

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



**DISEÑO DE UN CONTROL OPTIMO PROPORCIONAL
ESTACIONARIO PARA EL CONTROL DE NIVEL DE
LIQUIDO DE UN TANQUE CON FLOTADOR**

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ELECTRONICO

PRESENTADO POR:

CARLOS MANUEL SOTERO MURGA

**PROMOCIÓN
1998 - II**

**LIMA – PERÚ
2005**

***Dedico este trabajo a:
Mis padres, inspiración plena de lucha y
sacrificio,
a mi esposa por su perseverante dedicación y
apoyo,
mis hermanos, por la ayuda incondicional en
mi carrera,
y mi hijo esperanza de superación.***

**DISEÑO DE UN CONTROL OPTIMO PROPORCIONAL
ESTACIONARIO PARA EL CONTROL DE NIVEL DE
LIQUIDO DE UN TANQUE CON FLOTADOR**

SUMARIO

El presente trabajo describe la aplicación del método del control óptimo proporcional estacionario para controlar el nivel de líquido de un tanque con flotador. El desarrollo teórico de este sistema de control tiene como propósito mantener el nivel de líquido en el tanque a un nivel deseado. Comprende 4 capítulos, el capítulo 1 define los alcances del problema y la información dada, el nivel de líquido se controla mediante un flotador cuya posición $h(t)$ es vigilada. La señal de entrada del sistema en lazo abierto es $e_i(t)$. Los parámetros del sistema y ecuaciones son dadas como datos del problema. En el capítulo 2 se determina el diagrama de bloques funcional del sistema, considerando $h(t)$ como salida y $e_i(t)$ como entrada. Este diagrama de bloques mostrará la relación de funcionalidad entre las funciones de transferencia. Seguidamente se operará en el Espacio de Estados considerando las variables de estado: $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = \theta_m(t)$ y $x_3(t) = d\theta_m(t)/dt$, se escribe las ecuaciones de estado del sistema en su forma compacta, es decir, $\dot{x}(t) = Ax(t) + Be_i(t)$, de la cual se obtiene un diagrama de bloques representativo de las ecuaciones de estado y de la salida $h(t)$. Luego se determina si el sistema es totalmente

controlable y observable, así como se encuentra la ecuación característica y los valores característicos de la matriz A. Se determina la función de transferencia $H(s)/E_i(s)$ de la ecuación diferencial que adopta la forma: $a_0 d^3h(t)/dt + a_1 d^2h(t)/dt + a_2 dh(t)/dt = b_3 e_i(t)$ y seguidamente se discretiza el sistema de control. En el capítulo 3 se muestra el método de diseño del control óptimo proporcional estacionario. En el capítulo 4 se evalúa nuestro desarrollo teórico con la herramienta MatLab, obteniendo los resultados mediante la simulación del sistema de control de nivel. Finalmente se entrega un conjunto de conclusiones desprendidas del proceso de desarrollo del informe y la respectiva bibliografía utilizada como referencia.

ÍNDICE

PRÓLOGO	1
INDICE DE ILUSTRACIONES	3
CAPÍTULO I	4
FORMULACION DEL PROBLEMA	4
1.1 Enunciado del problema	4
1.2 Descripción de Variables	6
1.3 Valores de los Parámetros	7
1.4 Ecuaciones del Sistema en el tiempo	8
CAPÍTULO II	11
MODELAMIENTO DEL SISTEMA	11
2.1 Introducción al Modelado de Procesos Dinámicos en el Espacio de Estados	11
2.1.1 Representación del Sistema Dinámico en el Espacio de Estados	11
2.2 Diagrama de Bloques del Sistema	15
2.2.1 Conversión de las Ecuaciones en el Tiempo a Laplace	17
2.3 Modelamiento matemático del sistema en el Espacio de Estado	20
2.4 Diagrama de bloques representativo de las ecuaciones de estado y la salida	27
2.5 Controlabilidad	29
2.6 Observabilidad	30
2.7 Ecuación característica y Valores característicos	32
2.8 Obtención de la Ecuación diferencial $h(t)$ VS $E_i(t)$	33
2.9 Discretización del Sistema	40
2.9.1 Discretización directa	42

CAPÍTULO III	46
DISEÑO DEL CONTROL OPTIMO PROPORCIONAL ESTACIONARIO	46
3.1 Introducción al Controlador Óptimo Proporcional Estacionario	46
3.2 Diseño del Controlador Óptimo Proporcional Estacionario	49
CAPÍTULO IV	54
SIMULACION EN MATLAB	54
4.1 Programación	54
4.2 Resultados del Programa	58
4.3 Comentarios	61
CONCLUSIONES	65
BIBLIOGRAFÍA	67
APENDICES	68
APENDICE 1. TUTORIAL: LO BASICO DE MATLAB	69
APENDICE 2. CONTROL SYSTEM TOOLBOX 5.2	83

PRÓLOGO

La Teoría de Control Moderno cumple un papel muy importante en los avances de la Ciencia y la Ingeniería. Avances que tanto en la teoría y la práctica brindan los medios necesarios para lograr el funcionamiento óptimo de sistemas dinámicos, mejorar la calidad y reducir los costos de producción, expandir el ritmo de producción, disminuir la complejidad de muchas rutinas, etc.

Actualmente las plantas modernas poseen muchas entradas y salidas de tal manera que se van haciendo más complejas, razón por la cual un sistema moderno de control requiere muchas ecuaciones matemáticas que modelen la planta. Es entonces la Teoría de Control Moderno la que afronta la complejidad creciente de las plantas modernas y las necesidades rigurosas que demandan aplicaciones de orden militar, espacial e industrial.

El uso de los computadores ha permitido minimizar los cálculos complejos que conlleva las plantas modernas, por eso es una práctica habitual su utilidad en proyectos de sistemas de control y en el control de operación de los mismos.

El desarrollo de este informe de suficiencia está destinado a dar solución del control de nivel de un tanque con flotador mediante el uso de la teoría de control óptimo, estableciendo el modelo matemático del sistema. Finalizado el diseño matemático, se simula el modelo en un computador, para verificar el comportamiento del sistema en respuesta a diversas señales y perturbaciones.

INDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 1.1 Sistema de Control de Nivel de Líquido	5
Figura 2.1 Diagrama de Bloques completo del sistema de orden n	14
Figura 2.2 Sistema de Control de Nivel de líquido	15
Figura 2.3 Diagrama de Bloques del Sistema en el Tiempo	16
Figura 2.4 Diagrama de Bloques del Sistema en Laplace	19
Figura 2.5 Diagrama de Bloques de ecuaciones de estado y salida	28
Figura 2.6 Comparación del tiempo continuo y discreto	45
Figura 3.1 Esquema del Control Óptimo Proporcional Estacionario	47
Figura 3.2 Diagrama de Bloques Controlador Óptimo Proporcional Estacionario	51
Figura 4.1 Resultados gráficos de la salida y y la señal de control u	61
Figura 4.2 Resultados para $Q_{11} = 200$, $e_i = 11$ mV, $e_a = 0.55$ V, $t = 3.8$ s	62
Figura 4.3 Resultados para $Q_{11} = 2000$, $e_i = 80$ mV, $e_a = 4$ V, $t = 5$ s	62
Figura 4.4 Resultados para $Q_{11} = 4000$, $e_i = 125$ mV, $e_a = 6.25$ V, $t = 4.5$ s	63
Figura 4.5 Resultados para $Q_{11} = 2500$, $e_i = 0.9$ V, $e_a = 4.5$ V, $t = 5.5$ s	63
Figura 4.6 Resultados $H = 10$ para $Q_{11} = 2400$, $e_i = 0.9$ V, $e_a = 4.5$ V, $t = 5.5$ s	64
Figura 4.7 Resultados $H = 15$ para $Q_{11} = 2400$, $e_i = 0.9$ V, $e_a = 4.5$ V, $t = 5.5$ s	64

CAPÍTULO I

FORMULACION DEL PROBLEMA

1.1 Enunciado del problema

El siguiente sistema de control tiene como propósito mantener el nivel del líquido en el tanque a un nivel deseado. El nivel del líquido se controla mediante un flotador cuya posición $h(t)$ es vigilada. La señal de entrada del sistema en lazo abierto es $e_i(t)$. Se presentará la solución a las siguientes preguntas que esbozarán el desarrollo del problema:

- (a) Se dibuja un diagrama de bloques funcional del sistema, considerando $h(t)$ como salida y $e_i(t)$ como entrada, que permita mostrar la relación de funcionalidad entre las funciones de transferencia.

(b) Se considera las variables de estado: $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = \Theta_m(t)$ y $x_3(t) = d\Theta_m(t)/dt$, y se escribe las ecuaciones de estado del sistema en la forma de $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$. Luego se dibujará el diagrama de bloques representativo de las ecuaciones de estado y de la salida $h(t)$.

(c) Considerando los resultados de la parte (b), se determina si el sistema es totalmente controlable y observable.

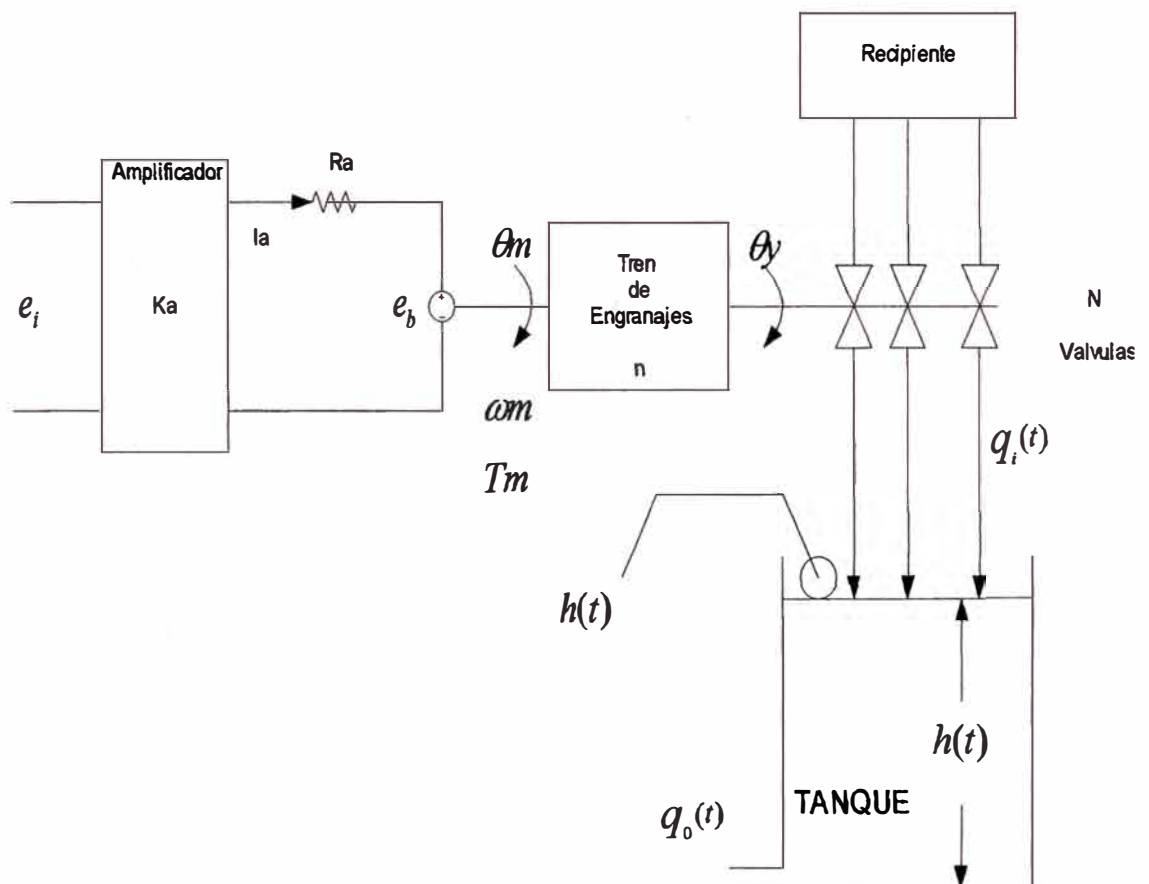


Figura 1.1 Sistema de control de nivel de líquido

(d) Se evaluará la ecuación característica y los valores característicos de la matriz A encontrada en la parte (b)

(e) Se deduce la ecuación diferencial del sistema que adopta la siguiente forma:

$$a_0\ddot{h}(t) + a_1\dot{h}(t) + a_2h(t) = b_3E_i(t)$$

Y se determina la función de transferencia $\frac{H(s)}{E_i(s)}$.

(f) Se discretizará al sistema de control.

(g) Se diseñará el control de nivel, haciendo uso del control óptimo proporcional estacionario.

1.2 Descripción de Variables

Tensión de entrada: $e_i(t)$

Tensión a la salida del amplificador = Tensión de Armadura: $e_a(t) = K_a e_i(t)$

Ganancia del Amplificador: K_a

Corriente de Armadura: i_a

Resistencia de Armadura: R_a

Tensión Contra-electromotriz: e_b

Desplazamiento Angular: θ_m

Velocidad Angular: w_m

Torque del motor: T_m

Relación de Engranajes: n

Desplazamiento angular de engranajes: θ_y

Número de Válvulas: N

Caudal de entrada: $q_i(t)$

Area del tanque: A

Nivel de líquido del tanque a controlar: $h(t)$

Caudal de salida: $q_o(t)$

Variables de Estado:

$$x_1(t) = h(t)$$

$$x_2(t) = \theta_m(t)$$

$$x_3(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

1.3 Valores de los Parámetros

Los parámetros del sistema son:

$R_a=10 \Omega$; Ohmios

$L_a = 0 \text{ H}$; Henrios

$K_i=10$; oz-pulg/A

$J_m=0.005$; oz-pulg-s²

$K_b=0.0706$; V/rad/s

$$n = \frac{N_1}{N_2} = 0.01; \quad \text{relación de engranajes}$$

$$J_f = 10; \quad \text{oz-pulg-s}^2$$

$$K_a = 50; \quad \text{ganancia del amplificador de voltaje de entrada}$$

$$A = 50; \quad \text{pies}^2$$

$$K_f = 10; \quad \text{pies}^3/\text{s-rad}$$

$$K_0 = 50; \quad \text{pies}^2/\text{s}$$

$$N = 5; \quad \text{número de válvulas}$$

Consideración: Momento de inercia y fricción del motor se consideran despreciables.

1.4 Ecuaciones del Sistema en el tiempo

Circuito eléctrico:

$$e_a(t) = R_a i_a(t) + e_b(t) \quad (1.4.1)$$

Tensión contra-electromotriz:

$$e_b(t) = K_b \omega_m(t) \quad (1.4.2)$$

Conversión de energía eléctrica en mecánica:

$$T_m(t) = K_t i_a(t) \quad (1.4.3)$$

Circuito mecánico:

$$T_m(t) = (J_m + n^2 J_1) \frac{dw_m(t)}{dt} \quad (1.4.4)$$

$$w_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad (1.4.5)$$

Relación de conversión en el tren de engranajes:

$$\theta_y(t) = n\theta_m(t) \quad (1.4.6)$$

Caudal de entrada y salida del tanque:

$$q_i(t) = K_I N \theta_y(t) \quad (1.4.7)$$

$$q_o(t) = K_o h(t) \quad (1.4.8)$$

Nivel del tanque a controlar:

$$h(t) = \frac{1}{A} \int [q_i(t) - q_o(t)] dt \quad (1.4.9)$$

Amplificador de tensión de entrada:

$$e_a(t) = K_a e_i(t) \quad (1.4.10)$$

CAPÍTULO II

MODELAMIENTO DEL SISTEMA

2.1 Introducción al modelado de procesos dinámicos en el espacio de estado

Para llevar a cabo una estrategia de control, es indispensable la obtención del modelo matemático del sistema a controlar, aplicando las leyes físicas del proceso y obteniéndose una ecuación diferencial, sea esta lineal o no lineal.

El modelo de estado no está limitado a describir sistemas lineales, el modelo matricial que se obtiene con la descripción de un sistema lineal proporciona un fundamento matemático para la aplicación de diversas técnicas.

2.1.1 Representación del sistema dinámico en el espacio de estado

Observamos que nuestra función excitadora no tiene términos derivativos, por lo que se determina la solución en el espacio de estado según el procedimiento siguiente:

Sea el siguiente sistema de orden n:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = u(t) \quad (2.1)$$

Esta ecuación puede ser convertida en n ecuaciones diferenciales de primer orden, para ello se tiene que elegir n variables, con la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

Ahora se obtienen las ecuaciones de estado (n ecuaciones diferenciales de primer orden)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \dddot{y}(t) \Rightarrow \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= \frac{d^n y(t)}{dt^n} \Rightarrow \dot{x}_n(t) = -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_1 x_n(t) + u(t) \end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones de estado, se representa matricialmente así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_B * u$$

y su forma normalizada es la siguiente:

$$\dot{x}' = Ax + Bu \quad (2.2)$$

\dot{x}' : vector de estado derivado .

x : vector de estado

u : escalar de entrada

Si se considera variable de salida del sistema a x_1 , entonces dicha salida se puede escribir de la siguiente manera:

$$y = \underbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}_C * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{[\ 0 \]}_D * u$$

o en su forma compacta:

$$y = Cx + Du \quad (2.3)$$

donde:

$$B^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

El diagrama de bloques de la ecuación de estado y de la ecuación de salida es la siguiente:

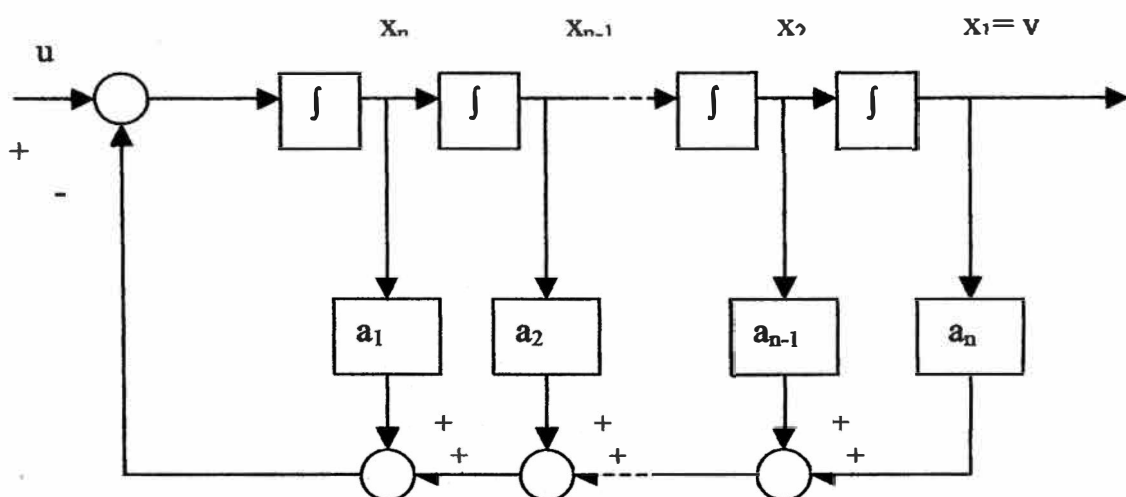


Figura 2.1 Diagrama de Bloques completo del sistema de orden n

Otra representación de sistemas se obtiene mediante la **función de transferencia** o relación de entrada/salida . En consecuencia, la ecuación diferencial se puede representar por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.4)$$

2.2 Diagrama de Bloques del Sistema

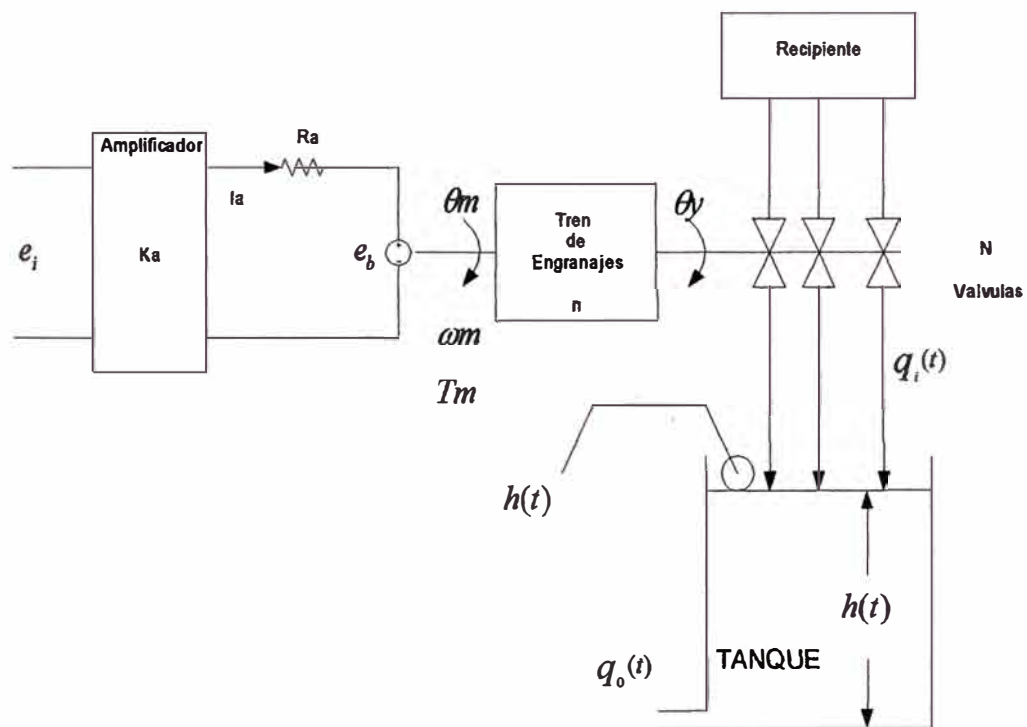


Figura 2.2 Sistema de control de nivel de líquido

Del sistema de control de nivel propuesto y relacionando las ecuaciones del problema, se obtiene el diagrama de bloques del sistema mostrando las relaciones de funcionalidad entre las diferentes funciones de transferencia , ver Figura 2.3.

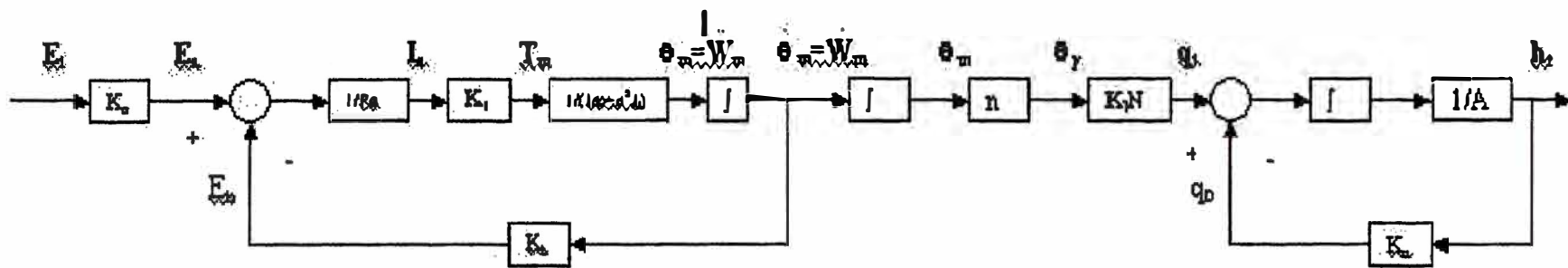


Figura 2.3 Diagrama de Bloques Funcional del Sistema en el tiempo

2.2.1 Conversión de las Ecuaciones del Tiempo a Laplace

Circuito eléctrico:

$$E_a(s) = R_a I_a(s) + E_b(s) \quad (2.5)$$

Tensión contra-electromotriz:

$$E_b(s) = K_b W_m(s) \quad (2.6)$$

Conversión de energía eléctrica en mecánica:

$$T_m(s) = K_t I_a(s) \quad (2.7)$$

Circuito mecánico:

$$T_m(s) = (J_m + n^2 J_l) * s W_m(s) \quad (2.8)$$

$$W_m(s) = s \theta_m(s) \quad (2.9)$$

Relación de conversión en el tren de engranajes:

$$\theta_y(s) = n \theta_m(s) \quad (2.10)$$

Caudal de entrada y salida del tanque:

$$Q_i(s) = K_I N \theta_y(s) \quad (2.11)$$

$$Q_o(s) = K_o H(s) \quad (2.12)$$

Nivel del tanque a controlar:

$$H(s) = \frac{1}{A} * s(Q_i(s) - Q_o(s)) \quad (2.13)$$

Amplificador de tensión de entrada:

$$E_a(s) = K_a E_i(s) \quad (2.14)$$

relacionando las ecuaciones de laplace, se obtiene el diagrama de bloques del sistema que muestra las relaciones de funcionalidad entre las diferentes funciones de transferencia, ver Figura. 2.4.

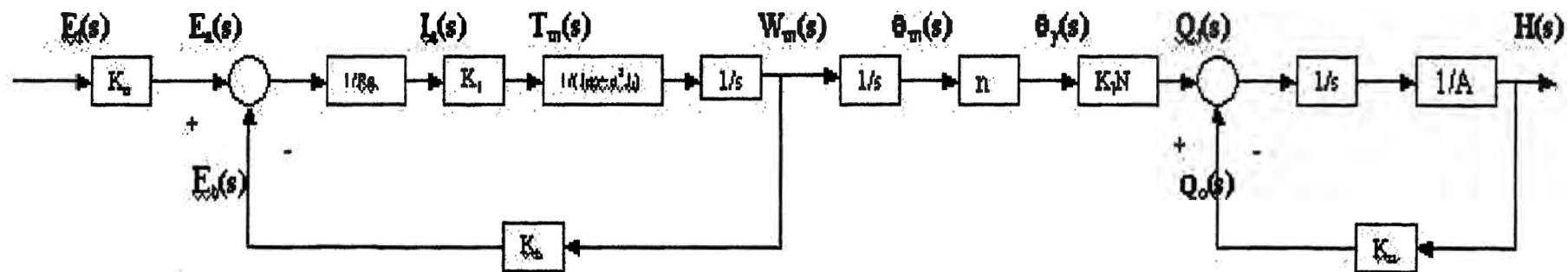


Figura 2.4 Diagrama de Bloques Funcional del Sistema en Laplace

2.3 Modelamiento matemático del sistema en el espacio de estado

(a) Obtención de las Ecuaciones de estado:

Sean las variables de estado:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= h(t) \\x_2(t) &= \theta_m(t) \\x_3(t) &= \frac{d\theta_m(t)}{dt}\end{aligned}\tag{2.15}$$

Las primeras derivadas de éstas variables de estado son:

$$\begin{aligned}x_1' &= \frac{dh(t)}{dt} \\x_2' &= \frac{d\theta_m(t)}{dt} \Rightarrow x_2' = x_3 \\x_3' &= \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2}\end{aligned}\tag{2.16}$$

Reemplazando la ecuación (1.4.2) en la ecuación (1.4.1) del circuito eléctrico se obtiene :

$$\begin{aligned}e_a(t) &= R_a i_a(t) + e_b(t) \\e_b(t) &= K_b \omega_m(t) \\ \rightarrow e_a(t) &= R_a i_a(t) + K_b \omega_m(t)\end{aligned}\tag{2.17}$$

Se sabe que la velocidad angular es la primera derivada del desplazamiento angular, ecuación (1.4.5):

$$w_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

Luego por definición de las variables de estado se obtiene:

$$w_m(t) = x_3(t)$$

Reemplazando en ecuación (2.17) se obtiene:

$$e_a(t) = R_a i_a(t) + K_b x_3(t) \quad (2.18)$$

despejando de (2.18) $i_a(t)$ se obtiene:

$$\rightarrow i_a(t) = \frac{e_a(t)}{R_a} - \frac{K_b}{R_a} x_3(t) \quad (2.19)$$

De las ecuaciones (1.4.4) del circuito mecánico y (1.4.3) de la conversión de energía eléctrica a mecánica, se obtiene:

$$T_m(t) = K_t i_a(t)$$

$$T_m(t) = (J_m + n^2 J_l) \frac{dw_m(t)}{dt}$$

$$x_3'(t) = \frac{dw_m(t)}{dt} \quad (2.20)$$

Reemplazando la ecuación (2.20) en la ecuación (1.4.4) e igualando a la ecuación (1.4.3):

$$T_m(t) = (J_m + n^2 J_l) x_3'(t)$$

$$K_i i_a(t) = (J_m + n^2 J_l) x_3'(t)$$

despejamos x_3' :

$$x_3'(t) = \frac{K_i}{(J_m + n^2 J_l)} i_a(t) \quad (2.21)$$

reemplazando la ecuación (2.19) en la ecuación (2.21) se obtiene:

$$x_3'(t) = \frac{K_i}{(J_m + n^2 J_l)} \left(\frac{1}{R_a} e_a(t) - \frac{K_b}{R_a} x_3(t) \right) \quad (2.22)$$

Reemplazando la ecuación (1.4.10) del amplificador de tensión de entrada en la ecuación (2.22) se obtiene:

$$e_a(t) = K_a e_i(t)$$

$$x_3' = \frac{K_i K_a}{R_a (J_m + n^2 J_l)} e_i(t) - \frac{K_i K_b}{R_a (J_m + n^2 J_l)} x_3(t) \quad (2.23)$$

Reordenando la ecuación (2.23) obtenemos así la ecuación de estado para x_3' :

$$x_3' = -\frac{K_i K_b}{R_a (J_m + n^2 J_l)} x_3(t) + \frac{K_i K_a}{R_a (J_m + n J_l)} e_i(t) \quad (2.24)$$

De la ecuación (1.4.9) para el control del nivel del tanque y definición de la primera variable de estado $x_1(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{A} \int [q_i(t) - q_o(t)] dt$$

$$x_1(t) = h(t)$$

$$x_1(t) = \frac{1}{A} \int [q_i(t) - q_o(t)] dt \quad (2.25)$$

Además de las ecuaciones (1.4.7) correspondiente a caudal de entrada, (1.4.8) correspondiente a caudal de salida y (1.4.6) correspondiente a la relación de conversión en el tren de engranajes:

$$q_i(t) = K_I N \theta_y(t)$$

$$q_o(t) = K_o h(t)$$

$$\theta_y(t) = n \theta_m(t)$$

derivando la ecuación (2.25) para $h(t)$:

$$x_1'(t) = \frac{q_i(t)}{A} - \frac{q_o(t)}{A} \quad (2.26)$$

se reemplaza las ecuaciones $q_i(t)$, $q_o(t)$, $\theta_y(t)$ en la ecuación (2.26):

$$x_1'(t) = \frac{K_I N n \theta_m(t)}{A} - \frac{K_o h(t)}{A} \quad (2.27)$$

Reemplazando las variables de estado para $\Theta_m(t)$ y $h(t)$ se obtiene:

$$x_1'(t) = \frac{K_I N n}{A} x_2(t) - \frac{K_0}{A} x_1(t) \quad (2.28)$$

Ordenando se obtiene la ecuación de estado para la variable de estado $x_1'(t)$:

$$x_1'(t) = -\frac{K_0}{A} x_1(t) + \frac{K_I N n}{A} x_2(t) \quad (2.29)$$

Las ecuaciones de estado (2.16) , (2.24) y (2.29) se pueden representar matricialmente como:

$$x_1'(t) = -\frac{K_0}{A} x_1(t) + \frac{K_I N n}{A} x_2(t)$$

$$x_2' = x_3(t)$$

$$x_3' = -\frac{K_i K_b}{R_a(J_m + n^2 J_l)} x_3(t) + \frac{K_i K_a}{R_a(J_m + n^2 J_l)} e_i(t)$$

O en su forma compacta:

$$x' = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{K_0}{A} & +\frac{K_I N n}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{K_i K_b}{R_a (J_m + n^2 J_l)}\right) \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{K_i K_a}{R_a (J_m + n^2 J_l)}\right) \end{pmatrix}}_B u$$

donde la señal de control es $u = e_i$

Reemplazando valores en las ecuaciones (2.16), (2.24), (2.29) se obtiene:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{K_0}{A} x_1(t) + \frac{K_I N n}{A} x_2(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = -1x_1(t) + 0.01x_2(t)$$

$$\dot{x}_2 = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_i K_b}{R_a (J_m + n^2 J_l)} x_3(t) + \frac{K_i K_a}{R_a (J_m + n^2 J_l)} e_i(t)$$

$$\dot{x}_3 = -11.77x_3(t) + 8333.33e_i(t)$$

Identificando las matrices A y B se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0.01 & 0 \\ 0 & Q & 1 \\ 0 & Q & -11.77 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} Q \\ \vdots \\ 0 \\ 8333.33 \end{pmatrix}$$

Como salida se escogió a la altura $h(t)$ del nivel del tanque:

$$y(t) = h(t)$$

Por definición de variable de estado: $x_1(t) = h(t)$

$$y(t) = x_1(t)$$

entonces:

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o en su forma compacta:

$$\rightarrow y = C x + D u$$

$$y = C x + D e_{i(t)}$$

$$y = x_1(t)$$

Identificando las matrices C y D se obtiene:

$$C = [1 \ 0 \ 0] \quad D = [0]$$

2.4 Diagrama de bloques representativo de las ecuaciones de estado y la salida

De las ecuaciones de estado se puede obtener el diagrama de bloques que representará la relación de transferencia entre la entrada y la salida así como las correspondientes a las variables de estado:

$$x_1'(t) = -1x_1(t) + 0.01x_2(t)$$

$$x_2' = x_3(t)$$

$$x_3' = -11.77x_3(t) + 8333.33e_1(t)$$

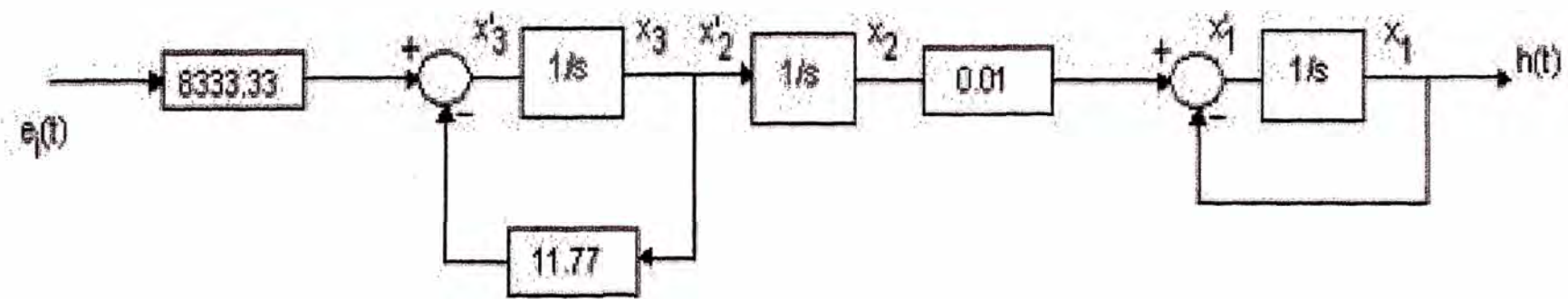


Figura 2.5 Diagrama de Bloques de las ecuaciones de estado y salida

2.5 Controlabilidad

Un proceso dinámico lineal se dice que es controlable, si es que existe un vector $u(k)$ realizable y capaz de trasladar el estado inicial $x(0)$ de un proceso hacia cualquier estado final $x(N)$ en un tiempo finito N .

Para que un proceso sea completamente controlable se debe cumplir que el rango de la matriz de controlabilidad M debe ser igual al orden del proceso.

$$\text{rango}[M] = n \quad (2.30)$$

donde

$$M = [H \quad GH \quad \dots \quad G^{N-1}H] \quad (2.31)$$

Lo que implica que el determinante de la matriz M debe ser diferente de cero.

La determinación de la controlabilidad en tiempo continuo es similar. Basta reemplazar A por G y B por H .

Para nuestro problema se determina la controlabilidad en tiempo continuo.

Determinando la matriz de controlabilidad $M = [B \quad AB \quad A^2B]$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11.77 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8333.33 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 8333.33 \\ -98083.2941 \end{pmatrix} \quad A^2B = \begin{pmatrix} 83.33 \\ -98083.2941 \\ 1154440.37 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 83.33 \\ 0 & 8333.33 & -98083.2941 \\ 8333.33 & -98083.2941 & 154440.37 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.000083 \\ 0 & 0.0083 & -0.0981 \\ 0.0083 & -0.0981 & 1.1544 \end{pmatrix} \times 10^6$$

el rango de M es 3 que coincide con el orden de la matriz de estado, por lo tanto, el sistema es **COMPLETAMENTE CONTROLABLE**.

2.6 Observabilidad

Un proceso lineal dinámico con salida $y(k)$ se denomina observable si algún estado $x(k)$ puede ser obtenido a partir de un número finito de salidas $y(k)$, $y(k-1)$, ..., $y(k-n)$.

Se dice que un proceso es completamente observable, si el rango de la matriz de observabilidad N es igual al orden del proceso.

Así:

$$\text{rango}[N] = n \quad (2.32)$$

donde:

$$N = [C \quad CG \quad \dots \quad CG^{n-1}]$$

$$N = [C^T \quad G^T C^T \quad \dots \quad (G^T)^{n-1} C^T] \quad (2.33)$$

La determinación de la observabilidad de estado completo en el espacio de estado de tiempo continuo es similar.

Para el problema propuesto se determina la observabilidad en el espacio de estado de tiempo continuo:

Así, determinamos la matriz de observabilidad

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11.77 \end{pmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$CA = [-1 \ 0.01 \ 0] \quad CA^2 = [1 \ -0.01 \ 0.01]$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.01 & 0 \\ 1 & -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}$$

El rango de N es 3 que es igual al orden de la matriz de estado, por lo tanto, el sistema es **COMPLETAMENTE OBSERVABLE**.

2.7 Ecuación característica y valores característicos

La ecuación característica del proceso está dada por:

$$|sI - A| = 0 \quad (2.34)$$

Para que el proceso descrito sea estable, las raíces o valores propios de la ecuación característica deben presentar parte real negativa. Basta que una de las raíces tenga parte real positiva para que el proceso sea inestable.

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11.77 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+1 & -0.01 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s+11.77 \end{vmatrix}$$

$$|SI - A| = (s + 1)(s)(s + 11.77) = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$s = 0$$

$$s = -1$$

$$s = -11.77$$

Por lo que se determina que el proceso es estable.

2.8 Obtención de la Ecuación diferencial $h(t)$ VS $E_i(t)$

La ecuación diferencial será expresada únicamente en función de la altura $h(t)$ como salida y la tensión de entrada $e_i(t)$, para ello haremos uso de las ecuaciones del sistema para el problema:

Primero de la ecuación de conversión de energía eléctrica en mecánica y del torque mecánico:

$$T_m = K_t i_a(t)$$

$$T_m = (J_m + n^2 J_l) \frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

igualando ambas ecuaciones, despejamos $i_a(t)$:

$$i_a(t) = \frac{(J_m + n^2 J_l)}{K_t} \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} \quad (2.35)$$

De las ecuaciones de desplazamiento angular del motor y la relación de engranajes se obtiene:

$$\theta_m(t) = \frac{\theta_y(t)}{n} = \frac{q_i(t)}{K_t N n}$$

$$\theta_y(t) = \frac{q_i(t)}{K_t N} \quad (2.36)$$

$$q_o(t) = K_o h(t)$$

De la ecuación de control de nivel del tanque:

$$h(t) = \frac{1}{A} \int [q_i(t) - q_o(t)] dt$$

Derivamos $h(t)$, obteniendo lo siguiente:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{q_i(t) - q_o(t)}{A} = \frac{q_i(t)}{A} - \frac{q_o(t)}{A} \quad (2.37)$$

reemplazando las ecuaciones para $q_i(t)$ y $q_o(t)$:

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{K_o}{A} h(t) = \frac{\theta_m(t) K_I N n}{A} \quad (2.38)$$

despejamos $\theta_m(t)$ y se obtiene:

$$\theta_m(t) = \frac{A}{K_I N n} \left[\frac{dh(t)}{dt} + \frac{K_o}{A} h(t) \right] \quad (2.39)$$

$$\theta_m(t) = \frac{A}{K_I N n} \frac{dh(t)}{dt} + \frac{K_o}{K_I N n} h(t) \quad (2.40)$$

Sabemos que en el amplificador de entrada de ganancia K_a se tiene:

$$e_a(t) = K_a e_i(t)$$

De la ecuación del circuito eléctrico:

$$R_a i_a(t) + e_b = K_a e_i(t)$$

Reemplazando la tensión contra-electromotriz e_b en ecuación anterior:

$$e_b = K_b \omega_m(t)$$

$$R_a i_a(t) + K_b \omega_m(t) = K_a e_i(t) \quad (2.41)$$

Reemplazando la frecuencia angular en función del desplazamiento angular:

$$\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

se obtiene:

$$R_a i_a(t) + K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_a e_i(t) \quad (2.42)$$

Reemplazando en (2.42) la ecuación (2.35) $i_a(t)$ se obtiene:

$$\frac{R_a (J_m + n^2 J_l)}{K_l} \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} + K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_a e_i(t) \quad (2.43)$$

Reemplazando la ecuación (2.40) obtenida para $\Theta_m(t)$ se obtiene:

$$\frac{R_a(J_m + n^2 J_l)}{K_i} \left[\frac{A}{K_I N n} \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + \frac{K_0}{K_I N n} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right] + K_b \left[\frac{A}{K_I N n} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \frac{K_0}{K_I N n} \frac{dh(t)}{dt} \right] = k_a e_i(t) \quad (2.44)$$

Reordenando la ecuación (2.44) según el grado de derivación obtenemos la siguiente forma de la ecuación diferencial:

$$\frac{R_a A (J_m + n^2 J_l)}{K_i K_I N n} \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + \left(\frac{R_a (J_m + n^2 J_l) K_0}{K_i K_I N n} + \frac{K_b A}{K_I N n} \right) \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \frac{K_b K_0}{K_I N n} \frac{dh(t)}{dt} = k_a e_i(t) \quad (2.45)$$

Donde los coeficientes serán denominados a_0 , a_1 , a_2 y b_3 :

$$a_0 = \frac{R_a A (J_m + n^2 J_l)}{K_i K_I N n} \quad (2.46)$$

$$a_1 = \frac{R_a (J_m + n^2 J_l) K_0}{K_i K_I N n} + \frac{K_b A}{K_I N n} \quad (2.47)$$

$$a_2 = \frac{K_b K_0}{K_I N n} \quad (2.48)$$

$$b_3 = K_a \quad (2.49)$$

Entonces la ecuación (2.45) quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{R_a(J_m + n^2 J_l)}{K_i} \left[\frac{A}{K_l N n} \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + \frac{K_0}{K_l N n} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right] + K_b \left[\frac{A}{K_l N n} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \frac{K_0}{K_l N n} \frac{dh(t)}{dt} \right] = k_a e_i(t) \quad (2.44)$$

Reordenando la ecuación (2.44) según el grado de derivación obtenemos la siguiente forma de la ecuación diferencial:

$$\frac{R_a A (J_m + n^2 J_l)}{K_i K_l N n} \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + \left(\frac{R_a (J_m + n^2 J_l) K_0}{K_i K_l N n} + \frac{K_b A}{K_l N n} \right) \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \frac{K_b K_0}{K_l N n} \frac{dh(t)}{dt} = k_a e_i(t) \quad (2.45)$$

Donde los coeficientes serán denominados a_0 , a_1 , a_2 y b_3 :

$$a_0 = \frac{R_a A (J_m + n^2 J_l)}{K_i K_l N n} \quad (2.46)$$

$$a_1 = \frac{R_a (J_m + n^2 J_l) K_0}{K_i K_l N n} + \frac{K_b A}{K_l N n} \quad (2.47)$$

$$a_2 = \frac{K_b K_0}{K_l N n} \quad (2.48)$$

$$b_3 = K_a \quad (2.49)$$

Entonces la ecuación (2.45) quedaría de la siguiente manera:

$$a_0 \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dh(t)}{dt} = b_3 e_i(t) \quad (2.50)$$

reemplazando cada uno de los parámetros por sus respectivos valores en cada una de las ecuaciones (2.46), (2.47), (2.48) y (2.49) se obtiene los valores siguientes:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.6 \\ a_1 &= 7.66 \\ a_2 &= 7.06 \\ b_3 &= 50 \end{aligned} \quad (2.51)$$

De la ecuación (2.50) obtenemos la función de transferencia, para ello expresamos la ecuación diferencial obtenida en términos de la transformada de Laplace:

$$a_0 s^3 H(s) + a_1 s^2 H(s) + a_2 s H(s) = b_3 E_i(s) \quad (2.52)$$

$$(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s) H(s) = b_3 E_i(s) \quad (2.53)$$

despejando $\frac{H(s)}{E_i(s)}$ se obtiene:

$$\frac{H(s)}{E_i(s)} = \frac{b_3}{(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s)} \quad (2.54)$$

Reemplazando los valores obtenidos para a_0 , a_1 , a_2 y b_3 , la Función de Transferencia final será:

$$\frac{H(s)}{E_i(s)} = \frac{50}{0.6s^3 + 7.66s^2 + 7.06s} \quad (2.55)$$

La ecuación (2.55) la vamos a expresar en el tiempo de la siguiente manera:

$$\frac{H(s)}{E_i(s)} = \frac{83.33}{s^3 + 12.77s^2 + 11.77s}$$

$$s^3 H(s) + 12.77s^2 H(s) + 11.77s H(s) = 83.33E_i(s)$$

$$\ddot{h}(t) + 12.77\dot{h}(t) + 11.77h(t) = 83.33e_i(t) \quad (2.56)$$

Asumimos como variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= h(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ x_2(t) &= \dot{h}(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ x_3(t) &= \ddot{h}(t) \rightarrow \dot{x}_3(t) = -11.77x_2(t) - 12.77x_3(t) + 83.33e_i(t) \end{aligned} \quad (2.57)$$

de donde la matriz de ecuaciones de estado en la forma compacta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Be_i(t)$$

son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11.77 & -12.77 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 83.33 \end{bmatrix}$$

La salida $y(t)$ está dada por:

$$y(t) = Cx(t) + De_i(t)$$

donde las matrices C y D son:

$$C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = [0]$$

2.9 Discretización del Sistema

De las secciones 2.3 y 2.4 tenemos las siguientes ecuaciones:

$$x_1'(t) = -1x_1(t) + 0.01x_2(t) \quad (2.58)$$

$$x_2' = x_3(t) \quad (2.59)$$

$$x_3' = -11.77x_3(t) + 8333.33e_i(t) \quad (2.60)$$

Identificando las matrices A y B se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11.77 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8333.33 \end{pmatrix}$$

Como salida se escogió a la altura $h(t)$ del nivel del tanque:

$$y(t) = h(t) \quad (2.61)$$

Por definición de variable de estado: $x_1(t) = h(t)$

$$y(t) = x_1(t) \quad (2.62)$$

entonces:

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o en su forma compacta:

$$\rightarrow y = C x + D u \quad (2.63)$$

Identificando las matrices C y D se obtiene:

$$C = [1 \ 0 \ 0] \quad D = [0]$$

$$\rightarrow y = x_1(t) \quad (2.64)$$

2.9.1 Discretización Directa

Es bastante útil discretizar directamente expresiones que contengan integrales y derivadas usando ecuaciones en diferencias. Así:

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{\Delta f(kT)}{T} = \frac{f(kT) - f(kT - T)}{T} \quad (2.65)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \approx \frac{\Delta^2 f(kT)}{T^2} = \frac{\Delta f(kT) - \Delta f(kT - T)}{T^2} \quad (2.66)$$

$$\int_0^t f(t) dt \approx \sum_{i=0}^k T f(iT - T) \quad (2.67)$$

Entonces utilizando la discretización directa del sistema de ecuaciones anterior determinamos el equivalente discreto:

$$x_1(kT) = x_1(kT - T) + T[-1 * x_1(kT) + 0.01 * x_2(kT)] \quad (2.68)$$

$$x_2(kT) = x_2(kT - T) + T * x_3(kT) \quad (2.69)$$

$$x_3(kT) = x_3(kT-T) + T*[-11.77*x_3(kT) + 8333.33* e_i(kT)] \quad (2.70)$$

$$y(kT) = x_1(kT) \quad (2.71)$$

El periodo de muestreo T es el mismo para todos los términos, entonces se puede obviar y escribir el sistema de ecuaciones efectuando un corrimiento hacia la derecha, así:

$$x_1(k + 1) = x_1(k) + T*[-1*x_1(k) + 0.01*x_2(k)] \quad (2.72)$$

$$x_2(k + 1) = x_2(k) + T*x_3(k) \quad (2.73)$$

$$x_3(k + 1) = x_3(k) + T*[-11.77*x_3(k) + 8333.33* e_i(k)] \quad (2.74)$$

$$y(k + 1) = x_1(k + 1) \quad (2.75)$$

La gráfica de la respuesta al escalón unitario se obtiene mediante la ejecución del siguiente programa en MATLAB.

```
%Discretizacion del sistema
%Parámetros del sistema
A=[0 1 0; 0 0 1;0 -11.77 -12.77];
```

```
B = [0;0;83.33];
Cc=[1 0 0];
Dc= [0];
%Discretizacion
T=0.01;
[G,H,Cd,Dd]=c2dm(A,B,Cc,Dc,T,'zoh');
x=[0;0;0];
for k=1:10000
    u(k)=0.1;
    yd(k)=Cd*x+Dd*u(k);
    x=G*x+H*u(k);
end
%grafica
t=linspace(0,100,101);
td=linspace(0,100,10000);
plot(t,yc,'m',td,yd,'b');
plot(t,yc,'-',td,yd,'--');
grid
title('Respuesta en tiempo continuo y tiempo discreto')
ylabel('Salida y(t)')
xlabel('tiempo en segundos')
```

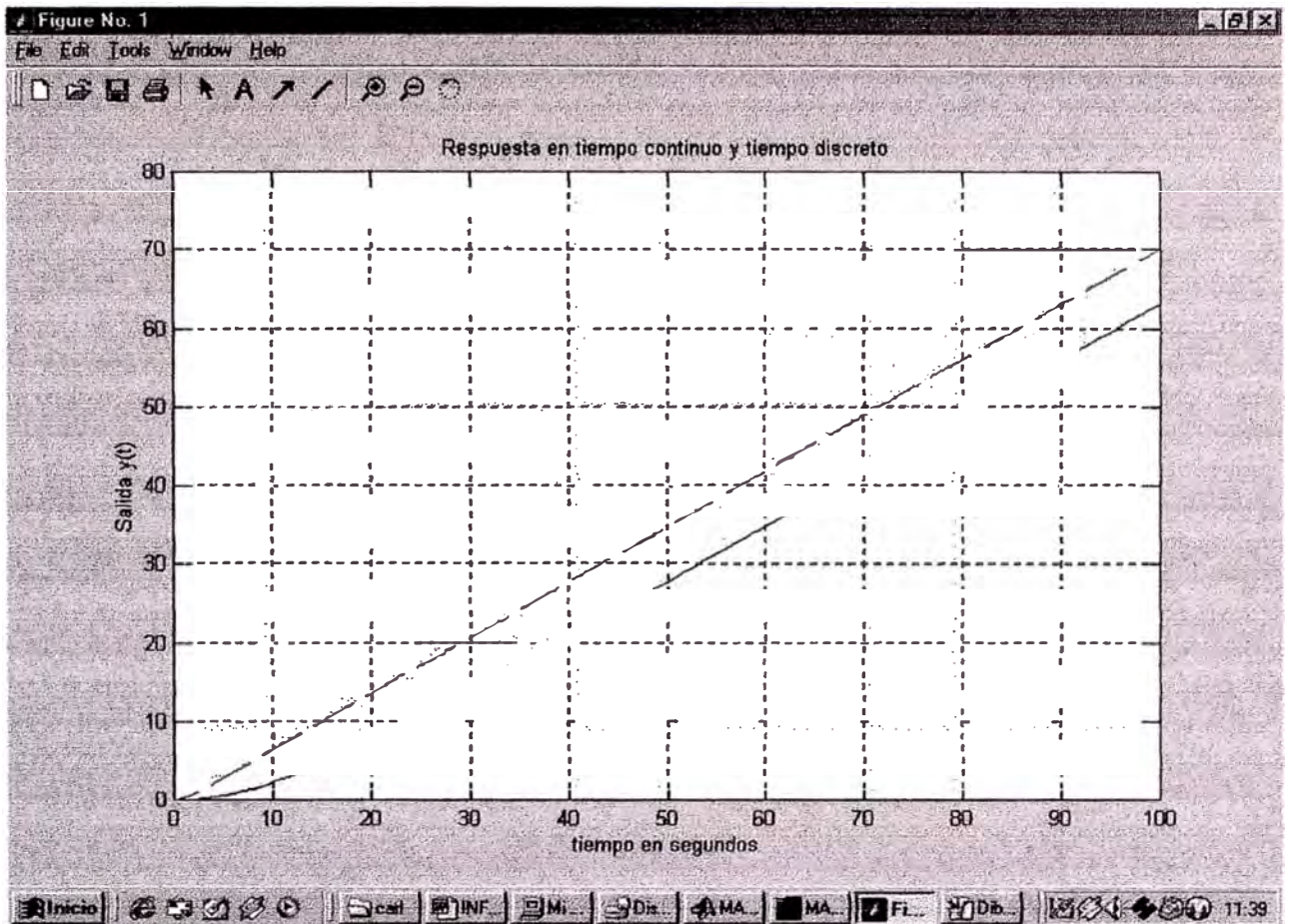


Figura 2.6 Comparación del tiempo continuo y discreto

CAPÍTULO III

DISEÑO DEL CONTROL OPTIMO PROPORCIONAL ESTACIONARIO

3.1 Introducción al Controlador Optimo Proporcional Estacionario

El controlador óptimo es un sistema de control realimentado, en donde la salida controlada sigue a una señal de referencia $r(k) = r$ (función escalón), es decir se considera un sistema de seguimiento. Esta estructura sólo es aplicable a procesos que poseen un comportamiento integral.

La figura 3.1 muestra el esquema de un controlador para la variable de estado x_2 , empleando una ley de control de realimentación de estados que involucra a la matriz de ganancia del controlador, la referencia y la señal de salida.

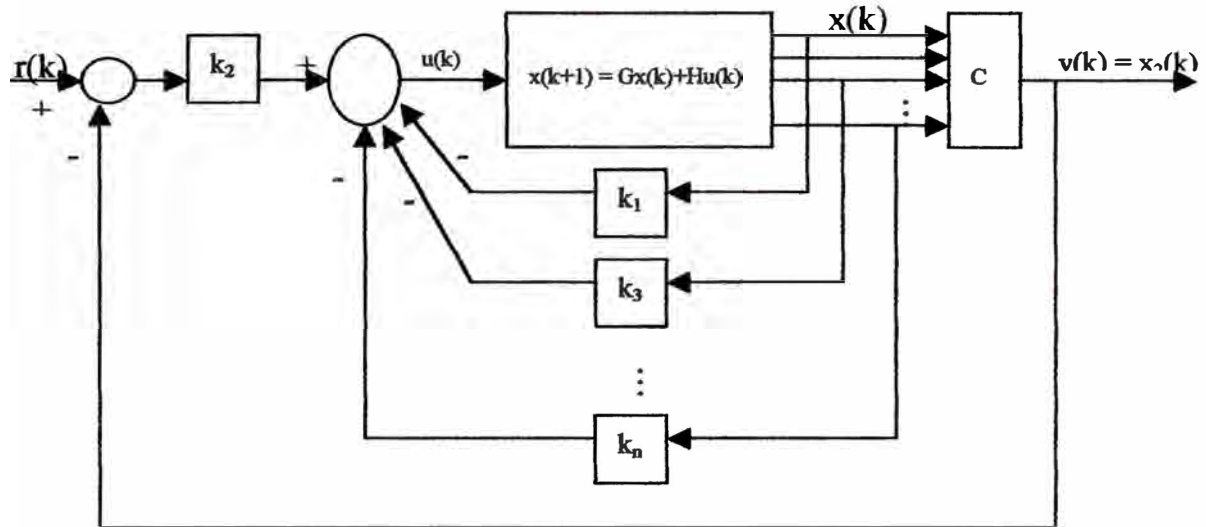


Figura 3.1 Esquema del Control Optimo Proporcional Estacionario

De la figura 3.1, considerando como salida al estado $x_2(k)$ se obtiene la siguiente ley de control:

$$u(k) = -K \cdot x(k) + k_2 \cdot r(k) \quad (3.1)$$

reemplazando la ecuación en

$$x(k + 1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.2)$$

se obtiene:

$$x(k + 1) = (G - HK)x(k) + Hk_2r(k) \quad (3.3)$$

aplicando la transformada z a dicha ecuación, se obtiene:

$$x(z) = (zI - G + HK)^{-1}Hk_2r(z) \quad (3.4)$$

reemplazando esta ecuación en la expresión de salida, se obtiene:

$$y(z) = Cx(z) = C(zI - G + HK)^{-1}Hk_2r(z) \quad (3.5)$$

Para obtener la salida en estado estacionario, como respuesta a una referencia escalón unitario, se aplica la propiedad del valor final de la transformada Z:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)/z] * y(z) \\ &= C(zI - G + HK)^{-1}Hk_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para un perfecto seguimiento, la salida $y = 1$ (escalón unitario), condición que debe cumplirse si $C(zI - G + HK)^{-1}Hk_2 = 1$

Por conveniencia, las matrices R y Q deben tomar la forma diagonal, así:

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

donde:

- Los elementos r_1, r_2, \dots, r_p deben ser todos positivos para que R sea una matriz simétrica definida positiva (d.p.).
- Los elementos q_i deben ser positivos y algunos de ellos nulos para que Q sea una matriz simétrica semidefinida positiva (s.d.p.).

Cada elemento q_i o r_i corresponde un peso de ponderación a cada variable de estado x_i o a cada señal de control u_i , respectivamente. El criterio para escoger los pesos están en relación con la importancia que se le da a cada variable o señal en cuestión.

3.2 Diseño del controlador óptimo proporcional estacionario

Considerando el modelo, se reescribe las ecuaciones de estado y de salida del proceso del siguiente modo:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{K_0}{A} + \frac{K_f N n}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K_i K_b}{R_a (J_m + n^2 J)} \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_i K_a}{R_a (J_m + n^2 J)} \end{pmatrix}}_B u$$

Reemplazando los valores correspondientes a los parámetros del modelo se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11.77 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8333.33 \end{pmatrix}$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinamos si la planta tiene integrador. Para tal propósito calculemos la ecuación característica:

$$|sI - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11.77 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+1 & -0.01 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s+11.77 \end{vmatrix}$$

$$|SI - A| = (s + 1)(s)(s + 11.77) = (s)(s + 1)(s + 11.77) = 0$$

Se puede observar que la planta tiene un integrador, por consiguiente, se diseñará un controlador óptimo proporcional estacionario, que a continuación se detalla el diagrama de bloques.

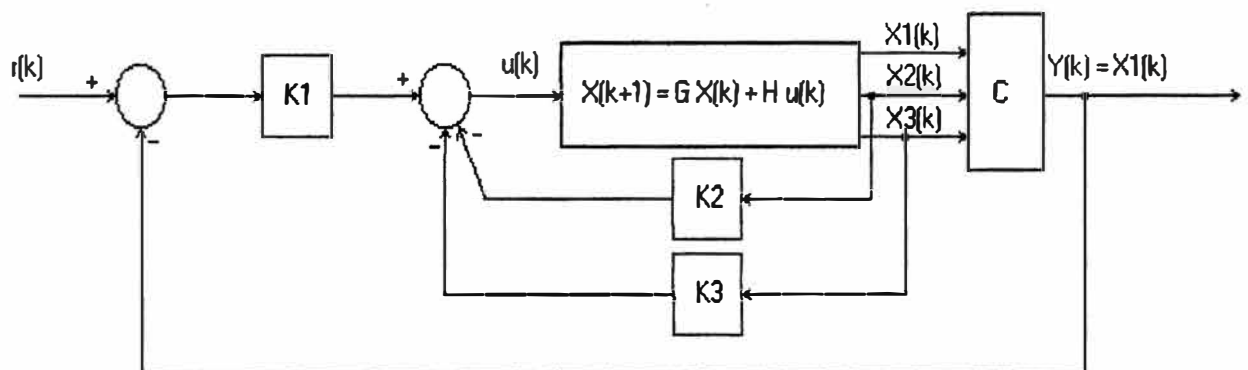


Figura 3.2 Diagrama de bloques del control óptimo proporcional estacionario

Debido a que se va a controlar la altura del nivel del tanque con flotador, que constituye la variable de estado x_1 , la ley de control viene se expresa como:

$$u(k) = -K * x(k) + k_1 * r(k) \quad (3.7)$$

y la salida del proceso controlado es:

$$y(k) = Cx(k) = x_1(k) \quad (3.8)$$

Las matrices de ponderación elegidas son:

$$Q = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = (0.1)$$

Con lo que se pondera con 200 al estado x_1 y con 0.1 a la señal de control u .

Los valores obtenidos de evaluar el programa en el siguiente capítulo, para la matriz G , matriz H , matriz C y matriz K , son los siguientes:

Matriz $G =$

$$\begin{matrix} 0.3679 & 0.0063 & 0.0005 \\ 0 & 1.0000 & 0.0850 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{matrix}$$

Matriz $H =$

$$\begin{matrix} 2.2455 \\ 648.0275 \\ 708.2098 \end{matrix}$$

Matriz C =

1 0 0

K =

0.0182 0.0012 0.0001

K1 = 0.0182

K2 = 0.0012

K3 = 0.0001

Del mismo modo, el resultado gráfico de la salida controlada, se puede apreciar en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO IV

SIMULACION EN MATLAB

4.1 Programación

% CONTROL DE NIVEL DE LIQUIDO CON FLOTADOR%

% Parámetros del modelo

$R_a=10$; % Ohmios

$K_i=10$; % oz-pulg/A

$J_m=0.005$; % oz-pulg-s²

$K_b=0.0706$; % V/rad/s

$n=0.01$; % relación de los engranajes

$J_f=10$; % oz-pulg-s²

$K_a=50$; % amplificador de voltaje de entrada

$A_r=50$; % pies²

$K_f=10$; % pies³/s-rad

$K_o=50$; % pies²/s

$N=5$;

% Modelo en el espacio de estado

$A = [-K_c/A_r \quad K_i * N * n / A_r \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1; 0 \quad 0 \quad -K_b * K_f / ((J_m + n^2 * J_l) * R_a)];$

A

$B = [0 \quad 0 \quad K_f * K_a / ((J_m + n^2 * J_l) * R_a)];$

B

$C_c = [1 \quad 0 \quad 0];$

$D_c = [0];$

% Transformación de espacio de estado a función de transferencia

$[num, den] = ss2tf(A, B, C_c, D_c);$

printsys(num, den);

% Función de transferencia

$Y(s)/U(s) = num/den = C_c * (sI - A)^{-1} * B + D$

% Transformación de función de transferencia a espacio de estado

$[A, B, C_c, D_c] = tf2ss(num, den)$

% Controlabilidad y Observabilidad

$M = [B \quad A * B \quad A^2 * B];$

$N = [C_c' \quad A' * C_c' \quad A'^2 * C_c'];$

rank(M)

rank(N)

% rank(M)=rank(N)=3 el sistema es CC y CO

```
% Discretización
```

```
T=1;
```

```
[G,H,C,D]=c2dm(A,B,Cc,Dc,T,'zoh');
```

```
G
```

```
H
```

```
C
```

```
D
```

```
% Matrices de ponderación
```

```
Q=[2400 0 0;0 0.1 0;0 0 0.1]; R=[0.11]; %4.5v
```

```
% Ganancia optima K y matriz P
```

```
[K,P,E]=dlqr(G,H,Q,R);
```

```
k1=K(1);
```

```
% Factor de corrección
```

```
g=1/(C*inv(eye(3))-G+H*K)*H*k1);
```

```
g
```

```
% Cálculo del Controlador Optimo
```

```
x=[0;0;0]; N=60; % Condición inicial
```

```
for k=1:N
```

```
h=5; % 5 pies de altura
```

```
U(k)=-K*x+k1*h;
```



```

x=G*x+H*U(k);

y(k)=x(1);

end

% Gráficos

t=linspace(0,T*N,N);

subplot(2,1,1)

plot(t,y); ylabel('y(pies)');grid;

subplot(2,1,2)

plot(t,U); ylabel('U(voltios)');grid;

xlabel('Tiempo (s)')

% Cálculo recursivo de la matriz P y K (Pr y Kr)

T=20; Pr=zeros(3,3);

for i=1:T

    Pr=Q+G'*Pr*G-G'*Pr*H*inv(R+H'*Pr*H)*H'*Pr*G;

end

Kr=inv(R+H'*Pr*H)*H'*Pr*G;

% Pr debe ser igual a P y Kr debe ser igual a K

Pr

P

Kr

K

```

4.2 Resultados del Programa

Matriz A =

$$\begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0100 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & -11.7667 \end{bmatrix}$$

Matriz B =

1.0e+003 *

0

0

8.3333

Función de Transferencia num/den =

2.1316e-014 s + 83.3333

$s^3 + 12.7667 s^2 + 11.7667 s$

Rango de Matriz de Controlabilidad M =

3

Rango de Matriz de Observabilidad N =

3

Matriz G =

0.3679 0.0063 0.0005

0 1.0000 0.0850

0 0 0.0000

Matriz H =

2.2455

648.0275

708.2098

Matriz C =

1 0 0

Matriz D =

0

Factor de corrección

g =

7.6162

Matriz Pr =

1.0e+003 *

2.7079 0.0038 0.0003

0.0038 0.0002 0.0000

0.0003 0.0000 0.0001

Ecuación de Ricatti en estado estacionario

P =

1.0e+003 *

2.7079 0.0038 0.0003

0.0038 0.0002 0.0000

0.0003 0.0000 0.0001

Matriz de Ganancia del Controlador

Kr =

0.0182 0.0012 0.0001

K =

0.0182 0.0012 0.0001

Los resultados gráficos de la salida “y” y de la señal de control “u”, se muestran en la **Figura 4.1.**

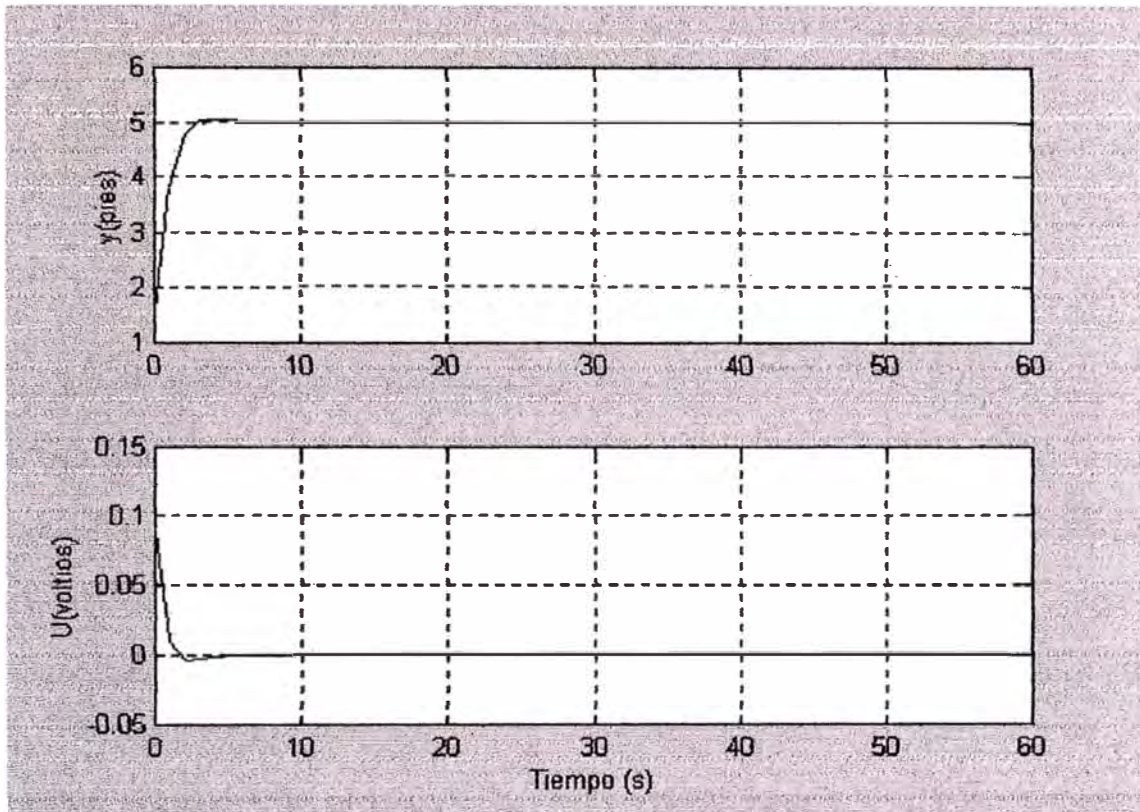


Figura 4.1 Resultados gráficos de la salida y y la señal de control u

4.3 Comentarios

- Dentro de la matriz de ponderación se hicieron pruebas variando el valor de Q_{11} (valor de fila 1 columna 1), correspondiente a la salida x_1 . A continuación se muestran los resultados obtenidos y se nota que para el valor de 2400 o 2500 los valores son aceptables (tensión de nivel comercial) pero sin la presencia de transitorios acentuados.

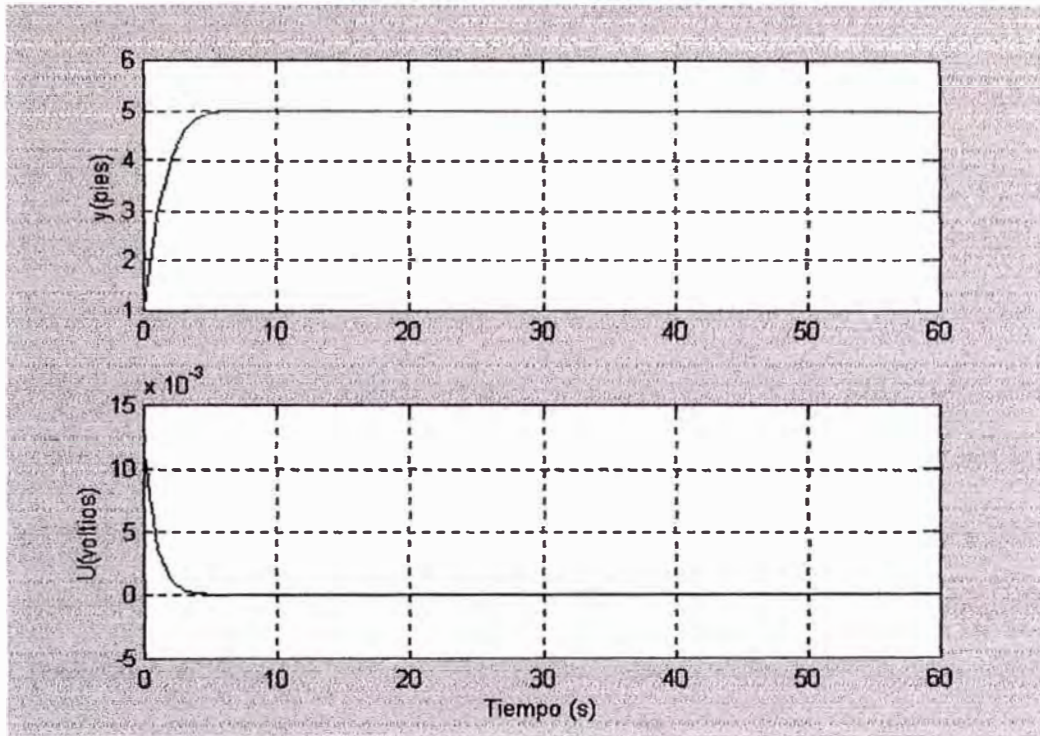


Figura 4.2 $Q_{11}=200$, produce un $e_i(t)=1$ mvoltios, entonces $e_a(t)=0.55$ voltios.
 $t=3.8$ sg

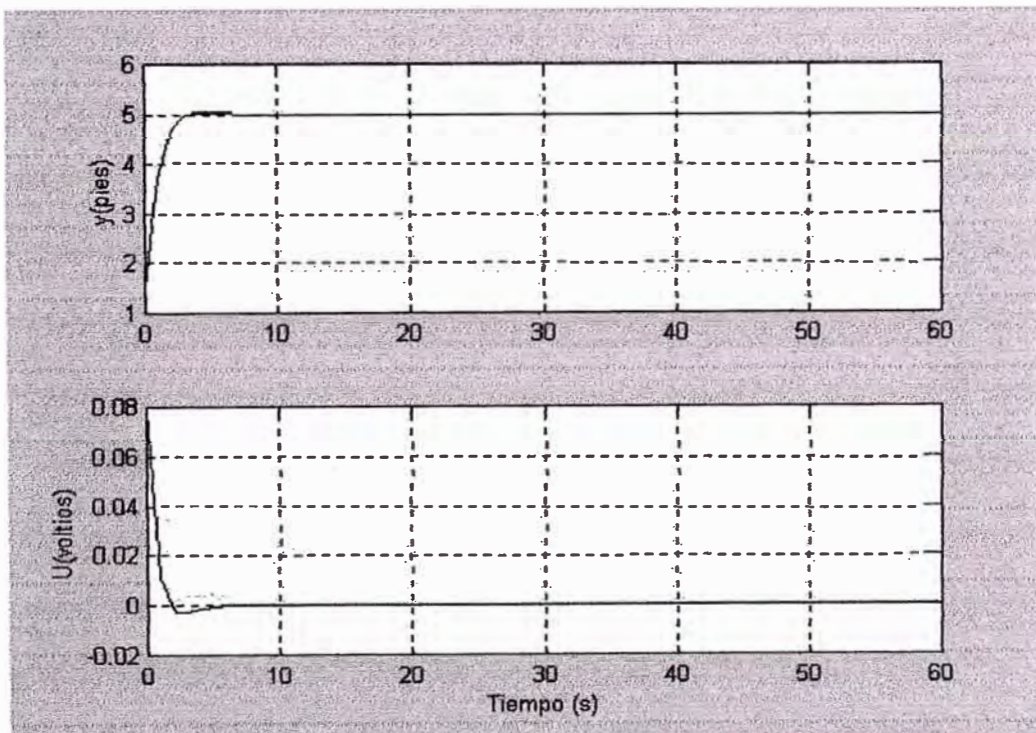


Figura 4.3 $Q_{11}=2000$, produce un $e_i(t)=0.08$ voltios, $e_a(t)=4$ voltios, $t=5$ sg

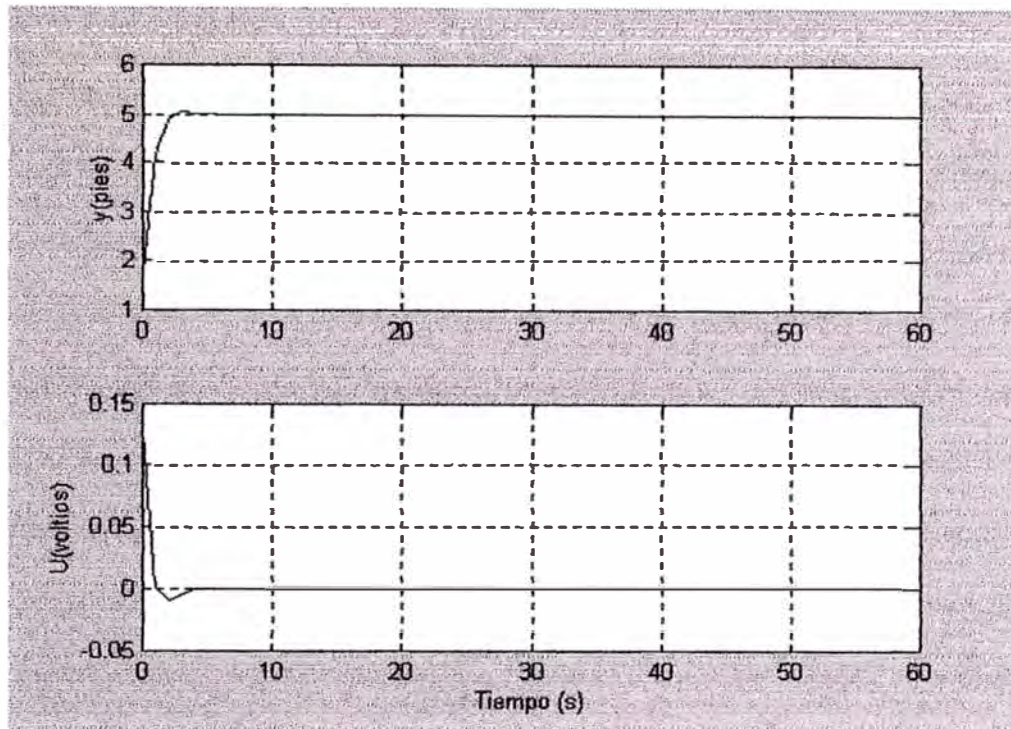


Figura 4.4 $Q_{11}=4000$, produce un $e_i(t)=0.125$ voltios, $e_a(t)=6.25$ voltios, $t=4.5$ sg

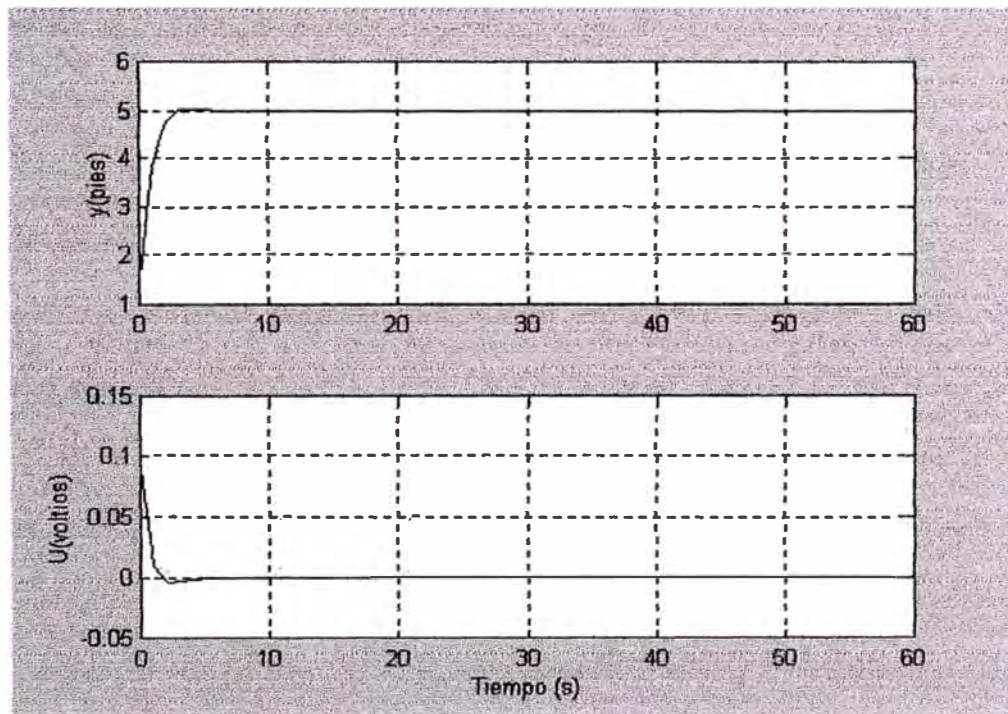


Figura 4.5 $Q_{11}=2500$, produce un $e_i(t)=0.9$ voltios, $e_a(t)=4.5$ voltios, $t=5.5$ sg

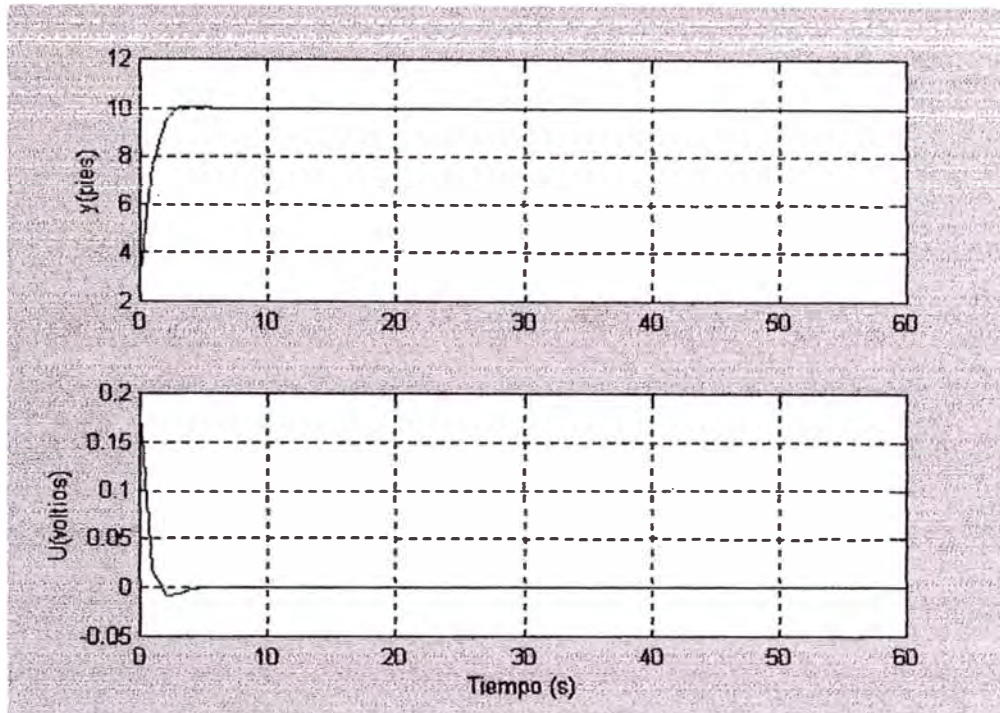


Figura 4.6 $H=10$ para $Q_{11}=2400$, produce un $e_i(t)=0.9$ voltios, $e_a(t)=4.5$ voltios, $t=5.5$ sg

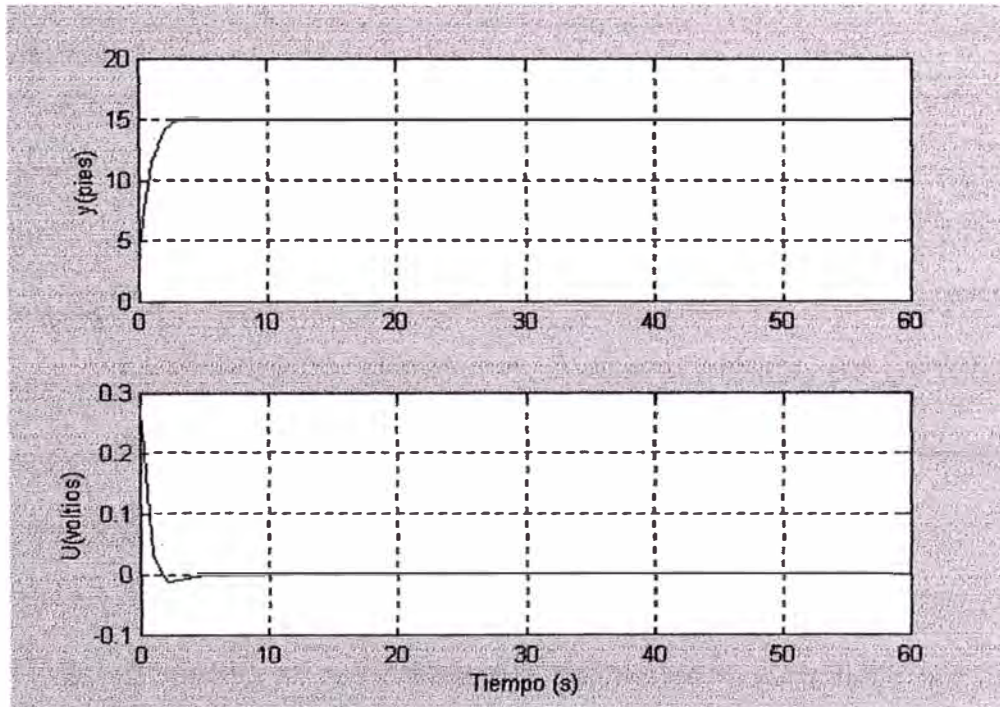


Figura 4.7 $H=15$ para $Q_{11}=2400$, produce un $e_i(t)=0.9$ voltios, $e_a(t)=4.5$ voltios, $t=5.5$ sg

CONCLUSIONES

Se realizó la simulación del proceso de control de nivel de líquido de un tanque con flotador lográndose los resultados que fueron presentados en el capítulo 4.

1. En la función de transferencia obtenida mediante MatLab, se muestra en el numerador el término " $2.1316e-014 s$ ", el cual no aparece en la solución teórica. Como se ve, el valor es mínimo, por lo cual se puede despreciar. Y es debido a las operaciones matemáticas realizadas en el desarrollo.
2. El sistema es completamente observable y controlable por lo que se puede decir que es un sistema estable.

3. Los valores obtenidos de las raíces de la ecuación característica confirman la estabilidad debido a que éstos se encuentran en la parte negativa del plano S.
4. Se aplica control óptimo proporcional estacionario porque la función de transferencia tiene un solo integrador.
5. Se utilizó el factor de corrección (g) para controlar el nivel de altura del tanque.
6. Dentro de la matriz de ponderación se hicieron pruebas variando el valor de Q11 (valor de fila 1 columna 1), correspondiente a la salida x_1 . A continuación se muestran los resultados obtenidos y se nota que para el valor de 2400 o 2500 los valores son aceptables (tensión de nivel comercial) pero sin mucho transitorio.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ogata, Katsuhiko. “Ingeniería de Control Moderna” Ed. Prentice Hall,
2. Benites, Raúl. “Información Cuarto Programa de Titulación por Actualización de Conocimientos” , 2003.
3. Ogata, Katsuhiko. “Designing Linear Control Systems with MATLAB”, Ed. Prentice Hall, 1994.
4. Rojas Moreno, Arturo. Control Avanzado “Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real”. Código AI-099. Biblioteca Docente Post-Grado UNI
5. Página Web: www.CTM Tutorial Matlab Básico.htm
6. Página Web: www.mathworks.com

APENDICES

APENDICE 1

Tutorial: Lo Básico de Matlab

Vectores

Funciones

Ploteo

Polinomios

Matrices

Impresión

Uso de archivos.M en Matlab

Obtención de Ayuda en Matlab

MatLab es un programa interactivo útil en computación numérica y visualización de datos; los ingenieros en control lo usan extensivamente en análisis y diseño. Están disponibles diferentes "toolboxes" las cuales extienden aún más las funciones básicas del MatLab a diferentes áreas de aplicación; en estos tutoriales se ha hecho uso

extensivo de la toolbox de control de sistemas (Control Systems Toolbox). MatLab se ejecuta en los entornos Unix, Macintosh, y Windows; hay una versión disponible para estudiantes que es ejecutable sólo en PCs.

Lo mejor que se puede hacer con estos tutoriales es verlos en una ventana mientras se está ejecutando MatLab en otra ventana. Así estará habilitado para visualizar todos los gráficos y cálculos que están en los tutoriales mediante la operación de copiar y pegar el texto que ve acá directamente en la ventana del MatLab o en un archivo.m.

Vectores

Comencemos creando algo simple, como un vector. Entre cada elemento del vector (separado por un espacio) y entre corchetes, y asígnelo a una variable. Por ejemplo, para crear el vector *a*, entre en la ventana de comandos de MatLab (puede copiar y pegar):

```
a = [1 2 3 4 5 6 9 8 7]
```

MatLab devolverá:

```
a = 1 2 3 4 5 6 9 8 7
```

Si ahora se quiere crear un vector con elementos desde 0 a 20 a incrementos de 2

(esto se usa mucho en la creación de vectores tiempo):

```
t = 0:2:20
```

MatLab devolverá:

```
t = 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
```

Manipular vectores es tan fácil como crearlos. Primero suponga que hay que sumar 2 a cada elemento en el vector 'a'. La ecuación que lo logra se ve:

$$b = a + 2$$

MatLab devolverá:

$$b = 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 11 \ 10 \ 9$$

Ahora suponga que quiere sumar dos vectores. Si los mismos tienen igual longitud, es sencillo. Simplemente súmelos como se muestra abajo

$$c = a + b$$

MatLab devolverá:

$$c = 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12 \ 14 \ 20 \ 18 \ 16$$

La resta de vectores de la misma longitud trabaja exactamente de la misma manera.

Funciones

Para hacernos la vida más fácil, MatLab incluye muchas funciones estándar. Cada función es un bloque de código que lleva a cabo una tarea específica. MatLab contiene todas las funciones estándares como **sin**, **cos**, **log**, **exp**, **sqrt**, así como tantas otras. También incorpora las constantes comúnmente usadas como *pi*, *e* o *j* para la raíz cuadrada de -1.

$$\text{sin}(\text{pi}/4)$$

MatLab devolverá:

$$\text{ans} = 0.7071$$

Para determinar la sintaxis y lo que hace la función sólo tipee `help`

`[nombre_function]` en la ventana de comando de MatLab .

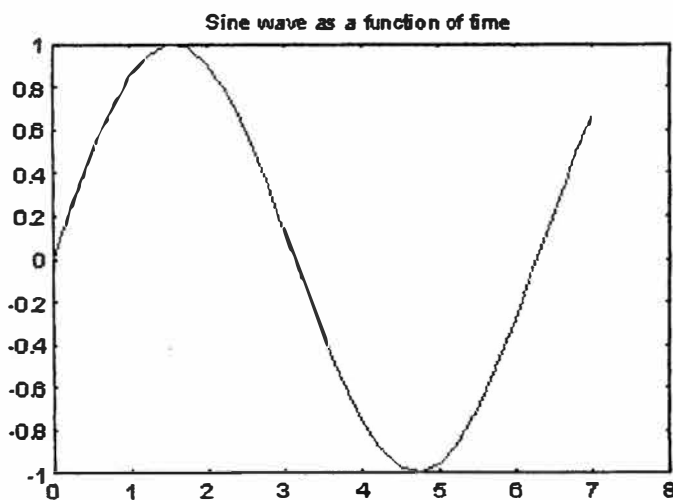
MatLab también le permite escribir sus propias funciones con el comando `function` ; siga este link para aprender cómo escribir sus propias funciones y aprecie un listado de las funciones que fueron creadas exprofeso para este tutorial.

Gráficas

Es muy sencillo crear figuras en MatLab. Suponga que necesite graficar una onda senoidal como función del tiempo . Primero defina un vector tiempo (el punto y coma luego de cada sentencia obliga a MatLab a no mostrar los resultados) y luego calcule el valor del seno en cada momento.

```
t = 0:0.25:7; y = sin(t); plot(t,y)
```

MatLab devolverá:



La figura contiene aproximadamente un período de la onda senoidal. Este tipo de figuras es muy sencillo en MatLab, y el comando `plot` tiene muchas opciones agregadas. Se recomienda visitar la página [ploteo](#) para aprender más.

Polinomios

En MatLab, un polinomio se representa por un vector. Para crear un polinomio, simplemente tipee cada coeficiente del mismo en un vector en orden descendiente (no omita el 0). Por ejemplo, quisiera entrar el siguiente polinomio:

$$s^4 + 3s^3 - 15s^2 - 2s + 9$$

Para hacerlo en MatLab, se tipea el vector

$$x = [1 \ 3 \ -15 \ -2 \ 9]$$

MatLab devolverá:

$$x = 1 \ 3 \ -15 \ -2 \ 9$$

MatLab puede interpretar un vector de longitud $n+1$ como un polinomio de grado n .

Por lo tanto, si el polinomio no tiene algunos coeficientes, es necesario que entre los ceros apropiados en el vector. Por ejemplo,

$$s^4 + 1$$

se representaría en MatLab como:

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Puede hallar el valor de un polinomio con la función `polyval`. Por ejemplo, para hallar el valor en $s=2$ en el polinomio de arriba,

$$z = polyval([1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], 2)$$

MatLab devolverá:

$$z = 17$$

Puede también calcular las raíces de un polinomio . Esto es muy útil cuando se tiene un polinomio de alto grado como

$$s^4 + 3s^3 - 15s^2 - 2s + 9$$

Hallar las raíces es tan sencillo como entrar el siguiente comando;

```
roots([1 3 -15 -2 9])
```

MatLab devolverá:

```
ans = -5.5745 2.5836 -0.7951 0.7860
```

El producto de dos polinomios se halla tomando la convolución de sus coeficientes.

La función `conv` del MatLab lo hará .

```
x = [1 2]; y = [1 4 8]; z = conv(x,y)
```

MatLab devolverá:

```
z = 1 6 16 16
```

La división de dos polinomios es también sencilla. La función `deconv` devuelve tanto el resultado cuanto el resto. Dividamos `z` por `y`, y veamos si se obtiene `x`.

```
[xx, R] = deconv(z,y)
```

MatLab devolverá:

```
xx = 1 2
```

```
R = 0 0 0 0
```

Como puede ver , este es el mismo polinomio/vector `x` de arriba. Si `y` no es raíz de `z` , el vector `R` resto hubiese sido distinto de cero.

Si se quiere sumar dos vectores de igual orden, bastará la simple instrucción $z = x + y$ (los vectores x e y deben ser de la misma longitud). En el caso general, debe usarse la función definida por el usuario, `polyadd`. Para usar `polyadd`, copie la función a un archivo-m, y luego úsela como lo haría con cualquier función del MatLab. Asumiendo que ya tiene la función `polyadd` almacenada en un archivo.m, y quiere sumar dos polinomios no apareados, x e y , podrá hacerlo digitando la siguiente instrucción:

```
z = polyadd(x,y)
```

MatLab devolverá:

```
x = 1 2 y = 1 4 8 z = 1 5 10
```

Matrices

Definir matrices en MatLab es lo mismo que tipear un vector, excepto que cada renglón de elementos debe separarse por un punto y coma(;). Ingrese :

```
B = [1 2 3 4;5 6 7 8;9 10 11 12]
```

MatLab devolverá:

```
B =
```

```
1 2 3 4
```

```
5 6 7 8
```

```
9 10 11 12
```

```
B = [ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12]
```

MatLab devolverá:

```
B = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
```

En MatLab las matrices pueden manipularse de distintas maneras. Una de ellas: puede encontrar la traspuesta de una matriz de reales con la tecla apóstrofo:

$$C = B'$$

MatLab devolverá:

$$C = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ 12 \end{matrix}$$

Debe notarse que si B hubiese sido complejo , MatLab hubiese devuelto la traspuesta conjugada. Para obtener siempre la traspuesta sólo, use .' (punto apóstrofe, los dos comandos son iguales si la matriz no es compleja).

Ahora puede multiplicar dos matrices B y C . Recuerde que el orden tiene importancia en el producto de matrices.

$$D = B * C ,$$

MatLab devolverá:

$$D = 650 \text{ (la matriz de } 1 \times 1)$$

$$D = C * B ,$$

MatLab devolverá:

D = la matriz de 12x12

Otra opción en la manipulación de matrices es que se puede multiplicar los elementos correspondientes de dos matrices utilizando el operador `.*` (punto-por, para hacer esto las matrices deben tener la misma dimensión).

$E = [1 \ 2; 3 \ 4]$ $F = [2 \ 3; 4 \ 5]$ $G = E .* F$

MatLab devolverá:

```

E =      F =      G =
     1 2     2 3     2 6
     3 4     4 5    12 20

```

Si se tiene una matriz cuadrada como la matriz E, puede efectuarse la potencia de E las veces que se quiera, lo que equivale a multiplicarla por sí misma n veces.

E^3

MatLab devolverá:

```

ans =
     37 54
     81 118

```

Y si se quiere elevar al cubo cada elemento de la matriz basta con:

$E.^3$

MatLab devolverá:

ans =

1 8

27 64

Para calcular la inversa de la matriz E:

$X = \text{inv}(E)$

MatLab devolverá:

X =

-2.0000 1.0000

1.5000 -0.5000

o sus autovalores:

$\text{eig}(E)$

MatLab devolverá:

ans =

-0.3723

5.3723

Existe una función que encuentra los coeficientes del polinomio característico de una matriz. La función "poly" crea un vector con los coeficientes del polinomio característico en orden descendente.

$p = \text{poly}(E)$

MatLab devolverá:

$p = 1.0000 -5.0000 -2.0000$

Recuerde que los autovalores de una matriz son los mismos que las raíces de su polinomio característico:

`roots(p)`

MatLab devolverá:

$ans = 5.3723 -0.3723$

Impresión

Imprimir en MatLab es sumamente sencillo. Sólo siga los pasos de abajo:

Macintosh

To print a plot or a archivo-m from a Macintosh, just click on the plot or archivo-m, select Print under the File menu, and hit return.

Windows

Para imprimir una figura o un archivo-m en una computadora bajo Windows, nada más seleccione Print en el menu File de la ventana correspondiente al plot (la figura) o al archivo-m, y haga enter.

Unix

Para imprimir una gráfica en Unix ingresamos el comando:

`print -P<printername>`

Si usted quiere guardar la gráfica y imprimirla después, ingrese el comando:

`print plot.ps`

más tarde, usted podría imprimir la gráfica usando el comando "`lpr -P plot.ps`" Si usted está usando una estación de trabajo HP para imprimir, usted podría usar el siguiente comando "`lpr -d plot.ps`"

Para imprimir un m-file, solo imprímalo de la forma que usted lo hace con otro archivo, usando el comando "`lpr -P <nombre del m-file>.m`" Si usted está usando una estación de trabajo HP para imprimir, usted haría el siguiente cambio en la línea de comandos "`lpr -d plot.ps<name of m-file>.m`"

Uso archivos-m en MatLab

Hay diferencias pequeñas que debe saber de cada plataforma.

Macintosh

MatLab trae un editor para archivos-m; elija "New M-file" en el menú File . También puede usarse el editor que quiera (lo único que debe asegurarse es que grabe los archivos en formato sólo texto y de cargarlo cada vez que empiece el MatLab).

Windows

Correr MatLab bajo Windows es muy parecido a correrlo en una Macintosh. Sin embargo, debe saber que su archivo-m será salvado en el clipboard. Por lo que, debe asegurarse que está salvado como archivo.m

Unix

Usted necesitaría ejecutar un editor separadamente desde MatLab. La mejor estrategia es hacer un directorio para todos sus archivos m-files, entonces cambie a ese directorio antes de usar el editor y MatLab. Para iniciar MatLab desde su X-ventana, simplemente escriba: matlab.

Puede tipear los comandos directamente en el MatLab, o ponerlos en un archivo-m y entonces sólo correr el archivo-m. Si pone todos sus archivos.m en el mismo directorio en el que está instalado MatLab, él lo encuentra siempre.

Obtención de Ayuda en MatLab

MatLab presenta una muy buena ayuda en línea, simplemente hay que tipear :
help nombre_del_comando para mayor información sobre un determinado comando.
Debe saber el nombre exacto del comando que busca; los links a [Lista de Comandos](#); en ésta y al final de cada página le brinda una lista de todos los comandos usados en este tutorial y en los ejemplos.

Aquí tiene algunas notas para terminar este tutorial.

Puede obtener el valor de cualquier variable en cualquier momento, tipeando su nombre. Por ejemplo

B

MatLab devolverá:

B =

1 2 3

4 5 6

7 8 9

También puede escribir más de una instrucción en un renglón, sepárelos mediante una coma o un punto y coma.

Además seguramente se dió cuenta que de no asignar el resultado de un cálculo a una variable específica, MatLab lo pone en la variable "ans"

APENDICE 2

CONTROL SYSTEM TOOLBOX 5.2

Function List

Version 5.2

Sample Commands

Classical design

rlocus	Evans root locus
sisotool	SISO design GUI (root locus and loop shaping techniques)

Conversions

c2d	continuous to discrete conversion
d2c	discrete to continuous conversion
d2d	resample discrete time model
frd	conversion to frequency data
ss	conversion to state space
tf	conversion to transfer function
zpk	conversion to zero/pole/gain

Data extraction

get	access values of LTI model properties
ssdata	extract state space matrices
tfdata	extract numerator(s) and denominator(s)
zpkdata	extract zero/pole/gain data

Frequency-domain analysis

allmargin	all crossover frequencies and related gain/phase margins
bode	Bode diagrams of the frequency response
freqresp	frequency response over a frequency grid
ltiview	response analysis GUI (LTI Viewer)
margin	gain and phase margins
nichols	Nichols plot
nyquist	Nyquist plot
sigma	singular value frequency plot

General

ctrlpref	set Control System Toolbox preferences
frd	create a frequency response data model
set	set/modify properties of LTI models
ss, dss	create a state space model
tf	create a transfer function model
zpk	create a zero/pole/gain model

LQR/LQG design

kalman	Kalman estimator
kalmd	discrete Kalman estimator for continuous plant
lqr, dlqr	linear quadratic (LQ) feedback regulator
lqrd	discrete LQ regulator for continuous plant
lqry	LQ regulator with output weighting

Matrix equation solvers

care	solve continuous algebraic Riccati equations
dare	solve discrete algebraic Riccati equations
dlyap	solve discrete Lyapunov equations
lyap	solve continuous Lyapunov equations

Model dynamics

bandwidth	system bandwidth
covar	covariance of response to white noise
damp	natural frequency and damping of system poles
dcgain	DC (low frequency) gain
iopzmap	map poles and zeros for input/output pairs
norm	norms of LTI systems
pole	system poles
pzmap	pole zero map
zero	system (transmission) zeros

Pole placement

estim	form estimator given estimator gain
place	MIMO pole placement
reg	form regulator given state feedback and estimator gains

State-space models

balreal	Gramian based input/output balancing
ctrb, obsv	controllability and observability matrices
gram	controllability and observability gramians
minreal	minimal realization and pole/zero cancellation
modred	model state reduction
rss, drss	random stable state space models
ss2ss	state coordinate transformation
ssbal	diagonal balancing of state space realizations

System interconnections

append	group LTI systems by appending inputs and outputs
connect	derive state space model from block diagram description
feedback	feedback connection of two systems
lft	generalized feedback interconnection (Redheffer star product)
parallel	generalized parallel connection
series	generalized series connection

Time delays

delay2z	replace delays by poles at $z=0$ or FRD phase shift
pade	Pade approximation of time delays
totaldelay	total delay between each input/output pair

Time-domain analysis

impulse	Impulse response
initial	response of state space system with given initial state
lsim	response to arbitrary inputs
ltiview	response analysis GUI (LTI Viewer)
step	step response