

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**“DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL MULTIVARIABLE DE  
UNA COLUMNA DE DESTILACIÓN”**

**INFORME DE SUFICIENCIA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**INGENIERO ELECTRÓNICO**

**PRESENTADO POR:  
ALEJANDRO ALEGRÍA ORTIZ**

**PROMOCIÓN 1996-II  
LIMA-PERÚ  
2003**

A mis Padres

A mi Esposa

DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL  
MULTIVARIABLE DE UNA COLUMNA DE  
DESTILACIÓN

## SUMARIO

El presente estudio trata sobre el control de un sistema multivariable empleando un sistema de control óptimo cuadrático. Este sistema comprende una ley de control óptima multivariable discreta y un observador de estados óptimo.

El sistema a ser controlado corresponde a una columna de destilación para fraccionar petróleo crudo, la cual ha sido usada ampliamente por la comunidad técnica y académica para experimentar diferentes estrategias de control. Esta columna es conocida en la literatura especializada como la columna fraccionadora de petróleo crudo de Shell.

El modelo dinámico del sistema incluye múltiples tiempos muertos, los cuales pueden complicar el diseño del sistema de control óptimo discreto. Por ello, la filosofía de diseño empleada en este estudio, consiste en reemplazar la función de transferencia de los tiempos muertos por aproximaciones racionales de bajo orden, pero con la capacidad de capturar los efectos de los tiempos muertos reales.

Los estudios de simulación van a demostrar que la metodología de diseño empleada conduce a un sistema de control óptimo multivariable de buen rendimiento, incluso, cuando todos los tiempos muertos del sistema varían considerablemente.

## ÍNDICE

PRÓLOGO . . . . .	1
CAPÍTULO I	
LA COLUMNA DE DESTILACIÓN . . . . .	2
1.1 Descripción del Sistema . . . . .	2
1.2 Especificaciones de Diseño . . . . .	5
CAPÍTULO II	
MODELADO DE LA COLUMNA . . . . .	6
2.1 Modelo Dinámico del Sistema . . . . .	6
2.2 Modelado de los Tiempos Muertos . . . . .	9
2.3 La Ecuación de Estado del Sistema . . . . .	11
CAPÍTULO III	
EL CONTROLADOR MIMO ÓPTIMO . . . . .	16
3.1 El Regulador SISO Óptimo Proporcional-Integral . . . . .	16
3.2 Controlabilidad y Observabilidad . . . . .	19
3.3 El Regulador MIMO Óptimo Proporcional-Integral . . . . .	19
3.4 Sistemas Multivariables Cuadrados . . . . .	21
CAPÍTULO IV	
EL OBSERVADOR MIMO ÓPTIMO . . . . .	23
4.1 Necesidad de un Observador MIMO . . . . .	23
4.2 Diseño del Observador MIMO Óptimo Cuadrático . . . . .	23

**CAPÍTULO V**

<b>CONTROL ÓPTIMO DE LA COLUMNA</b>	26
5.1 El Procedimiento de Diseño . . . . .	26
5.2 Control MIMO Óptimo Cuadrático del Sistema . . . . .	26
5.3 Simulación del Sistema de Control Óptimo . . . . .	29
<b>CONCLUSIONES</b>	33
<b>ANEXO A: LISTADO DE PROGRAMAS</b>	39
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	48

## PRÓLOGO

El presente estudio desarrolla un procedimiento para diseñar un sistema de control óptimo multivariable para controlar sistemas multivariables con múltiples tiempos muertos. El sistema seleccionado es una columna de destilación multivariable empleada para el fraccionamiento de petróleo crudo. El sistema de control incluye una ley de control óptima y un observador de estados óptimo multivariable. Este trabajo comprende cinco (5) capítulos, las conclusiones del mismo y un anexo con los listados de los programas empleados.

En el capítulo I se describe sucintamente el sistema a ser controlado: la columna de destilación para el fraccionamiento de petróleo crudo, y presenta las especificaciones de diseño del sistema de control.

En el capítulo II se presenta y discute el modelo dinámico del sistema (el cual presenta múltiples tiempos muertos), el modelado de los tiempos muertos usando funciones de transferencia racionales, y culmina formulando la ecuación de estado del sistema.

En el capítulo III se desarrolla la teoría conducente al diseño del regulador multivariable óptimo discreto con característica proporcional-integral.

En el capítulo IV se trata acerca del diseño del observador multivariable discreto empleado para estimar los estados del sistema. Esto resulta trascendente desde que en el sistema en estudio, la mayoría de los estados no son medibles.

En el capítulo V se emplea los resultados de los capítulos III y IV para diseñar el sistema de control óptimo multivariable del sistema en estudio.

# CAPÍTULO I

## LA COLUMNA DE DESTILACIÓN

### 1.1 Descripción del Sistema

La figura 1.1 ilustra una columna de destilación empleada para fraccionar petróleo crudo. Esta columna es conocida en la literatura especializada como la columna fraccionadora de petróleo crudo de Shell.

El modelo del sistema elegido para estudiar y diseñar un controlador corresponde a una Columna Fraccionadora de Petróleo Crudo, la cual ha sido usada ampliamente para experimentar diferentes estrategias de control relacionadas con columnas de destilación.

Como es bien sabido, el petróleo crudo contiene varias sustancias que son aprovechadas de maneras diferentes, tales como gasolina, kerosene, nafta, gasóleo, etc., las cuales son separadas (fraccionadas) en las columnas de destilación (fraccionamiento). El proceso de fraccionamiento de petróleo se basa fundamentalmente en los diferentes niveles de volatilidad de las sustancias contenidas en el mismo. Estas volatilidades están vinculadas de manera directa con el punto de ebullición de dichas sustancias, las cuales son diferentes entre si. Los productos mas volátiles tienen un punto de ebullición más bajo que los productos menos volátiles.

La columna de destilación en estudio, se muestra en la figura 1.1, en la cual el petróleo crudo ingresa por la parte inferior (línea de alimentación). Junto a esta línea de alimentación, se encuentra la línea de calefacción de la columna, la cual no aparece en la figura por simplicidad. Esta línea de calefacción proporciona todos los requerimientos caloríficos para la columna. Esta columna está dividida en tres zonas: superior, intermedia y de fondos. En la zona superior tenemos los productos más volátiles y en la zona intermedia los menos volátiles. En la zona de fondos se tiene la mezcla de los productos volátiles de interés, los cuales van a ser sometidos a fraccionamiento. En cada una de las zonas antes mencionadas,



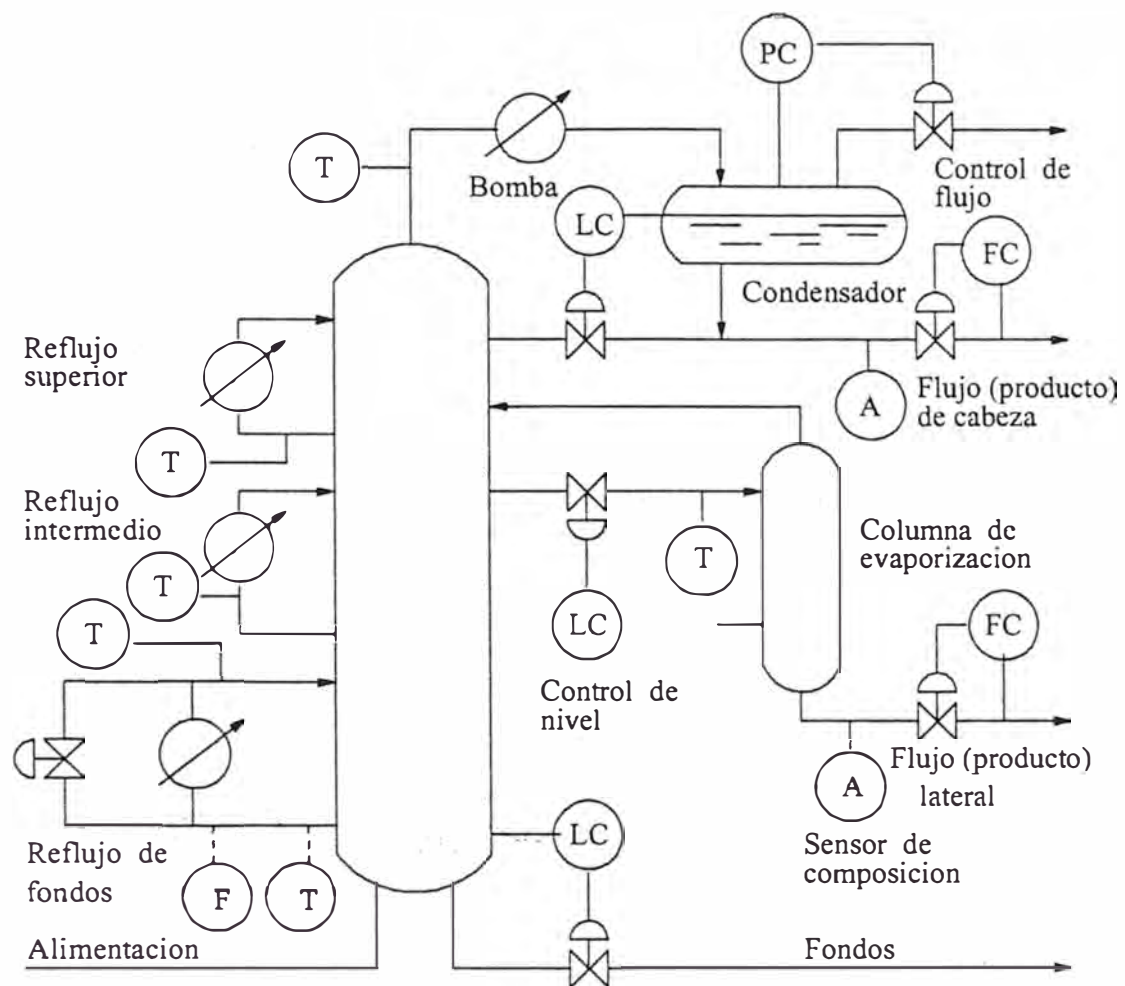


Figura 1.1: Columna de destilación para fraccionar petróleo crudo.

existen bombas de reflujo, las cuales permiten fraccionar nuevamente mediante reciclaje, el producto semifraccionado. De esta manera, optimizamos el proceso de fraccionamiento.

Por la parte superior de la columna se obtienen los productos mas volátiles, los gases, los cuales contienen vapores que se conducen a través de un condensador, para recuperar parte del flujo de cabeza (en estado líquido). La fuente principal del flujo de cabeza proviene de la parte lateral superior de la columna, sin pasar por el condensador.

Por la parte intermedia de la columna se obtiene el segundo producto de interés, el flujo lateral, el cual tiene menor volatilidad. Este producto se conduce a través de una pequeña torre de evaporización, para generar gases de mayor volatilidad. Estos gases se dirigen nuevamente a la columna para ser fraccionadas otra vez. Por consiguiente, la torre de evaporización mejora la pureza del producto lateral y permite también recuperar el producto de cabeza.

En la parte inferior de la columna encontramos la zona de fondos, que es básicamente en donde se encuentran el producto crudo en estado de volatilización. En esta zona se debe tener una temperatura constante para de esta manera asegurar una volatilización uniforme.

En las columnas de destilación clásicas, el control se realiza en forma independiente para cada variable controlada. Es decir, el control de la composición del producto de cabeza se hace controlando el flujo de salida del mismo. Del mismo modo, el control de la composición del producto lateral se hace controlando el flujo de salida correspondiente, y, el control de la temperatura de fondos se hace controlando el reflujo de fondos. Además de los lazos de control mencionados, con el fin de asegurar el óptimo funcionamiento de la columna, es necesario controlar en forma independiente los niveles de los productos fraccionados y acumulados tanto en el condensador de productos de cabeza como en la torre de evaporización (para los productos laterales). También se controla el nivel en la zona de fondos.

El control de estas columnas de destilación clásicas puede mejorarse notablemente empleando estrategias de control multivariable. Es decir, una estrategia de control, cuya ley matemática relacione la interconectividad entre las entradas y las salidas seleccionadas. El resultado de esta estrategia de control es una matriz de transferencia no diagonal. De hecho, la estrategia de control

clásica también se puede representar con una matriz de transferencia, pero en este caso diagonal. Esta matriz diagonal nos informa el carácter independiente de los controladores de la columna. Es decir, la fuerza de control  $u_1$  controla la salida  $y_1$ , la fuerza de control  $u_2$  controla la salida  $y_2$ , y así sucesivamente. La desventaja de esta estrategia es evidente: no se toma en cuenta la interrelación que realmente existe entre las entradas y las salidas. Por esta razón en este estudio hemos preferido usar la estrategia que considera una matriz de transferencia no diagonal, para tomar en cuenta las interrelaciones entre las variables en juego.

En conclusión, se tienen tres variables a controlar: las composiciones del producto de cabeza y producto lateral ( $y_1$  e  $y_2$ ), los cuales son medidos por analizadores, y la temperatura de fondos ( $y_3$ ). Las variables manipuladas (las fuerzas de control) son: el flujo de productos de cabeza ( $u_1$ ), el flujo del producto lateral ( $u_2$ ) y el reflujo de fondos ( $u_3$ ).

## 1.2 Especificaciones de Diseño

Se pide diseñar un sistema de control óptimo multivariable compuesto de una ley de control óptima cuadrática discreta y un estimador multivariable de estados óptimo discreto. Este sistema de control debe ser capaz de estabilizar las señales de salida  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  en presencia de cambios tipo escalón de las señales de referencia correspondientes  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ . Las señales de control  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  no deben de sobrepasar los valores normalizados  $\pm 0.5$  cuando ocurran los cambios tipo escalón de las señales de referencia. El tiempo de estabilización de  $y_1$  debe ser menor de 50 minutos, de  $y_2$  menor de 30 minutos, mientras que de  $y_3$  debe ser menor de 20 minutos. El error en estado estable de las señales controladas debe ser nulo con mínimo sobreimpulso.

## CAPÍTULO II MODELADO DE LA COLUMNA

### 2.1 Modelo Dinámico del Sistema

El modelo matemático que describe la dinámica de la columna de destilación para fraccionar petróleo crudo se presentó originalmente en la referencia [4] y ha sido usado en forma extensiva para probar diferentes estrategias de control. Una de dichas estrategias, el control predictivo multivariable de dicha columna, se describe en la referencia [1].

Este modelo, tiene 3 entradas y 3 salidas y puede ser representado de la siguiente manera:

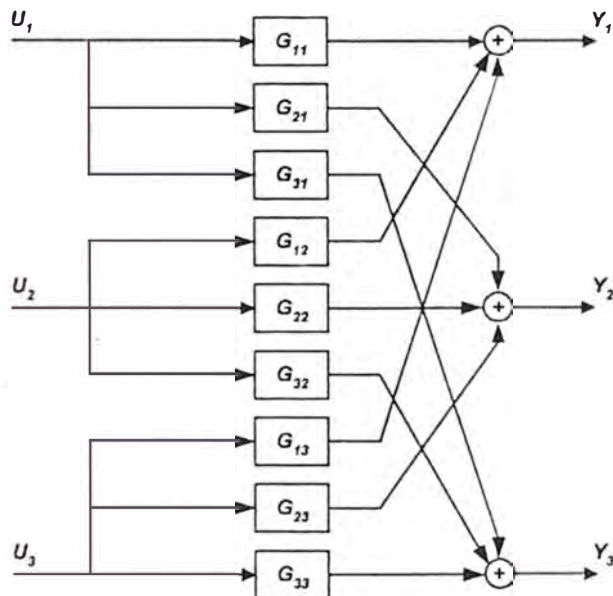


Figura 2.1: Representación en diagramas de bloques de la columna de destilación.

En la figura anterior se tiene que  $G_{ij}$  es la función de transferencia que relaciona la  $i$ -ésima salida con  $j$ -ésima entrada. De la figura 2.1 podemos escribir

lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}U_1 + G_{12}U_2 + G_{13}U_3 \\ G_{21}U_1 + G_{22}U_2 + G_{23}U_3 \\ G_{31}U_1 + G_{32}U_2 + G_{33}U_3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Debe notarse que al definir  $G_{ij}$  solamente se considera la  $j$ -ésima entrada y se supone las otras igual a cero. En el caso de la columna de destilación del petróleo crudo, la dinámica está definida por ecuaciones diferenciales de primer orden del siguiente tipo:

$$\tau_{ij} \frac{dy_i}{dt} + y_i = K_{ij} u_j(t - \theta_{ij}) \quad (2.2)$$

donde  $\tau_{ij}$ ,  $\theta_{ij}$  y  $K_{ij}$  dependen de las características de la columna, del petróleo y de los productos de fraccionamiento, además  $\tau_{ij}$  y  $\theta_{ij}$  tienen unidades de tiempo y considerando la ecuación (2.2) tenemos que  $K_{ij}$  tiene unidades de concentración/flujo para  $y_1$  e  $y_2$  y en el caso de  $y_3$ ,  $K_{ij}$  tiene unidades de temperatura/flujo. Tomando transformada de lapalace a (2.2) tenemos que:

$$\tau_{ij} s Y_i + Y_i = K_{ij} U_j e^{-s\theta_{ij}} \quad (2.3)$$

por tanto :

$$G_{ij} = \frac{K_{ij} e^{-s\theta_{ij}}}{\tau_{ij} s + 1} \quad (2.4)$$

Este modelo dinámico, que considera tiempos muertos en su estructura y cuyos parámetros son dados en la referencia [4], se describe como:

$$\begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \\ y_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-27p}}{1+50p} & \frac{1.77e^{-28p}}{1+60p} & \frac{5.88e^{-27p}}{1+50p} \\ \frac{5.39e^{-18p}}{1+50p} & \frac{5.72e^{-14p}}{1+60p} & \frac{6.9e^{-15p}}{1+40p} \\ \frac{4.38e^{-20p}}{1+33p} & \frac{4.42e^{-22p}}{1+44p} & \frac{7.2}{1+19p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $y_1$  e  $y_2$  son las composiciones de los productos de la parte superior y lateral de la columna (los cuales se miden con analizadores),  $y_3$  es la temperatura del reflujo de fondos de la columna, la variable de control  $u_1$  es el flujo superior,  $u_2$  es el flujo lateral y  $u_3$  es el reflujo de fondos.

El modelo matemático descrito en (2.5) estipula que la columna mostrada en la figura 1.1 posee tres variables que requieren ser controladas: la composición

de los productos de la parte superior y lateral de la columna, y la temperatura de fondos. Las señales a ser diseñadas para controlar tales variables son: el flujo superior, el flujo lateral y el reflujo de fondos. Se supone que la línea de alimentación proporciona todos los requerimientos de calentamiento para la columna.

La dificultad mayor en el modelo dinámico descrito en (2.5), es la presencia de los tiempos muertos  $D_i$ . Este hecho se discute con amplitud en la siguiente sección. La respuesta a lazo abierto a una excitación escalón, del sistema en estudio, se obtiene ejecutando el programa `rptaesc.m`, el cual está escrito en código MATLAB [2]. El listado de este programa se muestra en el anexo A. La figura 2.2 muestra el resultado de la simulación. Es necesario recalcar que en este trabajo, los listados de todos los programas con extensión `m` se encuentran en el Anexo A: Listado de Programas.

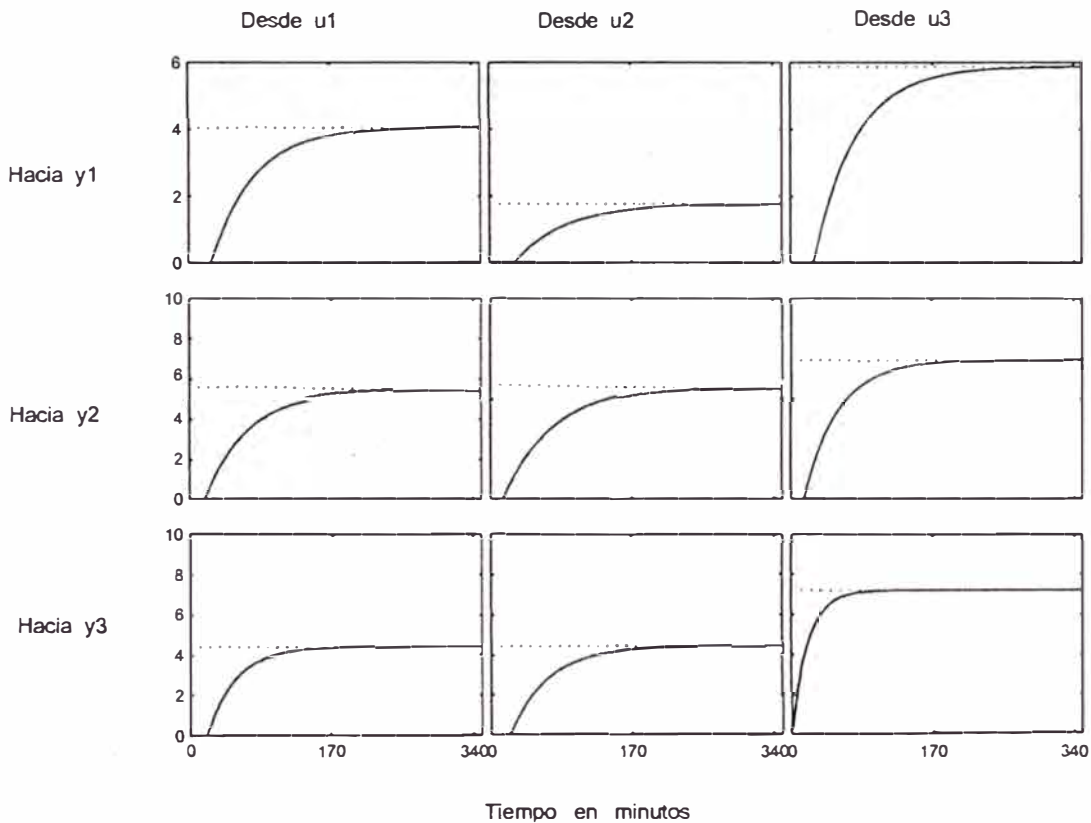


Figura 2.2: Respuesta a lazo abierto del sistema columna de destilación, a una excitación escalón.

## 2.2 Modelado de los Tiempos Muertos

Es indudable que los sistemas industriales reales son de hecho no lineales y variables con el tiempo. Las curvas de datos obtenidas a partir de los sistemas reales mediante experimentación, sólo pueden representarse empleando complicados modelos matemáticos de orden  $n$ , donde  $n$  es un entero suficientemente grande. Dado que por definición, el modelo de cualquier sistema dinámico no es el proceso actual, se puede entonces argumentar que siempre habrá errores de modelado. Sin embargo, en muchos casos, siempre es posible tratar en forma efectiva con sistemas de considerable complejidad empleando modelos de orden  $m$ , donde  $m$  es un entero suficientemente pequeño.

Es un hecho conocido que la presencia de tiempos muertos no despreciables en el sistema, pueden complicar el modelado y el diseño de sistemas de control. Por ejemplo, considere el sistema realimentado SISO (Single-Input-Single-Output) mostrado en la figura 2.3, donde  $G(s)$  es una FT (función de transferencia) propia y  $D$  es el tiempo muerto. Para determinar la estabilidad de tal sistema, necesitamos estimar el rango de valores de  $D > 0$ , de modo tal que la relación  $[1 + G(s)e^{-sD}]$  (la ecuación característica del sistema) no posea ceros en el semiplano derecho del plano- $s$ . Debido a la presencia de  $D$ , tal relación es trascendental y sus raíces son infinitas en número. Un método exacto para encontrar tales raíces requiere de un procedimiento gráfico o de una solución numérica. Evidentemente, la complejidad del método va a ser mayor en sistemas multivariables.

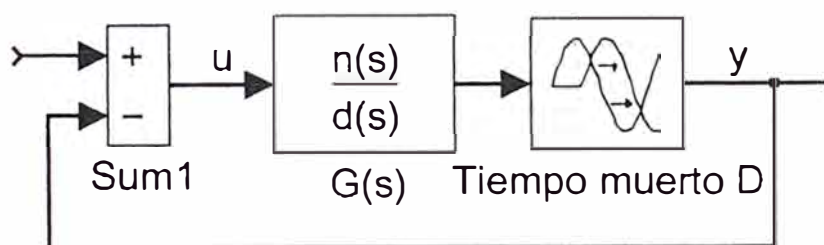


Figura 2.3: Simple sistema realimentado con tiempo muerto.

El principal problema en el modelado de procesos no lineales (y con tiempos muertos en particular) es encontrar un modelo con una estructura suficientemente

simple, que tenga la capacidad de capturar las características significativas del sistema actual (con parámetros conocidos, o parcialmente conocidos) operando bajo la influencia de disturbios desconocidos. Por otro lado, para aplicaciones en el dominio del tiempo discreto, es necesario que el tiempo de computación sea menor que el tiempo de muestreo. Este requerimiento podría ser problemático de cumplir en algunas configuraciones de sistemas de control multivariable. Por consiguiente, la selección de un modelo del proceso que posea una simple estructura, es crucial. Esta selección va a determinar el número de parámetros del sistema y el tipo de controlador a ser empleado.

Sin embargo, a pesar de que el modelo seleccionado sea simple en su estructura, queda el problema de la inevitable presencia de tiempos muertos que no se pueden despreciar. En este estudio, la filosofía general del método para modelar sistemas multivariables que poseen múltiples tiempos muertos es aproximar el efecto de todos los tiempos muertos mediante aproximaciones racionales de orden bajo (dos o tres). Este método permite obtener modelos sin tiempos muertos, pero con la capacidad de capturar significativamente las características dinámicas del proceso actual.

La idea de aproximar la FT del tiempo muerto  $e^{-Ds}$  vía una aproximación de bajo orden no es nueva. En diversos trabajos, tal FT ha sido aproximada empleando las aproximaciones de Padé, todo-polo, o pasa-todo de orden dos. En [5], la aproximación de Padé de segundo orden se empleó para determinar representaciones de estado de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

en reemplazo de sistemas multivariables con múltiples tiempos muertos.

La FT  $G_a(s)$  y la expresión de la fase  $\phi_a(w)$  de una aproximación pasa-todo está dada por:

$$G_a(s) = \frac{(1 - sD/2n_a)^{n_a}}{(1 + sD/2n_a)^{n_a}} \quad (2.6)$$

$$\phi_a = -2n_a \arctan(wD/2n_a) \quad (2.7)$$

donde  $D$  es el tiempo muerto,  $n_a$  es el orden de la aproximación,  $s = jw$  es el operador Laplaciano, y  $w$  es la frecuencia angular. La FT y la expresión de la



fase de una aproximación de Padé de segundo orden está dada por:

$$G_{p2}(s) = \frac{2 - Ds + \frac{(-Ds)^2}{2!}}{2 + Ds + \frac{(Ds)^2}{2!}} = \frac{num}{den} \quad (2.8)$$

$$\phi_{p2} = -2 \arctan(w/3 - \sqrt{3}/3) + 2 \arctan(w/3 + \sqrt{3}/3) \quad (2.9)$$

mientras que la FT de una aproximación de Padé de tercer orden se describe como sigue:

$$G_{p3} = \frac{2 - Ds + \frac{(-Ds)^2}{2!} + \frac{(-Ds)^3}{3!}}{2 + Ds + \frac{(Ds)^2}{2!} + \frac{(Ds)^3}{3!}} = \frac{num}{den} \quad (2.10)$$

Las aproximaciones de primer orden de Padé y pasa-todo son iguales. Todas las aproximaciones racionales descritas anteriormente, poseen una ganancia unitaria, la cual es también la ganancia del tiempo muerto real. La figura 2.4 (que puede ser obtenida ejecutando el programa delays.m) compara las respuestas en ángulo de las aproximaciones de segundo y tercer orden de Padé, y segundo orden pasa-todo con respecto a la fase real  $-wD$  del tiempo muerto. La comparación fue realizada para ángulos entre 0 y 7 rad (i.e., entre 0 y 401°). Esta figura revela que:

1. Empleando aproximaciones de segundo orden de Padé o pasa-todo podemos acomodar retardos de fase de hasta 2 rad (i.e., 114°) que provienen de la FT  $e^{-sD}$ .
2. Incrementando el orden de la aproximación de Padé en uno, podemos acomodar retardos de fase de hasta 3.5 rad (i.e., 200°).

En este estudio, emplearemos aproximaciones de Padé de tercer orden para aproximar la FT  $e^{-sD}$ .

### 2.3 La Ecuación de Estado del Sistema

El modelo dinámico multivariable de la columna de fraccionamiento dada en la ecuación (2.5), necesita ser transformada en una ecuación de estado de la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ , con el propósito de poder emplear leyes de control y observadores de estado lineales. Ya ha sido establecido que la función de transferencia del tiempo muerto  $D$  que usaremos es la siguiente aproximación de Padé de tercer orden:

$$e^{-Ds} \cong \frac{2 - Ds + \frac{(-Ds)^2}{2!} + \frac{(-Ds)^3}{3!}}{2 + Ds + \frac{(Ds)^2}{2!} + \frac{(Ds)^3}{3!}} = \frac{num}{den} \quad (2.11)$$

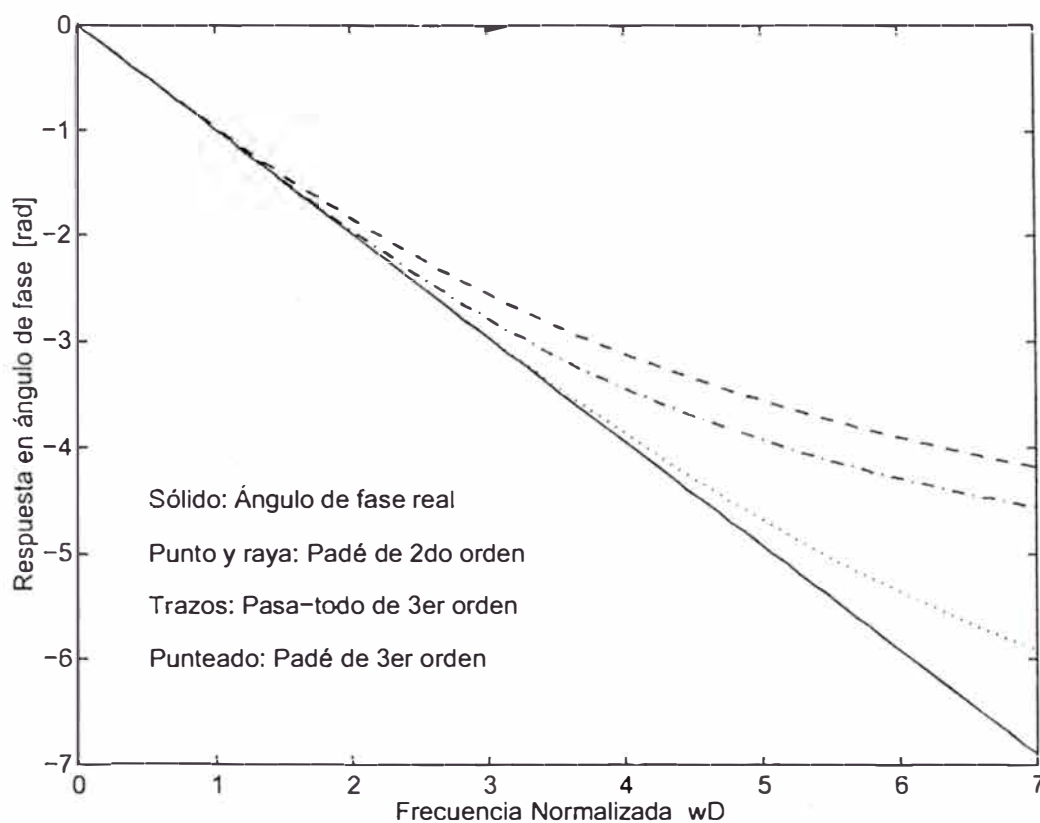


Figura 2.4: Comparación de las respuestas en fase de varias aproximaciones racionales de la FT  $e^{-sD}$ .

donde  $num$  es el polinomio del numerador mientras que  $den$  es el polinomio del denominador. Habiendo elegido la función racional para  $D$ , queda aún la interrogante acerca de qué tan efectiva es dicha aproximación para capturar los efectos del tiempo muerto real. La figura 2.5 ilustra la respuesta del modelo aproximado del sistema columna de destilación; es decir, la respuesta del sistema con todos sus tiempos muertos reemplazados por aproximaciones racionales de Padé de tercer orden. Para obtener estas respuestas, ejecutar el programa `rptacsca.m`, cuyo listado se encuentra en el Anexo A. Comparando uno a uno las respuestas al escalón mostradas en las figuras 2.2 y 2.5, podemos aseverar que las respuestas al escalón del modelo aproximado del sistema columna de destilación (con los tiempos muertos reemplazados por aproximaciones de Padé de tercer orden), es bastante similar a las respuestas al escalón del modelo con tiempos muertos del sistema en estudio.

Si las respuestas al escalón del sistema columna de destilación y su formulación aproximada son similares, también lo son sus respectivas respuestas

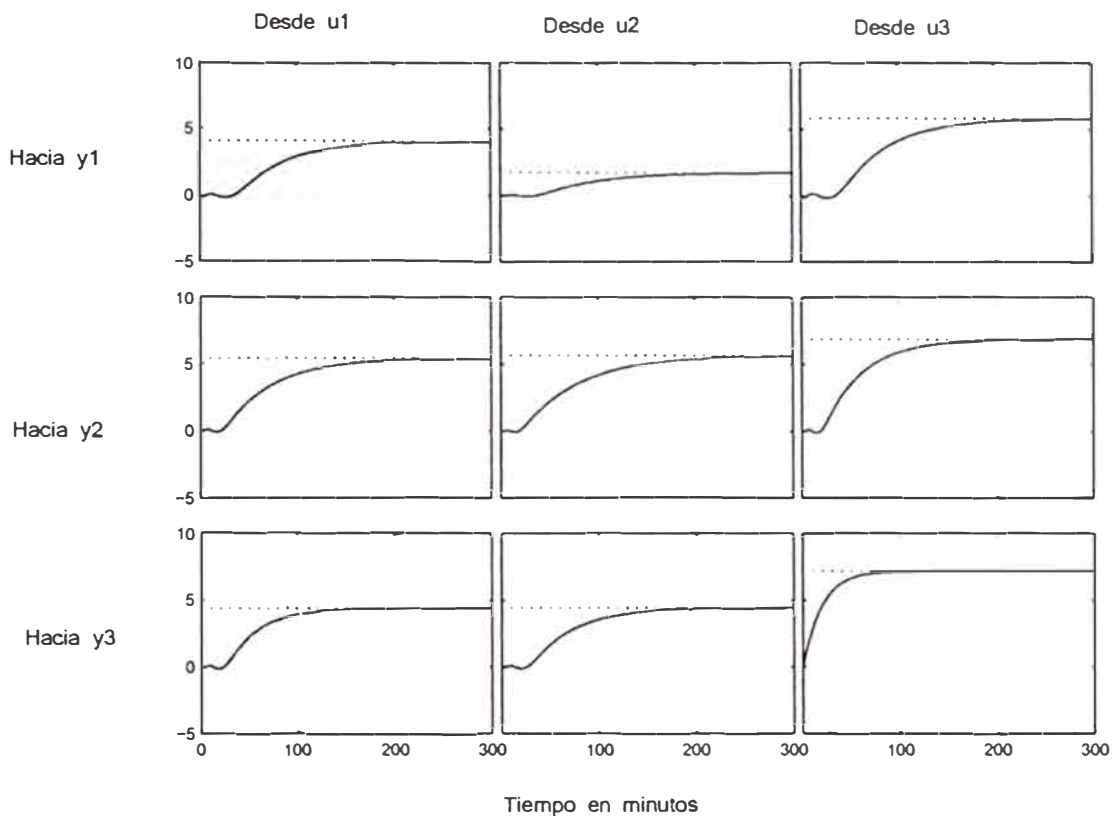


Figura 2.5: Respuesta a lazo abierto del sistema aproximado de la columna de destilación, a una excitación escalón.

al impulso. La figura 2.6 ilustra las correspondientes respuestas al impulso, las cuales demuestran que las respuestas generadas por el sistema aproximado son muy similares a las respuestas generadas por el sistema con tiempos muertos original. Para obtener estas respuestas, ejecutar el programa impulso.m, cuyo listado se encuentra en el Anexo A.

### Determinación de la Ecuación de Estado del Sistema

Para determinar la ecuación de estado del sistema, emplearemos las funciones del paquete MATLAB en la forma siguiente. Las FT's  $e^{-sD}$  se modelan con la siguiente aproximación de Padé:

$$[ndelayij, ddelayij] = pade(D, ord)$$

donde  $D$  es el tiempo muerto,  $ord$  es el orden de la aproximación,  $ndelayij(s)$  es el polinomio en  $s$  del numerador y  $ddelayij(s)$  es el polinomio en  $s$  del denominador.

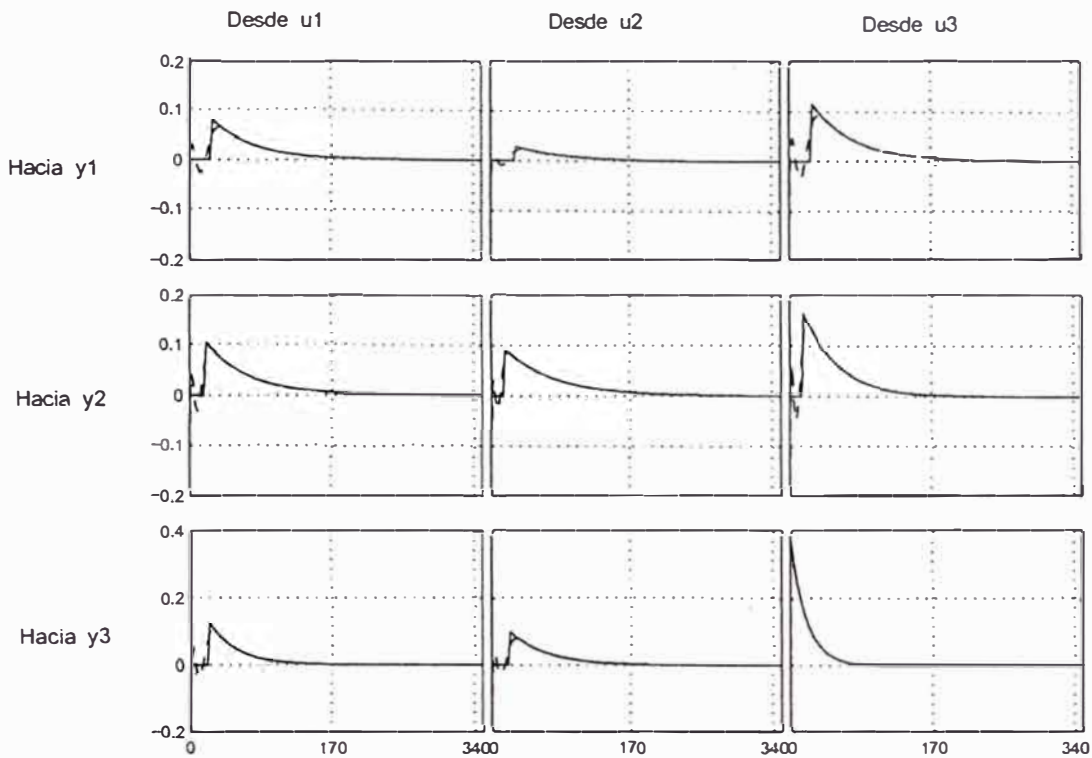


Figura 2.6: Respuesta al impulso del sistema columna de destilación (curvas sólidas) y de su representación aproximada (curvas en trazos).

La siguiente matriz de transferencia:

$$\begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \\ y_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-27p}}{1+50p} & \frac{1.77e^{-28p}}{1+60p} & \frac{5.88e^{-27p}}{1+50p} \\ \frac{5.39e^{-18p}}{1+50p} & \frac{5.72e^{-14p}}{1+60p} & \frac{6.9e^{-15p}}{1+40p} \\ \frac{4.38e^{-20p}}{1+33p} & \frac{4.42e^{-22p}}{1+44p} & \frac{7.2}{1+19p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \end{bmatrix}$$

se puede representar en MATLAB como sigue:

```
num1= {4.05*ndelay11, 1.77*ndelay12, 5.88*ndelay13 ;...
       5.39*ndelay21 ,5.72*ndelay22 , 6.9*ndelay23 ;...
       4.38*ndelay31 ,4.42*ndelay32, 7.2*ndelay33};
den1= {conv(ddelay11,[50 1]),conv(ddelay12, [60 1]),...
       conv(ddelay13,[50 1]); conv(ddelay21,[50 1]),...
       conv(ddelay22,[60 1]),conv(ddelay23,[40 1]);...
       conv(ddelay31,[33 1]), conv(ddelay32,[44 1]),...
       conv(ddelay33,[19 1])};
tf1=tf(num1,den1);
```

donde tf1 es la matriz de transferencia creada. Las matrices de la ecuación de estado multivariable del sistema:  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$ , se obtienen con

los comandos siguientes:

$$ss1 = ss(tf1); \quad A = ss1.a; \quad B = ss1.b; \quad C = ss1.c; \quad D = ss1.d;$$

La ecuación de estado discreta para un tiempo de muestreo  $t_s = 0.1$  minutos se obtiene empleando el comando;

$$[G, H, Cd, Dd] = c2dm(A, B, C, D, ts);$$

La ecuación de estado discreta tiene la forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k) \quad \mathbf{y}(k) = C_d\mathbf{x}(k) + D_d\mathbf{u}(k)$$

donde  $k = t/t_s$  es el tiempo discreto. Cabe anotar que las matrices en juego poseen las dimensiones siguientes:  $A$  y  $G$  son matrices de 33 filas y 33 columnas,  $B$  y  $H$  son matrices de 33 filas y 3 columnas,  $C$  y  $C_d$  son matrices de 3 filas y 33 columnas y  $D$  es una matriz de 3 filas y 3 columnas. Todos los elementos de  $D$  son ceros.

## CAPÍTULO III

### EL CONTROLADOR MIMO ÓPTIMO

#### 3.1 El Regulador SISO Óptimo Proporcional–Integral

En este estudio emplearé el controlador multivariable óptimo cuadrático discreto estacionario para regular la columna de destilación para fraccionamiento de petróleo. La configuración del sistema de control empleada corresponde a la del regulador óptimo proporcional–integral mostrado en la figura 3.1 [3], [6], en donde se puede notar que se ha incluido un integrador discreto. Es necesario anotar que en esta configuración, tanto la señal de salida, como la señal de control (así como también la señal de referencia) son escalares. Por ello el regulador de la figura 3.1 es del tipo SISO (Single–Input–Single–Output). El integrador se incluye fundamentalmente para eliminar los errores en estado estable. Es decir, para hacer que la diferencia entre la salida  $y(k)$  y la referencia  $r(k)$  sea nula en el estado estable.

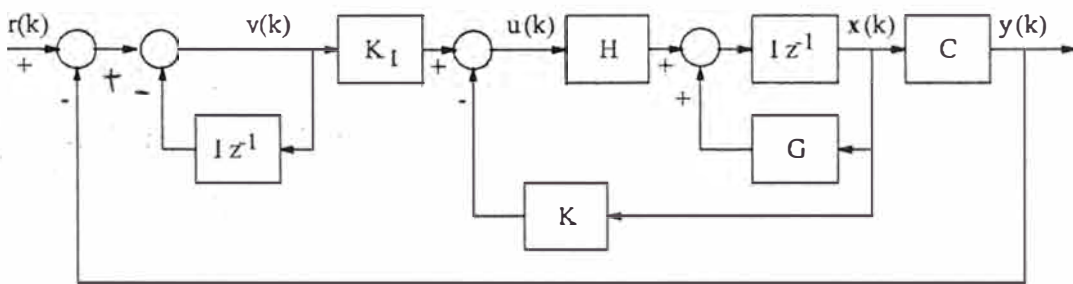


Figura 3.1: El regulador SISO óptimo proporcional–integral.

De la figura 3.1 podemos deducir que:

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k) \quad y(k) = C\mathbf{x}(k) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}(k) = -K\mathbf{x}(k) + K_I v(k) \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{x}(k)$  es el vector de estado del sistema de orden  $n$ ,  $y(k)$  es la salida escalar

controlada del sistema,  $u(k)$  es la señal o fuerza de control,  $v(k)$  es la señal de salida del integrador,  $G$  es la matriz de estado de orden  $n \times n$ ,  $H$  es la matriz de control de orden  $n \times 1$ ,  $C$  es la matriz de salida de orden  $1 \times n$ ,  $K_I$  es la ganancia del integrador, y  $K$  es la matriz ganancia del controlador de orden  $1 \times n$ . La matriz de ganancia  $K$  posee la forma:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

De la figura 3.1 podemos formular la ecuación que describe al integrador discreto:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (3.4)$$

En el tiempo  $v(k+1)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - C[Gx(k) + Hu(k)] \\ &= (1 - CHK_I)v(k) + (-CG + CHK)x(k) + r(k+1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Usando (3.1) y (3.2), es fácil deducir que:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + H[-Kx(k) + K_I v(k)] \\ &= (G - HK)x(k) + H K_I v(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Las ecuaciones (3.5) y (3.6) producen:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \quad (3.7)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

En el estado de equilibrio (cuando  $k \rightarrow \infty$ ), las variables  $x(k)$ ,  $u(k)$  y  $v(k)$  toman sus valores estacionarios  $x(\infty)$ ,  $u(\infty)$  y  $v(\infty)$ , respectivamente, haciendo que la ecuación (3.7) tome la forma:

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Definamos:

$$x(k) - x(\infty) = x_e(k) \quad (3.10)$$

$$v(k) - v(\infty) = v_e(k) \quad (3.11)$$

Restemos ahora (3.9) de (3.7). Luego, usemos las ecuaciones (3.10) y (3.11) para obtener:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La forma compacta de la ecuación (3.12) es:

$$\xi(k+1) = \tilde{G}\xi(k) + \tilde{H}w(k) \quad w(k) = -\tilde{K}\xi(k) \quad (3.13)$$

donde:

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} & \tilde{G}(k) &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \\ \tilde{H}(k) &= \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} & \tilde{K}(k) &= \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notar que el vector de estado  $\mathbf{x}(k)$  del sistema original es de orden  $n$ , mientras que el vector de estado  $\xi(k)$  del regulador SISO proporcional-integral es de orden  $(n+1)$ , debido a la presencia del integrador.

Para resolver el problema del control óptimo cuadrático discreto estacionario, debemos minimizar la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\xi(k)^T \tilde{Q}\xi(k) + w^2(k)\tilde{R}] \quad (3.14)$$

Los métodos de minimización que pueden ser aplicados son, entre otros, los multiplicadores de Lagrange y el principio de optimalidad. En este estudio sólo nos vamos a referir a los resultados del proceso de minimización, el cual produce las expresiones de la matriz de ganancia  $\tilde{K}$  del controlador y la ecuación de Riccati asociada; a saber:

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (3.15)$$

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (3.16)$$

donde  $\tilde{P}$  es una matriz simétrica definida positiva de dimensión  $(n+1) \times (n+1)$  la cual es solución de la ecuación matricial de Riccati asociada.



### 3.2 Controlabilidad y Observabilidad

La condición necesaria para poder aplicar el control por realimentación de estados deducido, a saber:

$$w(k) = -\tilde{K}\xi(k)$$

es que el sistema sea completamente controlable; es decir, que los los estados del sistema puedan ser transferidos desde un estado inicial arbitrario a cualquier otro estado deseado, empleando para ello un tiempo finito. La condición necesaria y suficiente es que el sistema en estudio sea completamente controlable. Matemáticamente, esta condición impone que la siguiente matriz de controlabilidad  $M$  del sistema:

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{H} & \tilde{G}\tilde{H} & \dots & \tilde{G}^{n-1}\tilde{H} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

sea de rango completo; es decir, el rango de  $M$  debe ser igual a  $n + 1$  (el orden del sistema).

La realimentación de estados requiere además que todos los estados sean disponibles para procesamiento. Tales estados pueden ser obtenidos, ya sea por medición o por estimación de estados. Esta estimación puede ser realizada empleando filtros de Kalman u observadores de estado, tal como veremos en el siguiente capítulo. El requerimiento del observador (o del filtro de Kalman), es que el sistema sea completamente observable; es decir, sus estados se pueden reconstruir completamente a partir de las observaciones (mediciones del proceso). Matemáticamente, la observabilidad implica que la siguiente matriz de observabilidad:

$$N = \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}\tilde{G} & \dots & \tilde{C}\tilde{G}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

posea rango  $n + 1$  (el orden del sistema en estudio aumentado).

### 3.3 El Regulador MIMO Óptimo Proporcional–Integral

La configuración del regulador óptimo proporcional–integral mostrado en la figura 3.1, también puede ser empleada para sistemas MIMO (Multiple–Input–Multiple–Output). Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un regulador MIMO proporcional–integral se pueden formular por extensión. Esto es, la ecuación de estado del sistema MIMO viene a ser (ver figura 3.1):

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad y(k) = Cx(k) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{u}(k) = -K\mathbf{x}(k) + K_I\mathbf{v}(k) \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{x}(k)$  es el vector de estado del sistema de orden  $n$ ,  $\mathbf{y}(k)$  es el vector de salida de orden  $m$ ,  $\mathbf{u}(k)$  es el vector de control de orden  $m$ ,  $\mathbf{v}(k)$  es el vector de salida del integrador de orden  $m$ ,  $G$  es la matriz de estado de orden  $n \times n$ ,  $H$  es la matriz de control de orden  $n \times m$ ,  $C$  es la matriz de salida de orden  $m \times n$ ,  $K_I$  es la matriz de ganancia del integrador de orden  $m \times m$ , y  $K$  es la matriz ganancia del controlador de orden  $m \times n$ . La matriz de ganancia  $K$  posee ahora la forma:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ K_{m1} & K_{m2} & \cdots & K_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Del mismo modo, de la figura 3.1, podemos formular la ecuación que describe al vector integrador discreto:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k-1) + \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k) \quad (3.22)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de referencia de orden  $m$ . Operando como en el caso SISO, se puede demostrar que la forma compacta de la ecuación (3.12), pero para el caso MIMO es (ver (3.23)):

$$\xi(k+1) = \tilde{G}\xi(k) + \tilde{H}\mathbf{w}(k) \quad \mathbf{w}(k) = -\tilde{K}\xi(k) \quad (3.23)$$

donde:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ \mathbf{v}_e(k) \end{bmatrix} \quad \tilde{G}(k) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \quad \tilde{K}(k) = [K \quad -K_I]$$

con:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(k)$$

$$\mathbf{v}(k) - \mathbf{v}(\infty) = \mathbf{v}_e(k)$$

Por extensión, para resolver el problema del control óptimo cuadrático discreto estacionario, debemos minimizar la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\xi(k)^T \tilde{Q}\xi(k) + \mathbf{w}^T(k) \tilde{R}\mathbf{w}] \quad (3.24)$$

donde el vector de entrada  $w$  es de orden  $m + n$ . El resultado del proceso de minimización, produce las expresiones de la matriz de ganancia  $\tilde{K}$  del controlador y la ecuación de Riccati asociada, es decir (comparar con las ecuaciones (3.15) y (3.16)):

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (3.25)$$

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (3.26)$$

donde  $\tilde{P}$  es una matriz simétrica definida positiva de dimensión  $(n+m) \times (n+m)$ ,  $\tilde{Q}$  es una matriz simétrica semidefinida positiva de dimensión  $(n+m) \times (n+m)$  y  $\tilde{R}$  es una matriz simétrica definida positiva de dimensión  $m \times m$ .

Como en el caso SISO, la condición necesaria para poder aplicar el control por realimentación de estados deducido, a saber:

$$w(k) = -\tilde{K}\xi(k)$$

es que el sistema sea completamente controlable. Matemáticamente, esta condición impone que la matriz de controlabilidad  $M$  dada en (3.17) posea rango  $n+m$ .

La realimentación de estados empleada en la ley de control requiere además que todos los estados sean disponibles, ya sea por medición o por estimación. Cuando se usa un observador óptimo, el requerimiento es que el sistema sea completamente observable, lo cual implica que la matriz de observabilidad dada en (3.18) posea rango  $n + m$ .

En el capítulo II determinamos que para el sistema columna de destilación que nos ocupa,  $A$  y  $G$  son matrices de 33 filas y 33 columnas,  $B$  y  $H$  son matrices de 33 filas y 3 columnas,  $C$  y  $C_d$  son matrices de 3 filas y 33 columnas y  $D$  es una matriz de 3 filas y 3 columnas, donde los elementos de  $D$  son ceros. Las matrices aumentadas poseen las dimensiones siguientes:  $\tilde{G}$  es una matriz de 36 filas y 36 columnas,  $\tilde{H}$  es una matriz de 36 filas y 3 columnas, y la matriz de salida  $\tilde{C} = [C \ 0]$  posee 3 filas y 36 columnas.

### 3.4 Sistemas Multivariables Cuadrados

Es importante remarcar que el sistema en estudio es del tipo cuadrado. Es decir, en dicho sistema, el número de entradas es igual al número de salidas.

Bajo el punto de vista de control, un sistema puede ser controlado, siempre que el número de entradas independientes al sistema sea mayor o igual que el

número de salidas. En esta situación, cuando el número de salidas es menor que el número de entradas, siempre es posible construir un sistema cuadrado que sea controlable. Basta con crear salidas ficticias para que el número de salidas iguale al número de entradas.

En cambio, si el número de entradas del sistema es menor que el número de salidas (estos sistemas se denominan subactuados), entonces dicho sistema en general es incontrolable. En esta situación no se pueden crear entradas ficticias. La filosofía de diseño de sistemas subactuados consiste en generar señales de control, las cuales pueden actuar, conforme a lo establecido en el diseño, simultáneamente o después que actúen las señales de control originales.

## CAPÍTULO IV

### EL OBSERVADOR MIMO ÓPTIMO

#### 4.1 Necesidad de un Observador MIMO

En implementaciones reales de sistemas de control, sólo unas cuantas variables del vector de estado  $\mathbf{x}(k)$  del proceso son susceptibles de ser medidas en forma directa. En el caso que nos ocupa, por ejemplo, sólo se miden las variables  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  de las 33 que conforman el vector de estados.

En tales situaciones, necesitamos estimar dicho vector de estado; es decir, requerimos hallar un vector de estado estimado  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  empleando un observador óptimo discreto de estados. El diseño de dicho observador implica determinar su matriz de ganancia  $K_e$ , que puede ser calculada a partir de la minimización de una función de costo cuadrática. El procedimiento es similar al seguido para determinar la matriz de ganancia del controlador de realimentación de estados (capítulo II). El diagrama de bloques del observador de estados se ilustra en la figura 4.1. Este observador emplea las mediciones de la salida vectorial  $\mathbf{y}(k)$  de orden  $m$  y de la señal de control vectorial  $\mathbf{u}(k)$  de orden  $m$ .

#### 4.2 Diseño del Observador MIMO Óptimo Cuadrático

De la figura 4.1 deducimos:

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \quad (4.2)$$

La ecuación del observador discreto toma la forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = G\hat{\mathbf{x}}(k) + H\mathbf{u}(k) + K_e[\mathbf{y}(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (4.3)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  es el vector de estado estimado de dimensión  $n$ ,  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  representa el vector de salida estimado de dimensión  $m$ ,  $K_e$  es la matriz de ganancia de realimentación del observador con dimensión  $n \times m$  y  $C$  es la matriz de salida de

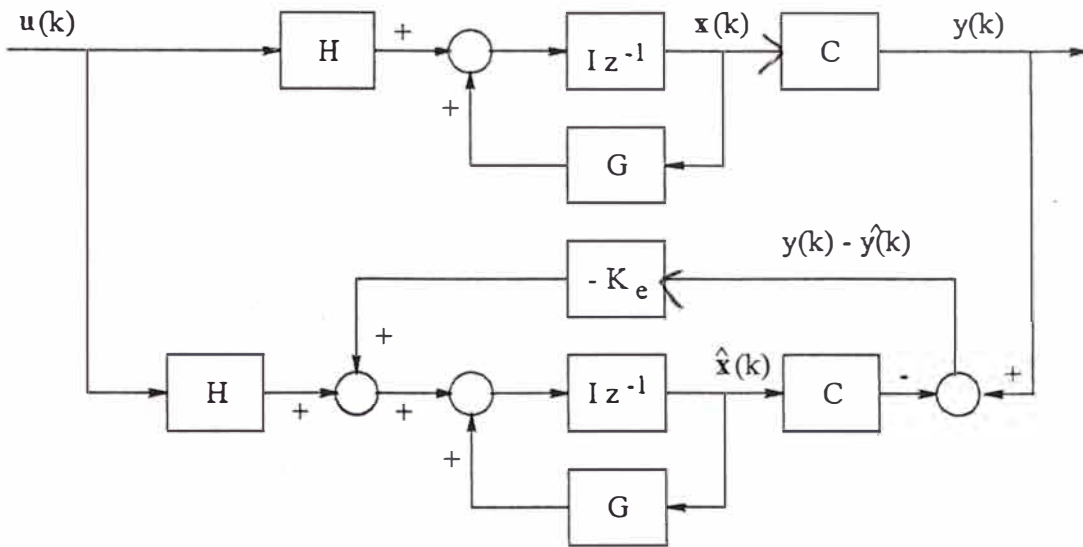


Figura 4.1: Diagrama de bloques del observador de estados

dimensión  $m \times n$ . Reemplazando la ecuación (4.2) en (4.3) y restando la ecuación resultante de (4.1), dá como resultado la ecuación del error del observador:

$$e(k+1) = [G - K_e C]e(k); \quad e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (4.4)$$

La ecuación característica correspondiente es:

$$\det[zI - G + K_e C] = 0 \quad (4.5)$$

en donde la matriz  $K_e$  debe ser escogida para que el error tienda a cero con una velocidad suficientemente alta. Este observador tendrá comportamiento estable si es que las las raíces de su ecuación característica, se posicionan dentro del círculo unitario.

En el capítulo anterior recalcamos que el observador que nos ocupa requiere que el proceso sea completamente observable. Ya es conocido que el criterio para observabilidad completa, la siguiente matriz de observabilidad:

$$N = [ C^T \quad G^T C^T \quad \dots \quad (G^T)^{n-1} C^T ] \quad (4.6)$$

debe poseer  $n$  (rango completo). Es decir, el rango de  $N$  debe ser igual al orden del proceso.

Para calcular la matriz  $K_e$  emplearemos el concepto de dualidad. Dado que el determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales, podemos

modificar la forma de la ecuación (4.5) como sigue:

$$\det[zI - G + K_e C] = \det[(zI - G + K_e C)^T] = \det[zI - G^T + C^T K_e^T] \quad (4.7)$$

La comparación de la ecuación característica del controlador de estados:

$$\det[zI - G + HK]$$

con la ecuación (4.7), nos induce a efectuar las siguientes modificaciones:

$$G \rightarrow G^T; \quad H \rightarrow C^T; \quad K \rightarrow K_e^T \quad (4.8)$$

Empleando tales modificaciones en las estructuras de la ecuación de estado del proceso  $\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k)$ , de su ecuación de salida  $y(k) = C\mathbf{x}(k)$  y de su ley de control  $\mathbf{u}(k) = -K\mathbf{x}(k)$ , obtendremos la siguiente ecuación de estado:

$$\alpha(k+1) = G^T \alpha(k) + C^T \beta(k) \quad (4.9)$$

con una ley de control que posee la estructura siguiente:

$$\beta(k) = -K_e^T \alpha(k) \quad (4.10)$$

Ahora, empleando las ecuaciones (4.9) y (4.10) en la función de costo siguiente:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha^T(k) Q_e \alpha(k) + \beta^T(k) R_e \beta(k)] \quad (4.11)$$

entonces la correspondiente ecuación de Riccati toma la forma:

$$P_e = Q_e + G P_e G^T - G P_e C^T [R_e + C P_e C^T]^{-1} C P_e G^T \quad (4.12)$$

y la matriz de ganancia  $K_e$  viene dada por:

$$K_e = [R_e + C P_e C^T]^{-1} C P_e G^T \quad (4.13)$$

Para calcular  $P_e$ , utilizaremos la siguiente ecuación recursiva:

$$P_e(k+1) = Q_e + G P_e(k) G^T - G P_e(k) C^T [R_e + C P_e(k) C^T]^{-1} C P_e(k) G^T \quad (4.14)$$

# CAPÍTULO V

## CONTROL ÓPTIMO DE LA COLUMNA

### 5.1 El Procedimiento de Diseño

Este capítulo sigue el procedimiento de diseño de los sistemas de control óptimo descritos en libro de la referencia [6], a saber:

- 1) Formular el problema determinando las especificaciones de diseño (sección 1.2).
- 2) Determinar el modelo matemático del proceso a controlar. (sección 2.1).
- 3) Calcular la matriz de ganancia óptima  $\tilde{K}$  del controlador (sección 3.3).
- 4) Calcular la matriz de ganancia óptima  $K_e$  del observador (sección 4.2).
- 5) Simular el sistema de control óptimo cuadrático.
- 6) Implementar el hardware del sistema.
- 7) Implementar el software del sistema.
- 8) Realizar pruebas de funcionamiento (obtener resultados experimentales satisfactorios).

En este estudio sólo abarcaremos hasta el punto cinco.

### 5.2 Control MIMO Óptimo Cuadrático del Sistema

En esta sección nos ocuparemos del diseño del control óptimo multivariable cuadrático del sistema columna de destilación para fraccionar petróleo crudo empleando el procedimiento de diseño descrito en la sección anterior.

#### Formulación del Problema

Se pide diseñar un sistema de control óptimo multivariable discreto, cuya configuración comprende una ley de control óptima multivariable cuadrática discreta y un estimador multivariable de estados óptimo discreto. El sistema de



control debe estabilizar las salidas  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  ante la acción de cambios tipo escalón de las señales referencia  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ . Cualesquiera de las señales de control  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  no debe sobrepasar los valores normalizados  $\pm 0.5$  para un cambio tipo escalón de la señal de referencia correspondiente.

El tiempo de estabilización de  $y_1$  debe ser menor de 50 minutos, de  $y_2$  menor de 30 minutos, mientras que de  $y_3$  debe ser menor de 20 minutos. El error en estado estable de las señales controladas debe ser nulo con mínimo sobreimpulso. El sistema de control debe ser capaz de estabilizar las salidas controladas a pesar de las variaciones temporales de cualesquiera de los tiempos muertos. Cabe anotar que para alcanzar las especificaciones de diseño planteadas, se requiere seleccionar adecuadamente las matrices de ponderación, como veremos más adelante.

### El Modelo del Sistema a Controlar

La determinación del modelo matemático del sistema columna de destilación fue tratado con amplitud en la sección 2.1. Para un tiempo de muestreo de 0.1 minutos y asumiendo retención de memoria de orden cero, la ecuación de estado discreta del sistema y su ecuación de salida se determinan ejecutando el programa eestado.m, cuyo listado se muestra en el Anexo A. A manera de ejemplo, la matriz  $H$  tiene la forma:

$$H = \begin{bmatrix} 0.0492 & 0 & 0 \\ 0.0012 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0487 & 0 & 0 \\ 0.0025 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0488 & 0 & 0 \\ 0.0025 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0246 & 0 \\ 0 & 0.0006 & 0 \\ 0 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 \\ 0 & 0.0024 & 0 \\ 0 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

```

0    0.0489    0
0    0.0012    0
0    0.0000    0
0    0.0000    0
0         0    0.0492
0         0    0.0012
0         0    0.0000
0         0    0.0000
0         0    0.0485
0         0    0.0025
0         0    0.0000
0         0    0.0000
0         0    0.0499]

```

### Cálculo de la Matriz de Ganancia del Controlador

En la sección 3.3 vimos que la estructura del regulador a emplear en el diseño del controlador óptimo se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\xi(k+1) = \tilde{G}\xi(k) + \tilde{H}w(k); \quad w(k) = -\tilde{K}\xi(k)$$

donde:

$$\tilde{G}(k) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix}; \quad \tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix}; \quad \tilde{K}(k) = \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix}$$

Como la ganancia óptima del controlador va a ser determinada en forma recursiva, entonces vamos a obviar el cálculo de la controlabilidad del sistema. Para determinar la matriz de ganancia  $\tilde{K}$  del controlador de realimentación de acuerdo a lo establecido en la sección 3.3, seleccionamos primero las matrices de ponderación  $\tilde{R}$  y  $\tilde{Q}$ , empleando notación MATLAB, como sigue:

```

nG = 33; nU = 3;
Q = eye(nG+nU); % MATRIZ IDENTIDAD DE 36 FILAS Y 36 COLUMNAS
Q(4,4)=0;      Q(8,8)=0;      Q(12,12)=0;
R = 70*eye(nU);

```

En la matriz  $\tilde{Q}$  observamos que se esta eliminando la acción de los estados correspondientes a las posiciones 4, 8 y 12 de un total de 36 variables de estado. Por otra parte, a todas las entradas de control se le está dando un peso de **70** (ver matriz R).

Para calcular la matriz  $\tilde{K}$  debemos resolver la ecuación de Riccati (3.15) pero en su forma recursiva:

$$\tilde{P}(k+1) = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P}(k) \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P}(k) \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P}(k) \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P}(k) \tilde{G} \quad (5.1)$$

Conocida la matriz  $\tilde{P}$ , podemos ahora calcular la matriz  $\tilde{K}$  empleando la siguiente fórmula:

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} = [K \quad -K_I]$$

El programa gancon.m escrito en MATLAB, cuyo listado se encuentra en el Anexo A, computa la matriz de ganancia óptima del controlador. Esta ganancia resulta una matriz de 3 filas y 36 columnas.

### Cálculo la Matriz de Ganancia del Observador

Obviando la determinación de la observabilidad del sistema, debido a que la ganancia del observador va a ser determinada empleando computación recursiva, pasamos a calcular la matriz de ganancia  $K_e$  del observador óptimo (sección 4.2). Previamente debemos seleccionar las matrices de ponderación  $R_e$  y  $Q_e$ . Estas matrices en notación MATLAB son:

```
Qo=eye(33,33); % MATRIZ IDENTIDAD DE 33 FILAS Y 33 COLUMNAS
Ro=eye(3,3); % MATRIZ IDENTIDAD DE 3 FILAS Y 3 COLUMNAS
```

El cálculo de la matriz de ganancia del observador  $K_e$  requiere el cálculo previo y en forma recursiva de la matriz  $P_e$  a partir de:

$$P_e(k+1) = Q_e + G P_e(k) G^T - G P_e(k) C^T [R_e + C P_e(k) C^T]^{-1} C P_e(k) G^T$$

Luego, la matriz de ganancia  $K_e$  se calcula con la ecuación:

$$K_e = [R_e + C P_e C^T]^{-1} C P_e G^T$$

El programa ganobs.m escrito en MATLAB, cuyo listado se encuentra en el Anexo A, computa la matriz de ganancia óptima del observador. El resultado es una matriz de 3 filas por 33 columnas.

### 5.3 Simulación del Sistema de Control Óptimo

Empleando los resultados de los cálculos anteriores, podemos entrar ahora a la fase de simulación del sistema de control óptimo cuadrático, antes de iniciar su implementación en tiempo real. El programa conpi.m, cuyo listado se encuentra en el Anexo A, además de efectuar todos los cálculos anteriores, realiza la

simulación del sistema controlado empleando una ley de control óptima con observación óptima de estados. En esta simulación, todos los tiempos muertos han sido incrementados entre 35 y 42 % con respecto a sus valores originales. Los resultados de la simulación se pueden observar en las figuras 5.1 y 5.2.

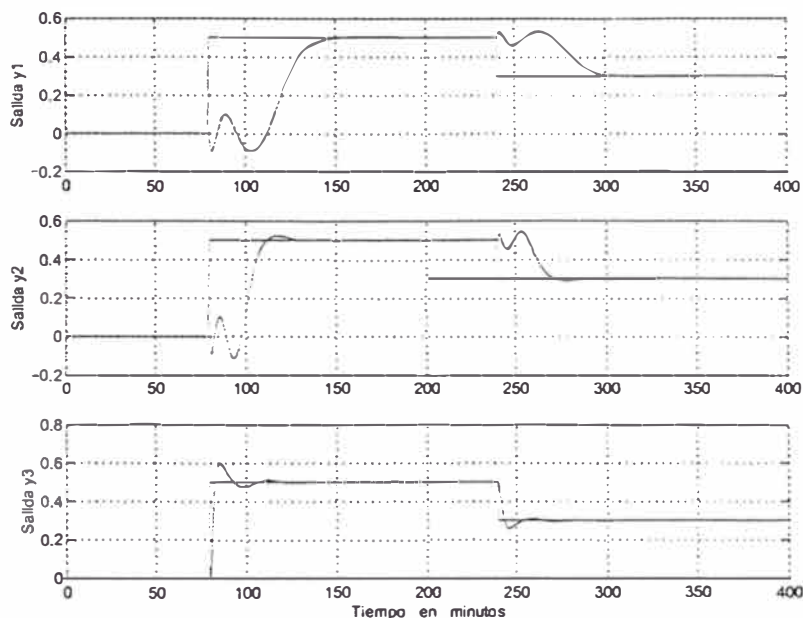


Figura 5.1: Salidas controladas del sistema columna de destilación. Todos los tiempos muertos han sido incrementados entre 35 y 42 % con respecto a su valor original.

En la siguiente simulación, todos los tiempos muertos han sido disminuidos entre 30 y 40 % con respecto a sus valores originales. Los resultados de la simulación se pueden observar en las figuras 5.3 y 5.4. Es interesante observar que cuando el efecto de los tiempos muertos es menor, es decir, cuando sus magnitudes disminuyen, el rendimiento del sistema mejora: menor tiempo de estabilización, menor oscilación en la señal controlada en la transición inicial y tendencia a que los sobreimpulsos de las salidas disminuyan. Estos resultados y otros más se discuten en las conclusiones.

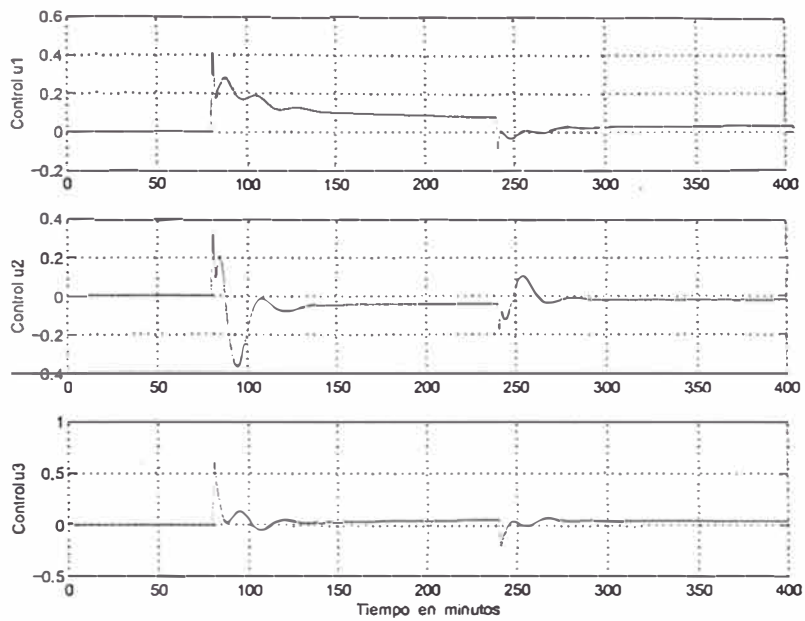


Figura 5.2: Señales de control del sistema columna de destilación. Todos los tiempos muertos han sido incrementados entre 35 y 42 % con respecto a su valor original.

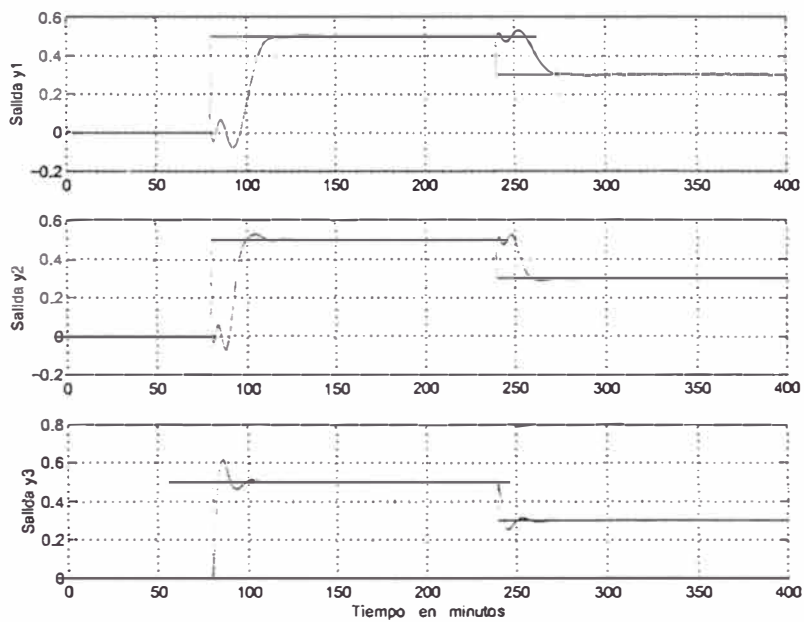


Figura 5.3: Salidas controladas del sistema columna de destilación. Todos los tiempos muertos han sido disminuidos entre 30 y 40 % con respecto a su valor original.

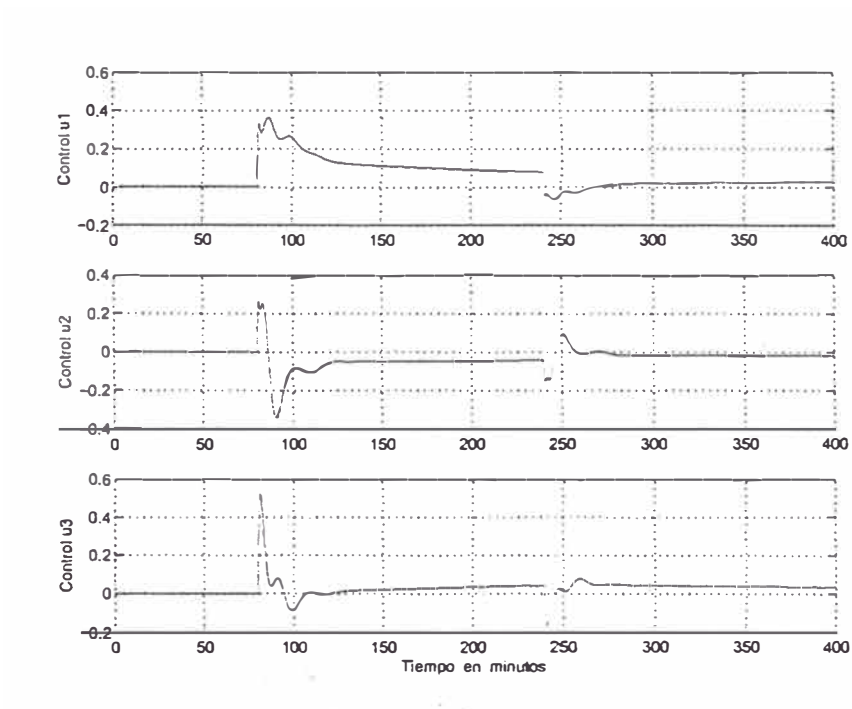


Figura 5.4: Señales de control del sistema columna de destilación. Todos los tiempos muertos han sido disminuídos entre 30 y 40 % con respecto a su valor original.

## CONCLUSIONES

El procedimiento de diseño desarrollado en este estudio, permite diseñar sistemas de control óptimo cuadráticos con la capacidad de controlar sistemas multivariantes que poseen múltiples tiempos muertos. Estos tiempos muertos pueden ser o no variantes con el tiempo.

El sistema de control óptimo diseñado y aplicado a una columna de destilación multivariable, resultó exitoso, e incluso ha superó el rendimiento logrado con un controlador predictivo multivariable. Con el sistema de control óptimo, los tiempos de estabilización que se obtienen para las salidas  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  son 45, 30 y 20 minutos respectivamente, mientras que con el sistema de control predictivo diseñado en la referencia [1] (páginas 155–159), los tiempos de estabilización que se logran para las mismas salidas son 120, 100 y 80 minutos respectivamente. Se entiende que con tales tiempos de estabilización, aún se siguen cumpliendo las otras especificaciones de diseño: limitación de las entradas de control y mínimo sobreimpulso en las señales controladas.

El tiempo de muestreo empleado es de 0.1 minutos. Este tiempo es suficiente para poder implementar en tiempo real el sistema de control óptimo discreto diseñado. No obstante, si permitimos que el tiempo de establecimiento sea algo mayor, por ejemplo, 60 o 70 minutos, entonces de acuerdo a las simulaciones, el tiempo de muestreo puede ser mayor.

Los resultados obtenidos en las figuras 5.1 y 5.3, demuestran que el sistema de control óptimo diseñado es capaz de estabilizar las salidas controladas, a pesar de que se experimenten cambios tipo escalón en las señales de referencia, o que los tiempos muertos sufran variaciones temporales simultáneas. En los resultados obtenidos con la figura 5.1, todos los tiempos muertos se incrementaron entre 35 y 42 % con respecto a su valor original, mientras que en los resultados obtenidos con la figura 5.3, todos los tiempos muertos decrecieron entre 30 y 40 % con respecto a su valor original.

Para demostrar la robustez con respecto a variaciones extremas del tiempo muerto, podemos realizar la siguiente simulación: que todos los tiempos muer-

tos se incrementen en aproximadamente 700 % con respecto a su valor original (ecuación (2.5)). El resultado de esta simulación se muestra en las figuras 5.5 y 5.6. Dichas figuras revelan que a pesar de la tremenda variación de los tiempos muertos, el sistema de control sigue estabilizando las salidas controladas. Notar que las restricciones impuestas a las señales de control se mantienen,

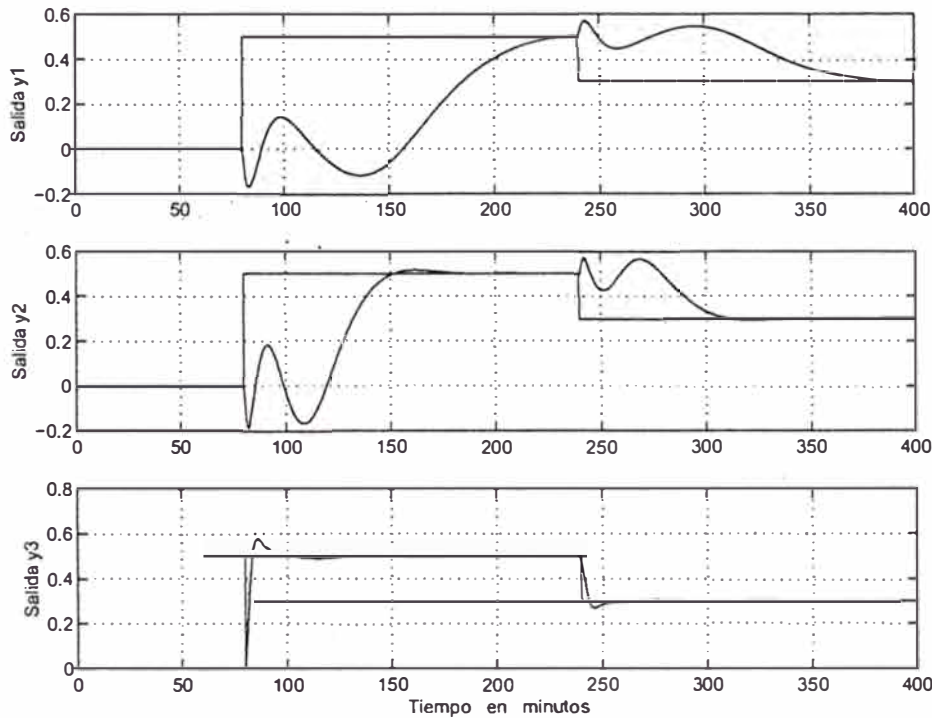


Figura 5.5: Salidas controladas del sistema columna de destilación. Todos los tiempos muertos han sido incrementados en 350 % en promedio, con respecto a su valor original.

### Implementación del Sistema de Control de la Columna

Existen varias configuraciones para la implementación en tiempo real del sistema de control óptimo de la columna de destilación. Todas las configuraciones necesitan desarrollar el software de control ad-hoc para la implementación. Tener presente que muchas de las leyes de control avanzado, aún no están comercializados en masa, como sí lo están los controladores tipo PID.

Una primera configuración en tiempo real del sistema, puede incluir una tarjeta de desarrollo DSP (“Digital Signal Processor”) que trabaje en conjunto con la parte de electrónica de potencia para la amplificación de la señal de control. Dicha tarjeta, que debe manejar simultáneamente tres entradas y tres salidas (continuas), requiere ser programada en lenguaje de máquina o en C/C++ en la



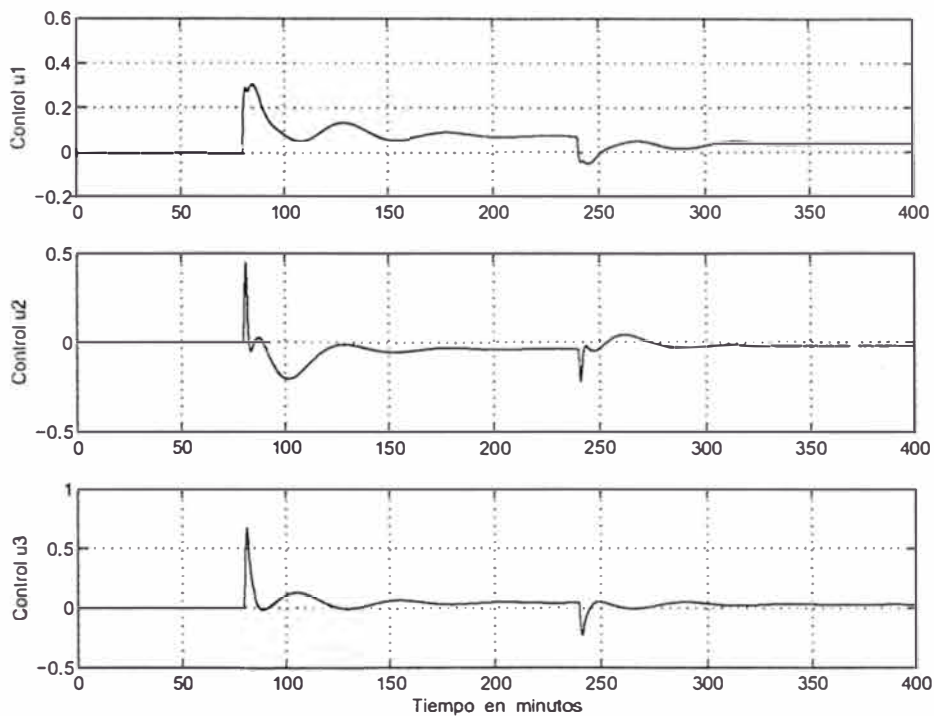


Figura 5.6: Señales de control del sistema columna de destilación. Todos los tiempos muertos han sido incrementados en 350 % en promedio con respecto a su valor original.

mayoría de los casos. Tarjetas actuales también permiten realizar los acondicionamientos de señal necesarios.

Una segunda configuración es emplear una PC industrial que permita manejar simultáneamente tres entradas y tres salidas (continuas). Cuando se tienen computadoras personales disponibles, como acontece en la mayoría de las plantas industriales, entonces resulta recomendable usar esta opción. En este caso, la PC puede ser usada como dispositivo de programación y visualización, tal como se muestra en la figura 5.7. Nosotros usaremos esta configuración en el proyecto de implementación que se describe a continuación.

Asumamos en principio que la columna de destilación está operando con técnicas clásicas de control. Es decir, empleando sistemas de control independientes y controladores PI. Esto es, cada variable de control se regula sin tener en cuenta en forma directa la influencia que puedan tener los otros sistemas de control.

La implementación del sistema de control óptimo multivariable en el sistema en estudio, puede llevarse a cabo considerando el uso de los componentes ya

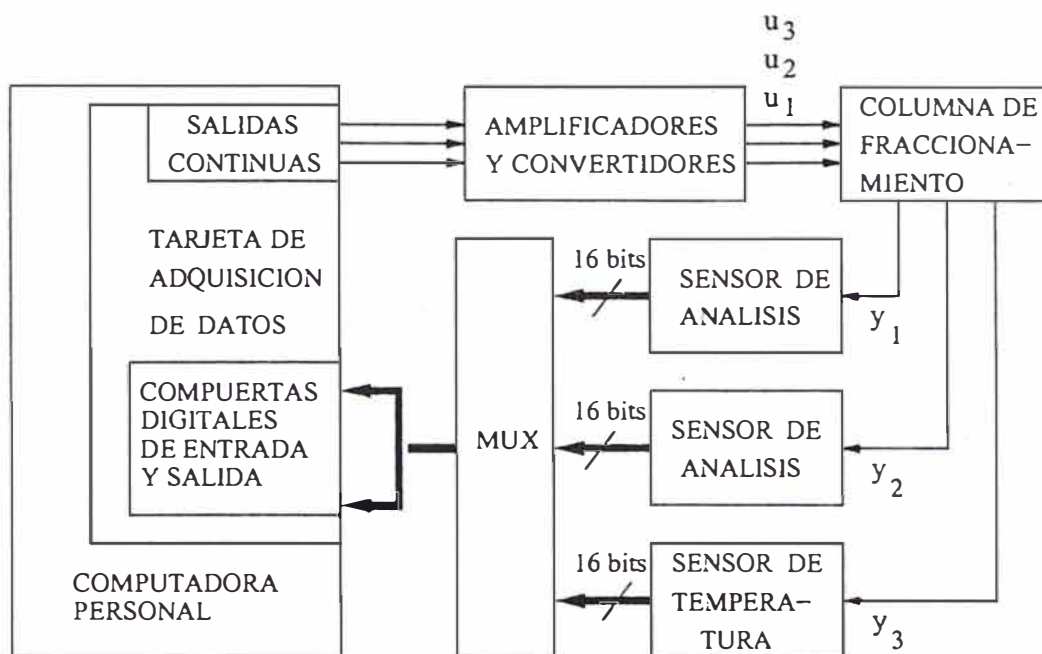


Figura 5.7: Implementación del sistema de control óptimo para la columna de destilación.

existentes. En este caso, todas las mediciones se conducirán a la PC. Asumamos que el sistema controlado clásicamente cuenta con los siguientes componentes (ver figura 5.7):

- 1) Lazo de control de producto de cabeza: válvula de control, transmisor de flujo y controlador.
- 2) Lazo de control del producto lateral: válvula de control, transmisor de flujo y controlador.
- 3) Lazo de control de temperatura de fondos: válvula de control transmisor de temperatura, transmisor de flujo (para medición) y controlador.
- 4) Lazo de control del nivel de fondos: válvula de control, transmisor de nivel y controlador.
- 5) Lazo de control del nivel de la columna de evaporización: válvula de control, transmisor de nivel y controlador.
- 6) Lazo de control del nivel del condensador: válvula de control, transmisor de nivel y controlador.

Para implementar los lazos del sistema de control óptimo se requiere adquirir los equipos medidores (analizadores) en línea de las concentraciones de los productos de cabeza ( $y_1$ ) y lateral ( $y_2$ ), porque así lo requiere la estrategia de control

del sistema diseñado. Para el procesamiento de las señales, asumiendo que los lazos de control existentes son del tipo neumático, se requiere: un convertidor de presión a corriente para la variable  $y_3$  (temperatura de fondos) y tres convertidores de corriente a presión para las señales de control  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ .

Uno de los requerimientos primordiales para implementar el sistema de control óptimo multivariable, es que en los controladores de lazo de las variables manipuladas (las variables de control  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ ), sus entradas dispuestas para las señales de referencia (o 'set-points'), deben aceptar entradas de referencia remotas y variables con el tiempo. En el caso que nos ocupa, las señales de referencia de los lazos de control de las variables  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  son las señales  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ , las cuales se originan por software en la PC.

El costo de implementación del sistema de control óptimo teniendo en cuenta los considerandos anteriores, resulta:

- 1) Una PC Industrial: US \$ 3000
  - 2) Dos analizadores de concentración de petróleo: US \$ 6000
  - 3) Cuatro convertidores de señal: US \$ 2400
  - 4) Desarrollo del software: US \$ 3000
  - 5) Costos de instalación y de puesta en operación: US \$ 2000
- Gran total: US \$ 16400

### Trabajos Futuros

El sistema de control óptimo diseñado, es para un tiempo de muestreo de 0.1 minutos. Este sistema soporta tiempos muertos hasta de 39 minutos. Para tiempos muertos mayores de 39 minutos, el tiempo de establecimiento crece. Es decir, el sistema de control sigue estabilizando la salida, pero fuera de las especificaciones de diseño. Con  $D \geq 100$  minutos, el sistema sale fuera de control. Entonces, el sistema diseñado se muestra bastante robusto con respecto a la variación de los tiempos muertos.

Con propósitos de comparación, se pueden emplear otras técnicas de control: control robusto multivariable discreto basado en la técnica de control con modelo interno, control multivariable empleando una ley de control por ubicación de polos, entre otras.

El tiempo de muestreo de 0.1 minutos es suficiente para realizar los cálculos computacionales en cada muestra requerido por el sistema diseñado. Este tiempo

puede ser mayor si se las especificaciones de diseño se hacen menos rigurosas. Con un tiempo de muestreo de 1 minuto, se pueden acomodar tiempos de estabilización de 100 minutos, lo cual es todavía aceptable por el sistema en estudio. Si este es el caso, entonces se pueden introducir otras técnicas de control del tipo adaptivo, tales como sistemas de control adaptivo con autosintonización y sistemas de control adaptivo con un modelo referencial. Vale la pena efectuar estos estudios para comparar sus resultados con respecto a los sistemas de control fijos (no adaptivos).

## ANEXO A

### LISTADO DE PROGRAMAS

#### Programas del Capítulo II

```
% rptaesca.m RESPUESTA AL ESCALON DEL SISTEMA COLUMNA DE
% DESTILACION PARA FRACCIONAR PETROLEO
clear all

num= {4.05, 1.77, 5.88 ;...
      5.39 ,5.72 , 6.9 ;...
      4.38 ,4.42, 7.2};
den= {[50 1], [60 1] , [50 1];...
      [50 1], [60 1] , [40 1];...
      [33 1], [44 1] , [19 1]};
tf0=tf(num,den); %funcion de transferencia sin retardo
tf0.iodelaymatrix=[27, 28, 27; 18 ,14 ,15; 20 ,22 ,0];

step(tf0); % EDITAR (TRADUCIR LAS PALABRAS) LA FIGURA
           % ANTES DE GUARDARLA
print -deps -f rptaesca

% rptaesca.m RESPUESTA AL ESCALON DEL SISTEMA APROXIMADO COLUMNA DE
% DESTILACION PARA FRACCIONAR PETROLEO
clear all clc
% MODELADO DE LOS TIEMPOS MUERTOS USANDO PADE DE TERCER ORDEN
ord=3; D=20; % D=14;
[ndelay11,ddelay11]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay12,ddelay12]=pade(2*D,ord);
[ndelay13,ddelay13]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay21,ddelay21]=pade(D+4,ord);
[ndelay22,ddelay22]=pade(D,ord);
[ndelay23,ddelay23]=pade(D+1,ord);
[ndelay31,ddelay31]=pade(D+6,ord);
[ndelay32,ddelay32]=pade(D+8,ord);
[ndelay33,ddelay33]=pade(0,ord);
% CALCULO DEL NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA
num1= {4.05*ndelay11 , 1.77*ndelay12, 5.88*ndelay13 ;...
      5.39*ndelay21 ,5.72*ndelay22 , 6.9*ndelay23 ;...
      4.38*ndelay31 ,4.42*ndelay32, 7.2*ndelay33};
den1= {conv(ddelay11,[50 1]),conv(ddelay12, [60 1]),...
```

```

        conv(ddelay13,[50 1]);conv(ddelay21,[50 1]),...
        conv(ddelay22,[60 1]),conv(ddelay23,[40 1]);...
        conv(ddelay31,[33 1]), conv(ddelay32,[44 1]),...
        conv(ddelay33,[19 1]}); tf1=tf(num1,den1);
step(tf1) % EDITAR (TRADUCIR LAS PALABRAS) LA FIGURA
% ANTES DE GUARDARLA
print -deps -f rptaesca

% delays.m RESPUESTAS DE FASE DE APROX. RACIONALES DE exp(-Ds)
clear all

D = 1;
c = sqrt(3)/3;
for i=1:70
    w = 0.1*i - 0.1;
    pa(i) = -2*(atan(w/3-c) + atan(w/3+c)); % PADE 2do ORDEN
    pb(i) = -4*atan(w*D/4); % PASA TODO
    pc(i) = angle(1-j*w*D/2-(w*D)^2/10+j*(w*D)^3/120)...
            -angle(1+j*w*D/2-(w*D)^2/10-j*(w*D)^3/120);
    r(i) = -w*D; % TIEMPO MUERTO REAL
end

jj=linspace(0,7,70);
plot(jj,pb,'--',jj,pa,'-.',jj,pc,':',jj,r);
xlabel('Frecuencia Normalizada wD');
ylabel('Respuesta en ángulo de fase [rad]');
text(0.5,-4.5,'Sólido: Ángulo de fase real');
text(0.5,-5.0,'Punto y raya: Padé de 2do orden');
text(0.5,-5.5,'Trazos: Pasa-todo de 3er orden');
text(0.5,-6.0,'Punteado: Padé de 3er orden');

print -deps -f delays

% eestado.m DETERMINACION DE LA ECUACION DE ESTADO DISCRETA
% DEL SISTEMA

% MODELADO DE LOS TIEMPOS MUERTOS USANDO PADE DE TERCER ORDEN
ord=3; D=20; % D=14;
[ndelay11,ddelay11]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay12,ddelay12]=pade(2*D,ord);
[ndelay13,ddelay13]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay21,ddelay21]=pade(D+4,ord);
[ndelay22,ddelay22]=pade(D,ord);
[ndelay23,ddelay23]=pade(D+1,ord);
[ndelay31,ddelay31]=pade(D+6,ord);
[ndelay32,ddelay32]=pade(D+8,ord);
[ndelay33,ddelay33]=pade(0,ord);

```

```

% CALCULO DEL NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA
num1= {4.05*ndelay11, 1.77*ndelay12, 5.88*ndelay13 ;...
       5.39*ndelay21 ,5.72*ndelay22 , 6.9*ndelay23 ;...
       4.38*ndelay31 ,4.42*ndelay32, 7.2*ndelay33};
den1= {conv(ddelay11,[50 1]),conv(ddelay12, [60 1]),...
       conv(ddelay13,[50 1]); conv(ddelay21,[50 1]),...
       conv(ddelay22,[60 1]),conv(ddelay23,[40 1]);...
       conv(ddelay31,[33 1]), conv(ddelay32,[44 1]),...
       conv(ddelay33,[19 1])};

tf1=tf(num1,den1);
ss1=ss(tf1);

A=ss1.a;
B=ss1.b;
C=ss1.c;
D=ss1.d;

ts=0.1; % tiempo de muestreo (minutos)
%discretizacion de ss1
[G H Cd Dd]=c2dm(A,B,C,D,ts);

% impulso.m COMPARACION DE LAS RESPUESTAS AL IMPULSO DE LOS SISTEMAS
%           COLUMNA DE DESTILACION CON TIEMPO MUERTO Y APROXIMADO
%           (REEMPLAZANDO LOS TIEMPOS MUERTOS CON PADE DE TERCER ORDEN)

clear all;
clc;

% FUNCIONN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA CON TIEMPOS MUERTOS
num= {4.05, 1.77, 5.88 ;...
      5.39 ,5.72 , 6.9 ;...
      4.38 ,4.42, 7.2};
den= {[50 1], [60 1] , [50 1];...
      [50 1], [60 1] , [40 1];...
      [33 1], [44 1] , [19 1]};
tf0=tf(num,den); % FUNCION DE TRANSFERENCIA SIN TIEMPOS MUERTOS

% SE A~NADEN LOS TIEMPOS MUERTOS
tf0.iodelaymatrix=[27, 28, 27; 18 ,14 ,15; 20 ,22 ,0];

% SISTEMA COLUMNA DE DESTILACION APROXIMADO (REEMPLAZANDO LOS
% TIEMPOS MUERTOS CON APROXIMACION DE PADE DE TERCER ORDEN)

ord=3;
[ndelay11,ddelay11]=pade(27,ord);
[ndelay12,ddelay12]=pade(28,ord);
[ndelay13,ddelay13]=pade(27,ord);
[ndelay21,ddelay21]=pade(18,ord);

```

```

[ndelay22,ddelay22]=pade(14,ord);
[ndelay23,ddelay23]=pade(15,ord);
[ndelay31,ddelay31]=pade(20,ord);
[ndelay32,ddelay32]=pade(22,ord);
[ndelay33,ddelay33]=pade(0,ord);
% MATRIZ DE TRANSFERENCIA APROXIMADA
num1= {4.05*ndelay11, 1.77*ndelay12, 5.88*ndelay13 ;...
        5.39*ndelay21 ,5.72*ndelay22 , 6.9*ndelay23 ;...
        4.38*ndelay31 ,4.42*ndelay32, 7.2*ndelay33};
den1= {conv(ddelay11,[50 1]),conv(ddelay12,[60 1]),...
        conv(ddelay13,[50 1]);...
        conv(ddelay21,[50 1]), conv(ddelay22,[60 1]),...
        conv(ddelay23,[40 1]);...
        conv(ddelay31,[33 1]), conv(ddelay32,[44 1]),...
        conv(ddelay33,[19 1])};

tf1=tf(num1,den1);

% GRAFICOS

grid on;impulse(tf0,'-',tf1,'--');

print -deps -f impulso

```

## Programas del Capítulo V

```

% gancon.m CALCULO DE LA MATRIZ DE GANANCIA DEL CONTROLADOR OPTIMO
%          PROPORCIONAL-INTEGRAL

clear all;
clc;

% MODELADO DE LOS TIEMPOS MUERTOS USANDO PADE DE TERCER ORDEN
ord=3; D=20; % D=14;
[ndelay11,ddelay11]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay12,ddelay12]=pade(2*D,ord);
[ndelay13,ddelay13]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay21,ddelay21]=pade(D+4,ord);
[ndelay22,ddelay22]=pade(D,ord);
[ndelay23,ddelay23]=pade(D+1,ord);
[ndelay31,ddelay31]=pade(D+6,ord);
[ndelay32,ddelay32]=pade(D+8,ord);
[ndelay33,ddelay33]=pade(0,ord);

% CALCULO DEL NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA
num1= {4.05*ndelay11, 1.77*ndelay12, 5.88*ndelay13 ;...
        5.39*ndelay21 ,5.72*ndelay22 , 6.9*ndelay23 ;...
        4.38*ndelay31 ,4.42*ndelay32, 7.2*ndelay33};

```



```

den1= {conv(ddelay11,[50 1]),conv(ddelay12, [60 1]),...
        conv(ddelay13,[50 1]); conv(ddelay21,[50 1]),...
        conv(ddelay22,[60 1]),conv(ddelay23,[40 1]);...
        conv(ddelay31,[33 1]), conv(ddelay32,[44 1]),...
        conv(ddelay33,[19 1])};

tf1=tf(num1,den1);
ss1=ss(tf1);
A=ss1.a; B=ss1.b; C=ss1.c; D=ss1.d;
ts=0.1; % TIEMPO DE MUESTREO EN MINUTOS
% MODELO DISCRETO DE ss1
[G H Cd Dd]=c2dm(A,B,C,D,ts);
nG=max(size(G)); % ORDEN DE G, # DE ECUACIONES DE ESTADO
nU=min(size(H)); % ORDEN DE H, # DE ENTRADAS
% MATRICES AMPLIADAS
Gt=[ G zeros(nG,nU);...
    -Cd*G eye(nU)] ;
Ht=[ H;...
    -Cd*H];

% MATRICES DE PONDERACION DEL CONTROLADOR
Q = eye(nG+nU) ; R = 70*eye(nU);
Q(29,29)=1;
Q(30,30)=1;
Q(31,31)=1;
Q(4,4)=0;
Q(8,8)=0;
Q(12,12)=0;

% ECUACION DE RICATTI PARA EL CONTROLADOR
P = zeros(36,36);
for i = 1:2000
    P = Q + Gt'*P*Gt - Gt'*P*Ht*inv(R+Ht'*P*Ht)*Ht'*P*Gt;
end
% CALCULO DE LA GANANCIA Ktil DEL CONTROLADOR
Ktil = inv(R+Ht'*P*Ht)*Ht'*P*Gt;
K = Ktil(:,1:nG); % GANANCIA OPTIMA K, proporcional
KI= -Ktil(:,nG+1:nG+nU); %Ganancia optima KI, integral

% ganobs.m CALCULO DE LA MATRIZ DE GANANCIA DEL OBSERVADOR OPTIMO
% PROPORCIONAL-INTEGRAL

clear all;
clc;

% MODELADO DE LOS TIEMPOS MUERTOS USANDO PADE DE TERCER ORDEN
ord=3; D=20; % D=14;
[ndelay11,ddelay11]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay12,ddelay12]=pade(2*D,ord);

```

```

[ndelay13,ddelay13]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay21,ddelay21]=pade(D+4,ord);
[ndelay22,ddelay22]=pade(D,ord);
[ndelay23,ddelay23]=pade(D+1,ord);
[ndelay31,ddelay31]=pade(D+6,ord);
[ndelay32,ddelay32]=pade(D+8,ord);
[ndelay33,ddelay33]=pade(0,ord);

% CALCULO DEL NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA
num1= {4.05*ndelay11, 1.77*ndelay12, 5.88*ndelay13 ;...
       5.39*ndelay21 ,5.72*ndelay22 , 6.9*ndelay23 ;...
       4.38*ndelay31 ,4.42*ndelay32, 7.2*ndelay33};
den1= {conv(ddelay11,[50 1]),conv(ddelay12, [60 1]),...
       conv(ddelay13,[50 1]); conv(ddelay21,[50 1]),...
       conv(ddelay22,[60 1]),conv(ddelay23,[40 1]);...
       conv(ddelay31,[33 1]), conv(ddelay32,[44 1]),...
       conv(ddelay33,[19 1])};

tf1=tf(num1,den1);
ss1=ss(tf1);
A=ss1.a; B=ss1.b; C=ss1.c; D=ss1.d;
ts=0.1; % TIEMPO DE MUESTREO EN MINUTOS
% MODELO DISCRETO DE ss1
[G H Cd Dd]=c2dm(A,B,C,D,ts);
nG=max(size(G)); % ORDEN DE G, # DE ECUACIONES DE ESTADO
nU=min(size(H)); % ORDEN DE H, # DE ENTRADAS
% MATRICES AMPLIADAS
Gt=[ G zeros(nG,nU);...
    -Cd*G eye(nU) ] ;
Ht=[ H;...
    -Cd*H];
% MATRICES DE PONDERACION DEL OBSERVADOR
Qo=eye(33,33);
Ro=eye(3,3);
% ECUACION DE RICATTI PARA EL OBSERVADOR
Po = zeros(33,33);
for i = 1:500
    Po = Qo + G*Po*G' - G'*Po*Cd'*inv(Ro+Cd*Po*Cd')*Cd*Po*G';
end
% CALCULO DE LA GANANCIA Ko DEL OBSERVADOR OPTIMO
Ko = inv(Ro+Cd*Po*Cd')*Cd*Po*G';

% conpi.m CONTROL OPTIMO PROPORCIONAL-INTEGRAL DEL SISTEMA

clear all;
clc;

% MODELADO DE LOS TIEMPOS MUERTOS USANDO PADE DE TERCER ORDEN
ord=3; D=20; % D=14;

```

```

[ndelay11,ddelay11]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay12,ddelay12]=pade(2*D,ord);
[ndelay13,ddelay13]=pade(2*D-1,ord);
[ndelay21,ddelay21]=pade(D+4,ord);
[ndelay22,ddelay22]=pade(D,ord);
[ndelay23,ddelay23]=pade(D+1,ord);
[ndelay31,ddelay31]=pade(D+6,ord);
[ndelay32,ddelay32]=pade(D+8,ord);
[ndelay33,ddelay33]=pade(0,ord);

% CALCULO DEL NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA
num1= {4.05*ndelay11, 1.77*ndelay12, 5.88*ndelay13 ;...
       5.39*ndelay21 ,5.72*ndelay22 , 6.9*ndelay23 ;...
       4.38*ndelay31 ,4.42*ndelay32, 7.2*ndelay33};
den1= {conv(ddelay11,[50 1]),conv(ddelay12, [60 1]),...
       conv(ddelay13,[50 1]); conv(ddelay21,[50 1]),...
       conv(ddelay22,[60 1]),conv(ddelay23,[40 1]);...
       conv(ddelay31,[33 1]), conv(ddelay32,[44 1]),...
       conv(ddelay33,[19 1])};

tf1=tf(num1,den1);
ss1=ss(tf1);
A=ss1.a; B=ss1.b; C=ss1.c; D=ss1.d;
ts=0.1; % TIEMPO DE MUESTREO EN MINUTOS
% MODELO DISCRETO DE ss1
[G H Cd Dd]=c2dm(A,B,C,D,ts);
nG=max(size(G)); % ORDEN DE G, # DE ECUACIONES DE ESTADO
nU=min(size(H)); % ORDEN DE H, # DE ENTRADAS
% MATRICES AMPLIADAS
Gt=[ G zeros(nG,nU);...
    -Cd*G eye(nU)] ;
Ht=[ H;...
    -Cd*H];
% MATRICES DE PONDERACION DEL CONTROLADOR
Q = eye(nG+nU) ; R = 70*eye(nU);
Q(29,29)=1;
Q(30,30)=1;
Q(31,31)=1;
Q(4,4)=0;
Q(8,8)=0;
Q(12,12)=0;

% ECUACION DE RICATTI PARA EL CONTROLADOR
P = zeros(36,36);
for i = 1:2000
    P = Q + Gt'*P*Gt - Gt'*P*Ht*inv(R+Ht'*P*Ht)*Ht'*P*Gt;
end
% CALCULO DE LA GANANCIA Ktil DEL CONTROLADOR
Ktil = inv(R+Ht'*P*Ht)*Ht'*P*Gt;

```

```

K = Ktil(:,1:nG); % GANANCIA OPTIMA K PROPORCIONAL
KI= -Ktil(:,nG+1:nG+nU); % GANANCIA OPTIMA KI INTEGRAL

% MATRICES DE PONDERACION DEL OBSERVADOR
Qo=eye(33,33);
Ro=eye(3,3);
% ECUACION DE RICATTI PARA EL OBSERVADOR
Po = zeros(33,33);
for i = 1:500
    Po = Qo + G*Po*G' - G'*Po*Cd'*inv(Ro+Cd*Po*Cd')*Cd*Po*G';
end
% CALCULO DE LA GANANCIA Ko DEL OBSERVADOR OPTIMO
Ko = inv(Ro+Cd*Po*Cd')*Cd*Po*G';

% RESPUESTA DEL SISTEMA CONTROLADO A UNA ENTRADA MULTIESCALON
x = zeros(1,nG)'; y=[0 0 0]'; v=[0 0 0]'; % CONDICIONES INICIALES
xe = zeros(1,nG)';
u=zeros(3,1);
N = 4000; r=[0 0 0]';

% BUCLE DE CONTROL
for k=1:N
    v = v + r - y;
    xe = G*xe + H*u + Ko'*(y-Cd*xe); % OBSERVADOR OPTIMO
    u = -K*xe + KI*v;
    x = G*x + H*u;
    y =Cd*x;
    yy1(k)=y(1);r1(k)=r(1);
    yy2(k)=y(2);r2(k)=r(2);
    yy3(k)=y(3);r3(k)=r(3);
    uu1(k)=u(1);
    uu2(k)=u(2);
    uu3(k)=u(3);
    if k>N/5
        r=[0.5 0.5 0.5]';
    end
    if k>3*N/5
        r=[0.3 0.3 0.3]';
    end
end

% GRAFICOS
t = linspace(0,ts*N,N);
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(t,yy1,'r',t,r1,'b'); ylabel('Salida y1'); grid;
subplot(3,1,2)
plot(t,yy2,'r',t,r2,'b'); ylabel('Salida y2'); grid;
subplot(3,1,3)

```

```
plot(t,yy3,'r',t,r3,'b'); ylabel('Salida y3'); grid;  
xlabel('Tiempo en minutos')  
print -deps -f salidas
```

```
figure(2)  
subplot(3,1,1)  
plot(t,uu1,'b'); ylabel('Control u1'); grid;  
subplot(3,1,2)  
plot(t,uu2,'b'); ylabel('Control u2'); grid;  
subplot(3,1,3)  
plot(t,uu3,'b'); ylabel('Control u3'); grid;  
xlabel('Tiempo en minutos')  
print -deps -f controls
```

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Camacho, Eduardo F. y Bordons, Carlos. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1999.
- [2] MathWorks, Inc. *MATLAB Reference Guide*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [3] Ogata, Katushito. *Designing Linear Control Systems with MATLAB*. Prentice Hall Englewood Cliffs New Jersey, 1994.
- [4] Prett, D. M. y Morari, M. *Shell Process Control Workshop*. Butterworths, 1987.
- [5] Rojas-Morcno, Arturo. *Design of Self-Tuning Controllers for Processes Having Multiple Unknown Time-Varying Delays*. PhD dissertation, Utah State University, Logan UT, June 1995.
- [6] Rojas-Moreno, Arturo. *Control Avanzado-Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real*. Publicación Independiente, 2001.