (29), that is, the evaluation of $J(p, q)$ can be made to depend on the solution of the infinite integral

$$\int_0^\infty \sqrt{\mu^2 + \alpha^2} e^{-\beta\mu} d\mu$$

which has been worked out and communicated to me by R. M. Foster. It is

$$\frac{\alpha}{\beta} \left\{ K_1(\alpha\beta) + G(\alpha\beta) \right\}$$

where $K_1(x)$ is the Bessel function of the second kind and first order as defined by Jahnke und Emde, *Funktionentafeln*, pg. 93, and $G(x)$ is the absolutely convergent series

$$G(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3^2 \cdot 5} + \frac{x^6}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots$$

On the basis of this solution, it is a straightforward though intricate and tedious process to derive the following solution for $J(p, q)$ of equation (29).

Writing $r = \sqrt{p^2 + q^2}$ and $\theta = \tan^{-1}(q/p)$, it is $J = P + iQ$

in which

$$P = \frac{\pi}{8} (1 - s_4) + \frac{1}{2} \left(\log \frac{2}{\gamma r} \right) s_2 + \frac{1}{2} \theta \cdot s_2' - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_3, \quad (32)$$

$$Q = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{2}{\gamma r} \right) (1 - s_4) - \frac{1}{2} \theta \cdot s_4' + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1 - \frac{\pi}{8} s_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_3 - \frac{1}{2} \sigma_4. \quad (33)$$

In these equations $\log \gamma$ is Euler's constant:

$$\gamma = 1.7811, \log \frac{2}{\gamma} = 0.11593, \log \gamma = 0.57722 \text{ and } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, s_2, s_2',$$

s_4, s_4' , are infinite series defined as follows:

$$s_2 = \frac{1}{1!2!} \left(\frac{r}{2} \right)^2 \cos 2\theta - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{r}{2} \right)^6 \cos 6\theta + \dots$$

$$s_2' = \frac{1}{1!2!} \left(\frac{r}{2} \right)^2 \sin 2\theta - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{r}{2} \right)^6 \sin 6\theta + \dots$$

$$s_4 = \frac{1}{2!3!} \left(\frac{r}{2} \right)^4 \cos 4\theta - \frac{1}{4!5!} \left(\frac{r}{2} \right)^8 \cos 8\theta + \dots$$

$$s_4' = \frac{1}{2!3!} \left(\frac{r}{2}\right)^4 \sin 4\theta - \frac{1}{4!5!} \left(\frac{r}{2}\right)^8 \sin 8\theta + \dots,$$

$$\sigma_1 = \frac{r \cos \theta}{3} - \frac{r^5 \cos 5\theta}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} + \frac{r^9 \cos 9\theta}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11} - \dots,$$

$$\sigma_3 = \frac{r^3 \cos 3\theta}{3^2 \cdot 5} - \frac{r^7 \cos 7\theta}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9} + \frac{r^{11} \cos 11\theta}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13} - \dots,$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{1!2!} \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cos 2\theta \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \frac{1}{3!4!} \left(\frac{r}{2}\right)^6 \cos 6\theta + \dots \\ &= \frac{5}{4} s_2 \text{ approximately,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{2!3!} \left(\frac{r}{2}\right)^4 \cos 4\theta \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \frac{1}{4!5!} \left(\frac{r}{2}\right)^8 \cos 8\theta + \dots \\ &= \frac{5}{3} s_4 \text{ approximately.} \end{aligned}$$

It is to be regretted that the foregoing formulas appear so complicated. The series, however, are very rapidly convergent and for $r \leq 2$ only the two leading terms of each series need be retained. For $r \leq 1$, only the leading terms are of importance.

For the important range $r \leq 1/4$,

$$P = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3\sqrt{2}} r \cos \theta + \frac{r^2}{16} \cos 2\theta \left(0.6728 + \log \frac{2}{r}\right) + \frac{r^2}{16} \theta \sin 2\theta, \quad (34)$$

$$Q = -0.0386 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{2}{r}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}} r \cos \theta. \quad (35)$$

For $r > 5$ the following asymptotic expansions, derivable from (29) by repeated partial integrations, are to be employed.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 3\theta}{r^3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos 5\theta}{r^5} - \dots, \quad (36)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 3\theta}{r^3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos 5\theta}{r^5} - \dots, \quad (37)$$

$r > 5.$

For large values of r ($r > 10$), these reduce to

$$J = \frac{1 + i \cos \theta}{\sqrt{2} r} - \frac{\cos 2\theta}{r^2}, \quad r > 10. \quad (38)$$

In view of the somewhat complicated character of the function in the range $1/4 \leq r \leq 5$ the curves shown below have been computed.

These show $J = P + iQ$ as a function of r for $\theta = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$. By interpolation it is possible to estimate with fair accuracy the value of the functions for intermediate values of θ .

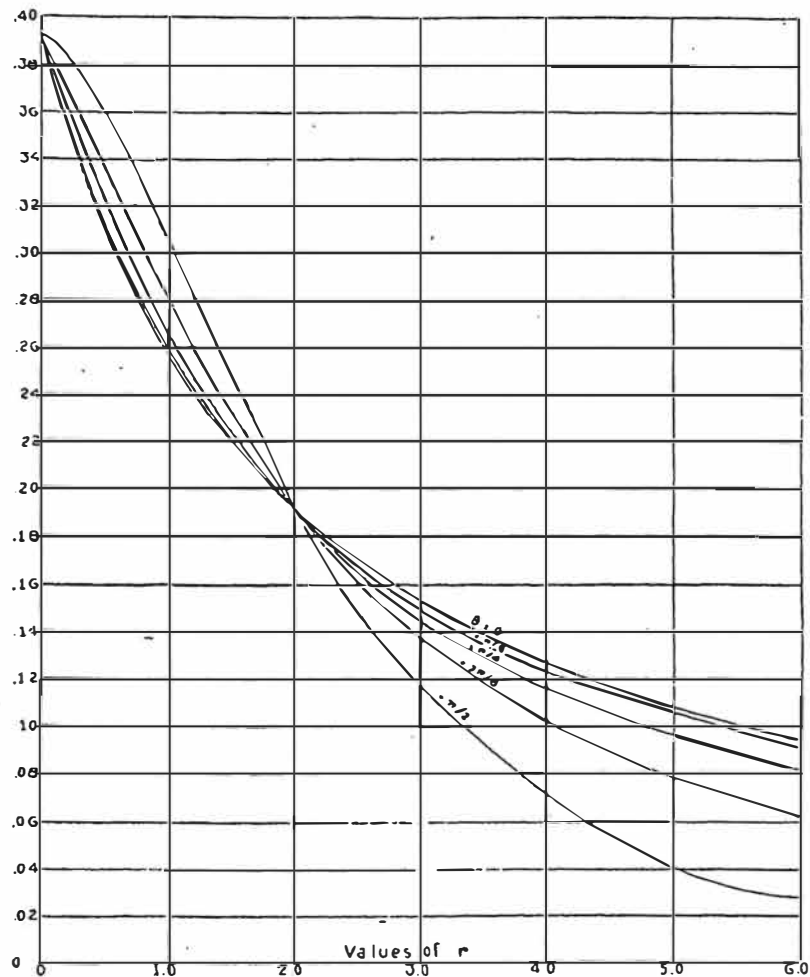


Fig. 2 P = real part of J

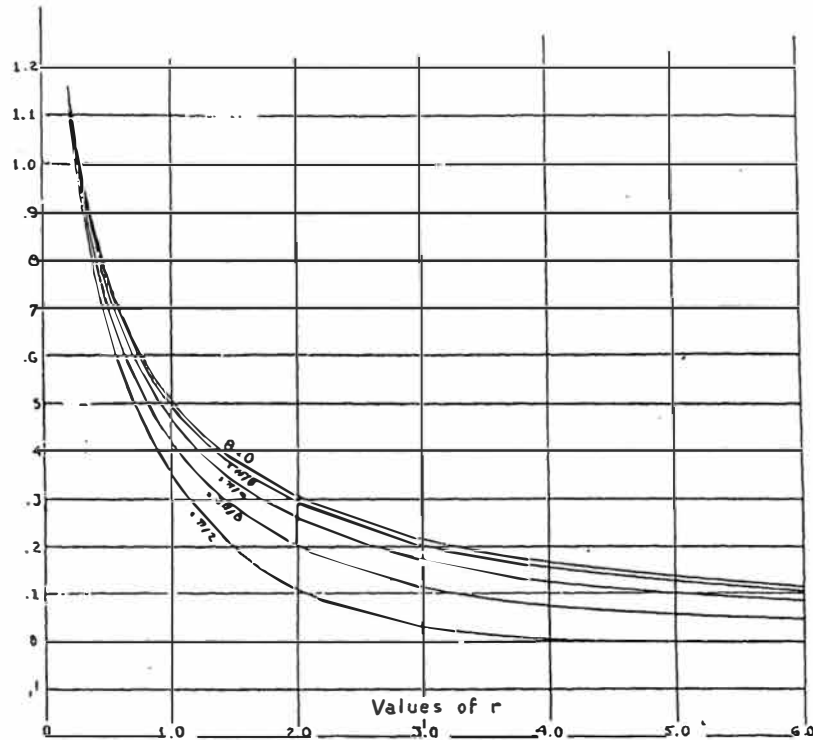


Fig. 3 $Q = \text{imaginary part of } J$

IV

The theory and formulas of the preceding sections will now be reviewed and summarized as regards their principal applications to technical transmission problems where the ground forms, in whole or part, the "return" part of the circuit. In such problems we are interested in the electric intensity in the dielectric and in the ground, and in particular in the self impedance and mutual impedances of ground return circuits. The calculation of these quantities is provided for by the general analysis and the solution of the infinite integral J . Reference should be made to Fig. 1 shown in section I for the geometry of the system and coordinate system employed.

1. *The Axial Electric Intensity E_z in the Dielectric:* (See equations (15) and (18)).

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z} V - (i2\omega \log(\rho''/\rho') + 4\omega J)I$$

where

$$\rho' = \sqrt{(h-y)^2 + x^2}$$

= distance of point in dielectric from axis of wire.

$$\rho'' = \sqrt{(h+y)^2 + x^2}$$

= distance of point in dielectric from image of wire.

$$r = \rho'' \sqrt{\alpha}$$

$$\theta = \sin^{-1}(x/\rho'')$$

$$\alpha = 4\pi\lambda\omega.$$

These values of r and θ are, of course, to be employed in calculating $J = P + iQ$ from the formulas and curves of the preceding section. As a special case the electric intensity at the surface of the earth is

$$E_z = -4\omega J I$$

$$\rho'' = \sqrt{h^2 + x^2}$$

$$r = \rho'' \sqrt{\alpha}$$

$$\theta = \sin^{-1}(x/\rho'')$$

2. *Self Impedance of Ground Return Circuit.* (See equations (25), (27), (30)).

$$Z = Z^0 + 4\omega J$$

Z^0 = self impedance with perfectly conducting ground.

$$r = 2h \sqrt{\alpha}$$

$$\theta = 0.$$

3. *Mutual Impedance of Ground Return Circuits.* (See equations (26), (28), (31)).

$$Z_{12} = Z_{12}^0 + 4\omega J$$

Z_{12}^0 = mutual impedance with perfectly conducting ground.

$$r = \sqrt{\alpha} \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + x^2} = \rho'' \sqrt{\alpha}$$

$$\theta = \sin^{-1}(x/\rho'').$$

The axial electric intensity E_z in the ground ($y < 0$) is given by equation (1), and the subsequent analysis, whence

$$E_z = -4\omega I \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i} - \mu) \cos x'\mu \cdot e^{-(h'\mu + e'\sqrt{\mu^2 + i})} d\mu$$

where, as before

$$x' = x\sqrt{\alpha}$$

$$h' = h\sqrt{\alpha}$$

and

$$\begin{aligned} g' &= \sqrt{\alpha} \text{ times the depth below the surface of the ground.} \\ &= g\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

The integral can undoubtedly be evaluated in somewhat the same way as (29) and can in any case be numerically computed without much difficulty. Owing, however, to the secondary technical interest in the electric intensity below the surface of the earth, the detailed solution has not been undertaken, nor has the magnetic field been worked out.

V

The practical utility of the preceding theory and formulas will now be illustrated by a brief sketch of their application to two important transmission problems.

THE WAVE ANTENNA

When a transmission line with "ground return" is employed as a radio receiving antenna it is called a wave antenna. The theory and design of such an antenna requires a knowledge of the transmission characteristics of the ground return circuit, which are calculable, as shown above, from the geometry and constants of the overhead wire, together with $Z' = \pm\omega J$, which may be termed the "ground return" impedance.

We assume that the wire is approximately 30 ft. above the ground ($h = 10^3$) and that the frequency is $5 \cdot 10^4$ c.p.s. corresponding to the frequency employed in Trans-Atlantic radio communication. The ground conductivity λ is exceedingly variable, depending on the locality and weather conditions. Calculations of Z' will therefore be made for two extreme cases, $\lambda = 10^{-12}$ and $\lambda = 10^{-14}$ which should cover the range of variation encountered in practice.

For $\lambda = 10^{-12}$,

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{4\pi\lambda\omega} = 2 \cdot 10^{-3}$$

and for $\lambda = 10^{-14}$,

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Correspondingly, $r = 2h\sqrt{\alpha}$ has the values 4.0 and 0.4, respectively. Reference to the preceding formulas and curves for J , for $r = 4.0$ and $r = 0.4$, give

$$J = 0.126 + i 0.168, \quad \lambda = 10^{-12}$$

$$J = 0.323 + i 0.871, \quad \lambda = 10^{-14}$$

whence the corresponding values of Z' are

$$Z' = 4\omega \cdot (0.126 + i 0.168),$$

$$Z' = 4\omega \cdot (0.323 + i 0.871).$$

These are the "ground return" impedances per unit length in elm. c.g.s. units; to convert to *ohms per mile* they are to be multiplied by the factor 1.61×10^{-4} . Consequently setting $\omega = \pi \cdot 10^5$, we get

$$Z' = 6.44\pi(1.3 + i 1.7), \quad \lambda = 10^{-12}$$

$$Z' = 6.44\pi(3.2 + i 8.7), \quad \lambda = 10^{-14}.$$

Comparison of these formulas shows that an hundred-fold increase in the resistivity of the ground increases the resistance component of the ground return impedance by the factor 2.5 and increases its reactance only five-fold. That is to say, the ground return impedance is not sensitive to wide variations in the resistivity of the earth, a fortunate circumstance in view of its wide variability and our lack of precise information regarding it.

INDUCTION FROM ELECTRIC RAILWAY SYSTEMS

A particularly important application of the preceding analysis is to the problems connected with the disturbances induced in parallel communication lines by alternating current electric railways. Assuming the frequency as 25 c.p.s., we have corresponding to $\lambda = 10^{-12}$ and $\lambda = 10^{-14}$,

$$\sqrt{\alpha} = 0.45 \times 10^{-4} \text{ and } 0.45 \times 10^{-5}.$$

Taking the height of the trolley wire as approximately 30 ft., $h = 10^3$ and assuming the parallel telephone as the same height above ground and separated by approximately 120 ft., $x = 4 \cdot 10^3$, and

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\alpha} \sqrt{(2h)^2 - x^2} \\ &= 4.47 \times 10^3 \sqrt{\alpha}, \end{aligned}$$

and corresponding to the values of α taken above

$$r = 0.2 \text{ and } 0.02 \text{ in round numbers,}$$

while

$$\theta = \sin^{-1} \frac{4}{\sqrt{20}} = 63^\circ 30' \text{ approximately.}$$

For both cases, therefore, we can employ, in calculating $J = P + iQ$, the approximate formulas,

$$P = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3\sqrt{2}} r \cos \theta + \frac{r^2}{16} \cos 2\theta \left(.6728 + \log \frac{2}{r} \right) + \frac{r^2}{16} \theta \sin 2\theta,$$

$$Q = -0.0386 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{2}{r} \right) + \frac{1}{3\sqrt{2}} r \cos \theta.$$

For $\lambda = 10^{-12}$ and $r = 0.2$, this gives

$$J = 0.369 + i 1.135$$

and

$$Z'_{12} = 4\omega(0.369 + i 1.135).$$

The foregoing assumes that the only return conductor is the ground. If, however, an equal and opposite current flows in the rail we must subtract from the foregoing mutual impedance, the mutual impedance between rail and telephone line; that is, the mutual impedance Z'_{12} between the telephone line and a conductor at the surface of the earth. For this case

$$\rho'' = \sqrt{h^2 + x^2} = 4.12 \times 10^3$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{4}{\sqrt{17}} = 76^\circ$$

$$\cos \theta = 0.242, \quad r = 0.184 \text{ for } \lambda = 10^{-12}.$$

The corresponding value of J is

$$J = 0.378 + i 1.165$$

and the *resultant* mutual impedance between railway and parallel telephone line is,

$$\begin{aligned} Z'_{12} &= 4\omega(0.369 - 0.378 + i(1.135 - 1.165)) \\ &= 4\omega(0.009 - i 0.030). \end{aligned}$$

The very large reduction in mutual impedance, due to the current in the rail, is striking.

For the case of $\lambda = 10^{-4}$, the corresponding calculations give

$$Z'_{12} = 4\omega(0.391 + i 2.27)$$

with *no current in rail*, and

$$Z'_{12} = 4\omega(-0.001 - i 0.002)$$

with *equal and opposite current in rail*. It is evident from these figures that the reduction in mutual impedance, due to the current in the rail, is practically independent of the ground conductivity, at least at the separation specified.

BIBLIOGRAFÍA

1. Luís María Checa, “Línea de Transmisión de Energía”, Editorial Alfaomega.
2. John J. Grainger y William D. Stevenson, “Análisis de Sistema de Potencia”.
3. J. Duncan Glover y Mulukutla S. Sarma, “Sistema de Potencia Análisis y Diseño”.
4. Yaw-Juen Wang and Shi-Jie Liu, “A Review of Methods for Calculation of Frequency – dependent Impedance of Overhead Power Transmission Lines”, Paper.
5. John R. Carson, “Wave Propagation in Overhead Wires With Ground Return”, Paper.