



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

**Análisis de losas planas empleando un elemento finito
isoparamétrico mixto de 3 a 8 nudos**

TESIS

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE
INGENIERO CIVIL**

**PRESENTADA POR
LUIS MIGUEL BOZZO ROTONDO**

LIMA - PERU

1987

Al Ing. Hugo Scaletti con mi
sincero agradecimiento por su
colaboración y consejos sin
los cuales me hubiera sido
imposible realizar el
presente trabajo.

A mi padre, el Ing. Miguel Bozzo, por su constante incentivo y ayuda, mi admiración y cariño.

A mi madre por su dedicación y
tenacidad en lograr el bien-
estar familiar, cariñosamente.

I N D I C E

CAPITULO I ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA TEORIA DE LOSAS PLANAS

INTRODUCCION

1.1 Hipótesis básicas

1.2 Ecuaciones diferenciales del equilibrio

1.3 Ecuaciones diferenciales de la compatibilidad

1.4 Leyes esfuerzo - deformación

1.5 Condiciones de borde

1.6 Resumen

CAPITULO II EL FUNCIONAL DE REISSNER Y OTROS PRINCIPIOS VARIACIONALES RELACIONADOS

INTRODUCCION

2.1 El Funcional de Energía Potencial

2.2 El Funcional de Energía Complementaria.

2.3 El Funcional de Reissner

2.3.1 Alternativas para obtener el Funcional de Reissner

2.3.2 Especialización del Funcional de Reissner al análisis de losas sin considerar la deformación por corte.

2.3.3 Especialización del Funcional de Reissner al análisis de losas considerando deformación por corte.

CAPITULO III

FORMULACION DE LOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Funciones de interpolación

3.1.1 Elemento triangular

3.1.2 Elemento rectangular

3.1.3 Transformación isoparamétrica

3.2 Formulación de un elemento cuadrilateral

3.3 Formulación de un elemento triangular

CAPITULO IV

APLICACIONES

INTRODUCCION

4.1 Análisis de losas cuadradas .

4.2 Losa rectangular uniformemente cargada con dos bordes simplemente apoyados, uno empotrado y el cuarto

libre

4.3 Losa cuadrada apoyada en sus cuatro esquinas y uniformemente cargada

4.4 Losa circular

Ejemplo de Aplicación n. 1

Ejemplo de Aplicación n. 2

CONCLUSIONES

APENDICE I

Programacion

C A P Í T U L O I

ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA TEORIA DE LOSAS PLANAS

INTRODUCCION: Las ecuaciones diferenciales que se detallan a continuación corresponden a las de las losas planas elásticas no delgadas - espesor mayor a $1/300$ de la luz sujetas a cargas perpendiculares a su plano medio. Se supone además que los desplazamientos son pequeños con relación al espesor de la losa y que sus bordes tienen libertad de desplazarse en el plano (1); es decir que las reacciones en ellos son normales al plano de la losa. Estas limitaciones son importantes para asegurar que no se desarrollen esfuerzos significativos en el plano.

El presente capítulo comienza con la enumeración y justificación de las hipótesis básicas sobre las que esta teoría se sustenta; luego se presenta la forma particular en la cual las ecuaciones diferenciales del equilibrio y de la compatibilidad junto con las leyes esfuerzo - deformación, se reescriben. Finalmente se incluyen las condiciones de borde típicas.

NOTACION:

En la figura n. 1 se representa la convención de signos adoptada, la cual se seguirá en toda la tesis. Esta convención coincide con la adoptada para los esfuerzos en un paralelepípedo rectángulo, considerando - como es común al analizar este tipo de estructuras - que las nuevas medidas de los esfuerzos son momentos o cortantes por unidad de longitud.

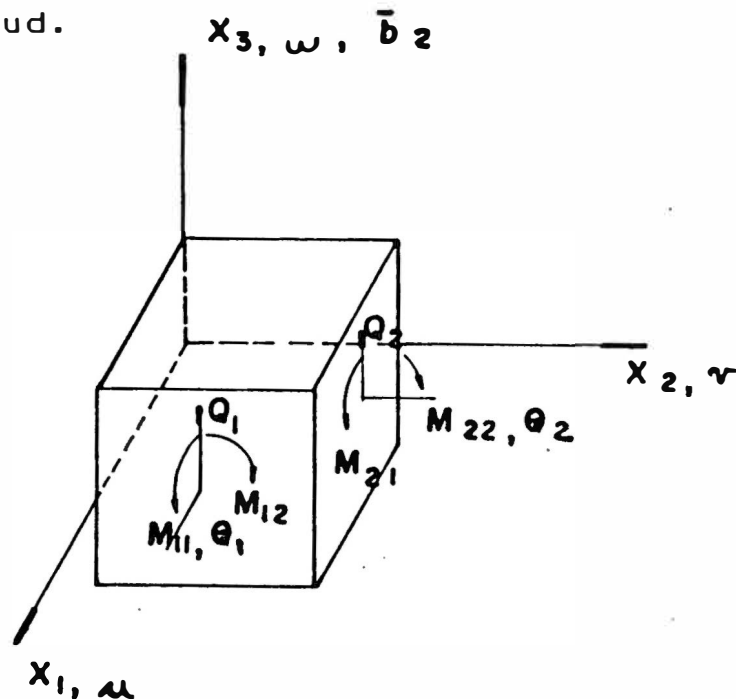


Fig. 1

1.1 HIPOTESIS BASICAS: El análisis de losas planas difiere del de un sólido tridimensional en que aquellas tienen una dimensión considerablemente menor a las otras dos, lo cual permite hacer algunas simplificaciones:

- I) El esfuerzo normal en la dirección transversal (σ_z) es nulo.

Es fácil verificar que este esfuerzo de hecho no es nulo en el plano superior cargado, aunque si lo es en

el plano inferior descargado (ver fig. 2). Sin embargo, su importancia relativa en la deformación de la losa, con respecto a los esfuerzos de flexión es pequeña - baste con verificar la magnitud relativa de ambos esfuerzos - y por ello de manera similar al caso de las vigas, este esfuerzo se considera nulo durante el análisis.

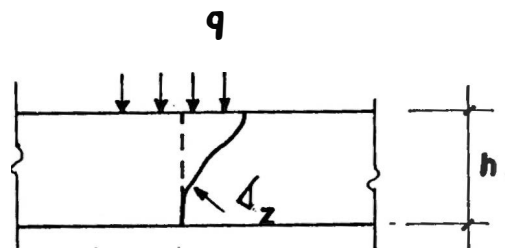


Fig. 2

II) HIPOTESIS DE KIRCHHOFF O DE LAS SECCIONES PLANAS:

Esta hipótesis establece que las secciones planas antes de la deformación continúan siéndolo luego de ésta; es pues, similar a la de la Navier-Bernoulli en vigas y permite escribir:

$$u = u(x, y, 0) + z \theta_1,$$

$$v = v(x, y, 0) + z \theta_2$$

Donde θ_1 y θ_2 son los giros de la superficie neutra y $u(x, y, 0)$, $v(x, y, 0)$ son los desplazamientos del plano neutro, a los cuales se llamará u^* y v^* respectivamente.

Es importante resaltar que en virtud de la hipótesis

de Kirchhoff θ_1 y θ_2 no son funciones de Z .

1.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DEL EQUILIBRIO

Es común en el análisis de losas utilizar como medidas de esfuerzo las fuerzas y momentos resultantes por unidad de longitud. Tales fuerzas y momentos pueden relacionarse con los esfuerzos normales y tangenciales integrando en la dirección transversal Z , como se indica a continuación:

Fuerzas en el plano (fuerzas de membrana):

$$N_x = \int_n \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_n \sigma_y dz$$

$$N_{xy} = \int_n \tau_{xy} dz$$

En el presente caso $N_x = N_y = N_{xy} = 0$

Cortantes transversales:

$$Q_x = \int_n \tau_{xz} dz$$

$$Q_y = \int_n \tau_{yz} dz$$

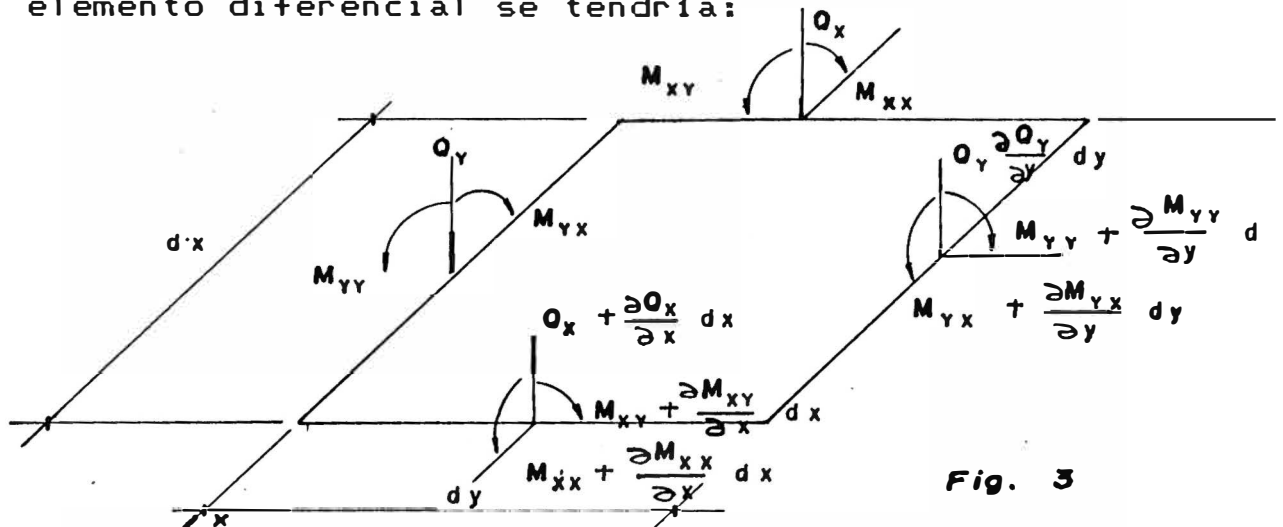
Momentos:

$$M_{xx} = \int_n \sigma_x z dz$$

$$M_{yy} = \int_n \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = \int_n \tau_{xy} z dz$$

Estas nuevas variables son funciones en X e Y. Por ello, si se representan los momentos y los cortantes en un elemento diferencial se tendría:



Considerando el equilibrio de este elemento diferencial (ver fig. 3) se pueden plantear las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_y$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q$$

Segun la convención de signos adoptada, Mxy es igual a Myx y las ecuaciones precedentes pueden escribirse en notación indicial según:

$$M_{ij,j} = Q_i$$

$$Q_{i,i} + q = 0$$

donde $i, j = 1, 2$

Por otra parte de estas últimas ecuaciones se pueden eliminar los cortantes y obtener finalmente la siguiente ecuación del equilibrio:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q(x,y) \dots \textcircled{1}$$

o en notación indicial:

$$M_{ij,ij} + q = 0$$

Es interesante indicar que para análisis de primer orden si se tuviesen cargas perpendiculares al plano de la losa, las ecuaciones diferenciales que se presentan en el problema plano son desacopladas de las de flexión.

1.3 ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA COMPATIBILIDAD

Las ecuaciones diferenciales de la compatibilidad, empleadas en un análisis de primer orden son:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = 2 \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = 2 \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Escritas en notación indicial son:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i})$$

Empleando las hipótesis de Kirchhoff estas ecuaciones pueden escribirse como:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v^*}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_2}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = 0 \quad \text{ó} \quad w = f(x, y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \theta_1 + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Además si la deformación por corte no es incluida, estas ecuaciones se simplifican según:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v^*}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{ó} \quad w = f(x, y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{ó} \quad \theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \text{ó} \quad \theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

A las funciones $\frac{\partial \theta_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta_2}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta_1}{\partial y}$ y $\frac{\partial \theta_2}{\partial x}$ se les

conoce como curvaturas de la superficie según X, Y, XY

e YX y se les denota por K_{xx} , K_{yy} , K_{xy} y K_{yx}

respectivamente. En el caso de no tener deformación

por corte $K_{xy} = K_{yx}$ y éstas se reescriben como $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Siendo las curvaturas funciones de los ejes coordenados escogidos, pueden obtenerse sus valores máximos y mínimos - valores principales - según ciertos ejes n y t . En estos ejes la torsión es nula.

A la suma de las curvaturas según dos planos normales, se le conoce como curvatura media y se puede demostrar que es independiente del sistema de referencia.

1.4 RELACIONES ESFUERZO - DEFORMACION

Para un material isotrópico con módulo de elasticidad (E) y de poisson (ν), las ecuaciones esfuerzo - deformación pueden expresarse según:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

Sim.

En el caso de un material ortotrópico, estas relaciones se reescriben como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\mu\nu_{21}^2} & \frac{\nu_{21} E_{11}}{1-\mu\nu_{21}^2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E_{11}}{\mu(1-\mu\nu_{21}^2)} & 0 & 0 & 0 \\ & & G_{12} & 0 & 0 \\ & & & G_{13} & 0 \\ & & & & G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Sim.

donde:
$$\mu = \frac{E_{11}}{E_{22}}$$

Estas relaciones pueden expresarse en términos de momentos y cortantes, que son las medidas de esfuerzo adoptadas para el análisis.

Para una losa isotrópica en la cual se incluye la deformación por corte estas relaciones se transforman a:

$$M_{xx} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right]$$

$$M_{yy} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right]$$

$$M_{xy} = \frac{Et^3}{12} \left[\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right]$$

A la cantidad $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ se le conoce como "rigidez

a la flexión de la losa".

Puesto que los giros pueden expresarse como $\theta_i = \gamma_i - \omega_i$, se tendría al reemplazar:

$$M_{xx} = -D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \right]$$

$$M_{yy} = -D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \right]$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} \right) \right]$$

Si la deformación por corte no se incluye, estas expresiones se reescriben como:

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Por otro lado, si estas últimas expresiones se reemplazan en la ecuación de equilibrio (1) se obtendría la conocida ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Esta expresión es pues válida, si se desprecian los efectos de las fuerzas de corte en la deformación de la losa.

De las expresiones anteriores se observa que el efecto de considerar las deformaciones por corte sobre las curvaturas es restarle los términos $\partial \gamma_i / \partial x_i$ o $\partial \gamma_i / \partial x_j$:

Sin embargo, con el objeto de mejorar la aproximación por corte se considera $\kappa \partial \gamma_i / \partial x_i$ ó $\kappa \partial \gamma_i / \partial x_j$, don-

de k es un factor numérico (*) que relaciona la energía de deformación por corte para una distribución parabólica de éste, con la energía de deformación por corte pero para una distribución constante.

Las leyes esfuerzo-deformación también pueden particularizarse para los casos de losas tipo sandwich y losas huecas. En estos casos, sin embargo, el módulo de elasticidad y el de poisson son funciones de la altura. Por otro lado la ubicación del eje neutro es ahora función de las características de los materiales y de la sección.

1.5 CONDICIONES DE BORDE

Supóngase un punto (x) en un borde genérico, cuya tangente coincida con el eje X , según lo mostrado en la figura 4.

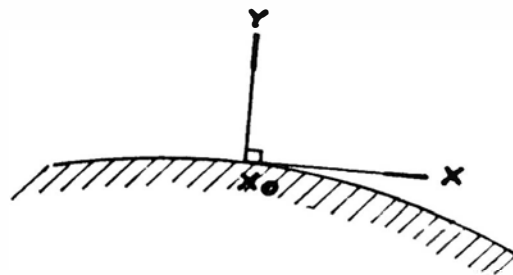


Fig. 4

(*) Consultar (1), acápite 25.

Las condiciones de borde posibles son:

1.5.1 Borde empotrado: El desplazamiento vertical y los giros son nulos:

$$w_{x=x_0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0$$

1.5.2 Borde simplemente apoyado: El desplazamiento vertical y el momento normal son nulos:

$$w_{x=x_0} = 0$$

$$M_{yy}_{x=x_0} = 0$$

1.5.3 Borde libre: El momento normal, el momento torsor y el corte son nulos:

$$M_{yy}_{x=x_0} = 0$$

$$M_{xy}_{x=x_0} = 0$$

$$Q_y_{x=x_0} = 0$$

1.5.4 Borde simétrico: Este tipo de borde especial ocurre cuando la losa en estudio posee un eje de simetría.

A lo largo de este eje se tiene:

$$M_{xy} \Big|_{x=x_0} = 0$$

$$Q_y \Big|_{x=x_0} = 0$$

Este borde puede o no tener preescrito el desplazamiento vertical.

1.6 RESUMEN

Las ecuaciones diferenciales del equilibrio, de la compatibilidad y las leyes esfuerzo-deformación empleadas en el presente análisis serán:

I) Ecuaciones diferenciales del equilibrio:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0_x$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = 0_y$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q$$

o en notación indicial:

$$M_{ij,j} = 0_i$$

$$Q_{i,i} = -q$$

II) Ecuaciones diferenciales de la compatibilidad: Para un análisis lineal:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

o en notación indicial:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mu_{ij} + \mu_{ji})$$

III) Leyes esfuerzo - deformación: Para un material isotrópico:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & D\nu & 0 \\ D\nu & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \kappa G h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

donde K es un factor numérico empleado para mejorar la aproximación por corte cuyo valor es 1.2.

Estas expresiones también pueden reescribirse según:

$$\underline{K} = \frac{12}{Et^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad \underline{M} = \underline{S}_F \underline{M}$$

$$\underline{K} = \frac{1}{1.2Gh} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{Q} = \underline{S}_c \underline{Q}$$

C A P I T U L O I I

EL FUNCIONAL DE REISSNER Y OTROS PRINCIPIOS VARIACIONALES

RELACIONADOS

INTRODUCCION: Las funciones que satisfacen un grupo de ecuaciones diferenciales pueden en muchos casos identificarse con aquellas que hacen estacionaria una cierta expresi3n matemática conocida como funcional o principio variacional (2). Así por ejemplo, la funci3n $u(x)$ que satisface la ecuaci3n diferencial:

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) - p = 0, \quad u(0) = u(L) = 0$$

es aquella que hace m3nima la integral:

$$I(u) = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + p u \right\} dx, \quad u(0) = u(L) = 0$$

Esta integral es de la forma:

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u, \partial u / \partial x) d\Omega$$

Donde F es una funci3n real conocida de argumentos $x, u, \partial u / \partial x$. El funcional I est3 definido por una integral cuyo valor depende de las funciones u consideradas, de

aquí la notación $I(u)$.

En general, es relativamente simple determinar las ecuaciones diferenciales a las que es equivalente un principio variacional; aunque lo inverso no siempre es posible.

En el caso de que un principio variacional apropiado sea conocido, el problema puede formularse alternativamente como el de determinar las funciones que hacen estacionario (frecuentemente mínimo) el funcional, o como la solución de las ecuaciones diferenciales equivalentes.

Sin embargo los procesos de elementos finitos pueden formularse más fácilmente con la primera alternativa, la cual será aquí utilizada.

La minimización del funcional puede, a su vez, plantearse empleando un procedimiento tipo Rayleigh-Ritz. Para ello las funciones incógnitas son representadas por funciones de interpolación conocidas, multiplicadas por parámetros indeterminados. Con ello el problema original de determinar una o más funciones que hacen estacionario al funcional se reduce al de determinar los parámetros que hacen estacionaria la integral.

Nótese sin embargo que la solución así obtenida no es la solución exacta de las ecuaciones diferenciales, pero estas son satisfechas en un sentido integral.

En la solución de un problema de elasticidad deben resolverse tres grupos de ecuaciones:

Ecuaciones deformación-desplazamiento

Relaciones esfuerzo-deformación

Ecuaciones de equilibrio

La solución puede obtenerse planeando aproximaciones para las funciones incógnitas, que cumplan exactamente algunas de estas ecuaciones y utilizando un principio variacional equivalente de las restantes. Por ejemplo el funcional de Energía Potencial, que es equivalente a las ecuaciones de equilibrio, puede utilizarse planteando aproximaciones de los desplazamientos que cumplan exactamente las ecuaciones deformación-desplazamiento y esfuerzo-deformación.

Otro funcional bastante conocido es el de Reissner. Este es un funcional de tipo mixto, pues considera dos grupos de funciones incógnitas (si se emplea en elasticidad estos son desplazamientos y esfuerzos). Puede probarse que las funciones que hacen estacionario este funcional son aquellas que satisfacen no solo las ecuaciones de equilibrio sino además las relaciones deformación-desplazamiento. En este caso, el tercer grupo de ecuaciones, es decir las relaciones esfuerzo-deformación, deben cumplirse exactamente en las aproximaciones propuestas.

2.1 EL FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL

El Funcional de energía potencial (3) es una reexpresión de las ecuaciones diferenciales del equilibrio, el cual puede escribirse como:

$$\Pi_p(\mu_i) = \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} C_{ijkl} - \mu_i b_i \right) dV - \int_{S_c} \mu_i \bar{T}_i ds$$

donde: $\mu_i = \bar{u}_i$ EN S_u

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i})$$

Es importante indicar, que de la forma presentada en este funcional ya están satisfechas directamente, las leyes esfuerzo-deformación y las condiciones de compatibilidad en el interior de la región en estudio.

Para verificar la equivalencia del funcional de energía potencial con las ecuaciones diferenciales del equilibrio se pueden aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange (2):

EN EL INTERIOR:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial \mu_{i,j}} = 0$$

Es decir:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{EN } V$$

Las cuales son precisamente las ecuaciones diferenciales del equilibrio en el interior de la región en estudio.

EN EL BORDE:

$$M_j \frac{\partial F}{\partial \mu_{i,j}} + \frac{\partial G}{\partial \mu_i} = 0$$

es decir:

$$M_j \sigma_{ij} + \bar{T}_i = 0 \quad \text{EN } S_0$$

Las cuales son las ecuaciones diferenciales del equilibrio en el borde donde las tracciones están prescritas.

Empleando el procedimiento de Rayleigh-Ritz los desplazamientos son representados por una sumatoria de funciones conocidas $N_i(\underline{x})$ multiplicadas por parámetros indeterminados tal como:

$$u = \sum N_i(\underline{x}) c_i$$

$$v = \sum N_i(\underline{x}) d_i$$

$$w = \sum N_i(\underline{x}) e_i$$

o en notación matricial:

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a}$$

Estas funciones deben ser tales que se cumplan las condiciones de compatibilidad en Su.

Las condiciones de compatibilidad en el interior se cumplen exactamente al considerar:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i})$$

o en notación matricial:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u}$$

Reemplazando estas relaciones en el funcional de energía potencial se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi_p(\underline{u}) = & \frac{1}{2} \underline{a}^T \int_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} dV \underline{a} - \underline{a}^T \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV \\ & - \underline{a}^T \int_{S_0} \underline{N}^T \underline{I} dS \end{aligned}$$

Y finalmente al minimizar con respecto a los parámetros indeterminados (\underline{a}), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f}$$

donde:

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} dV$$

$$\underline{f} = \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV + \int_{S_0} \underline{N}^T \underline{I} dS$$

Sin embargo, es importante indicar, la dificultad práctica de buscar funciones que cumplan, las

condiciones de compatibilidad en el borde S_u .

Por otro lado la ventaja del procedimiento de Rayleigh-Ritz consiste en haber transformado el problema complejo de hallar funciones que hagan mínimas a un funcional, al de resolver un sistema de ecuaciones lineales.

2.2 EL FUNCIONAL DE ENERGIA COMPLEMENTARIA

El funcional de energía complementaria (3) es una reexpresión de las ecuaciones diferenciales de la compatibilidad, el cual puede escribirse según:

$$\pi_c(\sigma_{ij}) = \int_V \frac{1}{2} c_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV - \int_{S_u} T_i \bar{u}_i ds$$

De manera similar al funcional de energía potencial, al minimizar este funcional se obtienen exactamente las ecuaciones diferenciales de la compatibilidad. Así al aplicar las expresiones de Euler-Lagrange se obtiene:

EN EL INTERIOR:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) \quad \text{EN } V$$

Las cuales son las ecuaciones de deformación - desplazamiento en el interior de la región.

EN EL BORDE:

$$\mu_i = \bar{\mu}_i \quad \text{en } S_u$$

Las cuales son las ecuaciones de la compatibilidad en el borde donde los desplazamientos están prescritos.

Sin embargo, los esfuerzos, representados como una sumatoria de parámetros indeterminados, deben ahora de satisfacer las condiciones del equilibrio, tanto en el interior como en el borde donde los esfuerzos están prescritos.

En el siguiente capítulo se verá que empleando la técnica de los elementos finitos el dominio puede dividirse en subregiones. Entre dichas subregiones deben cumplirse ciertos requisitos de continuidad entre las funciones incógnitas. En el caso específico de este funcional los esfuerzos deben ser continuos entre subregiones, lo cual es en general difícil y hace que, a pesar de la ventaja de trabajar directamente en variables de una mayor utilidad práctica, su uso sea limitado. Una alternativa para cumplir directamente las condiciones del equilibrio es la de representar los esfuerzos con la función de

Airy (Φ). Por ejemplo para un estado plano de esfuerzos se tendría:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Y con ello, en ausencia de fuerzas de cuerpo, las condiciones del equilibrio se cumplen directamente. Debe indicarse, sin embargo, que al emplear la función de Airy en el funcional aparecen derivadas segundas de dicha función.

Otra alternativa para cumplir con estos requisitos de equilibrio en esfuerzos es emplear un "modelo híbrido de esfuerzos" basado en el funcional de "Energía complementaria modificada" (3). Empleando este funcional los requisitos de continuidad entre esfuerzos son encargados a cumplir al mismo funcional. Para ello empleando multiplicadores de Lagrange (λ_i) definidos sólo en el borde entre sub-

regiones se tendría:

$$\begin{aligned} \Pi_{mc}(\sigma_{ij}, \lambda_i) = & \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV - \int_{S_{\mu}} \tau_i \bar{u}_i ds - \\ & - \int_{S_{\lambda}} \lambda_i(s) \tau_i ds \end{aligned}$$

donde S_{λ} es el borde entre subregiones.

Sin embargo, empleando las expresiones de Euler-Lagrange se determina que $\lambda_i \equiv \mu_i$ y finalmente el funcional de energía complementaria modificada se se escribiría como:

$$\begin{aligned} \Pi_{mc}(\sigma_{ij}, \mu_i) = & \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV - \int_{S_{\mu}} \tau_i \bar{u}_i ds - \\ & - \int_{S_{\lambda}} \mu_i \tau_i ds \end{aligned}$$

Deben plantearse ahora aproximaciones para los esfuerzos que cumplan con las condiciones del equilibrio sólo en el interior de cada subregión pues las condiciones del equilibrio entre sub-regiones han sido encargadas al funcional. Por otro lado debe observarse que las aproximaciones para los desplazamientos son planteadas sólo en el borde entre sub-regiones.

2.3 EL FUNCIONAL DE REISSNER

El funcional de Reissner (3, 5) es un funcional mixto, pues involucra dos tipos de incógnitas (esfuerzos y desplazamientos). Al hacerse estacionario satisface tanto condiciones de equilibrio como de compatibilidad.

Este funcional puede obtenerse del de energía potencial haciendo este estacionario pero sujeto a ciertas restricciones, las cuales son precisamente las condiciones de compatibilidad. Para ello se pueden emplear multiplicadores de Lagrange y aplicar las expresiones de Euler-Lagrange para determinar el significado específico de cada uno de ellos. Se verá que a estos multiplicadores se les puede asociar un significado físico.

Según lo expuesto, considérese el funcional de Energía Potencial sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \Pi_p^*(\mu_i, \lambda_i) = & \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} C_{ijkl} - \mu_i \bar{b}_i \right) dV - \\ & - \int_{S_c} \mu_i \bar{T}_i dS + \int_{S_m} (\mu_i - \bar{u}_i) \lambda_i dS + \\ & + \int_V \left\{ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) \right\} \lambda_i dV \end{aligned}$$

Donde λ_1 y λ_2 son multiplicadores de Lagrange.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene:

1) EN EL VOLUMEN:

$$1.1) \quad -\bar{b}_i + \lambda_{1,j} = 0$$

Lo cual necesariamente es cierto si se establece $\lambda_1 \equiv \sigma_{ij}$.

$$1.2) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i})$$

Estas son las condiciones de compatibilidad en el interior de la región.

2) EN EL BORDE:

$$2.1) \quad m_j \sigma_{ij} - \bar{T}_i = 0 \quad \text{en } S_c$$

$$2.2) \quad -(\mu_i - \bar{\mu}_i) \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma_{ij}} = 0$$

y si $\lambda_2 \equiv T_i = m_j \sigma_{ij}$ se tendría:

$$(\mu_i - \bar{\mu}_i) m_j = 0 \quad \text{ó} \quad \mu_i = \bar{\mu}_i \quad \text{en } S_u.$$

Reemplazando los valores de $\lambda_1, \gamma, \lambda_2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi_p(\mu_i, \sigma_{ij}) = & \int_V \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} C_{ijkl} - \mu_i \bar{b}_i \right\} dV + \\ & + \int_V \sigma_{ij} \left\{ \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right\} dV - \\ & - \int_{S_c} \mu_i \bar{T}_i dS + \int_{S_u} \mu_j \sigma_{ij} (\mu_i - \bar{u}_i) dS \end{aligned}$$

Las relaciones esfuerzo-deformación se cumplen directamente al considerar $\sigma_{ij} = \varepsilon_{kl} C_{ijkl}$ o $\varepsilon_{ij} = \sigma_{kl} S_{ijkl}$

por lo que finalmente puede escribirse:

$$\begin{aligned} \Pi_R(\sigma_{ij}, \mu_i) = & \int_V \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{kl} S_{ijkl} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) \right\} dV \\ & - \int_V \mu_i \bar{b}_i dV + \int_{S_u} \mu_j \sigma_{ij} (\mu_i - \bar{u}_i) dS \\ & - \int_{S_c} \mu_i \bar{T}_i dS \end{aligned}$$

2.3.1 ALTERNATIVA PARA OBTENER EL FUNCIONAL DE REISSNER

Si una cierta ecuación diferencial ($Lx = 0$) se cumple en un dominio "V" también se satisfecerá la siguiente ecuación:

$$\int_V (Lx) f dV = 0$$

donde f es una función arbitraria no-nula, conocida como función de ponderación.

Por ello si las ecuaciones diferenciales del equilibrio y de la compatibilidad se cumplen en el interior y en el borde de un dominio "V" se tendría:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + b_i) \varphi_i dV + \int_V \left\{ \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) - \epsilon_{ij} \right\} g_{ij} dV + \\ + \int_{S_6} (\mu_j \sigma_{ij} - \bar{T}_i) \bar{J}_i dS + \int_{S_u} (\mu_i - \bar{u}_i) h_i dS = 0$$

Integrando por partes la primera integral se obtiene:

$$\int_V (-\sigma_{ij} \varphi_{i,j} + \bar{b}_i \varphi_i) dV + \int_S \sigma_{ij} \mu_j \varphi_i dS + \\ \int_V \left\{ \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) - \epsilon_{ij} \right\} g_{ij} dV + \int_{S_u} (\mu_i - \bar{u}_i) h_i dS + \\ + \int_{S_6} (\mu_j \sigma_{ij} - \bar{T}_i) \bar{J}_i dS = 0$$

Estas funciones de ponderación pueden ser escogidas como esfuerzos y desplazamientos o mejor aún como variaciones virtuales de éstos, con lo cual las integrales adquieren un significado físico.

Así se tendría:

$$\varphi_i = -\delta u_i$$

$$g_{ij} = \delta \sigma_{ij}$$

$$h_i = \delta T_i$$

$$\bar{J}_i = \delta \mu_i$$

Como estas funciones son arbitrarias, se pueden escoger por comodidad aquellos desplazamientos que satisfacen las condiciones de borde cinemáticas es decir $\delta u_i = 0$ en S_u .

Reemplazando y reordenando se obtiene la siguiente condición necesaria para que se satisfaga el equilibrio y la compatibilidad:

$$\int_V \left\{ \sigma_{ij} \delta u_{i,j} - \bar{b}_i \delta u_i + \left[\frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) - \epsilon_{ij} \right] \delta \sigma_{ij} \right\} dV +$$

$$- \int_{S_\epsilon} \sigma_{ij} m_j \delta u_i ds + \int_{S_\epsilon} (\mu_j \sigma_{ij} - \bar{\tau}_i) \delta u_i ds + \int_{S_u} (\mu_i - \bar{u}_i) \delta \tau_i ds = 0$$

Por otro lado considérese la siguiente notación:

$$\Pi_R = \int_V \left\{ -\frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} - \mu_i b_i + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) \right\} dV +$$

$$+ \int_{S_u} (\mu_i - \bar{u}_i) \tau_i ds - \int_{S_\epsilon} \mu_i \bar{\tau}_i ds$$

Puede verificarse que si se satisfacen las leyes esfuerzo-deformación la condición $\delta \Pi_R = 0$ es equivalente a la expresión (1), por lo que esta condición es necesaria para que se cumplan las condiciones del equilibrio y las de la compatibilidad. Para establecer si $\delta \Pi_R = 0$ es también una condición suficiente para que se cumplan estas condiciones bastaría con realizar el proceso inverso partiendo de $\delta \Pi_R$ y obtener la expresión inicial, donde las funciones de ponderación son ahora

variaciones virtuales de los esfuerzos o de los desplazamientos. Como estas variaciones virtuales son generales se concluye que $\delta \Pi_R = 0$ es una condición necesaria y suficiente para satisfacer ambas condiciones.

Debe observarse que tal como está expresado el funcional de Reissner el término con mayor orden de derivada es el término $(\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) \epsilon_{ij}$ donde los desplazamientos aparecen con la primera derivada y los esfuerzos aparecen sin derivarse.

2.3.2 ESPECIALIZACION DEL FUNCIONAL DE REISSNER AL ANALISIS DE LOSAS SIN CONSIDERAR DEFORMACION POR CORTE

Según se vio en el capítulo 1, en el análisis de losas es común el considerar los desplazamientos en función de los giros de la superficie neutra. Esto conduce a que al especializar el funcional de Reissner al análisis de losas aparezcan derivadas segundas de los desplazamientos.

En el capítulo siguiente se verá que el orden de continuidad requerido para las funciones de aproximación utilizadas en elementos finitos, está

dado por las derivadas de mayor orden que se incluyen en el funcional. Esta es una de las principales dificultades en el análisis de losas empleando elementos finitos, pues al aparecer derivadas segundas de los desplazamientos se requiere que éstos sean continuos hasta su primera derivada.

Empleando el funcional de Reissner existen diversas alternativas para plantear el problema; una es la adoptada inicialmente por Hermann (12, 13), en la cual se realizan algunas integraciones por partes con el objeto de reducir el orden de las derivadas en los desplazamientos, aumentándolas en los esfuerzos.

Esta idea fue seguida por Connor (5), quien presenta diversas alternativas de especialización de este funcional para losas, a partir de una de las cuales se desarrolla la presente tesis.

Otras posibles alternativas para la especialización de este funcional al análisis de losas se encuentran en el trabajo de Pian y Tong (3) y en el de Connor (5), las cuales parten de Reissner y realizan algunas integrales de funciones discontinuas; estas integraciones se basan en la propiedad de que aún si los desplazamientos son discontinuos en el borde entre elementos, las integrales siguen siendo

definidas (o finitas) si su respectivo esfuerzo es continuo, siendo necesario agregar algunas integrales del tipo $\int T_i u \, ds$ en los bordes entre elementos. Sin embargo, al emplear estas alternativas no se hace uso de una de las características más interesantes de este funcional la cual es que los esfuerzos y los desplazamientos son independientes.

El hecho de que las relaciones esfuerzo-deformación se cumplan exactamente no debe confundir con respecto a la característica indicada, pues debe recordarse que al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange las funciones se consideran como si fueran independientes de sus derivadas (en este caso los desplazamientos como independientes de las deformaciones).

Teniendo en cuenta la siguiente notación:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{kl} S_{ijkl} \, dV$$

$$K_{ij} = \theta_{i,j}$$

$$q = \int_z \bar{b}_z \, dz$$

Se tendría primeramente que, al no considerar

deformación por corte, $\gamma_j = 0$ y se puede escribir:

$$\theta_j = -\omega_{,j}$$

$$\theta_{j,i} = \kappa_{j,i} = -\omega_{,ji}$$

Así los desplazamientos pueden escribirse en función de los giros y de los desplazamientos del plano medio de la siguiente forma:

$$u_i = u_i^* - z \omega_{,i}$$

donde $i = 1, 2$

Reemplazando estas expresiones en el funcional de Reissner y considerando que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi_R(u_i, \sigma_{ij}) = & -U + \int_A \int_z \{ (\mu_{i,ij}^* - z \omega_{,ij}) \sigma_{ij} - \mu_3 b_3 \} dV - \\ & - \int_{\Delta_m} \int_z \tau_i (\mu_i^* - z \omega_{,i} - \bar{u}_i) dz d\Delta - \\ & - \int_{\Delta_m} \int_z \tau_3 (\mu_3 - \bar{u}_3) dz d\Delta - \int_{\Delta_6} \int_z \bar{\tau}_3 \mu_3 dA - \\ & - \int_{\Delta_6} \int_z \bar{\tau}_i (\mu_i^* - z \omega_{,i}) dz d\Delta \end{aligned}$$

donde $i, j = 1, 2$

Como no actúan fuerzas en la dirección del plano de las losas y los giros son independientes de z se ten-

dría luego de operar y simplificar convenientemente:

$$\begin{aligned} \Pi_R(\omega, H_{ij}) = & -U - \int_A (H_{ij} \omega_{,ij} + \omega q) dA + \int_{\Delta_u} \{ H_{mm} (\omega_{,m} - \bar{\omega}_{,m}) \} d\Delta \\ & + \int_{\Delta_u} H_{ms} (\omega_{,s} - \bar{\omega}_{,s}) d\Delta - \int_{\Delta_u} Q_m (\omega - \bar{\omega}) d\Delta + \\ & + \int_{\Delta_s} (\bar{H}_{mm} \omega_{,m} + \bar{H}_{ms} \omega_{,s} - \bar{Q}_m \omega) d\Delta \end{aligned}$$

Obsérvese que si se aplica el funcional de Reissner tal como está expresado se necesitaría o asegurar una continuidad C1 en los desplazamientos verticales o integrar ciertos términos de borde que demandarían un trabajo adicional. Sin embargo, como los desplazamientos y momentos son independientes se puede realizar una integración por partes:

$$\begin{aligned} \int_A H_{ij} \omega_{,ij} dA &= \int_A (H_{ij} \omega_{,i})_{,j} dA - \int_A H_{ij,j} \omega_{,i} dA \\ &= \int_{\Delta} \alpha_{mj} H_{ij} \omega_{,i} d\Delta - \int_A Q_i \omega_{,i} dA \\ &= \int_{\Delta} (H_{mm} \omega_{,m} + H_{ms} \omega_{,s}) d\Delta - \int_A Q_i \omega_{,i} dA \end{aligned}$$

Reemplazando este termino y considerando $\Delta = \Delta_u + \Delta_s$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi_R(\omega, H_{ij}) = & -U + \int_A (Q_i \omega_{,i} - \omega q) dA - \int_{\Delta} H_{mm} \omega_{,m} d\Delta - \\ & - \int_{\Delta} H_{ms} \omega_{,s} d\Delta + \int_{\Delta_u} H_{mm} (\omega_{,m} - \bar{\omega}_{,m}) d\Delta + \\ & + \int_{\Delta_u} \{ H_{ms} (\omega_{,s} - \bar{\omega}_{,s}) - Q_m (\omega - \bar{\omega}) \} d\Delta + \\ & + \int_{\Delta_s} (\bar{H}_{mm} \omega_{,m} + \bar{H}_{ms} \omega_{,s} - \bar{Q}_m \omega) d\Delta \end{aligned}$$

Si se satisface directamente que $w = \bar{w}$ en S_u y que $M_{nn} = \bar{M}_{nn}$ en S_σ se podría simplificar la expresión y obtener finalmente:

$$\begin{aligned} \Pi_R(w, M_{ij}) = & -U + \int_A (\theta_i w_{,i} - w q) dA - \int_{S_u} M_{mn} \bar{w}_{,m} dS - \\ & - \int_{S_u} M_{ms} \bar{w}_{,s} dS - \int_{S_\sigma} \{ (M_{ms} - \bar{M}_{ms}) w_{,s} + \bar{Q}_m w \} dS \end{aligned}$$

La cual es una especialización de Reissner para losas, sin considerar deformación por corte. Notese que en esta expresión solo se incluyen derivadas de primer orden de las funciones incógnitas w, M_{ij} .

Es importante observar que en un borde cualquiera se puede prescribir $w = \bar{w}$ o no indicar nada respecto a w ; si se está en este último caso al haberse eliminado del funcional el término:

$$\int_{S_u} \bar{Q}_m (w - \bar{w}) dS$$

Implícitamente se aceptaría que $\bar{Q} = 0$ en ese borde.

Lo mismo se da para el término:

$$\int_{S_\sigma} (M_{ms} - \bar{M}_{ms}) w_{,s} dS$$

Pues si en un borde cualquiera no se prescribe el momento M_{ms} el haber eliminado este término implica que el giro $w_{,s}$ debe ser nulo en dicho borde.

2.3.3 ESPECIALIZACION DEL FUNCIONAL DE REISSNER AL ANALISIS

DE LOSAS CONSIDERANDO DEFORMACION POR CORTE.

La especialización del funcional de Reissner en este caso es muy similar a la anterior; para ello siguiendo las convenciones antes presentadas y además:

$$\gamma_1 = \gamma_{13} = \mu_{1,3} + \mu_{3,1}$$

$$\gamma_2 = \gamma_{23} = \mu_{2,3} + \mu_{3,2}$$

Se tendría inicialmente:

$$\begin{aligned} \Pi_R(\mu_i, \sigma_{ij}) = & -U + \int_A \int_z \{ (\mu_{i,j}^* + z \theta_{i,j}) \delta_{ij} + (\mu_{1,3} + \mu_{3,1}) \delta_{13} \} dV + \\ & + \int_A \int_z \{ (\mu_{2,3} + \mu_{3,2}) \delta_{23} - \mu_3 \bar{b}_3 \} dV - \int_{S_6} \bar{T}_3 \mu_3 ds \\ & + \int_{S_u} -T_i (\mu_i^* + z \theta_i - \bar{\mu}_i) ds - \int_{S_u} T_3 (\mu_3 - \bar{\mu}_3) ds \\ & - \int_{S_6} \bar{T}_i (\mu_i^* + z \theta_i) ds \end{aligned}$$

Simplificando esta expresión y observando que γ_1 y γ_2 son independientes de z :

$$\begin{aligned} \Pi_R(\omega, H_{ij}) = & -U + \int_A (H_{ij} \theta_{i,j} + \gamma_i \theta_i - q \omega) dA - \\ & - \int_{S_u} \{ H_{mn} (\theta_m - \bar{\theta}_m) + H_{ms} (\theta_s - \bar{\theta}_s) + Q_m (\omega - \bar{\omega}) \} d\Delta \\ & - \int_{S_6} \{ \bar{H}_{mn} \theta_m + \bar{H}_{ms} \theta_s + \bar{Q}_m \omega \} d\Delta \end{aligned}$$

Nuevamente es conveniente realizar la siguiente integracion por partes:

$$\int_A (M_{ij} \theta_{i,j} + \theta_i \gamma_i) dA - \int_A (M_{ij} \theta_{i,j})_{,j} dA - \int_A M_{ij,j} \theta_i dA + \int_A \theta_i (\omega_{,i} + \theta_i) dA$$

Por las ecuaciones de equilibrio de la losa $M_{ij,j} = Q_i$ y por ello:

$$\int_A (M_{ij} \theta_{i,j} + \theta_i \gamma_i) dA = \int_A (M_{ij} \theta_{i,j})_{,j} - \int_A \theta_i \omega_{,i} dA$$

o equivalentemente:

$$\int_A (M_{ij} \theta_{i,j} + \theta_i \gamma_i) dA = \int_{\Delta} (M_{mm} \theta_m + M_{ms} \theta_s) d\sigma - \int_A \theta_i \omega_{,i} dA$$

Al reemplazar y considerando que $\Delta = \Delta_m + \Delta_s$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi_Q(\omega, M_{ij}) = & -U + \int_A (\theta_i \omega_{,i} - q \omega) dA + \int_{\Delta_s} (M_{mm} - \bar{M}_{mm}) \theta_m d\sigma \\ & + \int_{\Delta_s} (M_{ms} - \bar{M}_{ms}) \theta_s d\sigma + \int_{\Delta_m} (M_{mm} \theta_m + M_{ms} \theta_s + \theta_m (\omega - \bar{\omega})) d\sigma \end{aligned}$$

Esta expresi3n puede simplificarse m3s si admitiendo que las condiciones $M_{mm} = \bar{M}_{mm}$, $M_{ms} = \bar{M}_{ms}$ en Δ_s y $\omega = \bar{\omega}$ en Δ_m se satisfacen exactamente, se eliminan los siguientes t3rminos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_s} (M_{mm} - \bar{M}_{mm}) \theta_m d\sigma \\ & \int_{\Delta_s} (M_{ms} - \bar{M}_{ms}) \theta_s d\sigma \\ & \int_{\Delta_m} \theta_m (\omega - \bar{\omega}) d\sigma \end{aligned}$$

Con estas consideraciones se tendría finalmente la especialización del Funcional de Reissner al caso de losas incluyendo deformaciones de corte buscada:

$$\begin{aligned} \Pi_R(w, M_{ij}) = & -U + \int_A (Q_i w_{,i} - q w) dA - \int_{\Delta_6} \bar{Q}_m w d\Delta + \\ & + \int_{\Delta_m} (M_{mm} \bar{\Theta}_m + M_{ms} \bar{\Theta}_s) d\Delta \end{aligned}$$

Esta es la expresión que será utilizada en lo que sigue.

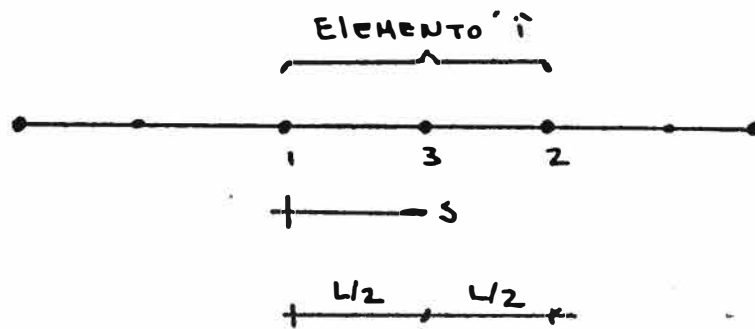
C A P I T U L O I I I

FORMULACION DE LOS ELEMENTOS FINITOS

INTRODUCCION: En el capítulo anterior se han visto diversos funcionales aplicables a la teoría de la elasticidad y la especialización del funcional de Reissner al caso de losas con y sin deformación por corte. Hasta este punto todos ellos han sido tratados como integrales de funciones definidas en todo un dominio. Así, al plantear un procedimiento tipo Rayleigh-Ritz las aproximaciones debían ser válidas en toda la región en estudio y debían por tanto satisfacer las condiciones de borde en cada caso. Esto, naturalmente es difícil, mas aún en regiones de geometría irregular.

El procedimiento de los elementos finitos puede ser considerado como un caso particular del método de Rayleigh-Ritz, en el cual las aproximaciones son planteadas a nivel de subregiones o "elementos finitos" y no a nivel de la región como un conjunto.

Por ejemplo considérese un elemento lineal de tres nudos, tal como el mostrado en la figura.



La función incógnita podría ser, por ejemplo "w" y para ésta podría plantear:

$$w = \sum_{i=1}^3 N_i(s) w_i$$

donde:

$$N_1(s) = \left(1 - \frac{s}{L}\right) - \frac{1}{2} N_3$$

$$N_2(s) = \frac{s}{L} - \frac{1}{2} N_3$$

$$N_3(s) = \frac{4s}{L} \left(1 - \frac{s}{L}\right)$$

En esta subregión o elemento finito la función incógnita está únicamente definida por los valores de ésta en los tres nudos del elemento y por las funciones de interpolación. Así, las condiciones de borde pueden imponerse a nivel de los elementos y no de la posiblemente complicada región como un conjunto.

Hasta este punto se ha visto que las funciones incógnitas son representadas independientemente en el interior de cada elemento finito mediante funciones de

establecer cuales son los requisitos que deben cumplir estas funciones de interpolación para asegurar que a medida que se aumente el número de elementos se obtengan soluciones más aproximadas.

Para que exista esta convergencia deben cumplirse dos clases de condiciones (4):

1) Condiciones de consistencia: Las funciones de interpolación deben ser tales que permitan representar la derivada de mayor orden, "m", de las funciones incógnitas que aparezcan en el funcional.

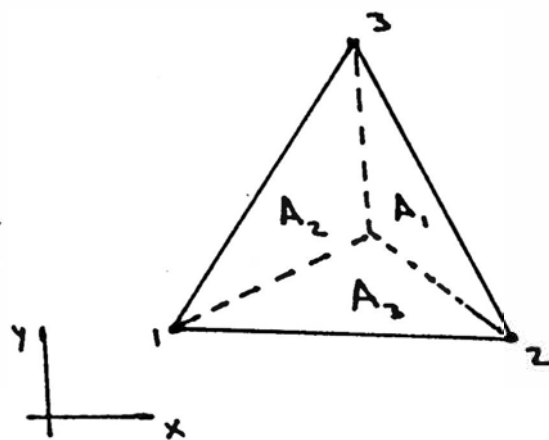
Además, las interpolaciones deben permitir representar exactamente situaciones en las que las funciones incógnitas o cualquiera de sus derivadas hasta de orden "m" sean constantes.

2) Condiciones de continuidad: Las funciones de interpolación deben ser tales que garanticen la continuidad entre elementos finitos de las funciones incógnitas y sus derivadas hasta un grado menos que la derivada de mayor orden, "m", que aparezca en el funcional.

3.1 FUNCIONES DE INTERPOLACION

Los elementos triangulares y rectangulares son dos de los elementos finitos mas empleados. Por ello a continuacion se detallaran las funciones e interpolacion comunmente empleadas en ellos:

3.1.1 Elemento triangular (6): En el caso del elemento triangular lo mas conveniente es emplear coordenadas de area. Asi, considerando un elemento como el de la fig. un punto en el interior de el queda definido si se conocen las coordenadas de area L_i :



$$L_i = \frac{A_i}{A}$$

Las funciones de interpolacion en este caso resultan $N_i = L_i$. Estas funciones de interpolacion tambien podrian escribirse en terminos de las coordenadas x-y segun:

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

donde:

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

i	1	2	3
j	2	3	1
k	3	1	2

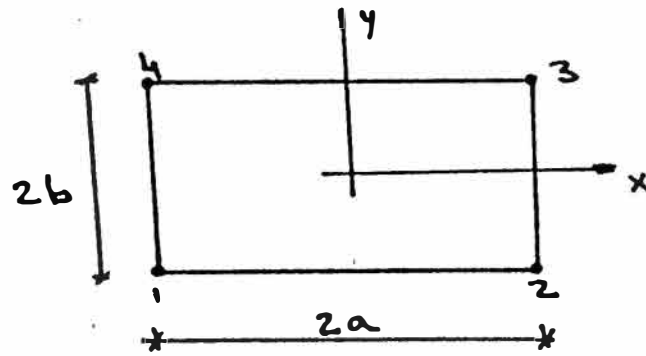
Puede observarse que estas funciones permiten representar movimientos de cuerpo rígido y estados de deformación constante. Además sólo podrían emplearse en funcionales que tuvieran sólo hasta derivadas de primer orden.

Por otro lado, al tener una variación lineal de las funciones incógnitas en los bordes, la continuidad C^0 está asegurada.

3.1.2 Elemento rectangular (6): En el caso del elemento rectangular pueden emplearse funciones de interpolación tales como:

$$N_i(x, y) = \frac{1}{4} (1 + s_i s)(1 + t_i t)$$

donde:



$$s = \frac{x}{a} \quad , \quad s_i = \frac{x_i}{a}$$

$$t = \frac{y}{b} \quad , \quad t_i = \frac{y_i}{b}$$

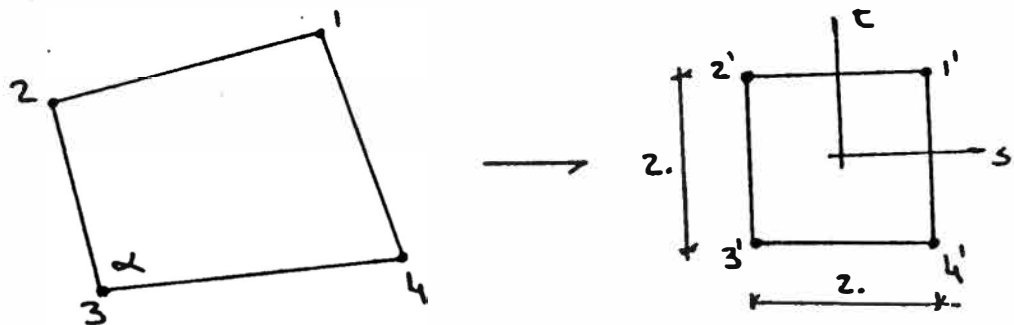
Las cuales, si se emplean en funcionales en los cuales solo aparezcan hasta derivadas de primer orden, satisfacen los requisitos de convergencia.

3.1.3 Transformación isoparamétrica (6,7) : Las coordenadas de un elemento finito pueden a su vez ser interpoladas con el objeto de obtener elementos más generales. Si las funciones de interpolación escogidas para representar a las funciones incógnitas son las mismas que las escogidas para interpolar las coordenadas, esta transformación se conoce como "Isoparamétrica".

En primer término debe decirse que una transformación isoparamétrica solo es posible

si las condiciones de continuidad para las funciones de interpolación, explícitas en el funcional son enteramente satisfechas. Debe observarse que en el funcional de Reissner sólo aparecen derivadas primeras, por lo que sólo se requiere continuidad C^0 en las funciones de interpolación.

En segundo término, debe preguntarse que requisitos debe satisfacer la transformación en sí para que esta sea correcta. Para ello considérese un cuadrilátero 1234 tal como el mostrado, el cual mediante una transformación o cambio de variable se busca representar por el $1'2'3'4'$.



Para que esta transformación sea adecuada debe ser única; es decir a un punto en la region XY le debe corresponder un punto y sólo uno en la region ST.

Un cambio de variable adecuado es:

$$x = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(s, t) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(s, t) y_i$$

donde:

$$\bar{N}_1(s, t) = \frac{1}{4} (1+s)(1+t)$$

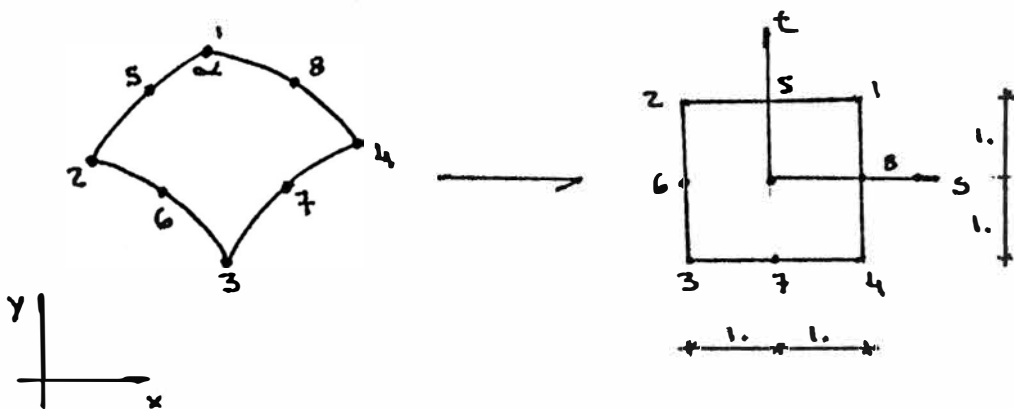
$$\bar{N}_2(s, t) = \frac{1}{4} (1-s)(1+t)$$

$$\bar{N}_3(s, t) = \frac{1}{4} (1-s)(1-t)$$

$$\bar{N}_4(s, t) = \frac{1}{4} (1+s)(1-t)$$

Ademas se puede demostrar (8) que para que esta transformacion sea unica, todos los angulos interiores del cuadrilatero 1234 deben ser menores a 180 ($\alpha < 180$).

Una transformacion de mayor orden es la del elemento cuadratico:



Esta se consigue mediante la siguiente transformación:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) y_i$$

donde:

$$N_1(s, t) = \bar{N}_1(s, t) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8)$$

$$N_2(s, t) = \bar{N}_2(s, t) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6)$$

$$N_3(s, t) = \bar{N}_3(s, t) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7)$$

$$N_4(s, t) = \bar{N}_4(s, t) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8)$$

$$N_5(s, t) = \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 + t)$$

$$N_6(s, t) = \frac{1}{2}(1 - t^2)(1 - s)$$

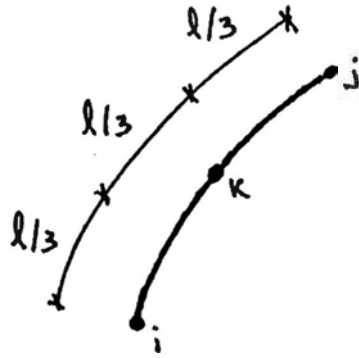
$$N_7(s, t) = \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 - t)$$

$$N_8(s, t) = \frac{1}{2}(1 - t^2)(1 + s)$$

Esta será única si se satisface (8) que:

El cuadrilátero es convexo ($\alpha < 180^\circ$)

- Los nudos interiores caen dentro del tercio central de su respectivo lado, es decir:



Debe observarse que al tener un elemento isoparametrico cuadratico se puede representar exactamente hasta bordes de segundo grado (parabolas).

De manera analogica se podria ir representando la region de integracion por elementos de mayor orden, aumentando el numero de nudos por lado y buscando las funciones de interpolacion adecuadas.

Muchas veces en los integrandos se incluyen no solo la incognita(s) del modelo sino tambien su(s) derivada(s). Estas se consiguen mediante la conocida regla de la cadena:

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

o en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}}_{\tilde{J}} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix}$$

donde a \tilde{J} se le conoce como "Matriz Jacobiana".

Puesto que las derivadas de "x" e "y" con respecto a "s" y a "t" se conocen, los términos de esta matriz y su inversa son fácilmente obtenidos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \tilde{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, las derivadas de la(s) función(es) incognitas se pueden obtener pues asumiendo que "f" sea la función incógnita se tendría:

$$f = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) f_i$$

y por ello:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i(s,t)}{\partial x} \phi_i$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i(s,t)}{\partial y} \phi_i$$

Finalmente, debe recordarse que al realizar un cambio de variable se cumple que $dA = |J| dsdt$. Por otro lado, debe observarse que polinomios en "x" e "y" no se transforman en los mismos polinomios en "s" y "t" -excepto el polinomio lineal 1,x,y, - lo cual afecta el orden de convergencia esperado(8). En general, debe por ello evitarse elementos muy distorsionados con los cuales se obtienen resultados inferiores a los obtenidos con elementos regulares.

Por otra parte, deben observarse las ventajas de haber reemplazado la complicada región de integración inicial por regiones de integración fijas, en las cuales se puede aplicar un procedimiento de integración numérica, tal como el de Gauss-Legendre. Es decir, se transforma la integral inicial sobre un área complicada a la evaluación de la función y sus derivadas en ciertos puntos de integración numérica pre-establecidos.

3.2 FORMULACION DE UN ELEMENTO CUADRILATERAL

El elemento que se detalla es un cuadrilatero de cuatro a ocho nudos, donde los cuatro nudos de las esquinas son fijos y alternativamente se puede o no agregar un nudo intermedio en cada lado; ello permite en dicho borde una variacion parabolica. En general es aconsejable el emplear los ocho nudos.

Para la formulacion de este elemento se empleara la especializacion del funcional de Reissner al analisis de losas que incluye la deformacion por cortante.

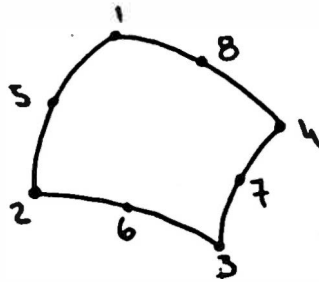
Supongase inicialmente que las funciones de interpolacion son tales que satisfacen los requisitos de consistencia y continuidad. Asi, el funcional de Reissner puede expresarse como la sumatoria en cada uno de los elementos finitos de dicho funcional. Es decir, se tendria:

$$\begin{aligned} \pi_R = \sum_{\Delta} \left\{ \int_{\Delta_d} \left(-\frac{1}{2} M_{ij} M_{kl} S_{ijkl}^* - \frac{1}{2} Q_i Q_j S_{ij}^c - q w \right) dA \right. \\ \left. + \int_{\Delta_d} Q_i w_{,i} dA + \int_{\Delta_m} (M_{mm} \bar{\theta}_m + M_{ms} \bar{\theta}_s) d\Delta - \right. \\ \left. - \int_{\Delta_s} \bar{\theta}_m w ds \right\} \end{aligned}$$

Esta es la expresion con la cual se trabajara.

Las incognitas por nudo son:

- El desplazamiento transversal (w)
- Los 3 momentos (M_x , M_y y M_{xy}) con la convencion de signos adoptada en el capitulo I:



$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ w \end{bmatrix}_{\text{nudo } i}$$

Debe ahora escogerse las funciones de interpolacion, lo cual no es de ningun modo rutinario, pues de su correcta eleccion dependen en gran medida los resultados finales, mas aun en el presente caso donde variables de dos clases -esfuerzos y desplazamientos- han de ser interpoladas al mismo tiempo. Los momentos y el desplazamiento transversal son independientes en el funcional pero no lo son en la realidad fisica del problema. Se debe entonces escoger funciones de interpolacion del mismo orden o sera conveniente que sean distintas? Esta no es de ningun modo una pregunta facil de contestar. Parece sin embargo mas conveniente interpolar ambas con las mismas funciones de interpolacion, para lo cual se escogio las de un elemento cuadrilateral serendipido de 2do. orden, es

decir:

$$\omega = \sum_{i=1}^8 N_i(s, \tau) \omega_i$$

$$M_{xx} = \sum_{i=1}^8 N_i(s, \tau) M_{xxi}$$

$$M_{yy} = \sum_{i=1}^8 N_i(s, \tau) M_{yyi}$$

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^8 N_i(s, \tau) M_{xyi}$$

donde:

$$N_1 = \bar{N}_1(s, \tau) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8)$$

$$N_2 = \bar{N}_2(s, \tau) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6)$$

$$N_3 = \bar{N}_3(s, \tau) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7)$$

$$N_4 = \bar{N}_4(s, \tau) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 + \tau)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \tau^2)(1 - s)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 - \tau)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \tau^2)(1 + s)$$

o en notacion matricial:

$$\underline{U} = \underline{N} \underline{w}^e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{xy1} \\ \vdots \\ M_{x8} \\ M_{y8} \\ M_{xy8} \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} = \underline{P} \underline{M}^e$$

En base a estas expresiones y recordando que los constantes se pueden escribir en funcion de los momentos flectores se tendria:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & N_{1,2} & \dots & N_{8,1} & 0 & N_{8,2} \\ 0 & N_{1,2} & N_{1,1} & \dots & 0 & N_{8,2} & N_{8,1} \end{bmatrix} \underline{M}$$

$$\underline{P} = \underline{P} \underline{M}^e$$

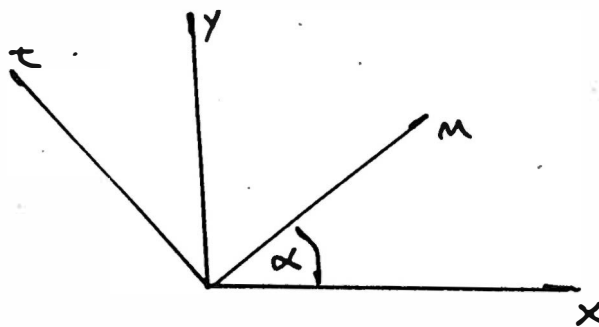
Así mismo, las derivadas del desplazamiento transversal son:

$$\begin{bmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \dots & N_{8,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \dots & N_{8,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_8 \end{bmatrix} = \underline{B} \underline{w}^e$$

Para el desplazamiento en el borde es necesario particularizar las funciones de interpolación en dicho borde, es decir:

$$w|_{s_6} = N_6 w^e$$

Por otro lado, considerese la siguiente notación:



Como los momentos son tensores de segundo orden, su transformación a otro sistema coordenado n-t es según:

$$\begin{bmatrix} M_{m'n'} & M_{m't} \\ M_{t'm} & M_{t't} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

operando convenientemente se obtiene:

$$\begin{bmatrix} H_{xx} \\ H_{yy} \\ H_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{xx} \\ H_{yy} \\ H_{xy} \end{bmatrix}$$

Ademas, considerando la siguiente convencion:

$$\underline{H} = \int_A (\underline{P}^T \underline{S}_F \underline{P} + \underline{R}^T \underline{S}_R \underline{R}) dA$$

$$\underline{G} = \int_A \underline{R}^T \underline{B} dA$$

$$\underline{\bar{\theta}} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_m \\ \bar{\theta}_s \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Delta} = - \int_{\Delta_m} \underline{L}^T \underline{\bar{\theta}} d\Delta$$

$$\underline{F} = \int_A \underline{N}^T \underline{q} dA + \int_{\Delta_e} \underline{N}_b^T \underline{\bar{\theta}}_m d\Delta$$

Se obtiene al reemplazar:

$$\pi_R = \sum^e \left\{ -\frac{1}{2} \underline{m}^{eT} \underline{H} \underline{m} + \underline{m}^{eT} \underline{G} \underline{w}^e - \underline{w}^{eT} \underline{F} - \underline{m}^{eT} \underline{\Delta} \right\}$$

Para una mayor simplicidad en la presentacion se puede considerar \underline{m} y \underline{w} como vectores constituidos por

los momentos y desplazamientos de toda la losa y no solo del elemento 'e'. Así se tendría:

$$\Pi_R = -\frac{1}{2} \underline{M}^T \underline{H} \underline{M} + \underline{M}^T \underline{G} \underline{w} - \underline{w}^T \underline{F} - \underline{M}^T \underline{\Delta}$$

y para que esta expresión sea estacionaria se deberá cumplir:

$$1) \quad \frac{\partial \Pi_R}{\partial \underline{M}} = 0 \quad \text{ó} \quad -\underline{H} \underline{M} + \underline{G} \underline{w} = \underline{\Delta}$$

$$2) \quad \frac{\partial \Pi_R}{\partial \underline{w}} = 0 \quad \text{ó} \quad \underline{G}^T \underline{M} = \underline{F}$$

o en notación matricial:

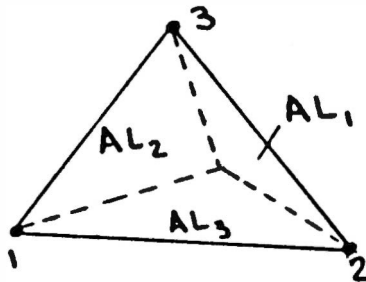
$$\begin{bmatrix} -\underline{H} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{M} \\ \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Delta} \\ \underline{F} \end{bmatrix}$$

Este es un sistema simétrico lleno. Si se ensamblan los momentos y el desplazamiento vertical de cada nudo juntos, se obtiene un sistema tipo banda.

Así mismo se debe tener en cuenta que la matriz de coeficientes no necesariamente es definida positiva.

3.3 FORMULACION DE UN ELEMENTO TRIANGULAR ISOPARAMETRICO

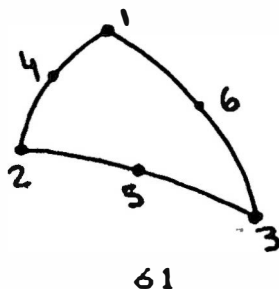
La formulación de un elemento triangular isoparamétrico, es similar a la anterior excepto que en el presente caso es conveniente trabajar con coordenadas de área. Empleando estas se puede ubicar un punto univocamente en una región triangular, conociendo solo 2 de las tres coordenadas, pues una es redundante (9):



La diferencia más importante entre un triángulo isoparamétrico y un cuadrilátero consiste en el empleo de coordenadas de área como coordenadas locales (s, t) . Así, por comodidad se escogerán a L y L como las coordenadas de área independientes.

Las incógnitas por nudo son iguales a las que se establecieron anteriormente.

Considérese la siguiente numeración:



Empleando las mismas funciones de interpolación para los momentos que para el desplazamiento transversal, se tendría:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^6 N_i(L_1, L_2) w_i \\ M_x &= \sum_{i=1}^6 N_i(L_1, L_2) M_{xi} \\ M_y &= \sum_{i=1}^6 N_i(L_1, L_2) M_{yi} \\ M_{xy} &= \sum_{i=1}^6 N_i(L_1, L_2) M_{xyi} \end{aligned}$$

donde:

$$N_1 = L_1 - \frac{1}{2}(N_6 + N_4), \quad N_2 = L_2 - \frac{1}{2}(N_4 + N_5)$$

$$N_3 = 1 - L_1 - L_2 - \frac{1}{2}(N_5 + N_6), \quad N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2(1 - L_1 - L_2), \quad N_6 = 4L_1(1 - L_1 - L_2)$$

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

1	1	2	3
j	2	3	1
k	3	1	2

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad c_i = x_k - x_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

donde N_1 y N_2 son las funciones de interpolación del elemento triangular lineal dadas anteriormente.

Es conveniente presentar estas funciones de interpolación sin agruparlas, pues así se puede eliminar un nudo intermedio cualquiera, permitiendo la programación de un elemento de 3 a 6 nudos.

Por otro lado se puede verificar que dichas funciones de interpolacion satisfacen los requisitos de consistencia y continuidad.

Ademas, al haber reemplazado L_3 en funcion de L_1 y L_2 se puede directamente emplear las expresiones dadas en 3.1.3 considerando que las coordenadas locales son ahora L_1 y L_2 y no s y t .

Desde este punto hacia adelante la formulacion es exactamente igual a la presentada anteriormente (excepto que solo hay 6 y no 8 funciones de interpolacion), por lo que no se repetira.

INTRODUCCION: El presente capitulo comienza comparando resultados entre diversos elementos desarrollados en el analisis de losas planas y el elemento desarrollado en la presente tesis.

Dada la variedad de aplicaciones es muy dificil escoger un elemento como el mejor; es sin embargo, siempre deseable representar con la mayor exactitud pero con el menor numero de incognitas un estado de esfuerzos dado.

Inicialmente se presentan comparaciones para casos mas de corte academico, como son las losas cuadradas o circulares bajo cargas uniformemente distribuidas o concentradas en el centro. Luego se analiza el caso de una losa rectangular apoyada sobre dos bordes simplemente apoyados, uno empotrado y el cuarto libre, sujeta a una carga uniformemente distribuida.

Finalmente se presentan dos casos practicos. El primero consiste en el analisis de una losa rectangular hueca, uniformemente cargada y apoyada sobre dos hileras de columnas. El analisis tradicional, siguiendo un procedimiento tal como el indicado en la referencia (14), conduce

en algunas zonas esfuerzos conservadores y en otras a esfuerzos menores a los reales.

El segundo ejemplo considerado es el de una losa rectangular de seccion variable, uniformemente cargada y simplemente apoyada en sus bordes cuya luz libre es de 25.2 mt x 41.6 mt.

4.1 ANALISIS DE LOSAS CUADRADAS

Se presentan comparaciones para losas cuadradas simplemente apoyadas y empotradas, ambas uniformemente cargadas o sujetas a una carga concentrada en su centro.

Se considera además, el caso de una losa cuadrada simplemente apoyada en sus cuatro esquinas y uniformemente cargada.

Dada la simetria se analizara solo un cuarto de la losa (ver fig. 1)

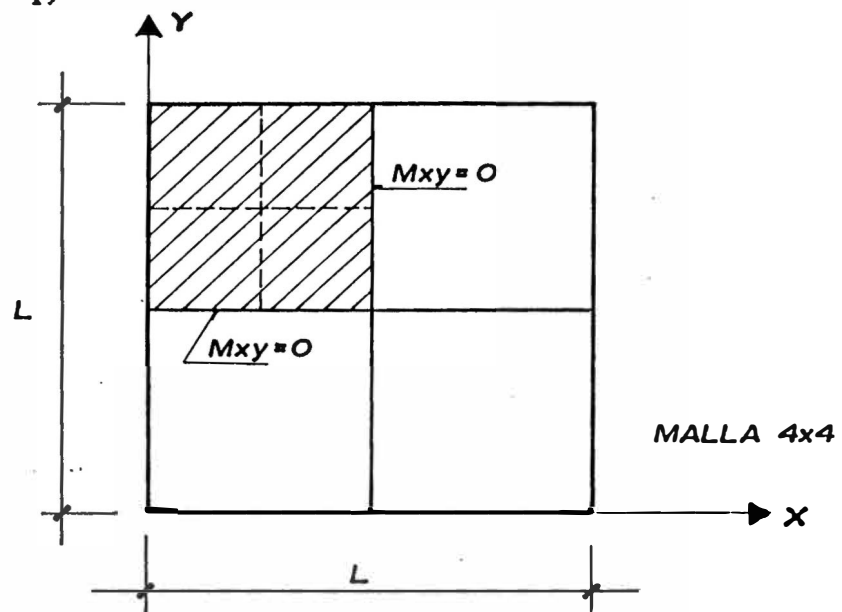


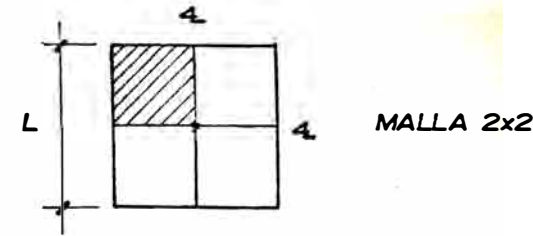
Fig. 1

En las tablas n.1 y n.2 se presentan resultados dados por el elemento de Melosh (elemento compatible), y el elemento de ocho nudos desarrollado en la presente tesis (elemento EFM8), comparados con soluciones en

TABLA # 1

DEFLEXIONES EN EL CENTRO DE UNA LOSA CUADRADA

(SIN INCLUIR DEFORMACION POR CORTANTE)



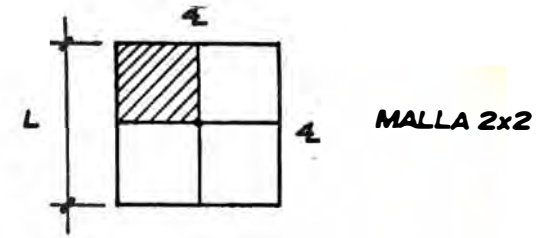
MALLA	SIMPLEMENTE APOYADA					EMPOTRADA				
	# DE INCOGNITAS	α	E_r	B	E_r	# DE INCOGNITAS	α	E_r	B	E_r
		CARGA UNIFORME	%	CARGA CONCENTRA.	%		CARGA UNIFORME	%	CARGA CONCENTRA.	%
2x2	3	0.003446	-15.16	0.013784	18.83	1	0.00143	17.1	0.005919	5.7
4x4	12	0.003939	-3.03	0.012327	6.27	8	0.001403	11	0.006134	9.54
8x8	48	0.004033	-0.71	0.011829	1.97	40	0.001304	3.2	0.005803	3.63
12x12	108	0.00405	-0.3	0.011715	0.99	96	0.001283	1.5	0.00571	1.96
16x16	192	0.004056	-0.15	0.011671	0.61	176	0.001275	0.87	0.005672	1.29
EFMB 2x2	16	0.003906	-3.84	0.011413	-1.61	22	0.001503	18.9	0.006707	19.8
EFMB 4x4	56	0.004056	-0.15	0.011683	0.72	66	0.00126	-0.32	0.005668	1.21
EFMB 6x6	120	0.004061	-0.02	0.01164	0.36	134	0.001265	0.08	0.005657	1.02
EXACTA		0.004062		0.0116			0.001264		0.0056	

$$\omega_{MAX} = \frac{\alpha q L^4}{D} \quad (\text{CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA } q)$$

$$\omega_{MAX} = \frac{B P L^2}{D} \quad (\text{CARGA CONCENTRADA } P)$$

TABLA #2

MOMENTOS EN EL CENTRO DE UNA LOSA CUADRADA
(SIN INCLUIR DEFORMACION POR CORTANTE)



MALLA	SIMPLEMENTE APOYADA					EMPOTRADA				
	# DE	α	ϵ_r	β	ϵ_r	# DE	α	ϵ_r	β	ϵ_r
	INCOGNITAS	CARGA UNIFORME	%	CARGA CONCENTRA.	%	INCOGNITAS	CARGA UNIFORME	%	CARGA CONCENTRA.	%
2x2	3	0.066	37.8	---	---	1	0.0461		---	---
4x4	12	0.0521	8.76	---	---	8	0.0277	19.9	---	---
6x6	27	0.0497	3.76		---	21	0.0249	7.78	---	---
8x8	48	0.0489	2.09	---	---	40	0.024	3.89	---	---
10x10	75	0.0485	1.25	---	---	65	0.0236	2.16	---	---
EFMB 2x2	16	0.3563	-25.61	0.2856	-35.13	22	0.02296	-0.61	0.264	-31.96
EFMB 4x4	56	0.0482	0.66	0.396	-10.12	66	0.0211	-8.66	0.336	-13.4
EFMB 6x6	120	0.04786	-0.05	0.4406		134	0.0232	0.43	0.388	
EXACTA		0.04789		*			0.0231		*	

--- NO SE CONOCE REFERENCIA

* SOLUCION SINGULAR

$$M_{xx} = \alpha q L^2 \text{ (CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA } q \text{)}$$

$$M_{xx} = \beta P \text{ (CARGA CONCENTRADA } P \text{)}$$

series dadas por Timoshenko. En el elemento EFM8 no se consideraron las deformaciones por corte.

En estas tablas puede apreciarse la rápida convergencia tanto en esfuerzos como en desplazamientos del elemento EFM8. La solución en series para el momento máximo positivo, en los casos de las losas simplemente apoyada y empotrada con una carga concentrada en su centro da valores infinitos, por lo que las comparaciones en estos casos se realizan con los resultados del elemento EFM8 obtenidos con una malla de 6×6 .

Es conveniente observar que en general las aproximaciones para los momentos obtenidos con modelos mixtos son superiores a las similares obtenidas con modelos compatibles.

Además debe recordarse que para el elemento EFM8 la variación de los esfuerzos y los desplazamientos entre nudos es parabólica.

En la fig. 2 se presentan resultados recopilados por Pian y Tong (3) a las cuales se ha agregado el elemento EFM8. Pueden apreciarse resultados para modelos híbridos, modelos compatibles, modelos de equilibrio y el modelo mixto adoptado en esta tesis.

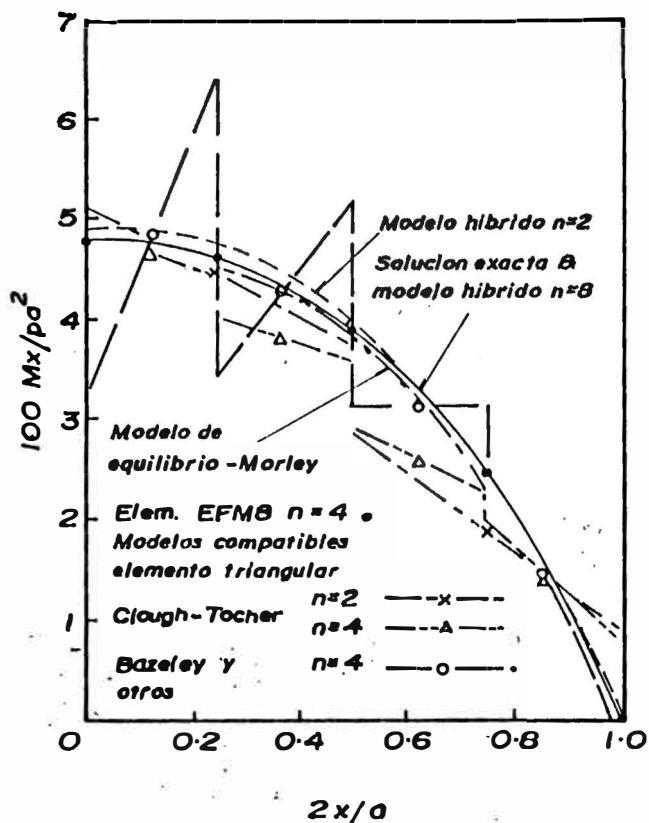


Fig. 2 - Momento Flector a lo largo de la línea central de una losa cuadrada simplemente apoyada bajo y na carga uniformemente distribuida. (Referencia # 3)

En la tabla n. 3 se presentan comparaciones entre elementos obtenidos empleando diversos ordenes de integracion reducida en elementos no-conformes (4) y el elemento EFM8. Las subdivisiones adoptadas se muestran en la fig. n. 3.

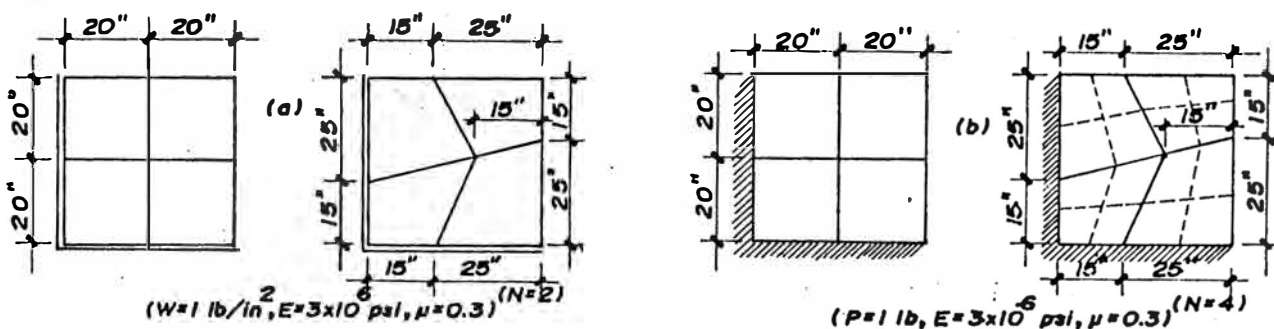


FIG. 3.- Losa cuadrada, Malla Regular y Distorsionada. (a) Simplemente apoyada y uniformemente cargada (b) Empotrada con una carga concentrada.

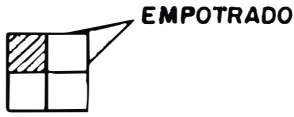
Así, en tabla n. 3 el elemento C8 es el elemento de Ahmad-Irons (14) y el elemento NC8-4.1 es uno obtenido por Chang-Koon Choi (16) agregando 4 modos no-conformes al desplazamiento vertical y empleando integración reducida. Similarmente se obtiene al elemento NC8-5.1 solo que este tiene cinco modos no-conformes.

TABLA 3.-Resultados para una losa cuadrada simplemente apoyada con carga uniforme ($ln \times 10^3$).

Elemento		General ()		Cuadrado ()		
Designación (1)	Regla de Integración (2)	N = 2 (3)	N = 4 (4)	N = 2 (5)	N = 3 (6)	N = 4 (7)
C8	(2 x 2)	55.96	60.34	60.19	60.59	60.61
C8	(3 x 3)	49.14	59.50	56.93	59.92	60.33
NC8-4.1	(3 x 3)	55.40	60.18	58.20	60.40	60.58
NC8-4.1	(2 x 2) + (3 x 3)	56.11	60.36	60.20	60.59	60.61
NC8-5.1	(3 x 3)	59.68	60.62	60.29	60.57	60.60
NC8-5.1	(2 x 2) + (3 x 3)	57.67	60.50	60.22	60.59	60.61
EFMB	(3 x 3)	60.6		60.47	60.55	
Teoría		60.57				

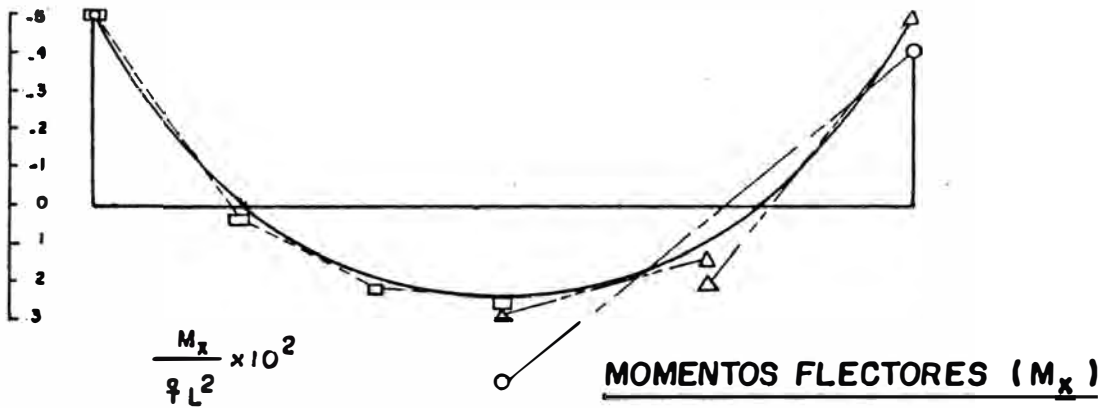
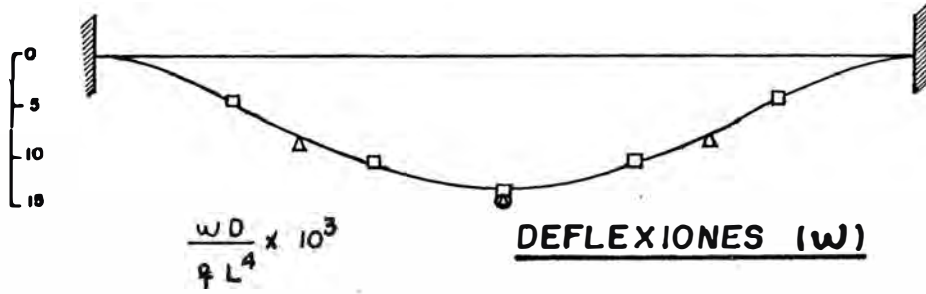
TABLA 4.-Resultados para una losa cuadrada empotrada sujeta a una carga concentrada ($ln \times 10^5$).

Elemento		General ()		Cuadrado ()		
Designación (1)	Regla de Integración (2)	N = 2 (3)	N = 4 (4)	N = 2 (5)	N = 3 (6)	N = 4 (7)
C8	(2 x 2)	8.21	12.92	9.49	12.71	13.04
C8	(3 x 3)	3.20	11.81	4.41	10.63	11.97
NC8-4.1	(3 x 3)	7.00	12.75	8.31	12.29	12.90
NC8-4.1	(2 x 2) + (3 x 3)	8.38	12.94	9.60	12.74	13.04
NC8-5.1	(3 x 3)	12.04	13.06	12.34	12.93	13.05
NC8-5.1	(2 x 2) + (3 x 3)	10.62	13.08	11.63	12.97	13.11
EFMB	(3 x 3)	13.06		13.20	13.10	
Teoría		13.10				

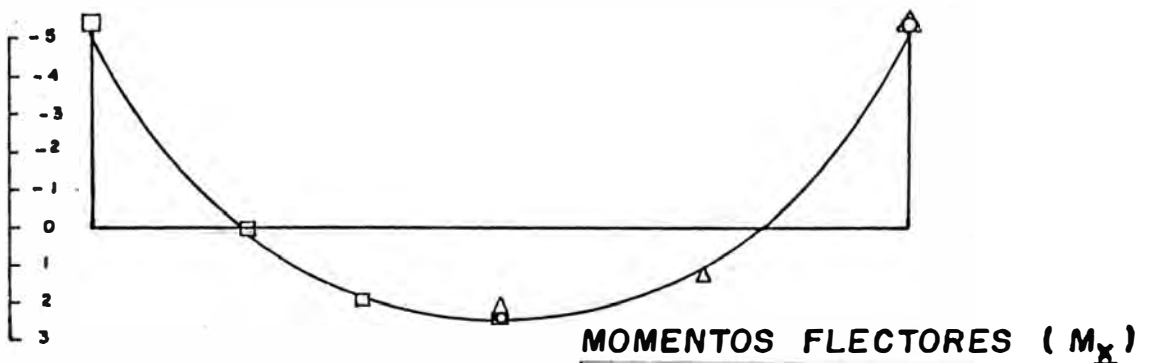
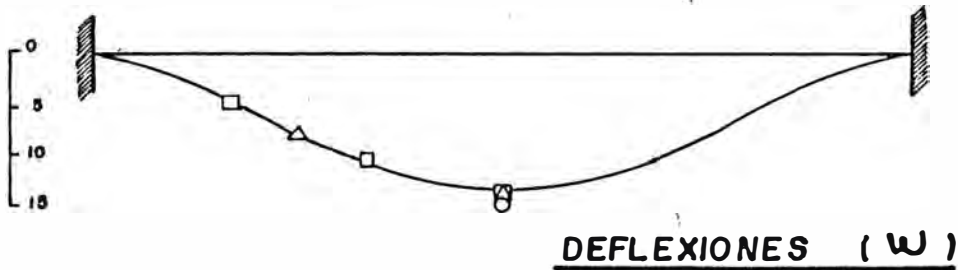


MALLA 2 x 2

LOSA CUADRADA EMPOTRADA (UNIFORMEMENTE CARGADA)

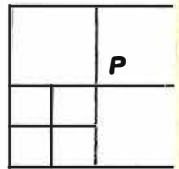


- MALLA 16 x 16 PARA SOLUCION POR DIFENCIAS FINITAS (SOUTHWELL 1956)
- □ — MALLA 6 x 6 ELEMENTO NO CONFORME (TRES INCOGNITAS POR NUDO)
- △ — MALLA 4 x 4 " " "
- ○ — MALLA 2 x 2 " " "

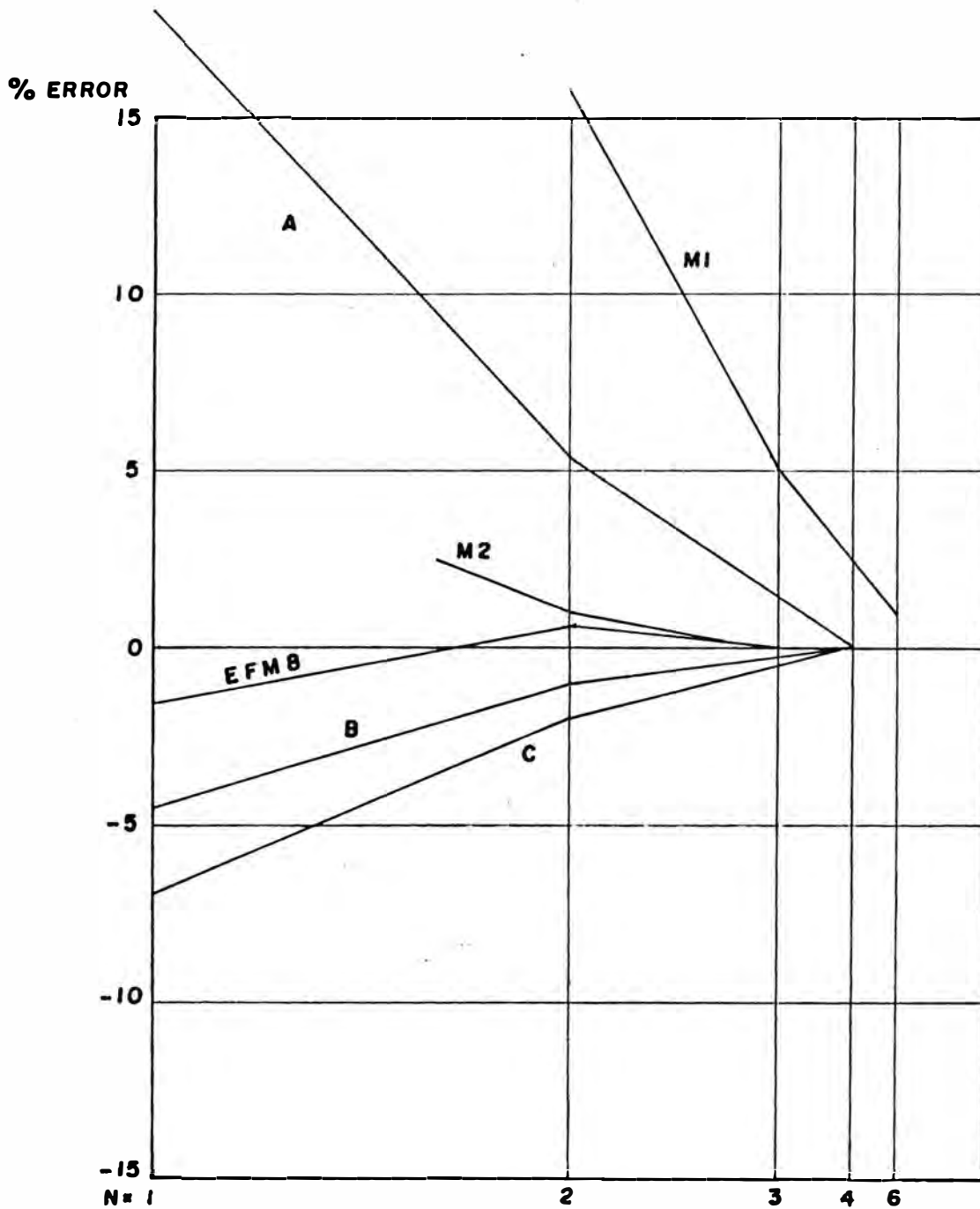


- MALLA 16 x 16 PARA SOLUCION POR DIFERENCIAS FINITAS (SOUTHWELL 1956)
- □ — MALLA 6 x 6 ELEMENTO MIXTO (4 INCOGNITAS POR NUDO) - ELEM. EFMB
- △ — MALLA 4 x 4 " " " "
- ○ — MALLA 2 x 2 " " " "

**COMPARACIONES PARA LAS DEFLEXIONES DE UNA LOSA
SIMPLEMENTE APOYADA CON UNA CARGA CONCENTRADA P**
ELEMENTOS RECTANGULARES
(REFERENCIA # 4)



N = 2



- A NO CONFORME, 12G. d. l.
- B HERMETICA CONFORME, 16G. d. l
- C CONFORME, 16G. d. l
- MI MIXTA LINEAL M/ω
- M2 MIXTA DE SEGUNDO GRADO M/ω
- EFMB ELEMENTO DESARROLLADO EN LA TESIS

Fig. 5

En las figuras 4 y 5 se presentan diversos resultados dados por Zienkiewicz (4) a los cuales se ha agregado el elemento EFM8.

4.2 LOSA RECTANGULAR UNIFORMEMENTE CARGADA CON DOS BORDES ----- SIMPLEMENTE APOYADOS, UNO EMPOTRADO Y EL CUARTO LIBRE -----

En el presente caso se comparan resultados recopilados por Pian y Tong (3) en los cuales se emplean elementos mixtos desarrollados por Hermann según dos esquemas (12,13). En el primer esquema los momentos M_x , M_y y M_{xy} tienen una variación lineal en el interior del elemento, igual a la del desplazamiento vertical; mientras que en el segundo esquema, el desplazamiento vertical tiene una variación lineal, pero los momentos son constantes.

El elemento mixto EFM8 tiene una variación cuadrática tanto para los desplazamientos como para los momentos y debe conducir a resultados mejores que los obtenidos con los elementos mixtos antes indicados. Así, de la fig. 6 pueda observarse que a pesar del reducido número de elementos, el elemento EFM8 da resultados con un orden de aproximación similar al del elemento de Hermann empleado con una malla más tupida.

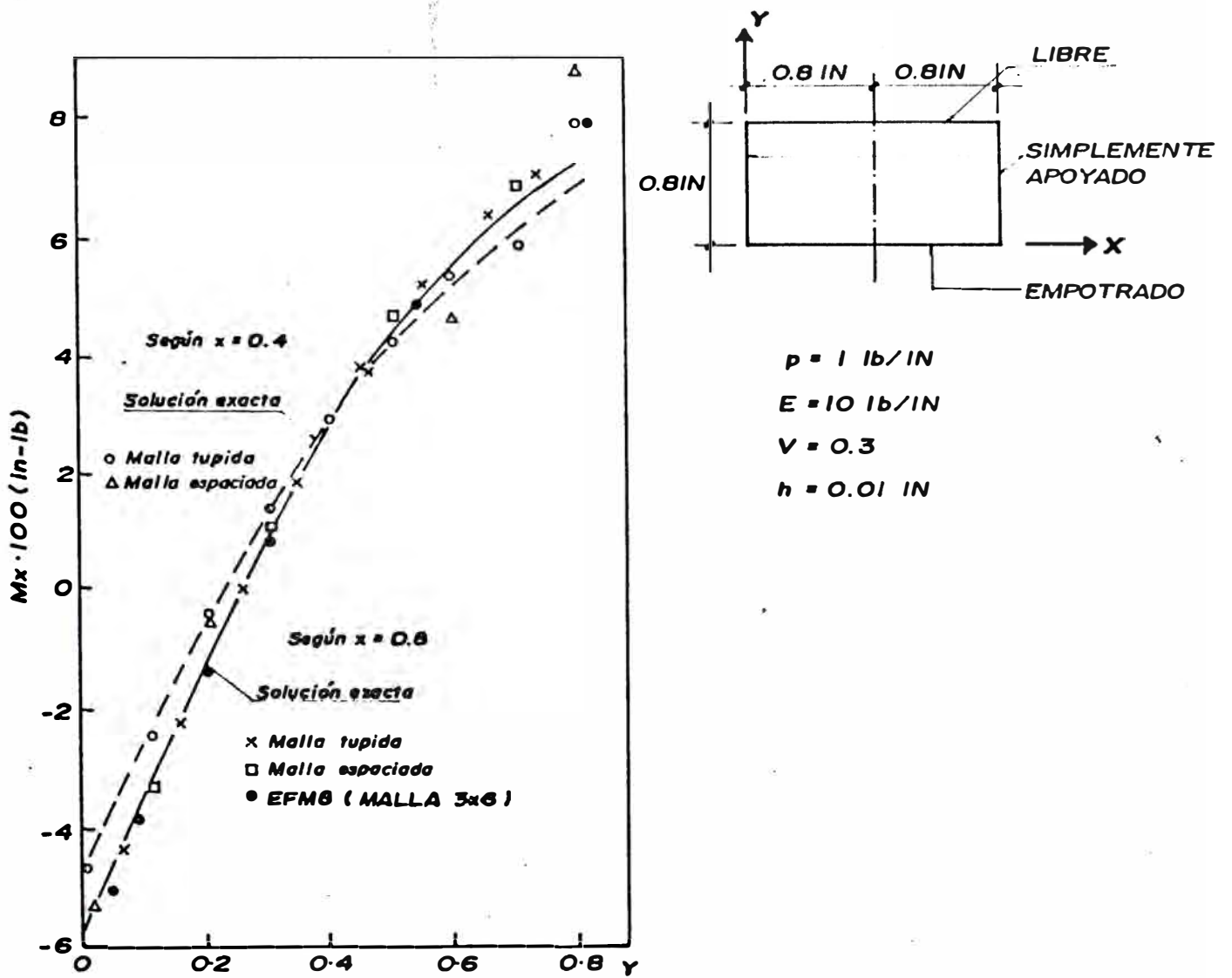


Fig. 6. Losa rectangular apoyada sobre dos bordes simplemente apoyados, uno libre y otro empotrado yjeta a una carga uniformemente distribuida.
(Referencia # 3)

4.3 LOSA CUADRADA APOYADA EN SUS CUATRO ESQUINAS Y UNIFORMEMENTE CARGADA

En la tabla n. 5 se presentan resultados obtenidos empleando el elemento de Melosh y el elemento EFMB comparados con soluciones dadas por Ballesteros y Lee y por Marcus. En la fig. n.7 se muestra la subdivisión empleada al usar el elemento EFMB

LOSA APOYADA EN SUS CUATRO ESQUINAS

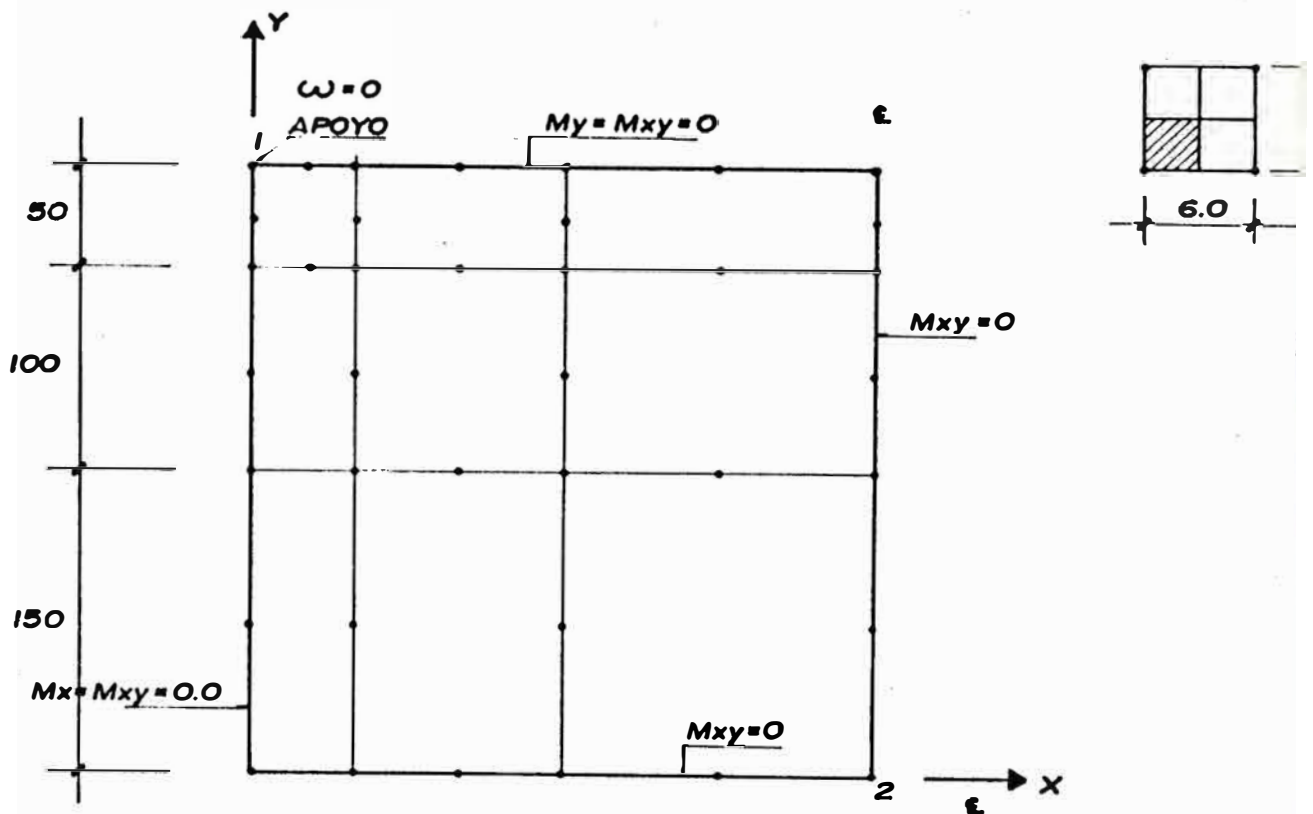


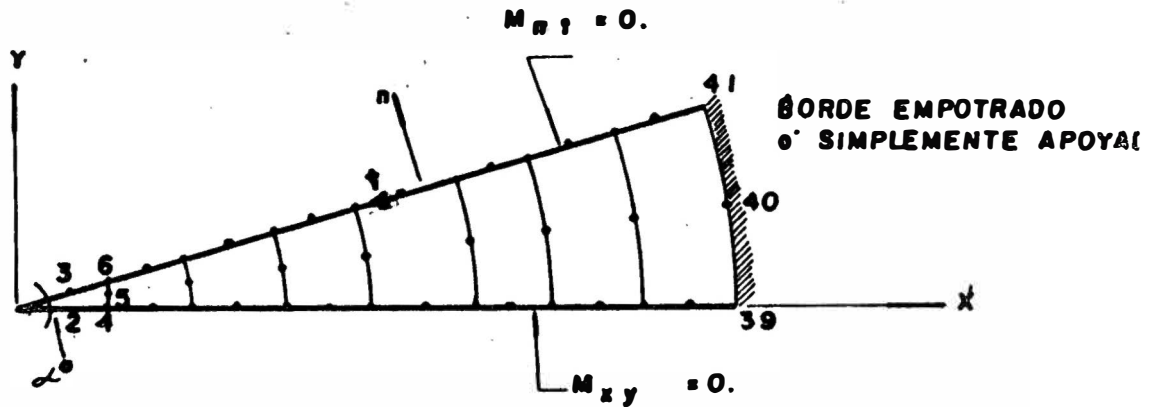
Fig.-7.- Subdivisión Malla 6x6. Elementos Finitos Mixtos

TABLA # 5

		PUNTO 1		PUNTO 2	
		ω	M_x	ω	M_x
ELEM. FINITOS	2x2	0.0126	0.139	0.0176	0.095
"	4x4	0.0165	0.149	0.0232	0.108
"	6x6	0.0173	0.15	0.0244	0.109
ELEM. FINITOS MIXTOS	6x6	0.0187	0.153	0.0263	0.113
MARCUS		0.018	0.154	0.0261	0.11
BALLESTEROS Y LEE		0.017	0.14	0.0265	0.109
MULTIPLICADOR		qL^4/D	qL^2	qL^4/D	qL^2

4.4 LOSA CIRCULAR

Empleando el elemento EFM8, y dada la simetria axial, la losa puede ser analizada solo considerando un sector circular tal como se muestra en la fig. 8



MALLA 8 x 1

Debe observarse que si bien este ejemplo es analiticamente facil de resolver numericamente no lo

es, pues las interpolaciones para los momentos y el desplazamiento vertical están dadas en función de las coordenadas xy . Por ello, a medida que se reduzca el ángulo interior " α " los resultados serán más aproximados.

En la tabla n. 6 se presentan resultados dados por Li, Cheung y Tham empleando "strip elements" (15) comparados con el elemento EFM8. Puede observarse que el elemento EFM8 conduce a buenos resultados para el desplazamiento transversal en el centro con pocas incógnitas.

Debe indicarse, sin embargo, que para obtener una buena representación de los momentos en el borde exterior - sea éste empotrado o simplemente apoyado se necesita un ángulo interior " α " no mayor a 10°

TABLA 6 DESPLAZAMIENTO MAXIMO PARA UNA LOSA CIRCULAR (REFERENCIA #15)

TIPO CARGA	METODO	TIPO DE BORDE	
		SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA
UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA (q = 1.)	" STRIP ELEMENT." MALLA 12x12	0.06383	0.01567
	" STRIP ELEMENT." MALLA 8 x 8	0.06391	0.01568
	ELEMENTO EFM8 MALLA 8 x 1 ($\alpha = 20^\circ$)	0.06301	0.01548
	RESULTADOS ANALITICOS	0.0637	0.01563
CARGA CONCENTRADA AL CENTRO (p = 1.)	" STRIP ELEMENT." MALLA 12x12	0.05046	0.01985
	" STRIP ELEMENT." MALLA 8x8	0.0504	0.01975
	ELEMENTO EFM8 MALLA 8x1 ($\alpha = 20^\circ$)	0.0498	0.01964
	RESULTADOS ANALITICOS	0.0505	0.01989

$$V = 0.3, \quad R = 1., \quad D = 1.0$$

Ejemplo de la Aplicación n. 1

El primer caso práctico considerado será el de una losa rectangular apoyada sobre dos hileras de columnas y uniformemente cargada. La losa será una "Estructura Espacial Compuesta" (10) tal como la mostrada en las figuras 9 y 10.

En la fig. 10 se muestra la subdivisión en elementos finitos considerada y las condiciones de borde.

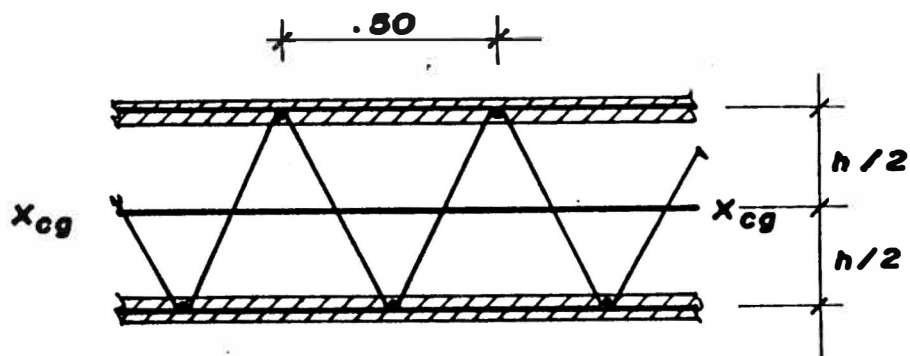


FIG. 9

$$h = 0.6 \text{ mT}$$

$$f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

Una alternativa de análisis para esta losa es emplear el capítulo para losas armadas en dos sentidos del reglamento A.C.I. (11). En el caso específico de esta aplicación se pudo observar, sin embargo, que los esfuerzos obtenidos según este reglamento son en algunas zonas muy conservadores y en otras zonas están por debajo de los reales. Recuérdese, por ejemplo, que

segun el reglamento A.C.I. las cargas son principalmente transmitidas a las columnas por las denominadas "Franjas de columnas". Asi estas franjas tienen esfuerzos considerablemente mayores a los esfuerzos de las denominadas "franja centrales". Este comportamiento se da en la direccion longitudinal (Ver fig. 13), sin embargo, en la direccion transversal los esfuerzos en las franjas centrales y franjas de columnas son similares (ver fig. 12), y por ello, los momentos M_y en las franjas centrales estan considerablemente subvaluadas.

Por otro lado, es importante observar la alta magnitud del momento flector M_x en las cercanias de las columnas y su rapida disminucion a medida que se aleja de ellas. Este comportamiento esta reflejado en el reglamento A.C.I., al considerar como metodo de diseno el metodo de la rotura y emplear como momento de diseno un momento ultimo promedio que toda la franja debe resistir. Este criterio es adecuado pues es antieconomico no emplear la redistribucion de momentos que se da en las losas.

Finalmente debe indicarse que esta losa ha sido ya construida y que el comportamiento observado en la estructura concordo con los resultados del analisis.

MALLA DE ELEMENTOS FINITOS CONSIDERADA

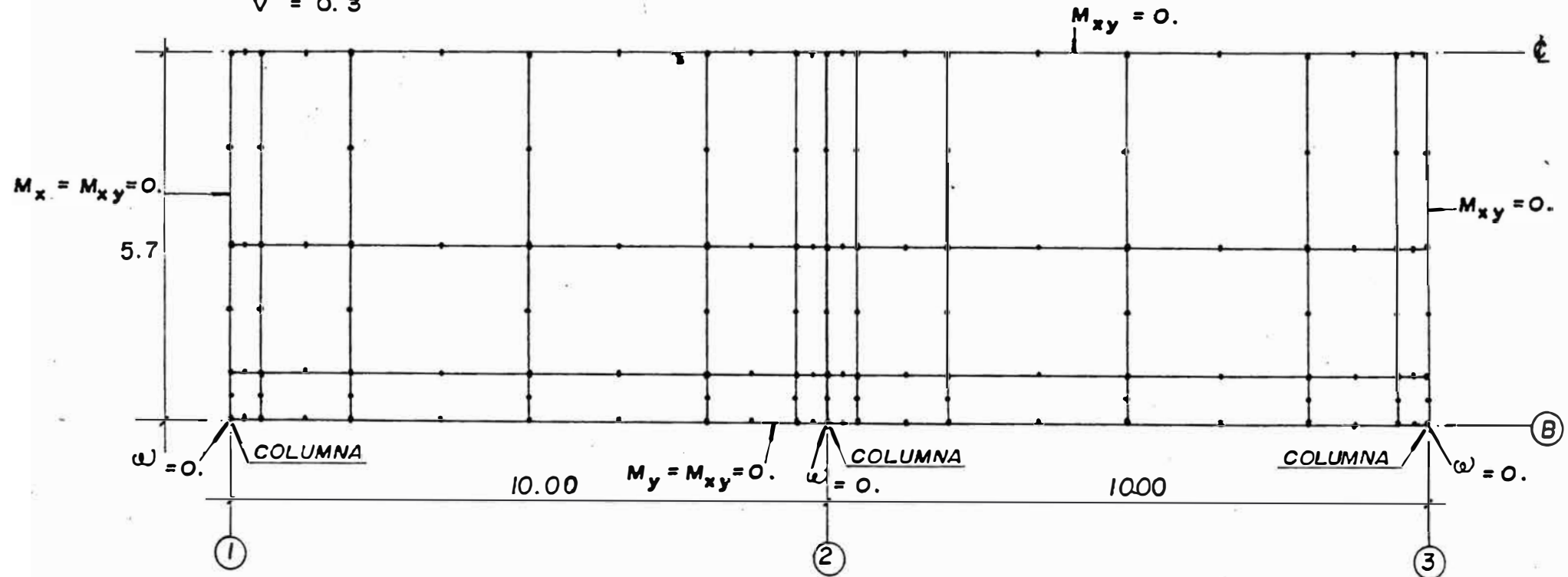
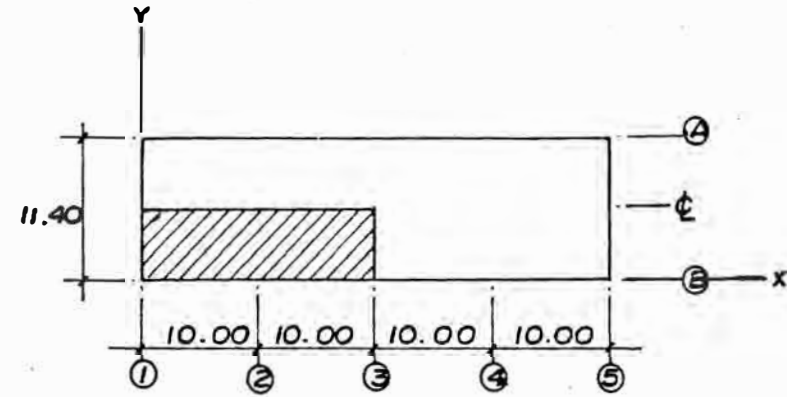
$f_y = 4,200 \text{ Kg. / cm}^2$

$f'_c = 210 \text{ Kg. / cm}^2$

$h_T = 0.65 \text{ mt}$

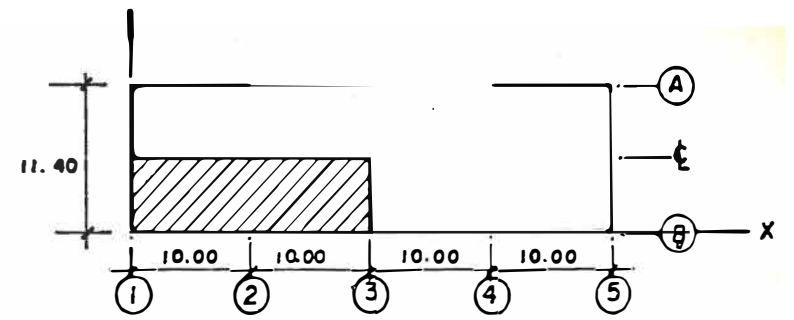
$q = 400 \text{ Kg. / m}^2$

$\nu = 0.3$

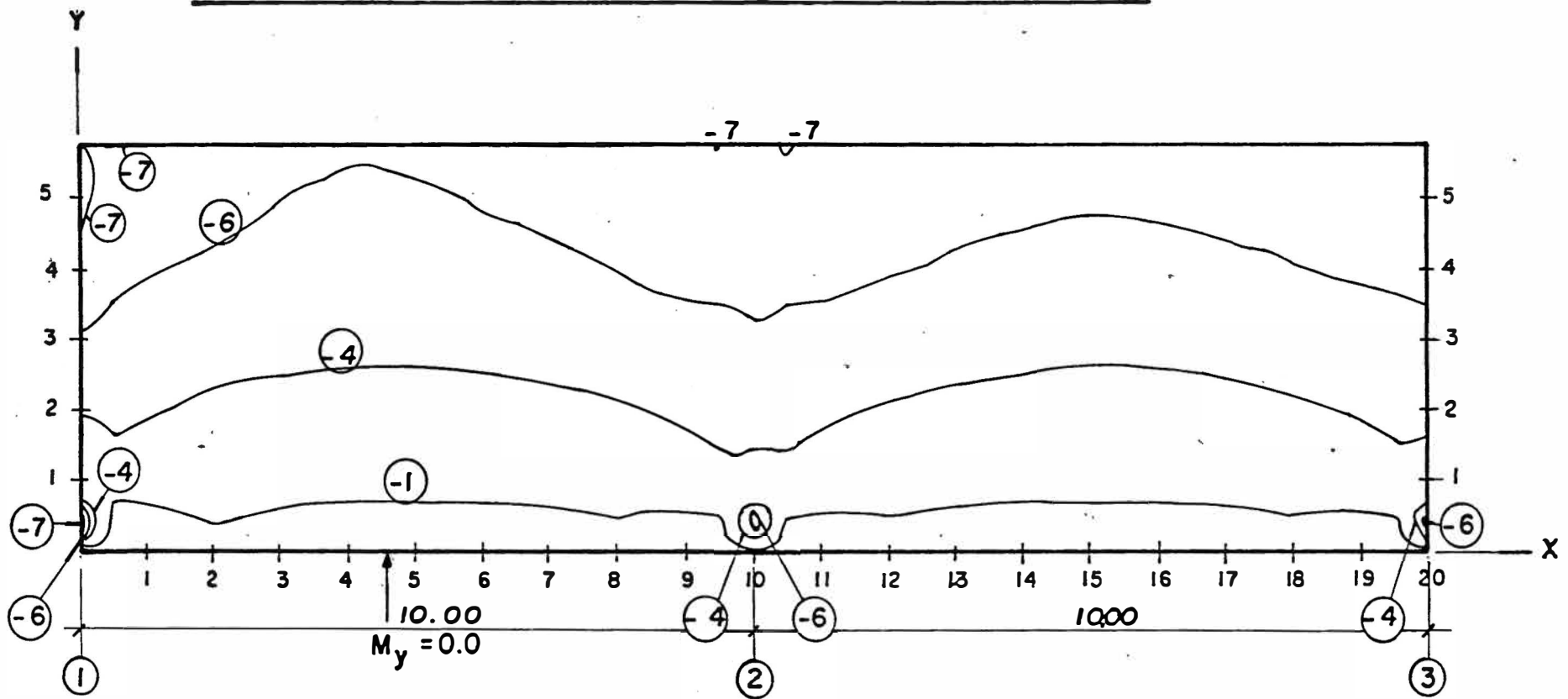


ESC. 1/100

Fig. 10



DISTRIBUCION DEL MOMENTO FLECTOR M_y (T x M)



NOTA: LA CONVENCION DE SIGNOS ES LA ADOPTADA EN EL CAPITULO I

ESC. 1/100

Fig. II

DISTRIBUCION DEL MOMENTO FLECTOR M_x (T x M)

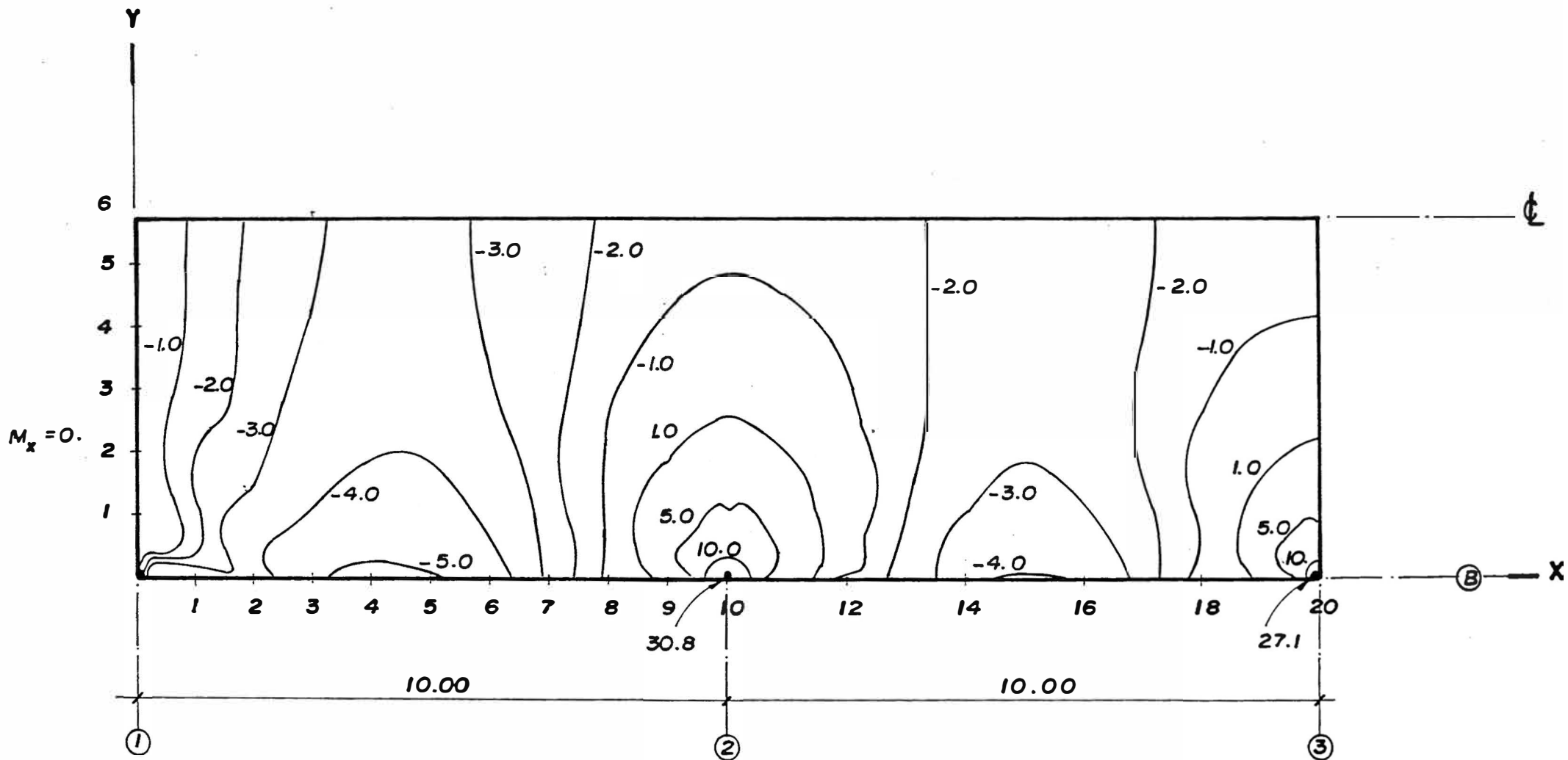
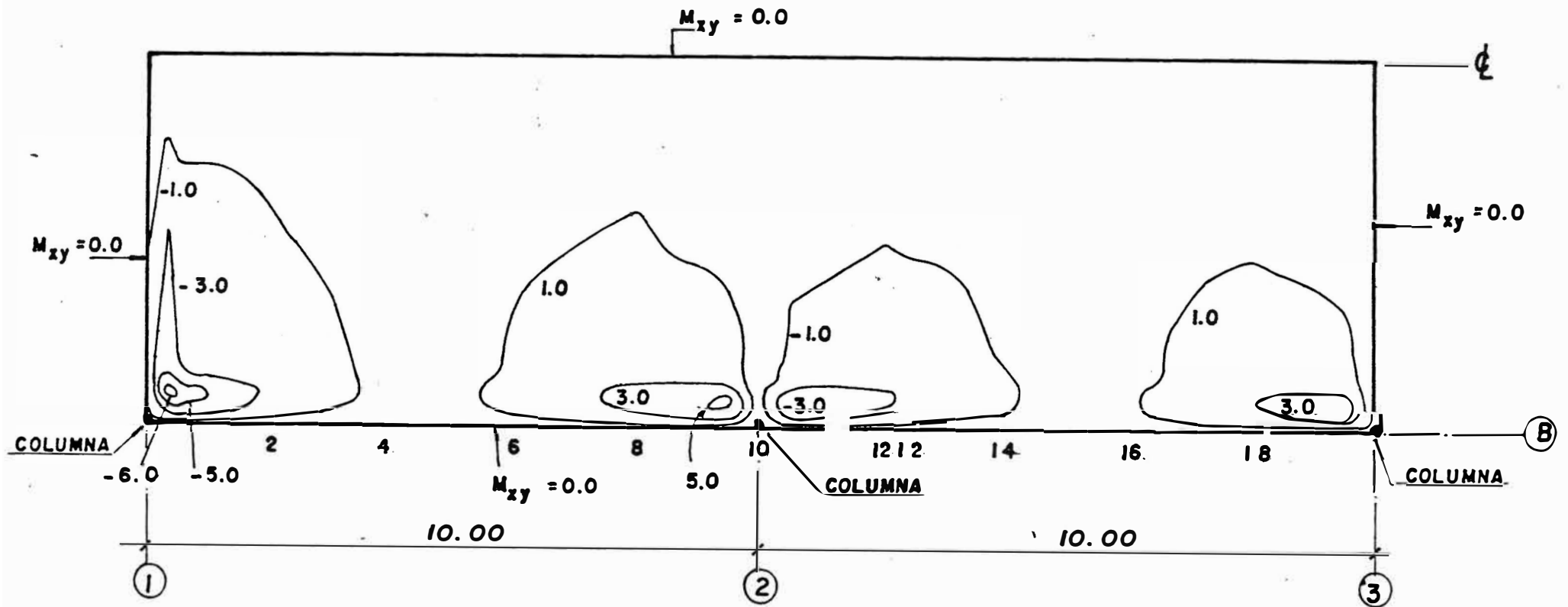


Fig. 12

DISTRIBUCION DEL MOMENTO FLECTOR M_{xy} (T x M)



ESC. 1/100

Fig. 13

Ejemplo de Aplicacion n. 2

El segundo ejemplo considerado es el de una "Estructura Espacial Compuesta" de planta y seccionales como las mostradas en la fig. 15.

Debe observarse que la forma estructural de esta losa es consecuencia de buscar un mayor peralte al centro, donde los momentos flectores son maximos pero los cortantes minimos y un peralte menor en los bordes donde los cortantes son maximos pero los momentos flectores son minimos. Asi en los bordes, las diagonales - que predominantemente toman el cortante - tienen una menor longitud de pandeo.

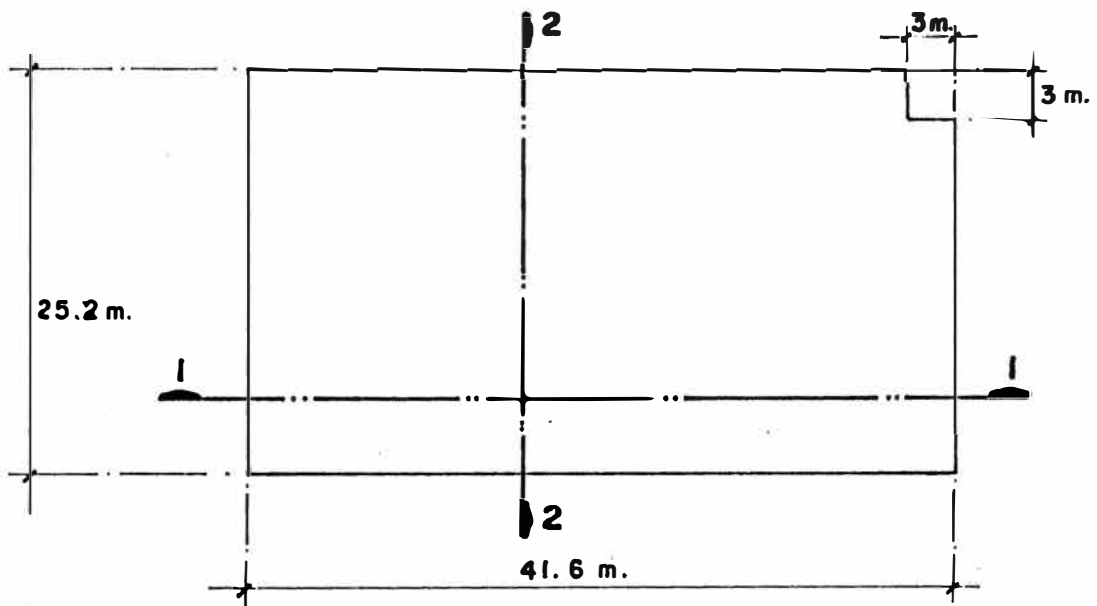
Por otro lado, las ventajas de las estructuras compuestas (10), como son un uso mas racional del acero y del concreto, aumento de la luz sin un sensible aumento del peso propio, etc; se dan en esta losa.

En las figuras 17 y 18 se observa que si bien el momento flector M_y , es, como se esperaba, mayor que el M_x , este ultimo es elevado. Asi tambien los cortantes en los timpanos son elevados y por ello se disenaron unos estribos que reducian la longitud de pandeo de las diagonales en estas zonas.

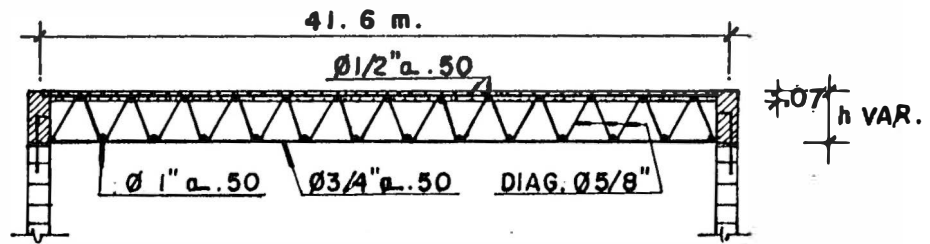
En la fig. 16 se presenta la malla en elementos finitos considerada y las condiciones de borde. Por otro lado la seccion transversal se modelo como una losa de seccion variable maciza de inercia equivalente a la de la losa inicial.

En las figuras 17, 18 y 19 se presentan los resultados obtenidos, en los cuales se observa el efecto de la abertura de 3 x 3 metros de la esquina en la distribucion de los esfuerzos.

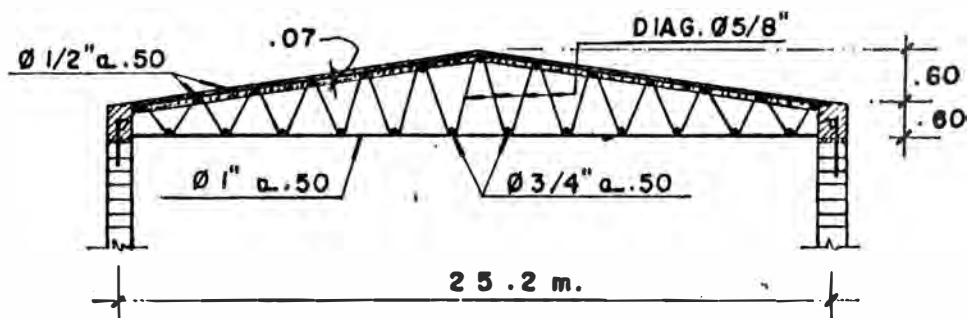
Debe indicarse finalmente que esta losa esta ya construida y que la deflexion al centro obtenida del analisis (5 cm) fue muy similar a la obtenida en el desencofrado (4.5 cm).



PLANTA



SECCION 1-1



SECCION 2-2

Fig. 15

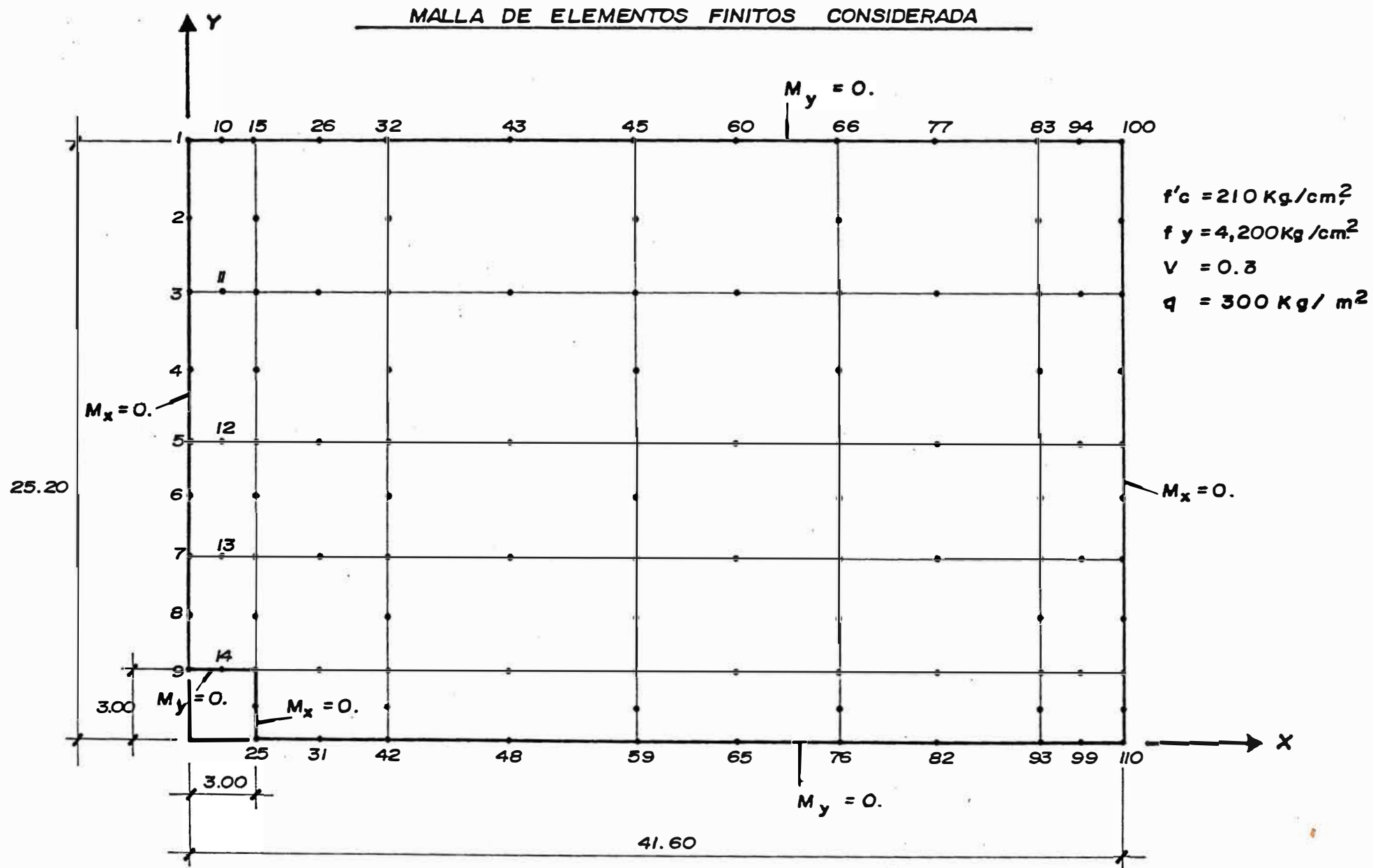


Fig. 16

ESCALA : 1/250

DISTRIBUCION DEL MOMENTO FLECTOR M_x (t x m)

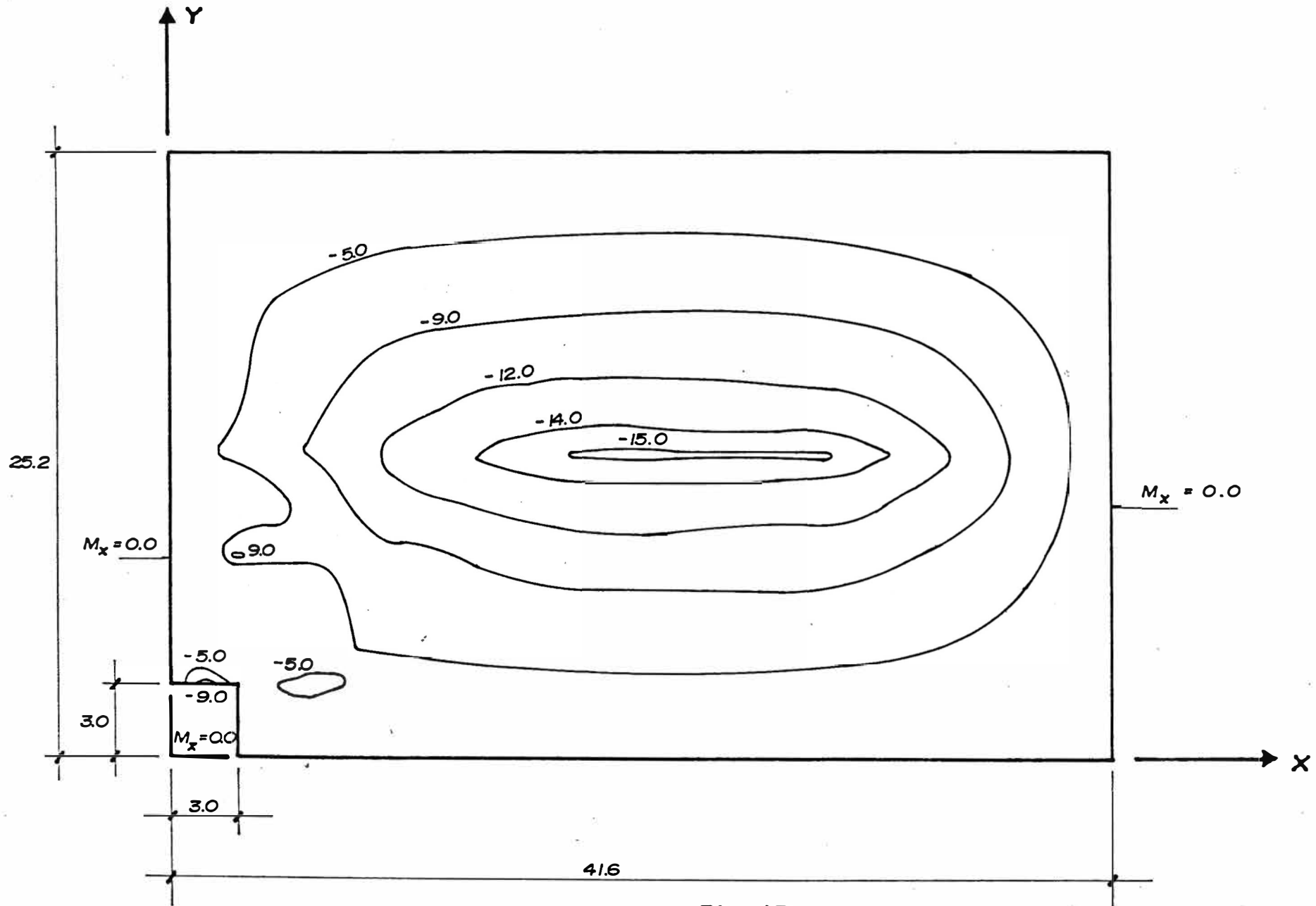


Fig. 17.

ESCALA : 1/250

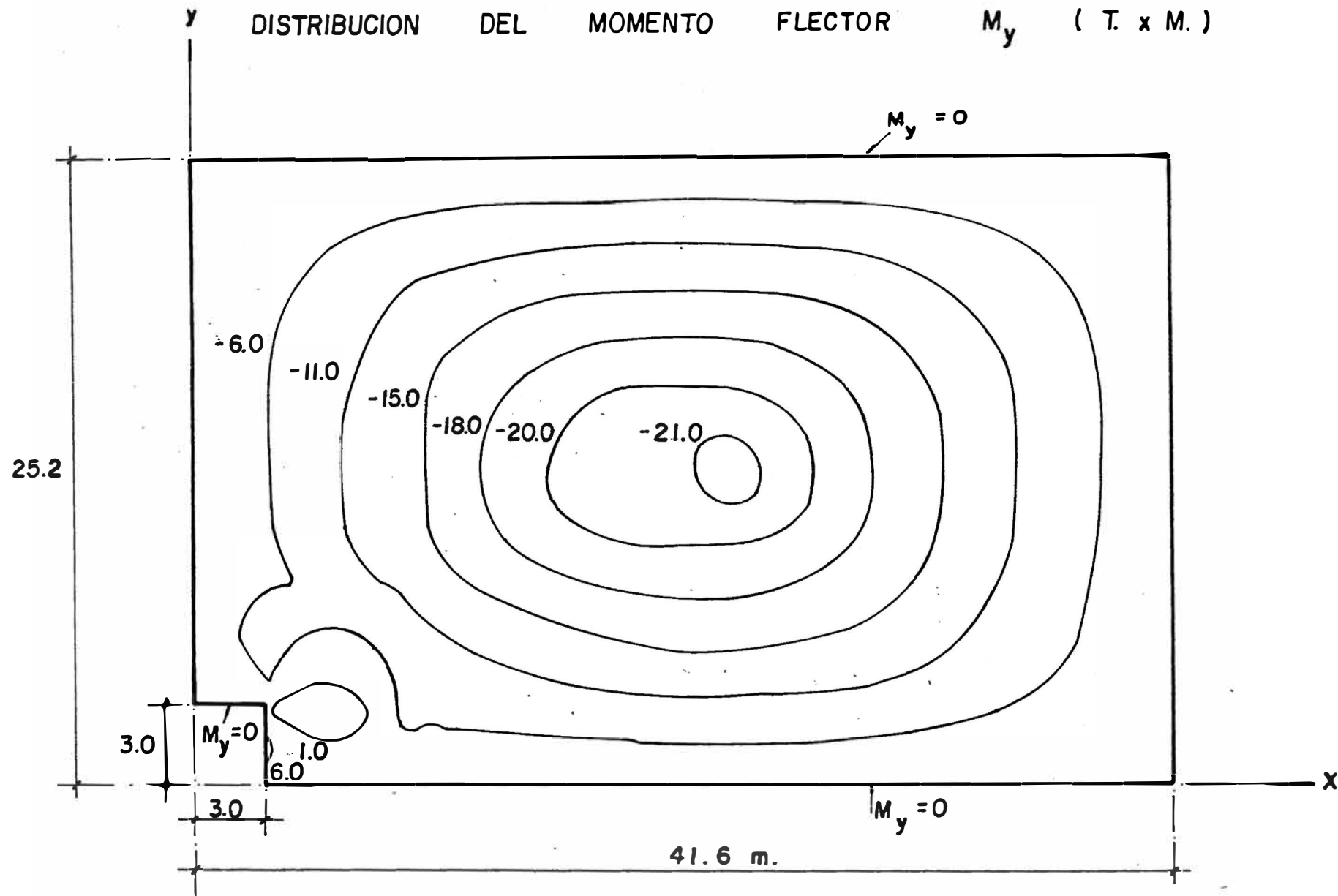


Fig. 18

ESC. 1/250

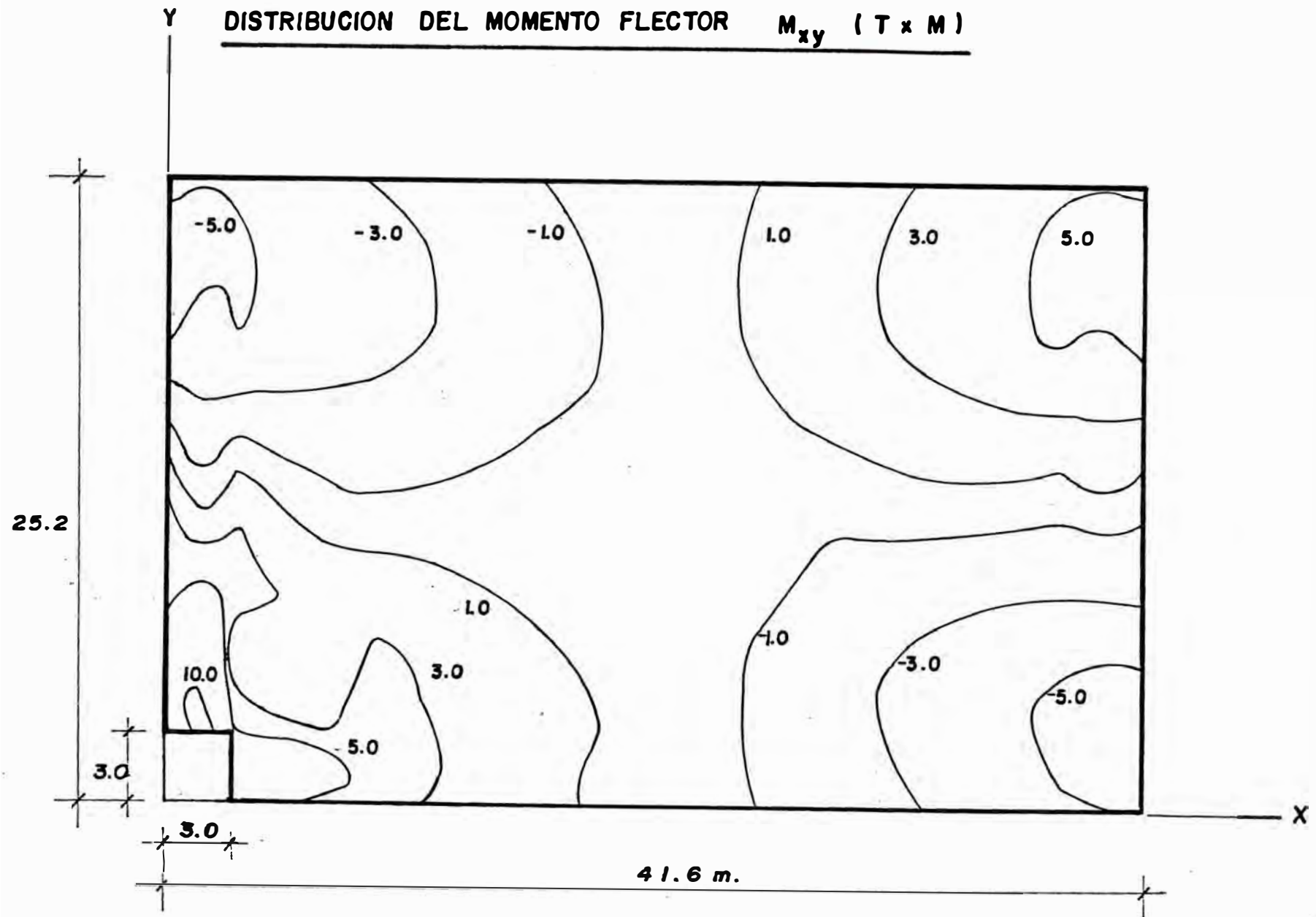


Fig. 19

ESCALA 1/250

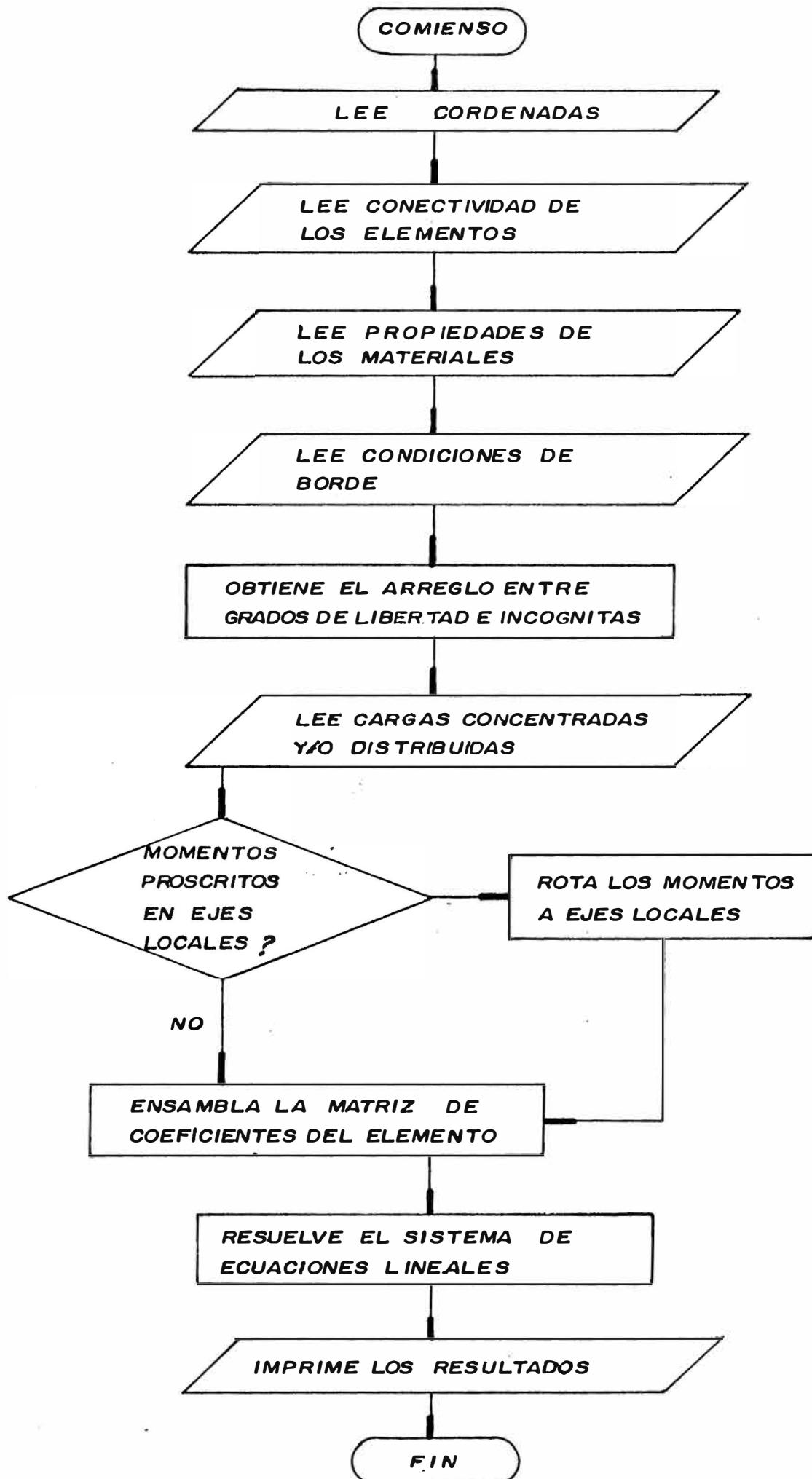
CONCLUSIONES:

- Empleando el Funcional de Reissner se ha desarrollado un elemento finito para el análisis de losas planas. Este elemento finito es aplicable a una gran variedad de problemas, incluyendo al análisis de losas no homogéneas ó anisotrópicas.
- Pueden analizarse fácilmente losas con bordes curvos y con geometría irregular, ya que la formulación utilizada permite considerar transformaciones isoparamétricas. Esta es una ventaja importante sobre los elementos tradicionalmente usados, cuya formulación se basa en energía potencial, para los que una transformación isoparamétrica general no es posible.
- Con la formulación empleada se consideran no solo las deformaciones por flexión, sino además las deformaciones por cortante. Así, el elemento propuesto se puede emplear tanto para analizar losas gruesas como aquellas cuyo espesor es pequeño.
- Por otro lado, debe anotarse que la prescripción de las condiciones de borde es algo más complicada que en

la formulación tradicional, pues en este caso deben prescribirse no solo desplazamientos sino también esfuerzos.

- Comparando los resultados utilizando el elemento finito mixto propuesto, con los que se obtienen con otros elementos, se observan en general, resultados mejores - para el mismo número de grados de libertad - con el elemento mixto.
- Las ventajas de utilizar un modelo mixto son más evidentes en las aproximaciones de los esfuerzos (que en este caso son incógnitas "primarias"; mientras que en la formulación basada en energía potencial se obtienen por derivación de los desplazamientos).

DIAGRAMA DE FLUJO



MATRIZ DE COEFICIENTES DEL ELEMENTO:

$$\underline{A}^e = \begin{bmatrix} H^e & Q^e \\ \underline{Q}^{eT} & e \end{bmatrix}$$

DONDE:

$$H_{ij}^e = \int_A \left(\underline{P}_i^T \underline{s}_F \underline{P}_j + \underline{R}_i^T \underline{s}_c \underline{R}_j \right) dA$$

$$\underline{P}_i = N_i \underline{I} \quad \text{ó} \quad \underline{P}_i^T \underline{s}_F \underline{P}_j = N_i N_j \underline{s}_F$$

$$\underline{R}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij}^e = \int_A \underline{R}_i^T \underline{B}_j dA$$

$$\underline{B}_j = \begin{Bmatrix} N_{j,x} \\ N_{j,y} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{R}_i^T \underline{R}_j = \begin{Bmatrix} N_{i,x} & N_{j,x} \\ N_{i,y} & N_{j,y} \\ N_{i,y} & N_{j,x} + N_{i,x} & N_{j,y} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{s}_F = \frac{12}{ET^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$\underline{s}_c = \frac{1}{1.2hG} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE CARGAS DEL ELEMENTO:

$$F^e = \int_A \underline{N}^T q dA + P \underline{N}(x_0)$$

DONDE q ES UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA, Y P ES UNA CARGA CONCENTRADA APLICADA EN EL PUNTO x_0 .

B I B L I O G R A F I A

- (1) S. Timoshenko, "Teoría de placas planas y curvas", Mc. Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940.
- (2) M. L. Krasnov, "Cálculo variacional", Editorial Latinoamericana, 1976.
- (3) Theodore H. H. Pian and Pin Tong, "Basis of finite element methods for solid continua", International Journal for numerical methods in Engineering, Vol. 1, 3-28 (1964).
- (4) Zienkiewicz; "El método de los elementos finitos".
- (5) Tottenham, H., and Brebbia, C. (Eds), "Finite Element Techniques in Structural Mechanics", Stress Analysis Publishers, Southampton (1971).
- (6) J. J. Connor, C. A. Brebbia, "Finite Element Techniques for fluid flow", Newnes-Butterworths.
- (7) Richard H. Gallagher, "Finite Element Analysis, Fundamentals", Prentice-Hall.
- (8) Gilbert Strang, George J. Fix, "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall.
- (9) Larry J. Segerlind, "Applied Finite Element

Analysis", John Willey & Sons, Inc.

- (10) Miguel Bozzo Ch., Luis Bozzo R., "La Estructura Espacial Compuesta", Lima, Perú, 1986.
- (11) Reglamento de las construcciones de concreto reforzado (ACI-318-77).
- (12) L. R. Herrmann, "A Bending Analysis for Plates", Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 577-604 (1965).
- (13) L. R. Herrmann, "Finite Element Bending Analysis for Plates", J. of Mech., Div. Asce, 93, EMS (1967).
- (14) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 2, 1970. pp. 419-451.
- (15) W. Y. Li, Y. K. Cheung, F. Asce and L. G. Tham., "Spline Finite Strip Analysis of General Plates"., Journal of Engineering Mechanics, Enero, 1986.
- (16) Chang-Koon Choi, M. Asce., "Reduced Integrated Nonconforming Plate Element"., Journal of Engineering Mechanics, Vol 112, Abril, 1986.