

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**“DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL DE PRESIÓN DE UN EQUIPO DE HEMODIÁLISIS EMPLEANDO CONTROL ÓPTIMO Y ADAPTIVO”**

**INFORME DE SUFICIENCIA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**INGENIERO ELÉTRÓNICO**

**PRESENTADO POR:**

**MIGUEL WILHELM RUIZ TUPAC YUPANQUI**

**PROMOCIÓN 1995-I**

**LIMA-PERÚ**

**2003**

A mis Padres  
A mi Esposa

**DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE  
CONTROL DE PRESIÓN EN UN EQUIPO DE  
HEMODIÁLISIS EMPLEANDO  
CONTROL ÓPTIMO Y ADAPTIVO**

## SUMARIO

Este estudio presenta el diseño y la simulación de sistemas de control óptimo y adaptivo para controlar la ultrafiltración en el tratamiento de diálisis que reciben pacientes con problemas renales. La ultrafiltración se controla aplicando un gradiente de presión a través del filtro de la máquina de diálisis. La razón para emplear control adaptivo radica en la necesidad de compensar mediante adaptación, la variación en la dinámica del proceso originada por el empleo de filtros de diálisis provenientes de diferentes fabricantes. La influencia de la variación del parámetro tiempo muerto a la entrada del sistema, va a ser analizada vía simulación.

Las bondades del sistema de control adaptivo se comparan con las del sistema de control óptimo, diseñado para este propósito. El sistema de control adaptivo combina en su diseño una ley de control óptima proporcional-integral, un estimador de parámetros que emplea la técnica de los mínimos cuadrados mejorado, un observador de estados óptimo, y un modelo lineal (con tiempo muerto) del proceso de diálisis. El sistema de control óptimo combina en su diseño una ley de control óptima proporcional-integral, un observador de estados óptimo, y un modelo lineal del proceso de diálisis.

El estudio original en que se basa este trabajo [7], se ocupa del control adaptivo de la ultrafiltración, empleando una ley de control por ubicación de polos y la técnica básica de los mínimos cuadrados para estimar los parámetros.

Debido a la naturaleza del proceso de diálisis, es importante que su sistema de control tenga un arranque suave. En antiguos equipos de diálisis, en donde los parámetros de sintonización del controlador PI (Proporcional Integral) son fijos, un arranque suave es dificultoso de conseguir. En un sistema de control adaptivo, la dinámica del proceso se estima en cada tiempo de muestreo. Esta información se puede emplear para diseñar un controlador que no provoque sobresaltos en las variables del sistema controlado, principalmente en la fase de arranque.

# ÍNDICE

<b>PRÓLOGO</b> . . . . .	1
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>MODELADO DEL PROCESO DE DIÁLISIS</b>	2
1.1 El Proceso . . . . .	2
1.2 Dinámica del Proceso . . . . .	3
1.3 Características a Lazo Abierto . . . . .	5
1.4 Formulación del Problema . . . . .	6
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>CONTROL OPTIMO DEL SISTEMA</b>	8
2.1 El Clásico Controlador PI . . . . .	8
2.2 Modelo Matemático del Proceso . . . . .	8
2.3 El Regulador Óptimo Proporcional Integral . . . . .	11
2.4 El Observador Óptimo . . . . .	14
2.5 Simulación del Sistema de Control Óptimo . . . . .	15
<b>CAPÍTULO III</b>	
<b>IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS</b>	16
3.1 Consideraciones Generales . . . . .	16
3.2 El Método de Identificación de Parámetros IMCRM . . . . .	17
3.3 Algunas Notas sobre el Método IMCRM . . . . .	18
3.4 Simulación de la Identificación del Sistema . . . . .	20

**CAPÍTULO IV**

<b>CONTROL ADAPTIVO DEL SISTEMA</b>	22
4.1 Necesidad del Control Adaptivo . . . . .	22
4.2 El Sistema de Control Adaptivo por Ubicación de Polos . . . . .	24
4.3 El Sistema de Control Adaptivo con Ley de Control Óptima . . . . .	27
4.4 Adaptación de los Parámetros . . . . .	31
<b>CONCLUSIONES</b>	34
<b>ANEXO: LISTADO DE PROGRAMAS</b>	37
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	46

## PRÓLOGO

En el tratamiento de diálisis para pacientes que padecen problemas renales, la eliminación de fluido es un parte importante, debido a que tales pacientes no poseen otros medios para eliminar el exceso de fluido del cuerpo. Esto se logra aplicando un gradiente de presión a través de un filtro, el dializador, el cual está en contacto directo con la sangre. El flujo de ultrafiltración (UF) está determinado por la magnitud del gradiente de presión. Este gradiente va a ser controlada por la máquina de diálisis.

El presente estudio trata sobre el diseño y simulación de sistemas de control óptimo y adaptivo discretos para controlar la UF. Las especificaciones de diseño son: porcentaje de sobreimpulso nulo, para evitar transitorios bruscos en el arranque de la máquina, y tiempo de estabilización menor de 9 minutos (540 s). Este estudio se desarrolla en cuatro capítulos a saber:

El capítulo **I** describe el proceso de diálisis y una de sus formas más conocida: la hemodiálisis. También describe la dinámica y las características a lazo abierto de dicho proceso.

El capítulo **II** comienza describiendo el controlador convencional empleado en máquinas de diálisis algo antiguas, para concluir con el diseño y simulación del sistema de control óptimo de la UF.

El capítulo **III** se ocupa de la estimación de parámetros del proceso empleando la técnica recursiva de los mínimos cuadrados mejorado.

El capítulo **IV** trata sobre el diseño y la simulación del sistema de control adoptivo de la UF.

# CAPÍTULO I

## MODELADO DEL PROCESO DE DIÁLISIS

### 1.1 El Proceso

Para pacientes con poca o ninguna función renal, alguna forma de tratamiento de diálisis es necesario para mantenerlos vivos. En este proceso, la sangre se purifica mediante la eliminación del exceso de agua y de otros productos desechables, y el contenido de electrolitos en la sangre se normaliza. Existen más de medio millón de pacientes en el mundo que siguen este tratamiento dos o más veces por semana. En su forma más común, hemodiálisis, la sangre se pasa a través de una membrana semipermeable que posee en el otro lado, un adecuado compuesto de fluido de diálisis. Electrolitos y pequeñas cantidades de moléculas cruzan la membrana de acuerdo al gradiente de concentración, de modo tal que la composición del fluido de diálisis se pueda emplear para controlar los cambios en la sangre. El agua se elimina aplicando un gradiente de presión en la membrana, la denominada presión de transmembra (PTM). Es de importancia extrema que la eliminación del agua se controle con exactitud, ya que tal eliminación afecta directamente el volumen de la sangre y por consiguiente, la presión de la sangre y la salud del paciente.

Tratamientos de hemodiálisis en pacientes renales se realizan normalmente empleando una máquina de diálisis. La figura 1.1 muestra el diagrama esquemático de una típica máquina de hemodiálisis, en donde solamente las partes relevantes al control de flujo y de presión se muestran en detalle. Agua limpia se calienta a 37 °C, y se agrega sal hasta formar una concentración fisiológica. Para desgaseificar la solución, la primera bomba P1 crea una caída de presión en la restricción. Las burbujas generadas se remueven entonces en la cámara de burbujas ubicada después de la bomba y se conducen a un punto bastante alejado del sistema de flujo. El restrictor y la primera bomba determinan el flujo en el dializador. Debido a la compresibilidad del aire en la cámara de burbujas, cambios de flujo en

el dializador se hacen más lentos (retardados). Este retardo está caracterizado por una constante de tiempo.

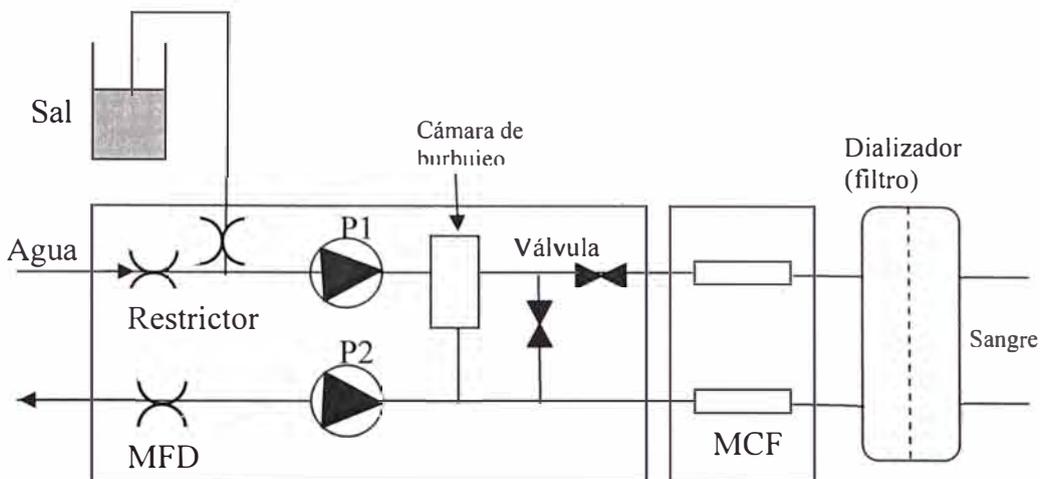


Figura 1.1: Diagrama esquemático del proceso de diálisis.

Después de pasar por algunos dispositivos de medición y una válvula, el fluido sale del monitor de fluido de diálisis (MFD) y pasa por el primer canal de medición del monitor de control de fluido (MCF), antes de entrar al dializador o filtro. Antes de retornar al MFD, el fluido pasa por el segundo canal de medición del MCF. De nuevo en el MFD, el fluido pasa por algunos dispositivos y válvulas ubicados en la segunda bomba P2. Un restrictor se ubica a la salida del MFD para permitir presión positiva en el dializador.

La segunda bomba P2 es usada por el MFD para controlar la PTM. En realidad, la segunda bomba es un regulador PI (proporcional integral) discreto de parámetros fijos, el cual posee un periodo de muestreo de 0.16 s y un tiempo de integración de alrededor de 30 s [7]. La figura 1.2 muestra el diagrama de bloques del sistema, donde  $PTM = p$ .

El propósito del MCF es controlar la pérdida de peso durante el tratamiento. Esto se realiza por medio del lazo de control exterior mostrado en la figura 1.2, el cual tiene a la diferencia de flujo  $Q_f$  como la variable sujeta a medición. A la vez,  $Q_f$  es la variable de control en el sistema de control de la presión  $p$ .

## 1.2 Dinámica del Proceso

Los componentes que determinan la dinámica del lazo de control de presión son: el dializador, la bomba P2 que mantiene la presión de diálisis, la cámara

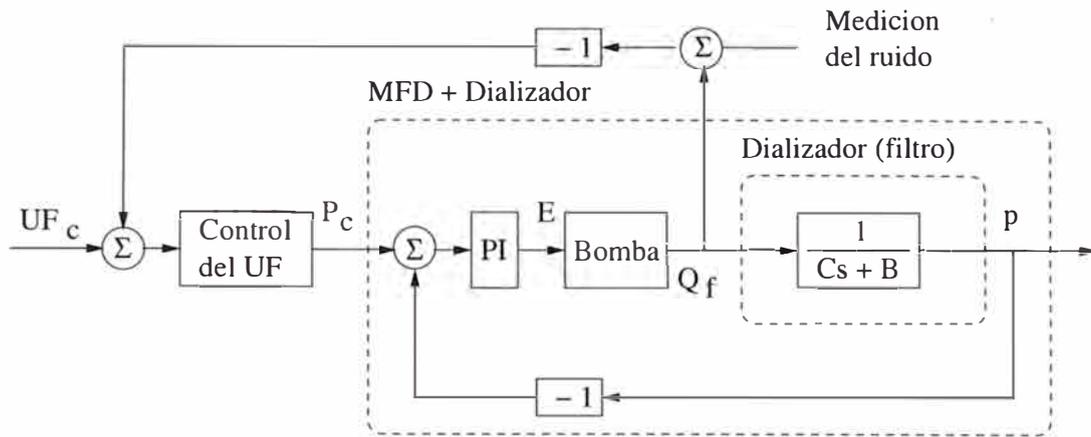


Figura 1.2: Diagrama de bloques de el sistema de control de la UF.

de desgasificación para hacer más lentos los cambios de flujo, y, el algoritmo de control necesario para el control de la PTM (la presión  $p$ ) en el MFD.

La dinámica del dializador se puede establecer empleando balance de masa en su compartimiento. La ecuación resultante es:

$$-C \frac{dp}{dt} = Bp - Qf \quad (1.1)$$

donde el miembro de la izquierda representa la razón en cambio en volumen, bajo la suposición común de que el volumen en el compartimiento del dializador es proporcional a  $p$ , la PTM. El primer término del miembro de la derecha es la UF a través de la membrana, y el término  $Qf$  es el flujo de fluido neto que viene del dializador, medido en el MCF como una diferencia de flujo.

La constante  $C$  es la complianza del dializador. Existen dos tipos principales de dializadores: el dializador de fibras ahuecadas y el de plato. En el dializador de fibras, la membrana se conecta a fibras ahuecadas, a través de las cuales va a circular la sangre. El valor de  $C$  es entonces pequeño debido a que las fibras son muy angostas. En el dializador de plato, la membrana se dispone en un número de capas que se mueven a causa de los cambios de presión. El valor de  $C$  puede entonces llegar a valores extremos, tales como 0.3 ml/mm Hg.

La ganancia estática se determina mediante el factor de UF,  $B$ , el cual puede variar entre 0.8 y 200 ml/h/mm Hg. La diferencia se debe en parte a las diferencias en área en el dializador. Por otra parte, valores altos de  $B$  encontrados en dializadores modernos, se atribuyen a las nuevas membranas que son mejor adecuadas para tratamientos que incluyen el transporte tipo convectivo de los

productos desechables (hemodiafiltración). La constante de tiempo  $C/B$  puede variar bastante entre un dializador y otro. Para grandes dializadores de fibra, donde  $C$  es pequeño y  $B$  es grande, la constante de tiempo puede ser de varios segundos. El valor de  $C$  en este caso incluye la complianza de las tuberías desde y hacia el dializador. En el otro extremo, un dializador pequeño de plato puede poseer una constante de tiempo de varios minutos.

Debido a que la bomba de desgasificación puede reaccionar en una fracción de segundo a cambios en su voltaje de alimentación, o a cambios en la presión circundante, entonces se puede considerar que tal bomba es de respuesta inmediata. La dinámica de la cámara de desgasificación es afectada por la bomba de desgasificación y el algoritmo de control. Para nuestra discusión, la cámara de desgasificación puede ser vista como una complianza aumentada del dializador.

Con los considerandos anteriores, la función de transferencia, desde la PTM hasta la referencia PTM (ver figura 1.2), es de segundo orden, donde un polo pertenece al sistema de control de la PTM y el otro polo pertenece a la dinámica del dializador. La constante de tiempo dominante es de 30 a 35 s [7]. Este rango coincide con las observaciones experimentales realizadas en el MFD. La constante de tiempo dominante aumenta cuando el parámetro  $B$  del dializador crece, y disminuye cuando la complianza  $C$  crece.

### 1.3 Características a Lazo Abierto

De acuerdo a la figura 1.2, la PTM se obtiene filtrando  $Qf$  mediante la función de transferencia del dializador:

$$\frac{1}{Cs + B}$$

Es interesante resumir los rangos de los parámetros  $C$  y  $B$ . La complianza  $C$  alcanza su valor máximo de 0.3 mL/mm Hg en máquinas de diálisis tipo plato, mientras que en las máquinas tipo fibra los valores de  $C$  son bastante pequeños. En cambio, el valor del parámetro  $B$ , el factor de UF, depende tanto del área del filtro, como de la construcción de la membrana. Los valores de  $B$  varían entre 0.8 y 200 mL/h/mm Hg.

A manera de ejemplo, la figura 1.3 muestra la respuesta  $Qf$  a cambios tipo escalón en el la  $PTM = p$ , cuando la máquina de diálisis es del tipo fibra. El programa rescf.m escrito en código MATLAB [3], cuyo listado se muestra a

continuación, genera la figura 1.3. Los valores de los parámetros son  $C = 0.1$  mL/mm Hg y  $B = 20$  mL/h/mm Hg. Por consiguiente, la constante de tiempo del dializador es  $C/B = 0.05 \times 3600 = 18$  s. Un tiempo de muestro adecuado es  $T_s = 1$  s. Observar que las señales  $Qf$  y  $p$  están afectadas por un ruido blanco de distribución uniforme. En la práctica, este ruido se origina principalmente en los transductores de medición, y por el funcionamiento de las bombas.

En el programa rescf.m, cuyo listado se muestra en el capítulo VI, se ha empleado discretización directa de la ecuación (1.1). Esto es, para un tiempo de muestreo  $T$  y sabiendo que la expresión de la derivada es:

$$\frac{dp}{dt} \cong \frac{p(t) - p(t-1)}{T}$$

donde  $t$  ahora es el tiempo discreto, entonces la relación (1.1), con  $p = PTM$ , toma la forma:

$$Qf(t) = \frac{C}{T} [p(t) - p(t-1)] + B * p(t) \quad (1.2)$$

#### 1.4 Formulación del Problema

La eliminación del exceso de fluido en la sangre, es una parte importante en el tratamiento de diálisis en pacientes con problemas renales. Esto se logra aplicando un gradiente de presión a través de un filtro, el dializador, el cual está en contacto directo con la sangre. El flujo de ultrafiltración (UF) está relacionado con el tamaño del gradiente de presión que puede ser controlada por la máquina de diálisis. Debido al gran número de dializadores (filtros) disponibles en el mercado, el algoritmo de control de la máquina de diálisis debe tener la capacidad de operar con diferentes valores de ganancia y retardos del proceso, así como también con otras características. Ya que el volumen de la sangre y el peso del paciente pueden ser directamente afectados en el tratamiento, es importante entonces que el controlador haga un buen trabajo en la etapa de arranque. Esta tarea no es nada fácil. El sistema de control de UF debe también operar correctamente en la presencia de parámetros variantes con el tiempo.

En términos de especificaciones técnicas, los sistemas de control óptimo y adaptivo deben ser capaces de estabilizar cambios en el flujo de diálisis  $Qf$  (debido a cambios en la PTM) en menos de 9 minutos, sin que se produzca sobrimpulsos en la señal controlada.

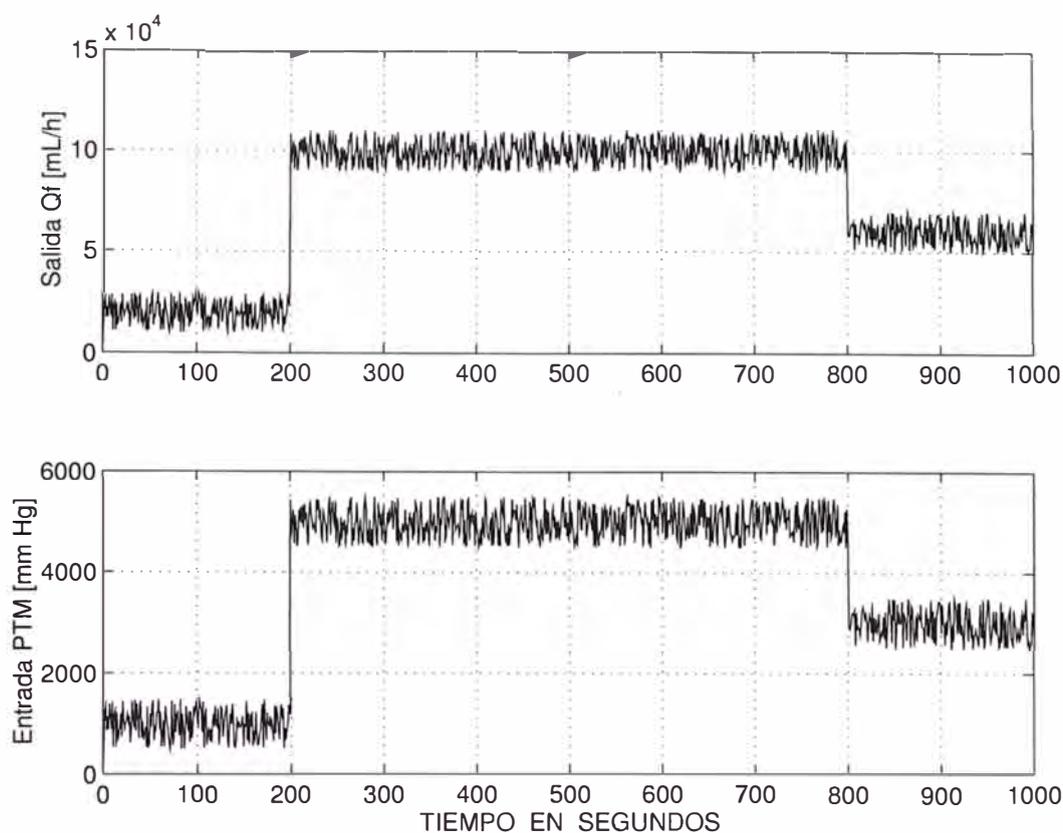


Figura 1.3: Respuesta del dializador tipo fibra a cambios en la presión de transmembrana  $p$ .

El sistema de control adaptivo a ser diseñado combina los siguientes componentes: una ley de control óptima proporcional-integral, un estimador de parámetros que emplea la técnica de los mínimos cuadrados mejorado, un observador de estados óptimo, y un modelo lineal (con tiempo muerto) del proceso de diálisis. El sistema de control óptimo, incluye una ley de control óptima proporcional-integral, un observador de estados óptimo, y un modelo lineal del proceso de diálisis. El diseño de los sistemas de control se va a realizar en el dominio discreto.

## CAPÍTULO II

### CONTROL ÓPTIMO DEL SISTEMA

#### 2.1 El Clásico Controlador PI

Las máquinas antiguas de diálisis emplean un controlador PI para controlar el flujo neto a través del dializador (o filtro), teniendo a la referencia PTM como la señal de control. Este controlador se ubica en el bloque “Control de UF” en la figura 1.2. Sabemos que un controlador PI sólo puede garantizar que el flujo se aproxime al valor de referencia. El flujo acumulado y consiguientemente, la pérdida de peso, pueden resultar erróneos debido a los errores transitorios en el flujo. En realidad, el controlador PI sólo actúa en el el flujo acumulado, más no en el flujo mismo.

Por otra parte, debido a la presencia de grandes variaciones en la ganancia del dializador, es que surge la necesidad de un regulador de ganancia muy baja. Para eliminar en cierta medida los efectos producidos por la variación de ganancia, los antiguos sistemas de control incorporaron una cierta clase de estimador de ganancia. Este estimador, sin embargo, no era capaz de discriminar entre ganancias estáticas y los efectos provocados por grandes complianzas (el parámetro  $C$ ). Como resultado, de acuerdo a la experiencia, el controlador PI podía demorarse de media a una hora para estabilizar al sistema en el nuevo punto de referencia. Este hecho, por supuesto no es aceptable, ya que el tratamiento completo de un paciente sólo dura de tres a cinco horas. A la enfermera le gustaría ver el efecto del cambio de referencia sólo en unos cuantos minutos.

#### 2.2 Modelo Matemático del Proceso

De la discusión hecha en el capítulo anterior, el modelo que describe el flujo, teniendo a la referencia PTM como señal de entrada, debe ser, al menos, de segundo orden. Además, la señal de flujo se filtra a través de un filtro de primer orden con una constante de tiempo de aproximadamente  $\tau_f = 30$  s, con el fin de

disminuir el ruido y el sobreimpulso de la señal. Este filtro posee la forma:

$$\frac{1}{\tau_f s + 1}$$

Por consiguiente, un modelo de tercer orden podría ser apropiado para describir nuestro proceso. Sin embargo, experimentos con sistemas de control adaptivo prácticos han demostrado que un modelo de primer orden con señal de entrada retardada, es suficiente. El modelo básico del proceso empleado para los sistemas de control óptimo y adaptivo es de primer orden y tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dQf(t)}{dt} &= \alpha Qf(t) + \beta PTM(t - D) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \alpha y(t) + \beta p(t - D) \\ \frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{\beta}{(s - \alpha)} e^{-Ds} = \frac{K}{(\tau s + 1)} e^{-Ds} \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $D$  es el tiempo muerto a la entrada del proceso,  $K = -\beta/\alpha$  y  $\tau = -1/\alpha$ . Es fácil de verificar que el sistema discretizado de (2.1) es [1]:

$$\begin{aligned} Qf(kT) &= a Qf(kT - T) + b_1 PTM(kT - T) + b_2 PTM_{set}(kT - 2T) \\ y(kT) &= a y(kT - T) + b_1 u(kT - T) + b_2 u(kT - 2T) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $k = t/T$  es el tiempo discreto,  $T$  es el tiempo de muestreo, y

$$a = e^{\alpha T} \quad b_1 = \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(T-\tau)} - 1) \quad b_2 = \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T} - e^{\alpha(T-\tau)})$$

Añadiendo la función de transferencia del filtro de primer orden al proceso básico, entonces nuestro proceso en estudio toma la forma:

$$\frac{K}{(\tau_f s + 1)(\tau s + 1)} e^{-Ds} \quad (2.3)$$

El diseño de los sistemas de control óptimo y adaptivo requiere de una ecuación de estado de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ . Por ello es necesario modelar al tiempo muerto  $D$  mediante una función racional en  $s$  (el operador Laplaciano). Esta idea no es nueva y ha sido usada otras veces para identificación parámetros y con propósitos de control. La función de transferencia del tiempo muerto  $D$  a emplear es la siguiente aproximación de Padé de tercer orden:

$$e^{-Ds} \cong \frac{2 - Ds + \frac{(-Ds)^2}{2!} + \frac{(-Ds)^3}{3!}}{2 + Ds + \frac{(Ds)^2}{2!} + \frac{(Ds)^3}{3!}} = \frac{num}{den} \quad (2.4)$$

donde  $num$  es el polinomio del numerador mientras que  $den$  es el polinomio del denominador. Queda aún la interrogante acerca de qué tan efectiva es dicha aproximación racional, para capturar los efectos del tiempo muerto real  $D$ . La figura 2.1 muestra el diagrama de bloques en SIMULINK para comparar las respuestas del sistema de UF (ultrafiltración) a un escalón de entrada, empleando un tiempo muerto real  $D = 1$  y su aproximación racional de tercer orden.

En la figura 2.2, podemos observar que para  $D = 3$  la función racional sustituye bastante bien a  $D$ . Sin embargo, conforme aumenta  $D$ , podemos constatar que la respuesta aproximada se irá alejando poco a poco de la real. En

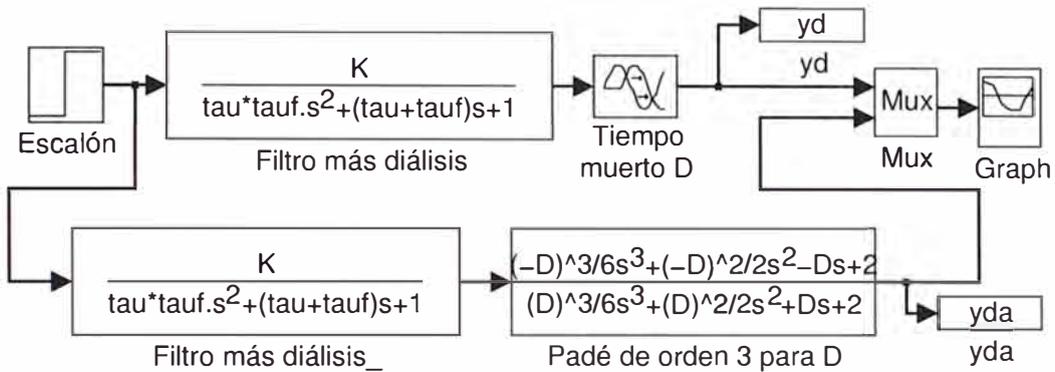


Figura 2.1: Comparando las respuestas a un escalón del sistema de UF y de su modelo aproximado, en donde se ha usado una aproximación de Padé de tercer orden para el tiempo muerto  $D$ .

conclusión, reemplazando (2.4) en (2.3), el modelo del proceso a ser controlado toma la forma:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{(\tau_f s + 1)(\tau s + 1)} \frac{\left(2 - Ds + \frac{(-Ds)^2}{2!} + \frac{(-Ds)^3}{3!}\right)}{\left(2 + Ds + \frac{(Ds)^2}{2!} + \frac{(Ds)^3}{3!}\right)} = \frac{num(s)}{den(s)} \quad (2.5)$$

y su correspondiente representación discreta es:

$$\frac{y(q)}{u(q)} = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + b_3 q^{-3} + b_4 q^{-4} + b_5 q^{-5}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + a_3 q^{-3} + a_4 q^{-4} + a_5 q^{-5}} \frac{num(q)}{den(q)} \quad (2.6)$$

donde  $q$  es el operador de desplazamiento. De (2.6), se deduce la ecuación de diferencias del sistema:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - a_3 y(k-3) - a_4 y(k-4) - a_5 y(k-5) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + b_3 u(k-3) + b_4 u(k-4) + b_5 u(k-5) \quad (2.7)$$

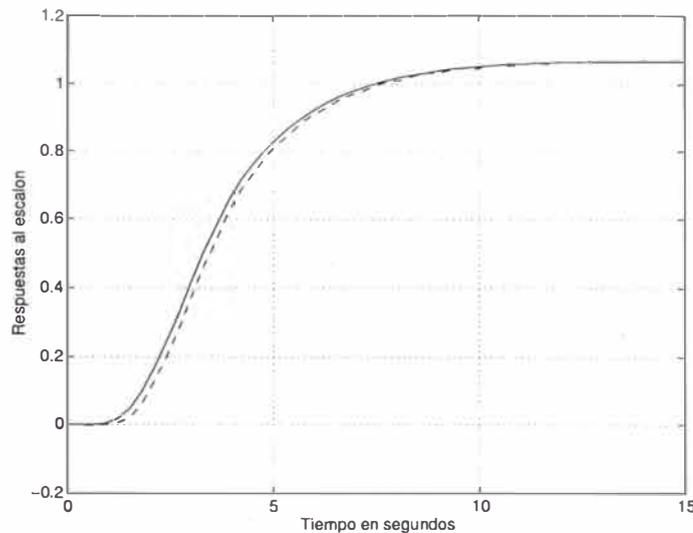


Figura 2.2: Comparación de las respuestas a un escalón del sistema de diálisis y de su modelo aproximado (en trazos), en donde se ha empleado una aproximación de Padé de tercer orden para el tiempo muerto  $D$ .

donde  $k = t/T$  es el tiempo discreto y  $T$  es el tiempo de muestreo.

### 2.3 El Regulador Óptimo Proporcional Integral

El procedimiento de diseño presentado en esta sección sigue los lineamientos descritos en la referencia [5]. En este estudio emplearemos el control óptimo cuadrático discreto estacionario para regular la UF del proceso de diálisis. La configuración del sistema de control empleada corresponde a la del regulador óptimo proporcional-integral mostrado en la figura 2.3 [4], [5], en donde podemos notar que la señal  $v(k)$  es la señal de salida de un integrador discreto y  $K_I$  es su ganancia integral asociada. De la figura 2.3 podemos obtener las ecuaciones de

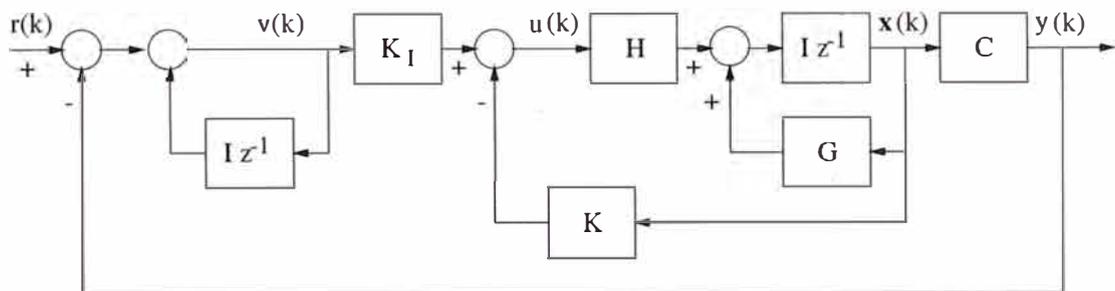


Figura 2.3: El controlador óptimo proporcional integral.

estado y de salida del proceso:

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + Hu(k) \quad y(k) = C\mathbf{x}(k) \quad (2.8)$$

y la señal de control  $u(k)$  correspondiente:

$$u(k) = -K\mathbf{x}(k) + K_I v(k) \quad (2.9)$$

donde la matriz de ganancia  $K$  del controlador es:

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \quad (2.10)$$

La ecuación que describe al integrador discreto es:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (2.11)$$

Para el tiempo  $v(k+1)$ , la relación anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - C[G\mathbf{x}(k) + Hu(k)] \\ &= (1 - CHK_I)v(k) + (-CG + CHK)\mathbf{x}(k) + r(k+1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Empleando (2.8) y (2.9), podemos deducir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= G\mathbf{x}(k) + H[-K\mathbf{x}(k) + K_I v(k)] \\ &= (G - HK)\mathbf{x}(k) + H K_I v(k) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Asímismo, de las ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \quad (2.14)$$

$$y(k) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

En el estado de equilibrio (cuando  $k \rightarrow \infty$ ), todas las derivadas desaparecen, y las variables  $\mathbf{x}(k)$ ,  $u(k)$  y  $v(k)$  toman sus estacionarios  $\mathbf{x}(\infty)$ ,  $u(\infty)$  y  $v(\infty)$ , respectivamente. De esta forma, (2.14) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Si se define:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(k) \quad (2.17)$$

$$v(k) - v(\infty) = v_e(k) \quad (2.18)$$

y restando (2.16) de (2.14), y luego usando las ecuaciones (2.17) y (2.18) obtendremos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) puede ser formulada como:

$$\xi(k+1) = \tilde{G}\xi(k) + \tilde{H}w(k) \quad w(k) = -\tilde{K}\xi(k) \quad (2.20)$$

donde:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad \tilde{G}(k) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \quad \tilde{K}(k) = \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La inclusión de un integrador en el sistema de control aumenta en uno el orden  $n$  del sistema. Esto es, si el vector de estado  $x(k)$  del sistema original posee dimensión  $n$ , entonces el vector de estado  $\xi(k)$  del regulador proporcional integral posee dimensión  $(n+1)$ .

La solución de problema de control óptimo cuadrático discreto estacionario para el sistema en estudio, se basa en la minimización de la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\xi(k)^T \tilde{Q}\xi(k) + w^2(k)\tilde{R}] \quad (2.23)$$

con el propósito de determinar la matriz  $\tilde{K}$  del controlador. La ecuación de Riccati y la ecuación de ganancia del controlador  $\tilde{K}$  resultan:

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (2.24)$$

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (2.25)$$

donde  $\tilde{P}$  es una matriz simétrica definida positiva de dimensión  $(n + 1) \times (n + 1)$ . Dicha matriz es solución de la ecuación matricial de Riccati formulada arriba.

Una condición necesaria para poder aplicar el control por realimentación de estados:

$$w(k) = -\tilde{K}\xi(k)$$

es que el proceso sea completamente controlable; es decir, que en un tiempo finito, sus estados puedan ser transferidos desde un estado inicial arbitrario a cualquier otro estado deseado. La condición necesaria y suficiente es que el proceso sea completamente controlable es que la matriz de controlabilidad  $M$  del sistema:

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{H} & \tilde{G}\tilde{H} & \dots & \tilde{G}^{n-1}\tilde{H} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

posea rango completo; es decir, el rango de  $M$  debe ser igual al orden  $n + 1$  del sistema.

La realimentación de estados requiere además que todos los estados sean disponibles, ya sea mediante medición o mediante estimación de estados. Esta estimación puede ser realizada empleando observadores de estado. El requerimiento del observador es que el sistema a controlar sea completamente observable; es decir, sus estados se pueden reconstruir completamente usando las observaciones (mediciones del proceso), lo que matemáticamente implica que la siguiente matriz  $N$  de observabilidad:

$$N = \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}\tilde{G} & \dots & \tilde{C}\tilde{G}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

posea rango completo  $n + 1$ .

## 2.4 El Observador Óptimo

El vector de estado estimado  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  se puede estimar mediante el siguiente observador óptimo [5], cuya ecuación de observación es:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + 1) = \hat{G}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{H}(k)u(k) + K_o(k)[y(k) - \hat{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (2.28)$$

En la ecuación (2.28), la matriz de ganancia  $K_o(k)$  se calcula de:

$$K_o(k) = P_o(k)\hat{C}^T(k)[\hat{C}(k)P_o(k)\hat{C}^T(k) + R_o]^{-1} \quad (2.29)$$

donde  $P_o(k)$  es una matriz simétrica definida positiva, solución única de la siguiente ecuación matricial discreta asociada de Riccati:

$$P_o(k+1) = Q_o + \hat{G}^T(k)P_o(k)\hat{G}(k) - \hat{G}^T(k)K_o(k)\hat{C}(k)P_o(k)\hat{G}(k) \quad (2.30)$$

donde  $Q_o$  y  $R_o$  son matrices de covarianza definidas positivas y asociadas a disturbios estocásticos que pueden afectar los estados y la salida del sistema.

## 2.5 Simulación del Sistema de Control Óptimo

El programa `mroptimo.m` escrito en código MATLAB [3] cuyo listado se muestra en el capítulo VI, resuelve el problema del control de la UF. Las especificaciones de diseño son: tiempo de estabilización menor de 9 minutos (549 s). Este programa emplea las ecuaciones del proceso de diálisis deducidas arriba, e incluye un observador para la estimación de los estados del sistema. El resultado del control del sistema se ilustra en la figura 2.4.

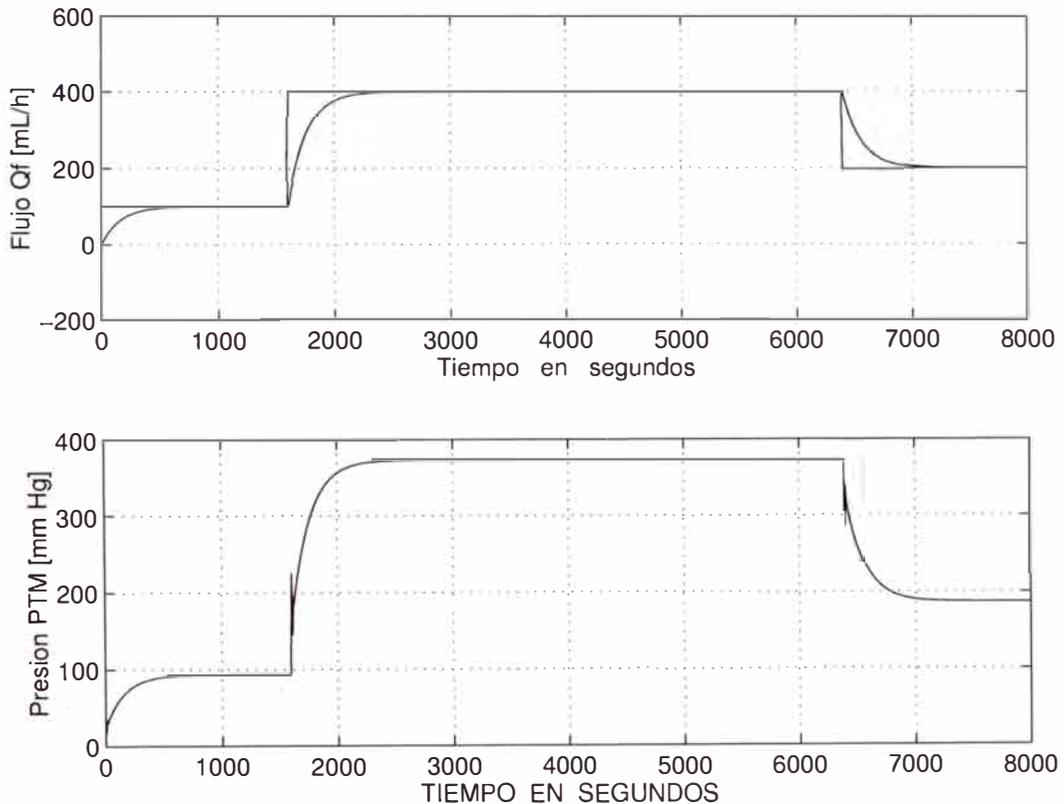


Figura 2.4: Resultado del control óptimo de la UF.

## CAPÍTULO III

### IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

#### 3.1 Consideraciones Generales

Dado que los parámetros  $K$ ,  $\tau$  y  $D$  del modelo descrito en (2.5) son desconocidos y tal vez, variantes con el tiempo, tales parámetros tienen que ser estimados a partir del comportamiento del sistema. Esta estimación se puede realizar empleando la técnica de los mínimos cuadrados recursivo. Esta técnica trabaja en el dominio discreto; esto significa que el modelo del proceso usado para la identificación de parámetros es la ecuación (2.7):

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - a_3y(k-3) - a_4y(k-4) - a_5y(k-5) \\ + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + b_3u(k-3) + b_4u(k-4) + b_5u(k-5) \quad (3.1)$$

En el modelo descrito en (3.1), se han despreciado las señales “offsets” (señales constantes remanentes). En realidad, un valor cero de  $Qf$  no se obtiene con un valor cero de la PTM. Esto se debe a las caídas de presión en las tuberías y en el dializador, y a las grandes diferencias (incluso variables en el tiempo) entre los puntos de medición y los offsets en los transductores de presión. Como siempre, este hecho debe de ser incorporado dentro del modelo del proceso. En otro caso, los parámetros estimados pueden resultar demasiado alejados de sus valores reales. Para implementar en tiempo real el algoritmo de identificación, los offsets en el MCF se pueden eliminar empleando primeras diferencias en la estimación en lugar de las mediciones mismas de  $Qf(t)$  y  $PTM(t)$ , de esta forma:

$$y(t) = Qf(t) - Qf(t-h) \quad (3.2)$$

$$u(t) = PTM(t) - PTM(t-h) \quad (3.3)$$

Nosotros no vamos a usar esta aproximación por que estamos en la fase de simulación.

### 3.2 El Método de Identificación de Parámetros IMCRM

Para estimar los parámetros del modelo del sistema usaremos las señales  $u(t)$  e  $y(t)$  dadas en las relaciones (3.2) y (3.3). La descripción ilustrada en (3.1) tiene que ser reordenada como:

$$y(t) = \psi^T(t)\hat{\theta}(t) \quad (3.4)$$

donde el vector de información  $\psi$  contiene los valores presentes y pasados de la entrada  $u(t)$  y de la salida  $y(t)$ , el cual en forma general se representa como:

$$\psi^T(t) = [y(t-1) \ \dots \ y(t-n) \ u(t-1) \ \dots \ u(t-n)] \quad (3.5)$$

donde  $n$  es el orden del sistema, y el vector  $\hat{\theta}$  contiene los parámetros a ser estimados, a saber:

$$\hat{\theta}(t) = [-\hat{a}_1(t) \ \dots \ -\hat{a}_n(t) \ \hat{b}_1(t) \ \dots \ \hat{b}_n(t)]^T \quad (3.6)$$

Los parámetros en juego podrían estimarse empleando el algoritmo básico de identificación (o estimación) de parámetros de los mínimos cuadrados recursivo (IMCR). Sin embargo, tal algoritmo puede presentar problemas potenciales de carácter numérico que podrían afectar el diseño final del controlador adaptivo con ubicación de polos. Por tal motivo, en este estudio se emplea el método de identificación de los mínimos cuadrados recursivo mejorado propuesto en [6] y empleado satisfactoriamente en [5]. La forma recursiva del algoritmo de identificación de parámetros es necesaria, ya que la estimación de parámetros se debe ejecutar "on-line" (en línea). El método IMCRM puede implementarse en la forma siguiente:

- 1) Obtener el vector de parámetros inicial  $\hat{\theta}(0)$  empleando los valores de los parámetros del modelo del sistema.
- 2) La matriz de covarianza inicial  $P$  puede tener la forma  $P = \alpha I$ , donde  $I$  es la matriz identidad y  $\alpha \gg 1$ .
- 3) Tomar nuevas mediciones de  $y(t)$  y de  $u(t)$  en el proceso, para obtener una nueva ecuación de la forma dada en (3.4).
- 4) Computar:  $\rho(t) = \max(1, \|\psi(t)\|)$ ;  $\psi_n = \psi/\rho(t)$ .
- 5) Determinar la matriz  $N(t)$  aplicando factorización Cholesky en:

$$N(t)N(t)^T = P(t)$$

- 6) Determinar la matriz diagonal de escalamiento  $S(t)$  con elementos  $s_{jj}$ . Tal matriz minimiza el número condicional del producto  $S(t)N(t)$ , siempre que  $s_{jj} = 1/n_{jj}$ , donde cada  $n_{jj}$  se obtiene tomando el valor absoluto de la suma de los elementos de la fila  $j$  de  $N(t)$ .
- 7) Computar:

$$\begin{aligned}
P_S(t) &= S(t)P(t)S(t) \\
\psi_{nS} &= [S(t)]^{-1}\psi_n \\
r(t) &= 1 + \psi_{nS}^T(t)P_S(t-1)\psi_{nS}(t) \\
\lambda(t) &= 1 - \frac{1}{2} \left[ r(t) - \sqrt{r^2(t) - \frac{4\|P_S(t-1)\psi_{nS}(t)\|^2}{tr P_S(t-1)}} \right] \\
e_n(t) &= Y(k)/\rho(t) - \psi_n^T(t) \hat{\theta}(t-1) \\
j(t) &= [\psi_{nS}^T(t+1)P_S(t)\psi_{nS}(t+1) + \lambda(t)] \\
\hat{\theta}(t+1) &= \hat{\theta}(t) + S^{-1}(k)P_S(t)\psi_{nS}(k)e_n(t+1)/j(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{nS}(k+1) &= P_S(t)\psi_{nS}(t+1) \times [\psi_{nS}^T(t+1)P_S(t)\psi_{nS}(t+1) + \lambda(t)]^{-1} \\
P_S(t+1) &= [I - H_{nS}(t+1)\psi_{nS}^T(t+1)]P_S(t)/\lambda(t) \\
tt &= abs \left[ \frac{max eig(P_S)}{min eig(P_S)} \right]
\end{aligned}$$

- 8) Implementar el criterio para detener la estimación y encontrar la nueva matriz de escalamiento  $N_{new}$  como sigue: sabiendo que  $tt$  es el número condicionante de  $P_S$ , si  $tt \leq \tau$  (cota inferior), parar la estimación; en otro caso, si  $tt \geq \kappa$  (cota superior), determinar  $N_{new}(t)$  (a partir de la relación  $P_S = N_{new}N_{new}^T$ ), calcular los elementos  $n_{newjj}$  (valor absoluto de la suma de los elementos de las filas de  $N_{new}(t)$ ), determinar la matriz diagonal  $S_{new}$  con elementos  $s_{newjj} = 1/n_{newjj}$ , y calcular la matriz  $P_{newS} = S_{new}P_S S_{new}$ . Finalmente, actualizar:  $P = P_{newS}$ .

### 3.3 Algunas Notas sobre el Método IMCRM

Sobre el punto (1) del algoritmo del método IMCRM cabe hacer la recomendación siguiente. El algoritmo muy bien puede trabajar a partir de un vector inicial de parámetros nulo. En trabajos “off-line” (fuera de línea), por ejemplo: la identificación de los los parámetros de un motor, se puede emplear tal opción. Sin

embargo, para implementar sistemas de control adaptivo, como en nuestro caso, es preferible que el vector inicial de parámetros contenga los valores más cercanos a sus valores reales, si es que se dispone de información al respecto. A manera de ejemplo, si no se tuviera información alguna de los parámetros de un motor que es parte del sistema de control adaptivo, entonces los parámetros conocidos de otro motor pueden ser usados como parámetros iniciales. En cualquier otro caso, es recomendable emplear valores diferentes de cero en el vector inicial de parámetros.

Respecto al punto (2), es decir, que la matriz de covarianza inicial  $P$  puede tener la forma  $P = \alpha I$ , donde  $I$  es la matriz identidad y  $\alpha \gg 1$ , significa que  $\alpha$  puede ser un valor 500, 800, 1000 o mayor. En realidad, el parámetro  $\alpha$  hace que el algoritmo de identificación converja más rápido. Sin embargo, si dicho parámetro resulta muy grande, entonces puede traer consigo problemas numéricos. Por ello se recomienda hacer las simulaciones del caso empleando valores típicos de  $\alpha$ , con el propósito de seleccionar su valor más apropiado

El punto (4) tiene bastante significancia. En realidad, la operación:

$$\rho(t) = \max(1, \|\psi(t)\|) \quad \psi_n = \psi / \rho(t)$$

normaliza el valor numérico de los parámetros. Para el algoritmo de identificación esto es de suma importancia, debido a que la normalización evita que el algoritmo trabaje con números de diferente ordenes de magnitud.

Cualquier algoritmo de identificación recursiva requiere que la señal de excitación (la señal de entrada) del algoritmo sea abundante y persistente. La razón es obvia: estos algoritmos requieren de data para operar. Si embargo, no siempre se dispone de excitación persistente, es decir, de datos suficientes en cada muestra para la operación normal del algoritmo. Una forma para hacer que el algoritmo de identificación sea más robusto en la presencia de excitación muy pobre (no persistente), es hacer un escalamiento de los datos. Para ello, necesitamos un filtro de raíz cuadrada, tal como se ilustra en el punto (5), para determinar una matriz de pre-escalamiento. Así, aplicando factorización Cholesky en la relación:

$$N(t)N(t)^T = P(t)$$

obtenemos la matriz de pre-escalamiento  $N(t)$ . Esta matriz  $N(t)$  permite determinar la matriz de escalamiento definida en el punto (6). Este punto se explica

por sí mismo.

Una cosa es tener la presencia de excitación pobre. Otra es no tener data disponible en el algoritmo de identificación. En el caso de ausencia de datos, la intuición dicta que es preferible detener el algoritmo de identificación y emplear los datos de la muestra anterior (tener en cuenta que el algoritmo se computa para cada muestra o tiempo de muestreo). Una forma de saber si los datos disponibles son o no suficientes para que el algoritmo opere sin problemas, es determinando el número condicionante actual de la matriz  $P$  y compararlo con los valores máximo y mínimo referenciales de dicho condicionante. Este procedimiento se describe en el punto (8).

### 3.4 Simulación de la Identificación del Sistema

El programa `identif.m`, cuyo listado se muestra en el capítulo V, identifica los parámetros del proceso dado en (2.7). Los parámetros identificados se ilustran en la figura 3.1. Observar en el programa que la entrada en este caso es una señal constante (excitación persistente). Para demostrar el concepto de que el

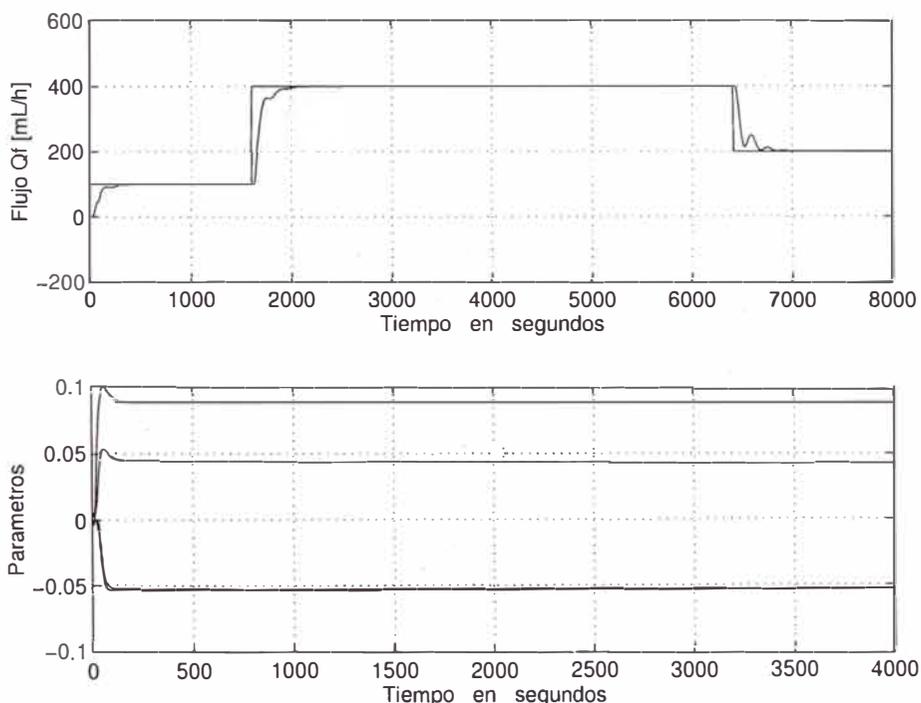


Figura 3.1: Parámetros estimados empleando el método de los mínimos cuadrados mejorado. De arriba hacia abajo en la figura:  $b_1(k)$ ,  $b_2(k)$ ,  $a_1(k)$  y  $a_2(k)$ .

algoritmo de identificación trabaja con cualquier tipo de excitación, siempre y

cuando sea persistente, podemos ejecutar el programa `identifr.m`, cuyo listado se muestra en el capítulo V, empleando ruido en la entrada excitatriz  $u$ . El resultado de la simulación se muestra en la figura 3.2, donde los parámetros estimados se estabilizan en un determinado valor.

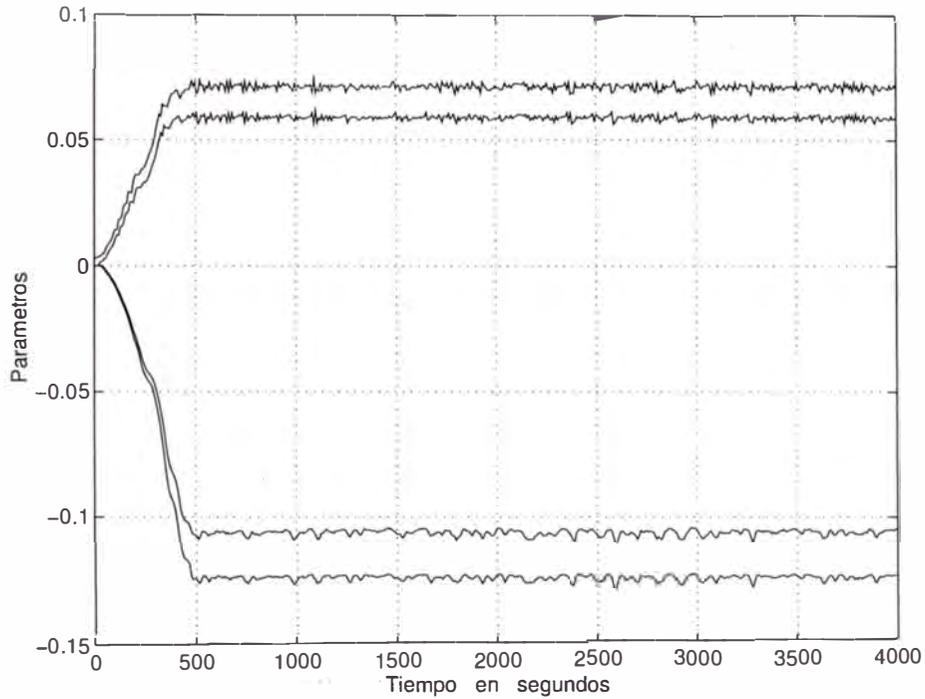


Figura 3.2: Parámetros estimados empleando el método de los mínimos cuadrados mejorado, cuando la excitación es un ruido blanco de distribución uniforme. De arriba hacia abajo en la figura:  $b_1(k)$ ,  $b_2(k)$ ,  $a_1(k)$  y  $a_2(k)$ .

## CAPÍTULO IV

### CONTROL ADAPTIVO DEL SISTEMA

#### 4.1 Necesidad del Control Adaptivo

La máquina de diálisis debe ser capaz de operar empleando dializadores (filtros) de diversos fabricantes. Lo sabemos que la dinámica del sistema varía con la inclusión de un filtro diferente al que está en uso. Por otra parte, el controlador de la máquina de diálisis debe seguir funcionando correctamente en la presencia de cambios rápidos en la señal de referencia y variación de otros parámetros del sistema.

Un controlador adaptivo con un identificador (estimador) de los parámetros desconocidos del sistema, resulta apropiado en esta aplicación, para poder enfrentar con éxito los problemas planteados en el párrafo anterior. El proceso en estudio es bastante adecuado para operar con un controlador adaptivo con auto-sintonización en los parámetros, debido a que tales parámetros son casi constantes (de acuerdo a la experiencia), pero desconocidos en el arranque de la máquina. Teniendo en cuenta que las variaciones en la ganancia de la máquina pueden alcanzar rangos considerables, el empleo de control robusto en el proceso en estudio es discutible.

En el capítulo II se discutió que el modelo básico del proceso de diálisis (sin añadir el filtro de ruido de primer orden) está dado por: (2.1):

$$\begin{aligned}
 \frac{dQf(t)}{dt} &= \alpha Qf(t) + \beta PTM(t - D) \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= \alpha y(t) + \beta p(t - D) \\
 \frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{\beta}{(s - \alpha)} e^{-Ds} = \frac{K}{(\tau s + 1)} e^{-Ds}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $D$  es el tiempo muerto, mientras su sistema discretizado se describe en (2.2):

$$Qf(kT) = a Qf(kT - T) + b_1 PTM(kT - T) + b_2 PTM_{set}(kT - 2T)$$

$$y(kT) = a y(kT - T) + b_1 u(kT - T) + b_2 u(kT - 2T) \quad (4.2)$$

donde  $k = t/T$  es el tiempo discreto,  $T$  es el tiempo de muestreo, y

$$a = e^{\alpha T} \quad b_1 = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(T-\tau)} - 1) \quad b_2 = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha T} - e^{\alpha(T-\tau)})$$

El sistema en estudio puede ser descrito en su representación polinómica como:

$$A(q)y = B(q)u \quad \frac{y}{u} = \frac{B(q)}{A(q)} \quad (4.3)$$

donde  $q$  es el operador de desplazamiento,  $A(q)$  y  $B(q)$  (con dimensiones apropiadas) son polinomios en  $q$  que describen la dinámica del proceso,  $y = QF$  es la salida, y  $u = PTM$  (la presión de transmembrana) es la entrada.

De acuerdo a [7], el controlador con auto-sintonización original empleaba un controlador de mínima varianza. Este controlador, por diseño, cancela los ceros del proceso; es decir, los ceros del polinomio  $B(q) = 0$  [2]. Luego de varias aplicaciones industriales, se determinó que la cancelación de los ceros del proceso, provocan a menudo problemas de inestabilidad en el comportamiento del sistema. La explicación es que el proceso de muestreo puede originar algunos ceros inestables (aún en el caso en que los ceros originales del sistema continuo fueran estables) que no van a ser tomados en cuenta por el controlador de mínima varianza. Por consiguiente, no se debe permitir cancelación de los ceros en dicho sistema. Esto se puede lograr haciendo que el sistema de control a lazo cerrado mantenga los ceros del sistema de control a lazo abierto dado en (4.3).

Por otra parte, un controlador de mínima varianza requiere por diseño estar afectado por ruido blanco. Por esta razón, ubica todos los polos del sistema de lazo cerrado en el origen [2]. Este hecho origina que el controlador genere grandes señales en el inicio para poder controlar al sistema, lo cual en muchos casos no es aceptable debido a restricciones del tipo hardware (por ejemplo, amplificadores de señal de control con ganancia limitada). La consecuencia es entonces un mal comportamiento del sistema de control, principalmente cuando ocurren cambios rápidos en la señal de referencia.

Habiendo sido desechado el empleo del controlador de mínima varianza, entonces se probó satisfactoriamente el control de la UF (ultrafiltración) empleando un controlador por localización de polos [7]. Varios factores pueden limitar la localización de los polos deseados del sistema. Si se desea un control suave en el

estado estable, la velocidad de cambio de la señal de referencia no debe ser muy grande. En segundo lugar, la primera respuesta al escalón en la etapa de arranque, no debe ser más rápida que el tiempo requerido para determinar un nuevo modelo de la dinámica. En otro caso, el arranque no sería lo suficientemente suave. En el MCF, el tiempo necesario para realizar cambios en la UF es de varios minutos.

Con en la práctica, los cambios rápidos de la UF no hacen variar significativamente el error por volumen acumulado en la máquina (este volumen puede alcanzar los 100 ml), nunca será muy grande. Para recuperarse de este error, el controlador por ubicación de polos permite un pequeño sobreimpulso en el flujo. Es decir, mientras más grande es el tiempo permitido para eliminar el error, el sobreimpulso será más pequeño. En un instante, la integral del sobreimpulso puede igualar al error acumulado debido al cambio de referencia. En el MCF, este tiempo se ha fijado en una hora, gracias a la localización adecuada del polo más lento del sistema. Este tiempo de retardo  $\tau_1$  es un dato de diseño y se formula en general como una constante de tiempo, como sigue:

$$\frac{K}{(\tau_1 s + 1)}$$

Empleando argumentos de diseño válidos como en el caso anterior, se pueden localizar los otros polos deseados del controlador.

El control adaptivo de la UF empleando una ley de control por ubicación de polos, usa la técnica de identificación de los mínimos cuadrados recursivos para estimar los parámetros (la dinámica del sistema) en cada período de discretización. Debido a que miles de equipos de diálisis empleando este sistema de control están operando en el mundo, es que considero interesante describir en la siguiente sección los lineamientos generales para diseñar un sistema de control adaptivo por ubicación de polos.

## 4.2 El Sistema de Control Adaptivo por Ubicación de Polos

El modelo discreto del proceso empleado para el sistema de control adaptivo es de primer orden y lineal, con una salida retardada y dos entradas también retardadas. Este modelo se describe en la ecuación (4.2). El tiempo de muestreo  $T$  es de 5 s y es suficientemente rápido comparado con la respuesta al escalón deseada. La ecuación (4.2) en el dominio del operador de desplazamiento  $q$  toma

la forma:

$$y(q) = aq^{-1}y(q) + b_1q^{-1}u(q) + b_2q^{-2}u(q)$$

Reagrupando términos obtenemos:

$$(1 - aq^{-1})y(q) = (b_1q^{-1} + b_2q^{-2})u(q)$$

Por consiguiente:

$$A(q) = q^2 - aq \quad B(q) = b_1q + b_2 \quad (4.4)$$

El controlador del sistema de control adaptivo se puede describir como [7]:

$$R(q)u = V(q)y_{ref} - S(q)y \quad (4.5)$$

donde  $y_{ref}$  es el valor deseado de  $y$  (la referencia) y  $R$ ,  $S$  y  $T$  son polinomios en  $q$ . Empleando la relación:  $A(q)y = B(q)u$  en (4.5), se obtiene la siguiente relación correspondiente al sistema a lazo cerrado:

$$[A(q)R(q) + B(q)S(q)]y = [P(q)]y = B(q)V(q)y_{ref} \quad (4.6)$$

donde  $P(q)$  es un polinomio en  $q$  que describe la dinámica deseada del sistema controlado. El controlador resultante es tal que el sistema de control a lazo cerrado va a poseer cuatro polos localizados en sitios pre-determinados. De la discusión acerca del control del sistema empleando un controlador PI, sabemos que se necesitan dos integradores en el controlador para lograr el flujo acumulado correcto. Por consiguiente, dos factores del tipo  $(q - 1)$  son necesarios en el polinomio  $R(q)$ , por lo siguiente. Un integrador en el dominio de  $s$  se describe con el término:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s - 0}$$

cuyo significado es una raíz  $s = 0$  en el origen del plano  $s$ . Como  $q = e^s = 1$  para  $s = 0$ , entonces un integrador en el dominio de  $q$  está caracterizado por el término:

$$\frac{1}{q - 1}$$

Los grados requeridos por los polinomios  $R$  y  $S$  serán entonces tres y dos, respectivamente (incluyendo a los dos integradores), debido a que los grados de

$A$  y  $B$  son dos y uno, respectivamente (ver ecuación (4.4)). La forma de los polinomios  $R$  y  $S$  es como sigue:

$$\begin{aligned} R(q) &= (q-1)(q-1)(q-R_1) \\ S(q) &= S_2q^2 + S_1q + S_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como se ha mencionado anteriormente, el tiempo necesario para que el sistema se recupere de un error en el flujo acumulado, está dado por la constante de tiempo más lenta del sistema a lazo cerrado. Así, para provocar una constante de tiempo de 1 hora (3600 s), uno de los polos del sistema a lazo cerrado debe ubicarse en  $s = -1/\tau_1$ , donde  $\tau_1 = 3600$  s. Desde que el grado del polinomio  $AR+BS$  es cuatro, existen entonces otros tres polos por ubicar, de modo tal que tales ubicaciones determinen el tiempo necesario para alcanzar al flujo de referencia. Las constantes de tiempo seleccionadas en [7] son 25, 15 y 15 s. Por consiguiente, la ecuación deseada del sistema continuo a lazo cerrado es:

$$P(s) = A(s)R(s) + B(s)S(s) = (\tau_1s + 1)(\tau_2s + 1)(\tau_3s + 1)(\tau_4s + 1) \quad (4.8)$$

donde  $\tau_1 = 3600$  s,  $\tau_2 = 25$  s y  $\tau_3 = \tau_4 = 15$  s. Empleando MATLAB, el polinomio deseado en  $s$  puede ser transformado en un polinomio deseado en  $q$ , de modo tal que:

$$A(q)R(q) + B(q)S(q) = 1 + \alpha_1q^{-1} + \alpha_2q^{-2} + \alpha_3q^{-3} + \alpha_4q^{-4} \quad (4.9)$$

Sustituyendo las expresiones de  $A(q)$ ,  $B(q)$ ,  $R(q)$  y  $S(q)$  en (4.9), operando e identificando términos, fácilmente se puede determinar las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{a\alpha_4}{\beta_2} \\ R_1 &= \beta_1S_1 + \beta_2S_0 + 1 - \alpha R_1 - R_1 \\ S_0 &= \frac{\beta_2\alpha_2 - \beta_1\alpha_3 + \beta_1^2S_2 + c}{\beta_2^2 - \alpha_1\beta_1\beta_2 - \beta_1\beta_2 + \beta_1^2} \\ S_1 &= \frac{\alpha_3 - \beta_1S_2 + R_1}{\beta_2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde:

$$c = -\beta_2(2 + \alpha^2 + 2\alpha + \alpha\alpha_1 + \alpha_1) + \alpha + \alpha_1$$

Tener en cuenta que en la ecuación (4.10), los parámetros  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  son datos fijos, mientras que los parámetros  $a$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son parámetros que se estiman en cada tiempo de muestreo. El polinomio  $V(q)$  en la ley de control, puede introducir

ceros adicionales en el sistema a lazo cerrado, con la finalidad de cancelar los polos del sistema de control a lazo cerrado que podrían hacer incontrolable al sistema.

Resumiendo, el control adaptivo por ubicación de polos opera como sigue. Para cada tiempo de muestreo se estiman los parámetros  $a$ ,  $b_1$  y  $b_2$ . Estos parámetros se emplean para computar los parámetros de la ley de control dada en (4.10). Finalmente, la señal de control  $u$  (ecuación 4.5), es la que se aplica en el proceso.

### 4.3 El Sistema de Control Adaptivo con Ley de Control Óptima

Esta sección sigue el procedimiento de diseño de los sistemas de control adaptivo descritos en libro de la referencia [5]. El sistema de control adaptivo a diseñar, emplea una ley de control óptima cuadrática discreta, un observador óptimo para estimar los estados del sistema, un identificador de parámetros que emplea la técnica recursiva de los mínimos cuadrados mejorado (descrito en el capítulo II) y la descripción dinámica del proceso formulada en (2.3) y (2.4).

El diagrama de bloques general del sistema de control adaptivo con autosintonización que usaremos en este estudio se muestra en la figura 4.1. Este sistema opera como sigue: luego de cada tiempo de muestreo, el vector estimado de parámetros  $\hat{\theta}$  se actualiza empleando los datos proporcionados por la entrada  $u$  del proceso y por la salida  $y$  del mismo. Luego, los elementos de  $\hat{\theta}$  se usan para recuperar el modelo lineal estimado del proceso  $\mathbf{x} = \hat{G}\mathbf{x} + \hat{H}u$  (el sombrero sobre las matrices  $G$  y  $H$  denota estimación), lo cual permite estimar el vector de estado del modelo del proceso  $\hat{\mathbf{x}}$ . Tales resultados se usan luego para computar la ley de control  $u$ .

Hemos visto en el capítulo III que el control óptimo se ocupa de determinar el “mejor” sistema de control mediante la aplicación de una técnica óptima de diseño. El procedimiento de diseño de un sistema de control óptimo consiste en encontrar un mínimo de una función de rendimiento, con la finalidad de determinar los parámetros óptimos de una ley de control.

Para regular la UF del proceso de diálisis emplearemos la configuración del regulador óptimo proporcional–integral mostrado en la figura 2.3 [4], [5], en donde podemos notar que la señal  $v(k)$  es la señal de salida de un integrador discreto y  $K_I$  es su ganancia integral asociada. Esta configuración se describió en la sección 2.3. Por otra parte, el observador de estados óptimo ha sido descrito en detalle

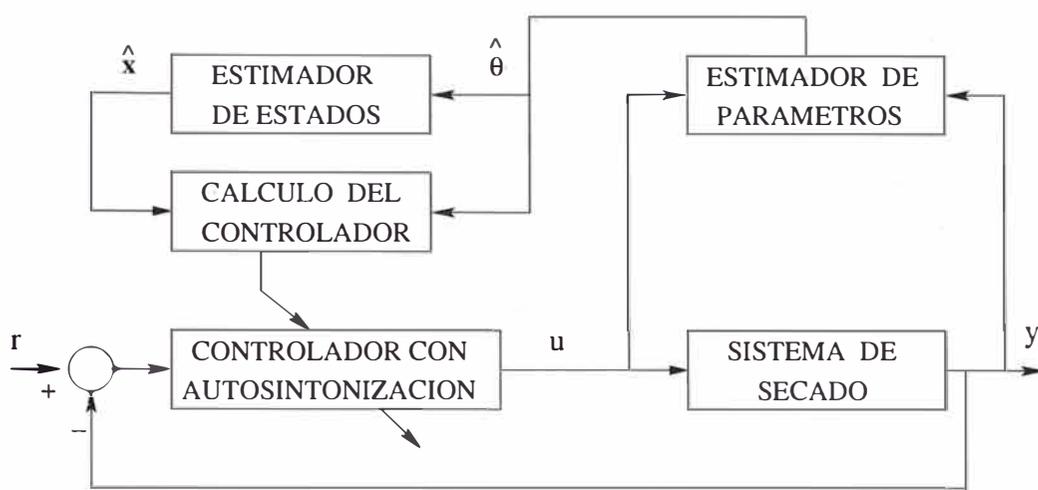


Figura 4.1: Configuración del sistema de control con autosintonización.

en la sección 2.4.

El programa `mradapt.m` escrito en código MATLAB [3], cuyo listado se muestra en el capítulo VI, resuelve el problema del control óptimo de la UF en presencia de cambios de la referencia PTM. Las características resaltantes de este programa se detallan a continuación.

El sistema a controlar es de orden cinco con una salida controlada (el flujo  $Q_f$ ). Las matrices de ponderación (o de sintonización)  $Q_0$  y  $R_0$  del observador, y  $Q_a$  y  $R_a$  del controlador, se fijaron en:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_0 = [5] \quad R_a = [25]$$

Las ecuaciones de estado y de salida, tanto en el dominio continuo como en el dominio discreto, correspondientes al proceso de diálisis, a saber (ver relaciones (2.3) y (2.4)):

$$\frac{1}{(\tau_f s + 1)} \frac{K}{(\tau s + 1)} \frac{\left(2 - Ds + \frac{(-Ds)^2}{2!} + \frac{(-Ds)^3}{3!}\right)}{\left(2 + Ds + \frac{(Ds)^2}{2!} + \frac{(Ds)^3}{3!}\right)} = \frac{num}{den} \quad (4.11)$$

Los parámetros iniciales valorados empleados en el diseño del sistema de control adaptivo son:  $\alpha = -0.14$ ,  $\beta = 0.15$ ,  $K = -\beta/\alpha$ ,  $\tau = -1/\alpha$  s,  $\tau_f = 30$  s,  $D = 17$ . Partiendo de (4.11), y usando los comandos de MATLAB, podemos determinar las ecuaciones de estado continua y discreta del sistema, para un tiempo de muestreo de  $T = 8$  s:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B u \quad \mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H u(k) \quad y(k) = C\mathbf{x}(k)$$

La función de transferencia de pulso del proceso de diálisis de quinto orden toma la forma dada en la ecuación 2.6, a saber:

$$\frac{y(q)}{u(q)} = \frac{num(q)}{den(q)} = \frac{b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + b_3q^{-3} + b_4q^{-4} + b_5q^{-5}}{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3} + a_4q^{-4} + a_5q^{-5}} \quad (4.12)$$

Por conveniencia, para lograr una rápida convergencia de los parámetros, seleccionamos como vector inicial de parámetros:

$$\theta_i = [-a_1 \quad -a_2 \quad -a_3 \quad -a_4 \quad -a_5 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5]^T$$

Las condiciones iniciales del vector de estado  $\mathbf{x}$  y del término integral  $z$  se toman como nulos. Dentro del bucle de control, la señal de referencia es del tipo escalón, por saltos en mm Hg, para asemejar los cambios de presión de transmembrana PTM que ocurren en la práctica. Esto es:

```
if((t>=1) & (t <= 200)), g(t+5)=100;
    elseif((t > 200) & (t<=800)), g(t+5)=400;
    elseif((t>800) & (t <= MM)), g(t+5)=200;
end
```

El modelo del proceso para identificación es (ver (4.11)):

$$\begin{aligned} y(k) &= \Psi(k)^T \theta(k) \\ \Psi^T(k) &= [y(k-1) \quad \dots \quad y(k-5) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-5)] \\ \theta(k) &= [-a_1(k) \quad \dots \quad -a_5(k) \quad b_1(k) \quad \dots \quad b_5(k)] \end{aligned}$$

La estimación de parámetros empleando el método de los mínimos cuadrados recursivo mejorado (capítulo II), se implementa con el subprograma siguiente:

```
psi = [y(t+4) y(t+3) y(t+2) y(t+1) y(t) ...
       y(t+4) y(t+3) y(t+2) y(t+1) y(t)]';
rho = max(1,norm(psi));
```

```

psin = psi/rho;
Nn = chol(Pi'); % Nn'*Nn = Pi => Nn*N' = Pi'
S = inv(diag(Nn*ones(NN,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;
rt = 1 + psins'*Ps*psins;
lamb = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = y(t+4)/rho - psin'*thi;
j = psins'*Ps*psins + lamb;
th = thi + e*inv(S)*Ps*psins/j;
Hns = Ps*psins/j;
Ps = (Ps - Hns*psins'*Ps)/lamb;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps))) ;
cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,
    Pi = Ps; thi = th;
elseif tt >= cmax,
    Nnew = chol(Ps'); % Nnew*Nnew' = Ps'
    Snew = inv(diag(Nnew*ones(NN,1),0));
    Psnew = Snew*Ps*Snew;
    Pi = Psnew; thi = th;
end

```

Luego de estimado el vector de parámetros, sus elementos sirven para recuperar la siguiente ecuación canónica controlable [5]:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{G}\hat{x}(k) + \hat{H}u(k) \quad y(k) = \hat{C}\hat{x}(k)$$

La forma recursiva de la ecuación de Ricatti para determinar la matriz solución  $P_o$ , el cálculo de la ganancia  $K_o$  del observador de estados, y el cálculo del vector de estado estimados  $\hat{x}$ , tienen la forma:

$$P_o = Q_o + \hat{G}P_o\hat{G}^T - \hat{G}^T P_o \hat{C}^T (R_o + \hat{C}P_o\hat{C}^T)^{-1} \hat{C}P_o\hat{G}^T$$

$$K_o = (R_o + \hat{C}P_o\hat{C}^T)^{-1} \hat{C}P_o\hat{G}^T$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{G}\hat{x}(k) + \hat{H}u(k) + K_o^T(y(k) - \hat{C}\hat{x}(k))$$

Para determinar la ganancia  $\tilde{K}$  del controlador necesitamos computar las matrices aumentadas  $\tilde{G}$  y  $\tilde{H}$ . Estas matrices forman parte de la ecuación de Ricatti asociada (relación (2.24):

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G}$$

cuya solución es  $\tilde{P}$ . Con esta matriz solución podemos hacer el cálculo de  $\tilde{K}$  empleando (2.25):

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G}$$

donde  $\tilde{P}$  es una matriz simétrica definida positiva de dimensión  $(n+1) \times (n+1)$ . Dicha matriz es solución de la ecuación matricial de Riccati formulada arriba. Empleando los cálculos anteriores, ahora podemos computar la ley de control  $u$ :

$$z(k+1) = z(k) + g(k) - y(k)$$

$$u(k+1) = -K x(k+1) + K_I z(k+1)$$

El resultado del control del sistema se ilustra en la figura 4.2, mientras que la figura 4.3 muestra la estimación on-line de algunos parámetros.

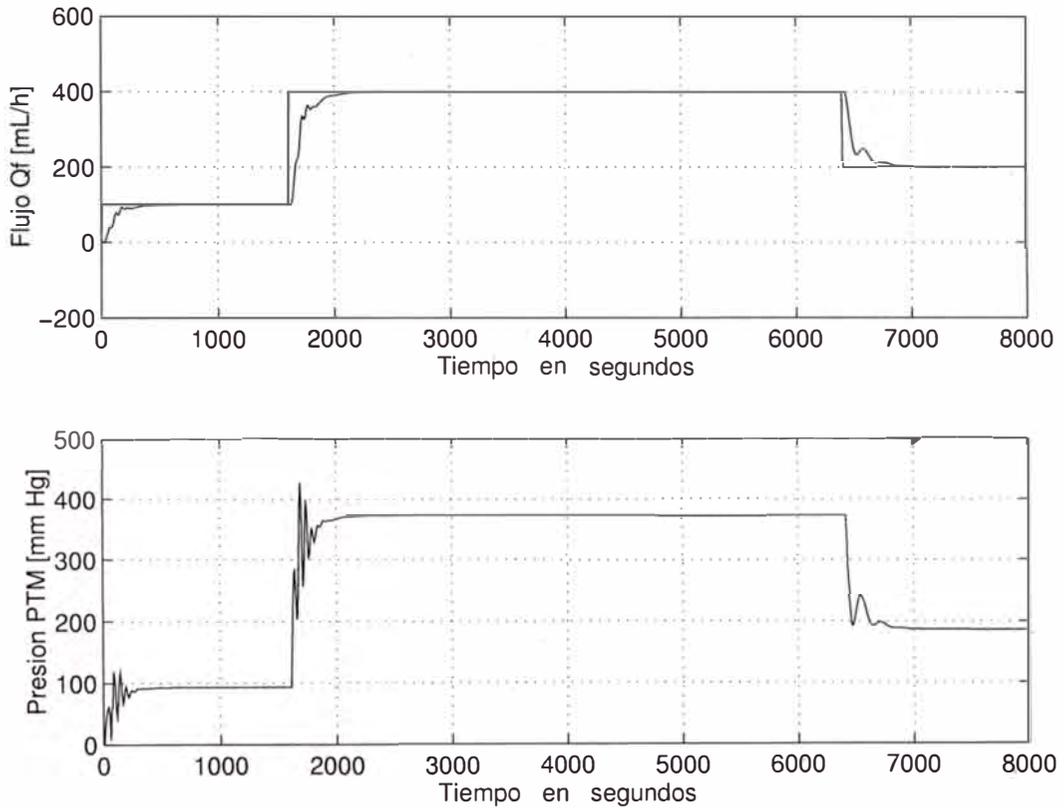


Figura 4.2: Control adaptivo de la ultrafiltración (UF).

#### 4.4 Adaptación de los Parámetros

En este estudio se ha enfatizado la importancia de que los parámetros deben de adaptarse a las nuevas condiciones debido, por ejemplo, al empleo de dializadores de distinta marca. El resultado del sistema de control adaptivo mostrado

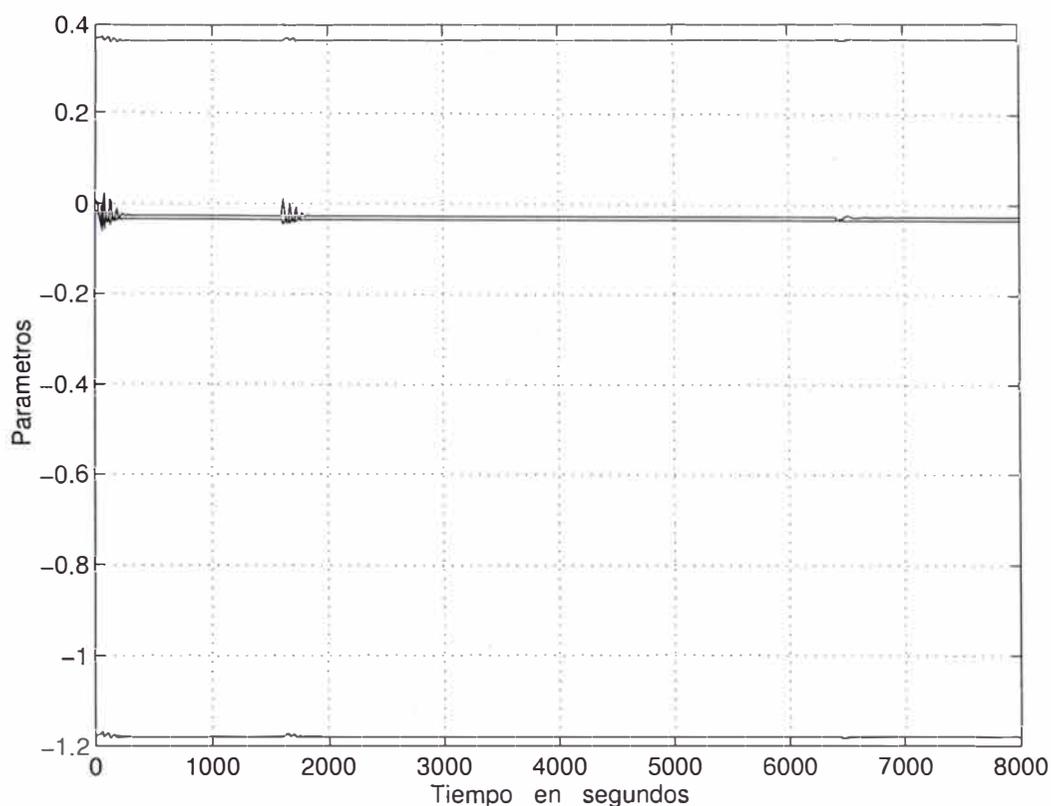


Figura 4.3: Identificación de algunos parámetros durante el control adaptivo de la UF. De arriba hacia abajo:  $a_2(k)$ ,  $a_1(k)$ ,  $b_2(k)$  y  $b_1(k)$ .

en la figura 4.2, se obtuvo con los siguientes parámetros valorados:

$$D = 17 \quad \alpha = -0.14 \quad \beta = 0.15$$

Como el filtro de ruido siempre es el mismo, entonces  $\tau_f = 30$  s permanece constante. De acuerdo a la ecuación (2.1), es decir:

$$\begin{aligned} \frac{dQf(t)}{dt} &= \alpha Qf(t) + \beta PTM(t - D) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \alpha y(t) + \beta p(t - D) \end{aligned}$$

podemos notar que un aumento de la presión de transmembrana  $p$  implica un aumento del flujo  $Qf$  en el dializador. Por consiguiente, la relación  $\beta/\alpha$  no varía significativamente. Para comprobar la adaptabilidad de los parámetros, hemos ejecutado el programa mradap.m con los siguientes parámetros:

$$D = 17 \quad \alpha = -1.4 \quad \beta = 1.5$$

en donde el valor de  $D = 17$  se mantiene por ser este valor un caso extremo. El resultado del control adaptativo de UF se muestra en la figura 4.4. También se puede verificar que el sistema de control adaptativo sigue estabilizando la UF cuando el tiempo muerto  $D$  varía de 0.1 a 17 s.

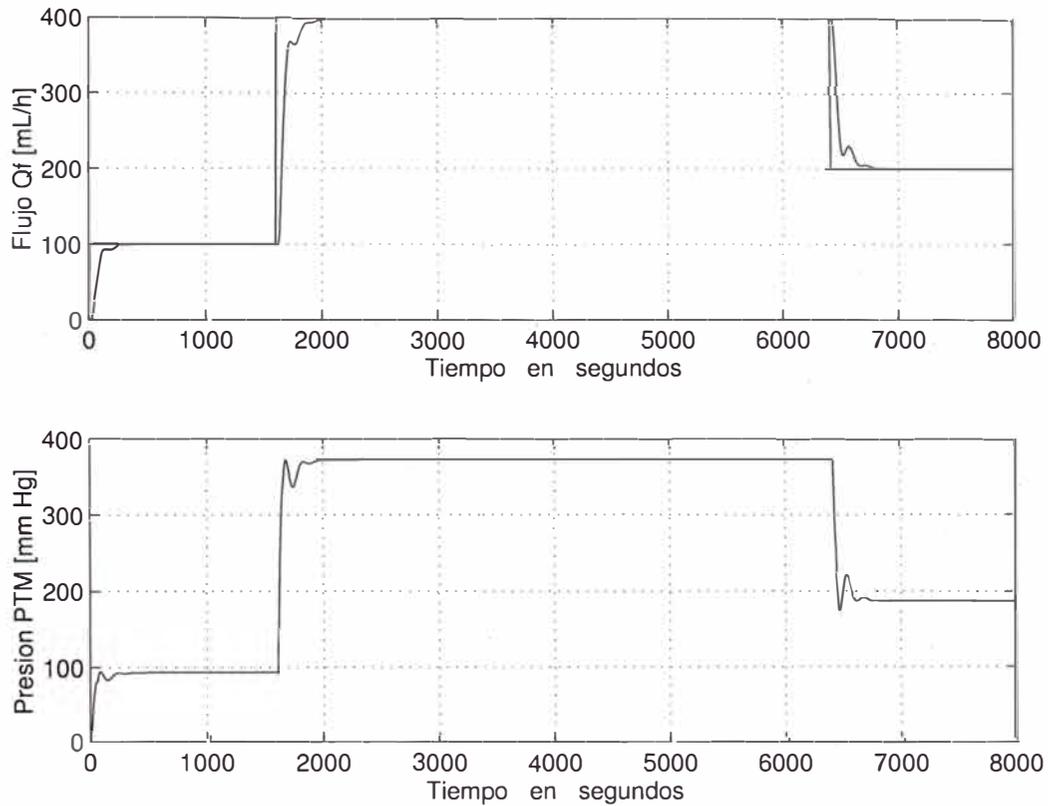


Figura 4.4: Control adaptivo de la ultrafiltración (UF) variando los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  y manteniendo  $\tau_f$  y  $D$  con sus valores iniciales..

## CONCLUSIONES

### Discusión de los Resultados

La figura 4.5 muestra los resultados del control de ultrafiltración UF en el proceso de diálisis, obtenidos mediante la aplicación de las técnicas de control óptimo y adaptivo. Podemos notar que en todos los casos, el fluido de diálisis  $Qf$  se estabiliza en el valor referencial. La señal de referencia simula saltos tipo escalón de la presión de transmembrana referencia PTM, a semejanza de lo que ocurre en el mundo real. Las especificaciones de diseño formuladas en la sección 1.4, es decir, que los sistemas de control óptimo y adaptivo deben ser capaces de estabilizar cambios en el flujo de diálisis  $Qf$  (debido a cambios en la PTM) en menos de 9 minutos (sin que se produzca sobreimpulsos en la señal controlada), se cumple a cabalidad. Con propósitos de comparación, los sistemas de control óptimo y adaptivo diseñados, emplearon el mismo período de muestreo de  $T = 8$  s. Asimismo, los sistemas diseñados cumplen con el requerimiento de que la magnitud de la señal de control PTM no supere la magnitud razonable de los 500 mm Hg.

Una de las desventajas del sistema de control óptimo diseñado es que sólo admite valores del tiempo muerto entre  $0.1 \leq D \leq 8$  s. Las simulaciones han verificado que para  $9 \leq D \leq 12$  s, el tiempo de estabilización se incrementa tremendamente. Para  $D > 12$  s, el sistema se torna inestable. En cambio, el sistema de control adaptivo trabaja sin problemas para valores de  $D$  comprendidos entre 0.1 y 17 s. Para tiempos muertos mayores, el sistema se vuelve inestable. Este análisis demuestra la importancia que tiene el tiempo muerto en el comportamiento del sistema.

A todas luces un sistema de control adaptivo es conveniente para resolver el problema del control de la UF porque posee la capacidad de que sus parámetros se adapten a los cambios en la dinámica del proceso de diálisis, tal como se ilustra en la figura 4.5. Se ha enfatizado en este estudio que la dinámica del proceso de diálisis cambia principalmente por el uso de dializadores (filtros) de diversos

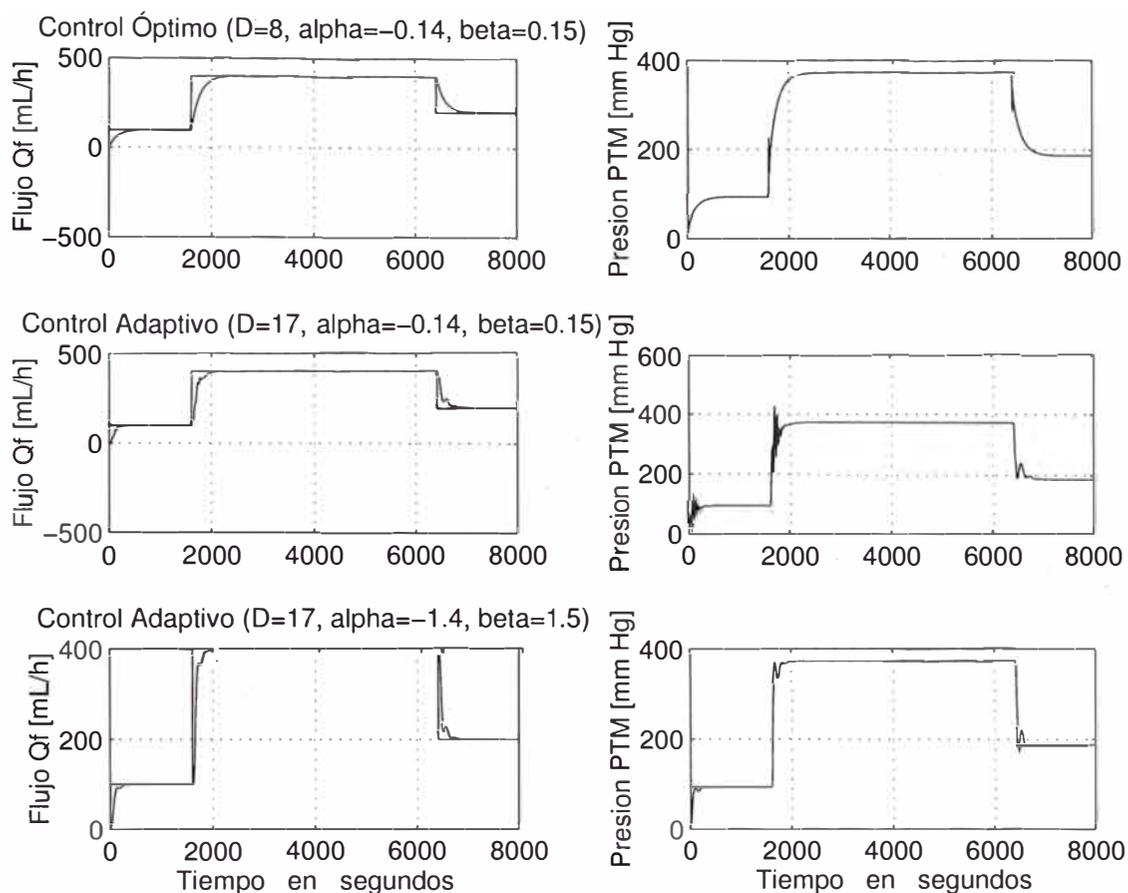


Figura 4.5: Sistemas de control óptimo y adaptivo para el control de la UF.

fabricantes. En otras palabras, el sistema de control adaptivo permite que las máquinas de diálisis en general (y hemodiálisis en particular), puedan seguir operando correctamente, independientemente del dializador que se emplee.

### Trabajos futuros

Ya se ha discutido en este estudio, que la solución del problema de control de UF debe incluir adaptación de los parámetros en juego, debido a la naturaleza propia del proceso controlado y principalmente por el uso de dializadores de diversa procedencia de fabricación.

En el trabajo original (referencia [7]), el control de UF en el proceso de diálisis mediante un sistema de control adaptivo que emplea una ley de control por ubicación de polos y un procedimiento de estimación de los parámetros no conocidos del proceso. Este procedimiento es el de los mínimos cuadrados recursivo, en su versión básica. En este estudio, hemos visto que otra solución al proble-

ma planteado es el uso de un sistema de control adaptivo con autosintonización. Este sistema emplea una ley de control óptima cuadrática y el procedimiento de identificación de parámetros de los mínimos cuadrados recursivo, pero mejorado, para evitar problemas numéricos durante la computación de los algoritmos en juego en cada tiempo de muestreo.

Un estudio encaminado a presentar otra solución alternativa, sería el diseñar un sistema de control adaptivo con modelo referencial. La filosofía de diseño en estos sistemas se basa en un modelo referencial, cuya salida es la “salida deseada del sistema”. El controlador adaptivo debe ser capaz de minimizar el error de seguimiento entre la salida deseada y la salida del sistema controlado (el proceso de diálisis). Este sistema de control adaptivo también hace uso de un procedimiento de estimación de parámetros.

## ANEXO

### LISTADO DE PROGRAMAS

#### Programas Fuente en MATLAB

```
% rescf.m RESPUESTA A CAMBIOS TIPO ESCALON EN PTM = p EN LA MAQUINA
%           DE DIALISIS TIPO FIBRA
clear all

% PARAMETROS DEL PROCESO
% MAQUINAS DE FIBRAS AHUECADAS: C ES PEQUEÑO
% MAQUINA DE PLATO: C ES GRANDE; Cmax = 0.3 mL/mm Hg;
% VALOR DE B DEPENDE DEL AREA DEL FILTRO Y DE LA MEMBRANA USADA
% 0.8 <= B <= 200 mL/h/mm Hg
% TIPO PLATO: C = 0.1; B = 20; ==> (C/B)*3600 = 18 segundos
% Luego seleccionamos T = 1 s (TIEMPO DE MUESTREO)

% TIPO FIBRA: C = 0.01; B = 20; ==> (C/B)*3600 = 18 segundos
% Luego seleccionamos Ts = 0.5 s (TIEMPO DE MUESTREO)

C = 0.01; B = 20; N = 1000; T = 1;
for t=2:N
    if((t>=1) & (t<=200)), p(t)=1000 + 1000*(rand-0.5);
        elseif((t>200) & (t<=800)), p(t)=5000+1000*(rand-0.5);
            elseif((t>800) & (t <=N)), p(t)=3000+1000*(rand-0.5);
        end
    Qf(t)=(C/T)*(p(t)-p(t-1)) + B*p(t);
end

% GRAFICO
x=linspace(0,N*T,N);
subplot(2,1,1)
plot(x,Qf(1:N)), grid
ylabel('Salida Qf [mL/h]')
% xlabel('Tiempo en segundos')
subplot(2,1,2)
plot(x,p(1:N)), grid
xlabel('TIEMPO EN SEGUNDOS')
ylabel('Entrada PTM [mm Hg]')
print -deps -f rescf
```

```

% mroptimo.m CONTROL OPTIMO PROPORCIONAL-INTEGRAL DEL SISTEMA DE DIALISIS
clear all

% PARAMETROS Y MODELO DEL PROCESO
alpha=-0.14; beta=0.15; K=-beta/alpha; tau=-1/alpha; tauf=30;
nD=3; D=8;
% SOPORTA 0.1 <= D <= 8 (CON 9 <= D <= 12 EL TIEMPO DE ESTABILIZACION
% AUMENTA, PERO SIGUE CONTROLANDO. CON D > 12 SE DESINTONIZA)
num1=[K]; den1=[tau*tauf (tau+tauf) 1];
[numD,denD] = pade(D,nD);
[numc,denc]=series(num1,den1,numD,denD);
[A,B,C,DD]=tf2ss(numc,denc);

% CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD DEL PROCESO
rmc = rank(ctrb(A,B)); % rmc = 5 => COMPLETAMENTE CONTROLABLE
rmo = rank(observ(A,C)); % rmo = 5 => COMPLETAMENTE OBSERVABLE

% PROCESO DISCRETO
T=8; % TIEMPO DE MUESTREO
[G,H,C,DD]=c2dm(A,B,C,DD,T,'zoh');

% ADICIONANDO ACCION INTEGRAL
G1 = [G zeros(5,1);-C*G 1];
H1 = [H;-C*H];

% MATRICES DE PONDERACION DEL CONTROLADOR KK
Q = [0 0 0 0 0 0
      0 1 0 0 0 0
      0 0 1 0 0 0
      0 0 0 1 0 0
      0 0 0 0 1 0
      0 0 0 0 0 2000];
R = [1];
% MATRICES DE PONDERACION DEL OBSERVADOR Ko
Qo = [1 0 0 0 0
      0 1 0 0 0
      0 0 1 0 0
      0 0 0 1 0
      0 0 0 0 1]; Ro = [100];

% EQUACION DE RICATTI PARA EL CONTROLADOR
P = zeros(6,6);
for i = 1:40
    P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
% CALCULO DE LA GANACIA K DEL CONTROLADOR
KK = inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
K = [KK(1) KK(2) KK(3) KK(4) KK(5)];
KI = -KK(6);

```

```

% ECUACION DE RICATTI PARA EL OBSERVADOR
Po = zeros(5,5);
for i = 1:40
    Po = Qo + G*Po*G' - G'*Po*C'*inv(Ro+C*Po*C')*C*Po*G';
end
% CALCULO DE LA GANACIA Ko DEL OBSERVADOR OPTIMO
Ko = inv(Ro+C*Po*C')*C*Po*G';

% LAZO DE CONTROL
x=[0;0;0;0;0]; xe=[0;0;0;0;0]; % CONDICIONES INICIALES
v=0; Y=0; U=0;
N = 1000;
for k=1:N
% REFERENCIA r(k)
    if((k>=1) & (k<=200)), r(k)=100;
        elseif((k>200) & (k<=800)), r(k)=400;
            elseif((k>800) & (k <=N)), r(k)=200;
        end
    Ref=r(k);
    v = v + Ref - Y;    % INTEGRADOR
    xe = G*xe + H*U + Ko'*(Y-C*xe); % OBSERVADOR OPTIMO
    U = - K*xe + KI*v; % LEY DE CONTROL
    x = G*x + H*U;    % PROCESO
    Y = C*x;          % SALIDA
    y(k) = Y; u(k) = U;
end

% GRAFICOS
t=linspace(0,N*T,N);
subplot(2,1,1)
plot(t,y(1:N),t,r), grid
ylabel('Flujo Qf [mL/h]')
xlabel('Tiempo en segundos')
subplot(2,1,2)
plot(t,u(1:N)), grid
xlabel('TIEMPO EN SEGUNDOS')
ylabel('Presion TMP [mm Hg]')
print -deps -f mroptimo

% identif.m IDENTIFICACION DE PARAMETROS
clear all

% PARAMETROS Y MODELO DEL PROCESO
nn = 5; r=1; % nn: orden del proceso; r: NUMERO DE SALIDAS
NN = 10;      % ORDEN DEL VECTOR ESTIMADO DE PARAMETROS
alpha=-0.14; beta=0.15; K=-beta/alpha; tau=-1/alpha; tauf=30;
nD=3; D=17;
[numD,denD] = pade(D,nD);

```

```

num1=[K]; den1=[tau*tauf (tau+tauf) 1];
[numc,denc]=series(num1,den1,numD,denD);
[A,B,C,DD]=tf2ss(numc,denc);

% MODELO DISCRETO
T = 8; % TIEMPO DISCRETO EN SEGUNDOS
[G,H,C,DD]=c2dm(A,B,C,DD,T,'zoh');
[num,den]=ss2tf(G,H,C,DD);
a1 = den(2); a2 = den(3); a3=den(4); a4=den(5); a5=den(6);
b1 = num(2); b2 = num(3); b3=num(4); b4=num(5); b5=num(6);

% CONDICIONES INICIALES
thi = 0.0*[-a1 -a2 -a3 -a4 -a5 b1 b2 b3 b4 b5]'; % PARAMETROS
alfa = 1000; Pi = alfa*eye(NN); % MATRIZ P INICIAL
lamb=0.98; lamb0 = 0.99; % FACTOR DE MEMORIA
for tt=1:6
    y(tt) = 0; u(tt) = 0;
end

% BUCLE DE IDENTIFICACION *****
MM = 500;
for t = 1:MM

% MODELO DEL PROCESO
u(t+4)=10; % EXCITACION CONSTANTE
y(t+5)=[y(t+4) y(t+3) y(t+2) y(t+1) y(t)
u(t+4) u(t+3) u(t+2) u(t+1) u(t)]*...
[-a1 -a2 -a3 -a4 -a5 b1 b2 b3 b4 b5]';

% ESTIMACION DE PARAMETROS (METODO MCRM)
psi = [y(t+4) y(t+3) y(t+2) y(t+1) y(t)
u(t+4) u(t+3) u(t+2) u(t+1) u(t)]';
rho = max(1,norm(psi));
psin = psi/rho;
Nn = chol(Pi'); % Nn'*Nn = Pi => Nn*N' = Pi'
S = inv(diag(Nn*ones(NN,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;
rt = 1 + psins'*Ps*psins;
lamb = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = y(t+5)/rho - psin'*thi;
j = psins'*Ps*psins + lamb;
th = thi + e*inv(S)*Ps*psins/j;
a1e(t+5)=-th(1); a2e(t+5)=-th(2); b1e(t+5)=th(6); b2e(t+5)=th(7);
Hns = Ps*psins/j;
Ps = (Ps - Hns*psins'*Ps)/lamb;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps))) );
cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,

```

```

    Pi = Ps; thi = th;
elseif tt >= cmax,
    Nnew = chol(Ps'); % Nnew*Nnew' = Ps'
    Snew = inv(diag(Nnew*ones(NN,1),0));
    Psnew = Snew*Ps*Snew;
    Pi = Psnew; thi = th;
end
end % FIN DEL BUCLE *****

% GRAFICOS
ejex = linspace(0,MM*T,MM);
plot(ejex,a1e(6:MM+5),ejex,a2e(6:MM+5),...
ejex,b1e(6:MM+5),ejex,b2e(6:MM+5)), grid
ylabel('Parametros')
xlabel('Tiempo en segundos')

print -deps -f identif

% identif.m IDENTIFICACION DE PARAMETROS EMPLEANDO COMO ENTRADA
%          EXCITATRIZ RUIDO BLANCO DE DISTRIBUCION UNIFORME
clear all

% PARAMETROS Y MODELO DEL PROCESO
nn = 5; r=1; % nn: orden del proceso; r: NUMERO DE SALIDAS
NN = 10;      % ORDEN DEL VECTOR ESTIMADO DE PARAMETROS
alpha=-0.14; beta=0.15; K=-beta/alpha; tau=-1/alpha; tauf=30;
nD=3; D=17;
[numD,denD] = pade(D,nD);
num1=[K]; den1=[tau*tauf (tau+tauf) 1];
[numc,denc]=series(num1,den1,numD,denD);
[A,B,C,DD]=tf2ss(numc,denc);

% MODELO DISCRETO
T = 8; % TIEMPO DISCRETO EN SEGUNDOS
[G,H,C,DD]=c2dm(A,B,C,DD,T,'zoh');
[num,den]=ss2tf(G,H,C,DD);
a1 = den(2); a2 = den(3); a3=den(4); a4=den(5); a5=den(6);
b1 = num(2); b2 = num(3); b3=num(4); b4=num(5); b5=num(6);

% CONDICIONES INICIALES
thi = 0.0*[-a1 -a2 -a3 -a4 -a5 b1 b2 b3 b4 b5]'; % PARAMETROS
alfa = 1000; Pi = alfa*eye(NN); % MATRIZ P INICIAL
lamb=0.98; lamb0 = 0.99; % FACTOR DE MEMORIA
for tt=1:6
    y(tt) = 0; u(tt) = 0;
end

% BUCLE DE IDENTIFICACION *****
MM = 500;

```

```

for t = 1:MM

% MODELO DEL PROCESO
u(t+4)=0.1*rand; % EXCITACION RUIDOSA
y(t+5)=[y(t+4) y(t+3) y(t+2) y(t+1) y(t) ...
u(t+4) u(t+3) u(t+2) u(t+1) u(t)]*...
[-a1 -a2 -a3 -a4 -a5 b1 b2 b3 b4 b5]';

% ESTIMACION DE PARAMETROS (METODO MCRM)
psi = [y(t+4) y(t+3) y(t+2) y(t+1) y(t) ...
        u(t+4) u(t+3) u(t+2) u(t+1) u(t)]';
rho = max(1,norm(psi));
psin = psi/rho;
Nn = chol(Pi'); % Nn'*Nn = Pi => Nn*N' = Pi'
S = inv(diag(Nn*ones(NN,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;
rt = 1 + psins'*Ps*psins;
lamb = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = y(t+5)/rho - psin'*thi;
j = psins'*Ps*psins + lamb;
th = thi + e*inv(S)*Ps*psins/j;
a1e(t+5)=-th(1); a2e(t+5)=-th(2); b1e(t+5)=th(6); b2e(t+5)=th(7);
Hns = Ps*psins/j;
Ps = (Ps - Hns*psins'*Ps)/lamb;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps)) );
cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,
    Pi = Ps; thi = th;
elseif tt >= cmax,
    Nnew = chol(Ps'); % Nnew*Nnew' = Ps'
    Snew = inv(diag(Nnew*ones(NN,1),0));
    Psnew = Snew*Ps*Snew;
    Pi = Psnew; thi = th;
end
end % FIN DEL BUCLE *****

% GRAFICOS
ejex = linspace(0,MM*T,MM);
plot(ejex,a1e(6:MM+5),ejex,a2e(6:MM+5),...
ejex,b1e(6:MM+5),ejex,b2e(6:MM+5)), grid
ylabel('Parametros')
xlabel('Tiempo en segundos')

print -deps -f identifr

% mradap.m CONTROL ADAPTIVO DEL SISTEMA DE DIALISIS
clear all

```

```

% PARAMETROS GENERALES
nn = 5; r=1; % nn: orden del proceso; r: NUMERO DE SALIDAS
NN = 10;      % ORDEN DEL VECTOR ESTIMADO DE PARAMETROS

% MATRICES DE PONDERACION DEL OBSERVADOR Ko
Qo = [1 0 0 0 0
      0 1 0 0 0
      0 0 1 0 0
      0 0 0 1 0
      0 0 0 0 1]; Ro = [5];

% MATRICES DE PONDERACION DEL CONTROLADOR Ke
Qa = [1 0 0 0 0 0
      0 1 0 0 0 0
      0 0 1 0 0 0
      0 0 0 1 0 0
      0 0 0 0 1 0
      0 0 0 0 0 5]; Ra = [25];

% PARAMETROS Y MODELO DEL PROCESO
alpha=-0.14; beta=0.15; K=-beta/alpha; tau=-1/alpha; tauf=30;
nD=3; D=17; % SOPORTA 0.1 <= D <= 17 (EN D=18 SE HACE INESTABLE)
num1=[K]; den1=[tau*tauf (tau+tauf) 1];
[numD,denD] = pade(D,nD);
[numc,denc]=series(num1,den1,numD,denD);
[A,B,C,DD]=tf2ss(numc,denc);

% MODELO DISCRETO
T = 8; % TIEMPO DISCRETO EN SEGUNDOS
[G,H,C,DD]=c2dm(A,B,C,DD,T,'zoh');
[num,den]=ss2tf(G,H,C,DD);
a1 = den(2); a2 = den(3); a3=den(4); a4=den(5); a5=den(6);
b1 = num(2); b2 = num(3); b3=num(4); b4=num(5); b5=num(6);

% CONDICIONES INICIALES
thi = [-a1 -a2 -a3 -a4 -a5 b1 b2 b3 b4 b5]'; % PARAMETROS
alfa = 1000; Pi = alfa*eye(NN); % MATRIZ P INICIAL
lamb=0.98; lamb0 = 0.99; % FACTOR DE MEMORIA
y(1) = 0; y(2) = 0; y(3) = 0; y(4) = 0; y(5) = 0;
u(1) = 0; u(2) = 0; u(3) = 0; u(4) = 0; u(5) = 0;
x = [0;0;0;0;0]; % VECTOR DE ESTADO INICIAL
z = 0; % ACCION INTEGRAL INICIAL

% BUCLE DE CONTROL *****
MM = 1000;
for t = 1:MM

% REFERENCIA
if((t>=1) & (t<=200)), g(t+5)=100;%

```

```

elseif((t>200) & (t<=800)), g(t+5)=400;
elseif((t>800) & (t <= MM)), g(t+5)=200;
end

% MODELO DEL PROCESO
y(t+5)=[y(t+4) y(t+3) y(t+2) y(t+1) y(t) ...
u(t+4) u(t+3) u(t+2) u(t+1) u(t)]*...
[-a1 -a2 -a3 -a4 -a5 b1 b2 b3 b4 b5]';

% ESTIMACION DE PARAMETROS (METODO MCRM)
psi = [y(t+4) y(t+3) y(t+2) y(t+1) y(t) ...
u(t+4) u(t+3) u(t+2) u(t+1) u(t)]';
rho = max(1,norm(psi));
psin = psi/rho;
Nn = chol(Pi'); % Nn'*Nn = Pi => Nn*N' = Pi'
S = inv(diag(Nn*ones(NN,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;
rt = 1 + psins'*Ps*psins;
lamb = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = y(t+4)/rho - psin'*thi;
j = psins'*Ps*psins + lamb;
th = thi + e*inv(S)*Ps*psins/j;
a1e(t+5)=-th(1); a2e(t+5)=-th(2); b1e(t+5)=th(6); b2e(t+5)=th(7);
Hns = Ps*psins/j;
Ps = (Ps - Hns*psins'*Ps)/lamb;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps))) );
cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,
    Pi = Ps; thi = th;
elseif tt >= cmax,
    Nnew = chol(Ps'); % Nnew*Nnew' = Ps'
    Snew = inv(diag(Nnew*ones(NN,1),0));
    Psnew = Snew*Ps*Snew;
    Pi = Psnew; thi = th;
end

% RECUPERACION DE LA ECUACION CANONICA CONTROLABLE
ae1 =-th(1); ae2 =-th(2); ae3=-th(3); ae4 =-th(4); ae5 =-th(5);
be1 = th(6); be2 = th(7); be3= th(8); be4 = th(9); be5 = th(10);
nume = [0 be1 be2 be3 be4 be5];
dene = [1 ae1 ae2 ae3 ae4 ae5];
[GE,HE,CE,DE] = tf2ss(nume,dene);

% EQUACION DE RICATTI
Po = zeros(5,5);
for i = 1:40
    Po = Qo + GE*Po*GE' - GE'*Po*CE'*inv(Ro+CE*Po*CE')*CE*Po*GE';
end

```

```

% CALCULO DE LA GANANCIA Ko DEL OBSERVADOR
Ko = inv(Ro+CE*Po*CE')*CE*Po*GE';
% Ko = dlqe(GE,eye(5),CE,Qo,Ro);

% ESTIMACION DE ESTADOS
x = GE*x + HE*u(t+4) + Ko'*(y(t+5)-CE*x);

% MATRICES AUMENTADAS
Ga = [GE zeros(nn,r);-CE*GE eye(r,r)];
Ha = [HE;-CE*HE];

% EQUACION DE RICATTI
Pa = zeros(6,6);
for i = 1:20
    Pa = Qa + Ga'*Pa*Ga - Ga'*Pa*Ha*inv(Ra+Ha'*Pa*Ha)*Ha'*Pa*Ga;
end

% CALCULO DE LA GANANCIA Ka DEL CONTROLADOR
Ka = inv(Ra+Ha'*Pa*Ha)*Ha'*Pa*Ga;
% Ka = dlqr(Ga,Ha,Qa,Ra); % SI SE DESEA CALCULAR CON MATLAB
KK = [Ka(1) Ka(2) Ka(3) Ka(4) Ka(5)];
KI = -Ka(6);

% CALCULO DE LA LEY DE CONTROL
z = z + g(t+5) - y(t+5);          % ACCION INTEGRAL
u(t+5) = - KK*x + KI*z;
end % FIN DEL BUCLE *****

% GRAFICOS
figure(1)
ejex = linspace(0,MM*T,MM);
subplot(2,1,1)
plot(ejex,g(5:MM+4),ejex,y(5:MM+4)), grid
ylabel('Flujo Qf [mL/h]')
xlabel('Tiempo en segundos')
subplot(2,1,2), grid
plot(ejex,u(4:MM+3)), grid
xlabel('Tiempo en segundos')
ylabel('Presion TMP [mm Hg]')
print -deps -f mradap

figure(2)
ejex = linspace(0,MM*T,MM);
plot(ejex,a1e(6:MM+5),ejex,a2e(6:MM+5),...
ejex,b1e(6:MM+5),ejex,b2e(6:MM+5)), grid
ylabel('Parametros')
xlabel('Tiempo en segundos')
print -deps -f mradapi

```

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Åström, K. J. y Wittenmark, Björn. *Computer Controlled Systems—Theory and Design*,. Prentice Hall Information and System Sciences Series, Third Edition, 1997.
- [2] Isermann, Rolf. *Digital Control Systems*. Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [3] MathWorks, Inc. *MATLAB Reference Guide*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [4] Ogata, Katushito. *Designing Linear Control Systems with MATLAB*. Prentice Hall Englewood Cliffs New Jersey, 1994.
- [5] Rojas-Moreno, Arturo. *Control Avanzado—Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real*. Publicación Independiente, 2001.
- [6] Sripada, N. Rao y Fisher, D. Grant. “Improved Least Squares Identification,” *Int. J. Control*, vol. 46, no. 6, 1889–1913 (Dic 1987).
- [7] Sternby, Jan. “Adaptive Control of Ultrafiltration,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 4, no. 1, 11–17 (Jan 1996).