

Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería Civil



**Aplicaciones del Método de
la Integral de Borde en la
Ingeniería Civil**

*Tesis para optar el Título Profesional de
INGENIERO CIVIL*

Presentada por

Jorge Benjamín Carrillo Samanez

Lima - Perú

1989

APLICACIONES DEL METODO DE LA INTEGRAL DE BORDE
EN LA INGENIERIA CIVIL

SUMARIO

Se analizan los aspectos básicos del proceso de la integral de borde y su relación con el método de elementos finitos. En particular este trabajo considera posibles aplicaciones a problemas de flujo potencial y a problemas de equilibrio, refiriéndose en ambos casos -por simplicidad en la presentación- a situaciones que admiten modelos bidimensionales.

Dos programas de cómputo desarrollados para tales casos se presentan en un anexo.

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO I CONCEPTOS BASICOS SOBRE LA INTEGRAL DE BORDE

1.1 Introducci3n

1.2 Ideas sobre la integral de borde

1.3 Los elementos finitos y la integral de borde

CAPITULO II PROBLEMAS DE FLUJO POTENCIAL BIDIMENSIONAL

2.1 Introducci3n

2.2 Soluci3n fundamental

2.3 Formulaci3n de la integral de borde

2.4 Tipos de elementos de borde

2.4.1 Elementos constantes

2.4.2 Elementos lineales

2.5 Ejemplos de aplicaci3n

- Red de flujo para una tablestaca

CAPITULO III TEORIA DE ELASTICIDAD LINEAL

3.1 Introducci3n

- 3.2 Ecuaciones diferenciales del equilibrio
- 3.3 Condiciones de compatibilidad
- 3.4 Relaciones esfuerzo-deformación
- 3.5 Estado plano de esfuerzos o de deformaciones

CAPITULO IV

PROBLEMAS DE ELASTICIDAD LINEAL

- 4.1 Introducción
- 4.2 Formulación de la integral de borde
- 4.3 Solución fundamental
- 4.4 Aplicación de la integral de borde a estados planos de esfuerzos o de deformaciones
- 4.5 Elementos de borde
 - 4.5.1 Elementos constantes
 - 4.5.2 Elementos lineales
- 4.6 Ejemplos de aplicación
 - Concentración de esfuerzos alrededor de un agujero circular
 - Excavación de una caverna en un medio rocoso
 - Consolidación, sustentación e inyecciones en roca

CAPITULO V

APLICACION A REGIONES NO-HOMOGENEAS

5.1 Introducción

5.2 Problemas de potencial

5.3 Problemas de elasticidad

5.4 Ejemplos de aplicación

- Flujo a través de la cimentación de una presa

ANEXO I

1.0 Programa de aplicación para la solución de la ecuación de Laplace.

2.0 Programa de aplicación para la solución de estados planos de esfuerzos y estados planos de deformaciones

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

Para la solución de numerosos problemas que se presentan en la práctica de la ingeniería se requiere analizar medios continuos. Tales análisis se plantean a partir de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, cuya solución analítica es, en la mayor parte de las situaciones reales, extremadamente difícil.

En muchos casos podría ser factible utilizar modelos a escala, incluso considerando situaciones que no son estrictamente iguales a las del medio estudiado pero que se gobiernan por ecuaciones análogas. Sin embargo, tales procesos experimentales son muy costosos y frecuentemente requieren equipo que no está fácilmente al alcance de la oficina de ingeniería.

En las últimas décadas se ha observado una tendencia creciente hacia el uso de métodos numéricos, donde la solución queda descrita por una colección de valores numéricos en determinado número de "nudos". Esto refleja el desarrollo de las computadoras digitales, cada vez más económicas y fácilmente accesibles. En tal sentido los métodos de elementos finitos se han popularizado, a partir de la década de 1960, desplazando a las técnicas de diferencias finitas como herramientas de análisis. Más recientemente se han propuesto los procesos de integral

de borde tratados en la presente tesis.

Posiblemente el principal problema al aplicar los métodos de elementos finitos como herramientas de análisis está en la gran cantidad de datos requeridos para describir el modelo numérico, particularmente cuando se trata de modelos tridimensionales. Esta dificultad no se presenta en los procesos de integral de borde.

En los métodos de integral de borde se consideran aproximaciones que satisfacen exactamente las ecuaciones diferenciales en el interior de la región estudiada, debiendo en consecuencia sólo minimizarse errores en las condiciones de borde. Esto permite plantear un modelo en el que sólo se consideran elementos de borde y un número muy reducido de incógnitas.

Es objetivo de la tesis que a continuación se presenta dar a conocer aspectos básicos de los métodos de integral de borde, en especial los referidos a problemas bidimensionales de flujo potencial y de estados planos de esfuerzos o estados planos de deformaciones.

En el capítulo I de la tesis se dan algunas ideas básicas sobre la integral de borde. El capítulo II trata de la aplicación de la integral de borde al problema del flujo potencial bidimensional en un medio isotrópico.

El capítulo III resume aspectos básicos de la teoría de elasticidad lineal. Diversas aplicaciones de la integral de borde para estados planos de esfuerzos y estados planos de deformaciones se presentan en el capítulo IV.

Finalmente en el capítulo V se aplica la integral de borde al análisis de regiones con materiales no homogéneos para problemas de potencial y elasticidad. En el anexo I se presentan dos programas de aplicación en lenguaje FORTRAN.

C A P I T U L O I

CONCEPTOS BASICOS SOBRE LA INTEGRAL DE BORDE

1.1 INTRODUCCION

Para aproximar la solución de una ecuación diferencial sujeta a determinadas condiciones de borde existen diferentes métodos de análisis. En los procesos de Elementos Finitos (EF), las ecuaciones del problema son aproximadas sobre la región por ciertas funciones que satisfacen parcialmente las condiciones de borde. Para ello se discretiza la región analizada en un número determinado de subregiones o elementos, como se observa en la siguiente figura,

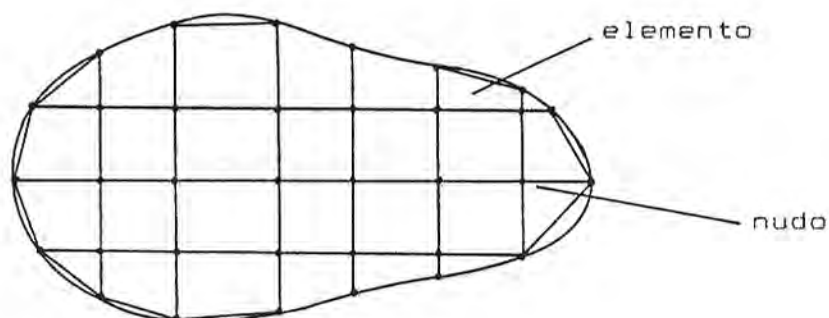


fig. 1.1

Se obtiene un sistema de ecuaciones para los valores de la(s) función(es) incógnita en los nudos de la malla, resuelto el cual se llega a la solución del problema.

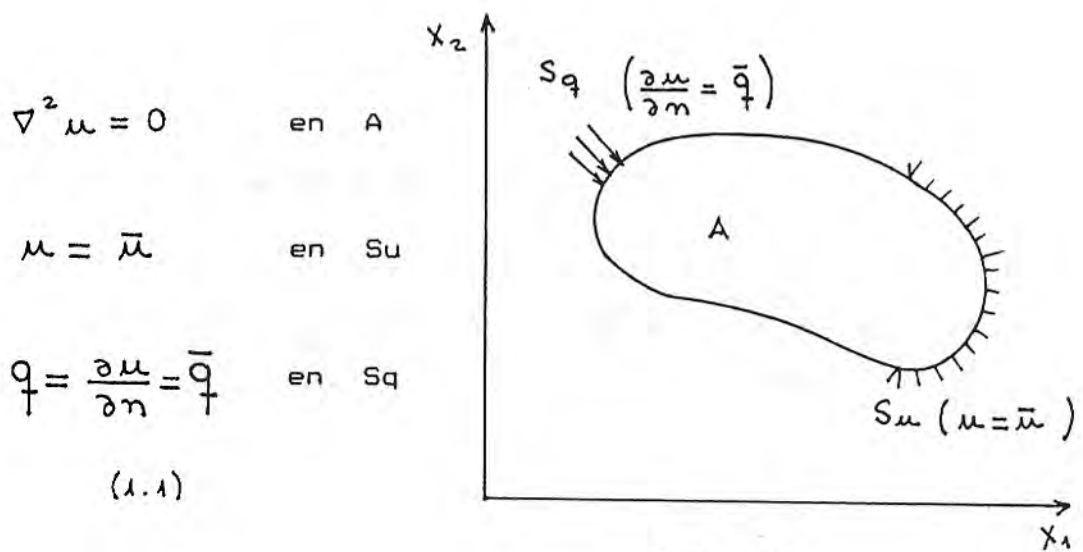
Otro método de más reciente desarrollo es la Integral de Borde (IB), también llamado Método de Elementos de Borde,

donde se usan funciones que satisfacen las ecuaciones en el interior de la región, pero que sólo aproximan las condiciones de borde. Existen diferentes formas de este método, que van desde el llamado método "indirecto" hasta los más versátiles y generales como el "directo", que será tema de la presente tesis.

En los siguientes capítulos se aplicará el método directo de la IB a problemas de potencial y estado plano de esfuerzos y deformaciones.

1.2 IDEAS SOBRE LA INTEGRAL DE BORDE

A continuación se explicará que es la IB, como se aplica y en que se diferencia de los EF, para lo cual se usa la siguiente ecuación de Laplace como ejemplo,



Aplicando el método de Residuos Pesados a la ecuación 1.1 y considerando a "w" como una función arbitraria no nula (esta función será escogida más adelante para que satisfaga la ecuación $\nabla^2 w = 0$ en el interior de la región),

$$\int_A w (\nabla^2 \mu) dA - \int_{S_q} w (q - \bar{q}) ds + \int_{S_\mu} \frac{\partial w}{\partial n} (\mu - \bar{\mu}) ds = 0 \quad (1.2)$$

Integrando $\int_A w (\nabla^2 \mu) dA$ dos veces por partes se tiene,

$$\begin{aligned} \int_A w (\nabla^2 \mu) dA &= \int_A \mu \nabla^2 w dA + \int_S \left(w \frac{\partial \mu}{\partial n} - \mu \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_A \mu \nabla^2 w dA + \int_S \left(w q - \mu \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (1.3)$$

Reemplazando la ecuación 1.3 en 1.2,

$$\begin{aligned} \int_A \mu \nabla^2 w dA + \int_{S_\mu} w q ds + \int_{S_q} w \bar{q} ds &= \int_{S_q} \mu \frac{\partial w}{\partial n} ds + \\ &+ \int_{S_\mu} \bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como se mencionó anteriormente, se puede escoger la función "w" tal que resulte $\nabla^2 w = 0$ en la región, pero que solamente aproxime las condiciones de borde; por consiguiente se llega a una expresión sólo con integrales de borde,

$$\int_{S_u} w \bar{q} ds + \int_{S_q} w \bar{q} ds = \int_{S_q} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} ds + \int_{S_u} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} ds \quad (1.5)$$

Esta ecuación es la base para encontrar la solución al problema (ecuación 1.1) mediante la IB.

Para aplicar la ecuación 1.5 y hallar la solución de la ecuación 1.1 es necesaria la discretización del borde de la región, como se observa en la siguiente figura,

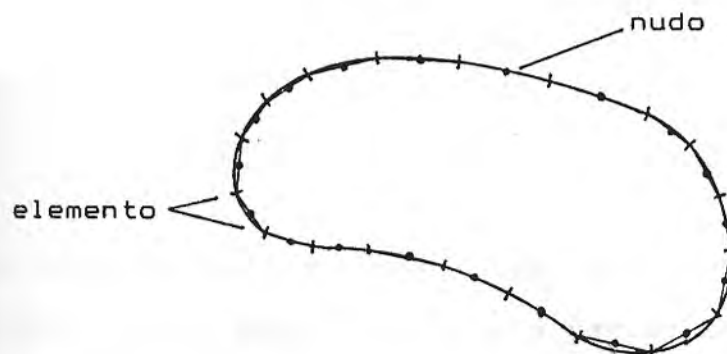


fig. 1.3

Se puede formar un sistema de ecuaciones con la expresión 1.5 y encontrar las incógnitas del borde de la región; a partir de esto es posible calcular valores en puntos del interior. Todo este proceso se explicará con más detalle en los próximos capítulos.

Cabe resaltar que el número de incógnitas, y en consecuencia el tamaño de los sistemas de ecuaciones por resolver, es mucho menor que en otros métodos; asimismo se facilita la entrada de datos en los programas de aplicación, porque el volumen de éstos es significativamente menor.

1.3 LOS ELEMENTOS FINITOS Y LA INTEGRAL DE BORDE

Considerando que en la ecuación 1.2 la función "u" satisface la condición esencial $u = \bar{u}$ sobre el borde S_u , se tiene la siguiente ecuación,

$$\int_A (\nabla^2 u) w \, dA = \int_{S_q} (q - \bar{q}) w \, ds \quad (1.6)$$

Esta ecuación es el punto de partida de los Elementos Finitos, si se toma "w" como una variación finita " δu ", definida por el mismo tipo de aproximaciones que para "u",

$$\int_A (\nabla^2 \mu) \delta \mu \, dA = \int_{S_q} (q - \bar{q}) \delta \mu \, dA \quad (1.7)$$

Integrando por partes una vez esta expresión se llega a,

$$\int_A \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial \delta \mu}{\partial x_k} \, dA = \int_{S_q} \bar{q} \delta \mu \, ds \quad (1.8)$$

En esta última ecuación se hace,

$$\begin{aligned} \mu &= \tilde{N}^T \underline{U} \\ \delta \mu &= \tilde{N} \delta \underline{U} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Reemplazando en 1.8,

$$\delta \underline{U} \int_A \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_k} \, dA \underline{U} = \delta \underline{U} \int_{S_q} \tilde{N} \bar{q} \, ds \quad (1.10)$$

Y eliminando $\delta \underline{U}$,

$$\int_A \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_k} \, dA \underline{U} = \int_{S_q} \tilde{N} \bar{q} \, ds \quad (1.11)$$

Es decir,

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{B} \quad (1.12)$$

Resolviendo esta ecuación se encuentran los valores del potencial en todos los nudos de la malla.

En los EF se parte de la ecuación 1.6 donde se está aproximando,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 && \text{en } A \\ \text{Y} \quad q &= \bar{q} && \text{en } S_q \end{aligned} \quad (1.13)$$

Las aproximaciones son tales que se satisface exactamente $u = \bar{u}$ en S_u , en cambio en la IB (ecuación 1.5) se consideran funciones que satisfacen exactamente $\nabla^2 u = 0$ en A y se está minimizando ecuaciones con $u = \bar{u}$ en S_u y $q = \bar{q}$ en S_q .

Finalmente en la IB las incógnitas "u" y "q" resultan en los nudos de borde, mientras en los EF las incógnitas "u" están en todos los nudos de la malla, lo que da lugar a un mayor número de incógnitas. Por otro lado en los EF el sistema de ecuaciones tiene una estructura banda, en contraste con el método de la IB donde las ecuaciones están totalmente acopladas.

C A P I T U L O I I

PROBLEMAS DE FLUJO POTENCIAL BIDIMENSIONAL

2.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presenta la aplicación de la IB a la solución de problemas de flujo potencial, bidimensionales, lineales, permanentes y con permeabilidad isotrópica "K". La ecuación diferencial que se resuelve es la ecuación de Laplace sujeta a las condiciones de borde dadas,

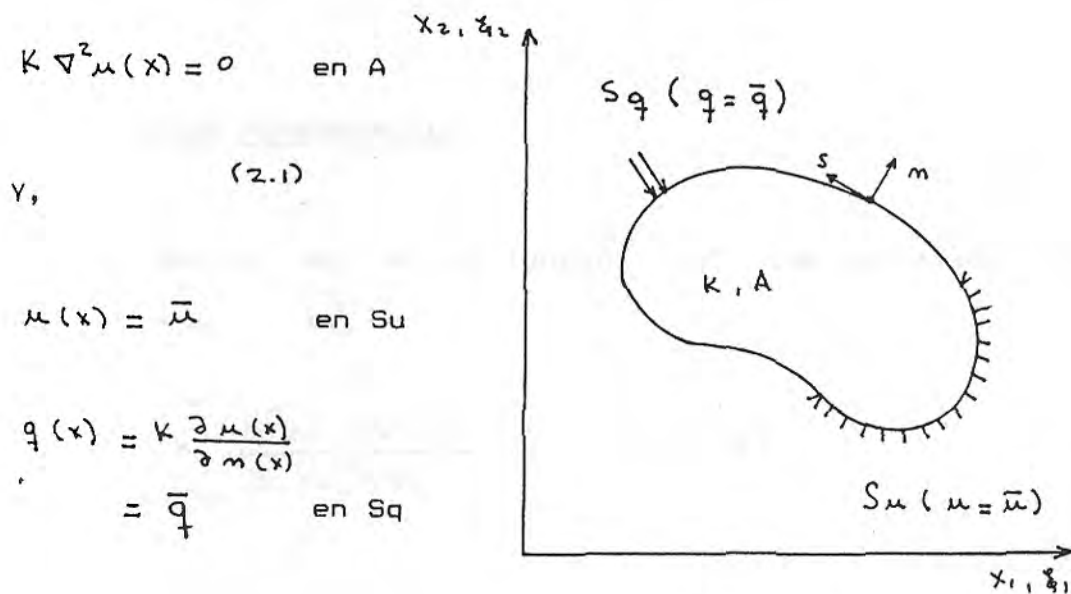


fig. 2.1

La figura 2.1 representa una región homogénea bidimensional con coeficiente de permeabilidad isotrópica "K", bordes "Su" y "Sq" sobre los cuales están prescritos el potencial (μ) y la velocidad de flujo normal (q) respectivamente.

Las correspondientes componentes del vector velocidad de

flujo (v) son dadas por,

$$v_i(x) = \kappa \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

y

$$q_i(x) = v_i(x) m_i(x)$$

2.2 SOLUCION FUNDAMENTAL

Se define así a la función "w" que satisface la siguiente ecuación,

$$\kappa \frac{\partial^2 w(x, \xi)}{\partial x_i \partial x_i} = -\delta(x, \xi) \quad (2.3)$$

La solución de esta ecuación (w), es el potencial generado en un punto "xi" por una carga concentrada ubicada en "ξ_i", en un medio bidimensional infinito. Tiene la siguiente forma,

$$w(x, \xi) = \frac{1}{2\pi\kappa} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$r^2 = (x - \xi)_i^2 \quad (2.4)$$

La función " δ " es cero a menos que las correspondientes componentes de " x_i " y " ξ_i " sean iguales, en tal caso " δ " tiene la siguiente propiedad,

$$\int_A \mu(x) \delta(x, \xi) dA(x) = \mu(\xi) \quad (2.5)$$

$\xi \in A$

Aplicando el método de Galerkin a la ecuación 2.3,

$$\int \mu (\nabla^2 w + \frac{\delta}{k}) dA = 0$$

$$\int \mu \nabla^2 w dA + \frac{1}{k} \int \mu \delta dA = 0$$

$$\int \mu \nabla^2 w dA = - \frac{\mu(\xi)}{k} \quad (2.6)$$

2.3 FORMULACION DE LA INTEGRAL DE BORDE

Multiplicando por " w " e integrando por partes dos veces la ecuación 2.1,

$$\int_A \omega (\nabla^2 \mu) dA = \int_A \mu \nabla^2 \omega dA + \int_S \left(\omega \frac{\partial \mu}{\partial n} - \mu \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds = 0$$

(2.7)

Reemplazando la ecuación 2.6 en 2.7,

$$-\frac{\mu(\xi)}{k} + \int_S \left[\omega(x, \xi) \frac{\partial \mu(x)}{\partial n(x)} - \mu(x) \frac{\partial \omega(x, \xi)}{\partial n(x)} \right] ds(x) = 0$$

$$\mu(\xi) = k \int_S \left[\omega \frac{\partial \mu}{\partial n} - \mu \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] ds$$

$$\mu(\xi) = \int_S \left[\omega \left(k \frac{\partial \mu}{\partial n} \right) - \mu \left(k \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \right] ds$$

$$q = k \frac{\partial \mu}{\partial n}$$

$$\mu(\xi) = \int_S \omega(x, \xi) q(x) ds(x) - \int_S \mu(x) \left(k \frac{\partial \omega(x, \xi)}{\partial n(x)} \right) ds(x)$$

(2.8)

La ecuación 2.8 permite calcular el potencial en cualquier punto interior " ξ ", conociendo los valores del potencial " μ " y velocidad de flujo normal " q " en to-

do el borde "S".

Para completar la formulación del método se debe tomar el punto " ξ " sobre el borde de la región ($\xi \rightarrow x_0$); la ecuación 2.8 cambia de forma en este caso, lo que será analizado a continuación.

Se supondrá que el punto " x_0 " está sobre el borde "S" y con un semicírculo de radio " ϵ " alrededor de él, como se observa en la siguiente figura,

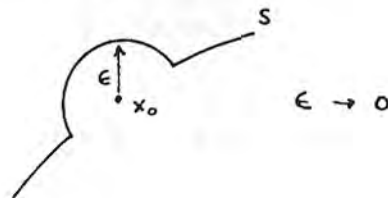


fig. 2.2

Las integrales de la ecuación 2.8 toman las siguientes formas en este caso,

$$\int_S w q ds$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s-s_\epsilon} w q ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} w q ds$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s-s_\epsilon} w q ds = \int_S w q ds \quad (2.9)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} w q ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q}{2\pi K} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \pi \epsilon = 0 \quad (2.10)$$

$$\int \mu \left(\kappa \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\epsilon} \mu \left(\kappa \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \mu \left(\kappa \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\epsilon} \mu \left(\kappa \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds = \int_S \mu \left(\kappa \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds \quad (2.11)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \mu \left(\kappa \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi\kappa} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\kappa} r \left(-\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{2\pi\kappa r}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \mu \kappa \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \mu \kappa \left(-\frac{1}{2\pi\kappa\epsilon}\right) ds$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \left(-\frac{1}{2\pi\epsilon}\right) \pi \epsilon$$

$$= -\frac{\mu}{2} \quad (2.12)$$

Reemplazando las ecuaciones 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12 en 2.8, se obtiene la siguiente expresión para el punto "Xo" ubicado sobre el borde,

$$\frac{u(x_0)}{2} + \int_S u(x) \kappa \frac{\partial w(x, x_0)}{\partial n(x)} ds(x) = \int_S w(x, x_0) q(x) ds(x) \quad (2.13)$$

En general la ecuación 2.13 puede escribirse como,

$$\frac{u(x_0)}{2} + \int_S u \kappa \frac{\partial w}{\partial n} ds = \int_S w q ds \quad (2.14)$$

La ecuación anterior es aplicable sobre el borde de la región cuando el punto "x₀" está ubicado sobre un borde como el de la figura 2.2

2.4 TIPOS DE ELEMENTOS DE BORDE

El borde de la región debe ser discretizado para poder aplicar la ecuación 2.14; se puede usar elementos de distintos grados de aproximación, entre estos figuran elementos "constantes", "lineales" y "cuadráticos", con uno, dos o tres nudos por elemento, respectivamente, como puede observarse en la siguiente figura,

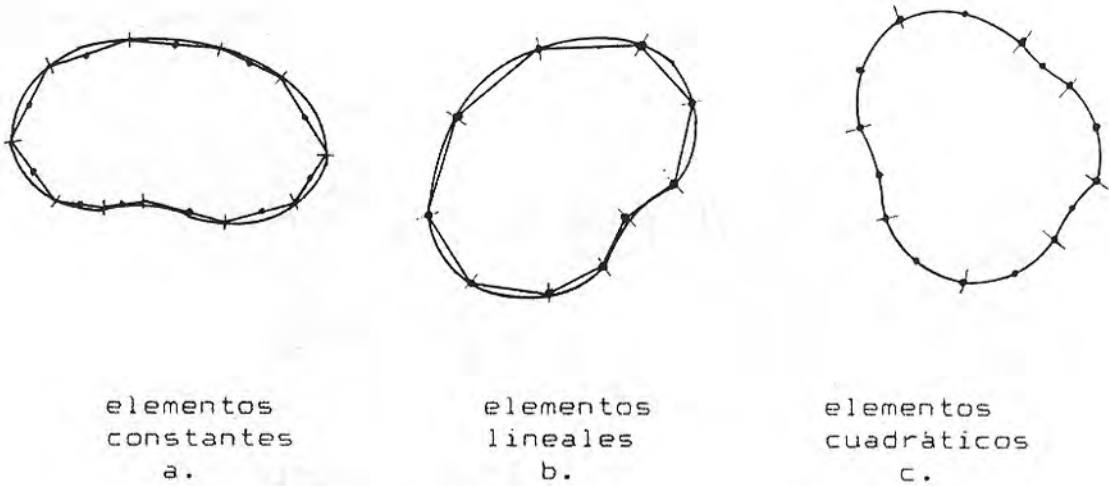


fig. 2.3

2.4.1 Elementos constantes

En el caso de usar elementos "constantes" los valores de "u" y "q" son considerados constantes en cada segmento de borde e iguales al valor en el punto medio del elemento. La ecuación 2.14 para el nudo "i" es,

$$\frac{1}{2} u^i + \sum_{j=1}^m u^j \int_{S_j} \left(k \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = \sum q^j \int_{S_j} w ds \quad (2.15)$$

Esta ecuación relaciona el valor de "u" del nudo "i" con los valores de "u" y "q" de los demás nudos de borde incluyendo el propio "i" obteniendose n ecuaciones, que

permiten encontrar las n incógnitas que se tienen sobre el borde.

Si,

$$\hat{H}^{ij} = \int (k \frac{\partial w}{\partial n}) ds$$

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} + \frac{1}{2}, \quad i = j$$

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij}, \quad i \neq j$$

$$G^{ij} = \int_{S_j} w ds \quad (2.16)$$

La ecuación 2.15 toma la siguiente forma,

$$\sum_{j=1}^m H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^m G^{ij} q^j \quad (2.17)$$

En forma matricial,

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{Q} \quad (i = 1, m)$$

(2.18)

Otra manera de escribir esta ecuación es,

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Donde \bar{U} y \bar{Q} son los valores prescritos de potencial y velocidad de flujo respectivamente, U y Q son los valores desconocidos en el borde.

Reordenando la ecuación 2.19,

$$\begin{pmatrix} G_{11} & -H_{12} \\ G_{21} & -H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_{12} & H_{11} \\ -G_{22} & H_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{U} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} \tilde{X} = \tilde{B} \quad (2.20)$$

Resolviendo la ecuación 2.20 se conocen los valores de potencial y flujo normal en el borde, a partir de los cuales pueden calcularse valores en puntos interiores con las siguientes expresiones,

$$u(\xi) = \int_S \omega(x, \xi) q(x) dS(x) - \int_S u(x) \left[\kappa \frac{\partial \omega(x, \xi)}{\partial n(x)} \right] dS(x)$$

$$r_j(\xi) = \int_S \frac{1}{2\pi} \frac{y_j}{r^2} q(x) ds(x) - \int_S u(x) \frac{k}{2\pi r^2} \left(2 \frac{y_i y_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) m_i(x) ds(x)$$

$$r^2 = y_i y_i$$

$$y_i = x_i - \xi_i$$

(2.21)

2.4.2 Elementos lineales

En este caso "u" y "q" varían linealmente sobre cada segmento de borde. Los nudos son considerados en la intersección de dos elementos de borde (fig. 2.3 b.). La ecuación 2.14 toma la siguiente forma,

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^m \int_{S_j} u \left(k \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = \sum_{j=1}^m \int_{S_j} q w ds$$

(2.22)

El valor de C^i es 1/2 para un borde como el de la figura 2.2, para otra forma de bordes este valor se encuentra en forma indirecta como se verá más adelante.

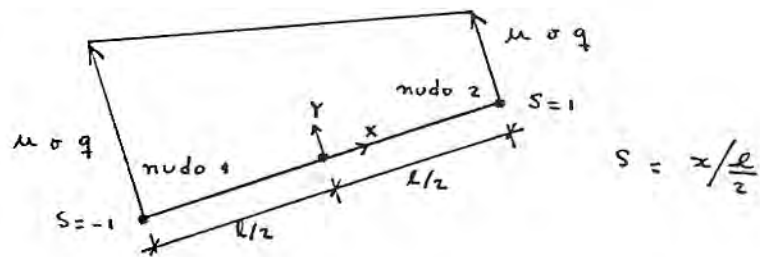


fig. 2.4

Considerando el elemento de borde de la figura 2.4, los valores de "u" y "q" en cualquier punto del elemento pueden ser definidos en términos de sus valores nodales por medio de dos funciones de interpolación lineal,

$$u(s) = \phi_1 u^1 + \phi_2 u^2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$q(s) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1-s) \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1+s) \quad s = \frac{x}{L/2}$$

Las integrales de la ecuación 2.22 pueden escribirse de la siguiente forma de acuerdo a las expresiones anteriores,

$$\int_{s_j^i} u \left(k \frac{\partial w}{\partial m} \right) ds = \int_{s_j^i} [\phi_1 \quad \phi_2] k \frac{\partial w}{\partial m} ds \quad \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix}$$

$$= [h^{i1} \quad h^{i2}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\int_{S_j} q \omega \, ds = \int_{S_j} [\phi_1 \quad \phi_2] \omega \, ds \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix}$$

$$= [g^{i1} \quad g^{i2}] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Sustituyendo 2.24 y 2.25 en 2.22 para todos los elementos de borde "j", se obtiene para el nudo "i",

$$c^i u^i + [\hat{H}^{i1} \quad \hat{H}^{i2} \quad \dots \quad \hat{H}^{im}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^m \end{Bmatrix} = [G^{i1} \quad G^{i2} \quad \dots \quad G^{im}] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^m \end{Bmatrix}$$

$$\hat{H}^{ij} = (h^{i1})^{\text{elem } j} + (h^{i2})^{\text{elem } j-1}$$

$$G^{ij} = (g^{i1})^{\text{elem } j} + (g^{i2})^{\text{elem } j-1}$$

(2.26)

La ecuación 2.26 puede ser escrita como,

$$c^i \mu^i + \sum_{j=1}^m \hat{H}^{ij} \mu^j = \sum_{j=1}^m G^{ij} q^j \quad (2.27)$$

Si,

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} \quad i \neq j$$

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} + c^i \quad i = j \quad (2.28)$$

Entonces la ecuación 2.27 toma la siguiente forma,

$$\sum_{j=1}^m H^{ij} \mu^j = \sum_{j=1}^m G^{ij} q^j \quad (2.29)$$

En notación matricial,

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{Q} \quad (i = 1, m) \quad (2.30)$$

O, al igual que en el caso anterior,

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U} \\ U \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Reordenando estas ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} G_{11} & -H_{12} \\ G_{21} & -H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_{11} & H_{11} \\ -G_{22} & H_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{U} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B} \quad (2.32)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 2.32 se conocen las incógnitas del borde, a partir de las cuales se pueden calcular valores en puntos interiores con las ecuaciones 2.21.

Una forma de encontrar el valor de C^i en forma indirecta es considerando un potencial constante en todo el borde, para lo que se tiene,

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{0} \quad \text{y} \quad \underset{\sim}{U} = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

En cualquier fila se conocen los elementos que están fuera de la diagonal por lo que se puede escribir,

$$h_{ii} = - \sum_{j=1}^m h_{ij} \quad (2.34)$$

2.5 EJEMPLOS DE APLICACION

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de la IB a un problema de un flujo de agua en un medio poroso, en el siguiente gráfico se observa los datos iniciales del problema,

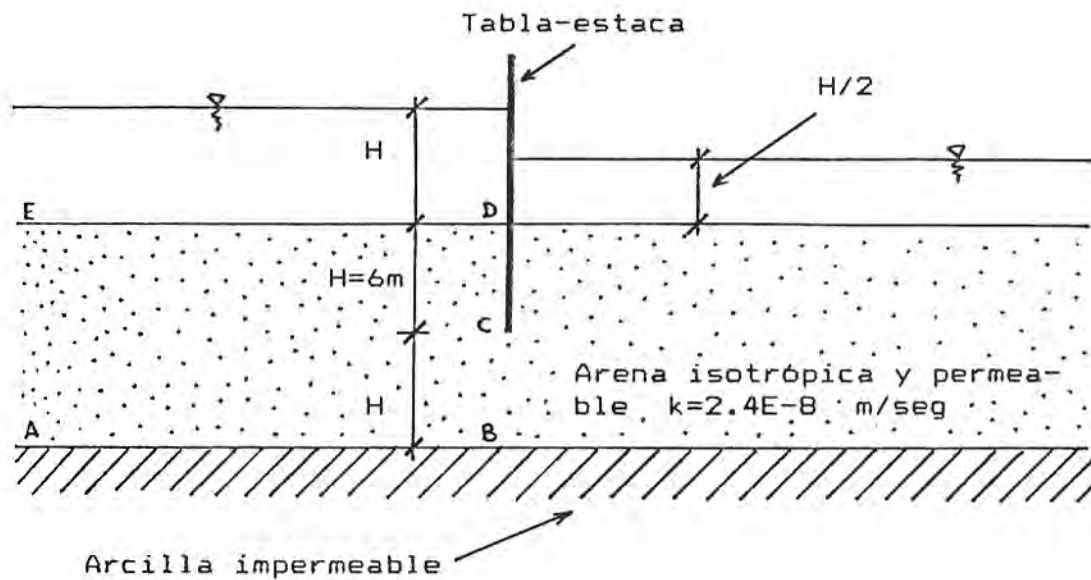


fig. 2.5

Mediante un programa para elementos constantes, se determinará aproximadamente el caudal de filtración por unidad de ancho del muro, las líneas equipotenciales y líneas de corriente; para lo cual se analiza la región ABCDE que se

muestra en la siguiente figura,

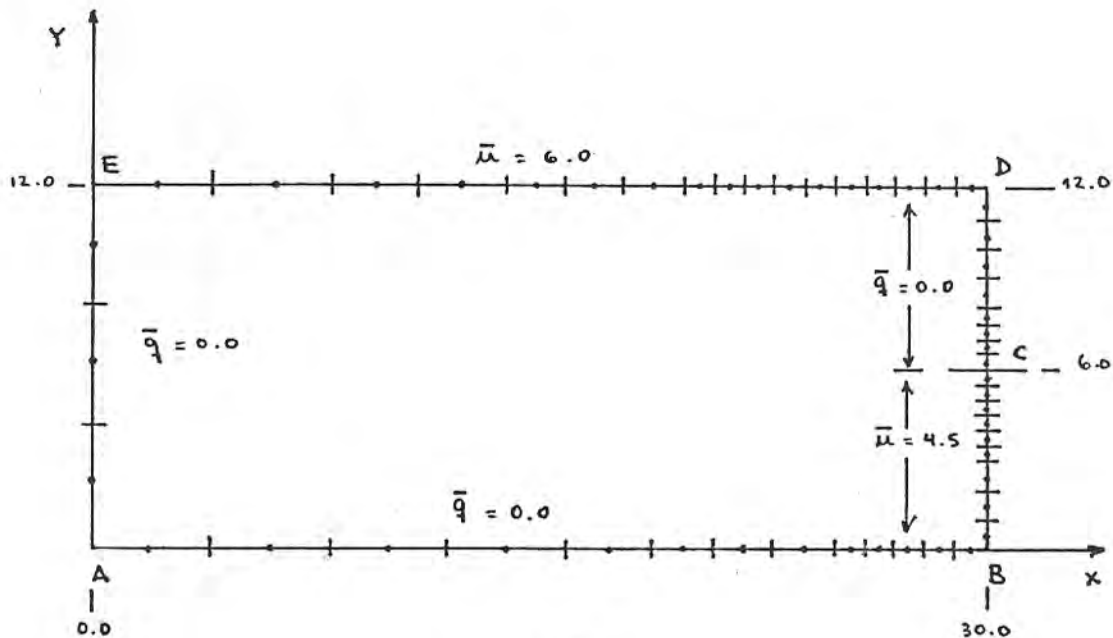


fig. 2.6

La figura 2.6 muestra también la discretización del borde de la región en 50 elementos constantes y los valores iniciales prescritos en cada uno de ellos, para hacer el cálculo de la función potencial. Además se calcularán valores en 165 puntos internos para poder interpolar líneas equipotenciales.

Usando el mismo programa se pueden encontrar las líneas de corriente prescribiendo en el borde los siguientes valores : en AB $\Psi=100$; en BC $\frac{\partial \Psi}{\partial n}=0$; en CD $\Psi=0$; en DE $\frac{\partial \Psi}{\partial n}=0$ y en DA $\Psi=100$.

LÍNEAS EQUIPOTENCIALES Y DE CORRIENTE

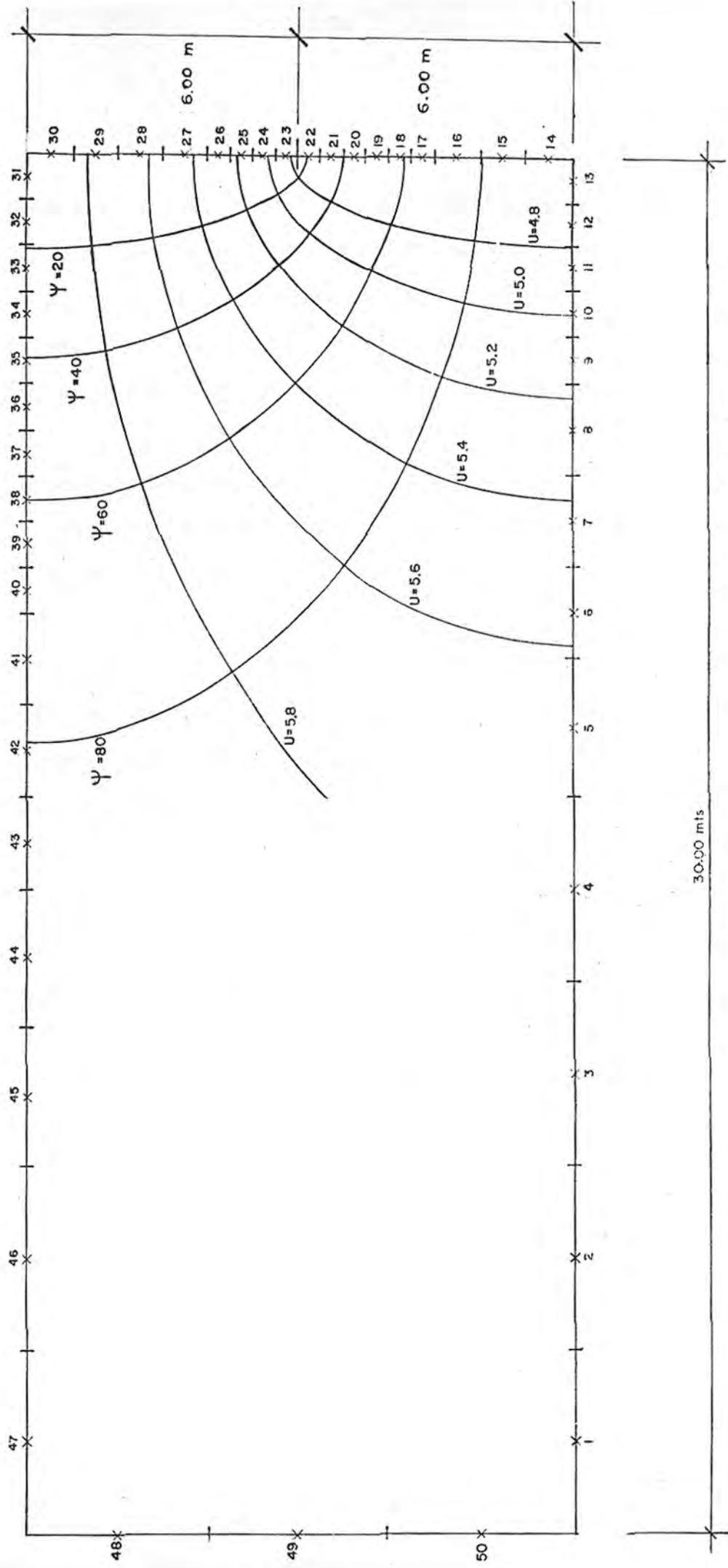


fig. 2.7

Evaluando los resultados obtenidos para el modelo de la figura 2.6 se obtiene un resultado para el caudal de entrada a través de DE y EA de $3.5683E-8$ m³/seg y un caudal de salida a través de BC de $3.5684E-8$ m³/seg. El valor teórico es $3.60E-8$ m³/seg por unidad de ancho de muro.

Las líneas equipotenciales y de corriente interpoladas a partir de los valores en los nudos interiores se presentan en la figura 2.7.

Cabe agregar que considerando un modelo de con elementos lineales y 38 nudos se obtienen prácticamente los mismos resultados. Dado que el tiempo de cómputo depende básicamente del número de incógnitas (en este caso igual al número de nudos) y del número de puntos en el interior de la región en estudio (donde se evalúa la función y sus derivadas), esta comparación indica que puede ser conveniente elementos de borde lineales o eventualmente cuadráticos. Sin embargo, no debe exagerarse en ese sentido puesto que la programación y la formulación resultarían excesivamente complicadas.

CAPITULO III

TEORIA DE ELASTICIDAD LINEAL

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presenta un resumen de la Teoría de Elasticidad Lineal para materiales isotrópicos y de las ecuaciones por resolver para estados planos de esfuerzos o estados planos de deformaciones, que serán motivo de la aplicación de la IB en el siguiente capítulo.

Esta teoría supone que las derivadas de las componentes de desplazamiento son pequeñas en comparación con la unidad, que es válida la Ley de Hooke para el material y finalmente que se satisfacen las ecuaciones de equilibrio con referencia a la geometría no-deformada.

3.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DEL EQUILIBRIO

La convención de signos usada para los esfuerzos es la que se muestra en la siguiente figura,

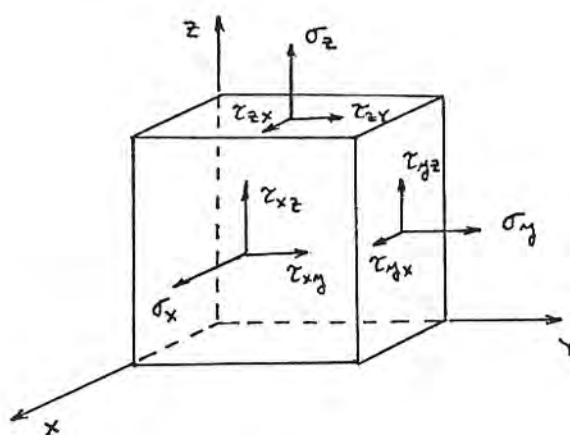


fig. 3.1

Considerando una situación bidimensional, para un elemento diferencial situado en el plano XY, como en la figura 3.2, sujeto a los esfuerzos normales σ_x , σ_y , esfuerzos de corte τ_{xy} y a las fuerzas de cuerpo (fuerzas por unidad de volumen) b_x , b_y ,

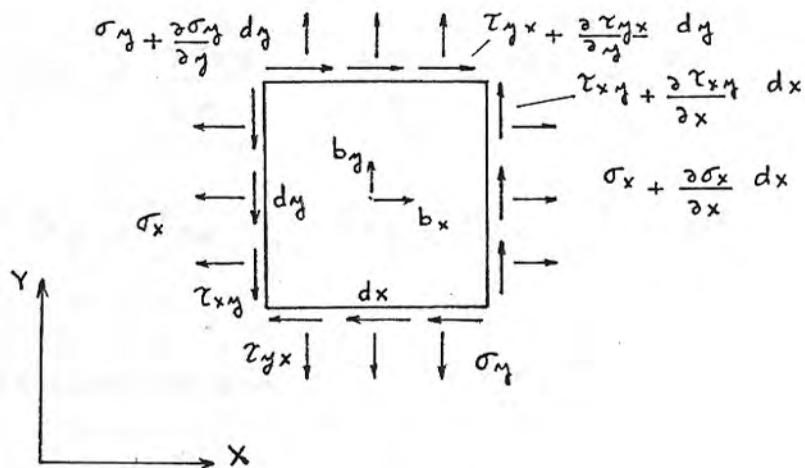


fig. 3.2

Las ecuaciones diferenciales del equilibrio resultan,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + b_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

(3.1)

Generalizando las ecuaciones 3.1 al caso tridimensional se obtiene las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

O en notación indicial,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_i &= 0 \\ i, j &= 1 \text{ a } 3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Las ecuaciones anteriores son aplicables a cualquier punto interior del cuerpo.

En los bordes donde las tracciones (fuerzas por unidad de superficie) T_x , T_y están prescritas, pueden establecerse relaciones de equilibrio entre éstos y los esfuerzos internos.

Estableciendo el equilibrio de fuerzas para el elemento diferencial de la figura 3.3 se obtiene,

$$\begin{aligned}\bar{T}_x &= \sigma_x m_x + \tau_{xy} m_y \\ \bar{T}_y &= \sigma_y m_y + \tau_{xy} m_x\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\vec{m} = m_x \vec{i} + m_y \vec{j} \quad (3.5)$$

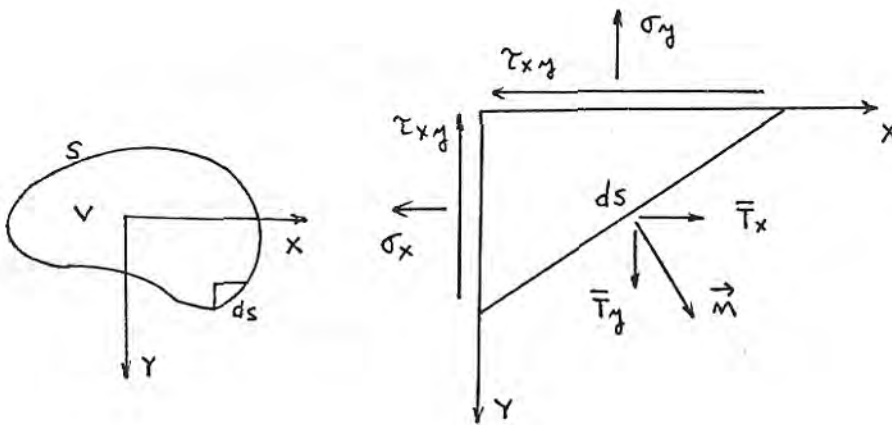


fig. 3.3

De igual manera para el caso tridimensional,

$$\begin{aligned}\sigma_x m_x + \tau_{xy} m_y + \tau_{xz} m_z &= \bar{T}_x \\ \tau_{yx} m_x + \sigma_y m_y + \tau_{yz} m_z &= \bar{T}_y \\ \tau_{zx} m_x + \tau_{zy} m_y + \sigma_z m_z &= \bar{T}_z\end{aligned}$$

$$\vec{m} = m_x \vec{i} + m_y \vec{j} + m_z \vec{k}$$

$$(3.6)$$

0 en notación indicial,

$$\sigma_{ij} m_j = \bar{T}_i \quad (3.7)$$

$$i, j = 1 \text{ a } 3$$

3.3 CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD

La determinación del estado de esfuerzos en un cuerpo sometido a la acción de fuerzas dadas, requiere resolver las ecuaciones diferenciales del equilibrio 3.3, y esta solución debe ser tal que satisfaga las condiciones de borde, es decir las ecuaciones 3.6. Este problema es estáticamente indeterminado y para obtener la solución es necesario considerar condiciones relativas a la deformación del cuerpo.

Se puede definir la configuración de un cuerpo como la posición simultánea de todas sus partículas, el desplazamiento como un cambio en la configuración del cuerpo y la deformación cuando porciones del cuerpo han sufrido desplazamientos relativos entre ellas. Aquí se considera que estos desplazamientos son pequeños en comparación con las dimensiones características del cuerpo en estudio.

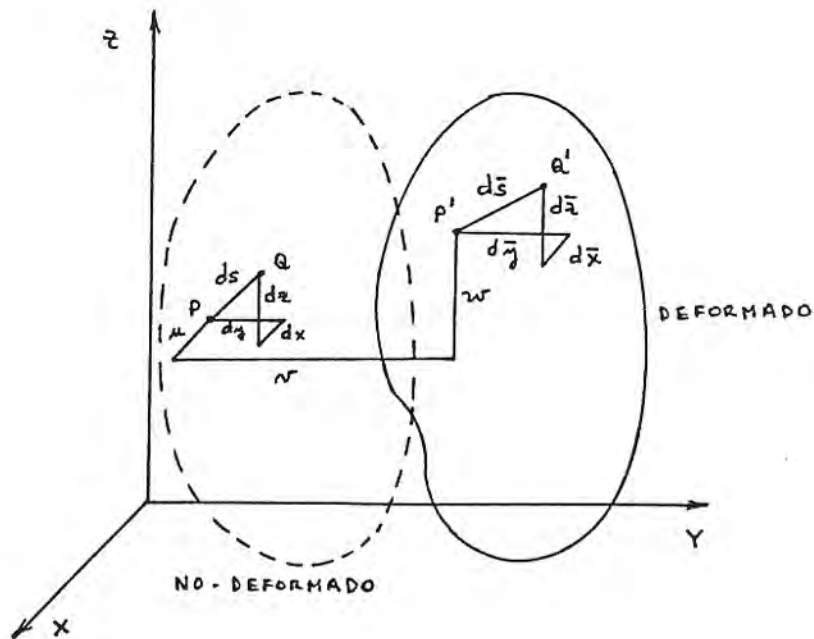


fig.3.4

En la figura anterior, para el cuerpo no-deformado,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.8)$$

Y para la configuración deformada del cuerpo, donde las partículas P y Q han sufrido un desplazamiento hasta las posiciones P' y Q' la longitud del elemento $d\bar{S}$ es,

$$d\bar{S}^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 \quad (3.9)$$

Las coordenadas iniciales para el punto P son (x, y, z) y en la configuración deformada para el punto P' se tiene $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; entonces las componentes del desplazamiento para el punto P en las direcciones x, y, z se definen como,

$$\mu = \bar{x} - x, \quad \nu = \bar{y} - y, \quad w = \bar{z} - z \quad (3.10)$$

De lo anterior,

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = 2(d\mu dx + d\nu dy + dw dz) + d\mu^2 + d\nu^2 + dw^2 \quad (3.11)$$

Por otro lado suponiendo que los desplazamientos son funciones continuas de x, y, z ,

$$d\mu_i = \mu_{i,j} dx_j \quad (3.12)$$

Sustituyendo 3.12 en 3.11,

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 - ds^2 = & 2 \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx^2 \\ & + 2 \left\{ \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dy^2 \\ & + 2 \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dz^2 \\ & + 2 \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \\ & + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dz \\ & + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy dz \end{aligned} \quad (3.13)$$

La diferencia $d\bar{s}^2 - ds^2$ es una medida conveniente para describir la deformación que sufre el cuerpo. Si esta diferencia es cero no ha ocurrido un desplazamiento relativo entre los puntos P y Q. Si $d\bar{s}^2 - ds^2$ es diferente de cero, el elemento original 'ds' ha tenido un cambio en longitud y orientación, en este caso el cuerpo ha sido deformado. El carácter de esta deformación es función de la magnitud de los coeficientes de los términos dx^2 , dy^2 , dz^2 , $dx dy$, $dx dz$, y $dy dz$ en la ecuación 3.13, por lo que estos coeficientes son medidas de deformación del cuerpo y la ecuación 3.13 puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 - ds^2 = & 2\epsilon_x dx^2 + 2\epsilon_y dy^2 + 2\epsilon_z dz^2 \\ & + 2\gamma_{xy} dx dy + 2\gamma_{xz} dx dz + 2\gamma_{yz} dy dz \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donde,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

(3.15.1)

y,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}$$

(3.15.2)

Las cantidades ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{xz} , y γ_{yz} son llamadas componentes de la deformación.

En el caso que las primeras derivadas de las componentes del desplazamiento son despreciables en comparación con la unidad, entonces las ecuaciones 3.15 pueden simplificarse, considerando sólo los términos lineales,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \epsilon_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2 \epsilon_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2 \epsilon_{yz} \quad (3.16)$$

En notación indicial,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i})$$

$$\gamma_{ij} = 2 \epsilon_{ij} \quad \text{si } i \neq j \quad (3.17)$$

3.4 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACION

Para un material linealmente elástico los esfuerzos están relacionados a las deformaciones unitarias por la siguiente expresión,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.18)$$

La ecuación anterior contiene 81 constantes, pero siendo σ_{ij} y ϵ_{kl} simétricos, éstas quedan reducidas solamente a 21.

Un material isotrópico sólo tiene dos constantes independientes y de la ecuación 3.18 se obtiene la ley de Hooke, que fue presentada por Cauchy en 1821,

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (3.19)$$

En la ecuación anterior λ y μ son las constantes de Lamé, δ_{ij} es el delta de Kronecker. Si ν es el módulo de Poisson,

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.20)$$

En forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccccccc} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{array} \right] & \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \\ \text{Sim.} & \end{matrix}$$

(3.21)

Es posible expresar las deformaciones unitarias como función de los esfuerzos,

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (3.22)$$

En función de E y ν ,

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (3.23)$$

En forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

3.5 ESTADO PLANO DE ESFUERZOS O DE DEFORMACIONES

Todos los problemas que se presentan son tridimensionales, pero existen casos extremos donde modelos bidimensionales son ingenierilmente apropiados, como los que a continuación se tratan.

Estado plano de esfuerzos

Esta situación corresponde al estado de esfuerzos en una lámina delgada cargada en su plano. En la figura 3.5 'h' es pequeño en comparación con las dimensiones en las direcciones de los ejes X e Y; en tal caso deben cumplirse las siguientes condiciones,

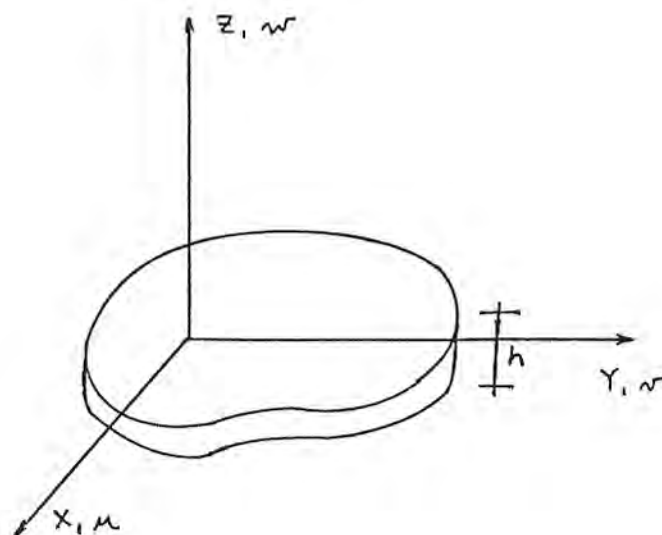


fig. 3.5

Las fuerzas o tracciones de superficie que actúan sobre

el cuerpo son planas e independientes de Z ($T_z = 0$, T_x y T_y son sólo funciones de X e Y).

Las fuerzas de cuerpo como en el caso anterior, son planas e independientes de Z ($b_z = 0$, b_x y b_y son sólo funciones de X e Y)

Si se cumplen todas las condiciones anteriores entonces es posible suponer que σ_z , τ_{zx} y τ_{zy} son despreciables en comparación con σ_x , σ_y y τ_{xy} y estas cantidades son constantes en la dirección Z .

Por consiguiente para el estado plano de esfuerzos se puede considerar,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad \text{en el volúmen.}$$

$$\sigma_x, \sigma_y \quad \text{y} \quad \tau_{xy} \quad \text{son independientes de } Z. \quad (3.26)$$

Los desplazamientos ' u ' y ' v ' son constantes en el espesor, sólo son función de X e Y , varían en el plano de esfuerzos de acuerdo a las propiedades del material.

El desplazamiento ' w ' no es independiente y puede ser obtenido de,

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \quad (3.27)$$

Estado plano de deformaciones

En este caso la estructura se supone infinitamente larga en la dirección Z, con la misma sección transversal y las mismas cargas a todo lo largo. Desde el punto de vista ingenieril, ciertas estructuras, tales como presas de tierra o algunos túneles pueden modelarse con esas condiciones.

En la figura 3.5, cuando 'h' es muy grande en comparación con las dimensiones del cuerpo en X e Y, se presenta el estado plano de deformaciones y es posible suponer que el desplazamiento en la dirección z, es decir 'w', es igual a cero. También se debe cumplir que las fuerzas de cuerpo y las tracciones de superficie son planas, actúan en el plano XY, y no tienen componentes en Z.

Para este estado se puede considerar que:

La componente de desplazamiento 'w' es cero.

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

σ_x , σ_y , τ_{xy} son independientes de Z.

$$\sigma_z \neq 0$$

Si bien las hipótesis de estados planos de esfuerzos y

estados planos de deformaciones corresponde a dos situaciones extremas, en ambos casos las únicas componentes de desplazamiento a considerar son aquellas en las direcciones X e Y. Adicionalmente, en ambas situaciones sólo realizan trabajo las componentes de esfuerzo σ_x , σ_y y τ_{xz} (en todos los otros casos las componentes de esfuerzo y/o deformación son cero). Por ello las expresiones resultantes en ambas situaciones son muy similares. Puede así observarse que las relaciones esfuerzo-deformación correspondientes al estado plano de esfuerzos en un medio isotrópico se obtienen modificando aquellas del estado plano de deformaciones, sólo es necesario sustituir el módulo de elasticidad 'E' y el módulo de Poisson ' ν ' por valores E' y ν' obtenidos mediante las expresiones,

$$E' = E (1 - \nu'^2)$$

$$\nu' = \frac{\nu}{(1 - \nu)}$$
(3.28)

El desarrollo de la integral de borde aplicada a los problemas de elasticidad que se hace en el próximo capítulo corresponde al caso de estados planos de deformaciones. Sin embargo con el cambio de las variables que se indica en la ecuación 3.28, es posible encontrar resultados para problemas de estados planos de esfuerzos.

CAPITULO IV

PROBLEMAS DE ELASTICIDAD LINEAL

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo se aplica la IB a problemas bidimensionales de elasticidad lineal, para una región homogénea e isotrópica, con módulo de corte "G" y módulo de Poisson " ν ",

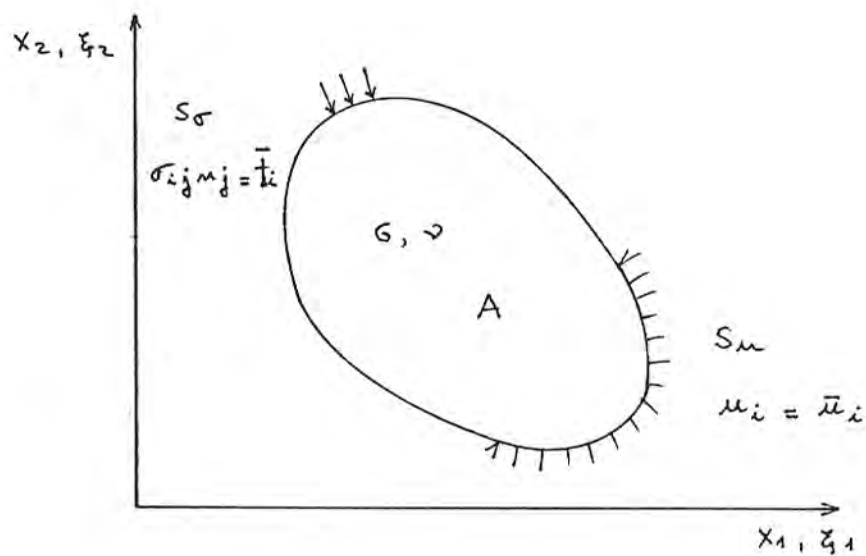


fig. 4.1

4.2 FORMULACION DE LA INTEGRAL DE BORDE

Por el principio de desplazamientos virtuales para problemas de elasticidad lineal se puede escribir,

$$\int_A u_i^* (\sigma_{ij,j} + b_i) dA = \int_{S_\sigma} u_i^* (t_i - \bar{f}_i) ds \quad (4.1)$$

Donde μ_i^* son los desplazamientos virtuales que satisfacen las condiciones de borde $\bar{\mu}_i^* = 0$ en S_u .

Si se interpreta μ_i^* como una función de ponderación que no satisface las condiciones sobre S_u , la ecuación 4.1 puede ser escrita como,

$$\int_A \mu_i^* (\sigma_{ij,j} + b_i) dA = \int_{S_\sigma} \mu_i^* (t_i - \bar{t}_i) ds + \int_{S_u} t_i^* (\bar{\mu}_i - \mu_i) ds \quad (4.2)$$

$t_i^* = \sigma_{ij}^* m_j$ son las tracciones correspondientes al sistema μ_i^* .

Integrando el término $\int_A \mu_i^* \sigma_{ij,j} dA$ de la ecuación 4.2 en un análisis lineal,

$$\int_A \mu_i^* \sigma_{ij,j} dA = \int_A (\mu_i^* \sigma_{ij}),_j dA - \int_A \mu_{i,j}^* \sigma_{ij} dA \quad (4.3)$$

Por el teorema de la divergencia,

$$\int_V F_{i,i} dV = \int_S F_i m_i ds$$

Se tiene,

$$\begin{aligned} \int_A (\mu_i^* \sigma_{ij}),_j dA &= \int_S \mu_i^* \sigma_{ij} n_j ds \\ &= \int_S \mu_i^* t_i ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\int_A \mu_{i,j}^* \sigma_{ij} dA = \int_A \epsilon_{ij}^* \sigma_{ij} dA \quad (4.5)$$

Entonces,

$$\int_A \mu_i^* \sigma_{ij},_j dA = \int_S \mu_i^* t_i ds - \int_A \epsilon_{ij}^* \sigma_{ij} dA \quad (4.6)$$

Reemplazando 4.6 en 4.2,

$$\begin{aligned} \int_A \mu_i^* b_i dA - \int_A \epsilon_{ij}^* \sigma_{ij} dA &= - \int_{S_\sigma} \mu_i^* \bar{t}_i ds - \int_{S_u} \mu_i^* t_i ds \\ &\quad + \int_{S_u} t_i^* (\bar{u}_i - u_i) ds \end{aligned} \quad (4.7)$$

En la ecuación anterior el término $\int_A \epsilon_{ij}^* \sigma_{ij} dA$ puede tomar la siguiente forma,

$$\int_A \epsilon_{ij}^* \sigma_{ij} dA = \int_A \epsilon_{ij} \sigma_{ij}^* dA$$

Y por la ecuación 4.3,

$$\int_A \epsilon_{ij} \sigma_{ij}^* dA = \int_S u_i t_i^* ds - \int_A u_i \sigma_{ij,j}^* dA \quad (4.8)$$

Reemplazando 4.8 en 4.7,

$$\begin{aligned} \int_A u_i^* b_i dA + \int_A u_i \sigma_{ij,j}^* dA &= - \int_{S_\sigma} u_i^* \bar{t}_i ds - \int_{S_u} u_i t_i ds \\ &+ \int_{S_u} t_i^* \bar{u}_i ds + \int_{S_\sigma} t_i^* u_i ds \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como $S = S_u + S_\sigma$ entonces,

$$\int_A u_i^* b_i dA + \int_A u_i \sigma_{ij,j}^* dA = \int_S t_i^* u_i ds - \int_S u_i^* t_i ds \quad (4.10)$$

En la ecuación 4.10 se considera que el sistema (*) es el correspondiente al de la solución fundamental que satisfaga la siguiente ecuación,

$$\sigma_{ij,j}^* + e_i^*(\xi) = 0 \quad (4.11)$$

Donde $e_i^*(\xi)$ indica una carga unitaria en el punto " ξ " en la dirección "i".

4.3 SOLUCION FUNDAMENTAL

El campo de desplazamientos $u_i(x)$ debido a una carga unitaria $e_j(\xi)$ en un cuerpo elástico tiene la siguiente forma para un análisis en estado plano de deformaciones,

$$u_i(x) = g_{ij}(x, \xi) e_j(\xi) \quad (4.12)$$

$$g_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + \frac{y_i y_j}{r^2} \right]$$

$$r^2 = y_i y_i$$

$$y_i = (x - \xi)_i, \quad y_j = (x - \xi)_j$$

Las deformaciones $\epsilon_{ij}(x)$ pueden ser obtenidas reemplazando las ecuaciones 4.12 en las relaciones deformación - desplazamiento,

$$\epsilon_{ij}(x) = b_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi) \quad (4.13)$$

$$b_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}y_j + \delta_{jk}y_i) + 2\frac{y_i y_j y_k}{r^2} - \delta_{ij}y_k \right]$$

Los esfuerzos son deducidos de las relaciones esfuerzo-deformación y son,

$$\sigma_{ij}(x) = s_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi) \quad (4.14)$$

$$s_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}y_j + \delta_{jk}y_i - \delta_{ij}y_k) + \frac{2y_i y_j y_k}{r^2} \right]$$

Las tracciones de superficie $t_i(x)$ en un punto sobre el borde resultan,

$$t_i(x) = \sigma_{ij}(x) m_j(x)$$

$$t_i(x) = h_{ik}(x, \xi) e_k(\xi) \quad (4.15)$$

$$h_{ik}(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(m_k y_i - m_i y_k) + \left[(1-2\nu)\delta_{ik} + \frac{2y_i y_k}{r^2} \right] y_j m_j \right\}$$

4.4 APLICACION DE LA INTEGRAL DE BORDE A ESTADO PLANO DE ESFUERZOS O DE DEFORMACIONES

A partir de la ecuación 4.10 y para Estado Plano de Deformaciones,

$$\int_A u_i^* b_i dA + \int_A u_i \sigma_{ij,j}^* dA = \int_S t_i^* u_i ds - \int_S u_i^* t_i ds \quad (4.16)$$

Por la ecuación 4.11,

$$\sigma_{ij,j}^* = -e_i^*(\xi)$$

$$\begin{aligned}
\int_A \mu_i \sigma_{ij}^* dA(z) &= - \int_A \mu_i e_i^*(\xi) dA(z) \\
&\quad z \in A \\
&= - \int_A \mu_i e_i^*(\xi) \delta(z, \xi) dA(z) \\
&= - \int_A \mu_i e_j^*(\xi) \delta_{ij} \delta(z, \xi) dA(z) \\
&\quad (4.17)
\end{aligned}$$

Reemplazando 4.17, 4.12 y 4.15 en 4.16,

$$\begin{aligned}
\int_A g_{ij} e_j^*(\xi) b_i dA - \int_A \mu_i e_j^*(\xi) \delta_{ij} \delta(z, \xi) dA &= \\
= \int_S h_{ij} e_j^*(\xi) \mu_i ds - \int_S g_{ij} e_j^*(\xi) t_i ds
\end{aligned}$$

Simplificando $e_j^*(\xi)$ de todas las integrales,

$$\begin{aligned}
\int_A \mu_i \delta_{ij} \delta(z, \xi) dA + \int_S h_{ij} \mu_i ds &= \int_S g_{ij} t_i ds + \\
&+ \int_A g_{ij} b_i dA \\
&\quad (4.18)
\end{aligned}$$

En esta última expresión el primer término se puede simplificar de la siguiente forma,

$$\int_A \mu_i \delta_{ij} \delta(z, \xi) dA = \int_A \mu_j \delta(z, \xi) dA = \beta \mu_j(\xi) \quad (4.19)$$

Con $\beta = 1$ dentro de la región y $\beta = 0$ fuera del borde.

Reemplazando 4.19 en 4.18, y sin considerar las fuerzas de cuerpo ($b_i = 0$) se obtiene,

$$\mu_j(\xi) + \int_S h_{ij}(x, \xi) \mu_i(x) dS(x) = \int_S g_{ij}(x, \xi) t_i(x) dS(x) \quad (4.20)$$

La ecuación 4.20 permite calcular los desplazamientos en un punto interior " ξ ", para aplicar esta ecuación a un problema dado se tiene que llevar el punto ξ hacia el borde ($\xi \rightarrow x_0$),

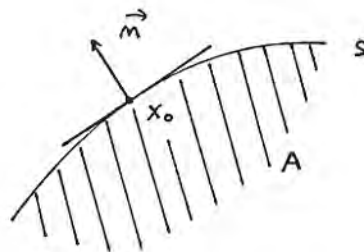


fig. 4.2

Para el punto "X₀" sobre el borde "S" los términos de la ecuación 4.20 resultan,

$$\begin{aligned} \mu_j(\xi) &= \mu_j(x_0) \\ \int_S g_{ij}(x, \xi) \tau_i(x) ds(x) &= \int_S g_{ij}(x, x_0) \tau_i(x) ds(x) \\ \int_S h_{ij}(x, \xi) \mu_i(x) ds(x) &= \alpha_{ij} \mu_i(x_0) + \int_S h_{ij}(x, x_0) \mu_i(x) ds(x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Donde α_{ij} es un coeficiente que depende del tipo de borde donde está el punto x_0 ; para un borde como el de la figura 4.2 y para un problema interior (A dentro de S)

$\alpha_{ij} = -1/2 \delta_{ij}$. La ecuación correspondiente se obtiene reemplazando 4.21 en 4.20,

$$\frac{1}{2} \mu_j(x_0) + \int_S h_{ij}(x, x_0) \mu_i(x) ds = \int_S g_{ij}(x, x_0) \tau_i(x) ds(x) \quad (4.22)$$

En forma general, para cualquier tipo de borde sobre el cual este x_0 , la ecuación 4.22 tiene la siguiente forma,

$$c_{ij}(x_0) \mu_i(x_0) + \int_S h_{ij}(x, x_0) \mu_i(x) ds = \int_S g_{ij}(x, x_0) \tau_i(x) ds \quad (4.23)$$

4.5 ELEMENTOS DE BORDE

Para aplicar la ecuación 4.23 el borde de la región debe ser discretizado ya sea en elementos constantes, lineales, cuadráticos, etc., como se muestra en la siguiente figura,

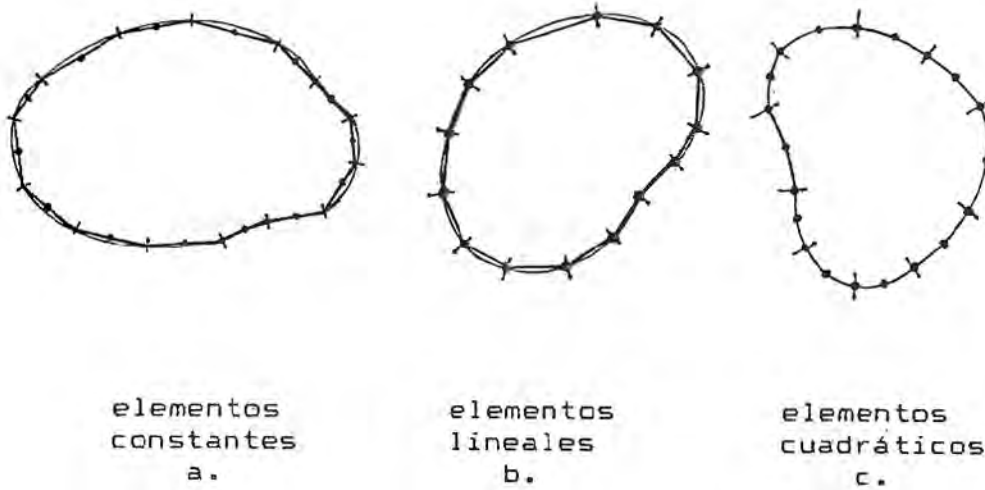


fig. 4.3

4.5.1 Elementos constantes

En este caso los nudos están al centro de cada elemento de borde (fig. 4.3a). Los valores de "u" (desplazamientos) y "t" (tracciones) son considerados constantes sobre cada elemento de borde e iguales a los correspondientes valores en el nudo.

Partiendo de la ecuación 4.23,

$$c_{ij}(x_0) u_i(x_0) + \int_S h_{ij}(x, x_0) u_i(x) ds = \int_S g_{ij}(x, x_0) t_i(x) ds$$

En forma matricial esta ecuación es para el nudo de borde "k",

$$\underline{\hat{c}}^k \underline{u}^k + \int_S \underline{h} \underline{u} ds = \int_S \underline{g} \underline{t} ds \quad (4.24)$$

Si los elementos son constantes \underline{u} y \underline{t} pueden salir fuera de la integral,

$$\underline{\hat{c}}^k \underline{u}^k + \sum_{j=1}^m \left(\int_{S_j} \underline{h} ds \right) \underline{u}^j = \sum_{j=1}^m \left(\int_{S_j} \underline{g} ds \right) \underline{t}^j \quad (4.25)$$

La sumatoria se hace desde el elemento de borde $j=1$ hasta $j=n$, \underline{u}^j y \underline{t}^j son los desplazamientos y tracciones sobre el elemento "j".

Si,

$$\underline{\hat{H}}^{kj} = \int_{S_j} \underline{h} ds$$

$$\tilde{G}^{kj} = \int_{s_j} \tilde{g} \, ds \quad (4.26)$$

\hat{H}^{kj} y \tilde{G}^{kj} son matrices de orden 2, que relacionan el nudo "k" con el segmento "j" sobre el cual se lleva a cabo la integración,

$$\tilde{C}^k \tilde{u}^k + \sum_{j=1}^m \hat{H}^{kj} \tilde{u}^j = \sum_{j=1}^m \tilde{G}^{kj} \tilde{t}^j \quad (4.27)$$

Se puede escribir la ecuación 4.27 para cada nudo de borde "k", obteniendo en total $2 \times n$ ecuaciones (para "n" nudos o elementos de borde, en cada nudo se tienen dos grados de libertad).

Si en la ecuación 4.27 se hace,

$$\tilde{H}^{kj} = \hat{H}^{kj} + \tilde{C}^k \quad \text{si } k=j$$

$$\tilde{H}^{kj} = \hat{H}^{kj} \quad k \neq j$$

(4.28)

$$\tilde{C}^k = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{para elementos constantes}$$

Reemplazando 4.28 en 4.27,

$$\sum_{j=1}^m \underline{H}^{kj} \underline{u}^j = \sum_{j=1}^m \underline{G}^{kj} \underline{t}^j \quad (4.29)$$

Escribiendo esta ecuación para todos los nudos "k" se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para el borde de la región, tomando en cuenta que si en un nudo la tracción "t" es conocida el desplazamiento "u" es desconocido y viceversa,

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{T}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{t} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Reordenando,

$$\begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & -\underline{H}_{12} \\ \underline{G}_{21} & -\underline{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & -\underline{G}_{12} \\ \underline{H}_{21} & -\underline{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{t} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Resolviendo la ecuación 4.31 se encuentran las incógnitas del borde de la región, a partir de lo cual pueden calcularse desplazamientos en puntos interiores con la expresión 4.20,

$$\begin{aligned} u_i(\xi) + \int_S h_{ij}(x, \xi) u_j(x) ds(x) &= \int_S g_{ij}(x, \xi) t_j(x) ds(x) \\ u_j(\xi) &= \int_S g_{ij}(x, \xi) t_j(x) ds - \int_S h_{ij}(x, \xi) u_j(x) ds \end{aligned} \quad (4.32)$$

En forma matricial para un punto interior " ξ ",

$$\underline{u}(\xi) = \int_S \underline{g}(x, \xi) \underline{t}(x) ds - \int_S \underline{h}(x, \xi) \underline{u}(x) ds \quad (4.33)$$

Para elementos constantes y un nudo interior "i",

$$\underline{u}^i = \sum_{k=1}^m \left\{ \int_{S_k} \underline{g} ds \right\} \underline{t}^k - \sum_{k=1}^m \left\{ \int_{S_k} \underline{h} ds \right\} \underline{u}^k \quad (4.34)$$

Con esta última expresión se calculan los desplazamientos en un nudo o punto interior "i", a partir de los desplazamientos y tracciones de borde.

Los esfuerzos para un punto interior " ξ " pueden ser

calculados con las siguientes expresiones,

$$\sigma_{jk}(\xi) = \int_S t_i(x) T_{ijk}^*(x, \xi) ds(x) - \int_S \mu_i(x) E_{ijk}^*(x, \xi) ds(x) \quad (4.35)$$

$$T_{ijk}^*(x, \xi) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \frac{\partial g_{im}}{\partial \xi_m} + G \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi_j} \right)$$

$$E_{ijk}^*(x, \xi) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \frac{\partial h_{im}}{\partial \xi_m} + G \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial \xi_j} \right)$$

(4.36)

$$\Delta_i, \quad a_1 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad a_2 = 1-2\nu$$

$$a_3 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \quad a_4 = 1-4\nu$$

$$T_{ijk}^*(x, \xi) = \frac{a_1}{r} \left(\frac{a_2}{r} (\delta_{ik} y_j + \delta_{ij} y_k - \delta_{jk} y_i) + \frac{2y_i y_j y_k}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
 E_{ijk}^* (x, \xi) = & \frac{a_3}{n^2} \left(\frac{m_l m_e}{n^2} \left\{ 2 a_2 \delta_{jk} y_i + 2 \nu (\delta_{ij} y_k + \delta_{ik} y_j) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{8 y_i y_j y_k}{n^2} \right\} + m_j \left(\frac{2 \nu y_i y_k}{n^2} + a_2 \delta_{ik} \right) + \right. \\
 & \left. m_k \left(\frac{2 \nu y_j y_i}{n^2} + a_2 \delta_{ij} \right) + m_i \left(\frac{2 a_2 y_j y_k}{n^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. a_4 \delta_{jk} \right) \right)
 \end{aligned}$$

(4.37)

4.5.2 Elementos lineales

La ecuación 4.23 en forma matricial para un nudo de borde "k" tiene la siguiente forma,

$$\underline{\underline{c}}^k \underline{\underline{u}}^k + \int_S \underline{\underline{h}} \underline{\underline{u}} ds = \int_S \underline{\underline{q}} \underline{\underline{t}} ds$$

(4.38)

Discretizando esta ecuación si se tienen "n" elementos de borde,

$$\underline{\underline{c}}^k \underline{\underline{u}}^k + \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{s_j} h \underline{\underline{u}} ds \right\} = \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{s_j} q \underline{\underline{t}} ds \right\} \quad (4.39)$$

En este tipo de elementos $\underline{\underline{u}}$ y $\underline{\underline{t}}$ no pueden salir fuera de la integral porque varían linealmente en el elemento; una forma de expresar esta variación es a través de ciertas funciones ϕ_1 y ϕ_2 que interpolan linealmente sobre el elemento "j" los valores que se tienen en los nudos extremos.

De acuerdo a la figura 4.4 se puede definir $\underline{\underline{u}}$ y $\underline{\underline{t}}$ de la siguiente forma,

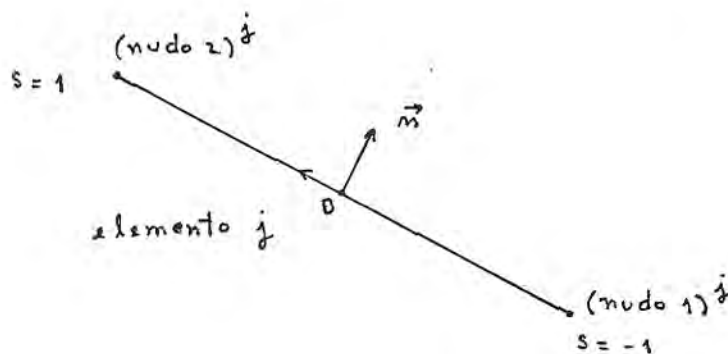


fig. 4.4

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1^{m_1} \\ \mu_1^{m_2} \\ \mu_2^{m_1} \\ \mu_2^{m_2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\mu}}^j$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^{m_1} \\ \tau_1^{m_2} \\ \tau_2^{m_1} \\ \tau_2^{m_2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\tau}}^j$$

(4.39)

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}(s-1) \quad , \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(s+1)$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en 4.38 se tiene para los elementos lineales la siguiente expresión,

$$\underline{\underline{c}}^k \underline{\underline{\mu}}^k + \sum_{j=1}^m \left\{ \int \underline{\underline{h}} \underline{\underline{\phi}}^T ds \right\} \underline{\underline{\mu}}^j = \sum_{j=1}^m \left\{ \int \underline{\underline{g}} \underline{\underline{\phi}}^T ds \right\} \underline{\underline{\tau}}^j$$

(4.40)

El ensamblaje es similar al de potencial, considerando solamente en este caso que se tienen dos incógnitas en lu-

gar de una en cada nudo de borde, la ecuación 4.40 puede ser escrita en la siguiente forma,

Si,

$$\underline{H}^{kj} = \int_{s_j} \underline{h} \underline{\phi}^T ds, \quad k \neq j \quad (4.41)$$

$$\underline{H}^{kj} = \int \underline{h} \underline{\phi}^T ds + \underline{c}^k, \quad k = j$$

$$\sum_{j=1}^m \underline{H}^{kj} \underline{u}^j = \sum_{j=1}^m \underline{G}^{kj} \underline{t}^j \quad (4.42)$$

Donde \underline{c}^k es una matriz de orden 2 que depende del tipo de borde donde se ubique el nudo k. Esta matriz se puede calcular en forma indirecta como se verá más adelante.

Escribiendo esta expresión para los n nudos de borde se llega a la siguiente expresión,

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{T} \quad (4.43)$$

Las matrices \underline{H} y \underline{G} son de orden $2n$, \underline{U} y \underline{T} son vectores de $2n$ elementos. La ecuación 4.43 puede ser expresada en la

siguiente forma, donde \bar{u} y \bar{t} son valores prescritos,

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Reordenando,

$$\begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & -\underline{H}_{12} \\ \underline{G}_{21} & -\underline{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & -\underline{G}_{12} \\ \underline{H}_{21} & -\underline{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{t} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \quad (4.45)$$

Resolviendo esta ecuación se encuentran las incógnitas t y \bar{u} del borde.

Las submatrices \underline{C}^k que deben sumarse sobre la diagonal principal (ecuaciones 4.41) pueden ser fácilmente obtenidos considerando un estado de desplazamientos U de cuerpo rígido (v.g. un vector cuyas componentes de desplazamiento en la dirección X son unos y aquellas en la dirección Y son cero o viceversa). En tal caso las tracciones de borde son nulas y en la ecuación 4.43 se tiene,

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{0} \quad (4.46)$$

4.6 EJEMPLOS DE APLICACION

La figura 4.5 muestra una placa de acero de 0.5 cm. de espesor, con un agujero circular de 4 cm. de radio en su centro, sujeta a una fuerza distribuida de 300 kg/cm a lo largo del eje X. Se aplicará la IB a este problema para evaluar la variación del esfuerzo a lo largo de AB, usando un programa con elementos constantes. Las propiedades del material son $E = 2'100,000 \text{ kg/cm}^2$ y Módulo de Poisson = 0.2 .

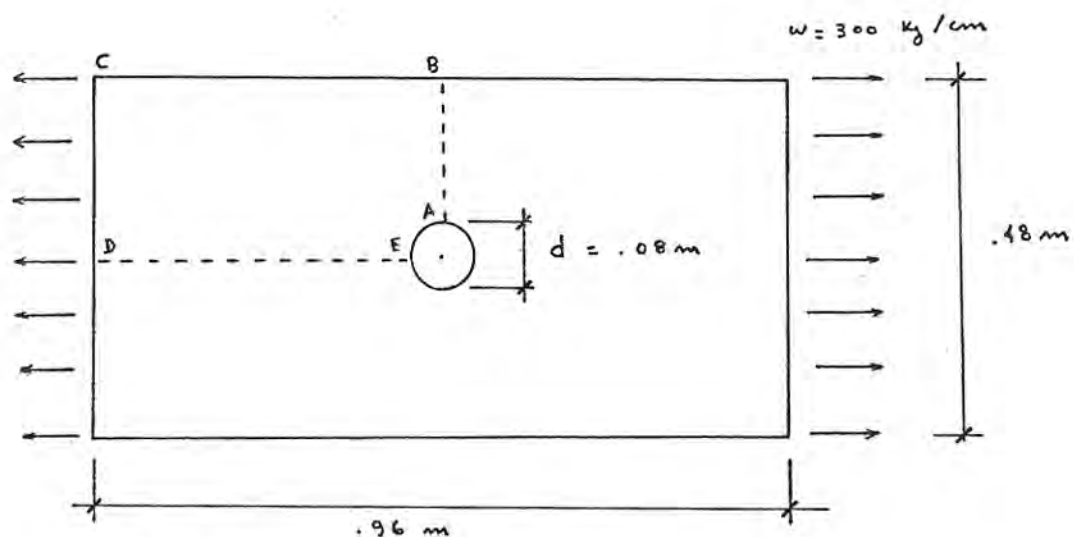


fig. 4.5

Por la simetría de la placa, así como de las cargas aplicadas, sólo es necesario analizar la región ABCDE mostrada en la figura anterior. La fuerza distribuida aplicada de-

be darse por unidad de espesor de placa para el análisis.

A continuación se muestra el borde de la región ABCDE discretizado en 42 elementos constantes y sus valores prescritos.

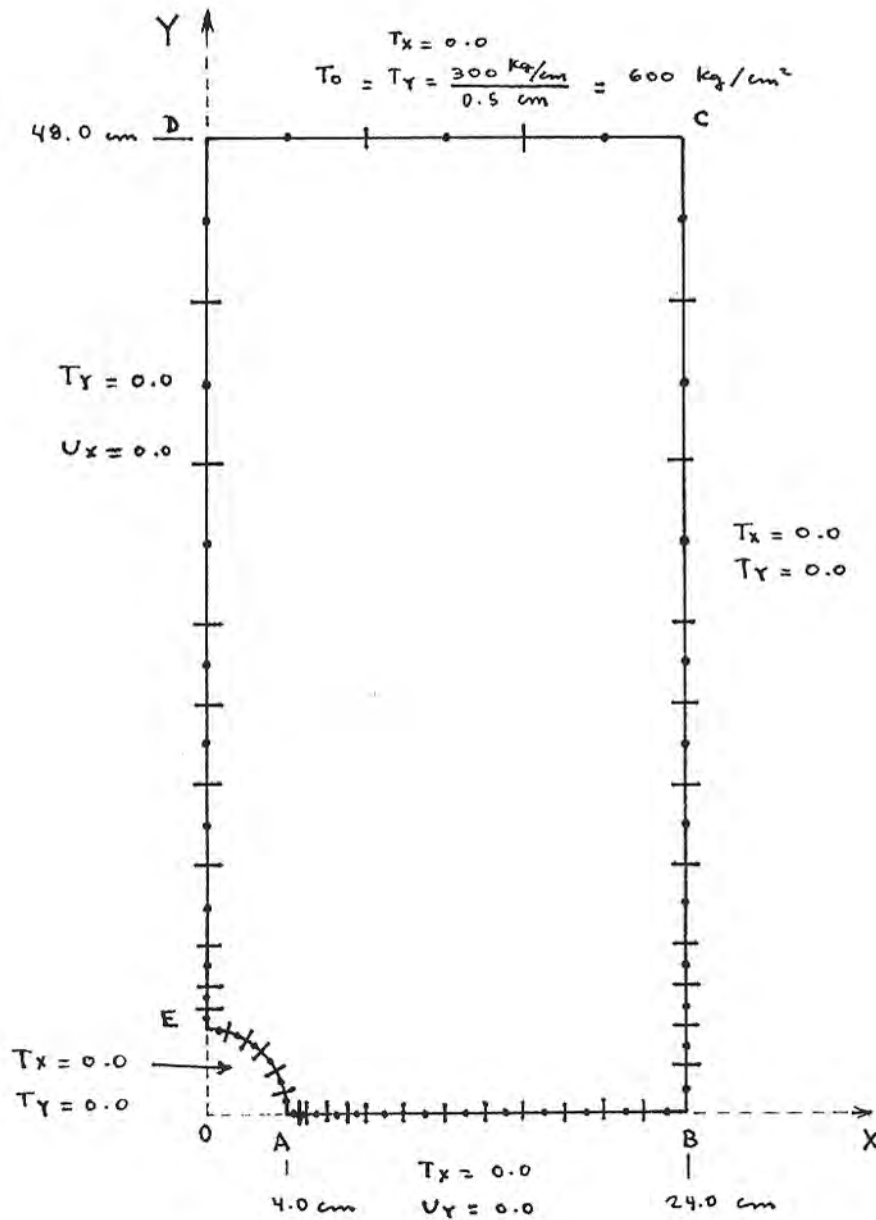


fig. 4.6

La siguiente figura muestra la variación de T_y/T_0 sobre AB, los valores teóricos dados por Timoshenko (Ref.4) están representados por la línea continua y también están graficados los valores obtenidos por el programa de elementos constantes para los 13 nudos de borde situados sobre AB

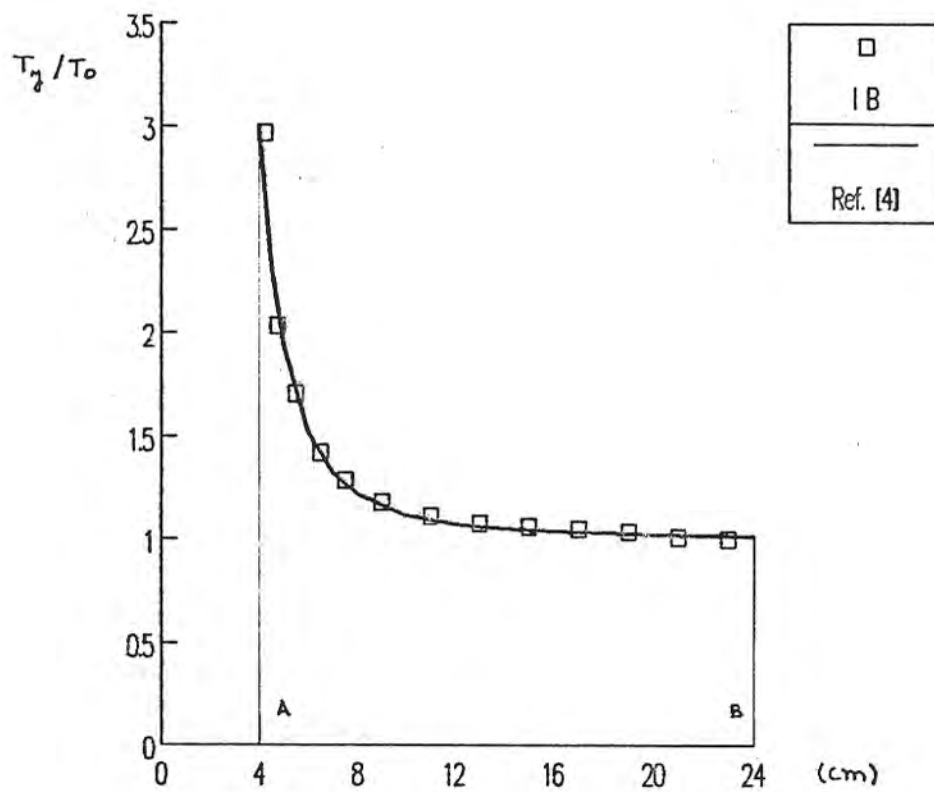


fig. 4.7

Excavación de una caverna en un medio rocoso

En este ejemplo se analiza la influencia de la excavación de una caverna en un medio rocoso; se considera que el estado tensional inicial en la roca es constante en la zona de excavación e igual a : $\sigma_x = -138.00 \text{ T/m}^2$, $\sigma_y = -690.00 \text{ T/m}^2$ y $\tau_{xy} = 0.00 \text{ T/m}^2$.

En general para un punto situado a una profundidad "h" en un estrato rocoso se tiene : $\sigma_x = -k \gamma h$ y $\sigma_y = -\gamma h$, donde k es un coeficiente que define la relación entre las compresiones horizontal y vertical en el estado natural de la roca (ref.7). Para este ejemplo se está considerando un valor de $k=0.2$.

Las propiedades de la roca son :

Módulo de Elasticidad (E) = 450,000 kg/cm², Módulo de Poisson (ν) = 0.18, peso específico (γ) = 2.3 T/m³, resistencia a la compresión simple (σ_c) = 1,500 Kg/cm².

El estado final de esfuerzos en la roca es igual a la suma del estado inicial de esfuerzos más el esfuerzo producido por las tracciones que aparecen al ser excavada la caverna (estas cargas se desarrollan a partir del estado inicial de esfuerzos y son consecuencia del desequilibrio tensional originado en el contorno de la excavación). El análisis lineal del problema justifica el uso del principio de superposición de esfuerzos.

La geometría de la caverna a excavar se observa en la siguiente figura,

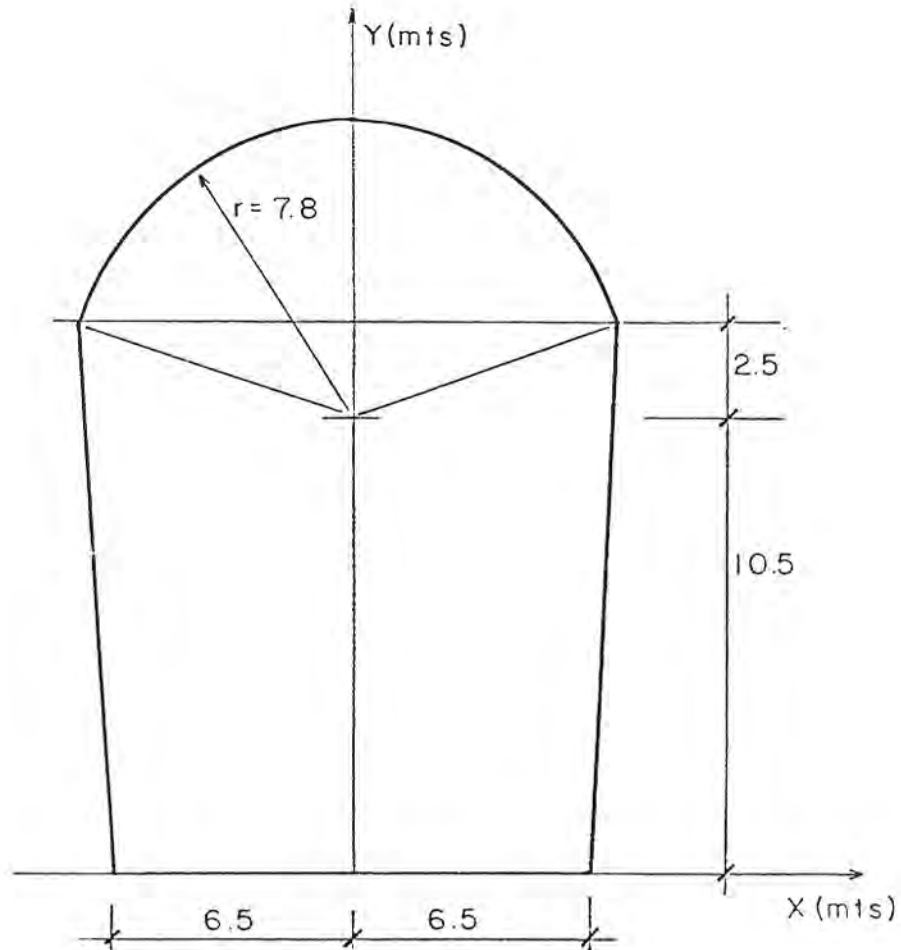


fig. 4.8

Para aplicar el método de la IB el borde de la caverna se discretiza en 63 elementos de borde constantes como se observa en la figura 4.9. En los 63 nudos de borde se prescribe las tracciones que están mostradas en la tabla 4.1, a partir de lo cual los desplazamientos pueden ser encontrados, el programa de aplicación da como resultado los desplazamientos graficados en la figura 4.10.

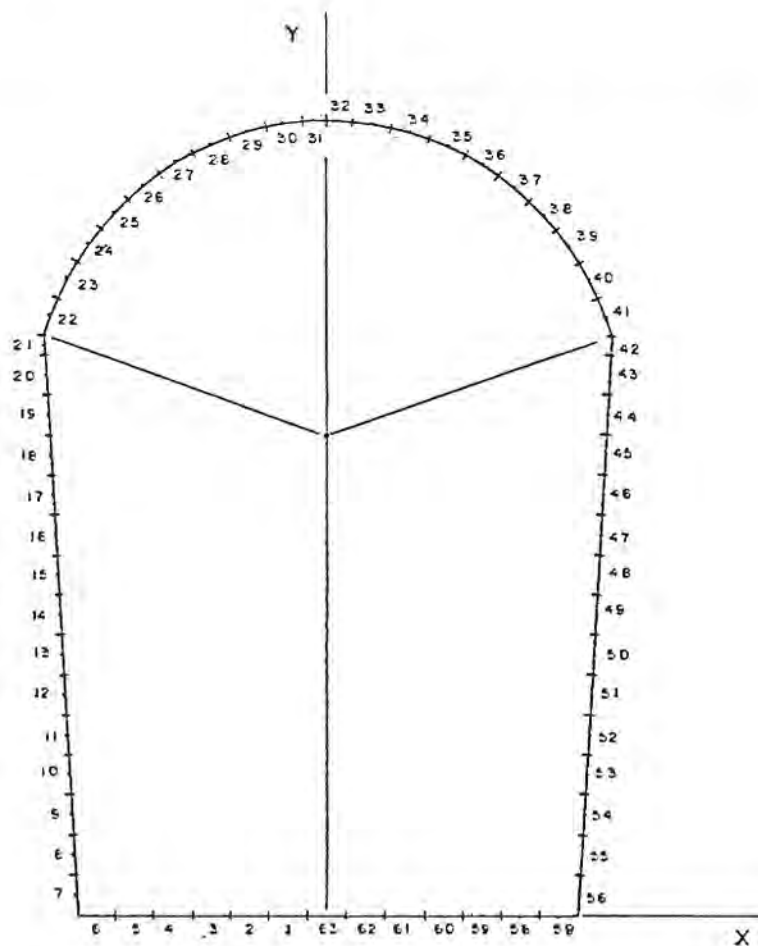
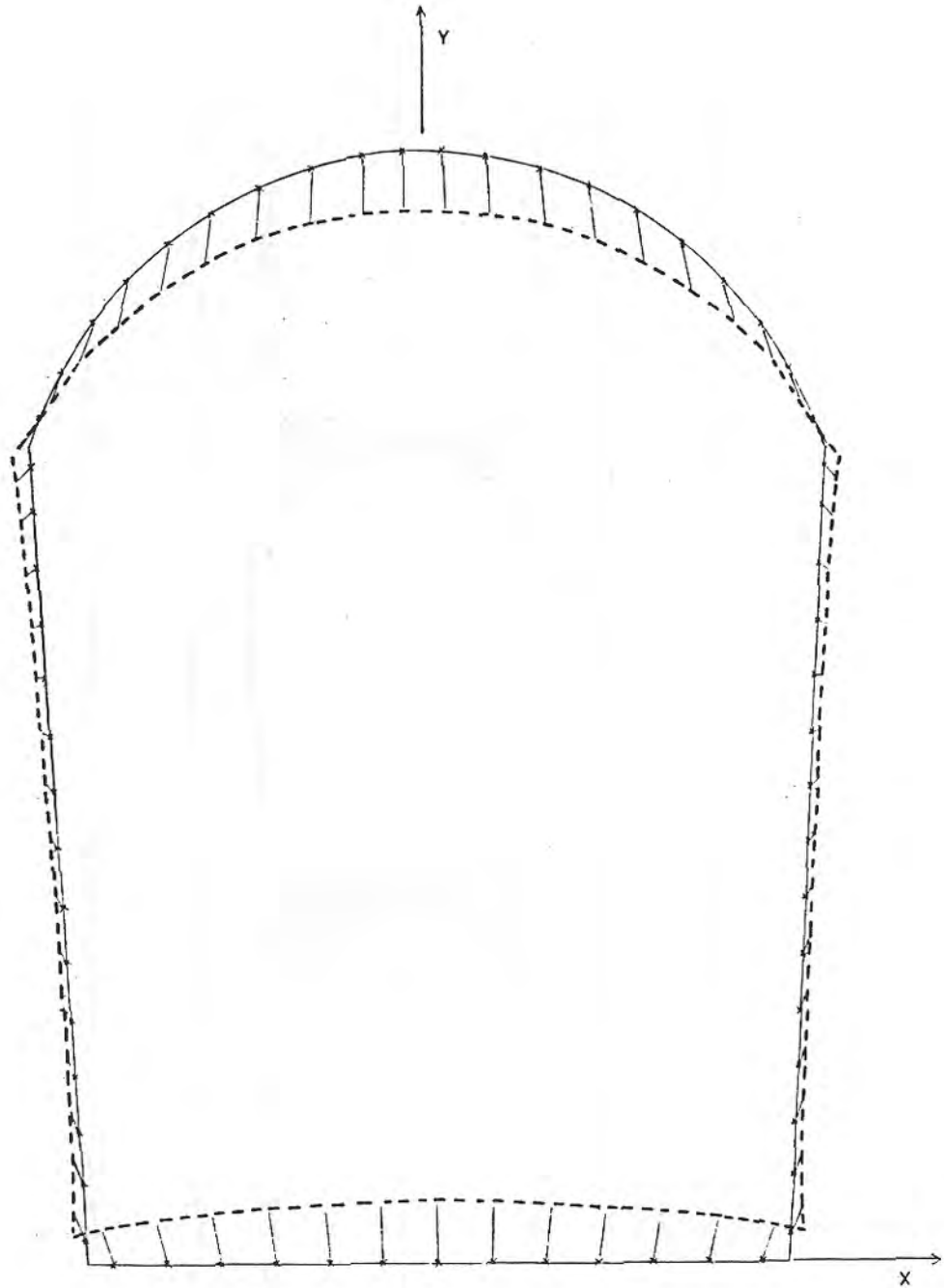


fig. 4.9

TABLA No. 4.1
CONDICIONES DE BORDE

DEL NUDO	AL NUDO	TRACCION X (T/M2)	TRACCION Y (T/M2)
1	6	.00	690.00
7	21	137.72	42.74
22	22	126.11	-280.24
23	23	117.75	-359.80
24	24	110.40	-414.00
25	25	97.58	-487.90
26	26	82.80	-552.00
27	27	69.97	-594.74
28	28	61.72	-617.16
29	29	35.12	-667.28
30	30	28.92	-674.68
31	31	9.83	-688.25
32	32	-9.83	-688.25
33	33	-28.92	-674.68
34	34	-35.12	-667.28
35	35	-61.72	-617.16
36	36	-69.97	-594.74
37	37	-82.80	-552.00
38	38	-97.58	-487.90
39	39	-110.40	-414.00
40	40	-117.75	-359.80
41	41	-126.11	-280.24
42	56	-137.72	42.74
57	63	.00	690.00

DESPLAZAMIENTOS EN LOS NUDOS DE BORDE



ESCALA :	
DESPLAZAMIENTOS	0 2.5 mm
LONGITUDES	0 1 m

FIG.4.10

DISTRIBUCION Y MAGNITUD DE
ESFUERZOS PRINCIPALES

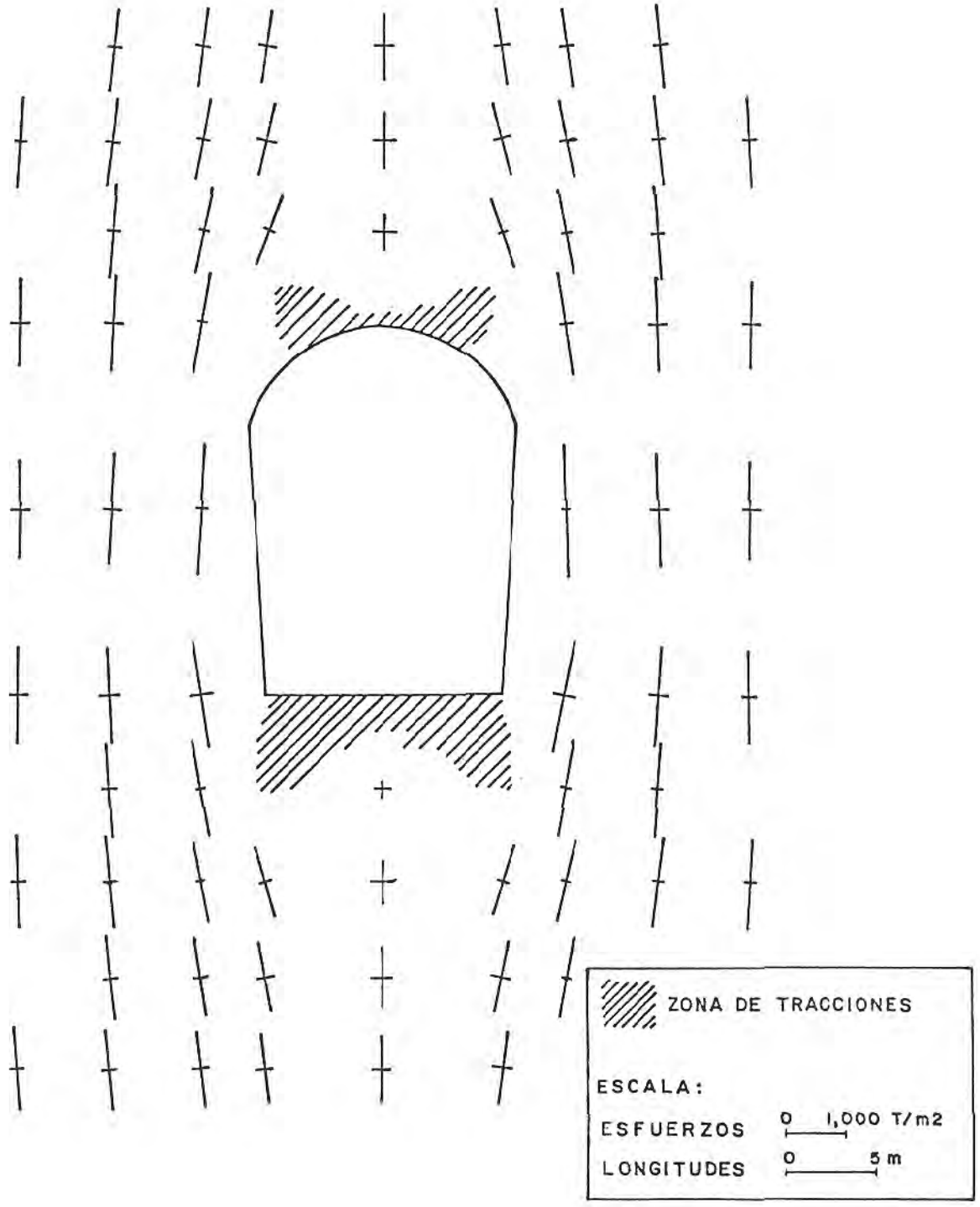


FIG. 4.11

ZONA DE TRACCIONES

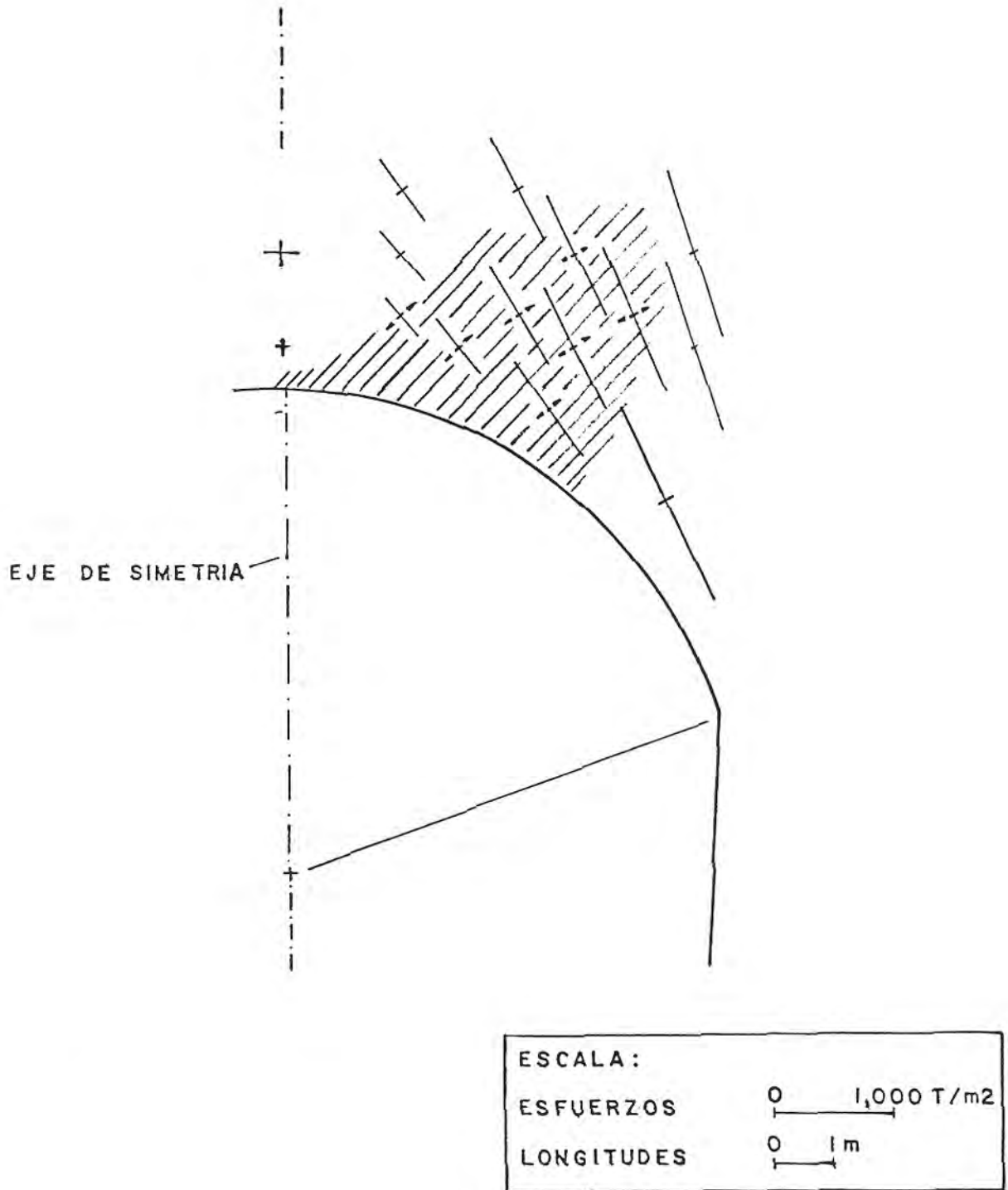


FIG. 4.12

La figura 4.11 muestra la distribución de los esfuerzos principales de compresión en la zona de excavación; este cálculo se hace a partir de los desplazamientos y tracciones de bordes en el contorno de la excavación (se usan las expresiones 4.35). Las zonas achuradas en la figura son aquellas donde se presentan esfuerzos de tracción con posible fisuración de la roca. En la figura 4.12 se muestra con más detalle la parte superior del túnel con esfuerzos en tracción.

Los valores de los esfuerzos de compresión calculados varían desde casi cero hasta $1,300 \text{ T/m}^2$ (130 Kg/cm^2). La resistencia de la roca a compresión simple es de $1,500 \text{ Kg/cm}^2$ que corresponde a la mayoría de rocas ígneas cuyos valores de resistencia a la compresión simple se encuentran entre $1,120 \text{ Kg/cm}^2$ y $2,250 \text{ Kg/cm}^2$.

Consolidación, sustentación e inyecciones en rocas

Existen ciertas técnicas para mejorar el comportamiento de la roca en relación con obras de ingeniería como túneles, presas u otras estructuras. En el caso de la construcción de túneles se pueden usar la sustentación mediante revestimientos, la consolidación mediante bulones o anclajes y las inyecciones.

La sustentación de un macizo rocoso significa que se pro-

vee una resistencia pasiva para soportar las cargas transmitidas por la roca cuando ésta llega al estado de rotura. Los revestimientos en acero, concreto, bóvedas de ladrillo y puntales de acero o madera trabajan en esta forma. La consolidación de la roca en cambio significa que se aumenta la resistencia de la roca para evitar su rotura. Entre las formas de consolidación más usuales figura el bulonado, que es un sistema de pernos anclados en la roca que introduce esfuerzos de compresión que equilibran, al menos en parte, las tracciones que resultan de la excavación del macizo rocoso.

Las inyecciones consisten en hacer penetrar un fluido en la roca; normalmente este es una mezcla de cemento Portland y de agua, se puede agregar arena, polvo de roca y otros materiales con el objeto de reducir el costo cuando las fisuras en la roca son lo suficientemente grandes como para absover grandes cantidades de mezcla. Con el objeto de hacer penetrar estos materiales en las fisuras más finas, es necesario que la mezcla contenga una cantidad de agua relativamente grande, muy superior a la necesaria para provocar la hidratación del cemento. La inyección requiere de presiones muy elevadas para hacer penetrar la mezcla en las fisuras más finas y expulsar el exceso de agua asegurando un producto final de adecuada resistencia.

La inyección puede usarse en los siguientes casos:

1. Reparación de los daños causados por las voladuras en el entorno de túneles y excavaciones.
2. Transmisión a la roca circundante de las tensiones de túneles en carga.
3. Consolidación de las excavaciones de túneles, reduciéndose el espesor en caso de usar revestimientos.
4. Eliminación de filtraciones de agua.

Otra alternativa para mejorar el comportamiento de la roca es el bulonado de las zonas en las que se desarrollan tracciones (zonas fracturadas) por encima y debajo del túnel; por regla general las paredes laterales están en compresión. En las zonas de tracción la roca tiende a aflojarse y el revestimiento o bulonado debe proyectarse para soportar el peso de esta roca. Los bulones deben ser anclados fuera de la zona de tracción y deben ser colocados lo más rápidamente posible después de la voladura. Cuando la roca está muy fisurada se usa una malla metálica sujeta a los bulones para evitar el desprendimiento de pequeños pedazos de roca.

Desde el punto de vista del análisis, considerar los efectos de las inyecciones no requiere técnicas distintas de las ya expuestas, excepto obviamente por la necesidad de definir propiedades del material adecuadamente modificadas. Por otro lado, las técnicas de bulonado requiere

ren considerar fuerzas concentradas, no tratadas en secciones precedentes.

Las fuerzas concentradas, en el interior de la región que se analiza, pueden considerarse como un caso particular de fuerzas de cuerpo. Incluyendo tales fuerzas, las expresiones correspondientes a las 4.23 serían,

$$C_{ij}(x_0) u_i(x_0) + \int_S h_{ij}(x, x_0) u_i(x) dS(x) = \int_S g_{ij}(x, x_0) t_i(x) dS(x) + \int_A b_i(z) g_{ij}(z, x_0) dA(z)$$

donde $b_i(z) = P_i(z) \delta(z)$. En este caso $\delta(z)$ corresponde al delta de Kronecker en el punto de coordenadas z y las $P_i(z)$ indican las componentes i de la fuerza en ese punto.

La expresión 4.25 se modifica entonces como sigue,

$$\tilde{C}_{ij}^k + \sum_{j=1}^m \left(\int_{S_j} \tilde{h}_{ij} ds \right) \tilde{u}_i^j = \sum_{j=1}^m \left(\int_{S_j} \tilde{g}_{ij} ds \right) \tilde{t}_i^j + \sum_{l=1}^{nfc} P_l(z^l) \tilde{g}_{ij}(z^l, x^k)$$

nfc = número de puntos internos con fuerzas concentradas

A continuación se analiza el efecto de colocar bulones en la bóveda del túnel, se han usado 12 de ellos, cada uno con una fuerza total de 60 toneladas por metro de espesor, en las direcciones mostradas en la figura 4.13. El

EXCAVACION CON BULONADO

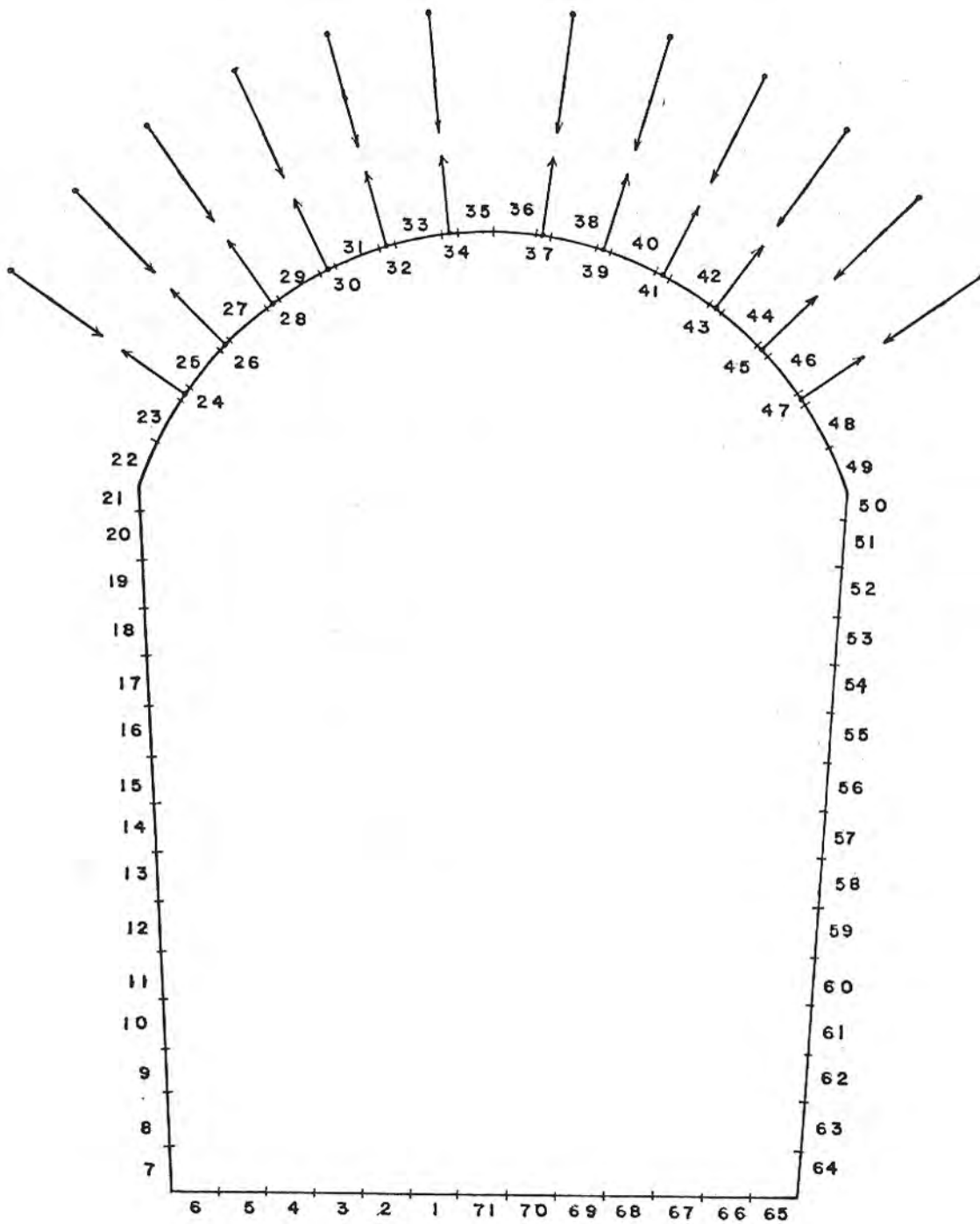


FIG 4.13

ESCALA:
LONGITUDES 0 2 m

borde de la región ha sido discretizado en 71 elementos, se usan elementos más pequeños, de 0.3 mts. de longitud, donde están aplicadas las cargas de los bulones.

Las tracciones de borde prescritas resultan de la superposición de dos estados tensionales, el primero es el originado por la excavación de la caverna (caso anterior) y el segundo son las cargas que introducen los bulones en el macizo rocoso.

En la figura 4.14 se presentan los resultados del programa para este caso, graficados en los mismos puntos de la figura 4.12 (sin bulonado). Puede observarse que la zona de tracción (sombreada en la figura) ha disminuido de tamaño, mejorándose de esta forma el comportamiento de la roca en la bóveda del túnel.

El ejemplo precedente muestra la facilidad con que el proceso permite estudiar medios infinitos. Es evidente que el número total de incógnitas es muchísimo menos que el requerido para un análisis por elementos finitos. Esto no sólo significa un menos tiempo de cómputo sino, lo que es más importante, mucho menos esfuerzo en la preparación de datos e interpretación de resultados.

ZONA DE TRACCIONES CON BULONADO

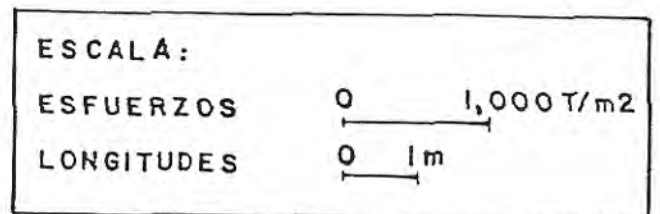
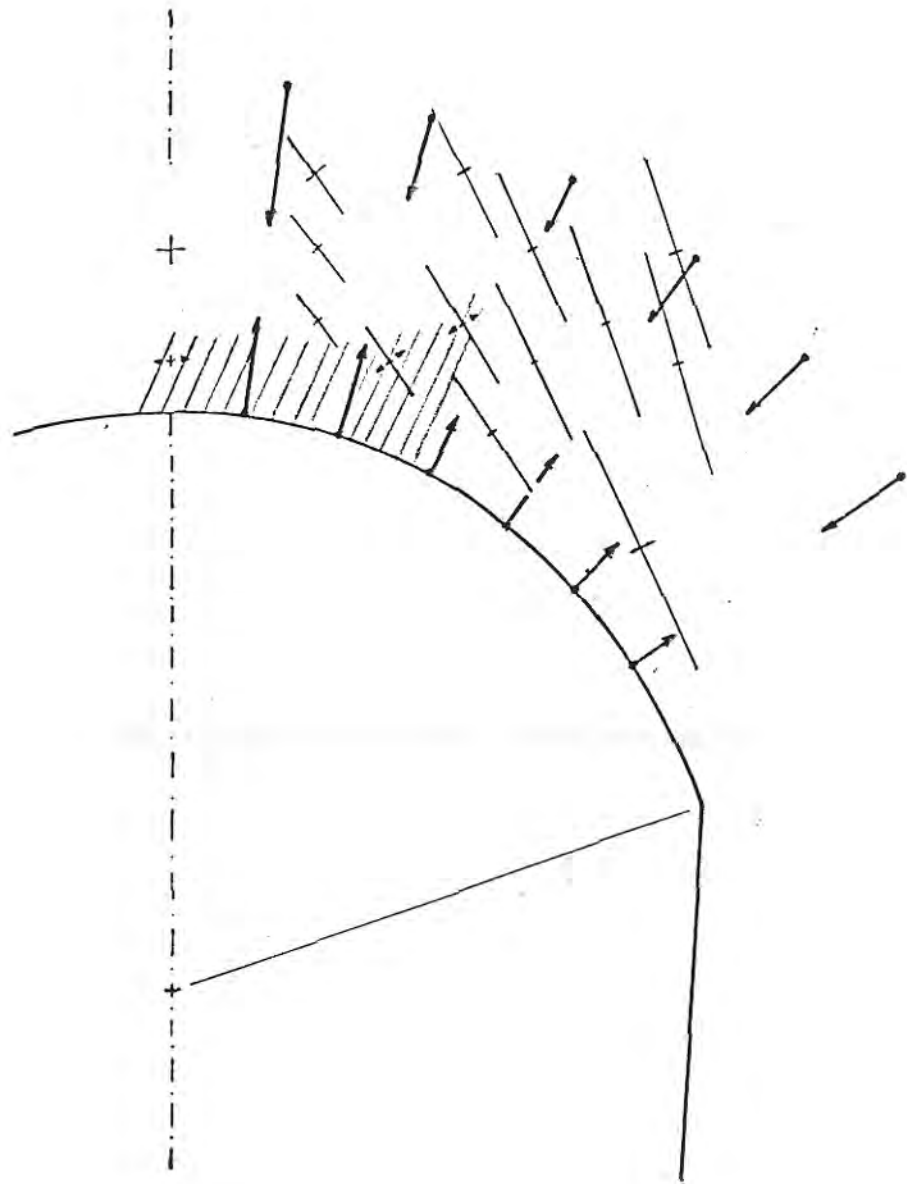


FIG. 4.14

C A P I T U L O V

APLICACION A REGIONES NO HOMOGENEAS

5.1 INTRODUCCION

Esta clase de problemas se refiere a analizar cuerpos que tienen regiones con diferentes clases de materiales; a veces es también necesario dividir un cuerpo homogéneo en subregiones cuando sus dimensiones no son muy regulares a fin de mejorar la aproximación a la solución real.

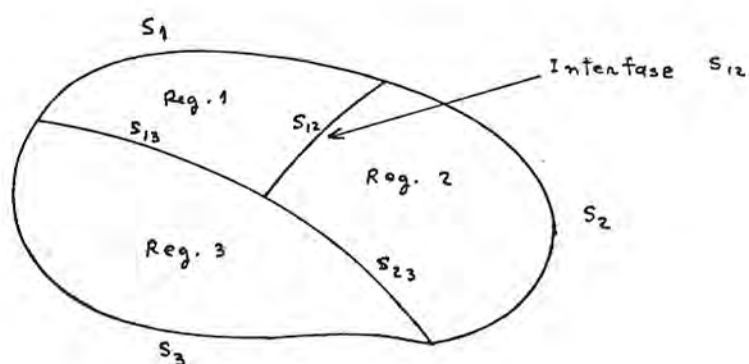


fig. 5.1

En este capítulo se aplicará la Integral de Borde a estos casos, ya sea para problemas de potencial o de elasticidad lineal.

En general, se divide el cuerpo no homogéneo en una serie de regiones (cada una del mismo material) como se observa en la figura 5.1, a continuación se escribe las ecuaciones correspondientes para cada región y finalmente se ensamblan las ecuaciones en una sola, aprovechando las condiciones de compatibilidad y equilibrio en las interfases

de las regiones. Resolviendo el sistema final se encuentran todas las incógnitas del borde y los valores respectivos sobre las interfases, a partir de lo cual pueden calcularse valores en puntos interiores.

5.2 PROBLEMAS DE POTENCIAL

Por simplicidad se considera el cuerpo mostrado en la figura 5.2,

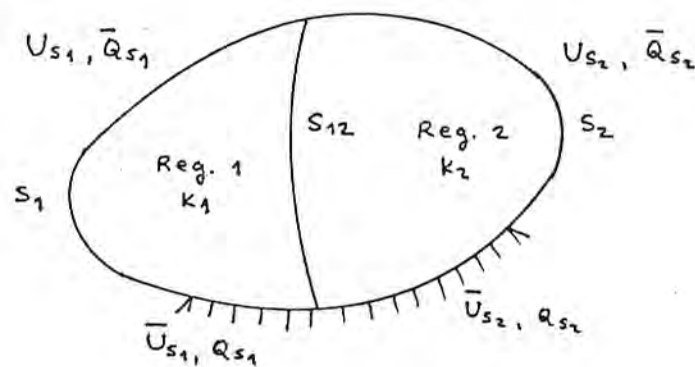


fig. 5.2

La interfase entre las dos regiones se llamará S_{12} .

Para la región 1 se puede definir,

Q_{S_1}, \bar{Q}_{S_1} flujos en la superficie externa S_1

$Q_{S_{12}}^1$ flujos en la interf. S_{12} de la región 1

U_{S_1}, \bar{U}_{S_1} potenciales en la superficie externa S_1

$U_{S_{12}}^1$ potenciales en la interf. S_{12} de la región 1

Para la región 2,

Q_{S_2}, \bar{Q}_{S_2} flujos en la superficie externa S_2

$Q_{S_{12}}^2$ flujos en la interf. S_{12} de la región 2

U_{S_1}, \bar{U}_{S_1} potenciales en la superficie externa S_2

$U_{S_{12}}^2$ potenciales en la interf. S_{12} de la región 2

Puede considerarse el cuerpo de la figura 5.2 como compuesto por dos regiones independientes,

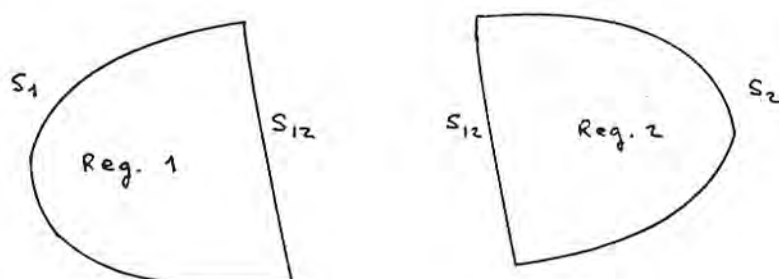


fig. 5.3

Aplicando la ecuación 2.18 (en el caso de elementos constantes) a cada región de la figura 5.3,

$$\begin{pmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{13}^1 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{23}^1 \\ G_{31}^1 & G_{32}^1 & G_{33}^1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{S_1} \\ \bar{Q}_{S_1} \\ Q_{S_{12}}^1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 & H_{13}^1 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 & H_{23}^1 \\ H_{31}^1 & H_{32}^1 & H_{33}^1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{S_1} \\ U_{S_1} \\ U_{S_{12}}^1 \end{Bmatrix}$$

(5.1)

$$\begin{pmatrix} G_{11}^2 & G_{12}^2 & G_{13}^2 \\ G_{21}^2 & G_{22}^2 & G_{23}^2 \\ G_{31}^2 & G_{32}^2 & G_{33}^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{s_2} \\ \bar{Q}_{s_2} \\ Q_{s_{12}}^2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^2 & H_{12}^2 & H_{13}^2 \\ H_{21}^2 & H_{22}^2 & H_{23}^2 \\ H_{31}^2 & H_{32}^2 & H_{33}^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{s_2} \\ U_{s_2} \\ U_{s_{12}}^2 \end{Bmatrix}$$

(5.2)

Para la región 1 el sistema de ecuaciones 5.1 puede escribirse como,

$$\begin{pmatrix} G_{11}^1 & -H_{12}^1 & G_{13}^1 & -H_{13}^1 \\ G_{21}^1 & -H_{22}^1 & G_{23}^1 & -H_{23}^1 \\ G_{31}^1 & -H_{32}^1 & G_{33}^1 & -H_{33}^1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{s_1} \\ U_{s_1} \\ Q_{s_{12}}^1 \\ U_{s_{12}}^1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^1 & -G_{12}^1 \\ H_{21}^1 & -G_{22}^1 \\ H_{31}^1 & -G_{32}^1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{s_1} \\ \bar{Q}_{s_1} \end{Bmatrix}$$

(5.3)

Análogamente, para la región 2 se obtiene de 5.2,

$$\begin{pmatrix} G_{11}^2 & -H_{12}^2 & G_{13}^2 & -H_{13}^2 \\ G_{21}^2 & -H_{22}^2 & G_{23}^2 & -H_{23}^2 \\ G_{31}^2 & -H_{32}^2 & G_{33}^2 & -H_{33}^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{s_2} \\ U_{s_2} \\ Q_{s_{12}}^2 \\ U_{s_{12}}^2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^2 & -G_{12}^2 \\ H_{21}^2 & -G_{22}^2 \\ H_{31}^2 & -G_{32}^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{s_2} \\ \bar{Q}_{s_2} \end{Bmatrix}$$

(5.4)

En la interfase S_{12} se debe cumplir,

$$\begin{aligned} \text{a) } U_{S_{12}}^1 &= U_{S_{12}}^2 = V_{12} \\ \text{b) } Q_{S_{12}}^1 &= -Q_{S_{12}}^2 = Q_{12} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ensamblando 5.3 y 5.4 tomando en cuenta 5.5,

$$\begin{pmatrix} G_{11}^1 & -H_{12}^1 & G_{13}^1 & -H_{13}^1 & 0 & 0 \\ G_{21}^1 & -H_{22}^1 & G_{23}^1 & -H_{23}^1 & 0 & 0 \\ G_{31}^1 & -H_{32}^1 & G_{33}^1 & -H_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{13}^2 & -H_{13}^2 & G_{11}^2 & -H_{12}^2 \\ 0 & 0 & -G_{23}^2 & -H_{23}^2 & G_{21}^2 & -H_{22}^2 \\ 0 & 0 & -G_{33}^2 & -H_{33}^2 & G_{31}^2 & -H_{32}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{S_1} \\ U_{S_1} \\ Q_{12} \\ U_{12} \\ Q_{S_2} \\ U_{S_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^1 & -G_{12}^1 & 0 & 0 \\ H_{21}^1 & -G_{22}^1 & 0 & 0 \\ H_{31}^1 & -G_{32}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{11}^2 & -G_{12}^2 \\ 0 & 0 & H_{21}^2 & -G_{22}^2 \\ 0 & 0 & H_{31}^2 & -G_{32}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_{S_1} \\ \bar{Q}_{S_1} \\ \bar{U}_{S_2} \\ \bar{Q}_{S_2} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Resolviendo el sistema 5.6 se encuentran todas las incógnitas del borde y de la interfase S_{12} , a partir de las cuales pueden calcularse valores en puntos interiores de las dos regiones usando las expresiones desarrolladas para regiones homogéneas.

Por ejemplo, si se quiere calcular el potencial en un punto interior de la región 2 se aplica la ecuación 2.21, considerando esta región en forma independiente; los va-

lores de borde de potencial y flujo que se toman en cuenta para la ecuación 2.21 son los del borde S_1 y de la interfase S_{12} , como se muestra en la siguiente figura,

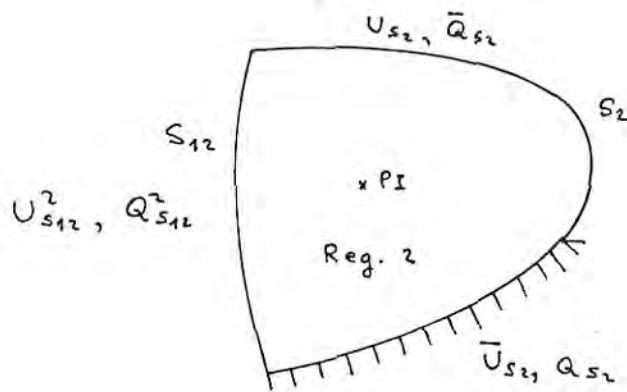


fig. 5.4

5.3 PROBLEMAS DE ELASTICIDAD

El procedimiento es semejante al de potencial. Nuevamente tiene que dividirse el cuerpo no homogéneo en regiones del mismo material. En el caso de un cuerpo homogéneo con una dimensión mucho mayor que la otra, se divide al cuerpo en subregiones regulares para mejorar la aproximación a la solución,

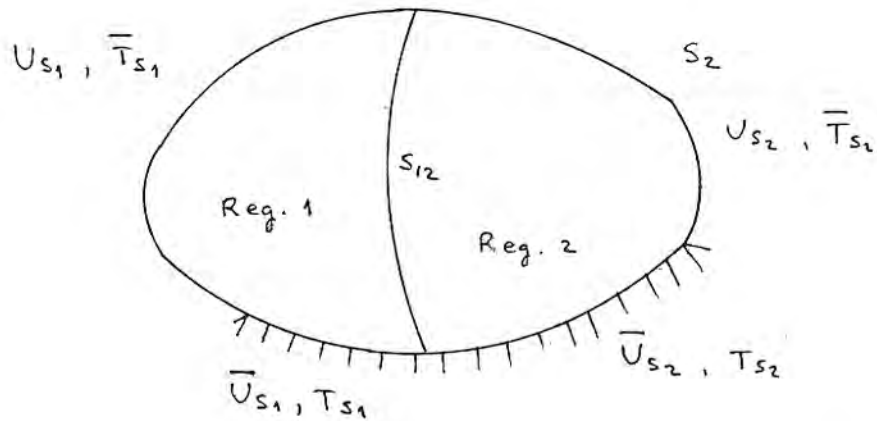


fig. 5.5

De acuerdo con la figura 5.5,

T_{S_1}, \bar{T}_{S_1} tracciones en la superficie externa S_1
 $T_{S_{12}}^1$ tracciones en la interfase S_{12} de la región 1
 U_{S_1}, \bar{U}_{S_1} desplazamientos en la superficie externa S_1
 $U_{S_{12}}^1$ desplazamientos en la interfase S_{12} de la región 1

Y,

T_{S_2}, \bar{T}_{S_2} tracciones en la superficie externa S_2
 $T_{S_{12}}^2$ tracciones en la interfase S_{12} de la región 2
 U_{S_2}, \bar{U}_{S_2} desplazamientos en la superficie externa S_2
 $U_{S_{12}}^2$ desplazamientos en la interfase S_{12} de la región 2

En la interfase S_{12} se debe cumplir,

a) Por compatibilidad de desplazamientos,

$$U_{S_{12}}^1 = U_{S_{12}}^2 = U_{12}$$

b) Por equilibrio de fuerzas,

$$T_{S_{12}}^1 = -T_{S_{12}}^2 = T_{12}$$

(5.7)

Se aplica la ecuación 4.30 a cada región y tomando en cuenta la ecuación 5.7 se llega al sistema de ecuaciones 5.8, de la misma forma que en el caso de potencial,

$$\begin{pmatrix} G_{11}^1 & -H_{12}^1 & G_{13}^1 & -H_{13}^1 & 0 & 0 \\ G_{21}^1 & -H_{22}^1 & G_{23}^1 & -H_{23}^1 & 0 & 0 \\ G_{31}^1 & -H_{32}^1 & G_{33}^1 & -H_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{13}^2 & -H_{13}^2 & G_{11}^2 & -H_{12}^2 \\ 0 & 0 & -G_{23}^2 & -H_{23}^2 & G_{21}^2 & -H_{22}^2 \\ 0 & 0 & -G_{33}^2 & -H_{33}^2 & G_{31}^2 & -H_{32}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{S_1} \\ U_{S_1} \\ T_{12} \\ U_{12} \\ T_{S_2} \\ U_{S_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^1 & -G_{12}^1 & 0 & 0 \\ H_{21}^1 & -G_{22}^1 & 0 & 0 \\ H_{31}^1 & -G_{32}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{11}^2 & -G_{12}^2 \\ 0 & 0 & H_{21}^2 & -G_{22}^2 \\ 0 & 0 & H_{31}^2 & -G_{32}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_{S_1} \\ \bar{Q}_{S_1} \\ \bar{U}_{S_2} \\ \bar{Q}_{S_2} \end{pmatrix}$$

(5.8)

Con las ecuaciones 4.34 y 4.35 se pueden encontrar valores en puntos interiores, considerando las regiones donde están estos puntos como independientes.

5.4 EJEMPLOS DE APLICACION

Flujo a través de la cimentación de una presa

La figura 5.6 muestra una presa construida sobre 3 estratos de suelo cada uno con una permeabilidad anisotrópica de $k_h = 4k_v$, donde k_h y k_v son los coeficientes de permeabilidad horizontal y vertical respectivamente. La presa tiene también un espaldón para mejorar su estabilidad.

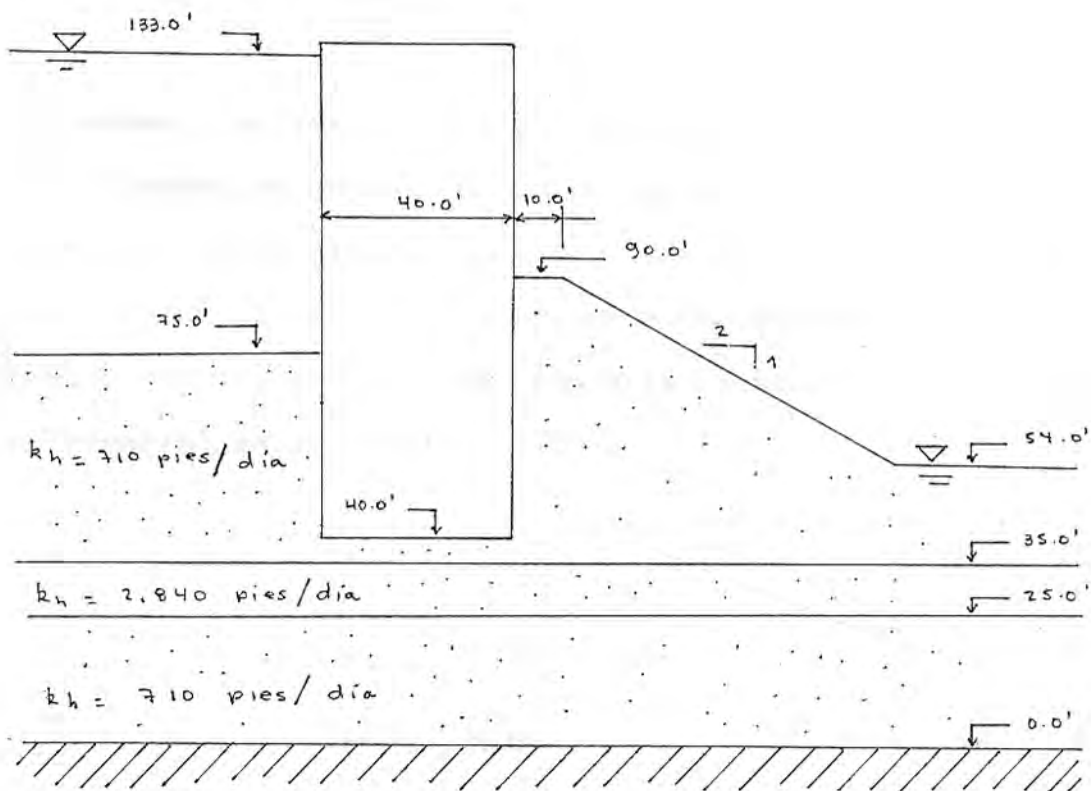


fig. 5.6

Para el análisis la presa se considera impermeable, el flujo es permanente y no-confinado, en el espaldón se forma una superficie libre y también una superficie de descarga las cuales deben ser ubicadas para la solución del problema.

En la referencia (6) se muestran los resultados para este problema usando el Método de Elementos Finitos. La región discretizada, las líneas equipotenciales en porcentaje, la ubicación de la superficie libre y de descarga se muestran en la figura 14.8b.

El mismo problema es también resuelto usando el Método de la Integral de Borde, con un programa para regiones no-homogéneas desarrollado en la presente tesis, el problema de la anisotropía del suelo se puede obviar haciendo un cambio de variables (se cambia la escala de los ejes de referencia) en la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= X \\ \eta_2 &= Y \sqrt{(k_h / k_v)} \\ k &= \sqrt{k_h k_v} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Con el cambio de variable anterior cada estrato de suelo puede ser considerado como isotrópico.

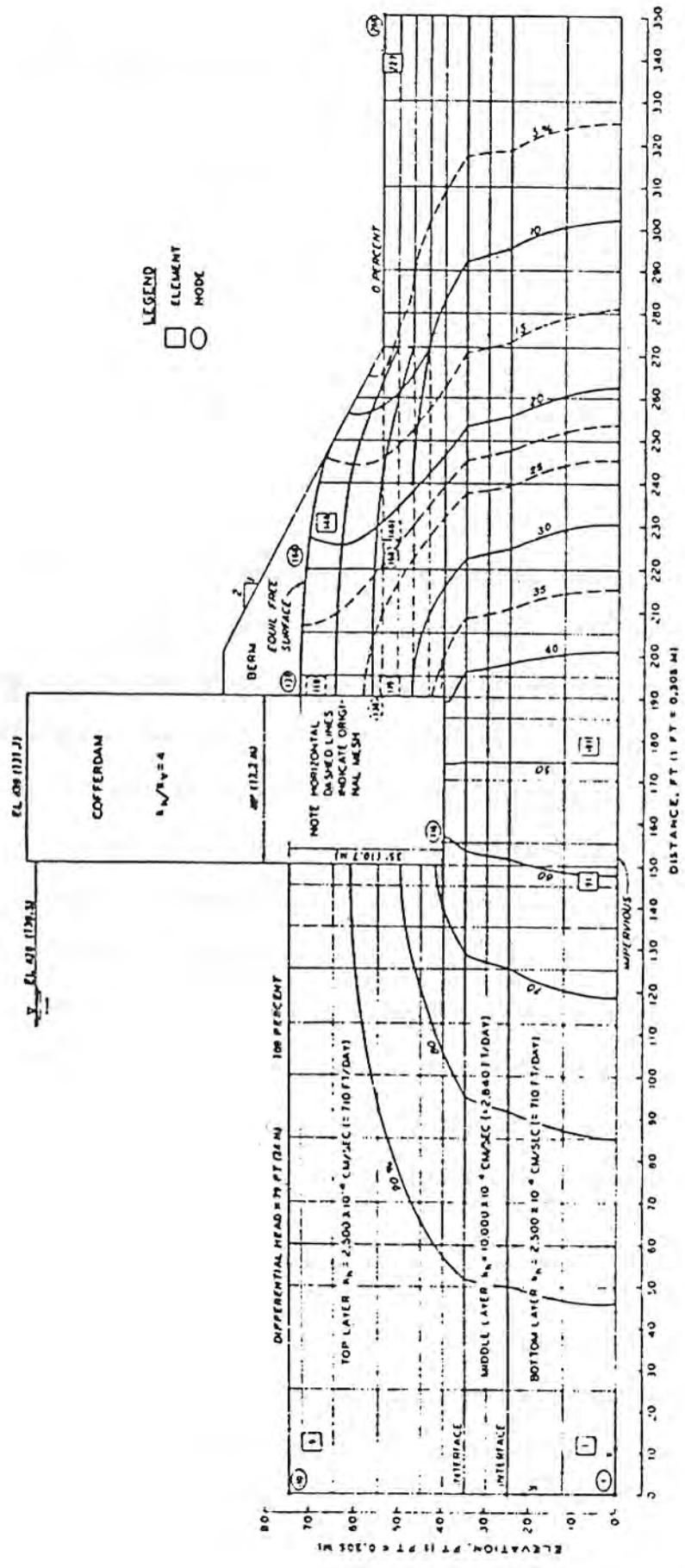


Figure 14-8 (continued) (b) Finite element results with computed equipotentials.

La escala de los ejes de referencia cambia en la siguiente forma para este problema,

$$m_1 = x$$

$$m_2 = y \sqrt{kh/kv} \quad y \quad kh = 4.kv$$

$$m_2 = y \sqrt{4kv/kv} = 2.y$$

En la figura 5.7 se muestran los bordes de las tres regiones discretizadas en 105 elementos de borde, los coeficientes de permeabilidad equivalentes de cada región y los valores prescritos en los bordes. La posición final de la superficie libre (AB) y de la superficie de descarga (BC) está mostrada en la figura, este cálculo se hace por iteración, suponiendo primero una ubicación para la superficie libre (prescribiendo en ella el potencial u que es igual a la altura "y" de los nudos) y variándola hasta que el flujo normal a la superficie en cada uno de los nudos sea cero. En general en la superficie de descarga (BC) el flujo normal es diferente de cero ya que el agua emerge a través de ella.

En la figura 5.8 se tienen los resultados obtenidos para el problema con el método de la IB, usando el modelo de la figura 5.7. Los valores en puntos interiores se encuen

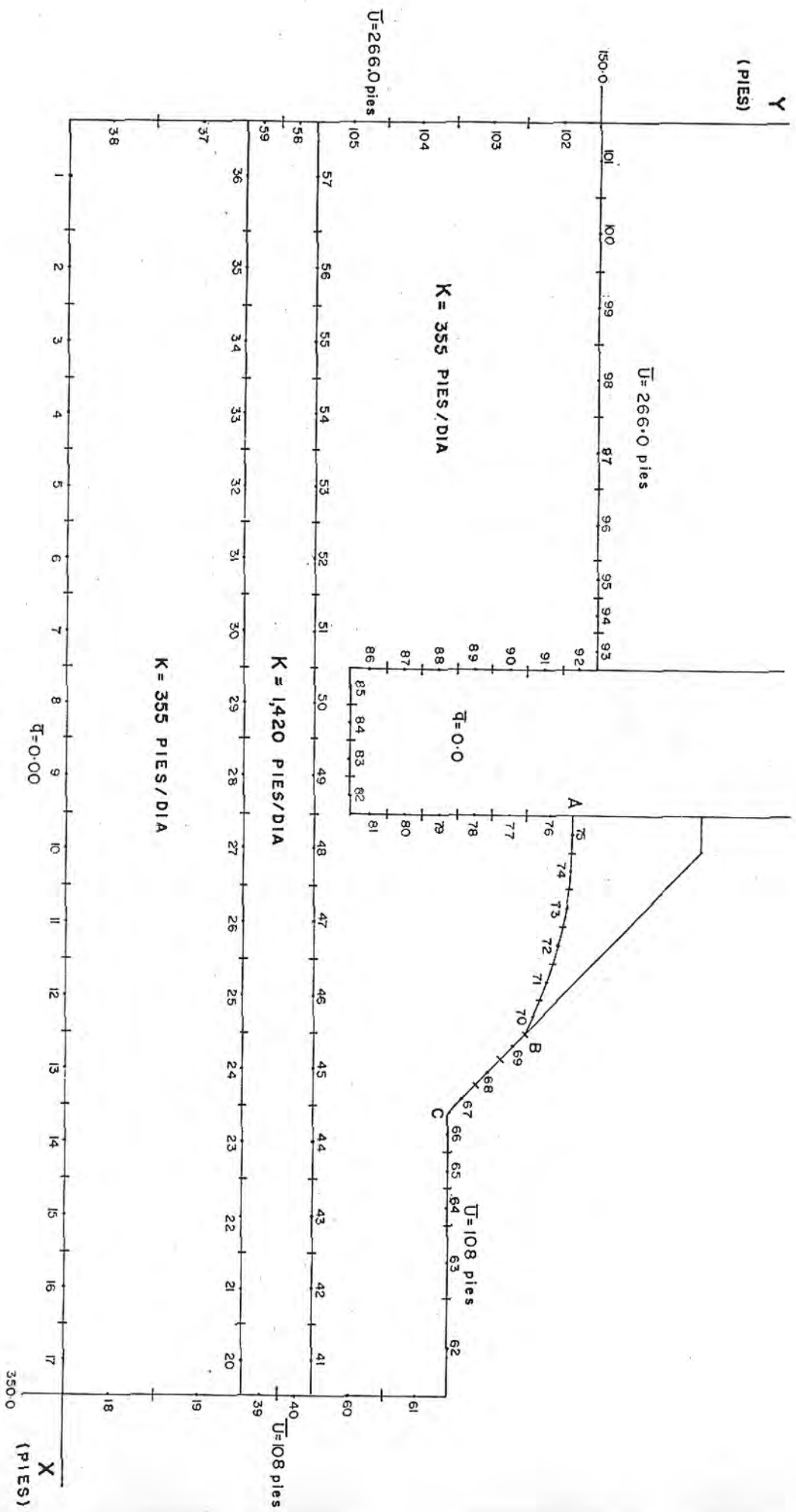


FIG 5.7

METODO INTEGRAL DE BORDE
LINEAS EQUIPOTENCIALES

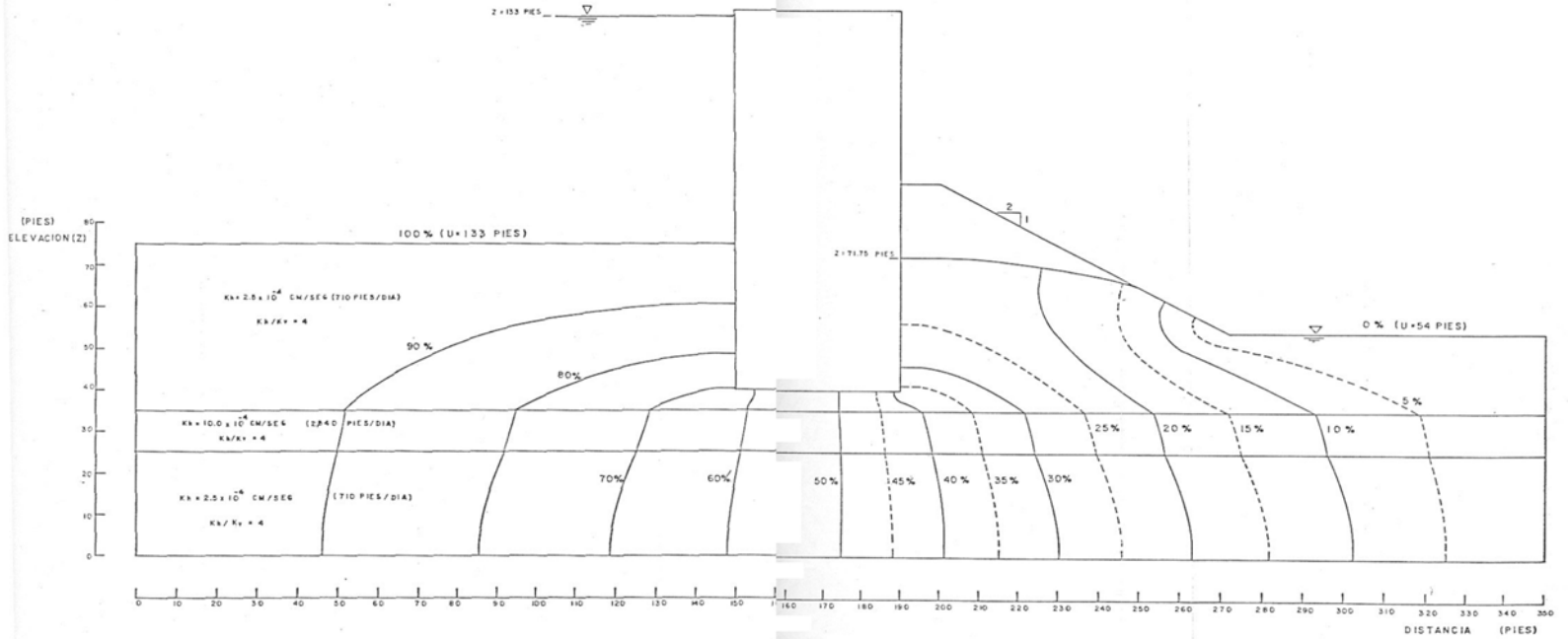


FIG. 5.8

tran una vez conocidas las incógnitas en los bordes como se explicó en la sección 5.2.

Los valores obtenidos deben de graficarse en su escala original, como por ejemplo, para la superficie libre se obtuvo una altura máxima de 143.5 pies, que reducida a la escala real tiene un valor de $143.5/2 = 71.75$ pies, similar a la obtenida por el método de los elementos finitos (fig.14.8b).

También están graficadas las líneas equipotenciales en porcentaje, variando desde el potencial $u=133$ pies (100%) hasta $u=54$ pies (0%).

Evaluando el caudal de entrada por pie de espesor de presa se tiene un valor de $Q_e = 34,710.00$ pies³/día y para el caudal de salida se obtuvo $Q_s = 34,840.00$ pies³/día.

Valiéndose de las líneas equipotenciales halladas se puede encontrar la presión de poros en cualquier punto de la región en estudio. El potencial "u" es,

$$u = y + p/\gamma$$

Donde,

y = ordenada del punto

p = presión

γ = peso específico del agua

El potencial "u" y la altura "y" para cualquier punto se obtienen del gráfico de líneas equipotenciales y despejando se puede encontrar la presión de poros.

La presión de poros interviene en el cálculo de posibles superficies de falla en el suelo, en especial en el caso de presas de tierra, y para conocer las subpresiones que actúan sobre la presa.

Como conclusión de este ejemplo se puede mencionar la ventaja del método de la IB en el cálculo de la ubicación de las superficies libre y de descarga, donde sólo se varían los nudos de borde correspondientes, en comparación con el método de EF donde se tiene que variar parte de la malla y una gran cantidad de nudos, lo que implica mucho mayores dificultades de programación.

En general en el método de la IB se trabaja con una menor cantidad de nudos que en el método de los EF, lo que facilita el manejo de la entrada de datos y de los resultados. Es importante este aspecto del método que implica un ahorro significativo de horas-hombre, ya que en el estado actual de desarrollo de las computadoras digitales el mayor costo en la aplicación de un determinado procedimiento está en la preparación de datos e interpretación de los resultados y no en el cómputo propiamente dicho.

CONCLUSIONES

El método de la integral de borde (IB) es una alternativa de análisis no solamente factible sino en muchas situaciones más ventajosa que otros procesos más conocidos.

Un aspecto que debe destacarse es que la aplicación de la IB requiere modelos con pocos nudos y elementos, en términos relativos a métodos de diferencias finitas o de elementos finitos. Esto significa mucho menos esfuerzo en la preparación de datos, que en los otros métodos constituye una parte muy apreciable del esfuerzo realizado para el análisis.

Desde el punto de vista del tiempo de cómputo las ventajas no son tan claras. Por un lado, los sistemas de ecuaciones involucran mucho menos incógnitas pero en cambio las matrices que resultan son de alta densidad, es decir con pocos elementos no significativos. Puede siempre conseguirse una estructura banda en las submatrices dividiendo el medio en estudio en subregiones -como se hace al tratar medios no-homogéneos- pero esto demanda un programa de cómputo más elaborado .

La formulación misma del proceso de IB es más compleja que al aplicar elementos finitos, situación que se agrava al considerar medios anisotrópicos y/o no-homogéneos. Sin

embargo, es importante tener presente que tal formulación y la correspondiente implementación en un programa de cómputo se realizan solo una vez para cada tipo de problema. Las dificultades de programación no afectan al usuario final del programa, que en cambio se ve beneficiado por la mayor simplicidad en su operación.

Otro aspecto en el que la IB tiene ventajas importantes está en la selección de los puntos donde se obtendrán resultados. En la IB estos pueden disponerse según las necesidades del diseñador, en contraste con los procesos de elementos finitos, en los que los resultados se obtienen en nudos cuya ubicación responde más a las necesidades de las técnicas de análisis que a las del diseño.

Finalmente, como puede apreciarse en el análisis de la excavación que se presentó en el capítulo IV, el tratamiento de medios infinitos o semi-infinitos es particularmente simple. Cabe también la posibilidad de combinar técnicas de IB con elementos finitos, utilizando la IB para generar "macro elementos" que permitan representar con mucha exactitud las condiciones de borde correspondientes a una región semi-infinita. Tales combinaciones serán muy útiles para analizar diversos problemas de interacción de suelos y estructuras.

Considerando las perspectivas de aplicación de este tipo

de procesos, es conveniente estudiar en mayor detalle aspectos relativos a los órdenes de convergencia (entendida aquí como la aproximación a los resultados "exactos"), la acumulación de los errores numéricos durante la solución o las formas óptimas de integración, para citar algunos aspectos desde el punto de vista matemático. Igualmente, conviene considerar la posible aplicación del proceso a situaciones distintas de las aquí tratadas, como el caso de losas o análisis tridimensionales por citar algunas.

BIBLIOGRAFIA

- (1) C.A BREBBIA, The boundary element method for engineers, Pentech Press.
- (2) BANERJEE P.K., Boundary element methods in engineering science.
- (3) GALLAGHER RICHARD H., Finite element analysis fundamentals, Prentice Hall.
- (4) TIMOSHENKO y GOODIER, Theory of Elasticity, Mcgraw-Hill.
- (5) M.A.JASWON y G.T.SYMM, Integral Equation Methods in potencial theory and elastostatics, Academic Press.
- (6) DESAI CH. S., Numerical method in geotechnical engineering.
- (7) STAGG-ZIENKIEWICZ, Mecánica de rocas en la ingeniería práctica, Editorial Blume.
- (8) ZIENKIEWICZ D.C., El método de los elementos finitos, Editorial Reverté.

- (9) IR. C. VAN DER VEEN, Soil mechanics, Internacional Institute for Hydraulic and Environmental Engineering.
- (10) M. L. KRANSNOV, Cálculo variacional, Editorial Latino Americana.
- (11) SOKOLNIKOFF, I.S, Mathematical theory of elasticity, McGraw- Hill.
- (12) DAYLY-HARLEMAN, Dinámica de los fluidos, Editorial Trillas, México.
- (13) JOSE ORTIZ ALVAREZ, Análisis no-lineal por elementos finitos, tesis de grado Universidad Nacional de Ingeniería.
- (14) TSHEBOTARIOFF GREGORY, Mecánica del suelo, cimientos y estructuras de tierra, Editorial Aguilar, Madrid.