

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POST-GRADO Y SEGUNDA

ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL



TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

MENCIÓN MATEMÁTICA APLICADA

TITULADA:

RECONSTRUCCIÓN DE CÁMARA Y ESTRUCTURA
A PARTIR DE MÚLTIPLES VISTAS

PRESENTADA POR

ORESTES MARTÍN BUENO TANGOA

LIMA-PERÚ

2005

Éste trabajo se lo dedico a
mis padres, Orestes e Irma.

Agradezco a mis asesores, al Dr. Paulo César Pinto Carvalho y al Dr. Wilfredo Sosa, por las enseñanzas y las molestias tomadas; a mis amigos de la UNI y del IMCA por la insistencia y el apoyo constante; y a Jesús, Johel, Junior, Miguel y Rudy, por la hospitalidad brindada en Rio de Janeiro.

Indice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Principios de Álgebra	3
1.1.1. Clases de Equivalencia	3
1.1.2. Descomposición en Valores Singulares	4
1.1.3. Pseudoinversa de una Matriz	7
1.1.4. Problema de Mínimos Cuadrados	9
1.2. Geometría Projectiva	11
1.2.1. Espacios Projectivos	11
1.2.2. Transformaciones Projectivas	17
1.2.3. Correspondencias Projectivas	21
1.2.4. Geometría en $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$	22
1.3. Cámaras	24
2. Geometría de 2 vistas	31
2.1. Geometría Epipolar	31
2.2. Matriz Esencial	40
2.3. Estimando la Matriz Fundamental	44
2.3.1. Método de los 8 puntos de Hartley	44
2.3.2. Método de minimización de distancias de puntos a rectas epipolares	48
2.4. Reconstrucción de Estructura 3D	50
2.4.1. Método Lineal	50
2.4.2. Método No Lineal	51
2.4.3. Método Lineal Iterativo	52
3. Reconstrucción con Múltiples Vistas	53
3.1. Método de factorización de Sturm-Triggs	55
3.2. Método de Bundle Adjustment	60
3.2.1. Método de Gauss-Newton	61
3.2.2. Método de Levenberg-Marquardt	62
3.3. Método de Reconstrucción Euclídea	63

4. Resultados y Conclusiones	64
4.1. Datos Virtuales	64
4.1.1. Método de Sturm-Triggs	64
4.1.2. Método de Reconstrucción Euclídea	66
4.1.3. Métodos de Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt	67
4.2. Datos Reales	68
4.2.1. Reconstrucción de Computadora - IMCA	68
4.2.2. Reconstrucción de Despertador	69
4.3. Conclusiones y Trabajos Posteriores	69
Referencias	75

Introducción

En este trabajo, estudiaremos el problema de reconstrucción a partir de múltiples vistas. Este problema consiste básicamente en obtener, a partir de un conjunto de fotografías de alguna escena, obtener información de las cámaras fotográficas junto con información tridimensional de la escena tomada, todo esto sin información adicional acerca de la cámara (es decir, posición, longitud focal, etc.)

El fundamento teórico usado estará dado en el Capítulo 1. En la sección 2, haremos un estudio genérico sobre la geometría proyectiva, generalizando conceptos básicos del álgebra lineal. La geometría proyectiva nos servirá en la sección 3, de manera natural, para el estudio del modelo matemático de cámara fotográfica, llamado cámara pinhole. Este tipo de cámaras son usadas desde la edad media, siendo uno de los primeros en estudiarla el italiano Filippo Brunelleschi en 1425, cuyo interés radicaba en recrear fielmente las escenas que pintaba. Del estudio de las cámaras pinhole, surgieron las bases de la geometría proyectiva. Así, veremos que una cámara pinhole está representada por una matriz 3×4 , la cual lleva el espacio proyectivo tridimensional en el espacio proyectivo bidimensional.

En el capítulo 2, estudiamos la reconstrucción para el caso particular de dos vistas. Ésto tiene su motivación en la sensación de profundidad que tenemos al tener dos ojos. Formalmente, veremos que la relación existente entre dos imágenes de una misma escena está dada por una matriz 3×3 , a la cual llamaremos *matriz fundamental*. El estudio de la matriz fundamental fue desarrollado en 1992 por Olivier Faugeras y Richard Hartley. Este último, propuso en 1993 un método con el cual podemos

obtener la matriz fundamental sin conocer información de las cámaras que tomaron las imágenes. Más aún, a partir de la matriz fundamental podemos reconstruir, salvo una ambigüedad que determinaremos, las matrices de cámara, y junto con estas parte de la escena 3D.

En el capítulo 3, generalizaremos lo estudiado en el capítulo 2, para el caso de una cantidad arbitraria de cámaras. Mostraremos que para este caso, la ambigüedad obtenida para el caso de 2 cámaras se mantiene. Además estudiaremos métodos genéricos de reconstrucción. Luego, en el capítulo 4, estudiaremos el comportamiento experimental de estos métodos. Dividiremos este capítulo en 2 partes, aplicación de los métodos sobre datos virtuales, es decir, generamos una escena 3D sencilla y un conjunto de cámaras con parámetros conocidos, y reconstruimos con las imágenes generadas por este sistema; y aplicación de los métodos sobre datos reales, es decir, reconstruimos usando imágenes tomadas por cámaras fotográficas reales.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Principios de Algebra

1.1.1. Clases de Equivalencia

Definición. Sea A y B conjuntos no vacíos. Diremos que \mathcal{R} es una **relación** de A en B si $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset A \times B$. Además, si $(x, y) \in \mathcal{R}$ diremos que x e y están \mathcal{R} -relacionados, y lo denotaremos por $x\mathcal{R}y$.

En particular, si $A = B$ diremos simplemente que la relación está definida sobre A . En adelante, consideraremos solamente este caso.

Definición. Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A . Entonces diremos que \mathcal{R} es una relación:

1. **Reflexiva:** Si para todo $x \in A$ se tiene que $x\mathcal{R}x$.
2. **Simétrica:** Si para todo $x, y \in A$ con $x\mathcal{R}y$ se cumple que $y\mathcal{R}x$.
3. **Transitiva:** Si para todo $x, y, z \in A$ con $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ se tiene que $x\mathcal{R}z$.

Si una relación cumple las tres propiedades anteriores sera denominada **relación de equivalencia**.

Dado un conjunto A no vacío y \mathcal{R} una relación de equivalencia sobre A . Dado $x \in A$ definiremos $[x] := \{y \in A : x\mathcal{R}y\}$ y la denominaremos como la **clase** de x . Observe que $[x]$ es no vacío para todo $x \in A$, pues $x \in [x]$. Así podemos establecer la siguiente definición.

Definición. Dado una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre A conjunto no vacío, definimos el **conjunto cociente de A con \mathcal{R}** como

$$\frac{A}{\mathcal{R}} := \{[x] : x \in A\}.$$

Es fácil ver que $\frac{A}{\mathcal{R}}$ constituye una partición de A , es decir:

1. Para todo $x \in A$ se tiene que $[x] \neq \emptyset$.
2. $\bigcup_{x \in A} [x] = A$.
3. $[x] = [y]$ si y sólo si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

A manera de ejemplo estudiaremos el caso cuando $A = \mathcal{V}$ es un espacio vectorial real. Dado \mathcal{H} un subespacio vectorial de \mathcal{V} , consideremos la relación definida por $x \equiv y$ si $x - y \in \mathcal{H}$. Es claro que \equiv es una relación de equivalencia. Puesto que \equiv depende del subespacio \mathcal{H} elegido denotaremos a $\frac{\mathcal{V}}{\equiv}$ como $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{H}}$.

Al conjunto $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{H}}$ le podemos dar de manera natural una estructura de espacio vectorial real. Definimos la suma y el producto por un escalar en $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{H}}$ como $[x] + [y] = [x + y]$ y $\lambda \cdot [x] = [\lambda \cdot x]$ respectivamente. Es fácil ver que ambas operaciones están bien definidas, y que $\left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{H}}, +, \cdot\right)$ es un espacio vectorial real.

1.1.2. Descomposición en Valores Singulares

La descomposición en valores singulares de una matriz es una factorización matricial con sendas aplicaciones. Empezaremos con el siguiente teorema.

Teorema 1.1 (Valores Singulares). Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces existen matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y una matriz diagonal $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A = USV^T$.

Demostración: Consideremos el caso $n \leq m$. Sea la matriz $H = A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es claro que H es simétrica y semidefinida positiva, pues

$$H^T = (A^T A)^T = A^T A^{TT} = A^T A = H,$$

y

$$x^T H x = x^T (A^T A) x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego los autovalores de H son reales no negativos. Sean $\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\}$ tales autovalores. Desde que $r = \text{ran}(H) \leq n$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$\sigma_1^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > \sigma_{r+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = 0.$$

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ los autovectores de H . Como H es simétrica entonces podemos elegirlos de tal manera que sean ortonormales, y que cumplan $Hv_i = \sigma_i^2 v_i$. Luego,

$$\|Av_i\|^2 = (Av_i)^\top (Av_i) = v_i^\top H v_i = v_i^\top \sigma_i^2 v_i = \sigma_i^2.$$

Es decir, $Av_i = 0$ si y sólo si $\sigma_i^2 = 0$. Luego $Av_i = 0$ cuando $i \geq r + 1$. Definamos la matriz $V = [v_1, \dots, v_n]$. Es claro que $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ahora, para $i \in \{1, \dots, r\}$, definamos

$$u_i = \sigma_i^{-1} Av_i.$$

El conjunto $\{u_1, \dots, u_r\}$ es ortonormal pues

$$u_j^\top u_i = (\sigma_j^{-1} v_j^\top A^\top)(\sigma_i^{-1} Av_i) = (\sigma_j \sigma_i)^{-1} (v_j^\top A^\top Av_i) = (\sigma_j \sigma_i)^{-1} (v_j^\top \sigma_i^2 v_i) = \delta_{ij}.$$

Escogiendo vectores u_i tales que $\{u_1, \dots, u_m\}$ sea ortonormal, definamos $U = [u_1, \dots, u_m]$, y $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} U^\top AV &= [u_1, \dots, u_m]^\top A[v_1, \dots, v_n] \\ &= [u_1, \dots, u_m]^\top [Av_1, \dots, Av_n] \\ &= [u_1, \dots, u_m]^\top [\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_r u_r, 0, \dots, 0] \\ &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

De donde se sigue que $A = USV^\top$.

Para el caso $n > m$, aplicando el resultado anterior para A^\top , tenemos que si $A^\top = \hat{U} \hat{S} \hat{V}^\top$, entonces $A = \hat{V} \hat{S}^\top \hat{U}^\top$. Luego, bastará considerar $U = \hat{V}$, $S = \hat{S}^\top$ y $V = \hat{U}$. \square

Al conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ lo llamaremos **valores singulares de A** , y la terna $\{U, V, S\}$ será llamada **descomposición en valores singulares de A** .

Observación. La matriz S en el teorema anterior tiene la forma

$$S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0_{m-r \times r} & & \\ & & & & 0_{m-r \times n-r} & \end{array} \right].$$

Sin embargo escribimos $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ por simplicidad.

De este teorema, se desprenden varios corolarios.

Corolario. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $\text{ran}(A) = r$. Entonces existen matrices con columnas ortonormales $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$, y una matriz diagonal invertible $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$ tal que $A = USV^\top$.

Corolario. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces existen matrices ortogonales U y V en $\mathbb{R}^{n \times n}$, y una matriz diagonal $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A = USV^\top$.

Corolario (Descomposición de Matrices Simétricas). Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica. Entonces existe matriz ortogonal U y matriz diagonal S en $\mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $A = USU^\top$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, denotaremos por $I(\alpha)$ a la matriz

$$I(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Corolario (Descomposición de Matrices Antisimétricas). Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ antisimétrica. Entonces existe matriz ortogonal U y matriz diagonal por bloques S de la forma $S = \text{diag}(I(\sigma_1), \dots, I(\sigma_r), 0, \dots, 0)$ en $\mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $A = USU^\top$.

Observaciones.

1. $\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2\}$ son autovalores tanto de $A^\top A$ como de AA^\top . Luego A y A^\top tienen los mismos valores singulares. Además, v_i y u_i son autovectores asociados a σ_i^2 de $A^\top A$ y AA^\top , respectivamente.
2. La observación anterior implica que si A se descompone como $A = USV^\top$, entonces la descomposición en valores singulares de A^\top es $A^\top = VSU^\top$.

1.1.3. Pseudoinversa de una Matriz

Una de las principales aplicaciones del teorema 1.1 es la noción de pseudoinversa.

Definición. Dada una matriz $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definimos la **pseudoinversa** de D como la matriz $D^+ = \text{diag}(d_1^{-1}, \dots, d_r^{-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. En general, la **pseudoinversa** de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, está dada por

$$A^+ = VS^+U^T,$$

donde U , V y S son la descomposición en valores singulares de A , es decir $A = USV^T$.

Probaremos algunas propiedades inmediatas de la pseudoinversa de una matriz

Proposición 1.1. Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se cumple

1. $A^{++} = A$.
2. $A^{+\top} = A^{\top+}$.
3. $(AA^T)^+ = A^{+\top}A^+$.
4. $A^+ = A^T(AA^T)^+$

Demostración:

1. Es claro desde que VS^+U^T es la descomposición en valores singulares de A^+ , y $D^{++} = D$ cuando D es una matriz diagonal.
2. Si $A = USV^T$, entonces $A^T = VS^T U^T$. Luego $A^{\top+} = US^{\top+}V^T$. Además $A^{+\top} = (VS^+U^T)^T = US^{+\top}V^T$. Luego se tendrá el enunciado si probamos que $S^{+\top} = S^{\top+}$, lo cual es obvio, pues tanto S como S^+ son matrices diagonales.
3. Si $A = USV^T$, entonces $AA^T = USS^T U^T$. Luego $(AA^T)^+ = U(SS^T)^+U^T = US^{+\top}S^+U^T$. Como $V^T V = I_n$, entonces $(AA^T)^+ = (US^{+\top}V^T)(VS^+U^T) = A^{+\top}A^+$.
4. Se cumple que $A^T(AA^T)^+ = A^T A^{+\top} A^+$. Luego, si $A = USV^T$, entonces

$$A^T A^{+\top} A^+ = (VSU^T)(US^+V^T)(VS^+U^T) = VSS^+S^+U^T,$$

Como $SS^+ = S^+S = \text{diag}(I_r, 0)$ con $r = \text{ran}(A)$, entonces $A^T(AA^T)^+ VS^+U^T = A^+$. □

Observación. Observe que cuando A es invertible, entonces $A^+ = A^{-1}$.

Mostraremos algunas propiedades de la pseudoinversa de una matriz, junto con la unicidad, en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Moore-Penrose). Dada cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existe una única matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que

1. $AXA = A$.
2. $XAX = X$.
3. $(AX)^\top = AX$.
4. $(XA)^\top = XA$.

A estas condiciones se les denomina **condiciones de Penrose**.

Demostración: Veamos que $X = A^+$ cumple con lo establecido en el teorema. Supongamos que A se descompone en valores singulares como $A = USV^\top$, entonces

1. $AXA = (USV^\top)(VS^+U^\top)(USV^\top) = USV^\top = A$.
2. $XAX = (VS^+U^\top)(USV^\top)(VS^+U^\top) = VS^+U^\top = X$.
3. $(AX)^\top = X^\top A^\top = (US^+V^\top)(VSU^\top) = US^+SU^\top = USS^+U^\top = (USV^\top)(VS^+U^\top) = AX$.
4. $(XA)^\top = A^\top X^\top = (VSU^\top)(US^+V^\top) = VSS^+V^\top = VS^+SV^\top = (VS^+U^\top)(USV^\top) = XA$.

Para probar la unicidad, supongamos que Y sea otra matriz que cumpla las condiciones de Penrose. Entonces

$$\begin{aligned}
 X &= XAX = X(AYA)X \\
 &= X(AYA)Y(AYA)X \\
 &= (XA)^\top(YA)^\top Y(AY)^\top (AX)^\top \\
 &= (A^\top X^\top)(A^\top Y^\top)Y(Y^\top A^\top)(X^\top A^\top) \\
 &= (AXA)^\top(Y^\top Y Y^\top)(AXA)^\top \\
 &= A^\top(Y^\top Y Y^\top)A^\top \\
 &= (YA)^\top Y(AY)^\top \\
 &= YAYAY = YAY = Y
 \end{aligned}$$

Con lo que queda probado el teorema. □

1.1.4. Problema de Mínimos Cuadrados

El problema de mínimos cuadrados consiste en resolver, dado $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \quad (1.1)$$

Observe que este problema generaliza el problema de hallar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$, pues si este problema tiene solución, entonces su solución también resuelve (1.1). Más aun, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que

$$A^\top(Ax - b) = 0,$$

entonces x resuelve el problema de mínimos cuadrados.

Demostración: Considere

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2}(Ax - b)^\top(Ax - b) = \frac{1}{2}x^\top A^\top Ax - x^\top Ab + \frac{1}{2}b^\top b.$$

Es claro que el jacobiano y el hessiano de f estan dados por $Jf(x) = A^\top(Ax - b)$ y $Hf(x) = A^\top A$. Como el hessiano $Hf(x)$ es semidefinida positiva, entonces f tiene un mínimo global en los puntos x tales que $Jf(x)$ es cero. Esto prueba la proposición. \square

Como aplicación de la noción de pseudoinversa, probaremos la siguiente proposición.

Proposición 1.3. Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, consideremos el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Ax - b\| \leq \|Ay - b\|, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n\},$$

de soluciones del problema (1.1). Luego $x_0 = A^+b \in S$, y además cumple

$$\|x_0\| < \|x\|$$

para todo $x \in S$.

Demostración: Sea $A = USV^\top$ la descomposición en valores singulares de A y $r = \text{ran}(A)$. Luego, al ser U ortogonal, y haciendo $c = U^\top b$ y $y = V^\top x$, entonces

$$\|Ax - b\| = \|USV^\top x - b\| = \|U^\top(USy - b)\| = \|Sy - c\|$$

Como V es ortogonal, luego es invertible, entonces

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| \equiv \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Sy - c\|,$$

es decir, si y es solución de $\min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Sy - c\|$, entonces $x = Vy$ es solución de $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$, y además $\|x\| = \|y\|$.

Observe ahora que dado $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\|Sy - c\|^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i y_i - c_i)^2 + \sum_{i=r+1}^m c_i^2.$$

El valor anterior toma su mínimo cuando $y_i = \frac{c_i}{\sigma_i}$ si $1 \leq i \leq r$, y $y_i \in \mathbb{R}$ cualesquiera, cuando $r + 1 \leq i \leq n$. Entre todos estos valores de $y \in \mathbb{R}^n$, el de menor norma es

$$y_0 = \left(\frac{c_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{c_r}{\sigma_r}, 0, \dots, 0 \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Es claro que $y_0 = S^+c$. Luego $x_0 = Vy_0 = VS^+c = VS^+U^Tb = A^+b$ es solución del problema (1.3). Además, x_0 es la solución de norma mínima de (1.3), pues en caso contrario se contradeciría la minimalidad de y_0 . \square

Para el caso en el que $b = 0$, el problema de mínimos cuadrados se plantea de la siguiente manera, dado $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\min_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{1.2}$$

De manera similar a la proposición anterior, tenemos

Proposición 1.4. Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la solución del problema (1.2) está dado por el autovector asociado al menor autovalor de $A^T A$.

Demostración: De la demostración del teorema 1.1, tenemos que A puede ser descompuesto como $A = USV^T$, con $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ y $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$. Es claro, por un argumento análogo al expuesto en la demostración de la proposición 1.3 que $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| \equiv \min_{\|y\|=1} \|Sy\|$. Observe que

$$\|Sy\|^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 y_i^2,$$

es fácil ver que lo anterior alcanza su mínimo cuando $y_0 = (0, \dots, 0, 1)$, pues

$$\|Sy\|^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 y_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \sigma_n^2 y_i^2 = \sigma_n^2 \|y\|^2 = \sigma_n^2 = \|Sy_0\|^2.$$

Luego la solución del problema (1.2) esta dada por $x = V^T y_0 = v_n$, el cual es el autovector asociado a σ_n^2 , el menor autovalor de $A^T A$. \square

1.2. Geometría Projectiva

1.2.1. Espacios Projectivos

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial real. Sobre $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ consideremos la relación \sim , definida por $x \sim y$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tal que $x = \lambda y$. Claramente \sim es de una relación de equivalencia.

Definición. Al conjunto cociente

$$\frac{\mathcal{V} \setminus \{0\}}{\sim}$$

lo llamaremos **espacio projectivo asociado a \mathcal{V}** y lo denotaremos por $\mathbb{P}(\mathcal{V})$.

Para el caso particular en que $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{n+1}$, denotaremos a $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ como $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ y lo denominaremos **espacio projectivo n -dimensional**. Además, para el caso particular en que $n = 2$ llamaremos a $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ como el **plano projectivo**. Para el caso $n = 3$ llamaremos a $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ como el **espacio projectivo**. En lo que sigue, sólo consideraremos los espacios projectivos n -dimensionales.

Observaciones.

1. Los elementos del espacio projectivo son rectas que pasan por el origen sin tener en cuenta este.
2. Consideremos la función de paso al cociente:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \pi(x) \end{aligned}$$

donde $\pi(x)$ es el conjunto $\pi(x) = \{y : y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

En adelante, cometeremos el abuso de notación de escribir

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^n,$$

pese a que π no está definida en 0.

Introduciremos ahora un concepto análogo al de base de un espacio vectorial en el espacio proyectivo $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$.

Definición. Diremos que el par $(\{\pi(v_1), \dots, \pi(v_{n+1})\}, \pi(U))$ es una **base proyectiva** de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, si v_1, \dots, v_{n+1} es una base de \mathbb{R}^{n+1} , y $U = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i v_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ implica $\mu_i \neq 0$ para todo i . Al conjunto $\{\pi(v_i)\}_i \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ lo denominaremos **sistema de referencia** de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ y a $\pi(U) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ lo llamaremos **unidad de la base**.

Observaciones.

1. El hecho que si $U = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i v_i$ implique $\mu_i \neq 0$ para todo i , es equivalente a decir que, para todo i , el conjunto $\{U\} \cup \{v_1, \dots, v_{n+1}\} \setminus \{v_i\}$ es linealmente independiente.
2. Si $\{\pi(v_i)\}_i$ es el sistema de referencia de alguna base, entonces $\{\lambda_i v_i\}_i$ es una base de \mathbb{R}^{n+1} , para $\lambda_i \neq 0$ cualesquiera. Esto impide extender naturalmente la representación en coordenadas bajo una base proyectiva. Es aquí donde la unidad de la base juega un papel importante.

Proposición 1.5. Dado una base proyectiva $(\{\pi(v_i)\}_i, \pi(U))$, existe una única base $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} tal que

$$\pi(v_i) = \pi(e_i) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n+1, \text{ y} \quad (1.3)$$

$$\pi(U) = \pi(e_1 + \dots + e_{n+1}). \quad (1.4)$$

La unicidad de la base se interpreta de la siguiente manera: Si $\{e'_i\}_i$ es otra base que cumpla el teorema, entonces existe $\alpha \neq 0$ tal que $e_i = \alpha e'_i$, para todo i .

Demostración: Como $\{v_i\}_i$ es base de \mathbb{R}^{n+1} entonces existen $\mu_i \in \mathbb{R}$ todos no nulos tales que

$$U = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i v_i.$$

Consideremos $e_i = \mu_i v_i$. Es claro que los e_i cumplen las condiciones (1.3) y (1.4) del teorema.

Ahora sea $\{e'_i\}_i$ otra base de \mathbb{R}^{n+1} que cumpla (1.3) y (1.4). Entonces, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\sum_i e_i = \alpha \sum_i e'_i$, y para todo i existe $\alpha_i \neq 0$ tal que $e_i = \alpha_i e'_i$. Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i e_i - \sum_i e_i \\ &= \alpha \sum_i e'_i - \sum_i \alpha_i e'_i \\ &= \sum_i (\alpha - \alpha_i) e'_i. \end{aligned}$$

Esto implica que $\alpha = \alpha_i$ y que $e_i = \alpha e'_i$, para todo i . □

A la base $\{e_i\}_i$ la denominaremos **base normalizada asociada a la base** $(\{\pi(v_i)\}_i, \pi(U))$.

Así, podemos dotar a $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ de coordenadas, de la siguiente manera: dada una base proyectiva $(\{\pi(v_i)\}_i, \pi(U))$ de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, fijemos $\{e_i\}_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ alguna base normalizada asociada a este. Sea $\pi(x) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$, luego existen escalares no todos nulos x_i tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i.$$

Denotaremos a $\pi(x)$ como el vector columna

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}_{\{e_i\}_i} = [x_1 : \dots : x_{n+1}]_{\{e_i\}_i},$$

y llamaremos a los x_i como las **coordenadas homogéneas** de $\pi(x)$. Como $\pi(x) = \pi(\lambda x)$ para todo $\lambda \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}_{\{e_i\}_i} = \pi(x) = \pi(\lambda x) = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_{n+1} \end{bmatrix}_{\{e_i\}_i}$$

Lo anterior se cumple para toda base normalizada asociada a la base proyectiva elegida. Probaremos ahora que dicha notación no depende de la base normalizada elegida. Sea $\{f_i\}_i$ alguna otra base normalizada asociada a $(\{\pi(v_i)\}_i, \pi(U))$. Luego, existe $\lambda \neq 0$ tal

que $e_i = \lambda f_i$, para todo i . Entonces, dado $\pi(x) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda x_i) f_i.$$

Luego,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}_{\{e_i\}_i} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_{n+1} \end{bmatrix}_{\{f_i\}_i} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}_{\{f_i\}_i},$$

es decir, las coordenadas homogéneas de $\pi(x)$ solo dependen de la base proyectiva elegida de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$.

Observaciones.

1. Sea $\{e_i\}_i$ la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} , al sistema de referencia $\{\pi(e_i)\}_i$ con unidad $\pi(1, 1, \dots, 1)$ lo denominaremos **sistema canónico**.
2. Podemos dividir a $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ en dos partes disjuntas:

$$\mathbb{P}\mathbb{R}^n = \{x = [x_1 : \dots : x_{n+1}] / x_{n+1} \neq 0\} \cup \{x = [x_1 : \dots : x_n : 0]\}. \quad (1.5)$$

Definición. Al conjunto $\{x = [x_1 : \dots : x_{n+1}] / x_{n+1} \neq 0\}$ lo llamaremos **espacio afín de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$** y lo denotaremos por $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, y al conjunto $\{x = [x_1 : \dots : x_n : 0]\}$ lo llamaremos **hiperplano ideal** y lo denotaremos por Π_∞^n .

Observaciones.

1. Si $n = 2$, a Π_∞^2 lo llamaremos **recta ideal** o **recta del infinito** y la denotaremos por l_∞ . Si $n = 3$, a Π_∞^3 lo llamaremos **plano ideal** o **plano del infinito** y la denotaremos por Π_∞ .
2. Existe una biyección natural entre \mathbb{R}^n y $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, a saber:

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1] \end{aligned}$$

Como $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathbb{P}\mathbb{R}^n$, en adelante siempre consideraremos que $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^n$.

3. Si $\pi(x) = [x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}] \in \mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, $\pi(x)$ se dirá **afínmente normalizado**, si $x_{n+1} = 1$.

Con respecto a la última observación, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.6. A toda base B de \mathbb{R}^n es posible completarla a una base proyectiva de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, tal que Π_∞^n contenga a B .

Demostración: Dada $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de \mathbb{R}^n , definamos $\hat{v}_i = (v_i, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\hat{v}_{n+1} = (\bar{0}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $U = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{v}_i$. Es claro que $\mathcal{B} = (\{\pi(v_i)\}_i, \pi(U))$ es una base de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ y cumple las condiciones de la proposición. \square

Definición. Un conjunto $V \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ lo llamaremos **subespacio proyectivo de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$** , si existe $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ subespacio vectorial con $\dim M \geq 2$, tal que $V = \pi[M]$. Además, la **dimensión** de V estará dada por $\dim V = \dim M - 1$.

Observaciones.

1. Si M es un subespacio vectorial de dimensión 1, $\pi[M]$ es un elemento de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$.
2. Sea $V \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^n$. Si se tiene que $\dim V = 1$, a V lo llamaremos **recta**. Para el caso en que $\dim V = 2$ llamaremos a V como **plano**. En general, si $\dim V = n - 1$, llamaremos a V como **hiperplano**.
3. En particular, $V = \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n .

Definición. Sea $S \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ no vacío. Diremos que S es **proyectivamente independiente** si para todo subconjunto finito de S , digamos $\{\pi(v_1), \dots, \pi(v_r)\}$, el conjunto $\{v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es linealmente independiente.

Proposición 1.7. Sea $\{\pi(v_1), \dots, \pi(v_{r+1})\}$ proyectivamente independiente en $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, entonces existe un único subespacio proyectivo M de dimensión r de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, tal que $\pi(v_i) \in M$, para todo $i \in \{1, \dots, r + 1\}$.

Demostración: Bastará tomar $M = \pi[\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_{r+1}\}]$, pues M cumple con lo establecido en la proposición. Sea N otro subespacio de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ tal que $\dim(N) = r$ y $\pi(v_i) \in N$, para todo i . Luego existe V subespacio de \mathbb{R}^{n+1} de dimensión r tal que $N = \pi[V]$. Como $\pi(v_i) \in \pi[V]$ para todo i , entonces para cada i , existe $u_i \in V$ tal que $\pi(u_i) = \pi(v_i)$. Esto implica que $v_i \in V$, para todo i . Luego, como los $\{v_i\}_i$ son linealmente independientes, entonces $\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_{r+1}\} = V$. Luego $M = N$, y la proposición está probada. \square

Prestaremos especial interés a los hiperplanos de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$. Por eso daremos varias caracterizaciones de estos.

Consideremos el espacio vectorial dual de \mathbb{R}^{n+1} , denotado por \mathbb{R}^{n+1*} , el cual está conformado por las funcionales lineales $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. A cada $f \in \mathbb{R}^{n+1*} \setminus \{0\}$, le podemos asociar el hiperplano lineal

$$H_f = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}.$$

Observe que para cualquier $\lambda \neq 0$, $H_{\lambda f} = H_f$, es decir, a cada recta que pasa por el origen de \mathbb{R}^{n+1*} podemos asignarle un único hiperplano H . Luego a cada $\pi(f) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1*})$ podemos asignarle un único hiperplano $\mathcal{H} = \pi[H]$ en $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, sea el hiperplano $\mathcal{H} = \pi[H]$ de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$. Como $\dim(H) = n$ en \mathbb{R}^{n+1} , existe $v_H \in \mathbb{R}^{n+1}$ no nulo tal que

$$H = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v_H, y \rangle = 0\}.$$

Es decir, al hiperplano lineal H podemos asignarle la funcional lineal $f \in \mathbb{R}^{n+1*}$ definida por $f(x) = \langle v_H, x \rangle$. Como para todo $\lambda \neq 0$ se tiene que $H = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : (\lambda f)(y) = 0\}$, entonces a cada hiperplano lineal H de \mathbb{R}^{n+1} le podemos asociar una única recta en \mathbb{R}^{n+1*} . Luego, a cada hiperplano \mathcal{H} de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ le podemos asociar un único elemento $\pi(f) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1*})$.

Así, podemos hacer la siguiente definición:

Definición. Al conjunto de hiperplanos en $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ lo denotaremos $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$ y lo llamaremos **Espacio Projectivo Dual n -dimensional**.

Hemos probado entonces que podemos considerar $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n*} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1*})$. Sea ahora $\mathcal{H} = \pi[H]$ un hiperplano arbitrario de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, con H hiperplano lineal de \mathbb{R}^{n+1} . Por lo comentado anteriormente, existe $f \in \mathbb{R}^{n+1*}$ tal que

$$H = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} : f(w) = 0\}.$$

Por el teorema de Riesz, existe un vector $v_f \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(y) = \langle v_f, y \rangle$ para todo $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, si $\pi(x) = [x_1 : \dots : x_{n+1}]^\top \in \mathcal{H}$, se tiene que $x \in H$, lo cual implica que $\langle v_f, x \rangle = 0$. De donde, si consideramos $\pi(v_f) = [v_1 : \dots : v_{n+1}] \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$, tendremos que \mathcal{H} es caracterizado de la forma:

$$\mathcal{H} = \{\pi(w) = [w_1 : \dots : w_{n+1}] \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n : v_1 w_1 + \dots + v_{n+1} w_{n+1} = 0\}. \quad (1.6)$$

Denotando a $v_1 w_1 + \dots + v_{n+1} w_{n+1}$ como $\pi(w)^\top \cdot \pi(v_f)$, hemos probado que para cada

hiperplano $\mathcal{H} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$ existe $\pi(v)_{\mathcal{H}} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{H} = \{\pi(w) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n : \pi(w)^\top \cdot \pi(v)_{\mathcal{H}} = 0\}.$$

A este $\pi(v)_{\mathcal{H}} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ lo llamaremos **vector normal de \mathcal{H}** . Desde que lo recíproco también se cumple, podemos afirmar que $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n*} = \mathbb{P}\mathbb{R}^n$.

Lo anterior nos permite dar una caracterización adicional para los hiperplanos de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{H} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$. Por la ecuación (1.5) podemos dividir a \mathcal{H} en dos partes disjuntas: $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}$ y $\Pi_\infty^n \cap \mathcal{H}$. Luego la ecuación (1.6) implica

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{[w_1 : \dots : w_n : 1] : v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = -v_{n+1}\} \\ &\cup \{[w_1 : \dots : w_n : 0] : v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = 0\}. \end{aligned}$$

Definiendo $v := (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, por una observación anterior podemos escribir a $\mathcal{H}_{\text{aff}} := \mathcal{H} \cap \mathbb{A}(\mathbb{R}^n) = \{[w_1 : \dots : w_n : 1] : v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = -v_{n+1}\}$ como

$$\mathcal{H}_{\text{aff}} = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = -v_{n+1}\},$$

el cual es un hiperplano de \mathbb{R}^n . Es decir que todo hiperplano de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ es la unión de un hiperplano de \mathbb{R}^n con puntos del hiperplano ideal.

Recíprocamente, a todo hiperplano H de \mathbb{R}^n podemos ‘completarlo’ a un hiperplano \mathcal{H} de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$. Como H es un hiperplano de \mathbb{R}^n , existen $v \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$ tales que

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle v, x \rangle = d\}.$$

Luego, haciendo $v_H := (v, -d) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es fácil ver que

$$\mathcal{H} := \{\pi(w) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n : \pi(v_H)^\top \pi(w) = 0\}$$

es tal que $\mathcal{H}_{\text{aff}} = H$.

1.2.2. Transformaciones Proyectivas

Sea $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una transformación lineal inyectiva, luego $n \geq m$, y ϕ lleva rectas de \mathbb{R}^{n+1} a rectas de \mathbb{R}^{m+1} . Esto nos permite definir una aplicación de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$, que llamaremos $\pi(\phi)$, de la siguiente manera: si $\pi(x) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ entonces

$$\pi(\phi)(\pi(x)) := \pi(\phi(x)).$$

Vemos que si $\pi(y) = \pi(x)$, entonces $y = \lambda x$. Luego

$$\begin{aligned}\pi(\phi)(\pi(y)) &= \pi(\phi(y)) = \pi(\phi(\lambda x)) \\ &= \pi(\lambda\phi(x)) = \pi(\phi(x)) \\ &= \pi(\phi)(\pi(x)),\end{aligned}$$

es decir $\pi(\phi)$ no depende del representante tomado en la clase de equivalencia.

Definición. Diremos que φ es una **transformación proyectiva** de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$, si existe $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ transformación lineal inyectiva tal que $\pi(\phi) = \varphi$. En este caso diremos que φ es la **projectivización** de ϕ . Además, si $m = n$, diremos que φ es una **homografía**.

Podemos generalizar la definición anterior para el caso de las transformaciones lineales no inyectivas. En este caso, el dominio de la projectivización no sera todo el espacio proyectivo.

Definición. Sea $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ no inyectiva y no nula, y $\ker(\phi)$ su núcleo. Así, definiremos la **projectivización** de ϕ , denotada por $\pi(\phi)$ como

$$\pi(\phi)(\pi(x)) := \pi(\phi(x)),$$

para todo $\pi(x) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n \setminus \pi[\ker(\phi)]$.

Observación. Si $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ son transformaciones lineales tales que $\phi_1 = \lambda\phi_2$ para algún $\lambda \neq 0$ entonces $\pi(\phi_1) = \pi(\phi_2)$.

Así podemos definir el concepto de núcleo e imagen de una transformación proyectiva.

Definición. Sea $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una transformación lineal no nula y $\varphi : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^m$ su projectivización. Definimos el **núcleo** de φ como el vacío si ϕ es inyectiva, o como el conjunto $\pi[\ker(\phi)]$, cuando ϕ sea no inyectiva. Denotaremos a este conjunto como $\ker(\varphi)$.

Además definimos la **imagen** de φ como $\pi[\mathbb{P}\mathbb{R}^n \setminus \ker(\varphi)]$, y lo denotaremos por $\text{Im}(\varphi)$.

Observaciones.

1. Similarmente al caso de la función de paso al cociente, si $\varphi : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \setminus \ker(\varphi) \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^m$ es una transformación proyectiva, cometeremos el abuso de notación de escribir $\varphi : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^m$, pese a que φ no está definida en $\ker(\varphi)$.

2. Cuando el núcleo de una transformación proyectiva de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$ es no vacío, o es un elemento de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ o es un subespacio de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$.
3. La imagen de una transformación proyectiva es un subespacio de $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$. Así, si $\varphi : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^m$ es una transformación proyectiva con $\ker(\varphi) = \emptyset$, podemos considerar $\varphi : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}(\varphi)$ como una homografía.
4. Una homografía es la proyectivización de un isomorfismo.

En adelante, obviaremos el uso de π para denotar pertenencia a $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ siempre que no se presenten ambigüedades. En todo caso también utilizaremos la siguiente notación: utilizaremos el símbolo \simeq para denotar igualdad en espacios proyectivos y el símbolo $=$ para denotar igualdad en espacios euclidianos. Observe que $=$ implica \simeq .

Como la imagen de una transformación proyectiva es un subespacio de un espacio proyectivo, al igual que en el caso de transformaciones lineales, podemos definir la noción de rango de una transformación proyectiva.

Definición. Dada una transformación proyectiva φ , el **rango** de φ será dado por $\text{ran}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi))$.

Definición. Dos subconjuntos S y S' de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$ respectivamente, se dirán **proyectivamente equivalentes**, si existe una homografía $\varphi : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^m$ tal que $\varphi[S] = S'$.

Proposición 1.8. Todo $\mathcal{H} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$ es proyectivamente equivalente a $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n-1}$.

Demostración: Sea $\mathcal{H} = \pi[H]$ un hiperplano de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, luego H es un hiperplano lineal de \mathbb{R}^{n+1} . Entonces existe $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ inyectiva tal que $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow H$ es un isomorfismo. Luego la homografía $\varphi = \pi(\phi) : \mathbb{P}\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathcal{H}$ es tal que $\varphi[\mathbb{P}\mathbb{R}^{n-1}] = \mathcal{H}$.
□

De manera análoga a las transformaciones lineales, podemos definir la matriz asociada a una transformación proyectiva. Sean $\mathcal{B} = (\{\pi(e_j)\}_{j=1}^{n+1}, \pi(U))$ y $\hat{\mathcal{B}} = (\{\pi(\hat{e}_i)\}_{i=1}^{m+1}, \pi(\hat{U}))$ bases de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$ respectivamente. Supongamos que $B = \{e_j\}_j$ y $\hat{B} = \{\hat{e}_i\}_i$ sean bases normalizadas asociadas a \mathcal{B} y $\hat{\mathcal{B}}$ respectivamente. Sea $\varphi = \pi(\phi) : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^m$ una transformación proyectiva. Diremos que $A \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$ es la **matriz asociada** a φ en los sistemas de referencia \mathcal{B} y $\hat{\mathcal{B}}$ si A es la matriz asociada a ϕ en las bases B y \hat{B} .

Observación. La matriz asociada a una transformación proyectiva no es única, pues estas dependen de las bases normalizadas elegidas. Sin embargo, si A y A' son matrices

asociadas a una transformación proyectiva φ , entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $A' = \lambda A$. En este caso denotaremos que $A \simeq A'$.

De lo anterior, es claro que las matrices de $\mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$, definen transformaciones lineales de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$.

Definición. Diremos que una homografía $\varphi : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ es una **transformación afín**, si $\varphi[\Pi_\infty^n] = \Pi_\infty^n$.

Proposición 1.9. Sea $\varphi : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ sea una homografía, y $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ su matriz asociada en alguna base proyectiva de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, la cual expresaremos de la forma

$$M \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline p^\top & s \end{array} \right],$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t, p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $s \in \mathbb{R}$. Entonces φ es afín si, y sólo si, $p = 0$, A es invertible y $s \neq 0$.

Demostración: Supongamos que φ es afín. Si $p \neq 0$, entonces considerando $q = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty^n$, tenemos que

$$Mq \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline p^\top & s \end{array} \right] \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ap \\ p^\top p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|p\|^2} Ap \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}^n).$$

Luego $p = 0$. Ahora, como M es invertible, entonces $s \neq 0$ y A es invertible. Recíprocamente, si $p = 0$, A es invertible y $s \neq 0$, entonces M tiene la forma

$$M \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline 0^\top & s \end{array} \right].$$

Es claro que M lleva elementos de Π_∞^n en elementos de Π_∞^n , y elementos de $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ en elementos de $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba la proposición. \square

Observación. Veamos como actúa una transformación afín M sobre los elementos de $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$. Dado $q = \begin{bmatrix} \hat{q} \\ 1 \end{bmatrix}$, con $\hat{q} \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$Mq \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline 0^\top & s \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{q} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\hat{q} + t \\ s \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \frac{1}{s}(A\hat{q} + t) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, una transformación afín es la composición de una transformación invertible, con una traslación y un escalamiento.

1.2.3. Correspondencias Proyectivas

De la misma manera que definimos un análogo de las transformaciones lineales para espacios proyectivos, ahora definiremos un análogo proyectivo para las formas bilineales. Sea $Q : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. A cada $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $Q(x, \cdot)$ no sea idénticamente nula, le asociamos el conjunto:

$$H_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : Q(x, y) = 0\}.$$

Es claro que H_x es un hiperplano lineal. Además, para todo $\lambda \neq 0$, $H_{\lambda x} = H_x$. Es decir, a cada recta que pasa por el origen, le hemos asociado un único hiperplano lineal. Esto motiva la siguiente definición.

Definición. Sea $Q : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal en \mathbb{R}^{n+1} . Llamaremos **correspondencia proyectiva** asociada a Q a la función $\mathcal{Q} : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$, definida como

$$\mathcal{Q}(\pi(x)) := \pi[H_x] = \{\pi(y) : Q(x, y) = 0\} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}.$$

Si vemos a $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$ como $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1*})$, la correspondencia proyectiva asociada a Q es la función

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \mathbb{P}\mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1*}) \\ \pi(x) &\mapsto \pi(f_x) \end{aligned}$$

con $f_x \in \mathbb{R}^{n+1*}$ definida como

$$f_x(y) := Q(x, y).$$

Al igual que el caso de las transformaciones proyectivas, es posible asociar a cada correspondencia proyectiva una matriz. Recordemos que a cada $\mathcal{H} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$ se le puede asociar biunívocamente $\pi(v)_{\mathcal{H}} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^n$, luego, a toda correspondencia proyectiva \mathcal{Q} , la podemos denotar como $\mathcal{Q} : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^n$. Observe que de esta manera, \mathcal{Q} es una transformación proyectiva que lleva elementos de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ en vectores normales de hiperplanos en $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$ (que son elementos de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ según la definición de la sección 1.2.1). Luego, dadas \mathcal{B} y $\hat{\mathcal{B}}$ bases de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, a la correspondencia \mathcal{Q} le asociamos la matriz asociada a \mathcal{Q} visto como transformación lineal.

Ejemplo. Consideremos el producto interno canónico de \mathbb{R}^{n+1} , $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Dado $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$H_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y \rangle = 0\},$$

el cual es el plano normal a x . Así, la correspondencia proyectiva asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ será dada por $\mathcal{J} : \mathbb{P}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}$, definida como

$$\mathcal{J}(\pi(x)) := \pi[H_x] = \{\pi(y) : \langle x, y \rangle = 0\} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n*}.$$

Observe que $\pi(x)$ es el vector normal del hiperplano $\mathcal{J}(\pi(x))$. Luego, si vemos a \mathcal{J} como una función de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ en si mismo, entonces \mathcal{J} es la función identidad.

1.2.4. Geometría en $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$

En esta sección estableceremos resultados sobre los hiperplanos en $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, es decir sobre las rectas en $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, los cuales serán de utilidad en los próximos capítulos.

Fijada una base \mathcal{B} de $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, y dados $\pi(P) = [p_1 : p_2 : p_3]$ y $\pi(Q) = [q_1 : q_2 : q_3]$ en $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ distintos, denotaremos

$$\pi(P) \times \pi(Q) = [p_2q_3 - p_3q_2 : p_3q_1 - p_1q_3 : p_1q_2 - p_2q_1] \in \mathbb{P}\mathbb{R}^2.$$

Observe que $\pi(P) \times \pi(Q) = \pi(P \times Q)$, con $P, Q \in \mathbb{R}^3$. Además, como $\pi(P) \neq \pi(Q)$, entonces P no es paralelo a Q , luego $P \times Q \neq 0$.

Proposición 1.10. Dados puntos $\pi(P)$ y $\pi(Q)$ en $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ distintos, existe una única recta en $\mathbb{P}\mathbb{R}^{2*}$ que pasa por $\pi(P)$ y $\pi(Q)$. Además, esta está dada por $l = \pi(P) \times \pi(Q)$.

Demostración: La existencia y unicidad están dadas por la proposición 1.7, debido a que $\{\pi(P), \pi(Q)\}$ es proyectivamente independiente. Además, es claro que l pasa por $\pi(P)$ y $\pi(Q)$, pues

$$\begin{aligned} \pi(P)^\top l &= \pi(P)^\top \pi(P \times Q) = \langle P, P \times Q \rangle = 0, & \text{y} \\ \pi(Q)^\top l &= \pi(Q)^\top \pi(P \times Q) = \langle Q, P \times Q \rangle = 0, \end{aligned}$$

desde que $P \times Q$ es ortogonal a P y Q . □

Observación. Dados P y Q en $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, denotaremos la recta que pasa por P y Q como \overleftrightarrow{PQ} , o como $\mathcal{L}\{P, Q\}$.

Proposición 1.11. Dadas rectas L_1 y L_2 en $\mathbb{P}\mathbb{R}^{2*}$ distintas, representadas por sus vectores normales $\pi(l_1)$ y $\pi(l_2)$ respectivamente, existe un único punto en $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ que pertenece a l_1 y a l_2 a la vez. Además, este está dado por $\pi(P) = l_1 \times l_2$.

Demostración: Es claro que $\pi(P) = \pi(l_1) \times \pi(l_2)$ pertenece a L_1 y a L_2 , pues

$$\begin{aligned}\pi(P)^\top l_1 &= \pi(l_1 \times l_2)^\top \pi(l_1) = \langle l_1 \times l_2, l_1 \rangle = 0, & y \\ \pi(P)^\top l_2 &= \pi(l_1 \times l_2)^\top \pi(l_2) = \langle l_1 \times l_2, l_2 \rangle = 0, & y.\end{aligned}$$

Para probar la unicidad, sea $\pi(Q) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^2$ otro punto que pase por L_1 y L_2 . Luego

$$\begin{aligned}0 &= \pi(Q)^\top \pi(l_1) = \langle Q, l_1 \rangle, & y \\ 0 &= \pi(Q)^\top \pi(l_2) = \langle Q, l_2 \rangle.\end{aligned}$$

Es decir, Q es ortogonal a l_1 y l_2 . Luego Q es paralelo a $l_1 \times l_2$. Esto implica que $\pi(Q) = \pi(l_1 \times l_2) = \pi(P)$. \square

Es fácil ver que el producto vectorial de \mathbb{R}^3 genera una transformación lineal de \mathbb{R}^3 en si mismo. Dado $v \in \mathbb{R}^3$, a por $[v]_\times$ a la transformación dada por $[v]_\times x = v \times x$. Observe que en las bases canónicas de \mathbb{R}^3 , si v se expresa como $v = (v_1, v_2, v_3)$, entonces $[v]_\times$ está dada por la matriz

$$[v]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es claro que $[v]_\times$ es antisimétrica. Más aún, dada cualquier matriz antisimétrica $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, existe un vector $v \in \mathbb{R}^3$, tal que $[v]_\times = S$.

Proposición 1.12. Una matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es antisimétrica si, y sólo si, $x^\top Sx = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Si S es antisimétrica, entonces dado cualquier x se tiene que

$$x^\top Sx = (x^\top Sx)^\top = x^\top S^\top x = -x^\top Sx.$$

Luego, $x^\top Sx = 0$.

Recíprocamente, sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
 x^\top S y + y^\top S x &= x^\top S y + y^\top S x + x^\top S x + y^\top S y \\
 &= x^\top S(x + y) + y^\top S(x + y) \\
 &= (x + y)^\top S(x + y) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Entonces, como $y^\top S x = x^\top S^\top y$, se tiene que

$$0 = x^\top S y + y^\top S x = x^\top S y + x^\top S^\top y = x^\top (S + S^\top) y,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Esto implica que $S + S^\top = 0$, de donde se tiene el resultado. \square

Una propiedad que usaremos de esta transformación es la siguiente

Proposición 1.13. Dada $A \in \mathbb{R}^3$ invertible, $v \in \mathbb{R}^3$, entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$[v]_\times = \lambda A^\top [Av]_\times A.$$

Demostración: Sea $S = A^\top [Av]_\times A$ y $x \in \mathbb{R}^3$ cualquiera. Desde que $[Av]_\times$ es antisimétrica, es claro que S es antisimétrica. Luego existe $b \in \mathbb{R}^3$ tal que $[b]_\times = S = A^\top [Av]_\times A$. Además

$$b \times v = [b]_\times v = (A^\top [Av]_\times A)v = A^\top (Av \times Av) = 0.$$

Luego, v es paralelo a b , es decir, existe $\lambda \neq 0$ tal que $b = \lambda v$. Esto implica que

$$[v]_\times = \lambda A^\top [Av]_\times A.$$

Esto prueba la proposición. \square

Observación. Otra manera de plantear la proposición 1.13 sería: “Si $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es invertible y $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $[v]_\times \simeq A^\top [Av]_\times A$.”

1.3. Cámaras

Consideraremos una **cámara** (o **cámara virtual**) como una función que lleva el mundo tridimensional en imágenes bidimensionales mediante una proyección. El

modelo de cámara que usaremos en adelante sera el de cámara pinhole, el cual hace uso de una proyección perspectiva.

Definición. Sea $C \in \mathbb{R}^3$ y Π un plano de \mathbb{R}^3 . Dado $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que $Q \neq C$, diremos que $q \in \Pi$ es la **proyección perspectiva** de Q a Π bajo C , si q es la intersección de la recta \overleftrightarrow{CQ} con Π . En este caso denotaremos $q = \text{proy}_{C,\Pi}(Q)$.

Observe que la proyección perspectiva es una función de \mathbb{R}^3 a Π . Es claro que el dominio de esta no es todo \mathbb{R}^3 , sino está dado por \mathbb{R}^3 menos el plano paralelo a Π que pasa por C , al cual llamaremos Π_C . Sin embargo, extenderemos naturalmente esta función a todo $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ menos un punto.

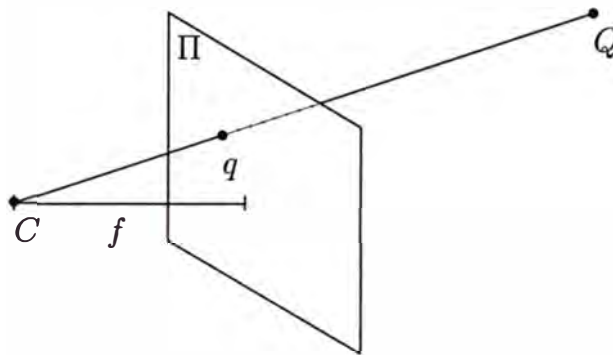


Figura 1.1: Modelo Básico de Cámara Pinhole

Así, llamaremos **cámara pinhole** a la cámara que hace uso de una proyección perspectiva. Luego una cámara pinhole constara de 2 componentes:

1. Un plano Π , denominado **plano de imagen**
2. Un punto $C \notin \Pi$, denominado **centro óptico**

Además, al escalar $f = d(C, \Pi)$ lo llamaremos **distancia focal**. Así, la imagen de un punto $Q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\Pi_C\}$ bajo la cámara (C, Π) será $q = \text{proy}_{C,\Pi}(Q) \in \Pi$.

Ahora, dada la base canónica de \mathbb{R}^3 , consideremos el caso particular en que:

- $C = (0, 0, 0)$
- Π es el plano $z = f$

Luego, como Π es un hiperplano de \mathbb{R}^3 , es claro que Π es un espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^2 con origen en $(0, 0, f)$. Consideremos en Π una base $\{e_u, e_v\}$ tal que $e_u // e_1$ y

$e_v // e_2$. Luego si (u, v) , en coordenadas dadas por $\{e_u, e_v\}$, es la proyección perspectiva de (x, y, z) a Π bajo C , entonces se tiene:

$$u = \frac{f}{z}x \quad v = \frac{f}{z}y \quad (1.7)$$

y completando $\{e_u, e_v\}$ a una base de $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

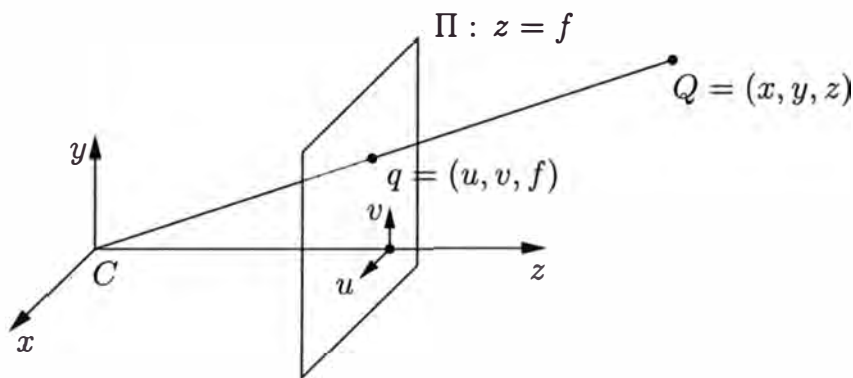


Figura 1.2: Sistema de Referencia de la Cámara

Así, a esta cámara le hemos asociado una matriz proyectiva de orden 3×4 . A esta matriz la llamaremos **matriz de cámara asociada a (C, Π)** . Además, esta cámara posee dos sistemas de coordenadas, un sistema de coordenadas con origen en el centro óptico de esta al cual denominaremos **sistema de coordenadas de cámara**, y un sistema de coordenadas en el plano de imagen al cual denominaremos **sistema de coordenadas de la imagen**. Además, el eje z de la cámara se denominará **eje óptico**. Observe que, mediante la matriz de cámara asociada a (C, Π) , hemos extendido la función de proyección perspectiva a todo $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ menos el centro óptico.

En general, el centro de la cámara no está en el origen, y los ejes de la cámara podrían no estar alineados con los ejes coordenados ya fijados. En este caso, llamaremos al sistema de referencia de \mathbb{R}^3 como **sistema de coordenadas del mundo**. Luego, precisamos que la matriz proyectiva P asociada contenga información acerca de los ejes de cámara y el centro óptico, junto con información acerca de las coordenadas de imagen de la cámara. Luego, para nuestros fines, a cada cámara pinhole le asociaremos

una matriz proyectiva P tal que:

$$P \simeq K [R | t]_{(3 \times 4)} \quad (1.9)$$

donde $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz ortogonal ($R \cdot R^T = I$) que transforma el sistema de coordenadas del mundo en sistema de la cámara, $t \in \mathbb{R}^3$ es el vector de traslación. A la matriz $[R | t]$ se le denomina **matriz de parámetros extrínsecos**. Además

$$K = \begin{bmatrix} f s_x & -f s_x \tan(\theta) & u_0 \\ 0 & f s_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es denominada **matriz de parámetros intrínsecos**. Aquí:

s_x, s_y : son los parámetros de conversión de unidades del mundo a pixels horizontales y verticales, respectivamente

(u_0, v_0) : son las coordenadas de la proyección ortogonal del centro óptico sobre el plano de imagen.

θ : es la distorsión angular de la cámara. Es el complemento del ángulo que hacen los ejes del sistema de referencia de la imagen.

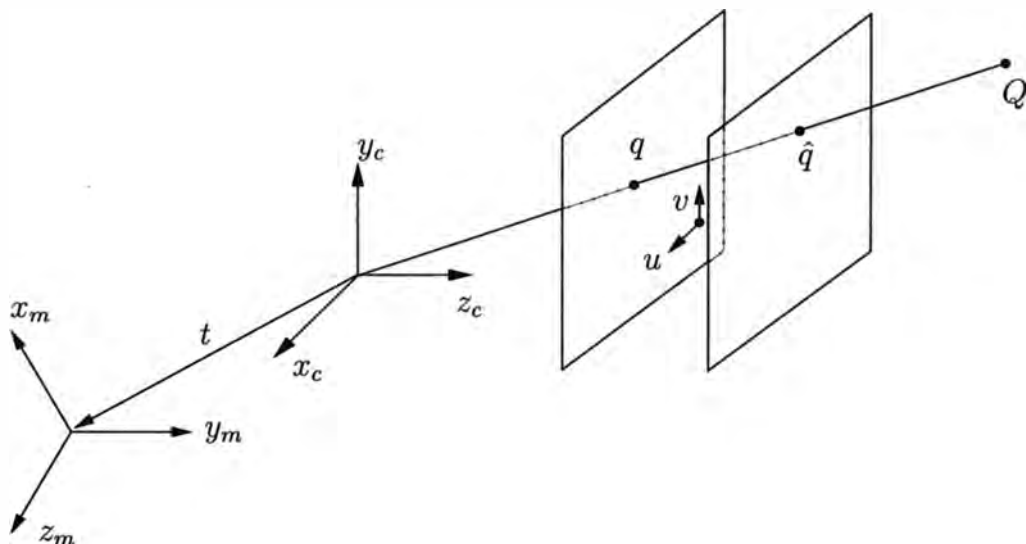


Figura 1.3: Elementos extrínsecos de la cámara

Además, es posible asociar a cada cámara un plano a distancia unitaria del centro óptico, paralelo al plano de imagen. Denominaremos a este plano como **plano de**

imagen normalizado. Dotaremos a este plano de un sistema de coordenadas con centro en la intersección del eje óptico con él, y ejes paralelos a los ejes de la cámara. La imagen de un punto bajo una cámara en coordenadas normalizadas, es la acción de la matriz de proyección en el punto, pero sin considerar los parámetros intrínsecos (es decir $\hat{q} \simeq K^{-1}q \simeq [R|t]Q$.) Cuando sea necesario, denotaremos por Π_{pix} al plano de imagen y por Π_{CN} al plano de imagen normalizado.

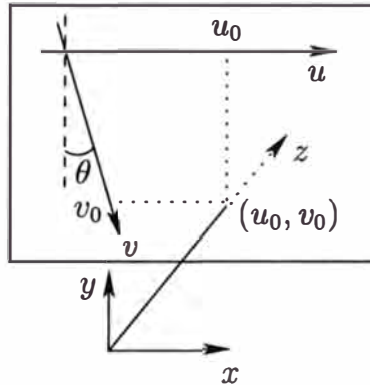


Figura 1.4: Elementos intrínsecos de la cámara

Observaciones.

1. Dada una cámara pinhole, existen métodos para estimar su matriz de proyección. Para esto, debemos conocer las posiciones en \mathbb{R}^3 de un conjunto de puntos en una imagen tomada por dicha cámara. Más información sobre estos métodos puede ser encontrada en [1], [3] y [7].
2. La distorsión angular de la cámara permite modelar cámaras que poseen defectos de fabricación y en las cuales el ángulo entre los ejes del sistema de la imagen no es $\frac{\pi}{2}$. En la práctica, si no es nulo, usualmente es considerado muy pequeño.
3. El vector de traslación t de la cámara representa el origen de coordenadas de \mathbb{R}^3 en el sistema de coordenadas de la cámara. Luego, la posición de la cámara en el sistema de coordenadas del mundo (es decir, el centro óptico de la cámara) está dada por $C = \begin{bmatrix} -R^T t \\ 1 \end{bmatrix}$. De esto, es fácil ver que

$$PC = K[R|t] \begin{bmatrix} -R^T t \\ 1 \end{bmatrix} = K(-RR^T t + t) = 0.$$

4. Al valor s_x/s_y se le conoce como **razon de aspecto** o **aspect-ratio** de la cámara.

5. Denotemos a $\alpha = fs_x$ y $\beta = fs_y$. Observe que α es la distancia focal de la cámara expresada en píxeles horizontales, y β es la distancia focal de la cámara expresada en píxeles verticales.
6. Para determinar la matriz de parámetros intrínsecos de la cámara, bastará conocer α , β , u_0 , v_0 y θ .

Ahora surge la pregunta natural, dada cualquier matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, ¿esta representa alguna cámara pinhole? La respuesta la da la siguiente proposición.

Proposición 1.14. Sea una matriz $P = [A | b] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, con $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ invertible. Entonces existe K matriz de parámetros intrínsecos, $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ortogonal y $t \in \mathbb{R}^3$ tales que $P \simeq K[R | t]$.

Demostración: Sea $A = [a_1, a_2, a_3]^\top$ la representación por filas de A , y $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$. Bastará expresar a

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \tan(\theta) & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1, \end{bmatrix}$$

$R = [r_1, r_2, r_3]^\top$ y $t = (t_1, t_2, t_3)^\top$, en función de A y b . Observe que

$$K[R | t] = \begin{bmatrix} \alpha r_1^\top & -\alpha \tan(\theta) r_2^\top + u_0 r_3^\top & \alpha t_1 - \alpha \tan(\theta) t_2 + u_0 t_3 \\ \beta r_2^\top + v_0 r_3^\top & \beta t_2 + v_0 t_3 \\ r_3^\top & t_3 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} a_1^\top & b_1 \\ a_2^\top & b_2 \\ a_3^\top & b_3 \end{bmatrix}$$

Definamos $r_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|}$ y $t_3 = \frac{b_3}{\|a_3\|}$. Es claro que r_3 es un vector unitario. Sea entonces $\hat{A} = \frac{1}{\|a_3\|} A$, $\hat{b} = \frac{1}{\|a_3\|} b$, con $\hat{a}_i = \frac{a_i}{\|a_3\|}$ y $\hat{b}_i = \frac{b_i}{\|a_3\|}$. Haciendo

$$\beta r_2^\top + v_0 r_3^\top = \hat{a}_2^\top,$$

y multiplicando escalarmente por r_3 a ambos lados de la ecuación, tenemos

$$\beta r_2^\top r_3 + v_0 \|r_3\|^2 = \hat{a}_2^\top r_3,$$

y como R es una matriz ortogonal, entonces $v_0 = \hat{a}_2^\top r_3 = \frac{a_2^\top a_3}{\|a_3\|^2}$. Nuevamente, desde que $\beta r_2^\top + v_0 r_3^\top = \hat{a}_2^\top$ y r_2 es un vector unitario, entonces definamos

$$\beta = \|\hat{a}_2^\top - v_0 r_3^\top\|.$$

Es claro que $\beta > 0$, pues en caso contrario \hat{a}_2 y \hat{a}_3 serían paralelos. Ahora, como β y v_0 están determinados, bastará definir $r_2 = \frac{1}{\beta}(\hat{a}_2 - v_0 r_3)$ y $t_2 = \frac{1}{\beta}(\hat{b}_2 - v_0 t_3)$. Es claro que r_2 es unitario, y que $r_2^\top r_3 = 0$.

Ahora consideremos la ecuación

$$\alpha r_1^\top - \alpha \tan(\theta) r_2^\top + u_0 r_3^\top = \hat{a}_1^\top,$$

Multiplicando escalarmente esta ecuación por r_2 y r_3 respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha r_1^\top r_2 - \alpha \tan(\theta) \|r_2\|^2 + u_0 r_3^\top r_2 &= \hat{a}_1^\top r_2 \\ \alpha r_1^\top r_3 - \alpha \tan(\theta) r_2^\top r_3 + u_0 \|r_3\|^2 &= \hat{a}_1^\top r_3 \end{aligned}$$

de donde tenemos que $\alpha \tan(\theta) = -\hat{a}_1^\top r_2$ y $u_0 = \hat{a}_1^\top r_3$. Denotemos por $s = -\hat{a}_1^\top r_2 = \alpha \tan(\theta)$, luego definamos $\alpha = \|\hat{a}_1 + s r_2 - u_0 r_3\|$. Nuevamente, es fácil ver que $\alpha > 0$, pues si no, los vectores fila de A serían linealmente dependientes, lo cual contradice la no singularidad de A .

Así, bastará definir $r_1 = \frac{1}{\alpha}(\hat{a}_1 + s r_2 - u_0 r_3)$, $t_1 = \frac{1}{\alpha}(\hat{b}_1 + s t_2 - u_0 t_3)$ y $\theta = \arctan\left(\frac{s}{\alpha}\right)$. Es claro nuevamente que r_1 es unitario, y que $r_1^\top r_2 = r_1^\top r_3 = 0$. Así, hemos construido K , R y t a partir de A y b , luego el teorema está probado. \square

Capítulo 2

Geometría de 2 vistas

2.1. Geometría Epipolar

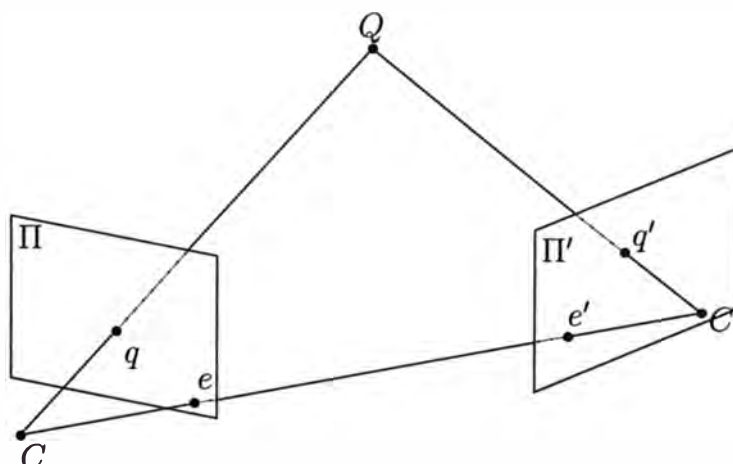


Figura 2.1: Geometría Epipolar

Considere el sistema formado por 2 cámaras pinhole, con centros ópticos C y C' distintos, y planos de imagen en coordenadas de imagen Π y Π' . En adelante, llamaremos a un sistema óptico de este tipo como **sistema estéreo**. Dado Q en \mathbb{R}^3 , intentaremos hallar la relación existente entre sus imágenes $q \in \Pi$ y $q' \in \Pi'$.

Supongamos que $Q \notin \overrightarrow{CC'}$ y sea Π_Q el plano formado por C , C' y Q . Llamaremos a este plano **plano epipolar asociado a Q** . Como \overrightarrow{CQ} y $\overrightarrow{C'Q}$ están contenidos en Π_Q , entonces q y q' también pertenecen a Π_Q . Es fácil ver que la recta $\overrightarrow{CC'}$ está contenida en Π_Q , para todo $Q \in \mathbb{P}^3 \setminus \{\overrightarrow{CC'}\}$. Llamaremos a esta recta como la **recta base**. Sean e y e' las intersecciones de la recta base con Π y Π' respectivamente. Llamaremos a e y e' como los **epipolos** del sistema. Geométricamente, $e \in \Pi$ es la imagen bajo C de C' y $e' \in \Pi'$ es la imagen bajo C' de C .

Ahora, dado $q \in \Pi$, queremos caracterizar los posibles $q' \in \Pi'$ tal que q y q' son imágenes de algún $Q \in \mathbb{P}\mathbb{R}^3$. A tales q, q' los llamaremos **puntos relacionados** o **correspondencias** y los denotaremos como $q \leftrightarrow q'$. Veremos que la relación existente no es arbitraria.

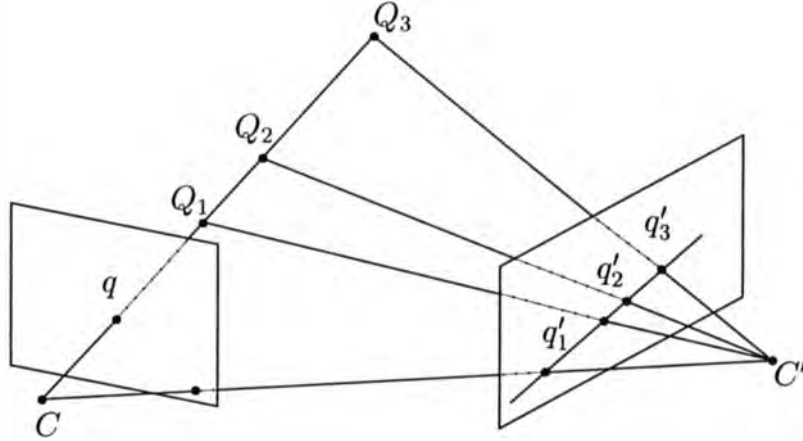


Figura 2.2: Puntos Relacionados

Sea $q \in \Pi$, $q \neq e$ y sea $Q \in \overrightarrow{Cq}$. Observe que $\Pi_Y = \Pi_Q$ para todo $Y \in \overrightarrow{Cq}$, es decir, Π_Q no depende del punto Q si elijo $X \in \overrightarrow{Cq}$. Ahora considere la figura 2.2. Es claro que los posibles (en realidad todos) $q' \in \Pi'$ relacionados con q yacen en la recta que es intersección del plano de imagen Π' con el plano epipolar Π_Q . Observe que esta recta pasa por el epipolo e' . Denotaremos a esta recta l'_q y la denominaremos **recta epipolar de q** . Esto significa que podemos limitar la búsqueda de puntos relacionados a un punto de una imagen sólo a su recta epipolar asociada. De la misma manera, a cada $q' \in \Pi' \setminus \{e'\}$, le podemos asociar su recta epipolar $l_{q'}$. Observe que $q' \in l'_q$ si y sólo si $q \in l_{q'}$.

Observación. Para el caso de dos cámaras con centro común, se tiene que sus planos de imagen están relacionados mediante una homografía de $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$. Debido a esto, en adelante vamos a obviar su estudio.

Ahora formalizaremos la relación existente entre un punto $q \in \Pi$ y su recta epipolar $l'_q \subset \Pi'$.

Teorema 2.1. Para el sistema estéreo anterior, existe una correspondencia F de rango 2 tal que para cada $q \in \Pi$ se cumple $l'_q = Fq$

Demostración: Sean P y P' las matrices de cámara asociadas a (C, Π) y (C', Π') respectivamente. Sea $q \in \Pi \setminus \{e\}$, luego $Q_0 = P^+q \in \mathbb{P}\mathbb{R}^3$ es tal que $PQ_0 = q$. Luego,

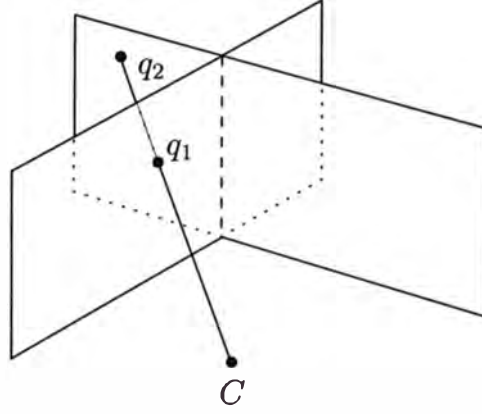


Figura 2.3: El caso de centros coincidentes

los puntos $Q \in \mathbb{P}^3$ que son llevados bajo P en q , se encuentran en la recta $\overleftrightarrow{CQ_0}$. Luego los puntos $q' \in \Pi'$ relacionados con q se encuentran en la imagen bajo P' de $\overleftrightarrow{CQ_0}$, es decir, en la recta de Π' que pasa por $P'C$ y $P'Q_0 = P'P^+q$. Por la proposición 1.10, esta recta está dada por $l'_q = P'C \times P'P^+q$. Como $P'C = e$ es el epipolo del sistema, entonces $l'_q = [e]_{\times} P'P^+q$. Luego, haciendo $F = [e]_{\times} P'P^+$, tenemos que $l'_q = Fq$. Es claro que F es de rango 2 pues tanto P como P' y P^+ son de rango 3 y $[e]_{\times}$ es de rango 2. \square

Así, a partir del teorema anterior, tenemos la siguiente definición:

Definición. Dado un sistema estéreo compuesto por 2 cámaras pinhole de centros C y C' distintos, y planos de imagen normalizados Π y Π' , llamaremos **matriz fundamental**, a la correspondencia proyectiva F de rango 2 que lleva a cada $q \in \Pi$ con $q \neq e$, a su recta epipolar asociada $l'_q \subset \Pi'$.

Una caracterización de la matriz fundamental de un sistema estéreo es el siguiente:

Proposición 2.1. Una matriz F de rango 2 es matriz fundamental si y sólo si $q'^T F q = 0$ para todo $q \leftrightarrow q'$.

Demostración: Supongamos que F es matriz fundamental. Sea $q \in \Pi$, $q' \in \Pi'$ tal que $q \leftrightarrow q'$, entonces

$$\begin{aligned} q' \in l'_q &\iff q'^T l'_q = 0 \\ &\iff q'^T F q = 0 \end{aligned}$$

Recíprocamente, como F tiene rango 2, entonces $\ker(F) = \alpha \in \mathbb{P}^2$. Sea $q \in \Pi$, con

$q \neq \alpha, e$, y sea $y' \in l'_q \setminus \{e'\}$, entonces $y' \leftrightarrow q$, lo que implica

$$y'^{\top} F q = 0$$

para todo $y' \in l'_q \setminus \{e'\}$. Ahora, como F tiene rango 2 y $q \notin \ker(F)$, entonces $Fq \neq 0$. De aquí:

$$\{y / y^{\top} F q = 0\}$$

es una recta. Luego $l'_q \setminus \{e'\} \subset \{y/y^{\top} F q = 0\}$, lo cual implica que $l'_q = \{y/y^{\top} F q = 0\}$. Entonces $l'_q = Fq$, para todo $q \in \Pi \setminus \{\alpha, e\}$. Análogamente, si $\ker(F^{\top}) = \alpha'$, entonces $l_{q'} = F^{\top} q'$, para todo $q' \in \Pi' \setminus \{\alpha', e'\}$. Ahora, como $e \in l_{q'}$, para todo $q' \in \Pi' \setminus \{e'\}$, entonces $e^{\top} F^{\top} q' = 0$, para todo $q' \in \Pi' \setminus \{e'\}$. Esto implica que $F e = 0$, es decir, $e = \ker(F)$. De aquí $e = \alpha$ y $e' = \alpha'$. Luego F es matriz fundamental. \square

De la prueba de la proposición 2.1 se desprende trivialmente el siguiente

Corolario.

1. F es matriz fundamental de (C, C') si y sólo si F^{\top} es matriz fundamental de (C', C) .
2. $l'_q = Fq$ y $l_{q'} = F^{\top} q'$.
3. $\ker(F) = e$, $\ker(F^{\top}) = e'$.

Sea ahora l una recta en Π que contiene al epipolo e . Es claro que l es una recta epipolar y que a todo $q \in l \setminus \{e\}$ le corresponde su recta epipolar l'_q . Como C, C' y l son coplanares, se tiene que l'_x no depende del $q \in l \setminus \{e\}$ elegido, sino de la recta l . Llamaremos l' a esta recta dependiente de l . Luego existe una correspondencia entre rectas epipolares en Π y Π' . La siguiente proposición da información acerca de esta correspondencia.

Proposición 2.2. Si l y l' son rectas epipolares correspondientes, entonces

$$l' = F[k]_{\times} l,$$

para toda recta k que no contiene al epipolo e .

Demostración: Sea k una recta que no contiene a e . Luego $q_k = k \times l = [k]_{\times} l$, la intersección de las rectas k y l es tal que $x_k \neq e$. Entonces $l'_{q_k} = Fq_k = F[k]_{\times} l$ es la recta epipolar asociada a q_k . Por lo comentado anteriormente, l'_{q_k} no depende del $q_k \in l$ tomado, luego $l = l_{q_k} = F[k]_{\times} l$ \square

Llamaremos a la homografía $F[k]_x$ como **homografía de rectas epipolares**, desde que $F[k]_x$ es una homografía de $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ en si mismo. Una elección conveniente para k es elegir $k = e$. Como $e^\top k = e^\top e \neq 0$, luego el punto e no pertenece a la recta e . Análogamente el punto e' no pertenece a la recta e' . Así, en este caso, la homografía de rectas epipolares está dada por

$$l' = F[e]_x l \quad \text{y} \quad l = F^\top[e']_x l'.$$

Definiremos ahora la noción de sistemas estéreos proyectivamente equivalentes:

Definición. Sean dos sistemas estéreo (P, P') y (Q, Q') . Diremos que estos son **proyectivamente equivalentes**, si existe homografía H de $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ tal que $Q = PH$ y $Q' = P'H$.

Lema 2.1. Una matriz F es matriz fundamental de (P, P') si y sólo si $P'^\top FP$ es antisimétrica.

Demostración: Supongamos que F es matriz fundamental de (P, P') . Sea $X \in \mathbb{R}^3$, y sean $x = PX$ y $x' = P'X$. Luego, como $x \leftrightarrow x'$, se tiene que

$$0 = x'^\top Fx = X^\top (P'^\top FP)X \quad \text{para todo } X \in \mathbb{R}^3$$

y por la proposición 1.12 se tiene que $P'^\top FP$ es antisimétrica.

Recíprocamente, sean x y x' puntos correspondientes. Luego existe $X \in \mathbb{R}^3$ tal que $x = Px$ y $x' = P'X$. Como $P'^\top FP$ es antisimétrica entonces $X^\top (P'^\top FP)X = 0$, lo que implica que $x'^\top Fx = 0$ para todo $x \leftrightarrow x'$. \square

Teorema 2.2. Dos sistemas estéreo proyectivamente equivalentes tienen la misma matriz fundamental.

Demostración: Sea (P, P') uno de los dos sistemas estéreo, y sea H la homografía que transforma a (P, P') en el otro. Sea F la matriz fundamental de (P, P') . Por el Lema 2.1, bastará demostrar que $(P'H)^\top F(PH)$ es antisimétrica, lo cual es inmediato desde que $P'^\top FP$ es antisimétrica. \square

El teorema 2.2 implica que la matriz fundamental de un sistema estéreo permanece invariante bajo homografías. Así, si tenemos el sistema estéreo dado por

$$\begin{aligned} P &= [M | m] \\ P' &= [M' | m'], \end{aligned}$$

con matriz fundamental F , entonces el sistema $(PH, P'H)$ tiene la misma matriz fundamental F , para cualquier homografía H de $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$. En particular, consideremos:

$$H = \left[\begin{array}{c|c} M^{-1} & -M^{-1}m \\ \hline 0^\top & 1 \end{array} \right].$$

Claramente H es no singular, pues $\det(H) = \det(M^{-1}) \neq 0$, entonces $H : \mathbb{P}\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^3$ es una homografía. Además

$$\begin{aligned} PH &= [M | m] \left[\begin{array}{c|c} M^{-1} & -M^{-1}m \\ \hline 0^\top & 1 \end{array} \right] \\ &= [I | 0] \end{aligned}$$

Luego el sistema $(PH, P'H)$ es de la forma $([I | 0], [\hat{M} | \hat{m}])$.

Definición. Denominaremos a los sistemas de la forma $([I | 0], [M | m])$ como **sistemas estéreo canónico**.

Lo anterior implica que cualquier sistema estéreo es proyectivamente equivalente a un sistema canónico. Así, por el momento, limitaremos nuestro estudio a sistemas de este tipo.

La siguiente proposición nos brinda una formula para el cálculo de la matriz fundamental de un sistema canónico.

Proposición 2.3. Dado el sistema canónico $([I | 0], [M | m])$, su matriz fundamental está dada por:

$$F = [m]_\times M$$

Demostración: Sea $q \in \Pi_{\text{pix}}$, como $K = I$, entonces $\Pi_{\text{pix}} = \Pi_{\text{CN}}$. Luego el rayo $\vec{C}q$ está determinado por $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $P^+q = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} q$. Así, l'_q está determinado por $P'C = m$ y $P'P^+q = Mq$. Luego, la matriz fundamental F cumple

$$\begin{aligned} l'_q = Fq &= m \times Mq \\ &= [m]_\times Mq \end{aligned}$$

es decir $F = [m]_\times M$. □

Hasta ahora hemos probado que dos sistemas estéreo calibrados proyectivamente equivalentes tienen la misma matriz fundamental. Luego surge la pregunta: Dados dos

sistemas estéreo calibrados con la misma matriz fundamental ¿Serán proyectivamente equivalentes? Probaremos que la respuesta es afirmativa. Para esto necesitamos del siguiente lema.

Lema 2.2. Sea F una matriz en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que puede ser descompuesto de dos maneras distintas: $F = [a]_{\times} A = [\hat{a}]_{\times} \hat{A}$. Entonces

$$\hat{a} = ka \quad \text{y} \quad \hat{A} = k^{-1}(A + av^{\top})$$

para algún $k \neq 0$ y $v \in \mathbb{R}^3$

Demostración: Como $[a]_{\times} a = 0 = a^{\top} [a]_{\times}$ y $[\hat{a}]_{\times} \hat{a} = 0 = \hat{a}^{\top} [\hat{a}]_{\times}$, entonces

$$\begin{aligned} a^{\top} F &= a^{\top} [a]_{\times} A = 0 \quad \text{y} \\ \hat{a}^{\top} F &= \hat{a}^{\top} [\hat{a}]_{\times} \hat{A} = 0 \end{aligned}$$

Como F tiene rango 2, se sigue que $\hat{a} = ka$, para algún $k \neq 0$. Luego, como $F = [a]_{\times} A = k[a]_{\times} \hat{A}$, se tiene que

$$[a]_{\times} (k\hat{A} - A) = 0$$

Luego existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $k\hat{A} - A = av^{\top}$, de donde se sigue el lema. \square

Así, tenemos el recíproco del teorema 2.2.

Teorema 2.3. Si dos sistemas estéreo tienen la misma matriz fundamental, entonces son proyectivamente equivalentes.

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el sistema $([I|0], [M|m])$ y el sistema $([I|0], [\hat{M}|\hat{m}])$ tienen la misma matriz fundamental. Luego por la proposición 2.3 y el lema 2.2 tenemos que existe $k \neq 0$ y $v \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\hat{m} = km \quad \text{y} \quad \hat{M} = k^{-1}(M + mv^{\top})$$

Luego bastará considerar la homografía definida por

$$H = \left[\begin{array}{c|c} k^{-1}I & 0 \\ \hline k^{-1}v^{\top} & k \end{array} \right]$$

la cual cumple:

$$\begin{aligned}
[I|0] \left[\begin{array}{c|c} k^{-1}I & 0 \\ \hline k^{-1}v^\top & k \end{array} \right] &= [k^{-1}I|0] \\
&= k^{-1}[I|0] \\
&\simeq [I|0] \\
[M|m] \left[\begin{array}{c|c} k^{-1}I & 0 \\ \hline k^{-1}v^\top & k \end{array} \right] &= [k^{-1}M + k^{-1}mv^\top | km] \\
&= [\hat{M} | \hat{m}]
\end{aligned}$$

De donde se tiene que ambos sistemas son proyectivamente equivalentes. \square

Hemos visto en la proposición 2.3 que, dado un sistema estéreo calibrado, podemos hallar su matriz fundamental en función de sus matrices de proyección. Veremos ahora que dada la matriz fundamental de un sistema estéreo no calibrado, podemos recuperar las matrices de proyección. Hemos probado ya que existirá cierta ambigüedad al momento de recuperar las matrices de cámara.

Proposición 2.4. Sea $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de rango 2, $e' = \ker(F^\top)$ y $s \in \mathbb{P}\mathbb{R}^2$ tal que $s^\top e' \neq 0$. Defina las matrices

$$P = [I|0] \quad \text{y} \quad P' = [[s]_\times F | e'].$$

Entonces P' tienen rango 3 y F es matriz fundamental de (P, P') .

Demostración: Sea $S = [s]_\times$. Supongamos que $\text{ran}(P') = 3$. Por el lema 2.1, bastará probar que $P'^\top F P$ es antisimétrica.

En efecto,

$$\begin{aligned}
P'^\top F P &= [SF | e']^\top F [I|0] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} F^\top S^\top & \\ \hline e'^\top & \end{array} \right] [F|0] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} F^\top S^\top F & 0 \\ \hline 0^\top & 0 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Claramente $\left[\begin{array}{c|c} F^\top S^\top F & 0 \\ \hline 0^\top & 0 \end{array} \right]$ es antisimétrica.

Veamos ahora que $\text{ran}(P') = 3$. Sean f_1, f_2, f_3 las columnas de F vistas como elementos de \mathbb{R}^3 . Como $F^\top e' = 0$, entonces e' es ortogonal a las columnas de F , es decir e' es ortogonal al plano $\Pi_F = \mathcal{L}\{f_1, f_2, f_3\}$. Además, s no está en Π_F pues $s^\top e' \neq 0$.

Luego $\{s, f_1, f_2, f_3\}$ generan \mathbb{R}^3 . Ahora considere $\Pi_{s \times F} = \mathcal{L}\{s \times f_1, s \times f_2, s \times f_3\}$. Si $\Pi_{s \times F}$ fuera una recta, entonces $\{s \times f_1, s \times f_2, s \times f_3\}$ serían paralelos. Esto implica que el vector $s \times f_1$ es ortogonal a $\{s, f_1, f_2, f_3\}$, de donde $s \times f_1 = 0$ y $s \in \Pi_F$, lo cual es una contradicción. Además, $\Pi_{s \times F}$ no es todo \mathbb{R}^3 , pues todo elemento de él es ortogonal a $s \neq 0$. Luego $\Pi_{s \times F}$ es un plano ortogonal a s . Esto implica que $\text{ran}([s]_{\times} F) = 2$. Ahora, como $s^{\top} e' \neq 0$, entonces $e \notin \Pi_{s \times F}$, esto implica que P' tiene rango 3. \square

La proposición anterior funciona para cualquier vector s tal que $s^{\top} e' \neq 0$. Como $e'^{\top} e' \neq 0$, se tiene

Corolario. Las matrices de proyección (P, P') para F de rango 2, pueden ser escogidas como

$$P = [I | 0] \quad \text{y} \quad P' = [[e']_{\times} F | e'].$$

Observación. La matriz P' dada por la proposición 2.4 no modela una cámara real, pues la submatriz $[s]_{\times} F$ tiene rango 2.

Teorema 2.4. Sea F una matriz de rango 2, y $e' = \ker(F) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^2$. Suponga que $([I | 0], P')$ tiene como matriz fundamental a F . Luego existe $v \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \neq 0$ tales que

$$P' \simeq [[e']_{\times} F + e'v^{\top} | \lambda e'].$$

Demostración: Suponga que $P' = [M | m]$. Por la proposición 2.3 se tiene

$$F = [m]_{\times} M.$$

Por otro lado, por el corolario de la proposición 2.4, se tiene que el sistema $([I | 0], [[e']_{\times} F | e'])$ también tiene a F como matriz fundamental. De nuevo, por la proposición 2.3 se tiene

$$F = [e']_{\times} [e']_{\times} F.$$

Es decir, F puede ser descompuesto de dos maneras distintas. Luego, por el lema 2.2, existe $k \neq 0$ y $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $m = ke'$ y $M = k^{-1}([e']_{\times} F + e'v^{\top})$. Haciendo $\lambda = k^2$ tenemos

$$P' = [M | m] = [k^{-1}([e']_{\times} F + e'v^{\top}) | ke'] \simeq [[e']_{\times} F + e'v^{\top} | \lambda e'].$$

\square

2.2. Matriz Esencial

Consideremos que en el sistema estéreo anterior, tenemos las matrices de proyección $P = K[R|t]$ y $P' = K'[R'|t']$. A tal sistema lo llamaremos **sistema estéreo calibrado**. Por lo visto en la sección 1.3, para cada cámara tenemos 2 planos de imagen: un plano en coordenadas normalizadas (Π_{CN}) y otro en coordenadas de imagen (Π_{pix}). Ambos planos están relacionados mediante su respectiva matriz de parámetros intrínsecos, es decir:

$$K : \Pi_{\text{CN}} \rightarrow \Pi_{\text{pix}}$$

$$K' : \Pi'_{\text{CN}} \rightarrow \Pi'_{\text{pix}}$$

Luego, dado $\hat{q} \in \Pi_{\text{CN}}$, su recta epipolar asociada $l'_{\hat{q}} \subset \Pi'_{\text{CN}}$ estará dada por

$$l'_{\hat{q}} := K'^{\top} l'_{K\hat{q}}$$

Así, la pregunta natural sería, ¿Cuál es la relación existente entre un punto $\hat{q} \in \Pi_{\text{CN}}$ y su recta epipolar asociada $l'_{\hat{q}} \subset \Pi'_{\text{CN}}$. La respuesta la da el siguiente teorema.

Teorema 2.5. Dado un sistema estéreo calibrado, existe una correspondencia proyectiva E de rango 2, tal que para cada $\hat{q} \in \Pi_{\text{CN}}$, se tiene que $E\hat{q} = l'_{\hat{q}}$. Además E cumple

$$E = K'^{\top} FK$$

Demostración: Sea $\hat{q} \in \Pi_{\text{CN}}$, entonces $K\hat{q} \in \Pi_{\text{pix}}$. Luego $l'_{K\hat{q}} = FK\hat{q} \subset \Pi'_{\text{pix}}$. Esto implica que $l'_{\hat{q}} = K'^{\top} FK\hat{q}$, de donde $E = K'^{\top} FK$ es la matriz pedida. Claramente E tiene rango 2 pues K y K' son inversibles y F es matriz fundamental. \square

Definición. Dado un sistema estéreo calibrado, llamaremos **matriz esencial** a la correspondencia proyectiva E dada por el teorema 2.5

Observación. Sea el sistema estéreo calibrado $(K[R|t], K'[R'|t'])$. Observe que la matriz esencial de este es la matriz fundamental del sistema en coordenadas normalizadas, es decir, del sistema $([R|t], [R'|t'])$.

Así, el teorema 2.5 garantiza que las proposiciones 2.1 y 2.2 se cumplen si reemplazamos ‘matriz fundamental’ por ‘matriz esencial’, es decir:

Proposición 2.5. Una matriz E de rango 2 es matriz esencial si y sólo si $\hat{q}'^{\top} E\hat{q} = 0$ para todo $q \leftrightarrow q'$.

Proposición 2.6. Si l y l' son rectas epipolares correspondientes, entonces

$$l' = E[k]_{\times} l,$$

para toda recta k que no contiene al epipolo e .

Supongamos que ahora el sistema estéreo con matrices de proyección:

$$\begin{aligned} P &= K[I|0] \\ P' &= K'[R|t]. \end{aligned}$$

Sea $q \in \Pi_{\text{pix}}$, luego los posibles $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que $PQ = q$ están en la semirrecta que parte de C y P^+q donde

$$P^+ = \begin{bmatrix} K^{-1} \\ 0^{\top} \end{bmatrix}.$$

Observe que $P^+q \in \Pi_{\infty}$. Luego P^+q es la intersección del rayo $\vec{C}q$ con Π_{∞} . Así, la recta epipolar de q es la imagen bajo P' de $\vec{C}q$, luego

$$P'C \in \Pi'_{\text{pix}} \quad \text{y} \quad P'P^+q \in \Pi'_{\text{pix}}$$

con lo que

$$l'_x = P'Cx \times P'P^+q = [P'C]_{\times} P'P^+q$$

Entonces, como $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ se tiene que

$$\begin{aligned} l'_q &= [P'C]_{\times} P'P^+q \\ &= \left[K'[R|t] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]_{\times} K'[R|t] \begin{bmatrix} K^{-1} \\ 0^{\top} \end{bmatrix} q \\ &= [K't]_{\times} K'RK^{-1}q \\ &= K'^{-\top}[t]_{\times} RK^{-1}q \end{aligned}$$

Luego $F = K'^{-\top}[t]_{\times} RK^{-1}$ es la matriz fundamental del sistema. De aquí también se desprende que $E = [t]_{\times} R$.

Del resultado anterior, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.7. Una matriz E es matriz esencial de algún sistema estéreo si, y sólo si, E tiene un valor singular nulo y los otros dos valores singulares son iguales.

Demostración: Supongamos que $E = [t]_{\times} R$. Consideremos las matrices

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Claramente W es ortogonal y Z antisimétrica. Desde que $[t]_{\times}$ es antisimétrica y tiene rango 2, entonces por el teorema de valores singulares para matrices antisimétricas se tiene que

$$[t]_{\times} = kUZU^{\top}$$

Observe que $\text{diag}(1, 1, 0)W = -Z$, luego $[t]_{\times} = -kU \text{diag}(1, 1, 0)WU^{\top}$, de donde se tiene

$$E = [t]_{\times} R = U \text{diag}(1, 1, 0)(WU^{\top} R)$$

Haciendo $V = R^{\top}UW^{\top}$, tenemos que E tiene un único valor singular nulo, y los otros dos son iguales.

Recíprocamente, supongamos que E se descomponga:

$$\begin{aligned} E &= U \text{diag}(\lambda, \lambda, 0)V^{\top} \\ &= \lambda U \text{diag}(1, 1, 0)WU^{\top}UW^{\top}V^{\top} \\ &= -\lambda(UZU^{\top})(UW^{\top}V^{\top}) \\ &\simeq (UZU^{\top})(UW^{\top}V^{\top}) \end{aligned}$$

Así, definamos $S = UZU^{\top}$ y $R = UW^{\top}V^{\top}$. Claramente S es antisimétrica, entonces existe t tal que $[t]_{\times} = S$. Además R es ortogonal. Luego, se tiene que E es matriz esencial del sistema estéreo $(K[I|0], K'[R|t])$, para matrices K y K' cualesquiera. \square

Enunciamos ahora teoremas análogos a los de la sección anterior para el caso de tener la matriz esencial E de un sistema estéreo. Para esto, supondremos W y Z definidas como en las ecuaciones (2.1) y (2.2)

Proposición 2.8. Sea E matriz esencial de algún sistema estéreo y supongamos que $U \text{diag}(1, 1, 0)V^{\top}$ sea la descomposición en valores singulares de E . Luego E puede ser descompuesta de la forma $E = SR$, con S antisimétrica y R ortogonal. Además, el único posible valor para S es $S = UZU^{\top}$, y los únicos valores posibles para R son

$$R = UWV^T \text{ y } R = UW^T V^T.$$

Proposición 2.9. Sea $E = U \text{diag}(1, 1, 0)V^T$ matriz esencial del sistema $([I|0], P')$. Entonces existen cuatro posibilidades para P' :

$$P' = [UWV^T | u_3] \text{ o } [UWV^T | -u_3] \text{ o } [UW^T V^T | u_3] \text{ o } [UW^T V^T | -u_3].$$

Observación. Las 4 matrices de cámara mostradas en la proposición 2.9, tienen a la identidad como matriz de parámetros intrínsecos.

Existe una interpretación geométrica sencilla de las matrices de cámara mostradas en la proposición 2.9. Es claro que la diferencia entre las dos primeras es simplemente un cambio de signo de vector de traslación de la segunda cámara. Lo mismo ocurre para las dos últimas. Además podemos relacionar la primera y la tercera matriz mediante la ecuación

$$[UW^T V^T | u_3] = [UWV^T | u_3] \begin{bmatrix} VW^T W^T V^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $VW^T W^T V^T = V \text{diag}(-1, -1, 1)V^T$. Esto es una rotación de 180° del sistema de coordenadas de la segunda cámara, con eje en la recta base. Si reconstruimos, usando

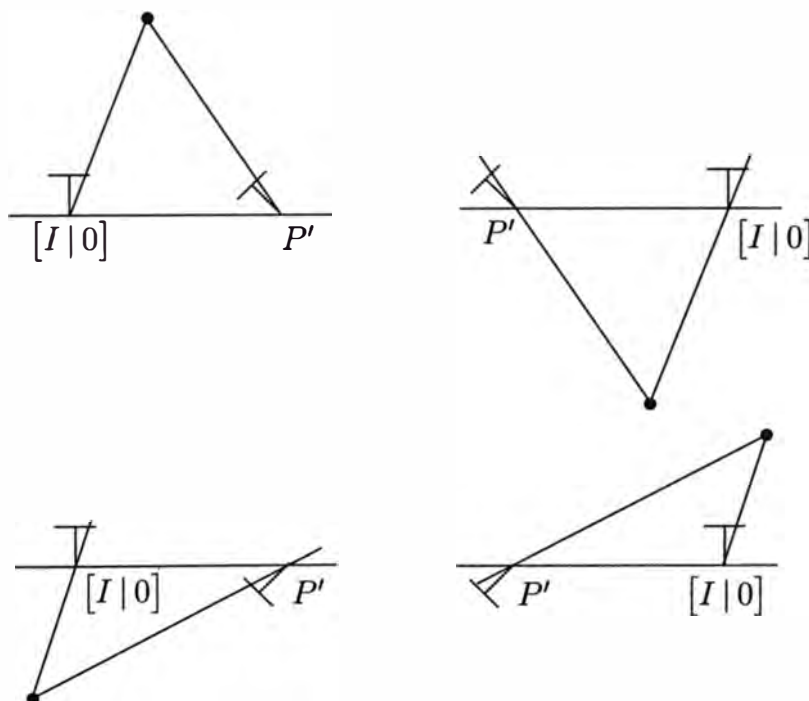


Figura 2.4: Los 4 casos de la proposición 2.9

los métodos que veremos en la sección 2.4, un punto visible por ambas cámaras, la reconstrucción también será visible por las cámaras reconstruidas, es decir, el punto

reconstruido estará al frente de ambas cámaras. Esto nos da un criterio para elegir entre las opciones que nos da la proposición 2.9.

2.3. Estimando la Matriz Fundamental

En esta sección veremos el problema de estimar la matriz fundamental de un sistema estéreo no calibrado. Para esto, supondremos conocido un conjunto de correspondencias $\{q_i \leftrightarrow q'_i\}_i$.

2.3.1. Método de los 8 puntos de Hartley

Recordemos que la matriz fundamental de un sistema estéreo cumple

$$q'^T F q = 0 \quad (2.3)$$

para cualquier par de puntos relacionados $q \leftrightarrow q'$. Dado un conjunto $\{q \leftrightarrow q'\}_{i=1}^n$ de puntos relacionados, usaremos la ecuación (2.3) para estimar la matriz F , la cual es desconocida. En particular escribiendo $q_i = [u_i : v_i : 1]$ y $q'_i = [u'_i : v'_i : 1]$, tenemos que cada correspondencia $q_i \leftrightarrow q'_i$ nos brinda una ecuación lineal en las entradas de F . Los coeficientes de esta ecuación pueden ser escritos fácilmente en términos de las coordenadas de q_i y q'_i . Específicamente, la ecuación correspondiente al par de puntos $[u_i : v_i : 1]^T$ y $[u'_i : v'_i : 1]^T$ está dada por

$$u_i u'_i F_{11} + v_i u'_i F_{12} + u'_i F_{13} + u_i v'_i F_{21} + v_i v'_i F_{22} + v'_i F_{23} + u_i F_{31} + v_i F_{32} + F_{33} = 0 \quad (2.4)$$

la cual puede expresarse de la forma

$$U_i^T f = 0$$

donde

$$U_i = (u_i u'_i, v_i u'_i, u'_i, u_i v'_i, v_i v'_i, v'_i, u_i, v_i, 1)^T \text{ y} \quad (2.5)$$

$$f = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^T \quad (2.6)$$

Luego, juntando las ecuaciones obtenidas por cada una de las correspondencias dadas, obtenemos un sistema lineal de la forma

$$A f = 0 \quad (2.7)$$

donde $A = [U_1 \cdots U_n]^T$. Es claro que el vector solución f , y por ende la matriz fundamental F , están definidas módulo un escalar, el cual puede ser nulo. Debido a esto, para evitar la solución trivial $f = 0$, impondremos la restricción $\|f\| = 1$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana. Bajo estas condiciones, es posible encontrar una solución para la ecuación (2.7) con apenas 8 pares de puntos relacionados. Si tenemos más de 8 pares de puntos, tenemos que nuestra ecuación lineal tiene más ecuaciones que incógnitas. Si asumimos la existencia de una solución no nula de este sistema, tenemos que $\text{ran}(A) < 9$. Es decir, pese a que A tiene nueve columnas, el rango de A puede ser a lo más 8. Sin embargo, debido a errores de medición, los datos que tenemos serán perturbaciones aleatorias de datos ideales. Esto implicaría que $\text{ran}(A) = 9$, con lo cual la ecuación (2.7) no tendría solución no nula. En este caso, buscaremos una solución aproximada usando el método de mínimos cuadrados, es decir resolveremos

$$\begin{aligned} & \text{mín } \|Af\| \\ & \text{s.a. } \|f\| = 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

En la sección 1.1.4 vimos que la solución al problema anterior está dada por el autovector unitario correspondiente al menor autovalor de la matriz $A^T A$, el cual puede ser obtenido mediante el método de descomposición en valores singulares. Sin embargo el F así obtenido puede no cumplir que $\det(F) = 0$, como debería cumplir la matriz fundamental de un sistema estéreo.

Imponiendo la restricción de rango 2

Una propiedad importante de la matriz fundamental es que es singular, de hecho es de rango 2. Más aun, los núcleos derecho e izquierdo están dados por los epipolos de F en las dos imágenes. Como mencionamos anteriormente, la matriz F encontrada al resolver el sistema (2.8) en general podría no tener rango 2. Hartley en [5] propuso reemplazar F por la matriz \hat{F} , tal que \hat{F} es solución de

$$\begin{aligned} & \text{mín } \|F - \hat{F}\|_{\text{frob}} \\ & \text{s.a. } \text{ran}(\hat{F}) = 2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $\|\cdot\|_{\text{frob}}$ es la norma de Frobenius. Probaremos que si $F = U \text{diag}(a, b, c) V^T$ es la descomposición en valores singulares de F , con $a \geq b \geq c \geq 0$, entonces la matriz $\hat{F} = U \text{diag}(a, b, 0) V^T$ es la que resuelve el problema (2.9).

Proposición 2.10. Sea $F = U \Sigma V^T$, donde $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$,

U y V ortogonales. Entonces la matriz $\hat{F} = U \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0)V^T$ resuelve el problema

$$\begin{aligned} & \text{mín } \|F - \hat{F}\|_{\text{frob}} \\ & \text{s.a. } \text{ran}(\hat{F}) = 2 \end{aligned}$$

Demostración: Observe que si escribimos $U = [u_1 \ u_2 \ u_3]$ y $V = [v_1 \ v_2 \ v_3]$, entonces

$$\begin{aligned} \|F - \hat{F}\|_{\text{frob}}^2 &= \|U \text{diag}(0, 0, \sigma_3)V^T\|_{\text{frob}}^2 \\ &= \|\sigma_3 u_3 v_3^T\|_{\text{frob}}^2 \\ &= \sigma_3^2 \|u_3 v_3^T\|_{\text{frob}}^2 \\ &= \sigma_3^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_{i3}^2 v_{j3}^2 \\ &= \sigma_3^2 \|u_3\|^2 \|v_3\|^2 \\ &= \sigma_3^2. \end{aligned}$$

Luego $\|F - \hat{F}\|_{\text{frob}} = \sigma_3$. Ahora sea $G \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, tal que $\text{ran}(G) = 2$ y sea $z \in \ker(G)$ con $\|z\| = 1$, luego

$$\begin{aligned} \|(F - G)z\|^2 &= \|Fz\|^2 \\ &= \|[u_1 \ u_2 \ u_3] \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)[v_1 \ v_2 \ v_3]^T z\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^3 \sigma_i (v_i^T z) u_i \right\|^2. \end{aligned}$$

Como $\{u_i\}_i$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , entonces

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_i (v_i^T z) u_i \quad \|^2 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 (v_i^T z)^2 \geq \sigma_3^2 \sum_{i=1}^3 (v_i^T z)^2.$$

Además $\sum_{i=1}^3 (v_i^T z)^2 = \|z\|^2 = 1$, pues $\{v_j\}_j$ también es base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Luego,

$$\begin{aligned} \|(F - G)z\|^2 &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 (v_i^T z)^2 \\ &\geq \sigma_3^2 \sum_{i=1}^3 (v_i^T z)^2 \\ &= \sigma_3^2 = \|F - \hat{F}\|_{\text{frob}}^2. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\|F - G\|_{\text{frob}} \geq \|F - G\| \geq \|(F - G)z\| \geq \|F - \hat{F}\|_{\text{frob}}.$$

Con lo cual la proposición está probada. \square

Así, básicamente el Método de los 8 puntos de Hartley consta de 2 pasos.

1. Dado un conjunto de puntos relacionados $\{q_i \leftrightarrow q'_i\}_{i=1}^n$, plantear y resolver la ecuación (2.7). Sea F la solución obtenida.
2. Imponer a F la restricción de rango dos dada por la proposición 2.10.

Sin embargo es posible mejorar el comportamiento numérico del método a través de un cambio de coordenadas de imagen.

Normalizando las coordenadas de imagen

Dado un sistema estéreo, suponga que aplicamos homografías de $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ a los planos de imagen de dicho sistema. Sean T y T' tales homografías. Denotemos $\tilde{q} = Tq$ y $\tilde{q}' = T'q'$. Luego, si F es la matriz fundamental del sistema original, se cumple

$$0 = q'^{\top} F q = \tilde{q}'^{\top} (T'^{-\top} F T^{-1}) \tilde{q}.$$

Esto implica que $\tilde{F} = T'^{-\top} F T^{-1}$ es la matriz fundamental correspondiente al sistema perturbado. Luego, una manera alternativa de hallar la matriz fundamental es el siguiente

1. Transformar las coordenadas de imagen de las cámaras mediante las homografías T y T' , es decir, $\tilde{q}_i = Tq_i$ y $\tilde{q}'_i = T'q'_i$.
2. Encontrar la matriz fundamental \tilde{F} correspondiente a los puntos $\{\tilde{q}_i \leftrightarrow \tilde{q}'_i\}_i$.
3. Recuperar la matriz fundamental original mediante la fórmula

$$F = T'^{\top} \tilde{F} T.$$

El problema ahora es escoger adecuadamente las homografías T y T' . En esta ocasión usaremos el llamado **Escalamiento Isotrópico**. Construir la transformación de este método consta de dos pasos. Como primer paso, las coordenadas en cada imagen son trasladadas (por una traslación distinta en cada imagen) de tal manera que

el centroide de ambos conjuntos de puntos se ubique en el origen. Supongamos que tengamos el conjunto de puntos relacionados $\{q_i \leftrightarrow q'_i\}_{i=1}^n$, con $q_i = [u_i : v_i : 1]^\top$ y $q'_i = [u'_i : v'_i : 1]^\top$. Luego los centroides de $\{q_i\}_i$ y $\{q'_i\}_i$ están dados por

$$c = (c_x, c_y)^\top := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)^\top \quad \text{y} \quad c' = (c'_x, c'_y)^\top := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u'_i, v'_i)^\top$$

respectivamente. Luego la transformaciones descritas en el primer paso del método están dadas por

$$T_c := \left[\begin{array}{c|c} I & c \\ \hline 0^\top & 1 \end{array} \right] \quad \text{y} \quad T_{c'} := \left[\begin{array}{c|c} I & c' \\ \hline 0^\top & 1 \end{array} \right].$$

Luego aplicaremos un escalamiento (en cada coordenada) de tal manera que la coordenadas de cualquier punto que elijamos tengan la misma magnitud. En resumen la transformación es como sigue

1. Los puntos son trasladados de tal manera que su centroide está en el origen.
2. Los puntos son escalados de tal manera que la distancia promedio al origen sea de $\sqrt{2}$.
3. Esta transformación es aplicada a cada una de las dos imágenes independientemente.

2.3.2. Método de minimización de distancias de puntos a rectas epipolares

Interpretemos el método de Hartley. Este consiste en resolver

$$\begin{aligned} & \text{mín } \|Af\| \\ & \text{s.a. } \|f\| = 1 \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a resolver

$$\begin{aligned} & \text{mín } \|Af\|^2 \\ & \text{s.a. } \|f\| = 1 \end{aligned}$$

Ahora, $\|Af\|^2 = \sum_{i=1}^n (U_i^\top f)^2$, donde U_i y f están dados por las ecuaciones 2.5 y 2.6. Luego, considerando $q_i = [u_i : v_i : 1]$ y $q'_i = [u'_i : v'_i : 1]$, tenemos que

$$(U_i^\top f)^2 = (q_i^\top F q_i)^2.$$

Así, el método de Hartley consiste en resolver

$$\min_{\|F\|_{\text{frob}}=1} \sum_i (q_i^\top F q_i)^2. \quad (2.10)$$

Consideremos $q \leftrightarrow q'$ y sea $l'_q = Fq = [l'_1 : l'_2 : l'_3]^\top$. Luego la distancia de q' a l'_q está dada por

$$d(q', l'_q) = \frac{q'^\top l'_q}{\sqrt{l_1'^2 + l_2'^2}} = \frac{1}{c'} q'^\top Fq \quad (2.11)$$

donde $c' = \sqrt{l_1'^2 + l_2'^2}$. Luego (2.10) puede ser escrito como

$$\min_{\|F\|_{\text{frob}}=1} \sum_i c_i'^2 d^2(q'_i, Fq_i).$$

Esto significa que el método de Hartley minimiza no solo una cantidad con significado físico ($d(q'_i, Fq_i)$), sino c'_i , la cual es una cantidad sin significado físico.

Así, de manera natural, surge considerar el siguiente problema

$$\min_{\|F\|_{\text{frob}}=1} \sum_i d^2(q'_i, Fq_i).$$

con d dada como en (2.11). Sin embargo este problema solo considera distancias en la segunda imagen. Si trabajamos en la primera imagen tenemos que, si $q \leftrightarrow q'$ entonces $d(q', l_{q'}) = d(q, F^\top q')$.

Luego consideraremos el siguiente problema

$$\min_{\|F\|_{\text{frob}}=1} \sum_{i=1}^n (d^2(q'_i, Fq_i) + d^2(q_i, F^\top q'_i)),$$

el cual minimiza distancias a rectas epipolares en las dos imágenes. Sean ahora $l'_{q_i} = Fq_i = [l'_{i1} : l'_{i2} : l'_{i3}]^\top$ y $l_{q'_i} = F^\top q'_i = [l_{i1} : l_{i2} : l_{i3}]^\top$. Luego

$$d^2(q'_i, Fq_i) + d^2(q_i, F^\top q'_i) = \frac{(q_i'^\top Fq_i)^2}{l_{i1}'^2 + l_{i2}'^2} + \frac{(q_i^\top F^\top q'_i)^2}{l_{i1}^2 + l_{i2}^2}.$$

Pero $q'^\top Fq = q^\top F^\top q'$, entonces

$$d^2(q'_i, Fq_i) + d^2(q_i, F^\top q'_i) = \left(\frac{1}{l_{i1}'^2 + l_{i2}'^2} + \frac{1}{l_{i1}^2 + l_{i2}^2} \right) (q_i'^\top Fq_i)^2.$$

Entonces nuestro objetivo sera resolver

$$\min_{\|F\|_{\text{fro}}=1} \sum_{i=1}^n w_i^2 (q_i^\top F q_i)^2, \quad (2.12)$$

con $w_i^2 = \frac{1}{l'_{i1}{}^2 + l'_{i2}{}^2} + \frac{1}{l_{i1}{}^2 + l_{i2}{}^2}$.

La manera usual de resolver el sistema anterior es usar algún método de minimización (como por ejemplo el método de Newton) usando como solución inicial la matriz fundamental hallada por el método de Hartley. Sin embargo podemos obviar el uso de un método de minimización de la siguiente manera.

Como w_i depende de las rectas epipolares de q_i y q'_i (es decir, w_i depende de la matriz fundamental del sistema), podemos establecer un método iterativo para resolver (2.12).

1. Empezar con $w_i = 1$ y resolver (2.12).
2. Actualizar los w_i con la matriz fundamental hallada en (1).
3. Resolver (2.12) con los w_i hallados en (2) y volver al paso (2) mediante mínimos cuadrados con pesos.

Observe que hacer los $w_i = 1$ en (1) y resolver (2.12), es equivalente a usar el método de Hartley, es decir, minimizar $\sum_i (q_i^\top F q_i)^2$.

2.4. Reconstrucción de Estructura 3D

Una vez calculada la matriz fundamental F del sistema estéreo, el teorema 2.4 nos brinda la fórmula para extraer las matrices de cámara (módulo homografías). Llamemos P y P' las matrices obtenidas. En esta sección estudiaremos 3 métodos para calcular la estructura 3D de la escena.

2.4.1. Método Lineal

Sean $q \leftrightarrow q'$ puntos relacionados, con $q = [u : v : 1]^\top$ y $q' = [u' : v' : 1]^\top$. Sea Q tal que $PQ \simeq q$ y $P'Q \simeq q'$. Luego existen $s, s' \neq 0$ tales que

$$s \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = PQ, \quad s' \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = P'Q. \quad (2.13)$$

Expresemos P y P' en función de sus filas, es decir

$$P = \begin{bmatrix} P_1^\top \\ P_2^\top \\ P_3^\top \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} P'_1{}^\top \\ P'_2{}^\top \\ P'_3{}^\top \end{bmatrix}.$$

Luego (2.13) se puede escribir como

$$s \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^\top Q \\ P_2^\top Q \\ P_3^\top Q \end{bmatrix}, \quad s' \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_1{}^\top Q \\ P'_2{}^\top Q \\ P'_3{}^\top Q \end{bmatrix}.$$

Entonces $s = P_3^\top Q$, $s' = P'_3{}^\top Q$ y

$$\begin{aligned} P_3^\top Q u &= P_1^\top Q, & P'_3{}^\top Q u' &= P'_1{}^\top Q \\ P_3^\top Q v &= P_2^\top Q, & P'_3{}^\top Q v' &= P'_2{}^\top Q, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el sistema 4×4

$$\begin{bmatrix} P_1^\top - u P_3^\top \\ P_2^\top - v P_3^\top \\ P'_1{}^\top - u' P'_3{}^\top \\ P'_2{}^\top - v' P'_3{}^\top \end{bmatrix} Q = 0 \quad (2.14)$$

Así, como la solución de este sistema está definida salvo escala, podemos imponer la restricción $\|Q\| = 1$. Con esto tendríamos un problema de mínimos cuadrados, el cual puede ser resuelto mediante el método de descomposición en valores singulares.

2.4.2. Método No Lineal

Es claro que el método lineal resuelve

$$\min_Q \|P_1^\top Q - u P_3^\top Q\|^2 + \|P_2^\top Q - v P_3^\top Q\|^2 + \|P'_1{}^\top Q - u' P'_3{}^\top Q\|^2 + \|P'_2{}^\top Q - v' P'_3{}^\top Q\|^2.$$

El problema del método lineal es que la expresión anterior no representa alguna magnitud física. Lo ideal sería resolver

$$\min_Q \left\| \frac{P_1^\top Q}{P_3^\top Q} - u \right\|^2 + \left\| \frac{P_2^\top Q}{P_3^\top Q} - v \right\|^2 + \left\| \frac{P'_1{}^\top Q}{P'_3{}^\top Q} - u' \right\|^2 + \left\| \frac{P'_2{}^\top Q}{P'_3{}^\top Q} - v' \right\|^2.$$

Lo anterior puede escribirse como

$$\min_Q \frac{1}{w^2} (\|P_1^\top Q - uP_3^\top Q\|^2 + \|P_2^\top Q - vP_3^\top Q\|^2) + \frac{1}{w'^2} (\|P_1'^\top Q - u'P_3'^\top Q\|^2 + \|P_2'^\top Q - v'P_3'^\top Q\|^2). \quad (2.15)$$

donde $w = P_3^\top Q$ y $w' = P_3'^\top Q$. El método no lineal consiste en utilizar un método de minimización genérico para resolver (2.15). Sin embargo, debido a que los métodos genéricos de minimización suelen ser computacionalmente lentos, podemos evitar su uso proponiendo el método lineal iterativo.

2.4.3. Método Lineal Iterativo

Consideremos la ecuación (2.15). De manera análoga al método expuesto en la sección 2.3.2, como w y w' dependen de la reconstrucción Q , podemos establecer un método iterativo para resolver (2.15).

1. Hallar Q con el método lineal.
2. Actualizar los w y w' con el punto Q obtenido en (1).
3. Resolver (2.15) con w y w' hallados en (2) mediante mínimos cuadrados con pesos.

Capítulo 3

Reconstrucción con Múltiples Vistas

Supongamos que tenemos un conjunto de m puntos en \mathbb{R}^3 visibles en n imágenes tomadas por cámaras pinhole. Nuestro objetivo es recuperar la estructura 3D (es decir, las ubicaciones de los puntos), y las cámaras (representadas por sus matrices de cámara) a partir de mediciones hechas en las imágenes.

Definición. Dadas n imágenes $\{\Pi_i\}_{i=1}^n$ de cámaras con matrices $\{P_i\}_{i=1}^n$, una **correspondencia** es un conjunto $\{q_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^2$ tal que: $q_i \in \Pi_i$ y $\exists Q \in \mathbb{P}\mathbb{R}^3$ tal que $q_i \simeq P_i Q$, para todo i .

Definición. Dado un conjunto de correspondencias $\{q_{ij}\}_{ij=1}^{nm}$, un par ordenado $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ se denominara **reconstrucción de $\{q_{ij}\}_{ij}$** , si $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{R}^{3 \times 4})^n$, $\mathcal{Q} = (Q_1, \dots, Q_m) \in (\mathbb{P}\mathbb{R}^3)^m$, y se cumple que $P_i Q_j = q_{ij}$ para todo i, j .

Definición. Diremos que un conjunto de \mathbb{R}^n está en **posición general**, si no todos los elementos de dicho conjunto se encuentran en un mismo hiperplano de \mathbb{R}^n .

Así, podemos establecer formalmente el **problema de reconstrucción de múltiples vistas**

Definición. Dado un conjunto de correspondencias $\{q_{ij}\}_{ij=1}^{nm}$, el **problema de reconstrucción de múltiples vistas** consiste en encontrar una reconstrucción de $\{q_{ij}\}_{ij}$.

Observación. En adelante, para evitar casos patológicos, asumiremos que las cámaras a reconstruir tienen centros ópticos distintos 2 a 2, y que tenemos al menos 8 puntos en \mathbb{R}^3 , los cuales están en posición general.

Análogo al caso de dos vistas, se tiene que la relación existente entre **reconstrucciones** es de equivalencia proyectiva.

Definición. Dos reconstrucciones $((P_i)_i, (Q_j)_j)$ y $((\hat{P}_i)_i, (\hat{Q}_j)_j)$ son **proyectivamente equivalentes** si existe homografía H tal que:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_j &= HQ_j, \quad \text{para todo } j \\ \hat{P}_i &= P_i H^{-1}, \quad \text{para todo } i\end{aligned}$$

Teorema 3.1. Sean $((P_i)_i, (Q_j)_j)$ y $((\hat{P}_i)_i, (\hat{Q}_j)_j)$ dos reconstrucciones de $\{q_{ij}\}_{ij=1}^{nm}$. Entonces $((P_i)_i, (Q_j)_j)$ y $((\hat{P}_i)_i, (\hat{Q}_j)_j)$ son proyectivamente equivalentes.

Demostración: Procedamos por inducción sobre el número de cámaras n .

Si $n = 2$, sean $((P_1, P_2), (Q_j)_j)$ y $((\hat{P}_1, \hat{P}_2), (\hat{Q}_j)_j)$ dos reconstrucciones de $\{q_{1j} \leftrightarrow q_{2j}\}_{j=1}^m$. Como $m \geq 8$, podemos reconstruir la matriz fundamental del sistema a partir de las correspondencias $\{q_{1j} \leftrightarrow q_{2j}\}_j$. Luego los sistemas estéreo (P_1, P_2) y (\hat{P}_1, \hat{P}_2) tienen la misma matriz fundamental, entonces, por el teorema 2.3 existe H homografía de $\mathbb{P}R^3$ tal que $\hat{P}_1 = P_1 H$ y $\hat{P}_2 = P_2 H$. Así, bastará demostrar que para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ se cumple que $H\hat{Q}_j = Q_j$. En efecto, tenemos que para $i = 1, 2$ y $j \in \{1, \dots, m\}$, se cumple

$$q_{ij} \simeq P_i Q_j \simeq \hat{P}_i \hat{Q}_j = P_i H \hat{Q}_j$$

Luego existe λ_i , tal que

$$P_i(H\hat{Q}_j - \lambda_i Q_j) = 0.$$

Esto implica que $H\hat{Q}_j - \lambda_i Q_j \simeq C_i$, donde C_i es el centro de la cámara i . Lo anterior a su vez implica que existe μ_i tal que $H\hat{Q}_j = \lambda_i Q_j + \mu_i C_i$. Esto significa que $H\hat{Q}_j$ está en la intersección de las rectas que pasan por los centros de cámara y Q_j . Como $C_1 \neq C_2$ entonces dichas rectas se intersectan en un único punto. Luego $H\hat{Q}_j = Q_j$, para todo j .

Supongamos ahora que todo par de reconstrucciones de un sistema de n cámaras y m puntos es proyectivamente equivalente. Sean $((P_i)_{i=1}^{n+1}, (Q_j)_{j=1}^m)$ y $((\hat{P}_i)_{i=1}^{n+1}, (\hat{Q}_j)_{j=1}^m)$ dos reconstrucciones de $\{q_{ij}\}_{ij=1}^{n+1, m}$. Por hipótesis inductiva, existe homografía H de $\mathbb{P}R^3$ tal que $H\hat{Q}_j = Q_j$ para todo j , y $\hat{P}_i = P_i H$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, bastará demostrar que $\hat{P}_{n+1} = P_{n+1} H$. En efecto, desde que

$$q_{n+1, j} \simeq P_{n+1} Q_j \simeq \hat{P}_{n+1} \hat{Q}_j = P_{n+1} H \hat{Q}_j,$$

para todo j , entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $P_{n+1} H \hat{Q}_j = \lambda \hat{P}_{n+1} Q_j$. Entonces $(P_{n+1} H -$

$\lambda \hat{P}_{n+1})Q_j = 0$, para todo j . Esto implica que, como $m \geq 8$ y $\{Q_j\}$ esta en posición general, que $P_{n+1}H - \lambda \hat{P}_{n+1}$, es decir, $P_{n+1}H = \hat{P}_{n+1}$. \square

Para efectuar la reconstrucción computacionalmente, se presentan 2 métodos, uno no iterativo y otro iterativo.

3.1. Método de factorización de Sturm-Triggs

Este método fue propuesto en 1996 por Peter Sturm y Bill Triggs. Dado un conjunto de correspondencias $\{q_{ij}\}_{ij}$, queremos obtener $((P_i)_i, (Q_j)_j)$ tal que

$$q_{ij} \simeq P_i Q_j \quad (3.1)$$

Fijando el escalamiento en q_{ij} , Q_j y P_i , tenemos que existe λ_{ij} (denominado **profundidad proyectiva**) tal que $\lambda_{ij}q_{ij} = P_i Q_j$. Observe que si consideramos a q_{ij} y a Q_j afinmente normalizados y a P_i tal que su ultima fila tenga norma unitaria, entonces si consideramos $Q_j = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})^\top$ en el sistema de coordenadas de la cámara i , se cumple que $\lambda_{ij} = z_{ij}$, es decir λ_{ij} es la distancia de Q_j al plano $x_c y_c$ de la cámara i .

Suponiendo conocidos las profundidades proyectivas $\{\lambda_{ij}\}$ consideremos

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} \lambda_{11}q_{11} & \cdots & \lambda_{1m}q_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1}q_{n1} & \cdots & \lambda_{nm}q_{nm} \end{bmatrix}_{3n \times m} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}_{3n \times 4} \quad [Q_1, \cdots, Q_m]_{4 \times m} \end{aligned}$$

Luego $\text{ran}(W) \leq 4$. Descompongamos W en valores singulares $W = U\Sigma V^\top$, donde

$$\begin{aligned} U_{3n \times r} &= [u_1, \dots, u_r] \\ \Sigma_{r \times r} &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \\ V_{m \times r} &= [v_1, \dots, v_r] \end{aligned}$$

con $r = \min\{m, 3n\}$, y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ los valores singulares de W . Como W tiene rango a lo más 4, se tiene que $\sigma_i = 0$ cuando $i > 4$, es decir solo las primeras columnas de U y V contribuyen a W . Sean $U_4 = [u_1, \dots, u_4]$, $V_4 = [v_1, \dots, v_4]$ y

$\Sigma_4 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_4)$. Entonces

$$W = U_4 \Sigma_4 V_4^\top.$$

Considerando cualquier factorización de Σ en dos matrices Σ' y Σ'' , ambas en $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, tenemos

$$W = U_4 \Sigma' \Sigma'' V_4^\top = \hat{P}_{3n \times 4} \hat{Q}_{4 \times m}$$

con $P = U_4 \Sigma'$ y $\hat{Q} = \Sigma'' V_4^\top$. Podemos interpretar \hat{P} como una concatenación de n matrices 3×4 representando matrices de cámara, y a \hat{Q} como una concatenación de m puntos en $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$, es decir

$$W = \hat{P} \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_n \end{bmatrix}_{3n \times 4} [\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_m]_{4 \times m} \quad (3.2)$$

Vemos que $(\{\hat{P}_i\}_i, \{\hat{Q}_j\}_j)$ es efectivamente una reconstrucción, desde que

$$\hat{P}_i \hat{Q}_j = \lambda_{ij} q_{ij} \simeq q_{ij}.$$

Para recuperar las profundidades proyectivas haremos uso de la geometría epipolar. Probaremos que

$$\lambda_{ip} = \frac{\langle e_{ij} \times q_{ip}, F_{ji} q_{jp} \rangle}{\|e_{ij} \times q_{ip}\|} \lambda_{jp}, \quad (3.3)$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $p \in \{1, \dots, m\}$.

Fijemos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $p \in \{1, \dots, m\}$. La ecuación (3.1) implica que, la matriz

$$A_{ij}^p := \begin{bmatrix} P_i & \lambda_{ip} q_{ip} \\ P_j & \lambda_{jp} q_{jp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i & P_i Q_p \\ P_j & P_j Q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ P_j \end{bmatrix} [I_{4 \times 4} | Q_p]$$

tiene rango a lo más 4. Luego las submatrices de orden 5 de esta tienen determinante cero. Si denotamos por $P_i = [P_{1i} \ P_{2i} \ P_{3i}]^\top$ a la representación de P por filas, podemos

expresar a A_{ij}^p como

$$A_{ij}^p = \begin{bmatrix} P_{1i}^\top & \lambda_{ip}u_{ip} \\ P_{2i}^\top & \lambda_{ip}v_{ip} \\ P_{3i}^\top & \lambda_{ip} \\ P_{1j}^\top & \lambda_{jp}u_{jp} \\ P_{2j}^\top & \lambda_{jp}v_{jp} \\ P_{3j}^\top & \lambda_{jp} \end{bmatrix}.$$

Consideremos las 3 submatrices de orden 5 obtenidas al eliminar las tres primeras filas de A_{ij}^p . Como cada una de estas tiene determinante cero, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_{ip}v_{ip} \begin{vmatrix} P_{3i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} - \lambda_{ip} \begin{vmatrix} P_{2i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} + \lambda_{jp}u_{jp} \begin{vmatrix} P_{2i}^\top \\ P_{3i}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} \\ - \lambda_{jp}v_{jp} \begin{vmatrix} P_{2i}^\top \\ P_{3i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} + \lambda_{jp} \begin{vmatrix} P_{2i}^\top \\ P_{3i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \end{vmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ip}u_{ip} \begin{vmatrix} P_{3i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} - \lambda_{ip} \begin{vmatrix} P_{1i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} + \lambda_{jp}u_{jp} \begin{vmatrix} P_{1i}^\top \\ P_{3i}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} \\ - \lambda_{jp}v_{jp} \begin{vmatrix} P_{2i}^\top \\ P_{3j}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} + \lambda_{jp} \begin{vmatrix} P_{1i}^\top \\ P_{3i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \end{vmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ip}u_{ip} \begin{vmatrix} P_{2i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} - \lambda_{ip}v_{ip} \begin{vmatrix} P_{1i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} + \lambda_{jp}u_{jp} \begin{vmatrix} P_{1i}^\top \\ P_{2i}^\top \\ P_{2j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} \\ - \lambda_{jp}v_{jp} \begin{vmatrix} P_{2i}^\top \\ P_{3j}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{3j}^\top \end{vmatrix} + \lambda_{jp} \begin{vmatrix} P_{1i}^\top \\ P_{2i}^\top \\ P_{1j}^\top \\ P_{2j}^\top \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Expresaremos ahora las ecuaciones anteriores en función de las componentes de la matriz fundamental y el epipolo de la cámara j bajo la cámara i . Puesto que $P_i Q_p = q_{ip}$ y $P_j Q_p = q_{jp}$, tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_{ip} P_{3i}^\top Q_p - P_{1i}^\top Q_p &= 0 \\ v_{ip} P_{3i}^\top Q_p - P_{2i}^\top Q_p &= 0 \\ u_{ip} P_{2i}^\top Q_p - v_{ip} P_{1i}^\top Q_p &= 0 \\ u_{jp} P_{3j}^\top Q_p - P_{1j}^\top Q_p &= 0 \\ v_{jp} P_{3j}^\top Q_p - P_{2j}^\top Q_p &= 0 \\ u_{jp} P_{2j}^\top Q_p - v_{jp} P_{1j}^\top Q_p &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando la 2da, 3ra, 5ta y 6ta ecuación, formamos el sistema $\mathcal{A}Q_p = 0$, donde

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} u_{ip} P_{2i}^\top - v_{ip} P_{1i}^\top \\ v_{ip} P_{3i}^\top - P_{2i}^\top \\ u_{jp} P_{2j}^\top - v_{jp} P_{1j}^\top \\ v_{jp} P_{3j}^\top - P_{2j}^\top \end{bmatrix}_{4 \times 4}.$$

Para que el sistema anterior tenga solución no nula, precisamos de que \mathcal{A} tenga rango de a lo más 3, es decir, se cumple $\det \mathcal{A} = 0$. Como $\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}^\top$ tenemos que

$$0 = \det \mathcal{A} = \det(u_{ip} P_{2i} - v_{ip} P_{1i}, v_{ip} P_{3i} - P_{2i}, u_{jp} P_{2j} - v_{jp} P_{1j}, v_{jp} P_{3j} - P_{2j}).$$

Teniendo cuenta que el determinante de matrices es una función multilineal alternada, obtenemos, luego de agrupar convenientemente, que

$$v_{ip} v_{jp} (q_{jp}^\top F q_{ip}) = 0, \quad (3.7)$$

donde

$$F = \begin{bmatrix} \det(P_{2i}, P_{3i}, P_{2j}, P_{3j}) & -\det(P_{1i}, P_{3i}, P_{2j}, P_{3j}) & \det(P_{1i}, P_{2i}, P_{2j}, P_{3j}) \\ -\det(P_{2i}, P_{3i}, P_{1j}, P_{3j}) & \det(P_{1i}, P_{3i}, P_{1j}, P_{3j}) & -\det(P_{1i}, P_{2i}, P_{1j}, P_{3j}) \\ \det(P_{2i}, P_{3i}, P_{1j}, P_{2j}) & -\det(P_{1i}, P_{3i}, P_{1j}, P_{2j}) & \det(P_{1i}, P_{2i}, P_{1j}, P_{2j}) \end{bmatrix}$$

Como F no depende de q_{ip} y q_{jp} , y (3.7) se cumple para q_{ip}, q_{jp} arbitrarios, concluimos que $F = F_{ij}$.

De manera análoga, deducimos que

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \det(P_{1i}, P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}) \\ \det(P_{2i}, P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}) \\ \det(P_{3i}, P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}) \end{bmatrix}.$$

Así, las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6), pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \lambda_{ip}v_{ip}e_{ij}^3 - \lambda_{ip}e_{ij}^2 + \lambda_{jp}u_{jp}F_{ij}^{11} + \lambda_{jp}v_{jp}F_{ij}^{21} + \lambda_{jp}F_{ij}^{31} &= 0 \\ \lambda_{ip}u_{ip}e_{ij}^3 - \lambda_{ip}e_{ij}^1 - \lambda_{jp}u_{jp}F_{ij}^{12} - \lambda_{jp}v_{jp}F_{ij}^{22} - \lambda_{jp}F_{ij}^{32} &= 0 \\ \lambda_{ip}u_{ip}e_{ij}^2 - \lambda_{ip}v_{ip}e_{ij}^1 + \lambda_{jp}u_{jp}F_{ij}^{13} + \lambda_{jp}v_{jp}F_{ij}^{23} + \lambda_{jp}F_{ij}^{33} &= 0 \end{aligned}$$

Sumando las tres ecuaciones, factorizando λ_{ip} y λ_{jp} , y agrupando convenientemente, tenemos

$$\lambda_{ip} \left(\begin{bmatrix} e_{ij}^1 \\ e_{ij}^2 \\ e_{ij}^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{ip} \\ v_{ip} \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \lambda_{jp} \begin{bmatrix} F_{ij}^{11} & F_{ij}^{21} & F_{ij}^{31} \\ F_{ij}^{12} & F_{ij}^{22} & F_{ij}^{32} \\ F_{ij}^{13} & F_{ij}^{23} & F_{ij}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{jp} \\ v_{jp} \\ 1 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\lambda_{ij}(e_{ij} \times q_{ip}) = \lambda_{jp}F_{ij}^\top q_{jp}. \quad (3.8)$$

Multiplicando escalarmente a (3.8) por $(e_{ij} \times q_{ip})$ obtenemos (3.3).

Observaciones.

1. Usando la ecuación (3.3), podemos obtener las profundidades proyectivas, si conocemos el valor de λ_{1p} . Sin embargo, un cambio del valor de λ_{1p} , causaría un cambio de escala en la p -ésima matriz de cámara obtenida. Esto quiere decir, que no importa el valor de λ_{1p} que demos inicialmente si este, claro está, es no nulo. En la práctica consideraremos $\lambda_{1p} = 1$, para todo p . Además, esto implica que teóricamente podemos re-escalar a la matriz W por cada 3 filas, sin que esto afecte la solución. Es claro que en la práctica esto no es cierto, sin embargo, re-escalaremos la matriz W por filas para mejorar su condicionamiento numérico.
2. De la misma manera, si re-escalamos la columna i de la matriz W , esto causará un cambio de escala en la i -ésima columna de la matriz \hat{Q} obtenida, la cual es el i -ésimo punto reconstruido. Esto implica que, teóricamente, también podemos re-escalar la matriz W por columnas sin afectar la solución obtenida.
3. Observe que para calcular las profundidades proyectivas, solo basta calcular las matrices fundamentales $F_{i,i+1}$, con $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Además, por los mismos argumentos explicados en el método de Hartley, haremos una normalización de las coordenadas de las imágenes.

Así, el método de Sturm-Triggs se resume en lo siguiente

1. Normalizar las coordenadas de imagen mediante homografías T_i de $\mathbb{P}R^2$.
2. Estimar las matrices fundamentales de los sistemas $(i, i+1)$, con $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
3. Determinar las profundidades proyectivas mediante la ecuación (3.3), considerando $\lambda_{1p} = 1$.
4. Construir la matriz W usando las profundidades proyectivas obtenidas.
5. Re-escalar la matriz W por columnas, de tal manera que la norma de cada columna sea 1.
6. Re-escalar la matriz W por filas, de tal manera que la norma de Frobenius de la submatriz $3 \times m$ de W sea 1.
7. Calcular la descomposición en valores singulares de W , y factorizar de acuerdo a lo visto anteriormente.
8. Adaptar la reconstrucción obtenida considerando las homografías aplicadas en el paso 1.

3.2. Método de Bundle Adjustment

Dada una reconstrucción $((P_i)_i, (Q_j)_j)$, considere la función de error:

$$E((P_i)_i, (Q_j)_j) = \sum_{ij} \|q_{ij} - P_i Q_j\|^2. \quad (3.9)$$

Es decir, el método de Bundle Adjustment intenta minimizar el error de reproyección en los distintos planos de imagen de las cámaras. Para resolver este problema, en lugar de usar métodos genéricos de minimización, usaremos métodos que exploten la forma especial que tiene la función a minimizar.

Consideraremos el problema en su forma más general, es decir

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} E(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \quad (3.10)$$

donde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definiendo $f = [f_1, \dots, f_m]^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tenemos que (3.10) es equivalente a

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)^\top f(x).$$

3.2.1. Método de Gauss-Newton

Consideremos

$$F(x) = \frac{1}{2} \nabla E(x).$$

Luego $F(x) = Jf(x)^\top \cdot f(x)$. Entonces

$$JF(x) = Jf(x)^\top Jf(x) + \sum_i f_i(x) \nabla^2 f_i(x) = \frac{1}{2} \nabla^2 E(x).$$

Sin embargo, si x es suficientemente cercano al óptimo, podemos considerar

$$\nabla^2 E(x) \approx 2Jf(x)^\top Jf(x). \quad (3.11)$$

Así, por el método de Newton, consideramos la iteración $x_{n+1} = x_n + h_n$ con h_n solución de

$$Jf(x_n)^\top Jf(x_n) h_n = -Jf(x_n)^\top f(x_n).$$

En resumen, el método de Gauss-Newton es el siguiente

1. Hacer $n = 0$ y elegir x_0 en \mathbb{R}^n , de preferencia cerca de un posible mínimo.
2. Calcular $Jf(x_n)$.
3. Hacer $H_n = Jf(x_n)^\top Jf(x_n)$.
4. Calcular h_n de $H_n h_n = -Jf(x_n)^\top f(x_n)$.
5. Hacer $x_{n+1} = x_n + h_n$, $n = n + 1$, e ir al paso 1.

Observaciones.

1. Al considerar (3.11) se evita el cálculo de las segundas derivadas de f_i , lo cual se habría hecho si hubiésemos usado el método de Newton para minimizar $E(x)$.
2. H_n es una aproximación del Hessiano de E en x_n .
3. $Jf(x)^\top Jf(x)$ es semi-definida positiva.

De manera similar al método de Newton, el método de Gauss-Newton es de descenso.

Proposición 3.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple $h_n^\top \nabla E(x_n) < 0$.

Demostración: Por definición de E se tiene que $\nabla E(x) = 2Jf(x)^\top \cdot f(x)$. Además $h_n = -(Jf(x_n)^\top Jf(x_n))^{-1} Jf(x_n)^\top f(x_n)$ Luego

$$h_n^\top \nabla E(x_n) = -2(Jf(x_n)^\top f(x_n))^\top (Jf(x_n)^\top Jf(x_n))^{-1} Jf(x_n)^\top f(x_n).$$

Y desde que $(Jf(x_n)^\top Jf(x_n))^{-1}$ es definida positiva, entonces $h_n^\top \nabla E(x_n) < 0$. \square

3.2.2. Método de Levenberg-Marquardt

Desarrollado independientemente por K. Levenberg en 1944 y por D. Marquardt en 1963, este método es una tentativa de interpolar los métodos de gradiente descendiente y de Newton. En este método, dados $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_n \geq 0$, obtenemos h_n resolviendo

$$(H_n + \lambda_n I)h_n = -2Jf(x_n)^\top f(x_n),$$

donde H_n es una aproximación del hessiano $HE(x)$ de E e I es la matriz identidad. Observe que para $H_n = Jf(x_n)^\top Jf(x_n)$ y λ_n muy pequeño tenemos el método de Gauss-Newton, mientras que haciendo λ_n tender al infinito, obtenemos el método de gradiente descendiente. En la práctica, el rol del parámetro λ es el de refinar el método, en el caso en que efectivamente nos acerquemos a una solución (en este caso disminuimos λ conforme vayamos iterando, lo cual implica que estamos usando el método de Gauss-Newton), o aceleremos, en el caso que la convergencia del método sea lenta (en este caso aumentamos λ conforme vayamos iterando, lo cual implica que estamos usando el método de gradiente descendiente.)

En resumen, el método de Levenberg-Marquardt es el siguiente

1. Hacer $n = 0$, $\lambda_0 = 1$ y elegir x_0 en \mathbb{R}^n .
2. Calcular $H_n = 2Jf(x_n)^\top Jf(x_n)$ (o alguna aproximación para $HE(x)$).
3. Calcular h_n de $(H_n + \lambda_n I)h_n = -Jf(x_n)^\top f(x_n)$.
4. Hacer $y_n = x_n + h_n$.
5. Si $f(y_n) < f(x_n)$, hacer $\lambda_{n+1} = 10^{-1}\lambda_n$, $x_{n+1} = y_n$, $n = n + 1$ e ir al paso 2. En caso contrario, hacer $\lambda_{n+1} = 10\lambda_n$, $x_{n+1} = x_n$, $n = n + 1$ e ir al paso 2.

3.3. Método de Reconstrucción Euclídea

Este método basa su utilidad en que, si conocemos la matriz de parámetros intrínsecos de las cámaras a reconstruir, podemos disminuir la ambigüedad proyectiva existente entre reconstrucciones a una ambigüedad euclídea¹.

Entonces, supongamos conocidas las matrices de parámetros intrínsecos $\{K_i\}_{i=1}^n$. Sea $\{q_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$ un conjunto de correspondencias. Estas están dadas por imágenes tomadas por un sistema de n cámaras pinhole con matrices $\{P_i\}_i$. Asumiendo que las cámaras tienen centros distintos, podemos afirmar que (P_{i-1}, P_i) es un sistema estéreo, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$. Entonces, si $i > 1$, partiendo del conjunto de puntos relacionados $\{q_{i-1j} \leftrightarrow q_{ij}\}_j$, y usando los métodos estudiados en la sección 2.2 y 2.3, podemos obtener la matriz esencial del sistema (P_{i-1}, P_i) . Luego, por las proposiciones 2.8 y 2.9, podemos estimar las matrices de cámara $(\hat{P}_{i-1}, \hat{P}_i)$ salvo una transformación afín de $\mathbb{P}R^3$, la cual llamaremos H_i . Esta homografía hace que el sistema reconstruido sea canónico. Luego, si $P_{i-1} = [R_i | t_i]$, entonces

$$H_i = \left[\begin{array}{c|c} R_i^{-1} & -R_i^{-1}t_i \\ \hline 0^\top & 1 \end{array} \right].$$

Luego, bastará considerar $P_i = \hat{P}_i H_i^{-1}$. De esta manera podemos reconstruir las matrices de cámara a partir de las correspondencias, y a diferencia del método de Sturm-Triggs, la reconstrucción será euclídea.

¹En este caso, ambigüedad “Euclídea” significa una ambigüedad módulo movimiento rígido y escalamiento.

Capítulo 4

Resultados y Conclusiones

En este capítulo mostraremos algunos resultados experimentales obtenidos al comparar los distintos métodos de reconstrucción. En primer lugar haremos una comparación de los métodos usando datos virtuales y usando datos reales. Para obtener los resultados que mostramos aquí, se utilizó el programa Matlab v.6.5. Finalmente, expondremos nuestras conclusiones acerca de los métodos estudiados.

4.1. Datos Virtuales

4.1.1. Método de Sturm-Triggs

Para analizar empíricamente este método, utilizaremos un sistema formado por n cámaras y m puntos en \mathbb{R}^3 . Los centros de las cámaras están distribuidas uniformemente sobre una circunferencia de radio 10 y centro en el origen, que yace sobre el plano $y = 0$, y con ejes ópticos apuntando hacia el origen. Además, la estructura fue generada aleatoriamente sobre el cubo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$.

Para observar experimentalmente el comportamiento del método, realizamos el siguiente experimento 30 veces, para $n = 5, 10, 15$ y 20.

1. Determinar $m = 20$ puntos al azar en el cubo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$.
2. Generar las matrices de imagen.
3. Añadir a las errores gaussianos que van de 0 a 0.05, con una diferencia de 0.001.
4. Usar el método de Sturm Triggs para obtener una reconstrucción.

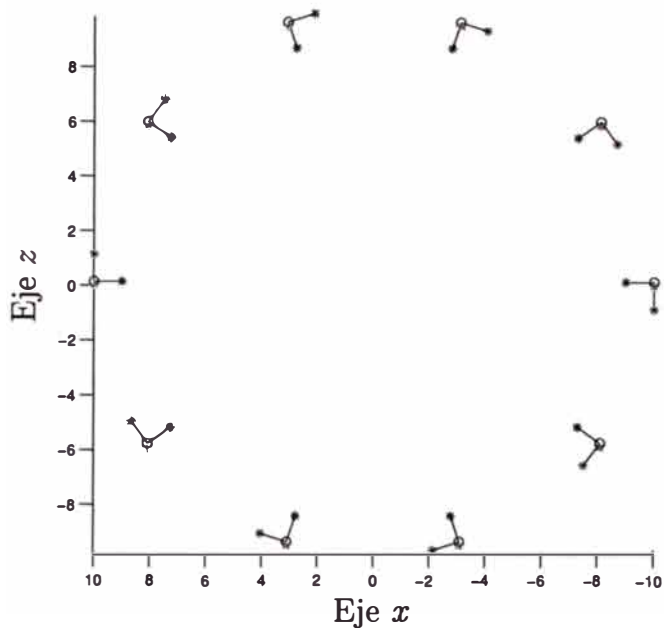


Figura 4.1: Ubicación de las cámaras virtuales

5. Calcular el error de reproyección:

$$\frac{1}{mn} \sum_i \sum_j \|P_i Q_j - q_{ij}\|.$$

Los datos mostrados en la figura 4.3, es el promedio de los resultados obtenidos al realizar 30 veces el experimento anterior.

Observe que el error de reproyección crece linealmente con respecto al error de imagen aplicado. Sin embargo, la pendiente de la recta obtenida crece con respecto al número de cámaras usado. Es decir, a mayor cantidad de cámaras usadas, el error de reproyección crece con mayor rapidez respecto al error de imagen aplicado.

Para observar mejor el comportamiento del error de reproyección respecto al número de cámaras, realizamos una modificación al experimento anterior. En lugar de variar el error de imagen aplicado, variamos el número de cámaras utilizado en la reconstrucción. La figura 4.4 nos muestra el promedio de los resultados obtenidos al realizar el experimento modificado 30 veces.

Se observa de la figura 4.4, que el error de reproyección crece linealmente respecto al número de cámaras utilizado. Como era de esperarse, la pendiente de la recta obtenida crece con respecto al error aplicado a las imágenes. Observamos también que, cuando el error de reproyección es 0.05, el método de Sturm-Triggs no se comporta adecuadamente. Esto se debe principalmente a que los errores aplicados en las imágenes

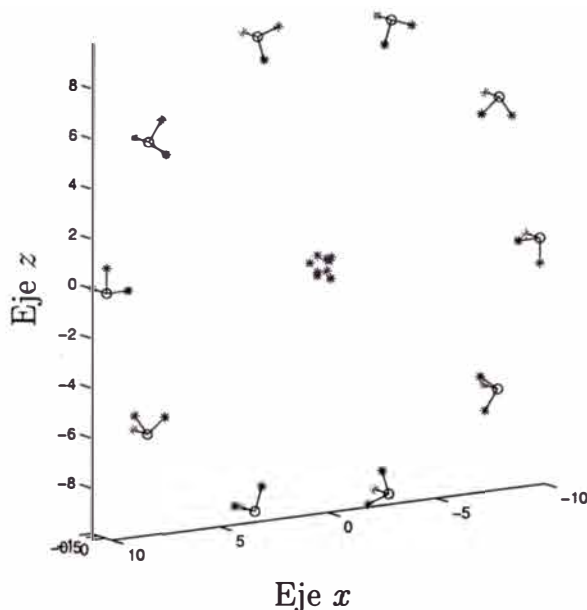


Figura 4.2: Ubicación de la estructura virtual

implican errores en el cálculo de la matriz fundamental, lo que a su vez implica errores en el cálculo de las profundidades proyectivas. Sin embargo, recordemos que los datos de imagen usados están normalizados al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. En la práctica, utilizando una imagen de 320×240 (la cual, para las cámaras digitales existentes en el mercado actualmente, es una imagen bastante pequeña), un error de 0.05 sobre $[0, 1]^2$ es equivalente a aplicar un error de 16 píxeles sobre la imagen dada.

En conclusión, el método de Sturm-Triggs es un método fiable, que se comporta bastante bien para errores razonables. Sin embargo, como hemos mencionado ya, puede no generar una reconstrucción “agradable” a la vista. Esto puede apreciarse en la figura 4.5.

4.1.2. Método de Reconstrucción Euclídea

Como mencionamos en el capítulo 3, el método de reconstrucción euclídea. Para observar experimentalmente el comportamiento de este método, realizamos los mismos experimentos vistos en la subsección anterior, sin embargo, las gráficas mostradas a continuación son los promedios obtenidos de realizar los experimentos 50 veces. Considere la figura 4.6. Observamos que para dos cámaras, el error de reproyección varía linealmente con respecto al error aplicado a las imágenes. Sin embargo, para más de dos cámaras, el error de reproyección adquiere valores prohibitivos, lo cual muestra que este método, en la práctica, no se comporta bien cuando es usado con más de dos cámaras. Para corroborar esto, consideremos la figura 4.7.

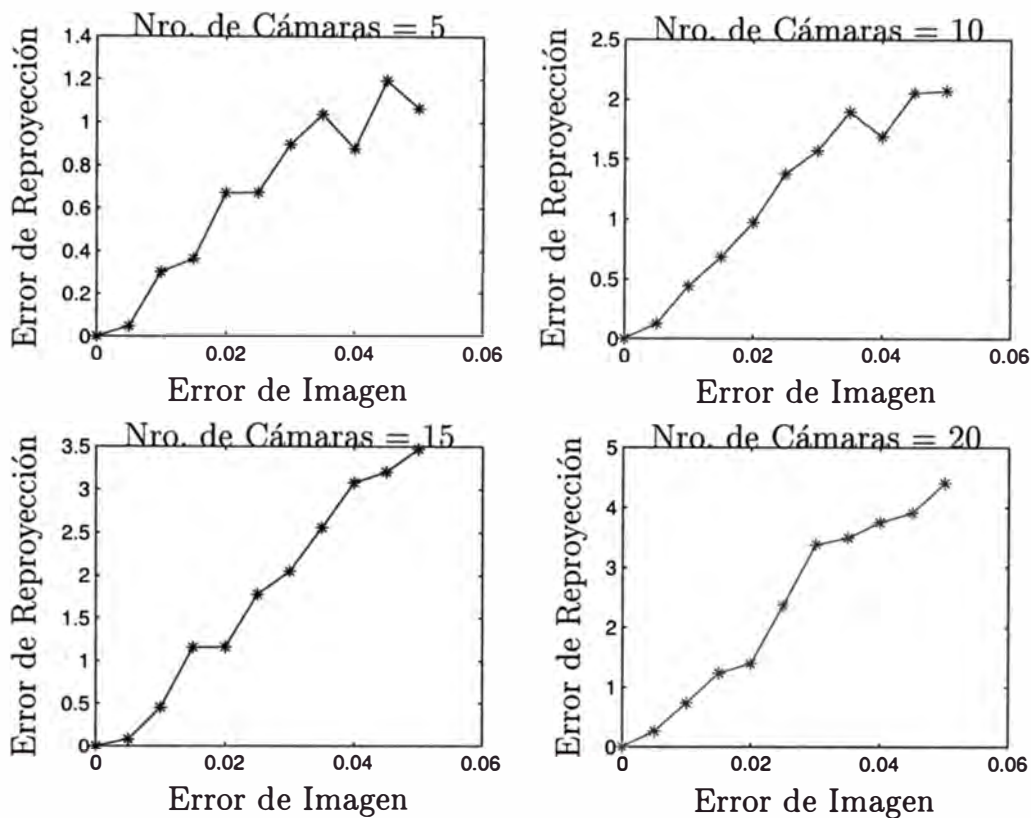


Figura 4.3: Método de Sturm-Triggs: Error de Reproyección vs Error de Imagen.

En conclusión, este método, pese a que en teoría ofrece una reconstrucción euclídea, no es adecuado para realizar reconstrucciones con más de dos cámaras. Sin embargo, más adelante, lo usaremos para realizar una reconstrucción con datos reales.

4.1.3. Métodos de Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt

Contrastaremos estos métodos de dos maneras: usando como dato inicial la reconstrucción obtenida por el método de Sturm-Triggs, y usando como dato inicial la reconstrucción obtenida por el método de Reconstrucción Euclídea.

Las figuras 4.8 y 4.9, son el producto de usar el método de Gauss-Newton y el método Levenberg-Marquardt usando como solución inicial la reconstrucción obtenida con el método de Sturm-Triggs.

Observamos que el método de Gauss-Newton se comporta ligeramente mejor que el método de Levenberg-Marquardt cuando el error inicial es pequeño. Sin embargo, para errores de imagen mayores que 0.01, el método de Levenberg-Marquardt mantiene el orden del error de reproyección alrededor de 10^{-4} , mientras que el método de Gauss-Newton genera errores de reproyección del orden de 1. Esto era de esperarse, desde que el método de Levenberg-Marquardt es una generalización del método de Gauss-Newton.

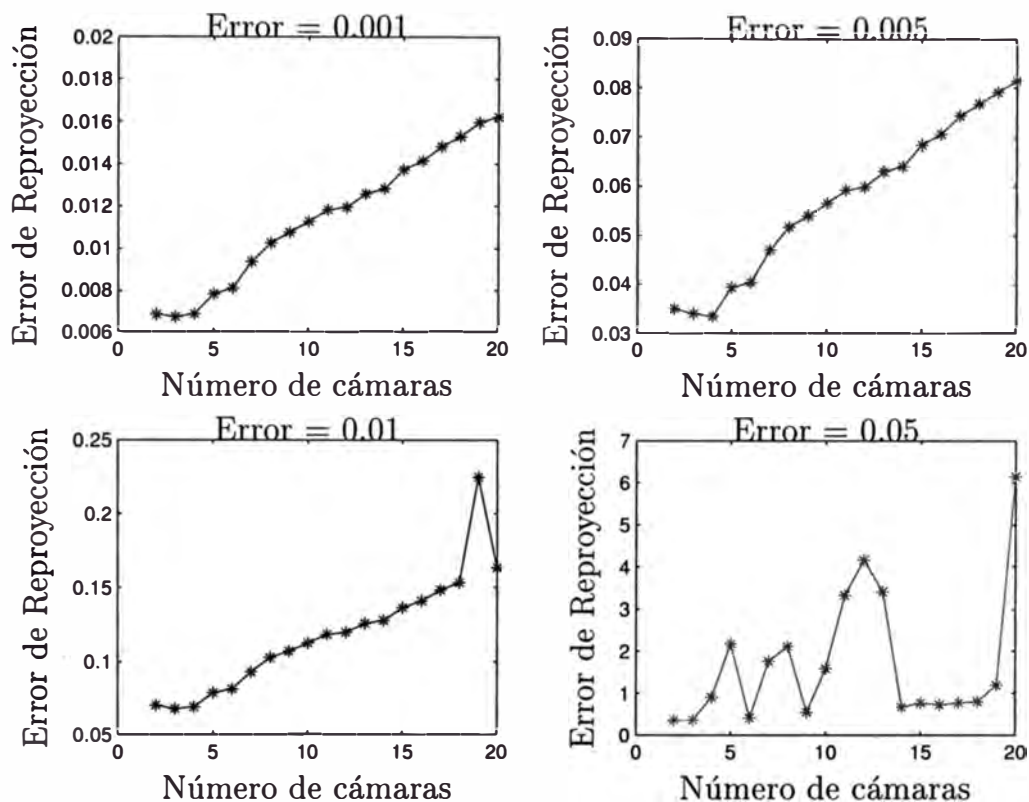


Figura 4.4: Método de Sturm-Triggs: Error de Reproyección vs Número de cámaras

De manera similar, usando como dato inicial la reconstrucción obtenida a partir del método de Reconstrucción Euclídea, obtenemos las imágenes 4.10 y 4.11. Observamos que en ambos casos, el método de Gauss-Newton se comporta mejor que el método de Levenberg-Marquardt, para errores de imagen pequeños. Sin embargo, igual que en el caso anterior, para errores mayores a 0,001 el método de Levenberg-Marquardt supera al método de Gauss-Newton.

4.2. Datos Reales

Para aplicar los métodos a datos reales usamos dos conjuntos de imágenes

4.2.1. Reconstrucción de Computadora - IMCA

Para obtener este par de imágenes, hicimos uso de una Kodak CX 7300, con distancia focal fija $f = 2190,8$ pixels. Usando el método de reconstrucción euclídea, pues vimos en la sección anterior que este método se comportaba bien en el caso de dos cámaras, obtuvimos un error de reproyección de 0.1652. Al reconstruir, obtuvimos la figura 4.13.

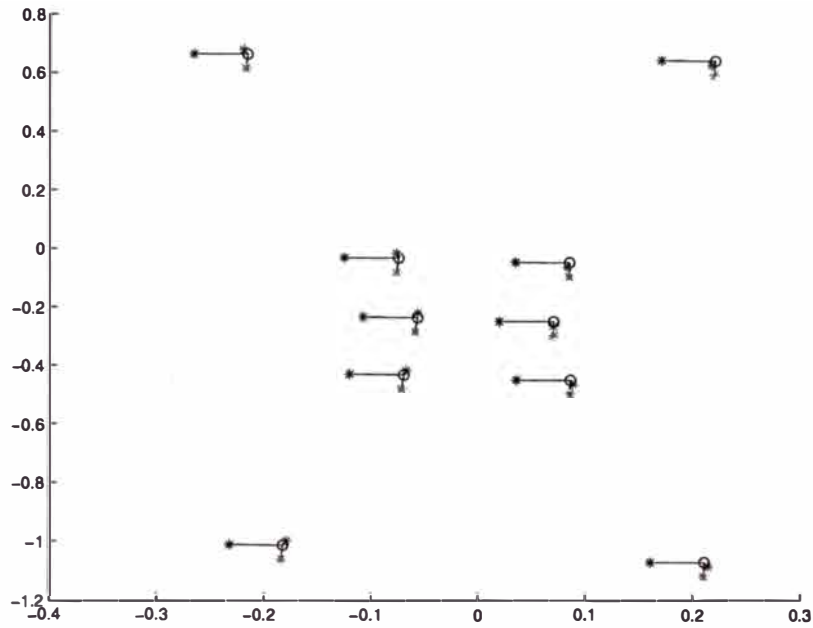


Figura 4.5: Reconstrucción del Método de Sturm-Triggs

Así, vemos que solo conociendo la distancia focal de la cámara utilizada, además de un conjunto de correspondencias, hemos logrado reconstruir una parte de la escena, como lo muestra la figura 4.13.

4.2.2. Reconstrucción de Despertador

Para obtener este conjunto de imágenes, hicimos uso de una Genius VideoCAM Express, con distancia focal fija $f = 328,04$ pixels. Usando nuevamente el método de reconstrucción euclídea, en este caso obtuvimos un error de reproyección de 7.1883. Luego de aplicar a la reconstrucción obtenida el método de Levenberg-Marquardt, obtuvimos que un error de reproyección de 0.0385. La figura 4.15 muestra la reconstrucción obtenida. Observe que esta reconstrucción no es euclídea, pues luego de aplicar el método de Levenberg-Marquardt, no necesariamente se obtiene una reconstrucción de este tipo.

4.3. Conclusiones y Trabajos Posteriores

En este trabajo se hace un estudio teórico acerca de las cámaras pinhole y un estudio empírico de los métodos de reconstrucción con 2 y n vistas.

Con respecto al estudio de los métodos de reconstrucción, para el caso general, el que mejor se comportó desde el punto de vista numérico fue el método de Sturm-Triggs.

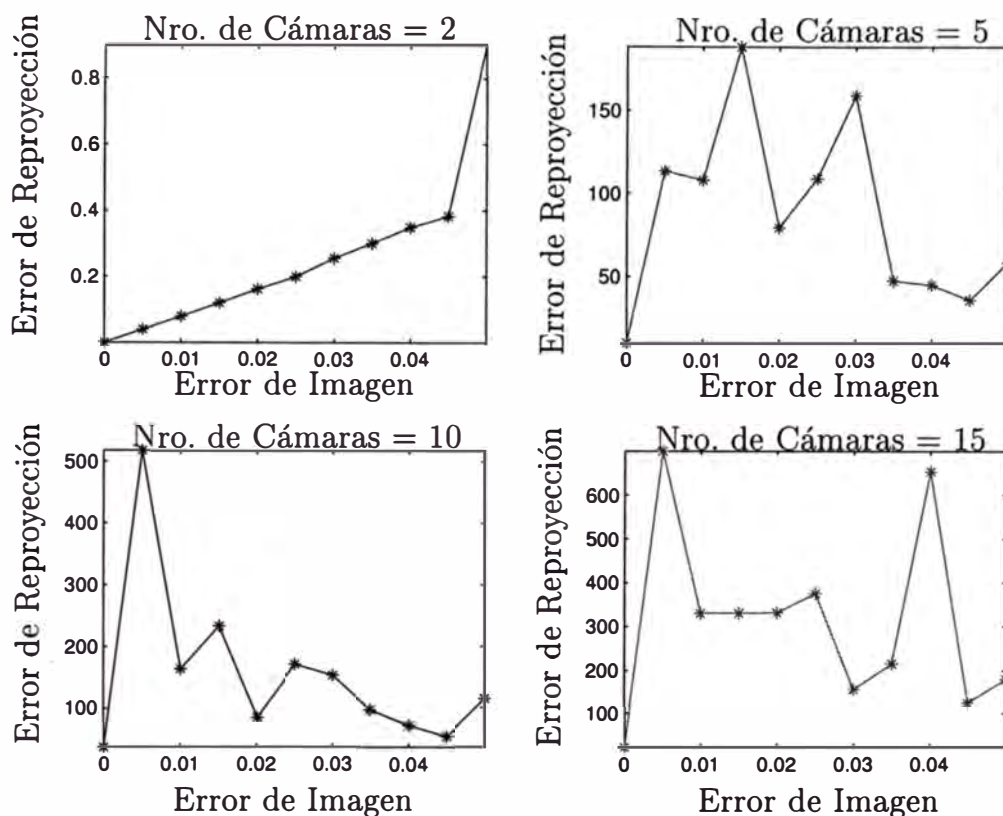


Figura 4.6: Reconstrucción Euclídea: Error de Reproyección vs Error de Imagen.

El método de reconstrucción euclídea presentaba errores de reproyección relativamente altos para el caso de n vistas (con $n \geq 3$.) En cambio, este último se comportó muy bien para el caso de dos vistas, por lo cual recomendamos su uso.

Existen diversas maneras de continuar este trabajo, de las cuales resaltaremos dos. Desde el punto de vista teórico, es posible hacer uso del álgebra geométrica para determinar relaciones similares a la de la matriz fundamental para el caso de tres vistas (conocido como *tensor trifocal*) y el caso general, ver [1] para más detalles. Desde el punto de vista numérico y práctico, recomendamos hacer la implementación de los métodos vistos en este trabajo en un lenguaje de programación de alto nivel, tal como C++. También es necesario un estudio sobre los métodos de calibración de cámaras, con los que se podríamos estimar la matriz de parámetros intrínsecos, necesaria para el método de reconstrucción euclídea. Además, es posible automatizar el trabajo de hallar correspondencias haciendo uso de métodos de detección de esquinas, sin embargo, estos métodos son incipientes aún. Finalmente, sobre los métodos de calibración y los métodos de detección de esquinas es posible encontrar información en [1], [3] y [7].

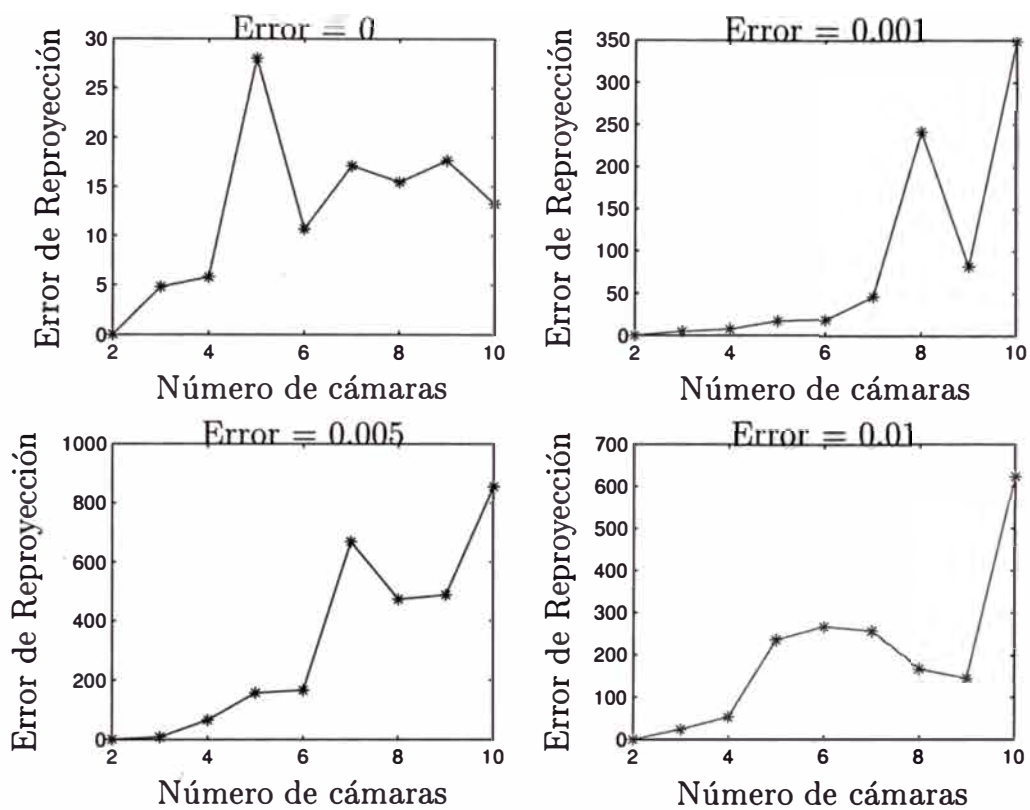


Figura 4.7: Reconstrucción Euclidea: Error de Reproyección vs Número de cámaras

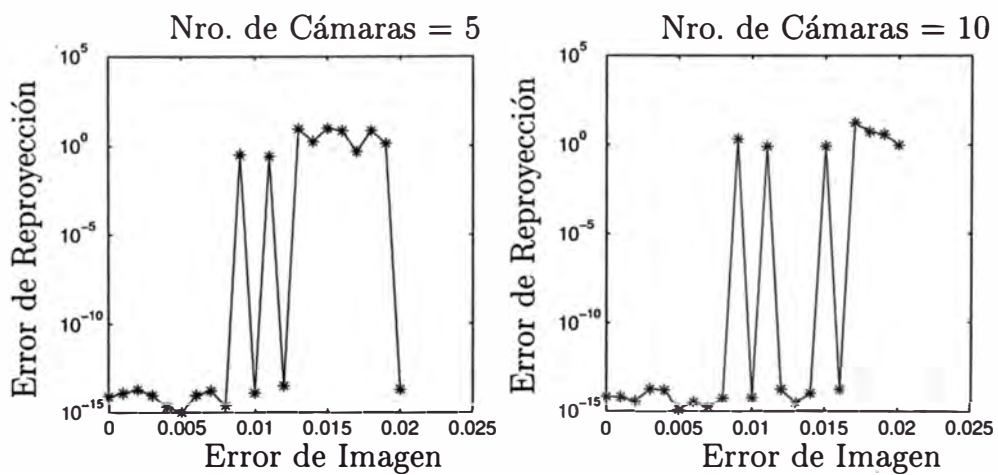


Figura 4.8: Sturm-Triggs y Gauss-Newton: Error de Reproyección vs Error de Imagen

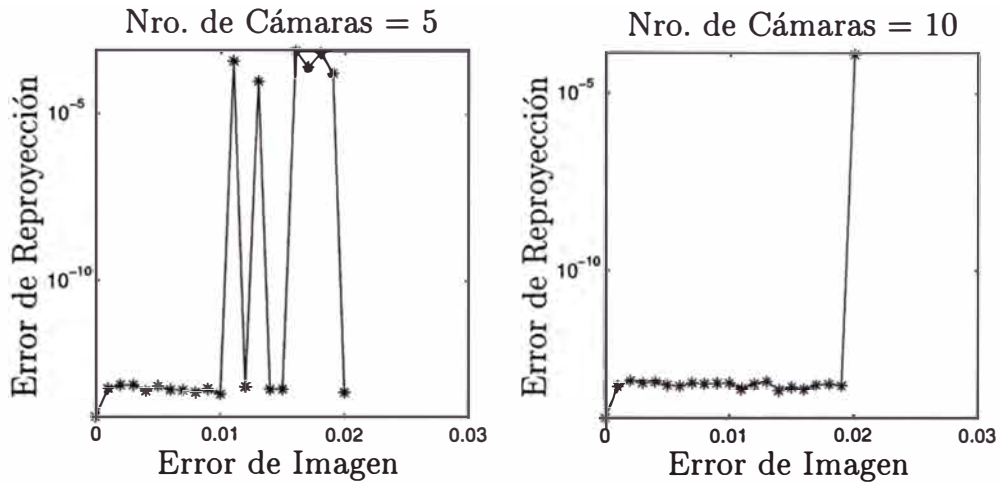


Figura 4.9: Sturm-Triggs y Levenberg-Marquardt: Error de Reproyección vs Error de Imagen

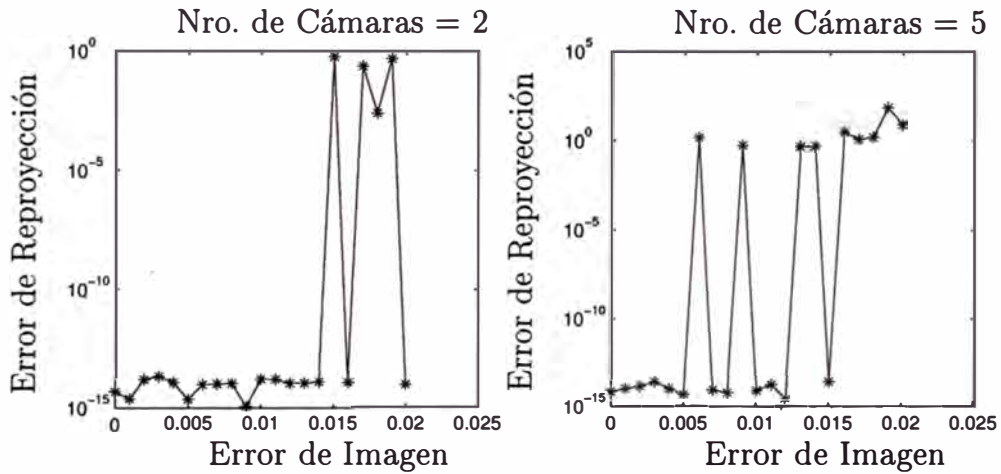


Figura 4.10: Reconstrucción Euclídea y Gauss-Newton: Error de Reproyección vs Error de Imagen

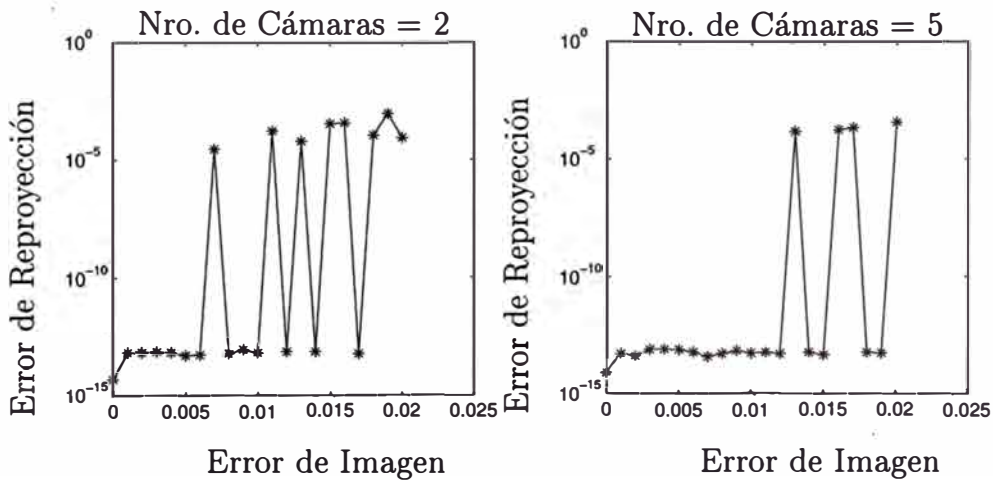


Figura 4.11: Reconstrucción Euclídea y Levenberg-Marquardt: Error de Reproyección vs Error de Imagen

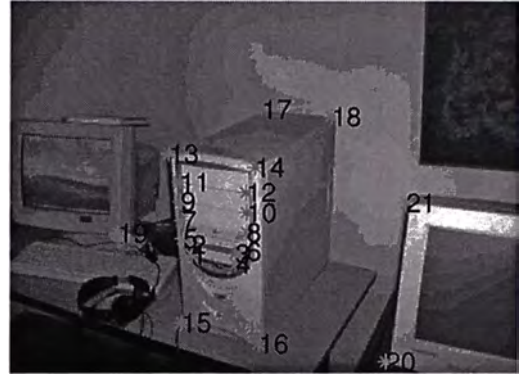
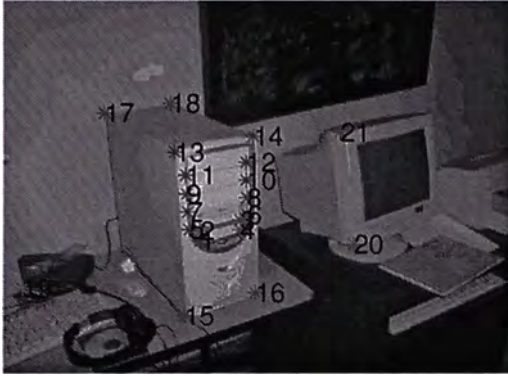


Figura 4.12: Imágenes usadas

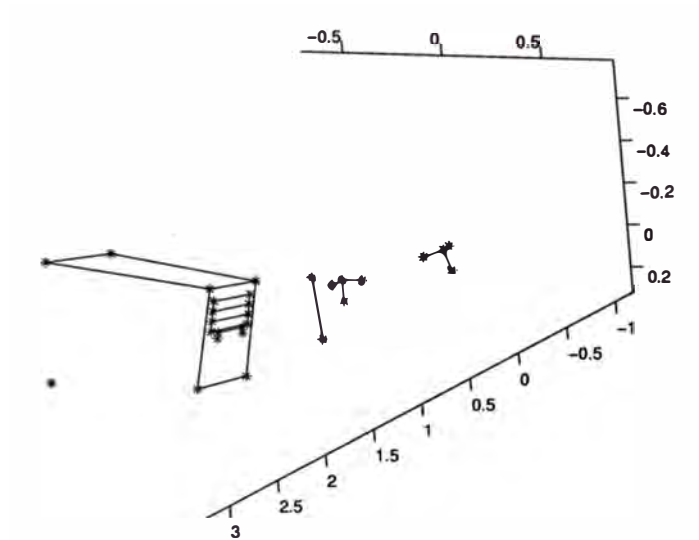


Figura 4.13: Reconstrucción Euclídea

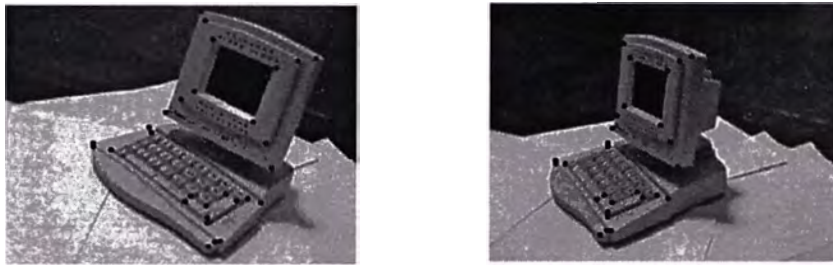


Figura 4.14: Imágenes usadas

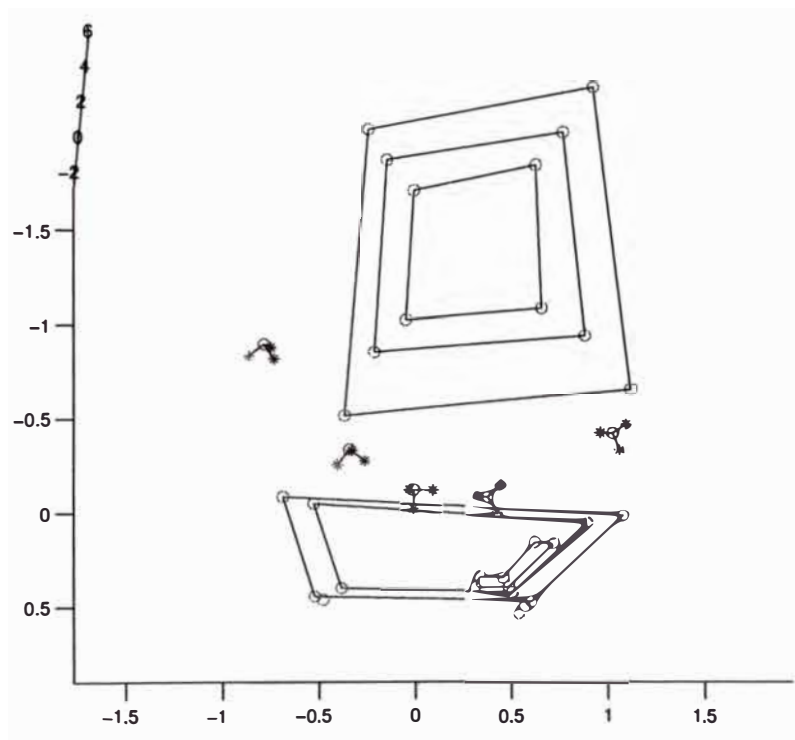


Figura 4.15: Reconstrucción usando Bundle Adjustment

Bibliografía

- [1] O. Faugeras, *Three-dimensional computer vision: a geometric viewpoint*, MIT-Press, 1993.
- [2] O. Faugeras y B. Mourrain, *On the geometry and algebra of the point and line correspondences between n images*, Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision, pp 951-956, 1995.
- [3] D. Forsyth y J. Ponce, *Computer Vision: A Modern Approach*, Prentice Hall, 2002.
- [4] G. Golub y C. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [5] R. Hartley, *In defence of the 8-point algorithm*, Proceedings of the DARPA-ESPRIT workshop on Applications of Invariants in Computer Vision, 1993.
- [6] R. Hartley y P. Sturm, *Triangulation*, Proceedings of ARPA Image Understanding Workshop, 1994.
- [7] R. Hartley y A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, 2000.
- [8] S. L. S. Jacoby, J. S. Kowalik y J. T. Pizzo, *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*, Prentice Hall, 1972.
- [9] D. Kincaid y W. Cheney, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, 3rd edition, Brooks/Cole, 2002.
- [10] P. Samuel, *Projective Geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics - Readings in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.
- [11] P. Sturm y B. Triggs, *A factorization-based algorithm for multi-image projective structure and motion*, European Conference on Computer Vision, 1996.

- [12] B. Triggs, P. McLauchlan, R. Hartley y A. Fitzgibbon, *Bundle Adjustment - A Modern Synthesis*, Vision Algorithms: Theory and Practice, pp.298-402, 2000.
- [13] B. Triggs, *The Geometry of Projective Reconstruction I: Matching Constraints and the Joint Image*, Technical Report, INRIA Rhône Alpes, 1994.
- [14] O. Veblen y J. W. Young, *Projective Geometry*, volume 1, Blaisdell Publishing Company, 1938.
- [15] Z. Zhang, *Determining the Epipolar Geometry and its Uncertainty: A Review*, Technical Report 2927, INRIA SophiaAntipolis, 1996.