

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



**DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO
PROPORCIONAL INTEGRAL DE NIVEL DE LÍQUIDO**

INFORME DE SUFICIENCIA

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO ELECTRÓNICO**

**PRESENTADO POR:
JESUS ENRIQUE SIPAN REYES**

**PROMOCIÓN
1979 – II**

**LIMA – PERÚ
2006**

**DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO PROPORCIONAL INTEGRAL DE
NIVEL DE LÍQUIDO**

***Dedico este trabajo a:
Mis padres, inspiración plena de lucha
y sacrífico, a mi esposa e hijo motivos
constantes de superación ..***

SUMARIO

El presente informe nos permite diseñar un sistema de control óptimo proporcional integral a fin de mantener controlado el nivel de líquido en un tanque.

En el Capítulo I se presenta una Introducción a los Sistemas de Control, haciendo una descripción del sistema y analizando los diferentes tipos de controladores.

En el Capítulo II se desarrolla el modelamiento matemático del sistema en lazo abierto del sistema tanque.

En el Capítulo III se desarrollan los conceptos de procesamiento y control digital, así como la discretización de la planta a partir del modelado continuo desarrollado en el capítulo II utilizando Matlab.

En el Capítulo IV desarrollamos la teoría de control óptimo en tiempo discreto, y su aplicación en el diseño del controlador para nuestro sistema.

ÍNDICE

	Pág.
PRÓLOGO	1
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL	2
1.1 Leyes físicas fundamentales en los sistemas hidráulicos	2
1.2 Análisis matemático de los sistemas hidráulicos	3
1.2.1 Definición	3
1.2.2 Elementos de los sistemas hidráulicos	4
1.3 Descripción de control	8
1.4 Selección de la acción del controlador	10
1.5 Variaciones	11
1.6 Características del proceso y controlabilidad	11
1.7 Tipo de respuestas de los controladores	13
1.7.1 Control si/no	13
1.7.2 Acción proporcional	15
1.7.3 Acción integral	19
1.7.4 Acción derivativa	21
1.7.5 Acción óptima	24
1.8 Medidores de flujo y nivel	26
1.8.1 Medidor de flujo	26
1.8.2 Medidor de nivel	30
1.9 Utilización de Matlab y Simulink	32
CAPÍTULO II	
MODELAMIENTO DEL PROCESO	37
2.1 Estructura y descripción del proceso	37
2.2 Modelamiento del sistema en lazo abierto	38
2.2.1 Ecuaciones físicas	38
2.2.2 Ecuaciones en espacios de estados	40
2.2.3 Controlabilidad y observabilidad del sistema	43

2.2.4	Respuesta al escalón unitario en Matlab	43
2.3	Simulación del sistema en Simulink	45

CAPÍTULO III

DISCRETIZACIÓN DEL PROCESO		47
3.1	Simulación y Rediseño Digital	47
3.1.1	Simulación y modelado digital con dispositivos de muestreo y retención	48
3.2	Simulación digital, formulación con variables de estado	53
3.2.1	Simulación digital, integración numérica	53
3.3	Discretización del Sistema del nivel de líquido del tanque	54
3.4	Simulación del sistema en lazo abierto	56

CAPÍTULO IV

CONTROL ÓPTIMO		59
4.1	Ecuación discreta de Euler – Lagrange	59
4.2	Principio discreto del máximo (mínimo)	63
4.3	Control de tiempo óptimo con restricción de energía	67
4.4	Diseño del regulador digital lineal óptimo	70
4.4.1	Diseño del regulador digital lineal	73
4.5	Solución de la ecuación discreta de Riccati	73
4.5.1	Método recursivo para resolver la ecuación discreta de Riccati	73
4.5.2	Método de valores y vectores propios	74
4.6	Sensibilidad al periodo de muestreo	76
4.7	Observador de estados digital	79
4.7.1	Diseño del observador de estados de orden completo	80
4.8	Aplicación del Control óptimo del nivel del líquido del tanque	81
4.8.1	Aplicación Control óptimo proporcional estacionario y simulación	81
4.8.2	Aplicación Control óptimo proporcional integral y simulación	84
CONCLUSIONES		88
BIBLIOGRAFÍA		91

PRÓLOGO

En la teoría de control tenemos la capacidad de poder modelar dispositivos físicos, analizar su comportamiento y proponer controladores para cumplir objetivos de estabilidad y performance en el dominio del tiempo.

El presente trabajo se realizó basándose en las bases teóricas de la teoría de Control que utilizaremos para la aplicación de un caso en particular.

Aquí analizamos el caso de un tanque que consta de una entrada y una salida de líquido, siendo nuestra tarea el lograr regular el nivel del líquido que habrá en este depósito, para ello tendremos que controlar ya sea la entrada o la salida de éste.

Utilizamos el software MATLAB, para realizar la simulación del proceso y poder así comprobar su performance.

CAPITULO I

INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL

1.1. Leyes físicas fundamentales de los sistemas hidráulicos

El proceso de modelado analítico, se divide en tres grandes partes. La primera de ellas consiste en la delimitación del modelo en función de los fenómenos que resultan relevantes de acuerdo al problema que se quiere resolver. Esta es una etapa que no puede sistematizarse fácilmente y que requiere de una cierta dosis de experiencia en relación al sistema a modelar.

Una vez delimitados los fenómenos que se consideraron relevantes para la construcción del modelo, podemos pasar a la siguiente etapa en la que se deben formalizar las relaciones constitutivas y estructurales asociadas respectivamente a los fenómenos considerados y a la forma en que estos se disponen dentro del sistema. En los sistemas físicos, estas relaciones constitutivas y estructurales encuentran su expresión formal (matemática) en las leyes fundamentales de los dominios de la física asociados a los fenómenos mencionados.

Por este motivo, el modelado analítico de un sistema físico no es posible sin un conocimiento de las leyes elementales asociadas a los fenómenos en cuestión. Teniendo en cuenta que en este informe trataremos con sistemas hidráulicos, haremos a continuación un repaso de las leyes físicas que rigen la dinámica de los mencionados sistemas.

Los fenómenos de mecánica de fluidos se cuentan entre los más difíciles de modelar y analizar en sus aspectos dinámicos. Para fluidos compresibles en general es insoslayable tener en cuenta la variación temporal y espacial de las magnitudes físicas que lo describen. Esto los categoriza como sistemas de parámetros distribuidos y conduce a su tratamiento con modelos dinámicos en derivadas parciales (las leyes fundamentales que gobiernan estos fenómenos están resumidas en las ecuaciones de

Navier-Stokes). Por otra parte los cambios en las variables descriptivas de los fluidos originan cambios en la temperatura, de la cual a su vez dependen los parámetros físicos de aquellos. Este fuerte acoplamiento fluido mecánico-térmico viene a aumentar la complejidad de las descripciones más detalladas.

No obstante, hay en la técnica un subconjunto muy importante de sistemas de fluidos dinámicos que se pueden describir con muy buen grado de aproximación mediante modelo de parámetros concentrados. Esto significa que en determinadas regiones espaciales las magnitudes físicas pueden considerarse uniformes (constantes en el espacio) y hasta despreciables, teniendo sólo variación temporal. Esto conduce a su descripción dinámica con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este subconjunto de sistemas son designados usualmente como Sistemas Hidráulicos. En estos casos, el fluido es en general agua y siendo baja su compresibilidad, y bajas las velocidades aún para caudales importantes, se pueden hacer una serie de hipótesis simplificadoras que permiten tratarlos como circuitos hidráulicos.

Continuaremos entonces con el enfoque de la ingeniería, donde es usual plantear las ecuaciones de balance de materia a través del caudal volumétrico en lugar del caudal másico. También despreciaremos en general la interacción con los efectos térmicos, cabe aclarar que el enfoque tendrá validez a condición de considerar pequeñas variaciones dinámicas de las variables en torno a sus puntos estáticos de operación.

1.2 Análisis matemático de los sistemas hidráulicos

1.2.1 Definición

En general, un análisis matemático exacto no es viable debido a las características no lineales y la naturaleza distribuida del fluido. Sin embargo, se pueden realizar estudios aproximados basados en modelos de parámetros concentrados y linealizando las ecuaciones resultantes.

En gran parte de los problemas reales, los sistemas hidráulicos permanecen alrededor de un punto de operación específico del proceso. Por ello permiten una sencilla linealización utilizando variables incrementales: Δp^* y Δw^* . Las variables más comunes utilizadas en los sistemas hidráulicos son:

- w : velocidad del flujo volumétrico (m^3/s)
 v : volumen (m^3)
 h : altura (m)
 p : presión (N/m^2)

Para utilizar como variable la presión relativa se suele escoger como referencia la presión atmosférica.

$$p^*(t) = p(t) - p_a \quad (1.1)$$

donde $p^*(t)$ es la presión relativa y p_a es la presión atmosférica.

1.2.2 Elementos de los sistemas hidráulicos

a) Capacidad

Cuando un líquido es almacenado en un recipiente abierto, existe una relación algebraica entre el volumen total del líquido y la presión en la base del recipiente. La capacidad hidráulica es la relación entre el incremento del volumen de fluido y la variación de presión producida en el fondo del recipiente. Para un recipiente de forma arbitraria con área transversal $A(h)$, donde h es la altura desde la base, la capacidad hidráulica $C(h)$ puede calcularse según la siguiente expresión:

$$c(h) = \frac{A(h)}{\rho \cdot g} \quad (1.2)$$

La presión absoluta en la base del recipiente es:

$$p = \rho \cdot g \cdot h + p_a \quad (1.3)$$

Para obtener las velocidades de variación del volumen, altura o presión a lo largo del tiempo, se realiza un balance del flujo de masa en el elemento:

$$\dot{v} = w_{in}(t) - w_{out}(t) \quad (1.4)$$

$$\dot{h} = \frac{1}{A(h)} \cdot (w_{in}(t) - w_{out}(t)) \quad (1.5)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{C(h)} \cdot (w_{in}(t) - w_{out}(t)) \quad (1.6)$$

La cantidad de líquido almacenada en el recipiente puede ser expresada de manera equivalente por v , h y p . En un caso general en el que $A(h)$ y $C(h)$ son variables con la altura el modelo del sistema tiene un comportamiento no lineal.

b) Resistencia

Cuando un líquido fluye a través de una tubería, atraviesa una válvula o un orificio, existe una pérdida de presión asociada a la disipación de energía. Normalmente esta pérdida de presión obedece a una ley no lineal respecto al flujo del tipo:

$$w = k \cdot \sqrt{\Delta p} \quad (1.7)$$

La simbología técnica que se usa para estos elementos en circuitos hidráulicos es la siguiente:

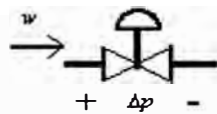


Figura 1.1: Resistor hidráulico (válvula)

donde k es un parámetro constante que depende de las características de la tubería, válvula u orificio.

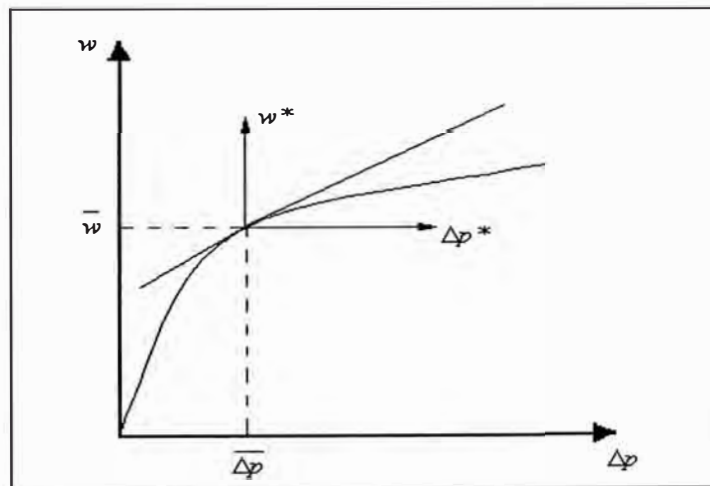


Figura 1.2: Características de las resistencias

La resistencia hidráulica R del elemento es la relación entre la pérdida de presión y su variación de caudal asociada. Puede calcularse como la inversa de la pendiente en ese punto de la ecuación constitutiva del elemento. Para linealizar una ecuación constitutiva de la resistencia hidráulica alrededor del punto de operación, se aproxima la función no lineal por un desarrollo en serie de Taylor de orden 1:

$$w = \bar{w} + \left. \frac{dw}{d\Delta p} \right|_{\Delta p = \bar{\Delta p}} (\Delta p - \bar{\Delta p}) + \dots \quad (1.8)$$

sobre el que se puede introducir el concepto de resistencia hidráulica:

$$w - \bar{w} = \frac{1}{R}(\Delta p - \bar{\Delta p}) \quad (1.9)$$

El valor de la resistencia R puede expresarse en función de Δp ó \bar{w} :

$$R = \frac{2 \cdot \sqrt{\Delta p}}{k} = \frac{2 \cdot \bar{w}}{k^2} \quad (1.10)$$

c) Fuentes de energía

Para sistemas hidráulicos, la fuente de energía es generalmente una bomba que obtiene la potencia a partir de un motor eléctrico.

El caso más común es el de bombas centrífugas a velocidad constante, cuyas curvas características típicas son de la siguiente forma:

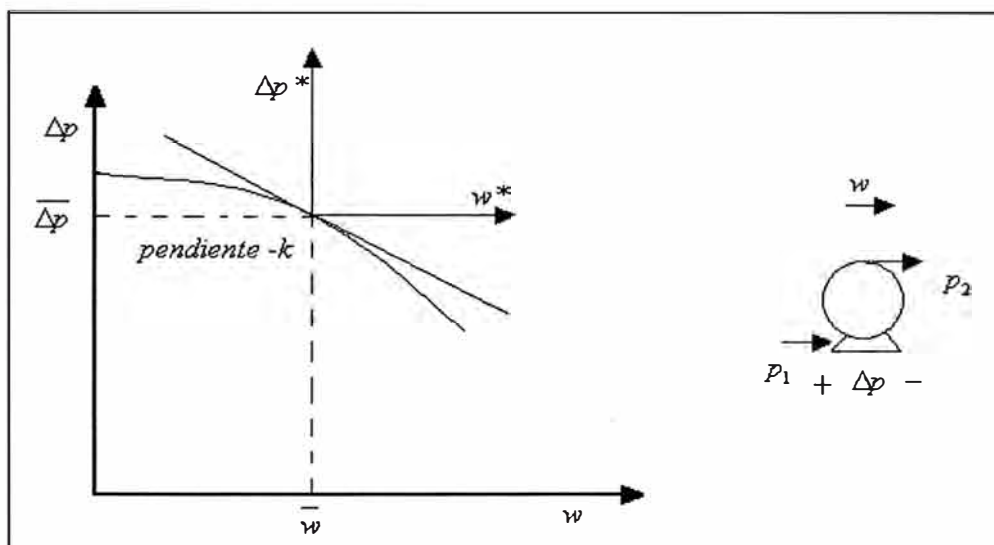


Figura 1.3: Características de la bomba

Para modelar una bomba a velocidad constante en un modelo lineal, se debe evaluar primero el punto de operación calculando $\bar{\Delta p}$ y \bar{w} . Para pequeños desplazamientos alrededor del punto de operación, puede también linealizarse la ecuación característica de la bomba, de manera similar a lo indicado para la resistencia. aunque el problema de la bomba no está presente pero tácitamente es la fuente de agua del caudal de entrada.

$$\Delta p^* = -k \cdot w^* \quad (1.11)$$

En nuestro caso sea:

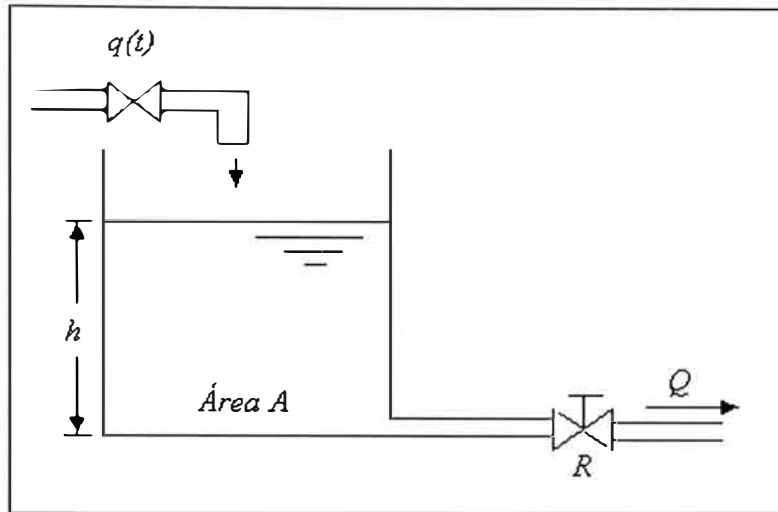


Figura 1.4: Sistema Tanque

La resistencia R representa la pérdida de carga en la tubería por unidad de caudal. El caudal que sale del depósito Q está relacionado con la presión hidrostática (o altura del nivel de agua) y con la resistencia. Suponiendo que la ecuación característica de la pérdida de carga en la válvula es aproximadamente lineal, se desea modelar matemáticamente el sistema, encontraremos el punto de equilibrio y estudiar su comportamiento en movimiento libre, así como la respuesta del sistema ante una entrada de caudal $q(t)$ escalón.

Para una resistencia lineal el caudal que sale del depósito esta dado por:

$$Q = \frac{h}{R} \quad (1.13)$$

Haciendo un balance de masa en el interior del depósito obtenemos la ecuación diferencial del sistema:

$$R \cdot A \cdot \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = R \cdot q(t) \quad (1.14)$$

El punto de equilibrio se alcanzará cuando:

$$h = R \cdot q \quad (1.15)$$

Para pequeños desplazamientos alrededor del punto de equilibrio, el sistema se comporta como un sistema lineal de orden 1 con tiempo de respuesta $T = (R \cdot A)$:

Movimiento libre

$$h(t) = h_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (1.16)$$

Respuesta ante entrada escalón $E = \Delta q$

$$h(t) = (h_0 - R.E).e^{-\frac{t}{T}} \quad (1.17)$$

Respuesta ante entrada rampa de pendiente A

$$h(t) = (h_0 + T.A).e^{-\frac{t}{T}} + At - a.T \quad (1.18)$$

En nuestro caso la relación entre caudal y presión depende también de un parámetro que representa la variación de la apertura de una válvula.

1.3 Descripción de control

Al llevar a cabo la función de control, el controlador automático usa la diferencia entre el valor de consigna y las señales de medición para obtener la salida hacia la válvula, la precisión y capacidad de respuesta de estas señales es la limitación básica en la habilidad del controlador para controlar correctamente la medición. Si el transmisor no envía una señal precisa, o si existe un retraso en la medición de la señal, la habilidad del controlador para manipular el proceso será degradada. Al mismo tiempo, el controlador debe recibir una señal de valor de consigna precisa (Set-point).

En controladores que usan señales de valor de consigna neumática o electrónica generadas dentro del controlador, una falla de calibración del transmisor de valor de consigna resultará necesariamente que la unidad de control automático llevará a la medición a un valor erróneo. La habilidad del controlador para posicionar correctamente la válvula es también otra limitación. Si existe fricción en la válvula, el controlador puede no estar en condiciones de mover la misma a una posición de vástago específica para producir un caudal determinado y esto aparecerá como una diferencia entre la medición y el valor de consigna.

Intentos repetidos para posicionar la válvula exactamente pueden llevar a una oscilación en la válvula y en la medición, o, si el controlador puede sólo mover la válvula muy lentamente, la habilidad del controlador para controlar el proceso será degradada. Una manera de mejorar la respuesta de las válvulas de control es el uso de posicionadores de válvulas, que actúan como un controlador de retroalimentación para posicionar la válvula en el lugar exacto correspondiente a la señal de salida del controlador. Los posicionadores, sin embargo, deberían ser evitados favoreciendo a los elevadores de volumen en lazos de respuesta rápida como es el caso de caudal de líquidos a presión.

Para controlar el proceso, el cambio de salida del controlador debe estar en una dirección que se oponga a cualquier cambio en el valor de medición.

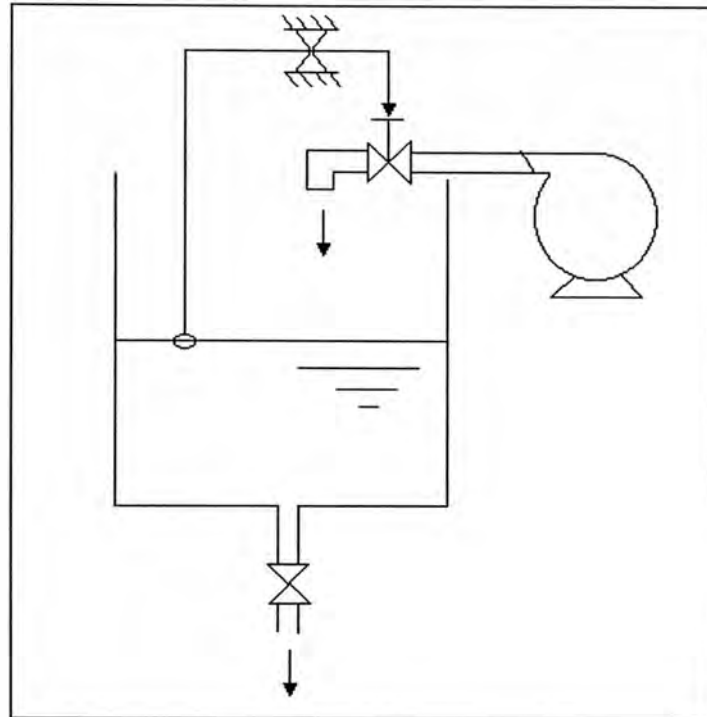


Figura 1.5: Control con flotador

A manera de ejemplo, La figura anterior muestra una válvula directa conectada a un control de nivel en un tanque a media escala. A medida que el nivel del tanque se eleva, el flotador es accionado para reducir el caudal entrante, así, cuanto mas alto sea el nivel del líquido mayor será el cierre del caudal. De la misma manera, a medida que el nivel cae, el flotante abrirá la válvula para agregar más líquido al tanque. La respuesta de este sistema se muestra gráficamente en la figura 1.6.

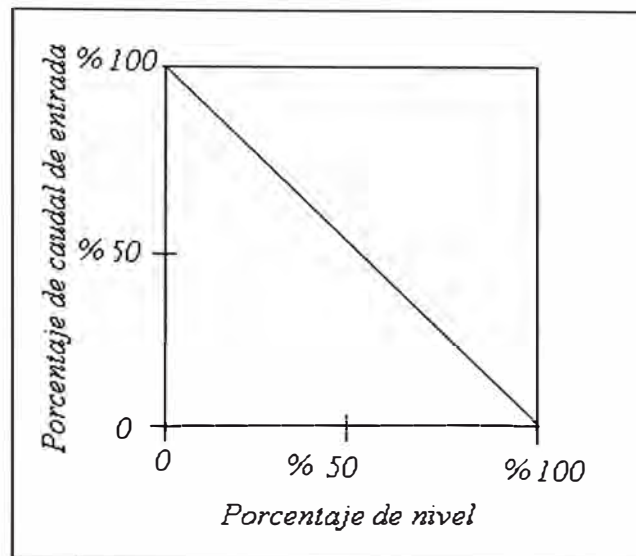


Figura 1.6: Característica lineal

A medida que el nivel va desde el 0% al 100%, la válvula se desplaza desde la apertura total hasta totalmente cerrada. La función del controlador automático es producir este tipo de respuesta opuesta sobre rangos variables, como agregado, otras respuestas están disponibles para una mayor eficiencia del control del proceso.

1.4 Selección de la acción del controlador

Dependiendo de la acción de la válvula, un incremento en la medida puede requerir incrementos o disminuciones del valor de salida para el control. Todos los controladores Pueden ser conmutados entre acción directa y acción reversa.

La acción directa significa que cuando el controlador ve un incremento de señal desde el transmisor, su salida se incrementa. La acción reversa significa que un incremento en las señales de medición hacen que la señal de salida disminuya.

Para determinar cual de estas salidas es la correcta, se debe llevar a cabo un análisis en el lazo. El primer paso es determinar la acción de la válvula. Una selección incorrecta de la acción del controlador siempre resulta en un lazo de control inestable tan pronto la salida como el mismo es puesto en modo automático. Asumiendo que la acción correcta sea seleccionada en el controlador, ¿cómo sabe el dispositivo cuando la salida correcta ha sido alcanzada?. En la figura 1.5, por ejemplo, para mantener el nivel constante, el controlador debe manipular el ingreso de caudal igual al de salida, según se demande. El

controlador lleva a cabo su trabajo manteniendo el balance en un estado permanente, y actuando para restaurar el balance entre el suministro y la demanda cuando el mismo es modificado por alguna variación.

1.5 Variaciones

Cualquiera de los siguientes tres eventos podría ocurrir requiriendo un caudal diferente para mantener el nivel en el tanque. Primero, si la posición de la válvula manual de salida fuera abierta ligeramente, entonces un caudal mayor saldría del tanque, haciendo que el nivel caiga .

Este es un cambio bajo demanda, y para restaurar el balance, la válvula de entrada de caudal debe ser abierta para proveer un mayor ingreso de líquido. Un segundo tipo de condición de desbalance sería un cambio en el valor de consigna. El tercer tipo de variación sería un cambio en el suministro, si la presión de salida de la bomba se incrementara, aún si la válvula de entrada se mantuviera en su posición, el incremento de presión causaría un mayor caudal, haciendo que el nivel comience a elevarse. Al medir el incremento, el controlador de nivel debería cerrar la válvula en la entrada para mantener el nivel a un valor constante.

1.6 Características del proceso y controlabilidad

El controlador automático usa cambios en la posición del actuador final para controlar la señal de medición, moviendo el actuador para oponerse a cualquier cambio que observe en la señal de medición. La controlabilidad de cualquier proceso es función de lo bien que una señal de medición responde a éstos cambios en la salida del controlador; para un buen control la medición debería comenzar a responde en forma rápida, para luego no cambiar rápidamente. Debido al tremendo número de aplicaciones del control automático, caracterizar un proceso por lo que hace, es una tarea engorrosa. Sin embargo, todos los procesos pueden ser descritos por una relación entre las entradas y las salidas. Si al ejemplo de tanque aumentamos una nueva señal como la temperatura debemos tener en cuenta la respuesta de la temperatura del intercambiador de calor cuando la válvula es abierta incrementando manualmente la señal de salida del controlador.

Al comienzo, no hay una respuesta inmediata en la indicación de temperatura, luego la respuesta comienza a cambiar, se eleva rápidamente al inicio, y se aproxima al final a un nivel constante. El proceso puede ser caracterizado por dos elementos de su respuesta,

el primero es el tiempo muerto (dead time en inglés), o sea el tiempo antes de que la medición comience a responder, en éste caso, el tiempo muerto se eleva debido a que el calor en el vapor debe ser conducido hasta el agua antes de que pueda afectar la temperatura, y luego hacia el transmisor antes de que el cambio pueda ser percibido. El tiempo muerto es una función de las dimensiones físicas de un proceso y cosas tales como las velocidades de correas y regímenes de mezcla. Segundo, la capacidad de un proceso es el material o energía que debe ingresar o abandonar el proceso para cambiar las mediciones, es por ejemplo, los litros necesarios para cambiar el nivel, las calorías necesarias para cambiar la temperatura, o los metros cúbicos de gas necesarios para cambiar la presión. La medición de una capacidad es su respuesta para un paso de entrada. Específicamente, el tamaño de una capacidad es medida por una constante de tiempo, que es definida como el tiempo necesario para completar el 63% de su respuesta total. La constante de tiempo es una función del tamaño del proceso y del régimen de transferencia de material o energía. Para este ejemplo, cuanto más grande sea el tanque, y menor el caudal de vapor, mayor será la constante de tiempo. Estos números pueden ser de tan sólo algunos segundos, o tan largos como varias horas. Combinados con el tiempo muerto, los mismos definen cuanto tiempo lleva para que la señal responda a cambios en la posición de la válvula.

Un proceso puede comenzar a responder rápidamente, pero no cambiar muy rápido si su tiempo muerto es pequeño y su capacidad muy grande. En resumen, cuanto mayor sea la constante de tiempo de la capacidad comparada con el tiempo muerto, mejor será la controlabilidad del proceso.

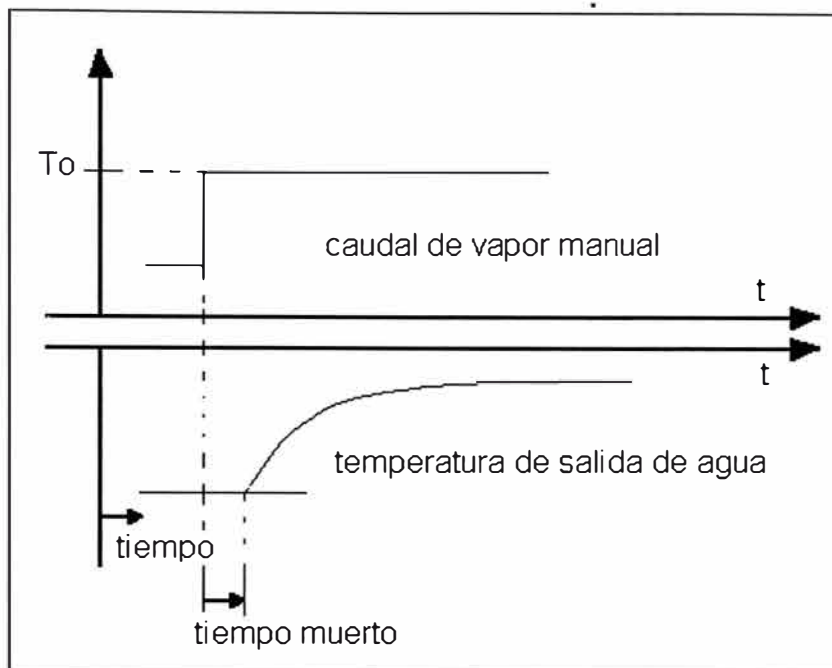


Figura1.7: Caso especial con señal de temperatura

1.7 Tipos de respuestas de controladores

La primera y más básica característica de la respuesta del controlador ha sido indicada como la acción directa o reversa. Una vez que esta distinción se ha llevado a cabo, existen varios tipos de respuestas que pueden ser usadas para controlar un proceso, siendo importante tener un conocimiento claro del control que utilizaremos con respecto a otros controladores. Entre los más utilizados tenemos:

- Control si/no (o on/off con sus siglas en inglés), o control de dos posiciones
- Control proporcional
- Acción integral
- Acción derivativo
- Control Óptimo

1.7.1 Control si/no

El control si/no es mostrado en la figura 1.8

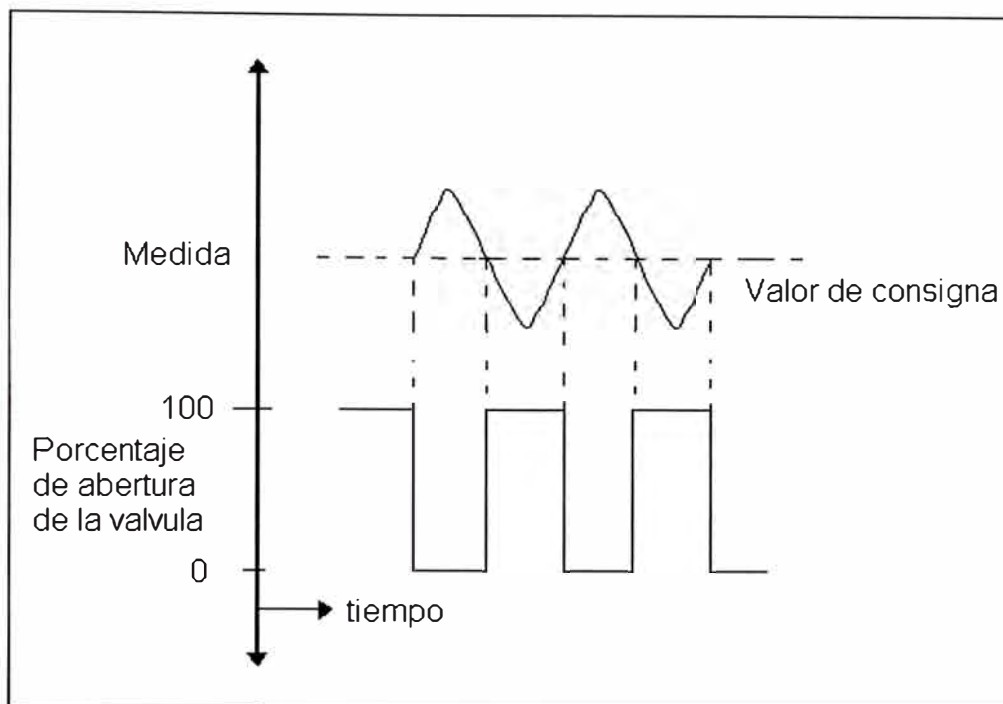


Figura 1.8: Control on/off

Para un controlador de acción reversa y una válvula del tipo presión para cerrar. El controlador si/no tiene dos salidas que son para máxima apertura y para apertura mínima, o sea cierre. Para este sistema se ha determinado que cuando la medición cae debajo del valor de consigna, la válvula debe estar cerrada para hacer que se abra; así, en el caso en que la señal hacia el controlador automático esté debajo del valor de consigna, la salida del controlador será del 100%. A medida que la medición cruza el valor de consigna la salida del controlador va hacia el 0%. Esto eventualmente hace que la medición disminuya y a medida que la medición cruza el valor de consigna nuevamente, la salida vaya a un máximo. Este ciclo continuará indefinidamente, debido a que el controlador no puede balancear el suministro contra la carga. La continua oscilación puede, ser aceptable o no dependiendo de la amplitud y longitud del ciclo. Un ciclo rápido causa frecuentes alteraciones en el sistema de suministro de la planta y un excesivo desgaste de la válvula. El tiempo de cada ciclo depende del tiempo muerto en el proceso debido a que el tiempo muerto determina cuanto tiempo toma a la señal de medición para revertir su dirección una vez que la misma cruza el valor de consigna y la salida del controlador cambia. La amplitud de la señal depende de la rapidez con que la señal de medición cambia durante cada ciclo. En procesos de gran capacidad, tales como cubas de calentamiento, la gran capacidad produce una gran constante de tiempo, por lo tanto, la medición puede cambiar sólo muy lentamente. El resultado es que el ciclo ocurre

dentro de una banda muy estrecha alrededor del valor de consigna, y este control puede ser muy aceptable, si el ciclo no es muy rápido. El tipo de control usado con mayor frecuencia en la industria es el Si/No. Sin embargo si la medición del proceso es más sensible a los cambios en el suministro, la amplitud y frecuencia del ciclo comienza a incrementarse, en algún punto el ciclo se volverá inaceptable y alguna forma de control proporcional deberá ser aplicada.

Para estudiar los otros tres tipos de modos de control automático se usaran respuesta de lazo abierto. Un lazo abierto significa que sólo la respuesta del controlador será considerada.

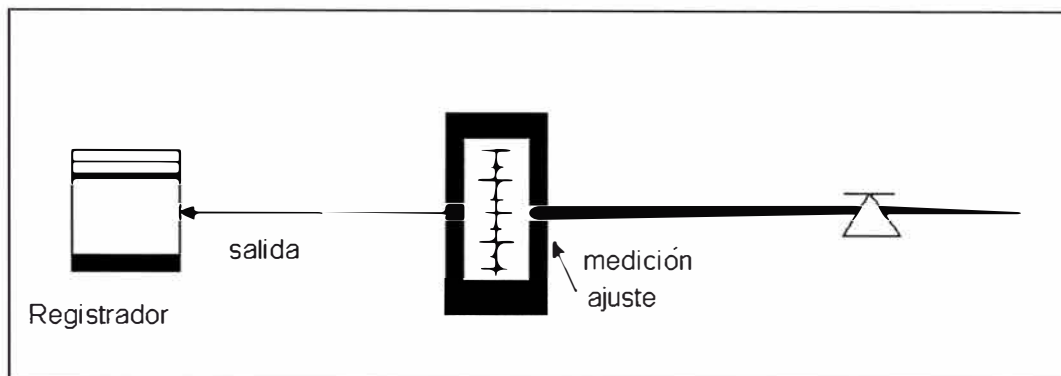


Figura 1.9: Respuesta de control a lazo abierto

La figura 1.9 muestra un controlador automático con una señal artificial como la medición introducida desde un regulador manual. El valor de consigna es introducido normalmente y la salida es registrada. Con éste arreglo, las respuestas específicas del controlador a cualquier cambio deseado en la medición puede ser observada.

1.7.2 Acción proporcional

La respuesta proporcional es la base de los tres modos de control, si los otros dos, acción integral (reset) y acción derivativa están presentes, éstos son sumados a la respuesta proporcional. "Proporcional" significa que el cambio presente en la salida del controlador es algún múltiplo del porcentaje de cambio en la medición.

Este múltiplo es llamado "ganancia" del controlador. Para algunos controladores, la acción proporcional es ajustada por medio de tal ajuste de ganancia, mientras que para otros se usa una "banda proporcional". Ambos tienen los mismos propósitos y efectos.

La figura 1.10a ilustra la respuesta de un controlador proporcional por medio de un indicador de entrada/salida pivotando en una de estas posiciones . Con el pivó en el centro entre la entrada y la salida dentro del gráfico, un cambio del 100% en la medición es requerido para obtener un 100% de cambio en la salida, o un desplazamiento completo de la válvula. Un controlador ajustado para responder de ésta manera se dice que tiene una banda proporcional del 100%. Cuando el pivó es hacia la mano derecha, la medición de la entrada debería tener un cambio del 200% para poder obtener un cambio de salida completo desde el 0% al 100%, esto es una banda proporcional del 200%. Finalmente, si el pivó estuviera en la posición de la mano izquierda y si la medición se moviera sólo cerca del 50% de la escala, la salida cambiaría 100% en la escala. Esto es un valor de banda proporcional del 50%. Por lo tanto, cuanto más pequeña sea la banda proporcional, menor será la cantidad que la medición debe cambiar para el mismo tamaño de cambio en la medición, o en otras palabras, menor banda proporcional implica mayor cambio de salida para el mismo tamaño de medición. Esta misma relación está representada por la figura 1.10a

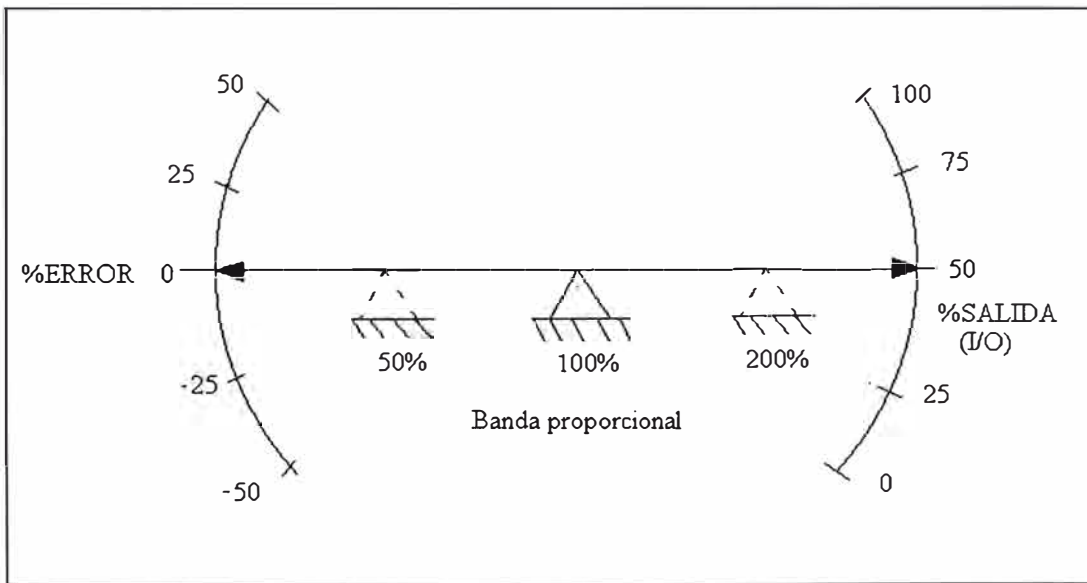


Figura 1.10a: Acción proporcional

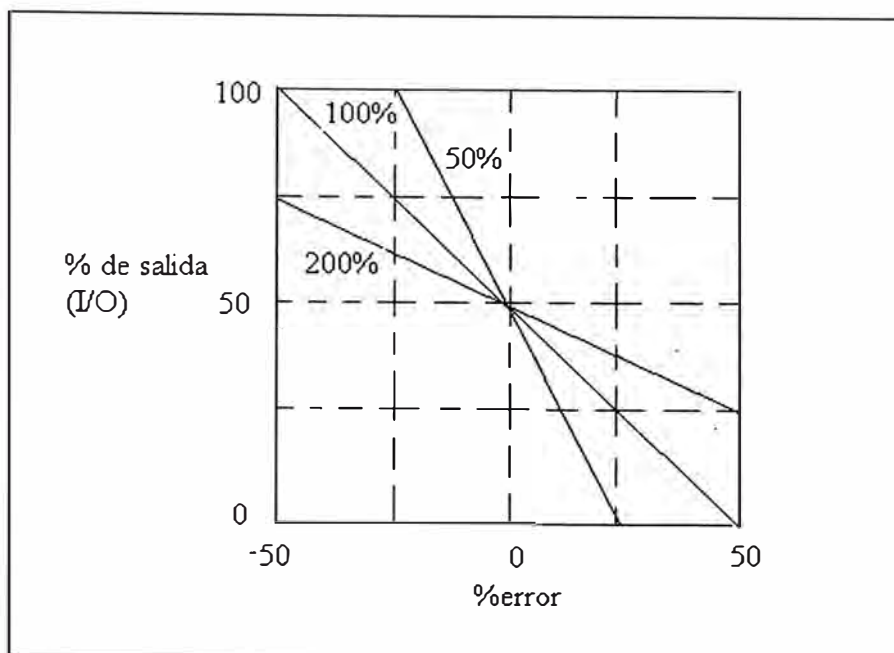


Figura 1.10b: Acción proporcional

Este gráfico (figura 1.10b) muestra cómo la salida del controlador responderá a medida que la medición se desvía del valor de consigna. Cada línea sobre el gráfico representa un ajuste particular de la banda proporcional. Dos propiedades básicas del control proporcional pueden ser observadas a partir de éste gráfico:

Por cada valor de la banda proporcional toda vez que la medición se iguala al valor de consigna, la salida es del 50%. Cada valor de la banda proporcional define una relación única entre la medición y la salida. Por cada valor de medición existe un valor específico de salida. Por ejemplo, usando una línea de banda proporcional del 100%, cuando la medición está 25% por encima del valor de consigna, la salida del controlador deberá ser del 25%. La salida del controlador puede ser del 25% sólo si la medición está 25% por encima del valor de consigna. De la misma manera, cuando la salida del controlador es del 25%, la medición será del 25% por encima del valor de consigna. En otras palabras, existe un valor específico de salida por cada valor de medición. Para cualquier lazo de control de proceso sólo un valor de la banda proporcional es el mejor. A medida que la banda proporcional es reducida, la respuesta del controlador a cualquier cambio en la medición se hace mayor. En algún punto dependiendo de la característica de cada proceso particular, la respuesta en el controlador será lo suficientemente grande como para controlar que la variable medida retorne nuevamente en dirección opuesta a tal

punto de causar un ciclo constante de la medición. Este valor de banda proporcional, conocido como la última banda proporcional, es un límite en el ajuste del controlador para dicho lazo. Por otro lado, si se usa una banda proporcional muy ancha, la respuesta del controlador a cualquier cambio en la medición será muy pequeña y la medición no será controlada en la forma suficientemente ajustada. La determinación del valor correcto de banda proporcional para cualquier aplicación es parte del procedimiento de ajuste (tuning procedure) para dicho lazo. El ajuste correcto de la banda proporcional puede ser observado en la respuesta de la medición a una alteración.

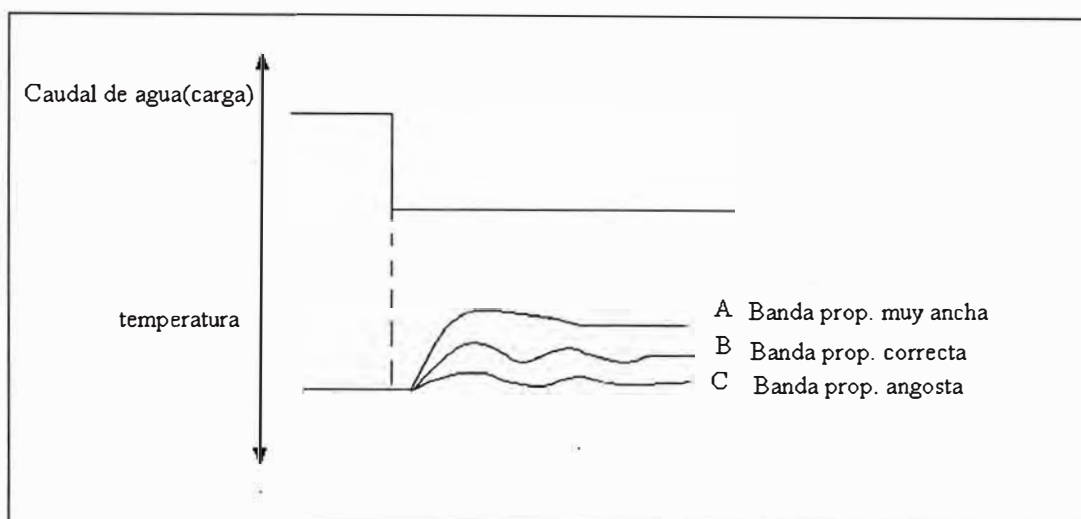


Figura 1.11 : Respuesta de lazo cerrado

La figura 1.11 muestra varios ejemplos de bandas proporcionales variadas para el intercambiador de calor.

Idealmente, la banda proporcional correcta producirá una amortiguación de amplitud de cuarto de ciclo en cada ciclo, en el cual cada medio ciclo es $\frac{1}{2}$ de la amplitud del medio ciclo previo. La banda proporcional que causará una amortiguación de onda de un cuarto de ciclo será menor, y por lo tanto alcanzará un control más ajustado sobre la variable medida, a medida que el tiempo muerto en el proceso decrece y la capacidad se incrementa.

Una consecuencia de la aplicación del control proporcional al lazo básico de control es el offset. Offset significa que el controlador mantendrá la medida a un valor diferente del valor de consigna. Esto es más fácilmente visto al observar la figura 1.5. Note que si la válvula de carga es abierta, el caudal se incrementará a través de la válvula y el nivel comenzará a caer, para mantener el nivel, la válvula de suministro debería abrirse, pero teniendo en cuenta la acción proporcional del lazo, el incremento en la posición de

El correcto valor de la acción reset depende de que tan rápido puede responder la medición al recorrido adicional de válvula que la misma causa. El controlador no debe comandar la válvula más rápido que el tiempo muerto en el proceso, permitiendo que la medición responda, o de otra manera la válvula irá a sus límites antes de que la medición pueda ser retornada nuevamente al valor de consigna. La válvula se mantendrá entonces en su posición extrema hasta que la medición cruce el valor de consigna en la dirección opuesta. El resultado será un ciclo de reset en el cual la válvula se desplaza de un extremo al otro a medida que la medición oscila alrededor del valor de consigna. Cuando el reset es aplicado en los controladores en procesos en serie en que la medición está alejada del valor de consigna por largos períodos entre series, el reset puede llevar la salida a un máximo resultando en una oscilación de reset. Cuando la próxima serie se inicie, la salida no alcanzará su máximo hasta que la medición cruce el valor de consigna produciendo grandes desviaciones. El problema puede ser prevenido mediante la inclusión de una “llave de serie” en el controlador

1.7.4 Acción Derivativa

La tercera respuesta encontrada en controladores es la acción derivativa. Así como la respuesta proporcional responde al tamaño del error y el reset responde al tamaño y duración del error, el modo derivativo responde a que tan rápido cambia el error. En la figura 1.14, dos respuestas derivativas son mostradas. La primera es una respuesta a un corte en la medición alejada del valor de consigna. Para un escalón, la medición cambia en forma infinitamente rápida, y el modo derivativo del controlador produce un cambio muy grande y repentino en la salida, que muere inmediatamente debido a que la medición ha dejado de cambiar luego del escalón. La segunda respuesta muestra la respuesta del modo derivativo a una medición que está cambiando a un régimen constante. La salida derivativa es proporcional al régimen de cambio de éste error. Cuanto mayor sea el cambio, mayor será la salida debido a la acción derivativa. La acción derivativa mantiene ésta salida mientras la medición esté cambiando. Tan pronto como la medición deja de cambiar, esté o no en el valor de consigna, la respuesta debido a la acción derivativa cesará. En la mayoría de controladores, la respuesta derivativa es mayormente medida en minutos como se indica en la figura 1.15

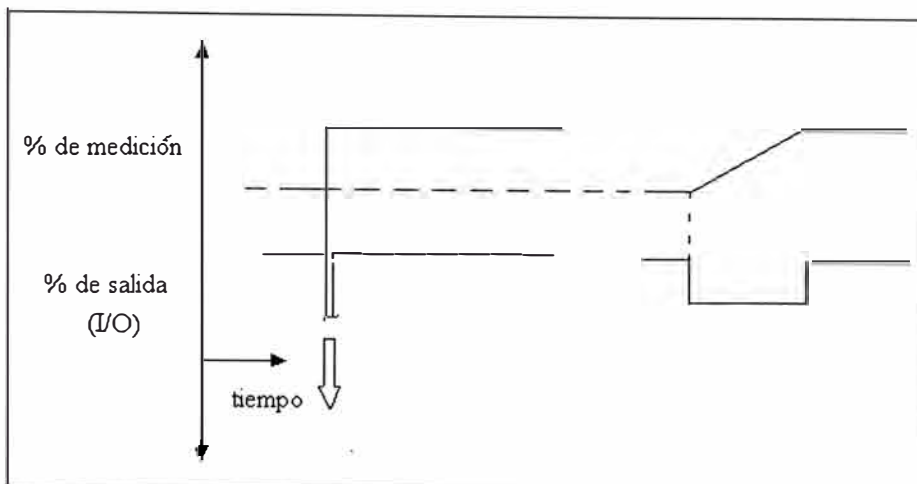


Figura 1.14: Acción derivativa

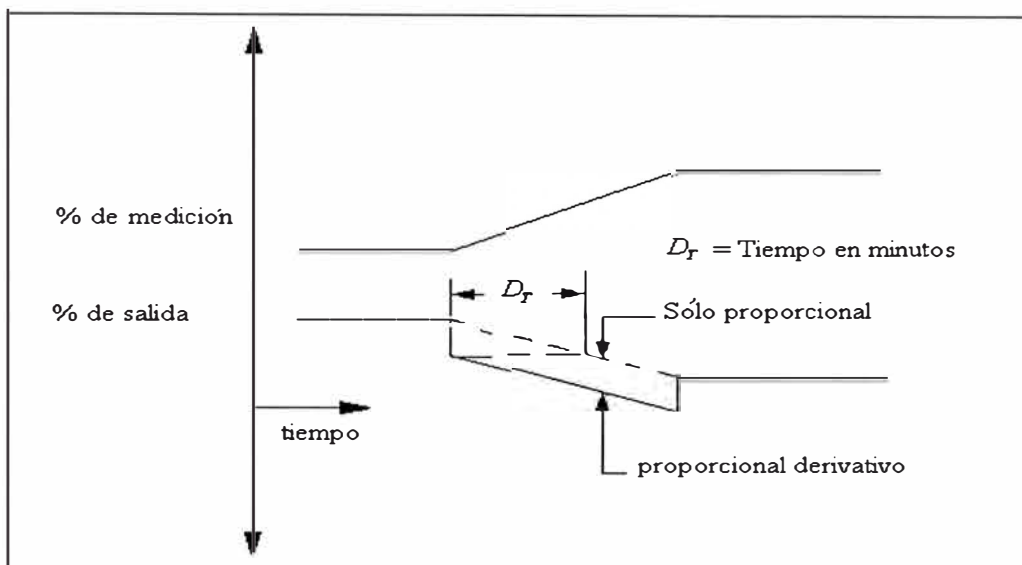


Figura 1.15 : Acción derivativa más proporcional

El tiempo derivativo en minutos, es el tiempo que la respuesta proporcional del lazo abierto más la respuesta derivativa está delante de la respuesta resultante del valor proporcional solamente. Así, cuanto más grande sea el número derivativo mayor será la respuesta derivativa. Los cambios en el error son un resultado de los cambios tanto en el valor de consigna como en la medición o en ambos. Para evitar un gran pico causado por las escalones de cambio en el valor de consigna, la mayoría de los controladores modernos aplican la acción derivativa sólo a cambios en la medición. La acción derivativa en los controladores ayuda a controlar procesos con constantes de tiempo especialmente grandes y tiempo muerto significativo, la acción derivativa es innecesaria en aquellos procesos que responden rápidamente al movimiento de la válvula de control, y no puede ser usado en absoluto en procesos con ruido en la señal de medición, tales como caudal,

ya que la acción derivativa en el controlador responderá a los cambios bruscos en la medición que el mismo observa en el ruido. Esto causará variaciones rápidas y grandes en la salida del controlador, lo que hará que la válvula esté constantemente moviéndose hacia arriba o hacia abajo, produciendo un desgaste innecesario en la misma.

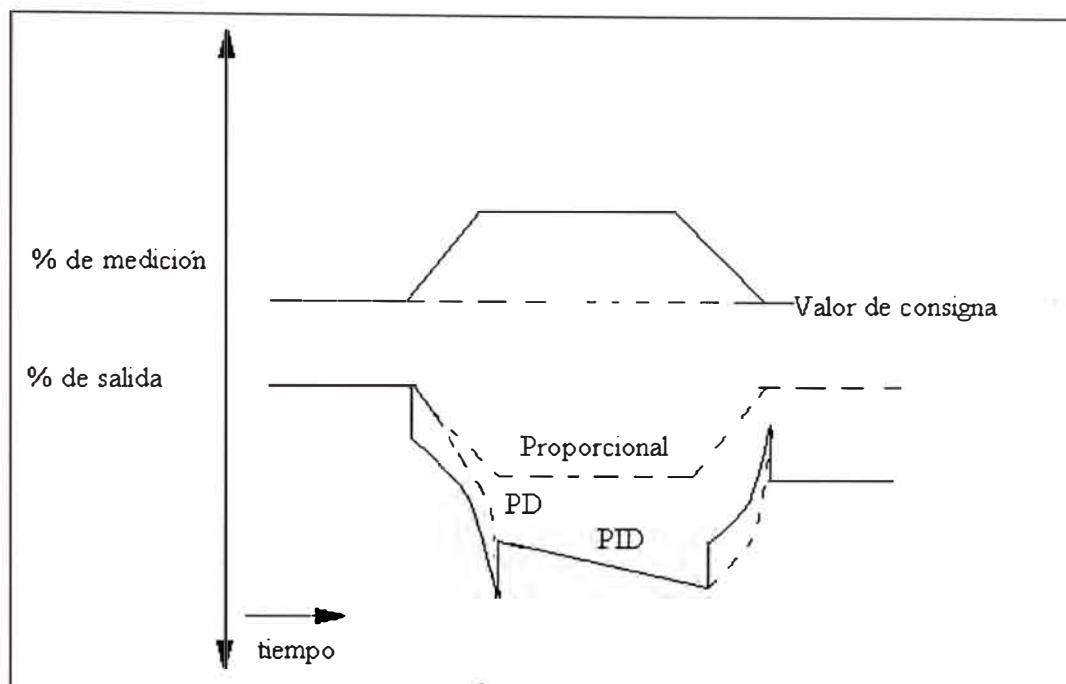


Figura 1.16: Acción Proporcional más integral más derivativa

La figura 1.16 muestra un acción combinada de respuesta proporcional, reset y acción derivativa para la medición de temperatura de un intercambiador de calor simulado que se desvía del valor de consigna debido a un cambio de carga. Cuando la medición comienza a desviarse del valor de consigna, la primera respuesta del controlador es una respuesta derivativa proporcional al régimen de variación de la medición que se opone al movimiento de la medición al alejarse del valor de consigna. La respuesta derivativa es combinada con la respuesta proporcional agregada, a medida que el reset en el controlador ve el error incrementarse, el mismo controla la válvula mas fuerte aún. La acción continúa hasta que la medición deja de cambiar, entonces la acción derivativa se detiene. Dado que existe aún un error, la medición continúa cambiando debido al reset, hasta que la medición comienza a retornar hacia el valor de consigna. Tan pronto como la medición comienza a moverse retornando hacia el valor de consigna, aparece una acción derivativa proporcional al régimen de cambio en la variación oponiéndose al retorno de la medición hacia el valor de consigna. La acción integral o reset continúa debido a que aún

existe un error, a pesar de que su contribución disminuye con el error. Además, la salida debido al valor proporcional está cambiando. Así, la medición retorna hacia el valor de consigna. Tan pronto como la medición alcanza el valor de consigna y deja de cambiar, la acción derivativa cesa nuevamente y la salida proporcional vuelve al 50%. Con la medición nuevamente en su valor de consigna, no existen más respuestas a variaciones debidas al reset. Sin embargo, la salida está ahora a un nuevo valor. El nuevo valor es el resultado de la acción de reset durante el tiempo en que la medición se alejó del valor de consigna, y compensa el cambio de carga que fue causado por la alteración original .

1.7.5 Acción Óptima

a) El Principio de Optimización

Para entender la idea de criterio de optimización en variable de estados, la introduciremos con sistemas de tiempo discreto, que son más simples y es como procederemos. El estado de un sistema discreto describe una trayectoria haciendo transiciones discretas de un estado a otro bajo el efecto de una entrada también aplicada en tiempo discreto. Cuando se asocia un criterio de optimización al sistema, cada transición de estado tiene asociado un costo o penalidad. Por ejemplo, pueden penalizarse las transiciones de estado que se alejan demasiado del estado final deseado, o las acciones de control de valores demasiado elevados. A medida que el sistema evoluciona de estado en estado, los costos se suman hasta acumular un costo total asociado a la trayectoria. Ilustramos el concepto con el gráfico de la Figura 1.17, que representa 8 estados de un sistema discreto con sus transiciones posibles. El estado inicial es el 1, y el final el 8. El sistema pasa de un estado a otro en cada tiempo k determinado por la entrada $u[k]$ y las ecuaciones $x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k]$.

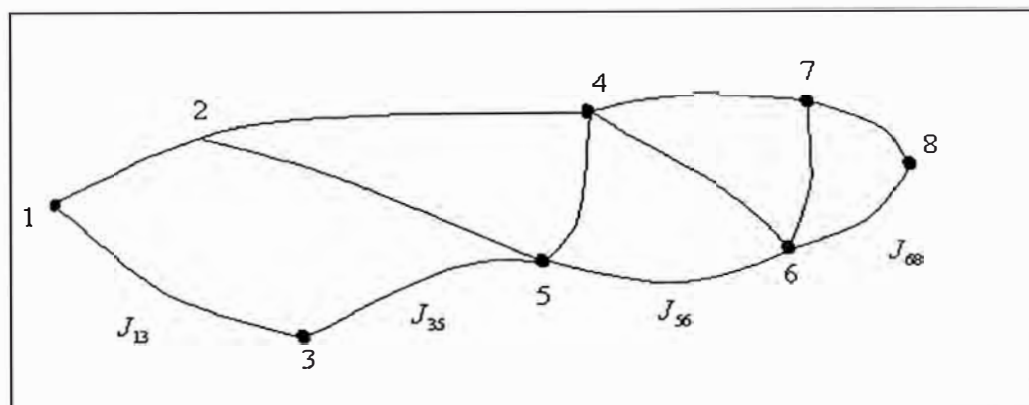


Figura1.17: Posibles trayectorias del 1 al 8

Las transiciones posibles se representan por los arcos que conectan el estado inicial al final a través de los estados intermedios. El costo asociado a cada transición se representa con la letra J ; por ejemplo, el costo de moverse del estado 3 al 5 es J_{35} . Asumiendo que los costos se acumulan en forma aditiva, vemos que la trayectoria de 1 a 8, por ejemplo, tiene un costo total $J_{13} + J_{35} + J_{56} + J_{68}$. Como hay varias rutas alternativas del estado 1 al 8, el costo total dependerá de la trayectoria elegida. La señal de control $u[k]$ que determina la trayectoria de menor costo es la estrategia óptima. Como ya veremos, en sistemas de tiempo discreto, la acumulación de costos se representa mediante suma. Y en tiempo continuo por integración.

Otra de las nociones que es muy importante en todo lo que hoy puede considerarse parte del ámbito de la teoría del control es la de "optimización". La optimización es una técnica que tiene como objetivo aumentar o mejorar el valor de una variable que, en la práctica, puede tomar las formas más variadas: temperatura, flujo de aire, velocidad, rentabilidad, beneficio, información, capacidad de destrucción, etc.

Las técnicas de optimización son tan variadas que resulta imposible hacer una presentación global y unificada de todas ellas. Por otra parte, la tecnología informática y de la computación han jugado un papel crítico en las aplicaciones de las técnicas de optimización, tal y como ocurre en el control óptimo de cohetes y proyectiles. En efecto, en vista de la complejidad de los sistemas a los que la Teoría del Control ha de aplicarse en la actualidad, es imposible realizar una implementación eficiente de los métodos de control, sin previamente realizar un riguroso trabajo de simulación numérica.

Dentro del amplio abanico de teorías, técnicas y problemas que podemos enmarcar en el contexto de la optimización cabe mencionar la teoría de juegos, la programación lineal y no lineal, la teoría del control, etc.

Después de un análisis debemos tener en cuenta los siguientes puntos:

- Para tener un lazo realimentado de control estable, el ajuste más importante del controlador es la selección de la acción correcta, sea directa o inversa. La incorrecta selección de ésta acción hará que la salida del controlador sea inestable, y por lo tanto la elección correcta hará que la salida del controlador cambie de tal manera que el movimiento de la válvula se oponga a cualquier cambio en la medición detectada por el controlador.

- El valor correcto de los ajustes de banda proporcional, reset, y tiempo derivativo dependen de las características del proceso, cabe consignar que en los controladores actuales dichos valores se pueden detectar en forma automática, ya que el controlador dispone de un modo en que produce alteraciones controladas, y dentro de ciertos límites establecidos previamente por el operario, en la salida se miden los resultados del proceso para una cierta cantidad de ciclos de alteración, en base a este comportamiento se puede detectar cuál es el mejor conjunto de ajustes para controlar un proceso mediante el software interno del aparato.
- La función del modo reset (también llamado acción integral) es para eliminar el offset. Si mucho valor de offset es usado el resultado será una oscilación de la medición cuando el controlador acciona la válvula de un extremo al otro. Si un valor muy bajo de reset es usado, el resultado será que la medición retorna al valor de consigna más lentamente que lo posible.
- El modo derivativo se opone a cualquier cambio en la medición. Una acción derivativa muy pequeña no tiene efecto significativo, una acción con valores muy altos provoca una respuesta excesiva del controlador y un ciclo en la medición.

1.8 Medidores de flujo y nivel

1.8.1 Medidor de flujo

El movimientos de fluidos por canales o conductos abiertos o cerrados y el caudal, cantidad de material en peso o volumen que fluye por unidad de tiempo, están presentes en todos los procesos de transporte de energía, dicha energía es usada bien sea para control de procesos o como simple indicación.

La mayoría de caudalímetros se basan en métodos de medida indirectos y en particular, en la detección de diferencias de presión provocadas por la inserción de un elemento en el conducto donde se desea medir. Para entender éste y otros métodos de medida de caudal es necesario repasar, siquiera brevemente, la teoría básica de flujo de fluidos.

Se denomina flujo viscoso o laminar al de un fluido a lo largo de un conducto recto, con paredes lisas y sección transversal uniforme, donde la trayectoria de cada una de las partículas es paralela a las paredes del tubo y con la misma dirección. Se habla de flujo turbulento cuando algunas de las partículas del fluido poseen componentes de velocidad longitudinal y transversal, y aparecen remolinos o torbellinos.

Para un fluido incompresible, en el que la gravedad sea la única fuerza interna, esto es, sin rozamientos, que fluya en régimen estacionario y sin que entre ni salga calor de él, se cumple el teorema de Bernoulli. según éste, todo cambio de velocidad provoca un cambio de sentido opuesto en la presión, cambio que es igual al que experimenta la energía cinética de la unidad de volumen, sumado a cualquier cambio debido a diferencia de nivel.

Es decir:

$$p + \rho \cdot g \cdot z + \rho \cdot \frac{v^2}{2} = \text{constante} \quad (1.19)$$

donde:

p es la presión estática

ρ es la densidad del fluido (incompresible)

g es la aceleración de la gravedad

z es la altura geométrica respecto a un nivel de referencia

v es la velocidad del fluido en el punto considerado

$\rho \cdot \frac{v^2}{2}$ se denomina presión dinámica

Un dispositivo simple, cuyo fundamento se puede describir mediante la expresión (1.19), es el tubo de Pitot, empleado para determinar la magnitud de la velocidad de un fluido en un punto. En la figura 1.18 se observa el caso de un canal abierto, con un fluido incompresible y sin fricción y flujo unidimensional de dirección conocida y se dispone un tubo en ángulo recto con una abertura dirigida aguas arriba.

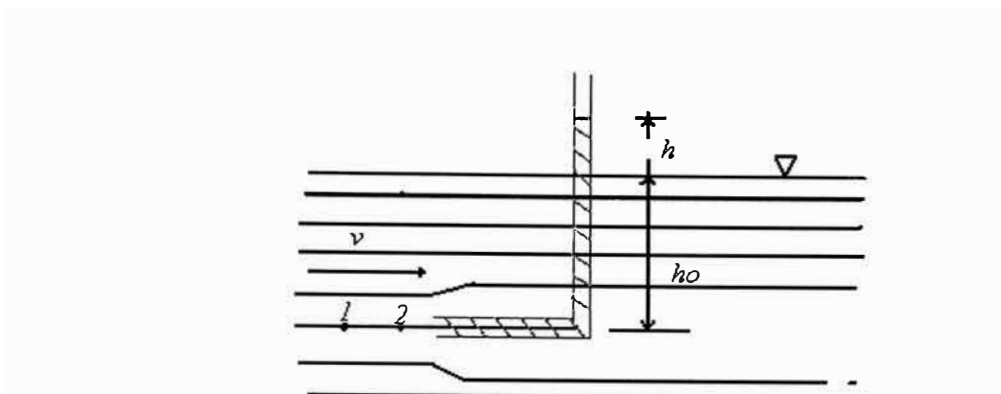


Figura 1.18: Tubo Pitot canal abierto

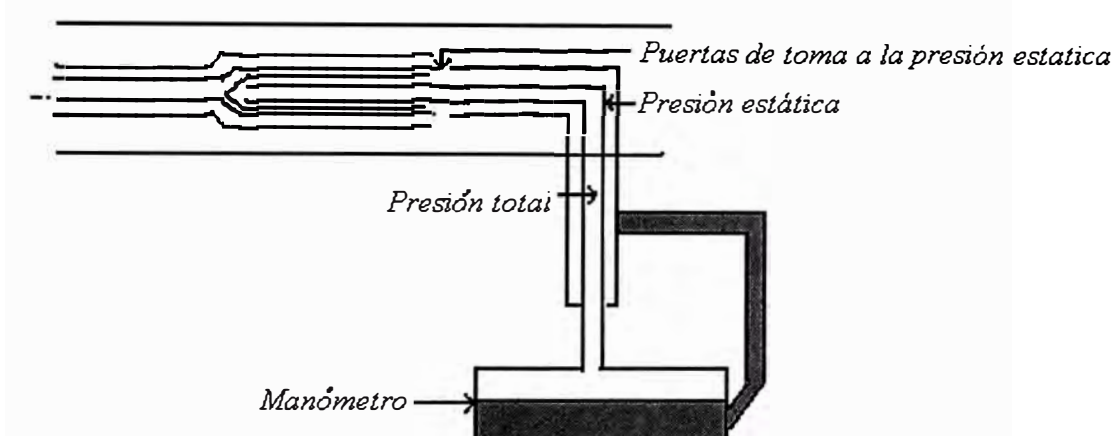


Figura 1.19: Tubo de Pitot en canal cerrado. El manómetro mide la diferencia entre la presión total y la presión estática, y puede ser de tipo electrónico

El líquido penetra en el tubo y sube lo suficiente para que se equilibre la presión de la columna líquida con la fuerza producida por la velocidad al impactar el fluido en la abertura. Dado que enfrente de ésta velocidad nula, las líneas de flujo se “reparten”, creándose un punto de estancamiento. Se cumple entonces:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = h_0 + h \quad (1.20)$$

y como al ser un canal abierto, $p_1 = \rho \cdot g \cdot h_0$, se tiene finalmente:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \quad (1.21)$$

En un tubo hay que medir la presión estática mediante un manómetro y en la figura 1.19, se hacen las dos medidas a la vez. A partir de (1.19) es fácil obtener la relación entre la velocidad y la diferencia entre presiones, que resulta ser:

$$v^2 = 2(p_t - p) / \rho \quad (1.22)$$

El tubo de Pitot es utilizado frecuentemente en aviación para medir la velocidad del aire.

Los caudalímetros de obstrucción son sin duda alguna los más frecuentes, y su funcionamiento se puede describir también a partir de (1.19). Se denomina obstrucción a una restricción de flujo de área constante. En ella se produce una caída de presión que depende del flujo, según se muestra seguidamente, de esta manera, la medida de caudal se reduce a una medida de presión diferencial.

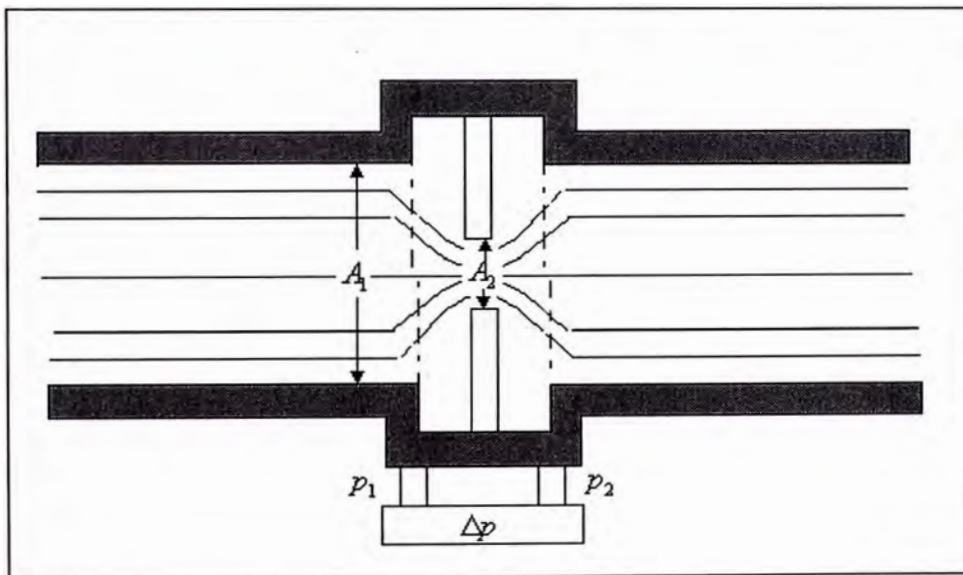


Figura 1.20: Placa de obstrucción para la medida de caudal empleando un sensor de presión diferencial

Si a un conducto cerrado se interpone una placa con un orificio, hay una contracción de la vena fluida, que pasa de tener una sección transversal A_1 (la del conducto) a una sección transversal A_2 (la del orificio), figura 1.20, y ello lleva asociado a un cambio de velocidad. Dado que la masa se debe conservar:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (1.23)$$

Por otro parte , la aplicación del teorema de Bernoulli lleva a

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho v_1^2 / 2 = p_2 + \rho g z_2 + \rho v_2^2 / 2 \quad (1.24)$$

Si $z_1 = z_2$, a partir de estas dos expresiones se obtiene

$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2) / \rho}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2} \quad (1.25)$$

El caudal teórico es $Q = A_2 \cdot v_2$, pero el caudal real es algo inferior y se determina calculando experimentalmente un factor de corrección, denominado coeficiente de descarga, C_d , que depende de A_1 , A_2 y otros factores. Su valor es del orden de 0.6. Se tiene así:

$$Q_r = C_d \cdot Q \quad (1.26)$$

1.8.2 Medidor de nivel

Para utilizar un medidor que se preste a la automatización, obtendremos una señal eléctrica mediante una conexión mecánica de un flotador que, en virtud del principio de Arquímedes, convierte el desplazamiento de la superficie libre en una fuerza o par, y éstos en un ángulo de giro (figura 1.21a). Otra posibilidad es medir la diferencias de presiones Δp entre el fondo del depósito y la superficie del líquido (figura 1.21b), la relación con la altura del líquido es:

$$h = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \quad (1.27)$$

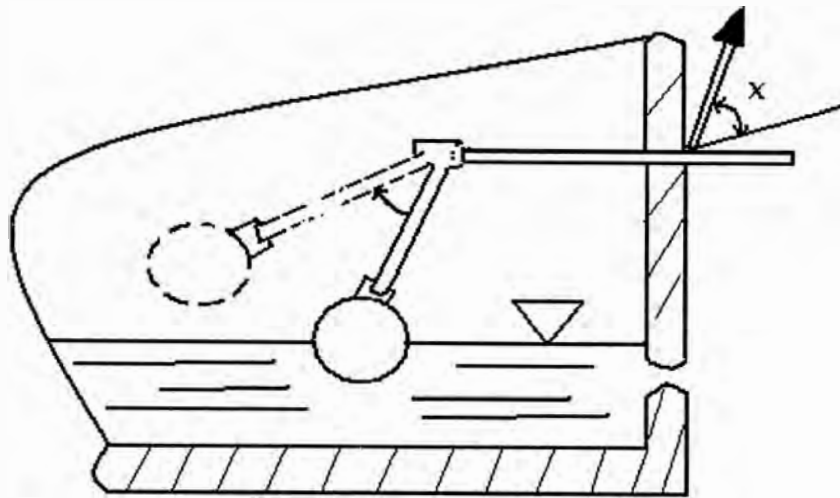


Figura 1.21 a: Medidor basado en flotador

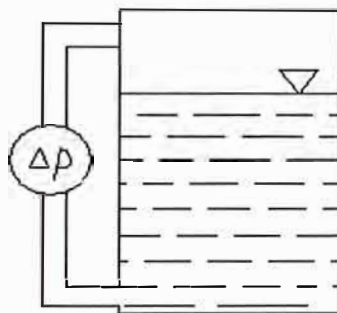


Figura 1.21b : Medidor de presión diferencial

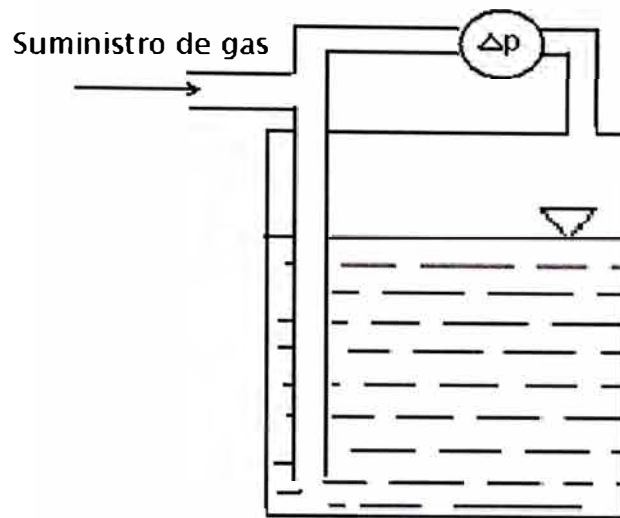


Figura 1.21c: Medidor de burbujeo y medida de presión diferencial

donde ρ es la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad. Este método se puede aplicar tanto en depósitos abiertos como en depósitos cerrados a presión. En ambos casos, el desconocimiento exacto de ρ , que depende del líquido y de la temperatura es una fuente de error. Las posibles fugas en la toma de presión cercana al fondo, son otro problema a considerar.

El método de la figura 1.21c, denominado de burbujeo, evita la medida de presión en el fondo del depósito. Consiste en un tubo inmerso hasta las proximidades del fondo, y por el que se hace circular un gas inerte a caudal constante que se ajusta hasta que se ven aparecer burbujas en el extremo del tubo. La presión en el tubo es igual entonces a la presión en la altura del depósito donde esta el extremo del depósito.

1.9 Utilización de Matlab y Simulink

Matlab y Simulink resultan poderosísimas herramientas para la simulación gran parte de los comandos son utilizados para el control del problema.

Para obtener la respuesta de un sistema en el tiempo ante una entrada estándar, debe primero definirse el sistema. Para ello puede definirse en Matlab la función de transferencia propia del sistema o las ecuaciones de estado.

En MatLab debe definirse el numerador $Y(s)$ y el denominador $U(s)$ como vectores, cuyos elementos son los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador en potencias decrecientes de S . Por ejemplo, para definir la función de transferencia:

```
>>y=[1];
>>u=[1 0.25 1];
```

Para determinar la respuesta en el tiempo para una entrada escalón unitario de este sistema se usa el comando `step` indicando el vector del numerador y del denominador entre paréntesis: `step(num,den)`

```
>>step(y,u)
```

Puede definirse el tiempo en el cual se desea la respuesta al escalón, mediante un vector de tiempo T , `step(num,den,T)`

```
>>t=0:0.1:20;
>>step(y,u,t)
```

Se define t como un vector cuyo elemento inicial es 0, su elemento final es 20 y existen elementos que son el incremento desde 0 hasta 20 de 0.1 en 0.1. Al ejecutar el comando `step` para y , u se obtiene en la ventana de figuras la respuesta escalón para los primeros 20 segundos.

Otra forma de definir el sistema en MatLab es usando las ecuaciones de estado de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

MatLab permite hacer la conversión de una función de transferencia a su equivalente en ecuaciones de estado, mediante el comando `tf2ss`. Se deben especificar las cuatro matrices de estado de la forma:

$$[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)$$

Para el ejemplo anterior tenemos:

```
>>[a,b,c,d]=tf2ss(y,u)
```

```

a =  -0.2500    -1.0000
      1.0000         0
b =   1
      0
c =   0  1
d =   0

```

Se puede hacer la conversión de una ecuación de estado a su equivalente función de transferencia, mediante el comando `ss2tf`. Se deben especificar los vectores para almacenar los coeficientes del polinomio numerador y del denominador. Su Sintaxis es:

```
[num,den]=ss2tf(a,b,c,d)
```

Ejemplo

```

>>[num,den]=ss2tf(a,b,c,d)
num =
      0 0 1.0000
den =
      1.0000 0.2500 1.0000

```

Para obtener la respuesta escalón de un sistema a partir de las ecuaciones de estado se usa el comando `step` con la sintaxis: `step(A,B,C,D)`

Ejemplo

```
>>step(a,b,c,d)
```

Para obtener la respuesta en el tiempo para una entrada impulso unitario se usa el comando `impulse`, con Sintaxis idéntica a la utilizada con el comando `step`.

Si se define el sistema en MatLab por los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia tenemos:

```

» y=[1 5 4];
» u=[1 6 11 6];
» impulse(y,u)

```

Si por el contrario el sistema se define en MatLab por las ecuaciones de estado:


```

» [A,B,C,D]=tf2ss(y,u)
A =
    -6 -11 -6
     1  0  0
     0  1  0
B =
     1
     0
     0
C =
     1 5 4
D =
     0
» impulse(A,B,C,D)

```

En ambos casos, MatLab presenta la respuesta en el tiempo en la ventana de figuras.

MatLab permite, además de obtener la respuesta en el tiempo para una entrada escalón o impulso, también obtener respuesta para otras entradas tal como rampas o sinusoides. El comando `lsim` permite obtener la respuesta en el tiempo para un sistema con una entrada u , donde u se define como una función del tiempo.

La Sintaxis de este comando es: `lsim (A,B,C,D,U,T)` usando las matrices de estado o `lsim (NUM,DEN,U,T)` usando la función de transferencia.

Para obtener la respuesta en el tiempo para una función rampa, se define U de la siguiente forma:

```

>>T=0:0.1:10
>>U=T;
>>NUM=[1];
>>DEN=[1 0.25 1];
>>[Y,X]=lsim(NUM,DEN,U,T);
>>PLOT(T,Y,T,U)

```

Al hacer $U=T$ se está definiendo la función rampa. T es el vector de tiempo variando desde 0 hasta 10seg. NUM y DEN son los vectores de los coeficientes decrecientes en potencias de los polinomios del numerador y del denominador respectivamente.

En la variable Y se almacena la salida del sistema en función del tiempo T. El comando plot permite presentar en la ventana de figuras la variable Y (salida) y la entrada U (rampa) en función del tiempo, obteniéndose:

Design linear-quadratic (LQ) state-feedback regulator for discrete-time plant

Sintaxis

$$[K,S,e] = dlqr(a,b,Q,R)$$

$$[K,S,e] = dlqr(a,b,Q,R,N)$$

Descripción

$[K,S,e] = dlqr(a,b,Q,R,N)$ calcula la óptima ganancia de la matriz K de retroalimentación

$$u[n] = -Kx[n] \quad (1.28)$$

minimiza el costo de la función cuadrática

$$J(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (x[n]^T Qx[n] + u[n]^T Ru[n] + 2x[n]^T Nu[n]) \quad (1.29)$$

Para el tiempo discreto

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] \quad (1.30)$$

Por defecto Matlab asume $N = 0$ cuando se omite en adición a la ganancia de retroalimentación K, dlqr retorna la solución G de la ecuación de Riccati en tiempo discreto:

$$G^T P G - P - (G^T P H + N)(R + H^T P H)^{-1}(H^T P G + N^T) + Q = 0 \quad (1.31)$$

y el lazo cerrado autovalores $e = \text{eig}(a-b*K)$. Notar que K es derivada de G.

$$(R + H^T P H)^{-1}(H^T P G + N^T) \quad (1.32)$$

CAPÍTULO II MODELAMIENTO DEL PROCESO

2.1 Estructura y descripción del proceso

El sistema de control de nivel de líquido que se dispone se muestra en la Fig. 2.1, que consiste de un depósito, alimentado en su parte superior a través de una válvula proporcional de apertura $\alpha(t)$, accionada electromecánicamente por un voltaje de control $u(t)$, que será controlada para mantener el nivel de agua constante en el mismo, y a la salida una válvula de apertura $\beta(t)$. Los medidores de nivel (LT) y de flujo (MF) convierten a la altura del tanque $h(t)$ y a la velocidad con que se llena, $\frac{dh(t)}{dt}$, en señales eléctricas $V_h(t)$ y $V_q(t)$ respectivamente.

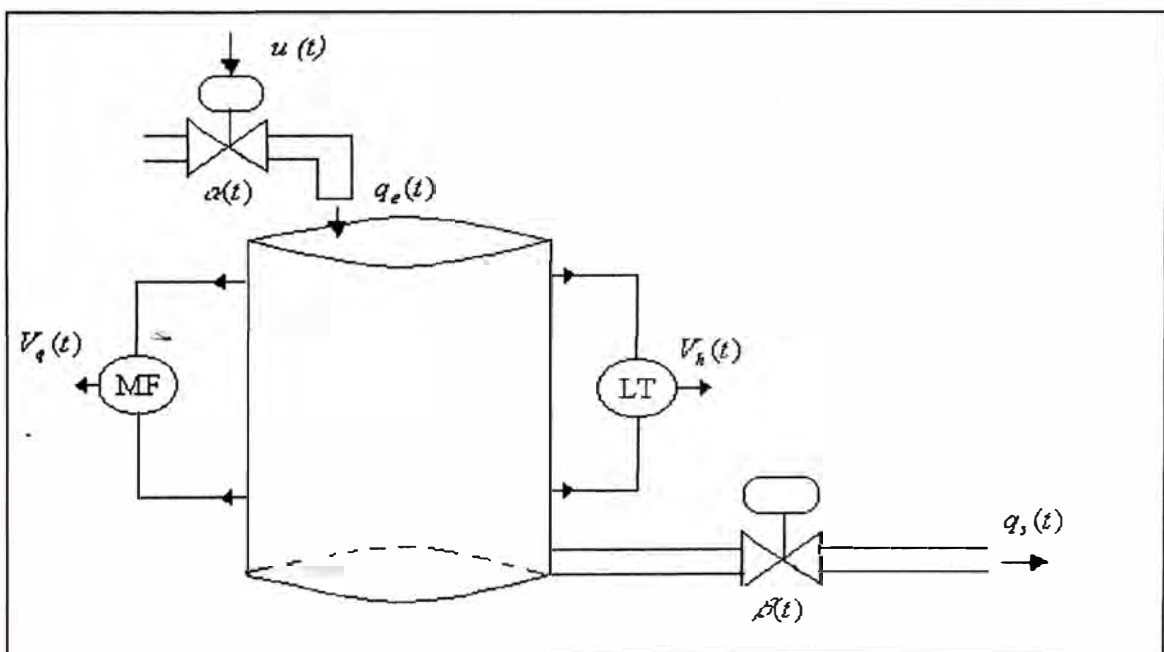


Figura 2.1 : Sistema tanque lazo abierto

Siendo:

Abertura de la válvula de entrada	$\alpha(t)$
Abertura de la válvula de salida	$\beta(t)$
Caudal de entrada	$q_e(t)$
Caudal de salida	$q_s(t)$
Voltaje de control	$u(t)$
Voltaje del nivel de líquido	$V_h(t)$
Voltaje de flujo	$V_q(t)$
Nivel del líquido	$h(t)$
Área del tanque	A

2.2 Modelamiento del sistema en lazo abierto

2.2.1 Ecuaciones físicas

Tanque:

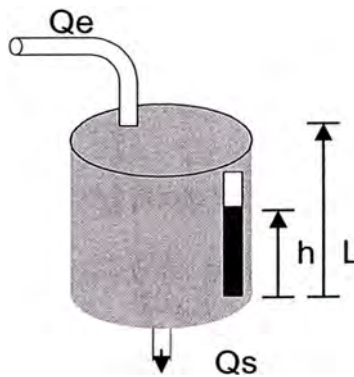


Figura 2.2 :Tanque

$$q_e(t) - q_s(t) = A \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.1)$$

Caudal de salida :

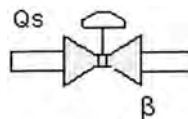


Figura 2.3: Válvula de salida

$$q_s(t) = K \beta(t) \sqrt{h(t)} \quad (2.2)$$

Medidor de nivel (MT) :

$$V_h(t) = h(t) \quad (2.3)$$

Caudal de entrada:

$$q_e(t) = 4 \alpha(t) \quad (2.4)$$

Ecuación diferencial derivada de la válvula neumática de entrada:

$$\alpha(t) + 25 \frac{d\alpha(t)}{dt} = 0,225 u(t) \quad (2.5)$$

Medidor de flujo (MF):

$$V_q(t) = k \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{donde } k = 1 \quad (2.6)$$

Linealizando (2.2):

A continuación procederemos a evaluar la ecuación en el punto de equilibrio, Como sigue:

$$\Omega(q_s, \beta, h_s) = q_s - k \beta \sqrt{h} \quad (2.7)$$

Para pequeñas variaciones alrededor del punto definido anteriormente tendremos:

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial q_s} \right|_0 q_s(t) + \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} \right|_0 \beta(t) + \left. \frac{\partial \Omega}{\partial h} \right|_0 h(t) = 0 \quad (2.8)$$

$$q_s(t) - k \sqrt{h_0} \beta(t) + \frac{k \beta_0}{2 \sqrt{h_0}} h(t) = 0$$

$$q_s(t) = k_1 \beta(t)$$

donde:

$$k_1 = \frac{3}{2} k \sqrt{h_0} \quad (2.9)$$

Despejamos (2.1) y (2.4):

$$q_e(t) = A \frac{dh(t)}{dt} + q_s(t) \quad (2.10)$$

$$\alpha(t) = \frac{q_e(t)}{4} \quad (2.11)$$

Derivando (2.10) y (2.11) tendremos

$$q_e \dot{h}(t) = A \ddot{h}(t) + q_s \dot{h}(t) \quad (2.12)$$

$$\alpha \dot{h}(t) = \frac{q_e \dot{h}(t)}{4} \quad (2.13)$$

Reemplazando (2.11) y (2.13) en (2.5)

$$\frac{q_e \dot{h}(t)}{4} + 25 \frac{q_e \dot{h}(t)}{4} = 0.225 u(t) \quad (2.15)$$

Reemplazando (2.10) y (2.12) en (2.15)

$$\frac{A \dot{h}(t) + q_s \dot{h}(t)}{4} + 25 \frac{A \ddot{h}(t) + q_s \dot{h}(t)}{4} = 0.225 u(t) \quad (2.16)$$

(2.9) en (2.16)

$$A \dot{h}(t) + q_s \dot{h}(t) + 25A \ddot{h}(t) + 25q_s \dot{h}(t) = 0.9u(t)$$

$$A \dot{h}(t) + k_1 \beta(t) + 25A \ddot{h}(t) + 25k_1 \dot{\beta}(t) = 0.9u(t)$$

$$\ddot{h} + \frac{\dot{h}(t)}{25} = \frac{0.9}{25A} u(t) - \frac{k_1}{25A} \beta(t) - \frac{k_1}{A} \dot{\beta}(t)$$

$$\ddot{h} = -\frac{\dot{h}(t)}{25} + \frac{0.9}{25A} u(t) - \frac{k_1}{25A} \beta(t) - \frac{k_1}{A} \dot{\beta}(t) \quad (2.17)$$

2.2.2 Ecuaciones de estado

Reemplazando

$$x_1 = h - a_0 \beta \quad (2.18)$$

$$x_2 = \dot{h} - a_0 \dot{\beta} - a_1 \beta \quad (2.19)$$

Derivando (2.18):

$$\dot{x}_1 = \dot{h} - a_0 \dot{\beta} \quad (2.20)$$

Reemplazando (2.19) en (2.20) :

$$\dot{x}_1 = x_2 + a_1 \dot{\beta} \quad (2.21)$$

Derivando (2.19)

$$\dot{x}_2 = \ddot{h} - a_0 \ddot{\beta} - a_1 \dot{\beta} \quad (2.22)$$

Reemplazando (2.17) en(2.22)

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{25}(x_2 + a_0 \dot{\beta} + a_1 \beta) + \frac{0.9}{25A}u - \frac{k_1}{25A}\beta - \frac{k_1}{A}\dot{\beta} - a_0 \ddot{\beta} - a_1 \dot{\beta} \quad (2.23)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{25}(x_2 + a_0 \dot{\beta} + a_1 \beta) + \frac{0.9}{25A}u - \frac{k_1}{25A}\beta - \frac{k_1}{A}\dot{\beta} - a_0 \ddot{\beta} - a_1 \dot{\beta} \quad (2.24)$$

Se reduce a :

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{25}x_2 + \frac{0.9}{25A}u \quad (2.25)$$

Donde:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = -\frac{k_1}{A}$$

de (2.21) y (2.25)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\left(\frac{k_1}{A}\right)\beta \\ \frac{0.9}{25A}u \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Con $\beta(t) = 0$ en (2.26) queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0.9}{25A} \end{bmatrix} u \quad (2.27)$$

siendo $A = 1$ (área del tanque)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.036 \end{bmatrix} u \quad (2.28)$$

$$\dot{x} = A_c x + B_c u \quad (2.29)$$

Considerando que $y = x_1$ va a ser nuestra salida del sistema, tenemos:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Entonces

$$y = C_c x \quad (2.31)$$

Por lo tanto las matrices de espacio de estado en tiempo continuo son:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.036 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_c = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Calculando la función de transferencia:

$$\begin{aligned} \frac{num(s)}{den(s)} &= C_c (sI - A_c)^{-1} B_c + D_c \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.036 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0.036}{s(s+0.04)} \quad (\text{modelo de la planta}) \quad (2.33) \end{aligned}$$

Comprobando la función de transferencia con Matlab con el comando ss2tf.

```
>> Ac=[0 1;0 -0.04]
```

```
Ac =
```

```
0 1.0000
```

```
0 -0.0400
```

```
>> Bc=[ 0 ; 0.036]
```

```
Bc =
```

```
0
```



```

        0.0360
>> Cc=[1 0]
Cc =
     1     0
>> Dc=[0]
Dc =
     0
>> [num,den]=ss2tf(Ac,Bc,Cc,Dc)
num =
     0  0.0000  0.0360

den =
     1.0000  0.0400     0

```

2.2.3 Controlabilidad y observabilidad del sistema

De la ecuación 2.32:

Hallando la matriz de controlabilidad.

```

>> Mc=[Bc Ac*Bc]
Mc =
     0  0.0360
     0.0360 -0.0014
>> rank(Mc)
ans =
     2

```

%Es completamente controlable.

Hallando la matriz de observabilidad

```

>> Nc=[Cc' Ac'*Cc']
Nc =
     1     0
     0     1
>> rank(Nc)
ans =
     2

```

%Es completamente observable

2.2.4 Respuesta al escalón unitario en Matlab

El programa en Matlab que a continuación se presenta, permite obtener la respuesta en lazo abierto de nuestro sistema a una entrada escalón.

Programa:

```
t=-5:0.01:5;
q=size(t);
f=zeros(q(1),q(2));
q=size(t(501:1001));
f(501:1001)=ones(q(1),q(2));
plot(t,f);
title('función escalón unitario');
axis([-5,5,-0.5,1.5]);
xlabel('tiempo,t');
ylabel('u(t)');
grid;
```

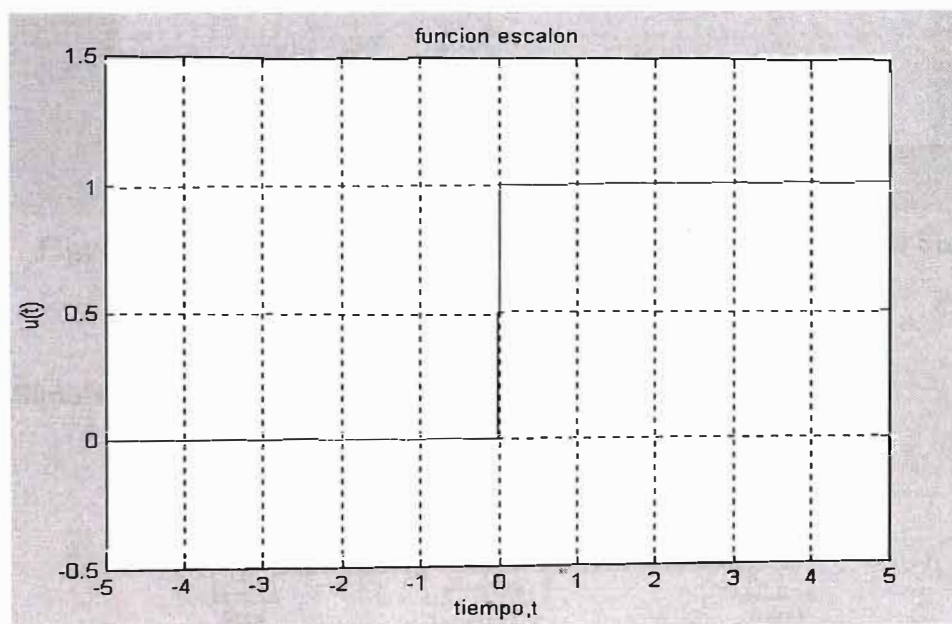


Figura 2.4: Escalón unitario

Programa en tiempo continuo lazo abierto

```
Ac=[0 1;0 -0.04];
```

```

Bc=[ 0 ; 0.036];
Cc=[1 0];
Dc=[0];
step(Ac,Bc,Cc,Dc,1);
grid
title('respuesta a un escalón: entrada=u1');
ylabel('respuesta h(t)')
xlabel('tiempo en segundos')

```

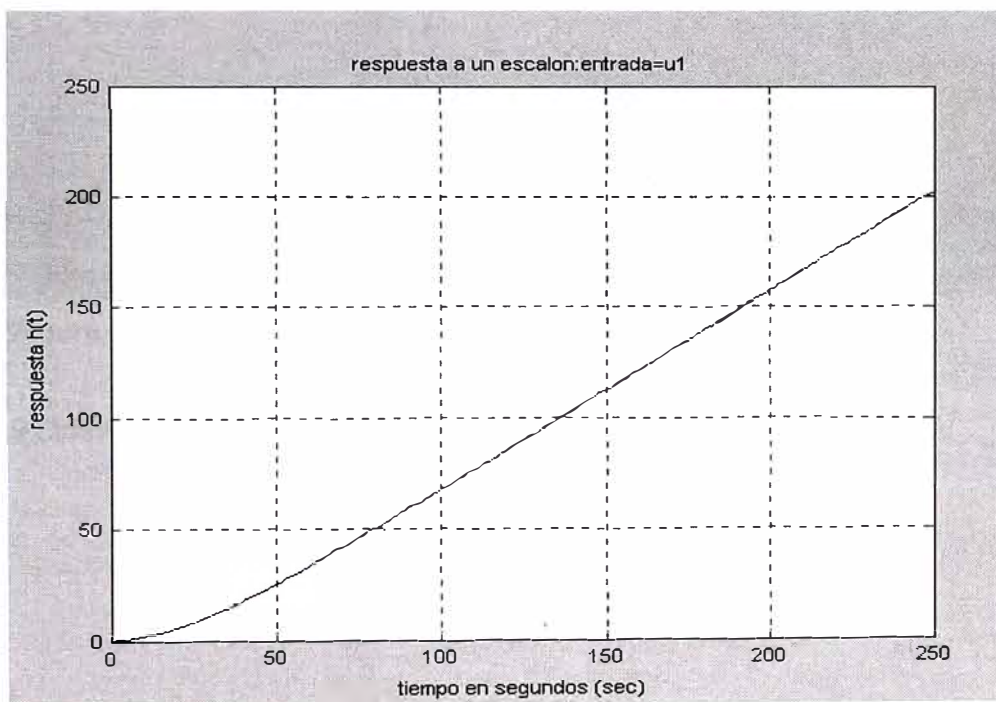


Figura 2.5: Respuesta al Escalón Unitario en lazo abierto del Sistema de Nivel del líquido

2.3 Simulación del proceso mediante simulink

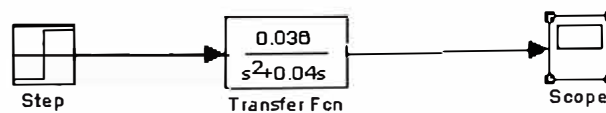


Figura 2.6: Diagrama en Simulink

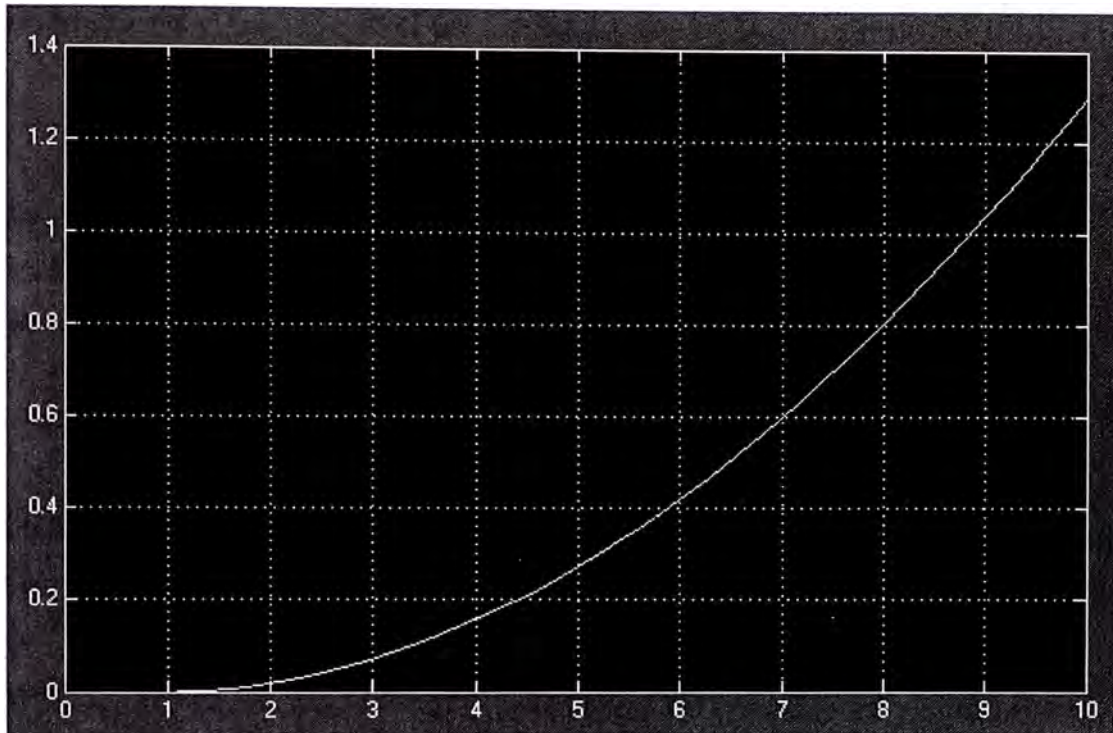


Figura 2.7: Gráfica en Simulink de la salida $h(t)$ en lazo abierto

Matlab y Simulink coinciden en los resultados de respuesta al escalón

CAPÍTULO III DISCRETIZACIÓN DEL PROCESO

3.1 Simulación y Rediseño Digital

Es sabido que las computadoras digitales desempeñan una importante función en el análisis y diseño de sistemas de control retroalimentados. No sólo se utilizan para calcular y simular el desempeño del sistema de control; también sirven como controladores en línea de procesos. Puestos que los sistemas de control de datos continuos son los más comunes, y muchos sistemas de control contienen componentes de datos continuos, una práctica habitual es simularlos en una computadora digital.

El procedimiento para hallar un equivalente digital del controlador de datos continuos se conoce como rediseño digital. Si bien es posible diseñar un controlador digital de manera independiente, si ya hay un sistema de control de datos continuos con un desempeño satisfactorio, entonces lo más factible es encontrar un equivalente digital de él.

La simulación de sistemas de control de datos continuos en una computadora digital puede realizarse una vez que se aproxima la dinámica del sistema con una función de transferencia en el dominio z , o por ecuaciones de diferencias. En general, el análisis se efectúa en dos pasos.

- Representación del sistema de datos continuos por un modelo digital.
- Simulación del modelo digital en una computadora digital:

Es evidente que el modelo digital también puede estudiarse analíticamente. En general, el modelado digital puede realizarse con los métodos siguientes.

- Inserción en el sistema de datos continuos de dispositivos de muestreo y retención.
- Aproximación numérica de la integración continua.
- Ecuaciones de estado discretas.

3.1.1 Simulación y Modelado Digital con Dispositivos de Muestreo y Retención

La manera más sencilla de aproximar un sistema de datos continuos con un modelo digital es insertando dispositivos de muestreo y retención en puntos estratégicos del sistema. Hecho lo anterior, el sistema puede describirse con funciones de transferencia en z como se muestra en la ecuación (3.1) o por ecuaciones de estado en diferencias; por ejemplo el sistema de datos continuos de la Fig. 3.2 puede aproximarse por el modelo digital de la Fig. 3.3. Los muestreadores ideales tienen un periodo de muestreo de T s, y el dispositivo de retención puede ser de cualquier tipo a juicio del analista, incluso puede tratarse de un retenedor poligonal que no es físicamente realizable pero que es aceptable por completo para fines analíticos. En la Fig. 3.3, $G_h(s)$ denota la función de transferencia del dispositivo de retención; por tanto, la función de transferencia en z del modelo digital es

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_h G(z)}{1 + G_h G(z)G_h H_1(z) + G_h G(z)G_h H_2(z)} \quad (3.1)$$

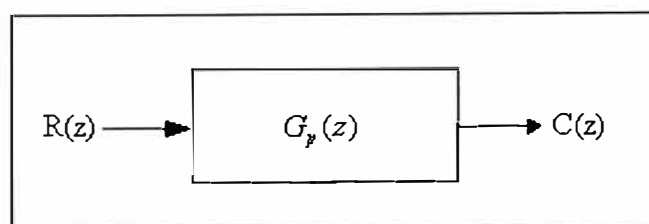


Figura 3.1 : Función de transferencia en el modelo digital

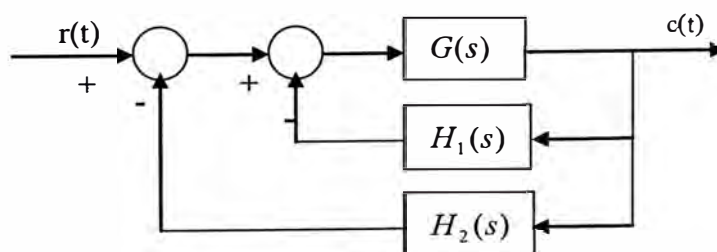


Figura 3.2 : Sistema de control de datos continuos

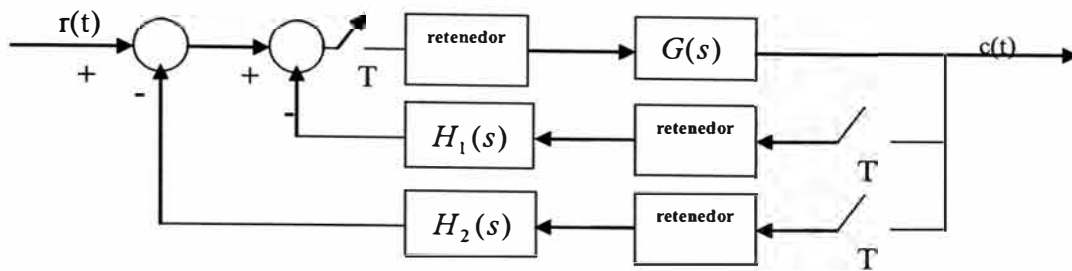


Figura 3.3 : Modelo digital del sistema de control de datos continuos con dispositivos de muestreo y retenciones ficticias

Donde:

$$G_h G(z) = \ell[G_h(s)G(s)] \quad (3.2)$$

$$G_h H_1(z) = \ell[G_h(s)H_1(s)] \quad (3.3)$$

$$G_h H_2(z) = \ell[G_h(s)H_2(s)] \quad (3.4)$$

Aunque en principio el método de modelado digital descrito es sencillo y directo, existen dos consideraciones importantes para la selección del periodo de muestreo T . La primera tiene que ver con la exactitud y el tiempo requerido de la simulación digital. La segunda es que la selección del periodo de muestreo debe hacerse de modo que el sistema digital sea estable. De hecho, los dispositivos de muestreo y retención en general tienen efectos adversos sobre la estabilidad del sistema.

Como un ejemplo ilustrativo, considérese el sistema de datos continuos de la Fig. 3.2. La aproximación digital de este sistema puede obtenerse insertando un dispositivo de muestreo y retención en la trayectoria de retroalimentación, como se indica en la Fig. 3.3. La transformada z de la salida del modelo digital es :

$$C(z) = \frac{RG(z)}{1 + G_{h0}G(z)} \quad (3.5)$$

Donde:

$$RG(z) = \ell[R(s)G(s)] \quad (3.6)$$

y

$$G_{h0}G(z) = \ell[G_{h0}(s)G(s)] \quad (3.7)$$

Donde G_{h0} es la función de transferencia del retenedor de orden cero (ROC).

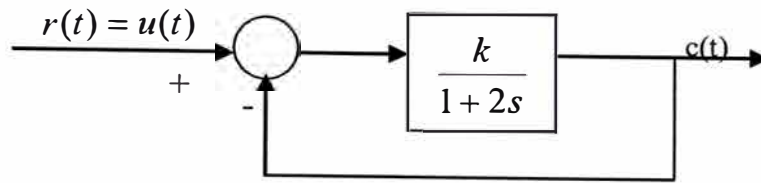


Figura 3.4 : Sistema de control de datos continuos

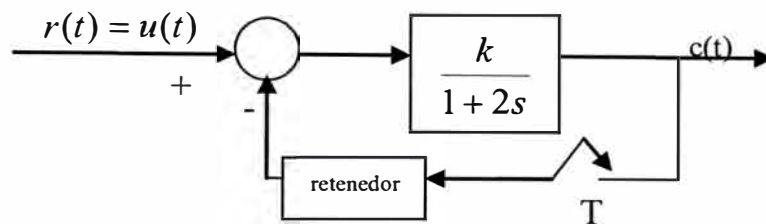


Figura 3.5: Modelo digital de un sistema de control de datos continuos con dispositivos de muestreo y retención colocados en la trayectoria de retroalimentación.

Para una entrada escalón unitario, la ecuación adopta la forma

$$RG(z) = \ell\left(\frac{K}{s(1+2s)}\right) = \frac{K(1-e^{-0.5T})z}{(z-1)(z-e^{-0.5T})} \quad (3.8)$$

$$G_{h_0}G(z) = \ell\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{1+2s}\right) = \frac{K(1-e^{-0.5T})}{(z-e^{-0.5T})} \quad (3.9)$$

$$C(z) = \frac{K(1-e^{-0.5T})z}{(z-1)[z-e^{-0.5T} + K(1-e^{-0.5T})]} \quad (3.10)$$

El periodo de muestreo T debe elegirse de modo que el sistema digital sea estable; por otra parte, T ha de ser tan pequeño que el sistema digital sea una buena aproximación del sistema de datos continuos original. La ecuación característica del sistema digital es:

$$z - e^{-0.5T} + K(1 - e^{-0.5T}) = 0 \quad (3.11)$$

La ecuación $G_h H_1(z) = \ell[G_h(s)H_1(s)]$ indica la región de estabilidad en el punto K-T. Nótese que cuando $K=1$, en lo que respecta a la estabilidad, T puede encontrarse en cualquier parte, entre cero e infinito. Cuando $K=2$, por ejemplo, T debe ser menor que

2.2s. Para seleccionar el valor de T de modo que el sistema digital sea una buena aproximación del sistema de datos continuos, la frecuencia de muestreo $\omega_s > 20 * BW$

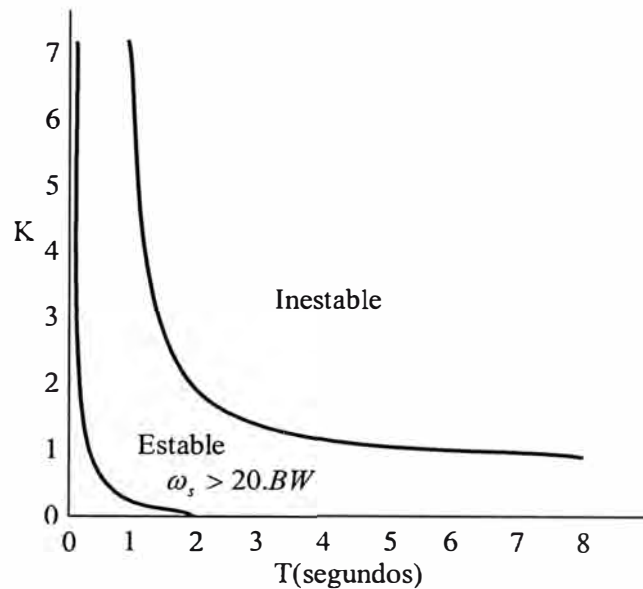


Figura 3.6 : Regiones estable e inestable y región donde del sistema de control digital de la figura 13

será al menos 20 veces mayor que el ancho de banda del sistema. Cuando $K = 1$, el ancho de banda del sistema de datos continuos es de 1 rad / s ; por lo tanto, la frecuencia de muestreo ω_s será de por lo menos 20 rad / s , con lo cual el periodo de muestreo máximo T es de 0.314s . Cuando $K = 2$, $BW = 1.49 \text{ rad / s}$; por consiguiente, el valor mínimo de ω_s es de 29.48 rad / s y el T máximo de 0.21s . La Fig. 3.6 muestra la región del plano K - T donde la aproximación digital es buena. En general, el requisito de buena aproximación digital es mucho más restrictivo que el de estabilidad.

Suponiendo que el periodo de muestreo T es $\frac{\pi}{10} \text{ s}$, con $K = 1$. Con esto, la ecuación (3.10) resulta en:

$$C(z) = \frac{0.145z}{(z-1)(z-0.709)} \quad (3.12)$$

La secuencia de salida $c(kT)$ se obtiene al desarrollar $C(z)$ en series de potencias mediante división larga. El resultado es :

$$\begin{aligned} C(z) = & 0.145z^{-1} + 0.247z^{-2} + 0.322z^{-3} + 0.372z^{-4} + 0.409z^{-5} + 0.435z^{-6} \\ & + 0.435z^{-7} + 0.466z^{-8} + 0.475z^{-9} + 0.482z^{-10} + 0.487z^{-11} + 0.490z^{-12} \\ & + 0.492z^{-13} + 0.494z^{-14} + 0.495z^{-15} + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

El valor final de $c(kT)$ es 0.5. La Fig. 3.7 ilustra la respuesta al escalón unitario del sistema de datos continuos y del sistema de control digital con $K=1$ y $T=0.314s$. La Fig. 3.7 también contiene la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital cuando $K=1$ y $T=1s$. Como era de esperarse, la aproximación es inferior a la que se obtiene cuando $T=0.314s$. Para periodos de muestreo menores que $0.314s$, las mejoras no son significativas, con lo que se justifica el costo asociado al empleo de una frecuencia de muestreo mayor.

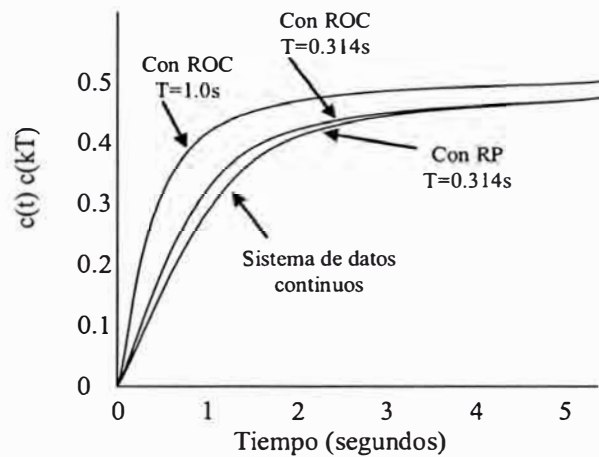


Figura 3.7 : Simulación digital con el retenedor de orden cero y el retenedor poligonal.

Ahora suponiendo que el dispositivo de retención es un retenedor poligonal con función de transferencia dada por la ecuación:

$$G_{hp}(s) = \frac{e^{Ts} - 2 + e^{-Ts}}{Ts^2} \quad (3.14)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \ell[G_{hp}(s)G(s)] &= G_{hp}G(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \ell\left(\frac{K}{s^2(1+2s)}\right) \\ &= \frac{(0.5T-1+e^{-0.5T})z+1-(1+0.5T)e^{-0.5T}}{0.5T(z-e^{-0.5T})} \end{aligned} \quad (3.15)$$

La transformada z de la salida del modelo digital es:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{RG(z)}{1+G_{hp}G(z)} \\ &= \frac{0.5T(1-e^{-0.5T})z}{(z-1)\left[(T-1+e^{-0.5T})z+1-(1+T)e^{-0.5T}\right]} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para $K=1$ y $T=0.314$, $C(z)$ es:

$$C(z) = \frac{0.1352z}{(z-1)(z-0.7297)} \quad (3.17)$$

Cuyo desarrollo es:

$$\begin{aligned} C(z) = & 0.1352z^{-1} + 0.2339z^{-2} + 0.3058z^{-3} + 0.3584z^{-4} + 0.3967z^{-5} \\ & + 0.4247z^{-6} + 0.4451z^{-7} + 0.4600z^{-8} + 0.4708z^{-9} + 0.4788z^{-10} \\ & + 0.4846z^{-11} + 0.4888z^{-12} + 0.4919z^{-13} + 0.4941z^{-14} + 0.4958z^{-15} \\ & + 0.4970z^{-16} + 0.4978z^{-17} + 0.4985z^{-18} + 0.4989z^{-19} + \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

La Fig. 3.7 presenta la respuesta al escalón unitario del modelo digital con el retenedor poligonal constituye una aproximación mejor que la ofrecida por el retenedor de orden cero.

3.2 Simulación digital, formulación con variables de estado

Una vez que se obtiene el modelo digital mediante la inserción de dispositivos de muestreo y retención en el sistema de datos continuos, las ecuaciones dinámicas discretas pueden describirse:

$$\begin{aligned} x[(k+1)T] &= \phi(T)x(kT) + \theta(T)r(kT) \\ c(kT) &= Dx(kT) \end{aligned} \quad (3.19)$$

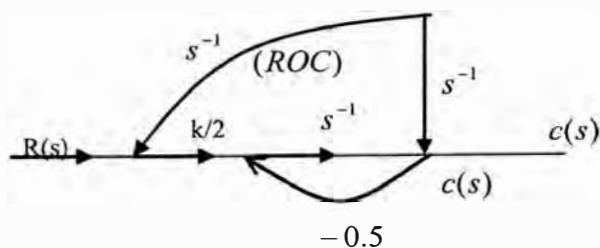


Figura 3.8 : Diagrama de estado del sistema de control digital

3.2.1 Simulación digital, integración numérica

Otro método muy utilizado para la simulación digital para sistemas de datos continuos es la integración numérica. Dado que la integración es la operación matemática básica y más difícil que consume más tiempo en una computadora digital, la simulación digital de esta tiene una importante función. En lugar de insertar dispositivos de muestreo y

retención en posiciones estratégicas en sistemas de datos continuos, el enfoque es aproximar la operación de integración continua con métodos numéricos.

El problema también puede plantearse como la simulación con un modelo digital del integrador s^{-1} de un diagrama de estados de datos continuos. La relación de entrada – salida es:

$$x(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau \quad (3.20)$$

$R(s) \quad \xrightarrow{s^{-1}} \quad C(s)$

Figura 3.9 Representación en diagrama de estado de un integrador

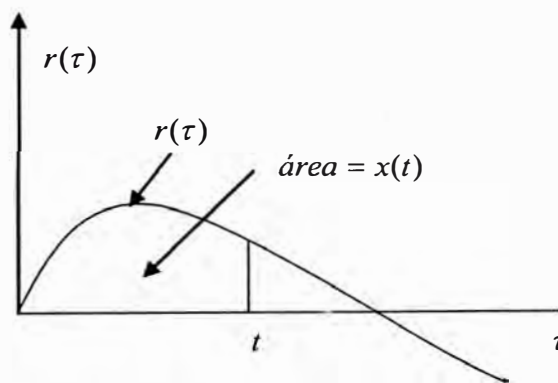


Figura 3.10 Relación entrada-salida de un integrador.

O, en el dominio de la transformada,

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{s} \quad (3.21)$$

Supongamos que la entrada $r(t)$ al integrador es una rampa; la salida $x(t)$ es igual al área bajo la curva $r(t)$ entre $\tau = 0$ y $\tau = t$. A continuación se investiga varios tipos de integración numérica.

3.3 Discretización del sistema del nivel del líquido del tanque

Sea la matriz A del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Se tiene por definición que $G(T) = e^{AT}$

Entonces desarrollando en series de Taylor hasta cuatro términos:

$$= I + A.T + \frac{1}{2.i} A^2 T^2 + \frac{1}{3.i} A^3 T^3 + \frac{1}{4.i} A^4 T^4 + \frac{1}{5.i} A^5 T^5 + \frac{1}{6.i} A^6 T^6 + \dots \quad (3.23)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix} \cdot T + \frac{1}{2.i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix}^2 T^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix}^3 T^3 +$$

$$\frac{1}{4.i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix}^4 T^4 + \frac{1}{5.i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix}^5 T^5 + \frac{1}{6.i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix}^6 T^6 + \dots$$

Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & T - 0.02T^2 + 0.0002667T^3 - 0.0000027T^4 \\ 0 & 1 - 0.04T + 0.0008T^2 - 0.0000107T^3 + 0.0000001T^4 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Además para hallar $H(T)$, integramos (3.24) como lo especifica la ecuación (3.25)

$$H(T) = \int_0^T e^{-AT} d\lambda \cdot Bc \quad (3.25)$$

Tomando en consideración dos casos para diferenciar el muestreo

Caso a.-

Para $T_s =$ tiempo de muestreo = 1seg en la ecuación (3.24)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.98026 \\ 0 & 0.96078 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Y en la ecuación (3.25)

$$H = \begin{bmatrix} 0.0177624 \\ 0.0352895 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Caso b.-

Para T_s =tiempo de muestreo = 0.05seg en la ecuación (3.24)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.04995 \\ 0 & 0.998002 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Y en la ecuación (3.25)

$$H = \begin{bmatrix} 0.000045 \\ 0.0017982 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.4 Simulación del sistema en lazo abierto

En la Fig. 3.11 tenemos su respectiva simulación

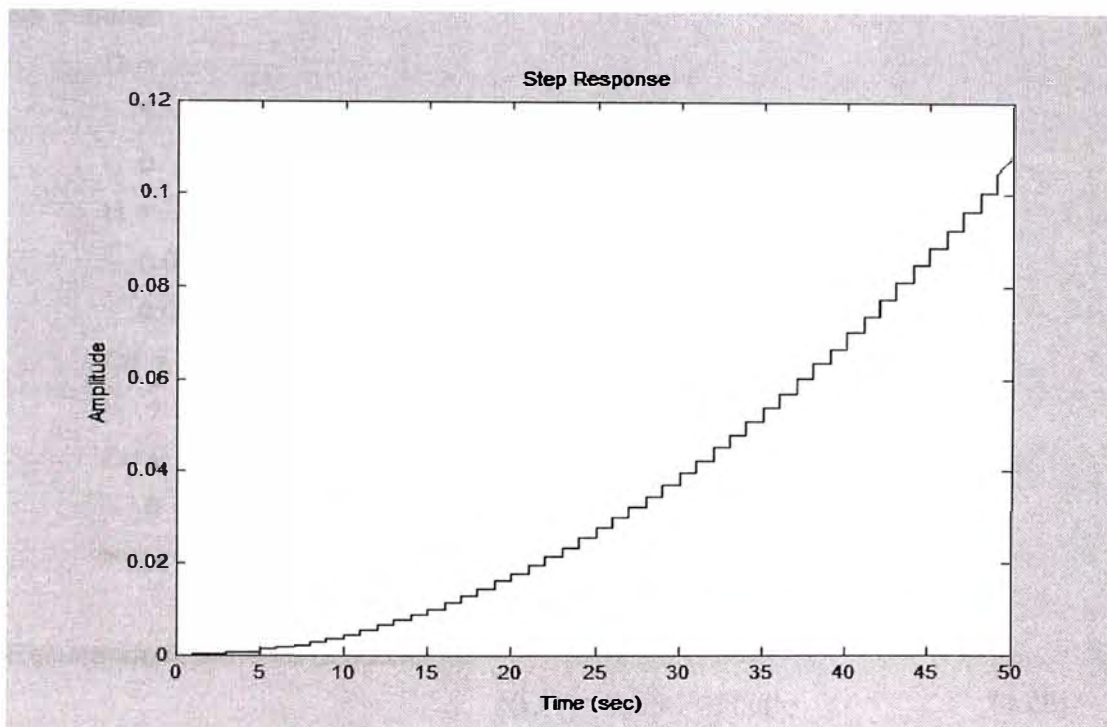


Figura 3. 11 : Gráfica de la discretización con muestreo $T=1$ seg y retenedor de orden 0

Pero utilizaremos un tiempo de muestreo más pequeño.

b.)Para T_s = tiempo de muestreo tenemos = 0.05seg.

Se obtiene en la ecuación (3.24)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.04995 \\ 0 & 0.998002 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0018 \end{bmatrix}$$

Programa En Matlab:

```
Ac=[0 1;0 -0.04];
Bc=[0 ;0.036];
Cc=[1 0];
Dc=[0 ];
[G,H,Cd,Dd] = c2dm(Ac,Bc,Cc,Dc,0.05,'zoh'); %Discretizacion del sistema
%Grafica
dstep(G,H,Cd,Dd,1);
figure
title('respuesta a un escalón:entrada=u1');
text(3,0.14,'Y1');
```

Se obtiene:

```
G =
    1    0.05000
    0    0.99800
H =
    0.0002
    0.0018
Cd =
    1    0
Dd =
    0
>>
```

Resultando finalmente la ecuación:

$$x(k+1) = G \cdot x(k) + H \cdot u(k) \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.04995 \\ 0 & 0.99800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0018 \end{bmatrix}$$

En la Fig. 3.12 se observa la grafica de la discretización para una altura del tanque: $T_s = 0.05$

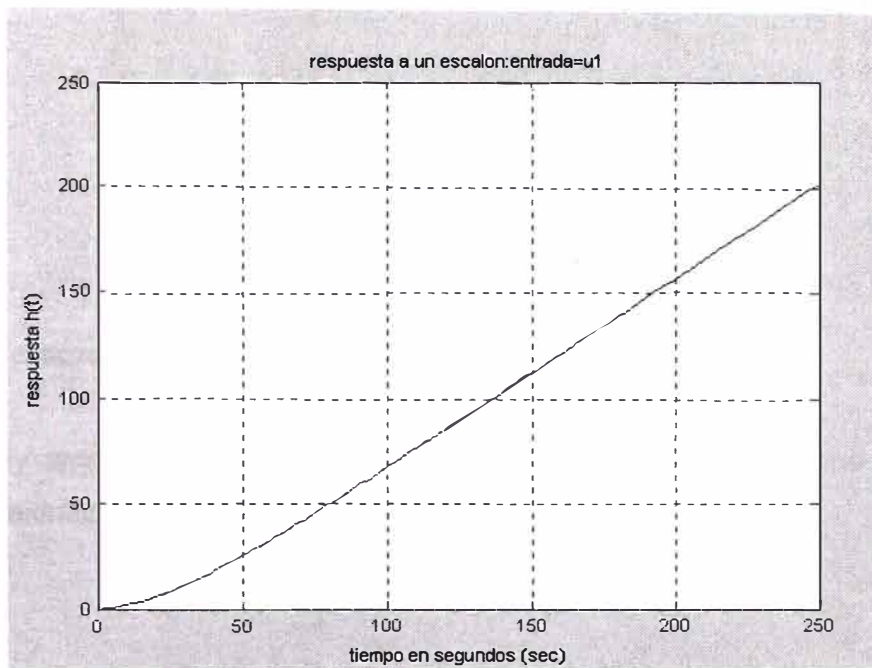


Figura 3.12 · Gráfica de la discretización con muestreo $T=0.05$ seg. y retenedor de orden 0

CAPÍTULO IV CONTROL ÓPTIMO

4.1 Ecuación discreta de Euler - Lagrange

Una clase muy amplia de diseños para sistemas de control digital tiene como objetivo *minimizar* o *maximizar* un índice de desempeño de la forma:

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} F[x(k), x(k+1), u(k), k] \quad (4.1)$$

Donde $F[x(k), x(k+1), u(k), k]$ es una función escalar diferencial.

La minimización o maximización de J esta sujeta a la restricción de igualdad:

$$x(k+1) = F[x(k), u(k), K] \quad (4.2)$$

Que es la ecuación del sistema, así como a otras restricciones de igualdad o desigualdad. En la ecuación (4.2), $x(k)$ y $u(k)$ tienen dimensiones n y p respectivamente.

Buena parte del diseño del control óptimo descansan en los principios del cálculo de *variaciones*. De acuerdo con el principio de *variación*, el problema de *minimizar* una función sujeta a restricciones se resuelve incorporando éstas a la función que se desea *minimizar* o *maximizar*.

Sea $\lambda(k+1)$ un vector de dimensión $n \times 1$, el cual se define como el multiplicador de Lagrange. El índice de desempeño adjunto se obtiene incorporando el índice de desempeño J de la ecuación (4.1) y la restricción de la igualdad de la (4.2)

$$J_c = \sum_{k=0}^{n-1} F[x(k), x(k+1), u(k), k] + \langle \lambda(k+1), [x(k+1) - f(x, u, k)] \rangle \quad (4.3)$$

Donde $\langle \cdot \rangle$ denota el producto interno de vectores.

El cálculo de variaciones afirma que la minimización o maximización de J sujeta a la ecuación (4.2) equivale a minimizar o maximizar J_c sin restricciones.

Supóngase que $x(k)$, $x(k+1)$, $u(k)$ y $\lambda(k+1)$ presentan variaciones de la forma

$$x(k) = x^\circ(k) + \varepsilon\eta(k) \quad (4.4)$$

$$x(k+1) = x^\circ(k+1) + \varepsilon\eta(k+1) \quad (4.5)$$

$$u(k) = u^\circ(k) + \delta\mu(k) \quad (4.6)$$

$$\lambda(k+1) = \lambda^\circ(k+1) + \gamma\omega(k+1) \quad (4.7)$$

Donde $x^\circ(k)$, $x^\circ(k+1)$, $u^\circ(k)$ y $\lambda^\circ(k+1)$ representan los vectores que corresponden a las trayectorias óptimas; $\eta(k)$, $\mu(k)$ y $\omega(k)$ son vectores que representan variables arbitrarias.

Se sustituyen las ecuaciones (4.4) a (4.7) en la ecuación (4.3) y se tiene

$$J_c = \sum_{k=0}^{n-1} F[x^\circ(k) + \varepsilon\eta(k), x^\circ(k+1) + \varepsilon\eta(k+1), u^\circ(k) + \delta\mu(k), k] + \langle \lambda^\circ(k+1) + \gamma\omega(k+1), x^\circ(k+1) + \varepsilon\eta(k+1) - F[x^\circ(k) + \varepsilon\eta(k), u^\circ(k) + \delta\mu(k), k] \rangle \quad (4.8)$$

Para simplificar la notación J_c se expresa como :

$$J_c = \sum_{k=0}^{n-1} F_c[x(k), \lambda(k+1), u(k), k] \quad (4.9)$$

El desarrollo de F_c en serie de Taylor alrededor de $x^\circ(k)$, $x^\circ(k+1)$, $\lambda^\circ(k+1)$ y $u^\circ(k)$

Es:

$$F_c[x(k), x(k+1), \lambda(k+1), u(k), k] = F_c[x^\circ(k), x^\circ(k+1), \lambda^\circ(k+1), u^\circ(k), k] + \langle \varepsilon\eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} \rangle + \langle \varepsilon\eta(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k+1)} \rangle + \langle \gamma\omega(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda^\circ(k+1)} \rangle + \langle \delta\mu(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial u^\circ(k)} \rangle + \quad (4.10)$$

términos de orden superior

Donde

$$F_c^\circ(k) = F_c[x^\circ(k), x^\circ(k+1), \lambda^\circ(k+1), u^\circ(k), k] \quad (4.11)$$

Las condiciones necesarias para que sean J_c mínimas son

$$\frac{\partial J_c}{\partial \varepsilon} \Big|_{\lambda=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial J_c}{\partial \gamma} \Big|_{\lambda=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial J_c}{\partial \delta} \Big|_{\lambda=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (4.14)$$

Si se sustituye en la ecuación (4.9) el desarrollo en serie de Taylor de J_c y se aplica la condición necesaria, ecuación (4.12) a (4.14), para que J_c sea mínimo, entonces:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\langle \eta(k), \frac{\partial F_c^0(k)}{\partial x^0(k)} \rangle + \langle \eta(k+1), \frac{\partial F_c^0(k)}{\partial x^0(k+1)} \rangle \right] = 0 \quad (4.15)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \omega(k+1), \frac{\partial F_c^0(k)}{\partial \lambda^0(k+1)} \rangle = 0 \quad (4.16)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \mu(k), \frac{\partial F_c^0(k)}{\partial \mu^0(k)} \rangle = 0 \quad (4.17)$$

La ecuación (4.15) se escribe

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^0(k)}{\partial x^0(k)} \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} \rangle \quad (4.18)$$

Donde

$$F_c^0(k-1) = F_c[x^0(k-1), x^0(k), \lambda^0(k), u^0(k-1), k-1] \quad (4.19)$$

Después de reacomodar términos en la última ecuación, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^0(k)}{\partial x^0(k)} + \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} \rangle + \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} \rangle \Bigg|_{k=0}^{k=N} = 0 \quad (4.20)$$

De acuerdo con el lema fundamental del cálculo de variaciones, la ecuación (4.20) queda satisfecha por cualquier función $\eta(k)$ que satisfaga de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial F_c^0(k)}{\partial x^0(k)} + \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} = 0 \quad (4.21)$$

$$\langle \eta(k), \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} \rangle \Bigg|_{k=0}^{k=N} = 0 \quad (4.22)$$

La explicación detrás del lema fundamental es que para $\eta(k)$ arbitraria, la única manera de que se cumpla la ecuación (4.20) es que cada uno de sus componentes sean cero.

La ecuación (4.21) se conoce como la ecuación discreta de Euler - Lagrange y constituyen la condición necesaria que ha de satisfacer J_c para que sea un extremo

(máximo o mínimo). La ecuación (4.22) se conoce como condición de transversalidad, o simplemente condición de frontera, y representa la condición de frontera necesaria a fin de resolver las ecuaciones diferenciales parciales que aparecen en la expresión (4.21)

Con respecto a las dos condiciones adicionales dadas por las ecuaciones (4.16) y (4.17), se tiene que, para $u(k)$ y $\omega(k+1)$ arbitrarios,

$$\frac{\partial F_c^0(k)}{\partial \lambda_i^0(k+1)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial F_c^0(k)}{\partial u_j^0(k+1)} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (4.24)$$

La ecuación (4.23) conduce a la expresión:

$$x^0(k+1) = f[x^0(k), u^0(k), k] \quad (4.25)$$

Lo cual implica que la ecuación de estado debe satisfacer la trayectoria óptima. Cuando se aplica la ecuación (4.24) a la $F_c^0(k)$, se obtiene el control óptimo $u^0(k)$ en términos de $\lambda^0(k+1)$.

En buena parte de los problemas de diseño, se conoce desde el principio el valor del estado inicial $x(0)$. En consecuencia, la perturbación de $x(k)$ en $k=0$ es cero puesto que $x(0)$ es fijo; por tanto, $\eta(k^0) = 0$. Con esto, la condición de transversalidad dada por la expresión (4.22) se reduce a

$$\left\langle \eta(k), \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} \right\rangle \Big|_{k=N} = 0 \quad (4.26)$$

Por otra parte, muchos problemas de diseño de control óptimo se clasifican de acuerdo con las condiciones en los extremos; por ejemplo. Si $x(N)$ tiene un valor fijo, el problema de diseño se define como un problema de extremo fijo. Por otra parte, si $x(N)$ es libre o pertenece a cierto conjunto de interés, se tiene un problema de extremo libre. La condición de transversalidad dada por la ecuación (4.26) debe aplicarse, de acuerdo con las condiciones en los extremos, de la siguiente manera:

- Extremo fijo

$$x(N) = \text{fijo} \quad \eta(N) = 0$$

Entonces no puede afirmarse nada sobre:

$$\left. \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} \right|_{k=N} = 0$$

Por lo que no se necesita la condición de transversalidad para resolver la ecuación (4.21)

- Extremo libre:

$$x(N) = \text{libre} \quad \eta(N) \neq 0$$

Entonces:

$$\left. \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} \right|_{k=N} = 0 \quad (4.27)$$

Que es la condición de transversalidad necesaria para resolver la ecuación (4.21). En muchos casos algunos componentes de $x(N)$ son fijos y otros libres, por lo que las condiciones de transversalidad anteriores se aplican según sea el caso.

En resumen, el método del cálculo de variaciones requiere la solución de la ecuación discreta de Euler – Lagrange; sin embargo, para un sistema de n-ésimo orden, el número de ecuaciones discretas de Euler – Lagrange es $2n$, lo que significa que, en general, la solución de estas es una tarea tediosa.

Aunque no se menciona la controlabilidad en la formulación del diseño mediante la ecuación discreta de Euler – Lagrange, es evidente que se necesita la controlabilidad del estado cuando $x(N)$ está dado y cuando N es un número finito.

4.2 Principio discreto del máximo (mínimo)

El principio del máximo (o del mínimo) introducción por Pontryagin es un método muy potente para la solución de una clase amplia de sistemas de datos continuos. El diseño con el principio del máximo también se basa en el cálculo de variaciones; pero su mecánica es más refinada y elegante que el empleo de la ecuación de Euler – Lagrange.

El principio discreto del máximo puede considerarse como una extensión del diseño de sistemas de control digital. En términos estrictos, la aplicación del principio discreto del máximo requiere la investigación de la conexión de convexidad del sistema.

El problema de diseño puede plantearse de la siguiente manera: encontrar el control óptimo $u^0(k)$ sobre $[0, N]$ tal que el índice de desempeño

$$J = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] \quad (4.28)$$

Sea mínimo sujeto a la restricción de igualdad:

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \quad (4.29)$$

El término $G[x(N), (N)]$ que aparece en la ecuación (4.28) es el costo final del índice de desempeño, y requiere como restricción final la condición en el extremo sólo si $x(N)$ no es fijo.

Al igual que en el multiplicador de Lagrange, ahora se define un vector de co - estado p (k) de $(n \times 1)$. Con esto, el problema de optimización equivale a minimizar.

$$J_c = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [F[x(k), u(k), k] - \langle p(k+1), [x(k+1) - f(x, u, k)] \rangle] \quad (4.30)$$

El siguiente paso es definir la función escalar $H[x(k), u(k), p(k+1), k]$ como el hamiltoniano, tal que:

$$H[x(k), u(k), p(k+1), k] = F[x(k), u(k), k] - \langle p(k+1), f[x(k), u(k), k] \rangle \quad (4.31)$$

Cuando el hamiltoniano se define como en la ecuación anterior, entonces forma la base del principio discreto del máximo. Para el principio discreto del mínimo, la definición del hamiltoniano es:

$$H[x(k), u(k), p(k+1), k] = F[x(k), u(k), k] + \langle p(k+1), f[x(k), u(k), k] \rangle \quad (4.32)$$

Según se indica más adelante, el principio del máximo se refiere a la propiedad del Hamiltoniano de ser un máximo a lo largo de esta trayectoria.

Se sustituye la definición de Hamiltoniano dada por la expresión (4.32) en la ecuación (4.30) y se tiene:

$$J_c = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [F[x(k), u(k), p(k+1), k] - \langle p(k+1), x(k+1) \rangle] \quad (4.33)$$

Que es válida para el principio del mínimo.

Supóngase que $x(k), x(k+1)$ y $u(k)$, toma variaciones de la siguiente manera:

$$x(k) = x^0(k) + \varepsilon \eta(k) \quad (nx1) \quad (4.34)$$

$$x(k+1) = x^0(k+1) + \varepsilon \eta(k+1) \quad (nx1) \quad (4.35)$$

$$u(k) = u^0(k) + \delta u(k) \quad (px1) \quad (4.36)$$

$$p(k+1) = p^0(k+1) + \gamma w(k+1) \quad (nx1) \quad (4.37)$$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación (4.33) se escribe:

$$J_c = G[x^0(N) + \varepsilon \eta(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} H[x^0(k) + \varepsilon \eta(k), u^0(k) + \delta u(k), p^0(k+1) + \gamma w(k+1), k] - \langle p^0(k+1) + \gamma w(k+1), x^0(k+1) + \varepsilon \eta(k+1) \rangle \quad (4.38)$$

Se desarrolla $G[x(N), N]$ en una serie de Taylor alrededor de $G[x^0(N), N]$ y resulta :

$$G[x(N), N] = G[x^0(N), N] + \varepsilon \langle \eta(N), \frac{\partial G^0(N)}{\partial x^0(N)} \rangle + \dots \quad (4.39)$$

De manera similar, al desarrollar $H[x(k), u(k), p(k+1), k]$ en una serie de Taylor alrededor de $x^0(k), u^0(k), p^0(k+1)$ y $x^0(k+1)$

$$H[x(k), u(k), p(k+1), k] = H[x^0(k), u^0(k), p^0(k+1), k] + \varepsilon \langle \eta(k), \frac{\partial H^0(k)}{\partial x^0(k)} \rangle + \delta \langle u(k), \frac{\partial H^0(k)}{\partial u^0(k)} \rangle + \gamma \langle w(k+1), \frac{\partial H^0(k)}{\partial p^0(k+1)} \rangle + \dots \quad (4.40)$$

Donde :

$$H^0(k) = H[x^0(k), u^0(k), p^0(k+1), k] \quad (4.41)$$

Después de sustituir en la ecuación (4.39) los desarrollos en serie de Taylor de $G[x(N), N]$ y $H[x(k), u(k), p(k+1), k]$ y aplicar las siguientes condiciones necesarias para que j_c sea mínimo:

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (4.42)$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \delta} \right|_{\varepsilon=\delta=\gamma=0} = \dots \quad (4.43)$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \gamma} \right|_{\varepsilon=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (4.44)$$

Se tiene :

$$\langle \eta(N), \frac{\partial G^0(N)}{\partial x^0(x)} \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial H^0(k)}{\partial x^0(k)} \rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \langle p^0(k+1), \eta(k+1) \rangle = 0 \quad (4.45)$$

$$\langle u(k), \frac{\partial H^0(k)}{\partial u^0(k)} \rangle = 0 \quad (4.46)$$

$$\langle \omega(k+1), \frac{\partial H^0(k)}{\partial p^0(k+1)} - x^0(k+1) \rangle = 0 \quad (4.47)$$

La ecuación (4.48) conduce a:

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial p^0(k+1)} = x^0(k+1) \quad (4.48)$$

Que es la ecuación de estado original, (4.29). La expresión (4.46) proporciona

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial u^0(k)} = 0 \quad (4.49)$$

La cual indica que el Hamiltoniano tiene un extremo a lo largo de la trayectoria óptima con respecto al control óptimo.

El ultimo miembro del termino izquierdo de la ecuación (4.30) puede escribirse como

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle p^0(k+1), \eta(k+1) \rangle = \sum_{k=1}^{N-1} \langle p^0(k), \eta(k) \rangle \quad (4.50)$$

Ya que $x(0)$ está dado, $\eta(0) = 0$; con esto, la ultima ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \langle p^0(k+1), \eta(k+1) \rangle &= \sum_{k=1}^{N-1} \langle p^0(k), \eta(k) \rangle + \langle p^0(N), \eta(N) \rangle - \langle p^0(N), \eta(N) \rangle \\ &\langle \langle \frac{\partial G^0(N)}{\partial x^0(N)} - p^0(N), \eta(N) \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \langle \frac{\partial H^0(k)}{\partial x^0(k)} - p^0(k), \eta(k) \rangle = 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.51)$$

Puesto que las variaciones son mutuamente independientes, la única manera de satisfacer la ecuación anterior es con:

$$\frac{\partial G^0(N)}{\partial x^0(N)} = p^0(N) \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial H^0(N)}{\partial x^0(k)} = p^0(k) \quad (4.53)$$

Por tanto, al resumir los resultados, la condición necesaria para que J_c sea un extremo es:

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial x^0(k)} = p^0(k) \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial x^0(k+1)} = x^0(k+1) \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial u^0(k)} = 0 \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial G^0(N)}{\partial x^0(N)} = p^0(N) \quad (4.57)$$

Las ecuaciones (4.54) y (4.55) representan $2n$ ecuaciones de diferencias de primer orden, las cuales se definen como las ecuaciones canónicas de estado. La ecuación (4.56) proporciona la relación para el control óptimo $u^0(k)$ mientras que la expresión (4.57) es la condición de transversalidad que debe emplearse cuando $x(N)$ no es fijo. Si cualquier componente de $x(N)$ es fijo, entonces no se aplica a $p^0(N)$ la condición de transversalidad correspondiente.

4.3 Control de tiempo óptimo con restricción de energía

En general, el diseño del control de tiempo óptimo puede describirse como el problema de llevar $x(0)$ hasta $x(N)$ en un tiempo mínimo. El control está sujeto a la restricción $|u(kT)| \leq U$.

El diseño se lleva a cabo con el principio discreto del mínimo, y la presentación de este prepara el camino al estudio del diseño del regulador digital lineal. El problema de diseño puede plantearse de la siguiente manera:

Considerando el sistema digital

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.58)$$

Donde $x(k)$ y $u(k)$ son matrices de dimensión $n \times 1$ y $p \times 1$, respectivamente, y A es no singular. Se supone que el par $[A, B]$ es completamente controlable. El problema es encontrar el control óptimo $u^0(k)$, $k=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$, tal que el estado inicial $x(0)$ vaya hacia el estado final $x(N)=0$, sujeto a la restricción sobre el control

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u^0(k) R u(k) = \text{minimo} \quad (4.59)$$

Donde R es una matriz simétrica y definida positiva.

El índice de desempeño de la ecuación (4.59) se conoce, en general, como forma cuadrática, y en este caso representa una restricción sobre la energía del sistema por diseñar. En consecuencia, el índice de desempeño J de la expresión (4.59) representa una restricción alterna, aunque no equivalente, sobre el control $u(k)$.

La solución del problema comienza al definir la función Hamiltoniana:

$$H^0[x(k), p(k+1), u(k)] = \frac{1}{2} \langle u(k), Ru(k) \rangle + \langle p(k+1), x(k+1) \rangle \quad (4.60)$$

Las condiciones necesarias para que J sea mínimo son:

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial x^0(k)} = p^0(k) = A' p^0(k+1) \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial p^0(k+1)} = x^0(k+1) = Ax^0(k) + Bu(k) \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial u^0(k)} = Ru^0(k) = B' p^0(k+1) = 0 \quad (4.63)$$

Donde :

$$H^0(k) = \frac{1}{2} \langle u^0(k), Ru^0(k) \rangle + \langle p^0(k+1), Ax^0(k) + Bu^0(k) \rangle \quad (4.64)$$

Puesto que $x(0)$ y $x(N)$ son fijos, no es necesariamente la condición de transversalidad. El control óptimo se obtiene de la ecuación (4.63).

$$u^0(k) = -R^{-1} B' p^0(k+1) \quad (4.65)$$

Donde la inversa de R existe por que la matriz es definida positiva.

En este problema, la ecuación de coestado, expresión (4.61), no esta acoplada con la variable de estado $x(k)$. Por consiguiente, de la ecuación (4.61):

$$p^0(k) = (A^{-k})' p^0(0) \quad (4.66)$$

Donde se supone que A tiene inversa.

Después de sustituir la ecuación (4.65) en la (4.62), se tiene:

$$x^0(k+1) = Ax^0(k) - BR^{-1}B' p^0(k+1) \quad (4.67)$$

La solución de la ecuación anterior es :

$$x^0(N) = A^N x(0) - \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} BR^{-1}B' (A^{-1})' p^0(k) \quad (4.68)$$

Si en la expresión anterior se hace $x'(N)=0$ y se resuelve para $x(0)$, se llega a:

$$x(0) = \sum_{k=0}^{N-1} A^{-k-1} BR^{-1}B' (A^{-k-1})' p^0(0) \quad (4.69)$$

Es interesante notar que si R es la matriz identidad, entonces la matriz de controlabilidad está dada por:

$$W = \sum_{k=0}^{N-1} A^{-k-1} BR^{-1}B' (A^{-k-1})' = \sum_{k=0}^{N-1} S_k S_k' \quad (4.70)$$

Para cualquier otra matriz R, distinta de la identidad, que sea simétrica y definida positiva, tenemos :

$$R^{-1} = KK' \quad (4.71)$$

Donde K es una matriz p x p. Entonces, en la ecuación (4-70):

$$S_k = A^{-k-1} BK \quad (4.72)$$

Puesto que R es simétrica y definida positiva, ya que la ecuación es una forma simple de la ecuación matricial no lineal del tipo Riccati.

$$K\Theta Q^{-1}\Theta' K' - K\Phi - \Phi'K - R^{-1} = 0 \quad (4.73)$$

Con $\Theta = I$, $Q^{-1} = I$ y $\Phi = 0$

La matriz W de n x n de la ecuación (4.71), es no singular si la matriz:

$$[A^{-1}BK \quad A^{-2}BK \dots A^{-N}BK](n \times pN) \quad (4.74)$$

Es de rango n. La ultima matriz puede escribirse como :

$$[A^{-1}B \quad A^{-2}B \dots A^{-N}B] \begin{bmatrix} K \\ K \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}_{pN \times pN} \quad (4.75)$$

El rango de la matriz de la ecuación (4.74) es igual al de $[A^{-1}B \ A^{-2}B \ \dots \ A^{-N}B]$ o al de $[B \ AB \ \dots \ A^{N-1}B]$, puesto que K es definida positiva; por consiguiente, si el par $[A,B]$ es completamente controlable, también lo es $[A, BK]$.

Hasta el momento se ha establecido que si $[A,B]$ es completamente controlable, W es no singular. De la ecuación (4.69), se tiene

$$p^0(0) = W^{-1}x(0) \quad (4.76)$$

El control óptimo puede expresarse en términos del estado inicial $x(0)$; de la ecuación (4.79),

$$u^0(k) = -R^{-1}B'(A^{-1})'p(k) = -R^{-1}B'(A^{-1})'(A^{-k})'p(0) \quad (4.77)$$

En consecuencia,

$$u^0(k) = -R^{-1}B'(A^{-k-1})'W^{-1}x(0) \quad (4.78)$$

Después de sustituir la expresión anterior en la ecuación (4.59) y hacer algunas simplificaciones, el índice de desempeño óptimo es:

$$J^0 = \frac{1}{2}x'(0)W^{-1}x(0) \quad (4.79)$$

Este resultado es importante en el sentido de que el índice de desempeño óptimo depende del estado inicial $x(0)$. Ya que W depende solo de A, B y R , las cuales son matrices conocidas, la ecuación (4.79) implica que una vez que se tiene una cota sobre J^0 , entonces puede establecerse una región de estados controlables para $x(0)$; en otras palabras, la ecuación (4.79) define un dominio en el espacio de estados para $x(0)$ que llevara a $x(N)=0$ para N y J^0 dados.

4.4 Diseño Del regulador Digital Lineal Óptimo

Una de las técnicas de diseño que, en general, ha encontrado aplicaciones prácticas es el diseño del regulador lineal. El problema del regulador se define con respecto a un sistema sin entradas de referencia, y donde el objetivo de diseño es llevar los estados o las salidas hacia la vecindad del estado de equilibrio. La condición de no entradas no constituye una limitación severa para el diseño, ya que el diseño del regulador lineal (tiempo infinito) asegura que el sistema resultante sea estable y con ciertas

características de amortiguamiento, de modo que el desempeño del sistema sea satisfactorio en la práctica, incluso si las entradas son distintas de cero.

A continuación se formula primero el índice de desempeño con referencia a un proceso de datos continuos con datos muestreados y después con respecto a un proceso completamente digital.

El problema del regulador digital lineal puede plantearse de la siguiente manera.

Dado el sistema lineal:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.80)$$

donde $x(t)$ es el vector de dimensión $(n \times 1)$ de estados $u(t)$ es el vector de dimensión $(p \times 1)$ de control dado por:

$$u(t) = u(kT) \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (4.81)$$

Encontrar un control óptimo $u^0(kT)$ para $k=0, 1, 2, \dots, N-1$, tal que minimice el índice de desempeño cuadrático

$$J = \frac{1}{2} \langle x(t_f), Sx(t_f) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\langle x(t), Qx(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt \quad (4.82)$$

En la ecuación anterior $t_f = NT$, y

S es una matriz simétrica (de dimensión $n \times n$) semidefinida positiva

Q es una matriz simétrica (de dimensión $n \times n$) semidefinida positiva

R es una matriz simétrica (de dimensión $p \times p$) definida positiva

El primer paso es discretizar el sistema de la ecuación (4.20); esto se hace con la ecuación de diferencias,

$$x[(k+1)T] = \phi(T)x(kT) + \theta(T)u(kT) \quad (4.83)$$

Donde :

$$\theta(T) = e^{AT} \quad (4.84)$$

$$\theta(T) = \int_0^T \phi(T-\tau)Bd\tau \quad (4.85)$$

Para discretizar el índice de desempeño de la expresión (4.82) esta se escribe como:

$$J_N = \frac{1}{2} \langle x(NT), Sx(NT) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT}^{(k+1)T} [\langle x(t), Qx(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt \quad (4.86)$$

A continuación se escribe la ecuación de transición de estados de la expresión (4.80) para $t \geq kT$,

$$x(t) = \phi(t - kT)x(kT) + \theta(t - kT)u(kT) \quad (4.87)$$

En consecuencia:

$$x'(t) = x'(kT)\phi'(t - kT) + u'(kT)\theta'(t - kT) \quad (4.88)$$

Se sustituyen las ecuaciones (4.81), (4.87) y (4.88) en la (4.86) y se tiene:

$$j_N = \frac{1}{2} x'(NT)Sx(NT) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x'(kT)\hat{Q}(T)x(kT) + 2x'(kT)M(T)u(kT) + u'(kT)\hat{R}(T)u(kT)] \quad (4.89)$$

Donde:

$$\hat{Q}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi'(t - kT)Q\phi(t - kT)dt \quad (4.90)$$

$$M(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi'(t - kT)Q\theta(t - kT)dt \quad (4.91)$$

$$\hat{R}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} [\theta'(t - kT)Q\theta(t - kT) + R]dt \quad (4.92)$$

Por las propiedades de Q y R, se observa que $\hat{Q}(T)$ es simétrica y semidefinida positiva, mientras que $\hat{R}(T)$ es simétrica y definida positiva. Sin embargo, no es posible afirmar nada con respecto a M(T).

En general, el sistema digital puede describirse con la ecuación de estado (4.83) en la fase inicial de diseño; no hay razón especial por la que el índice de desempeño tenga que ser tan complicado como el de la ecuación (4.89) puesto que, en general, no es claro como escoger la matriz de ponderación M. es más natural definir el índice de desempeño cuadrático como:

$$J_N = \frac{1}{2} \langle x(N), Sx(N) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\langle x(k), Qx(k) \rangle + \langle u(k), Ru(k) \rangle] \quad (4.93)$$

4.4.1 Diseño del regulador digital lineal

El proceso de control digital está descrito por

$$x(k+1) = \phi x(k) + \theta u(k) \quad (4.94)$$

Con $x(0)$ dado. Nuestro objetivo de diseño es encontrar $u^0(k)$ tal que minimice el índice de desempeño:

$$J_N = \frac{1}{2} \langle x(N), Sx(N) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\langle x(k), \hat{Q}x(k) \rangle + \langle x(k), 2Mu(k) \rangle + \langle u(k), \hat{R}u(k) \rangle] \quad (4.95)$$

4.5 Solución de la ecuación discreta de Riccati

La ecuación algebraica de Riccati es más difícil de resolver que la ecuación de diferencias. En general, la solución de la ecuación algebraica se obtiene con uno de los siguientes métodos:

- Método del cálculo numérico
- Método recursivo
- Método de valores y vectores propios

El cálculo numérico involucra la solución interactiva de la ecuación de Riccati en diferencias no lineal. A continuación se presentan los métodos recursivos y de valores y vectores propios.

4.5.1 Método recursivo para resolver la ecuación discreta de Riccati.

El método de programación dinámica de la sección anterior también se conoce como solución recursiva de problemas de control óptimo.

Sea :

$$G(i) = [\hat{R} + \theta' K(i+1)\theta]^{-1} [M' + \theta' K(i+1)\phi] \quad (4.96)$$

Que es la matriz de ganancia de la retroalimentación del regulador digital lineal Óptimo; el control óptimo de la ecuación se escribe:

$$u^0(i) = -G(i)x^0(i) \quad (4.97)$$

De manera similar, la ecuación de Riccati se simplifica para quedar:

$$K(i) = Q + \phi' K(i+1)\phi - [M' + \theta' K(i+1)\phi]' G(i) \quad (4.98)$$

Si se comienza con la condición de frontera $K(N) = S$, las ecuaciones (4.96) y (4.98) pueden resolverse con recursión hacia atrás.

Como alternativa, puede emplearse la ecuación de Riccati si se hace:

$$H(k+1) = K(k+1)[I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} \quad (4.99)$$

Entonces la ecuación se convierten en:

$$K(k) = (\phi' - M \hat{R}^{-1} \theta') H(k+1) (\phi - \theta \hat{R}^{-1} M') + \hat{Q} - M \hat{R}^{-1} M' \quad (4.100)$$

De nuevo las dos últimas ecuaciones pueden resolverse de manera recursiva hacia atrás en el tiempo, iniciando el proceso en la condición de frontera $K(N)=S$.

La ecuación (4.99) y (4.100) tienen la propiedad de que $K(k+1)$ sólo aparece una vez en $H(k+1)$; sin embargo, el método recursivo que aplica las ecuaciones (4.96) y (4.98) tiene la ventaja de que la matriz de ganancia de la retroalimentación esta dada directamente por la ecuación (4.96).

4.5.2 Método de valores y vectores propios

La ecuación de diferencia no lineal de Riccati que aparece en la expresión, puede resolverse con el método de valores y vectores propios. El resultado de este método es una solución en forma cerrada para la ganancia de Riccati, con lo que la solución de la ecuación de Riccati puede obtenerse con la aplicación de un proceso de límite.

Para ello, las ecuaciones canónicas de estado canónicas que aparecen en las

expresiones, $x^0(k+1) = (\Phi - \theta \hat{R}^{-1} M') x^0(k) - \theta \hat{R}^{-1} \theta' p^0(k+1)$ y

$(\phi' - M \hat{R}^{-1} \theta') p^0(k+1) = p^0(k) - (\hat{Q} - M \hat{R}^{-1} M') x^0(k)$

Se escriben respectivamente.

$$x^0(k+1) = \Omega x^0(k) - \theta \hat{R}^{-1} \theta' p^0(k+1) \quad (4.101)$$

$$p^0(k) = \Gamma x^0(k) + \Omega' p^0(k+1) \quad (4.102)$$

Donde:

$$\Omega = \Phi - \theta \hat{R}^{-1} M' \quad (4.103)$$

$$\Gamma = \hat{Q} - M \hat{R}^{-1} M' \quad (4.104)$$

Después de resolver la ecuación (4.102) para $x^0(k)$ y escribir las ecuaciones de estado canónicas en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x^0(k) \\ p^0(k) \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x^0(k+1) \\ p^0(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Donde:

$$V = \begin{bmatrix} \Omega^{-1} & \Omega^{-1} \theta \hat{R}^{-1} \theta' \\ \Gamma \Omega^{-1} & \Omega' + \Gamma \Omega^{-1} \theta \hat{R}^{-1} \theta' \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

La ecuación (4.105) representa $2n$ ecuaciones de diferencias hacia atrás, con condiciones de frontera $X(0) = x_0$ y $p(N) = Sx(N)$.

Una propiedad importante de la matriz V es que el recíproco de cualquier valor propio también es un valor propio. Esto puede demostrarse así: sea λ un valor propio de V y h el vector propio correspondiente; entonces, por definición de vector propio, $Vh = \lambda h$

A continuación se realiza una partición de h , de modo que la última ecuación pueda escribirse como

$$\begin{bmatrix} \Omega^{-1} & \Omega^{-1} \theta \hat{R}^{-1} \theta' \\ \Gamma \Omega^{-1} & \Omega' + \Gamma \Omega^{-1} \theta \hat{R}^{-1} \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Ahora, la determinante de V se escribe como:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\| \Omega^{-1} (\Omega' + \Gamma \Omega^{-1} \theta \hat{R}^{-1} \theta') - \Omega^{-1} \Gamma \Omega^{-1} \Omega \Omega^{-1} \theta \hat{R}^{-1} \theta' \right\| \\ &= \left\| \Omega^{-1} \Omega' \right\| = \left\| \Omega^{-1} \right\| \left\| \Omega' \right\| = 1 \end{aligned} \quad (4.108)$$

En consecuencia la determinante de V es la unidad.

Si se toma la inversa de V y luego la transpuesta, se tiene la siguiente identidad:

$$(V^{-1})' \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

El significado de la ecuación anterior es que $1/\lambda$ es un valor propio de $(V^{-1})'$ y V^{-1} ; por tanto, $1/\lambda$ es un valor propio de V . Esto también significa que n valores propios de V están dentro del círculo unitario, mientras que otros n están fuera de él. Ahora, considérese la siguiente transformación no singular

$$\begin{bmatrix} x^0(k) \\ p^0(k) \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} q(k) \\ r(k) \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Donde W tiene la forma:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Y la propiedad de que

$$W^{-1}VW = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

Para valores propios distintos, los elementos de Λ forman una matriz diagonal donde los λ_i están sobre la diagonal principal, donde los λ_i representan los valores propios de V fuera del círculo unitario, o una matriz modal para los valores propios complejos; por ejemplo, supóngase que λ_1 y λ_2 son valores propios reales de V fuera del círculo unitario. Entonces la ecuación (4.112) puede escribirse como:

$$W^{-1}VW = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_1 \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$W^{-1}VW = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & \vdots & 0 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \sigma_2 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \vdots & \omega_2 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Donde :

$$\sigma_2 - j\omega_2 = \frac{1}{\sigma_1 + j\omega_1} \quad (4.115)$$

Es evidente que cuando V posee los valores propios reales y complejos, hay que emplear una combinación de las ecuaciones (4.113) y (4.114).

Ahora, si se escribe la ecuación (4.110) como :

$$\begin{bmatrix} q(k) \\ r(k) \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} x^0(k) \\ p^0(k) \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

Y se emplea la ecuación (4.110), se tiene:

$$\begin{bmatrix} q(k) \\ r(k) \end{bmatrix} = W^{-1}VW \begin{bmatrix} q(k+1) \\ r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(k+1) \\ r(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

La última ecuación se resuelve con ejecución hacia atrás, con la condición de frontera

$\begin{bmatrix} q[N] & r(N) \end{bmatrix}$ y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} q(N-k) \\ r(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^k & 0 \\ 0 & \Lambda^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(N) \\ r(N) \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Expresión que puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} q(N) \\ r(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^{-k} & 0 \\ 0 & \Lambda^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(N-k) \\ r(N) \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

Suponiendo que $r(N)$ y $q(N)$ se relacionan de la siguiente manera:

$$r(N) = Uq(N) \quad (4.120)$$

Donde U es una matriz de dimensión $n \times n$. se sustituye la expresión (4.120) en las ecuaciones (4.121) y (4.110) para $k=N$ y se tiene :

$$U = -(W_{22} - SW_{12})^{-1}(W_{21} - SW_{11}) \quad (4.121)$$

y

$$r(N-k) = \Lambda^{-k}U\Lambda^{-k}q(N-k) \quad (4.122)$$

Si definimos :

$$H(k) = \Lambda^{-k} U \Lambda^{-k} \quad (4.123)$$

Entonces la ecuación (4.122) se escribe como:

$$r(N-k) = H(k)q(N-k) \quad (4.124)$$

Se sustituye la expresión anterior en la ecuación (4.110) y se demuestra la validez de las siguientes relaciones:

$$x(N-k) = [W_{11} + W_{12}H(k)]q(N-k) \quad (4.125)$$

$$p(N-k) = K(N-k)x(N-k) = [W_{11} + W_{22}H(k)]q(N-k) \quad (4.126)$$

Después de comparar las dos ecuaciones anteriores, la ganancia de Riccati se puede escribir :

$$K(N-k) = [W_{21} + W_{22}H(k)][W_{11} + W_{12}H(k)]^{-1} \quad (4.127)$$

Aunque la expresión anterior proporciona una solución en forma cerrada para la ecuación de Riccati en diferencias, en general, debido a los cálculos necesarios para hallar la matriz W y los valores propios de V , el método de los valores y vectores propios no ofrece una ventaja clara sobre método recursivo; sin embargo, conduce directamente a la solución de la ecuación algebraica de Riccati para problemas de tiempo infinito.

Con $i = N - k$, entonces $K(N - k)$ se convierte en $K(i)$, que es la ganancia de Riccati empleada en las secciones anteriores, con $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. La ganancia constante de Riccati es:

$$K = \lim_{i \rightarrow \infty} K(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} K(N - k) \quad (4.128)$$

Puesto que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda^{-k} U \Lambda^{-k} = 0 \quad (4.129)$$

Entonces la ecuación (4.127) conduce a:

$$K = \lim_{k \rightarrow \infty} K(N - k) = W_{21}W_{11}^{-1} \quad (4.130)$$

4.6 Sensibilidad al periodo de muestreo

Las propiedades únicas de la ecuación discreta de Riccati nos conduce al estudio de la sensibilidad del sistema del regulador digital óptimo con respecto al periodo de muestreo T , cuando el modelo del sistema está dado por las ecuaciones (4.120) y (4.121). La

sensibilidad al periodo de muestreo también proporciona un método de aproximación para la ganancia constante K de Riccati en el problema del lineal de tiempo infinito, con base en el conocimiento de la ganancia de Riccati del sistema de datos continuos, esto es, $T=0$. es interesante hacer notar que la obtención de la sensibilidad al periodo de muestreo y la aplicación de este al diseño del regulador digital lineal óptimo motivó la solución del problema del rediseño digital.

4.7 Observador de estados digital

Una parte importante de la teoría de control óptimo del sistema de control digital descansa en la retroalimentación de las variables de estado para formar el control.

Desafortunadamente, en la práctica no siempre se tiene acceso a todas las variables de estado y , en general, sólo pueden medirse las salidas del sistema.

$$u(k) = Er(k) - Gx_e(k) \quad (4.131)$$

Antes se tiene que establecer la existencia del observador.

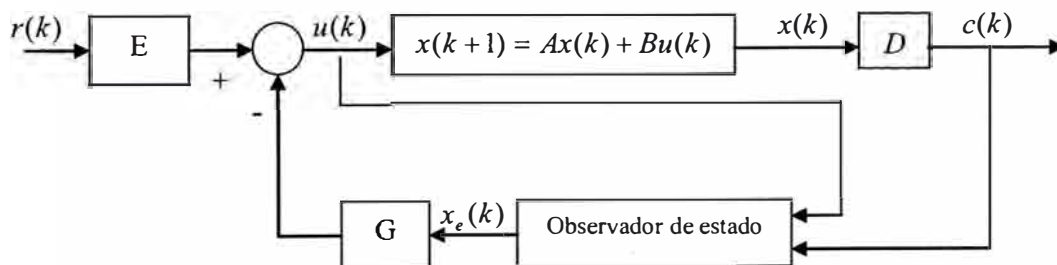


Figura 4.1 : Sistema de control de estados con control digital

Dado un sistema digital lineal descrito por las ecuaciones dinámicas:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.132)$$

$$c(k) = Dx(k) \quad (4.133)$$

Donde $x(k)$, $u(k)$ y $c(k)$ son vectores de dimensión n , p y q , respectivamente. Supóngase que A no es singular. Entonces el vector de estados puede construirse a partir de combinaciones lineales de la salida $c(k)$, la entrada $u(k)$ y los valores anteriores de estas variables, si el sistema digital es completamente observable.

4.7.1 Diseño del observador de estados de orden completo

El observador de estados de la Fig. 4.1 se diseña de modo que el estado observador $x_e(t)$ sea lo más cercano posible al estado real $x(k)$.

El observador de estados ha de poseer una configuración con $u(k)$ y $c(k)$ como entradas y la capacidad de minimizar automáticamente el error entre $x(k)$ y $x_e(k)$.

Debido a que $x(k)$ no puede medirse de manera directa, tampoco es posible comparar $x_e(t)$ con $x(k)$. Como alternativa, se comparan $c_e(t)$ y $c_k(t)$, donde :

$$c_e(k) = Dx_e(k) \quad (4.134)$$

La configuración lógica del observador de estados digital es la que aparece en la Fig. 4.2. el observador se plantea como un sistema de control retroalimentado, con G_e como la matriz de ganancia de la retroalimentación. El objetivo de diseño es seleccionar G_e de modo tal que $c_e(k)$ tienda hacia $c(k)$ lo más pronto posible.

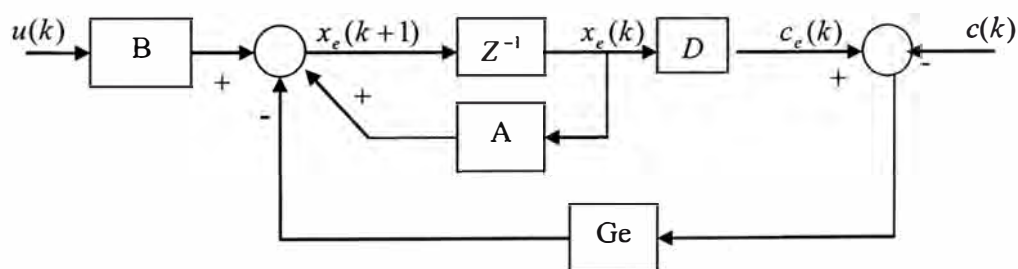


Figura 4.2 : Observador de estados digital con retroalimentación

La ecuación de estados del observador de lazo cerrado es:

$$x_e(k+1) = (A - GeD)x_e(k) + Bu(k) + G_e c(k) \quad (4.135)$$

Donde las matrices A, B, y D son las mismas que aparecen en la ecuación (4.133). Donde G_e es la matriz de retroalimentación de dimensión $n \times q$. cuando $c_e(k)$ es igual a $c(k)$, la ecuación anterior toma la siguiente la forma:

$$x_e(k+1) = Ax_e(k) + Bu(k) \quad (4.136)$$

Puesto que la relación entre $c(k)$ y $x(k)$ esta dada por la expresión que puede escribirse de la siguiente manera:

$$x_e(k+1) = Ax_e(k) + Bu(k) + G_e D[x(k) - x_e(k)] \quad (4.137)$$

El diseño del observador sólo es un poco diferente si las condiciones iniciales de $x(k)$ y $x_e(k)$ son distintas.

Después de sustraer la ecuación 4-137 se tiene :

$$x(k+1) - x_e(k+1) = (A - G_e D)[x(k) - x_e(k)] \quad (4.138)$$

La cual puede considerarse como la ecuación de estados en diferencias homogéneas de un sistema digital lineal cuya matriz coeficientes es $A - G_e D$, Una forma de alcanzar una convergencia rápida de $x_e(k)$ hacia $x(k)$ es diseñar G_e de modo tal que los valores propios de $A - G_e D$ estén ubicados de manera apropiada en el plano z.

4.8 Aplicación del Control óptimo del nivel del líquido del tanque

4.8.1 Aplicación del control óptimo proporcional estacionario

El siguiente gráfico muestra el control de este sistema:

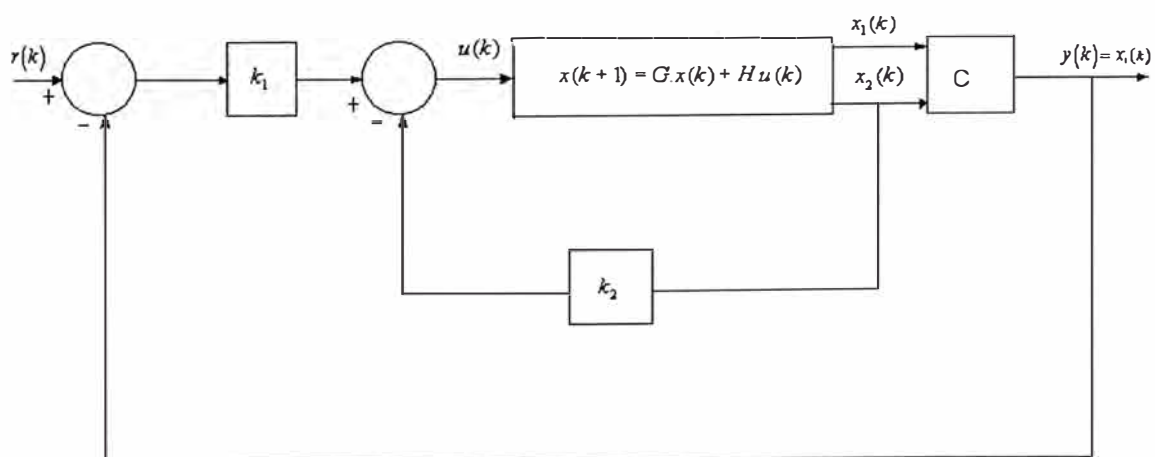


Figura 4.3: Diagrama de bloques del control óptimo proporcional

Las variables de realimentación K son k_1 y k_2 .

Para hallar K, se tiene que conocer antes la matriz P en la ecuación de Ricatti.

$$P=Q + G^T \cdot P \cdot G - G^T \cdot P \cdot H (R+H^T \cdot P \cdot H)^{-1} H^T \cdot P \cdot G$$

$$K=[R+H^T \cdot P \cdot H]^{-1} H^T \cdot P \cdot G$$

Ganancia del Controlador

```
>> [ktil,ptil,e]=dlqr(G,H,Q,R)
```

ktil =

```
0.9942 6.4927
```

ptil =

```
1.0e+003 *
```

```
0.1530 0.5588
```

```
0.5588 3.6288
```

e =

```
0.9932 + 0.0065i
```

```
0.9932 - 0.0065i
```

Factor de corrección

```
>> g=1/(Cd*inv(eye(2)-G+H*ktil)*H*k1)
```

g =

```
1.0000
```

a) Simulación

```
G =[1 0.04995;0 0.9980];
```

```
H =[0.000;0.0018];
```

```
Cd =[1 0];
```

```
Dd =[0];
```

```
Q=[1,0;0,1];%Espacios de estado Discreto
```

```
R=[1];
```

```
%Hallando ganancia del control
```

```
[ktil,ptil,e]=dlqr(G,H,Q,R);k1=ktil(1);
```

```
%Hallando el factor de correccion
```

```
g=1/(Cd*inv(eye(2)-G+H*ktil)*H*k1);
```



```

x=[0;0];
NN=20000;r=1*g;
%respuesta al escalón r=1
for i=1:NN
Qe(i)=-ktil*x+k1*r;
x=G*x+H*Qe(i);
y(i)=x(1);
end
%graficos
t=linspace(0,0.05*NN,NN);
figure
plot(t,y);ylabel('ALTURA (mts)');grid
axis([0,500,-0.1,1.5]);
xlabel('Tiempo (seg.)');

```

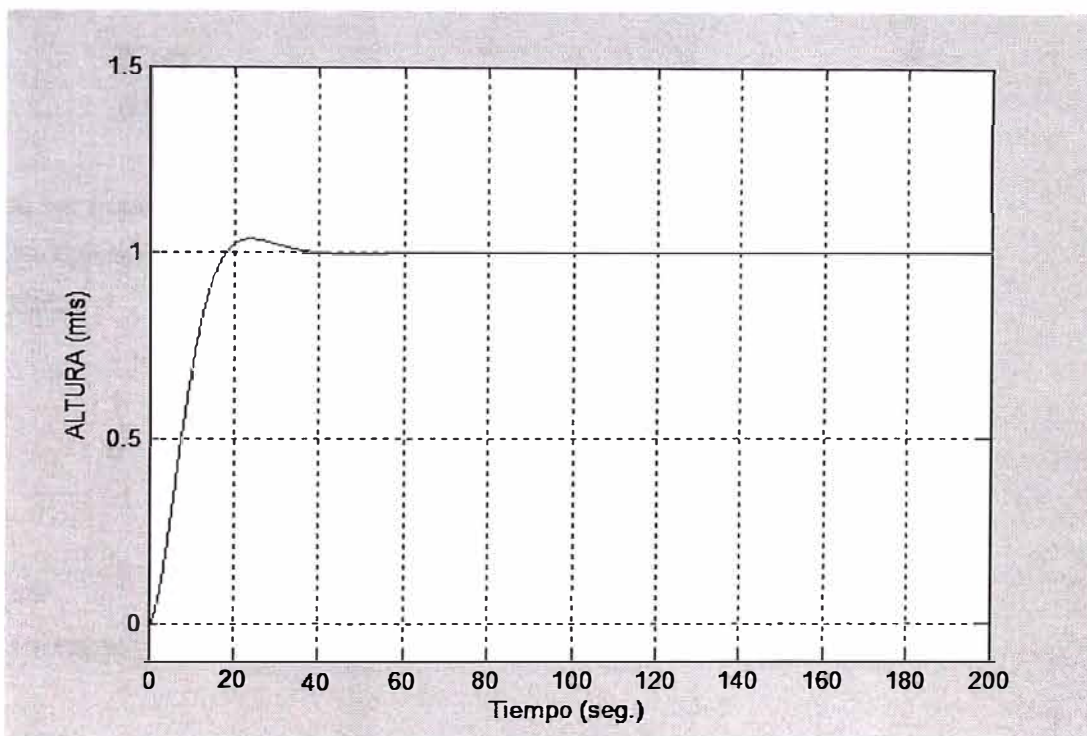


Figura 4.4: Gráfica del control óptimo proporcional de nivel de líquido

4.8.2 Aplicación del control óptimo proporcional integral

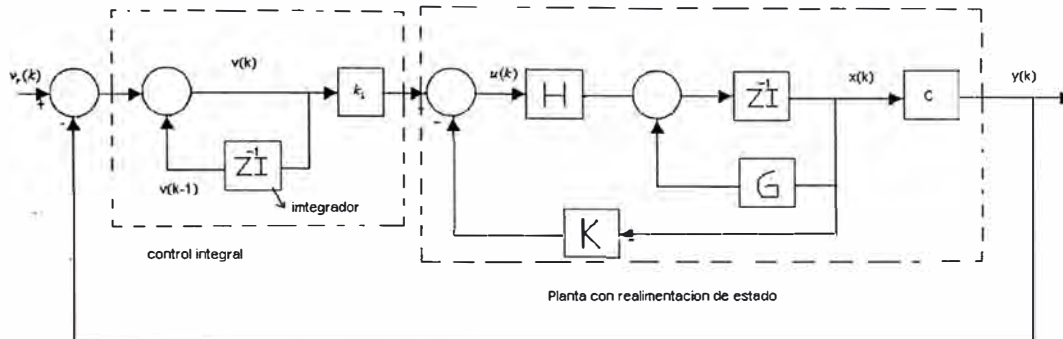


Figura 4.5: Control óptimo proporcional integral

```
K>> eig(Ac)
ans =
    -0.3411
    -0.6989
```

Hallando las nuevas matrices Gtilde y Htilde

```
>> Gtilde=[G zeros(2,1);-Cd*G eye(1,1)]
```

```
Gtilde =
```

```

     1    0.04995     0
     0    0.9980     0
    -1   -0.04995    1.0000
```

```
>>
```

```
>> Htilde=[H;-Cd*H]
```

```
Htilde =
```

```
0.0000
```

```
0.0018
```

```
0.0000
```

Programa completo del control óptimo proporcional integral

```

G =[1 0.04995;0 0.9980]
H =[0 ;0.0018]
Cd =[1 0]
Dd =[0];
%Hallando Gtilde y Htilde
Gtilde=[G zeros(2,1);-Cd*G eye(1,1)];
Htilde=[H;-Cd*H];
%Matrices de Ponderación
Q=[1,0,0;0,1,0;0,0,1];
R=[1];
%Ganancia del controlador
[ktil,ptil,e]=dlqr(Gtilde,Htilde,Q,R);
k=[ktil(1) ktil(2)];ki=-ktil(3);
x=[0;0];yi=0;v=0;%condicions iniciales
NN=20000r=1;
%Respuesta al escalon r=1
for j=1:NN
v=v+r-yi;
Ea(j)=-k*x+ki*v;
x=G*x+H*Ea(j);
y(j)=x(1);yi=y(j);

end

%Graficos
t=linspace(0,0.05*NN,NN);
figure
plot(t,y);ylabel('altura del liquido(mts)');grid;
axis([0,50,-0.5,1.5]);
xlabel('tiempo(segs)');

```

a) Simulación

En la Fig. 4.4 se observa la simulación del control PI

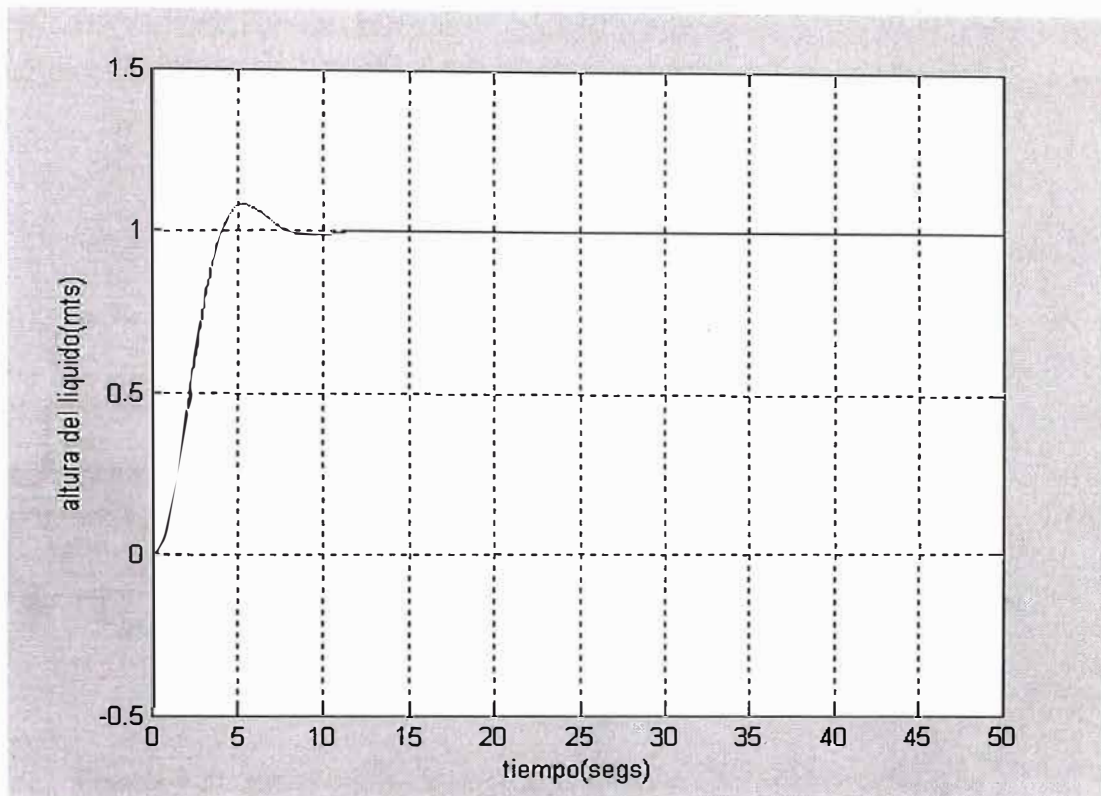


Figura 4.6: Control óptimo proporcional integral

Para tal caso hemos prediseñado gráficamente una de las posibles formas de trabajo, en el proceso de la adquisición de los datos.

En el podemos observar que la tarjeta madre se podrá manipular tanto como datos o señales digitales ya procesadas, así como controlar digitalmente la frecuencia de muestreo de la señal en el conversor analógico / digital, así.

Es bueno tener en cuenta que para el sistema del conversor analógico / digital, este necesita que la señal sea adecuada al rango de trabajo del conversor, ya que si lo sobre pasamos o mantenemos muy reducido, no se podrá tener una medida exacta o aproximada a la real, para ello se podrá implementar el uso de amplificadores operacionales, para así dar paso hacia conversor.

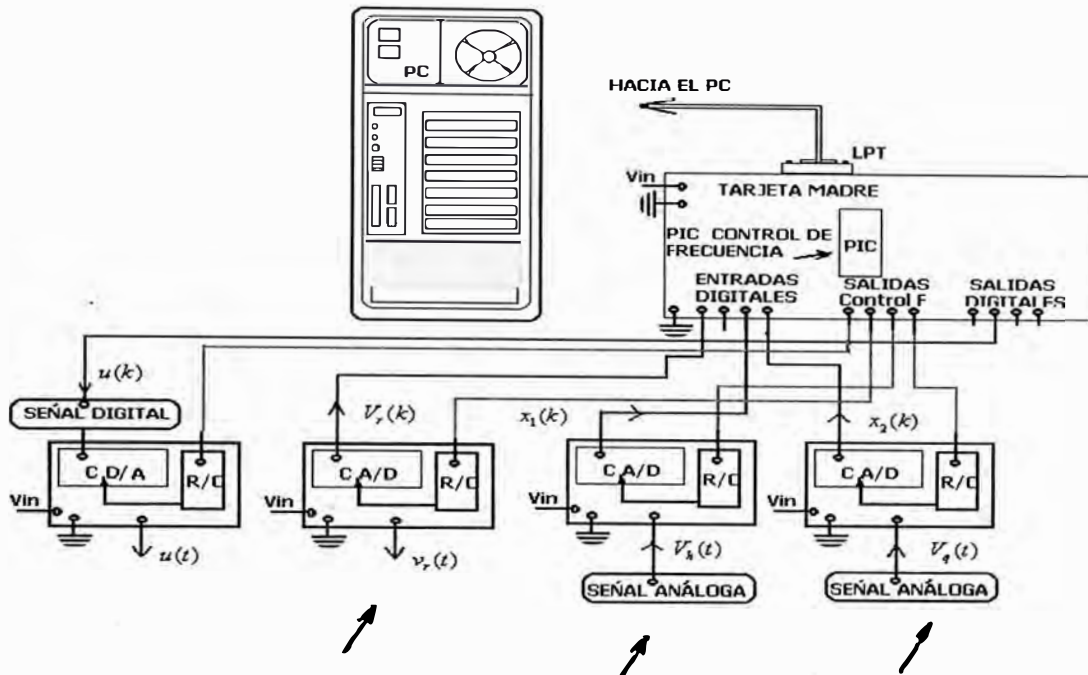


Figura 4.7: Adquisición de señales para el control por software

Quedando el sistema completo de la siguiente manera:

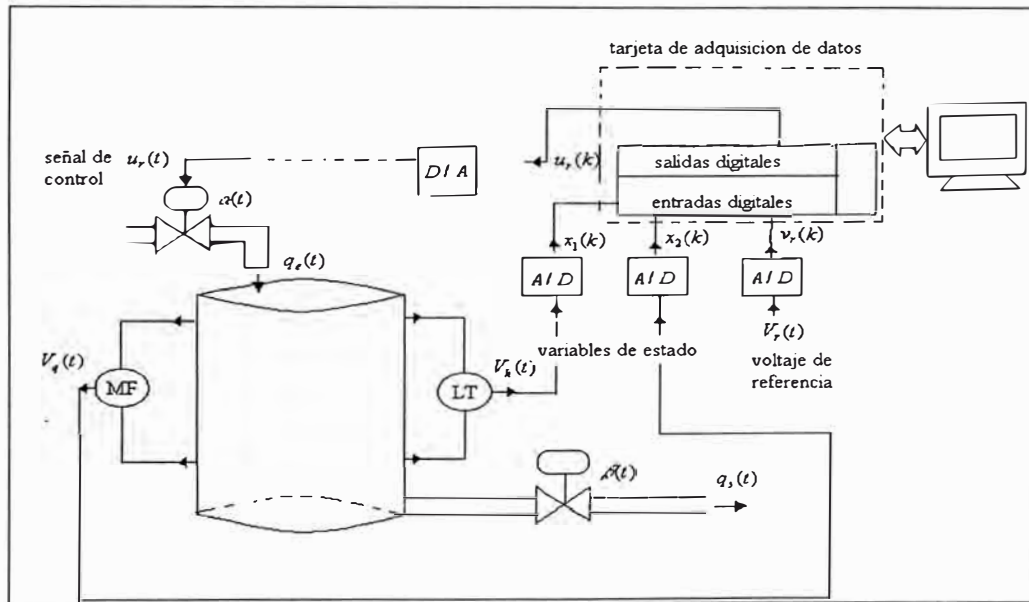


Figura 4.8: Sistema de nivel de líquido con controlador

CONCLUSIONES

1. En el sistema tanque de lazo abierto al aplicar una entrada escalón se produce el rebalse del líquido, además los resultados se pueden ver mejor con un tiempo de muestreo más pequeño, pues contiene mayor cantidad de información para procesar la señal por eso decidimos $T_s = 0.05$.
2. El control del sistema se hace por PC a través de un algoritmo digital en Matlab, pero las señales de accionamiento, en nuestro caso $u(k)$, son convertidos a señales continuas a través de un convertidor D/A.
3. El sobrepico está presente tanto en el control óptimo proporcional como en el integral, debido al integrador en lazo abierto del sistema tanque.
4. El Sistema es Completamente Controlable.

En el programa se calcula la matriz M_c en función de las matrices de las ecuaciones de estado, siendo esta de orden 2, luego de "correr" el programa el rango de esta matriz M es igual a 2, por tanto se comprueba que el sistema es Completamente Controlable (C.C).

$$M_c = [B_c \quad A_c * B_c];$$

$$\text{rank}(M_c)$$

$$M_c = [B_c \quad A_c * B_c];$$

$$M_c =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.28 \\ 0.28 & -.2912 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(M_c) = 2 \quad \% \text{Es C.C. en tiempo continuo}$$

5. El Sistema es Completamente observable (C.O).

De modo similar en este caso se halla la matriz N , esta es de orden 2, luego de correr el programa el rango de esta matriz N es igual a 2, por tanto se comprueba que el sistema es C.O

$$N_c = [C_c' \quad A_c' * C_c'];$$

$$\text{rank}(N_c)$$

$$N_c = [C_c' \quad A_c' * C_c' \quad A_c'^2 * C_c'];$$

$$N_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(N_c) = 2$$

6. No es necesario tener un medidor de flujo neto del tanque pues el sistema es completamente observable y todo el comportamiento de sus variables son obtenidas en el programa.
7. Se han aplicado dos métodos de control, Proporcional Estacionario y Proporcional Integral. en los dos casos se llega a controlar el nivel de líquido a la altura de 1 metro, sin embargo se pueden concluir lo siguiente:

Como ventaja en los dos casos es que el % de error es cero por acción del integrador de la planta en lazo abierto.

En el caso del controlador Integral, el tiempo de establecimiento es 10 a 12s, mientras que en el caso del Proporcional Estacionario es de 60s, (ver gráficos) por tanto el control Proporcional Integral es más veloz respecto al Proporcional Estacionario.
8. El Proyecto es diseñar un sistema de adquisición de datos, de tal forma que podamos enviar y recibir información. manipulando así, desde el computador la frecuencia de muestreo de los conversores analógico / digital, y dándole el tratamiento adecuado a la señal por medio de software para luego ser presentando el resultado en la pantalla del computador de forma gráfica y numérica. Dando como resultado la información de tal forma que cualquier persona fácilmente la pueda interpretar.

En la etapa de prediseño se plantea implementar una tarjeta externa llamada tarjeta madre; la cual manejará la interfase con el computador, ésta contará o estará regida por un PIC que se encargará de la transmisión de datos y gobernará la o las tarjeta del conversor digital / analógico, indicándole la frecuencia de operación o mejor dicho la frecuencia de muestreo.

De tal forma que la tarjeta madre podrá recibir, enviar datos digitalmente, además ésta podrá controlar la velocidad de dicha información, siendo así una forma de viabilidad al desarrollo de investigación del proyecto.

Es bueno tener en cuenta que para el sistema del conversor analógico / digital, se necesita que la señal sea adecuada al rango de trabajo del conversor, ya que si lo

sobre pasamos o mantenemos muy reducido, no se podrá tener una medida exacta o aproximada a la real, para ello se podrá implementar el uso de amplificadores operacionales, para así dar paso hacia conversor.

Es claro que en el medio que vivimos, la información es uno de los pilares fundamentales en el desempeño de nuestras vidas, y también que, en el área de ingeniería la información es una de las claves del éxito de nuestras invenciones.

Pero esta información no tendría significado ni aplicación si no pudiéramos controlarla y manipularla. Por tal motivo el software nos brinda una gran herramienta, a la hora de trabajar con dicha información. Por tal motivo he aquí el enfoque a la creación de nuestros propios programas, basados en MATLAB que emplearemos en el proceso de manipulación de la información y visualización de la misma. Con ASM será para dar instrucciones y control a los periféricos conectados a la tarjeta madre.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ogata, Katsuhiko - Ingeniería de control moderna / Katsuhiko Ogata . – 2da. Ed. . - México [etc].: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1993 . – XIII.
- [2] Ogata, Katsuhiko - Problemas de ingeniería de control utilizando MATLAB / Katsuhiko Ogata; traducción: Sebastián Dormido C. - Madrid: Prentice Hall Iberia, 1999 . - VI, 359 p
- [3] Ogata, Katsuhiko - Sistemas de control en tiempo discreto / Katsuhiko Ogata; traducción: José Guillermo Aranda Pérez, Fran.– 2da. Ed. . - México [etc.]: Prentice Hall Hispanoamericana.
- [4] http://www.disa.bi.ehu.es/spanish/ftp/material_asignaturas/Automatizacion_Procesos_Industriales_Organizacion/TEORIA/TEMA_02_Modelado_matemático_planta/modelado_matemático_planta.pdf
- [5] <http://www1.ceit.es/Asignaturas/ingsistemas1/hidraulicos.pdf>
- [6] http://www.fceia.unr.edu.ar/dsf/files/A_SF_SFs_Mod.pdf
- [7] http://www.elai.upm.es/spain/Asignaturas/Servos/Apuntes/04_modelado.pdf
- [8] http://csd.newcastle.edu.au/control/simulations/tank_sim.html