

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA



**“DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DE NIVEL
PARA CUATRO TANQUES ACOPLADOS”**

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ELECTRONICO

PRESENTADO POR:

RAFAEL DAVILA CAINERO

PROMOCION 1989-II

LIMA – PERU

2002

A mi esposa

A mis padres

A mi Alma Mater

**DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DE NIVEL PARA
CUATRO TANQUES ACOPLADOS**

SUMARIO

Durante el Primer Programa de Titulación por Actualización de Conocimientos se desarrollo el Curso de Control Avanzado. Entre las técnicas de control moderna presentadas por el curso se tienen: la de control óptimo y la de control adaptivo.

En este informe, las técnicas de control óptimo y de control adaptivo son aplicadas para el diseño de sistemas de control para un proceso multivariable.

El proceso multivariable consiste de cuatro tanques acoplados que posee dos entradas y dos salidas. La dinámica linealizada del sistema tiene un cero mutivariable que es posible mover en el eje real ajustando una válvula. El cero puede ser colocado al lado izquierdo o al lado derecho del plano s . Cuando el cero se ubica en el lado derecho del plano s , el proceso presenta mayores dificultades para el diseño de los sistemas de control.

Los modelos derivados son simulados en MATLAB.

ÍNDICE

PRÓLOGO	1
CAPÍTULO I	
DESCRIPCIÓN DEL PROCESO Y MODELO FÍSICO	3
1.1. Descripción del Proceso	3
1.2. Modelo Físico del Proceso	5
1.2.1. Puntos de operación en estado de equilibrio	7
1.2.2. Linealización del Proceso	8
1.3. Interpretación de cero multivariable: fase mínima y no-mínima	10
1.4. Valores de los parámetros en punto de equilibrio	12
1.5. Modelo del Proceso en MATLAB	13
1.6. Discretización directa del proceso y comparación con modelo linealizado	16
CAPÍTULO II	
CONTROL ÓPTIMO DEL PROCESO	24
2.1. Regulador óptimo proporcional para sistema multivariable	24
2.2. Controlabilidad de proceso de cuatro tanques acoplados	27

2.3. Procedimiento de diseño	29
2.3.1. Formulación del problema	29
2.3.2. Modelo del proceso y controlabilidad	30
2.3.3. Cálculo de matriz de ganancia óptima del proceso	30
2.3.4. Cálculo de matriz de ganancia K_0 de ajuste de referencia	31
2.4. Programas MATLAB para la simulación del sistema de control óptimo	31
2.5. Simulación del diseño del sistema de control óptimo	34
2.5.1. Simulación del sistema de control óptimo para el proceso en fase mínima	35
2.5.2. Simulación del sistema de control óptimo para el proceso en fase no mínima	41
CAPÍTULO III	
CONTROL ADAPTIVO DEL PROCESO	47
3.1. Sistema de control adaptivo con autosintonización	47
3.2. Adecuaciones del modelo matemático de control adaptivo a proceso multivariable	50
3.2.1. Modelo polinomial de proceso no lineal	50
3.2.2. Estimación de parámetros usando algoritmo de mínimos cuadrados recursivo mejorado	54
3.3. Procedimiento de Diseño	57
3.3.1. Formulación del problema	57
3.3.2. Modelo del proceso	58
3.3.3. Estimación de parámetros	58

3.3.4. Estimación de estados	58
3.3.5. Ley de control	60
3.4. Programas MATLAB para la simulación del sistema de control adaptivo con autosintonización	61
3.5. Simulación del diseño del sistema de control adaptivo con autosintonización	68
3.5.1. Simulación del sistema de control adaptivo con autosintonización para el proceso en fase mínima	68
3.5.2. Simulación del sistema de control adaptivo con autosintonización para el proceso en fase no mínima	74
CONCLUSIONES	79
BIBLIOGRAFÍA	83

PRÓLOGO

Este informe de suficiencia ha sido elaborado como parte de los requerimientos exigidos para la Titulación por Actualización de Conocimientos.

En este informe se presenta la aplicación de las técnicas de control moderno: control óptimo y control adaptivo para el control de un proceso multivariable.

El sistema consiste de cuatro tanques acoplados y posee dos entradas y dos salidas. Adicionalmente, el proceso tiene la característica de poder ajustar los dos ceros del sistema de tal modo que ambos estén en el plano izquierdo (operación en fase mínima) o que uno de ellos esté en el lado derecho (operación en fase no-mínima).

Este informe está organizado en tres capítulos: el primero describe el proceso y el desarrollo del modelo matemático del mismo, el segundo describe la aplicación de la técnica de control óptimo para el control de nivel del proceso, y, el tercero presenta las técnicas de control adaptivo para el mismo propósito. Todos los capítulos inicialmente tienen el desarrollo teórico

y culminan mostrando la implementación en programas de MATLAB del sistema diseñado.

Deseo culminar este prólogo expresando mi agradecimiento a la Universidad Nacional de Ingeniería por la formación profesional recibida y a mi asesor Dr. Arturo Rojas-Moreno por su apoyo en el desarrollo de este informe de suficiencia.

CAPÍTULO I

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO Y MODELO FÍSICO

El proceso de control de líquidos al cual se aplicarán técnicas de diseño de control moderno consiste de cuatro tanques interconectados. El proceso ha sido tomado de la referencia [2]. El proceso es multivariable y permite ajustar un cero, el cual puede ser ubicado en el eje real de lado del plano izquierdo o derecho del plano s .

En este capítulo se describe el proceso, se presenta el modelo matemático, el modelo lineal, se comenta acerca de la ubicación de los ceros y finalmente se implementa en MATLAB.

1.1. Descripción del Proceso

El proceso de control de nivel de líquidos al cual se aplicarán las técnicas de diseño de control moderno es denominado "Proceso de los Cuatro Tanques". El proceso consiste de cuatro tanques de agua interconectados y dos bombas. El esquema del sistema es mostrado en la figura 1. 1.

Las entradas son los voltajes que gobiernan el flujo del líquido inyectado por las bombas. Las salidas son los niveles de líquido de los tanques inferiores. El nivel de líquido es medido por un sensor que expresa el nivel de líquido como un voltaje. Al multiplicar este voltaje por la constante del sensor dará la altura correspondiente.

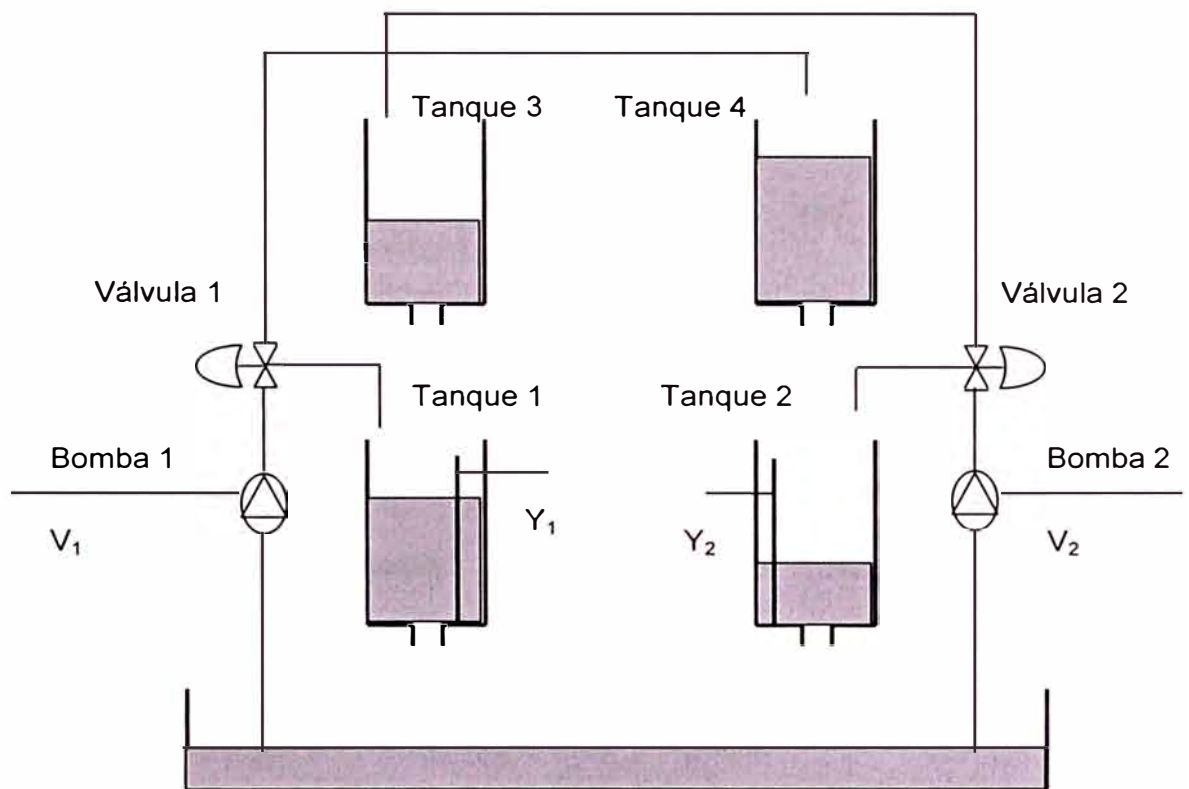


Figura 1.1: Esquema 4 tanques acoplados

En resumen para el esquema mostrado en la figura 1.1:

Variables de entrada: V_1 y V_2

Variables de salida: Y_1 e Y_2

Los valores de los parámetros son:

<u>Descripción</u>	<u>Parámetro</u>	<u>Valor</u>	<u>Unidades</u>
Sección de los tanques 1 y 3	A_1, A_3	28	cm^2
Sección de los tanques 2 y 4	A_2, A_4	32	cm^2
Sección de orificios de tanques 1 y 3	a_1, a_3	0.071	cm^2
Sección de orificios de tanques 2 y 4	a_2, a_4	0.057	cm^2
Constante del sensor para medir nivel de líquido	k_c	0.5	v/cm
Gravedad	g	981	cm/seg^2
Capacidad máxima de las bombas		42	cm^3/seg
Altura de los tanques		20	cm
Diámetro de los tubos flexibles		6	mm

1.2. Modelo Físico del Proceso

Para derivar el modelo físico del proceso se tiene en cuenta:

- Balance de masa para cualquiera de los tanques:

$$A \frac{dH}{dt} = -Q_{\text{out}} + Q_{\text{in}} \quad (1.1)$$

Donde:

- “A” es la sección horizontal del tanque
 - “H” es el nivel de líquido en el tanque
 - “ Q_{in} ” el flujo de entrada al tanque
 - “ Q_{out} ” el flujo de salida del tanque
- Ley de Bernoulli que sostiene:

$$Q_{\text{out}} = a\sqrt{2gH} \quad (1.2)$$

Donde:

- “ Q_{out} ” el flujo de salida del tanque
 - “ a ” es la sección horizontal del agujero del tanque
 - “ g ” es la aceleración de la gravedad
 - “ H ” es el nivel de líquido en el tanque
- El flujo impulsado por cada bomba es dividido de modo que una porción del flujo total va a cada tanque. La porción es ajustada por medio de las válvulas mostradas en la figura 1.1. Asumiendo que el flujo impulsado por la bomba es proporcional al voltaje aplicado “ V ” y que “ Q_{top} ” y “ Q_{bot} ” son los flujos para el tanque superior e inferior respectivamente, entonces:

$$Q_{bot} = k_v k_b V \quad (1.3)$$

$$Q_{top} = (1 - k_v) k_b V \quad (1.4)$$

Donde:

- “ K_v ” es un parámetro entre 0 y 1 que es determinado en función de la posición de la válvula.
- “ K_b ” es una constante de la bomba impulsora del líquido.
- “ V ” es el voltaje aplicado a la bomba.

Usando los principios descritos se puede deducir las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gH_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gH_3} + \frac{k_{v1} k_{b1}}{A_1} V_1 = f_1 \quad (1.5)$$

$$\frac{dH_2}{dt} = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gH_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gH_4} + \frac{k_{v_2} k_{b_2}}{A_2} V_2 = f_2 \quad (1.6)$$

$$\frac{dH_3}{dt} = -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gH_3} + \frac{\left(1 - k_{v_2}\right) k_{b_2}}{A_3} V_2 = f_3 \quad (1.7)$$

$$\frac{dH_4}{dt} = -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gH_4} + \frac{\left(1 - k_{v_1}\right) k_{b_1}}{A_4} V_1 = f_4 \quad (1.8)$$

1.2.1. Puntos de operación en estado de equilibrio

Dado que: $k_{b_1}, k_{b_2}, k_{v_1}, k_{v_2}, \bar{V}_1$ y \bar{V}_2 son parámetros que se pueden configurar y teniendo en cuenta que: $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$; entonces:

De la ecuación (1.8):

$$\bar{H}_4 = \frac{1}{2g} \left(\frac{\left(1 - k_{v_1}\right) k_{b_1}}{a_4} \bar{V}_1 \right)^2 \quad (1.9)$$

De la ecuación (1.7):

$$\bar{H}_3 = \frac{1}{2g} \left(\frac{\left(1 - k_{v_2}\right) k_{b_2}}{a_3} \bar{V}_2 \right)^2 \quad (1.10)$$

De las ecuaciones (1.6) y (1.9):

$$\bar{H}_2 = \frac{1}{2g} \left(\frac{\left((1-k_{v1})k_{b1} \bar{V}_1 + k_{v2}k_{b2} \bar{V}_2 \right)}{a_2} \right)^2 \quad (1.11)$$

De (1.5) y (1.10):

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{2g} \left(\frac{\left((1-k_{v2})k_{b2} \bar{V}_2 + k_{v1}k_{b1} \bar{V}_1 \right)}{a_1} \right)^2 \quad (1.12)$$

1.2.2. Linealización del Proceso

Si definimos las variables residuales:

$$x_i = h_i = H_i - \bar{H}_i \quad (1.13)$$

$$u_i = v_i = V_i - \bar{V}_i \quad (1.14)$$

Se tendrá que el modelo lineal es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (1.16)$$

Donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_1} & \frac{\partial f_1}{\partial H_2} & \frac{\partial f_1}{\partial H_3} & \frac{\partial f_1}{\partial H_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H_1} & \frac{\partial f_2}{\partial H_2} & \frac{\partial f_2}{\partial H_3} & \frac{\partial f_2}{\partial H_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial H_1} & \frac{\partial f_3}{\partial H_2} & \frac{\partial f_3}{\partial H_3} & \frac{\partial f_3}{\partial H_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial H_1} & \frac{\partial f_4}{\partial H_2} & \frac{\partial f_4}{\partial H_3} & \frac{\partial f_4}{\partial H_4} \end{bmatrix}_{(\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \bar{H}_4)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Tener presente que en la ecuación (1.18):

$$T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2\bar{H}_i}{g}}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial V_1} & \frac{\partial f_1}{\partial V_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V_1} & \frac{\partial f_2}{\partial V_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial V_1} & \frac{\partial f_3}{\partial V_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial V_1} & \frac{\partial f_4}{\partial V_2} \end{bmatrix}_{(\bar{V}_1, \bar{V}_2)} = \begin{bmatrix} \frac{k_{v1} k_{b1}}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_{v2} k_{b2}}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-k_{v2}) k_{b2}}{A_3} \\ \frac{(1-k_{v1}) k_{b1}}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$C = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Las ecuación (1.15) representa la ecuación de estado en tiempo continuo y la ecuación (1.16) es la ecuación de salida en tiempo continuo.

Estas ecuaciones pueden ser discretizadas como se demuestra en [3]¹. Las ecuaciones de espacio estado discretizadas son:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (1.21)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (1.22)$$

Dónde:

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} T \\ \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} \mathbf{a} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{B} \quad (1.24)$$

Nota.- T es el periodo de muestreo.

MATLAB tiene un comando muy útil para discretizar una ecuación de estado en tiempo continuo. El comando es "c2d" y su sintaxis es la siguiente:

$$[\mathbf{G}, \mathbf{H}] = \text{c2d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, T)$$

1.3. Interpretación de cero multivariable: fase mínima y no-mínima

En esta sección se deduce la ubicación de los ceros del proceso y su interpretación en función de su ubicación en el plano izquierdo y derecho. Para el proceso descrito por las ecuaciones (1.15) y (1.16) se tiene que la matriz de transferencia será:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (1.25)$$

¹ Sección "Discretización de las ecuaciones en el espacio estado en tiempo continuo" (página 314).

Usando las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20) en (1.25) se deduce que:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{v_1} c_1}{1+sT_1} & \frac{(1-K_{v_2})c_1}{(1+sT_3)(1+sT_1)} \\ \frac{(1-K_{v_1})c_2}{(1+sT_4)(1+sT_2)} & \frac{K_{v_1} c_2}{1+sT_2} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\text{donde: } c_1 = \frac{T_1 K_{b_1} K_c}{A_1} \text{ y } c_2 = \frac{T_2 K_{b_2} K_c}{A_2}.$$

Los ceros de la matriz de transferencia (1.26) son los ceros del polinomio del numerador de la ecuación (1.27)

$$\det(G(s)) = \frac{c_1 c_2 \left[(1+sT_3)(1+sT_4) - \frac{(1-K_{v_1})(1-K_{v_2})}{K_{v_1} K_{v_2}} \right]}{K_{v_1} K_{v_2} (1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)(1+sT_4)} \quad (1.27)$$

Si en (1.27) definimos que:

$$\eta = \frac{(1-K_{v_1})(1-K_{v_2})}{K_{v_1} K_{v_2}}$$

Entonces los ceros serán solución de:

$$s = \frac{-(T_3 + T_4) \pm \sqrt{(T_3 + T_4)^2 - 4T_3 T_4 (1-\eta)}}{2T_3 T_4} \quad (1.28)$$

De (1.28) se puede deducir que:

- El proceso será FASE MINIMA si $\eta < 1$ porque ambos ceros serán negativos. Esta condición equivale a que: $K_{v_1} + K_{v_2} > 1$. Es evidente que por limitaciones físicas la suma tampoco será superior a dos.
- Si $\eta = 1$ un cero será negativo y el otro estará en el origen (valor cero).
- El proceso será FASE NO-MÍNIMA si $\eta > 1$ porque un cero será negativo y el otro positivo. Esta condición equivale a que $K_{v_1} + K_{v_2} < 1$. Es evidente que por limitaciones físicas la suma no será inferior a cero.

1.4. Valores de los parámetros en punto de equilibrio

Teniendo en cuenta las ecuaciones desde la (1.9) a la (1.12) y los valores de los parámetros siguientes:

<u>Parámetro</u>	<u>Unidad</u>	<u>Valor P₋</u>	<u>Valor P₊</u>	<u>Descripción</u>
(k_{b_1}, k_{b_2})	cm ³ /Vs	(3.33,3.35)	(3.14,3.29)	Constantes de bombas para impulsar líquidos
(V_1, V_2)	V	(3.00,3.00)	(3.15,3.15)	Voltaje control de bombas
(k_{v_1}, k_{v_2})		(0.70,0.60)	(0.43,0.34)	Constantes de división de flujo en válvulas

Las alturas para los puntos de operación son:

<u>Parámetro</u>	<u>Unidad</u>	<u>Valor P.</u>	<u>Valor P₊</u>	<u>Descripción</u>
(H_1, H_2)	cm	(12.26,12.78)	(12.44,13.17)	Altura de tanques 1 y 2
(H_3, H_4)	cm	(1.63,1.41)	(4.73,4.99)	Altura de tanques 3 y 4

Nota.- P. y P₊ se refieren a operación en FASE MÍNIMA Y NO MÍNIMA.

1.5. Modelo del Proceso en MATLAB

El programa en código MATLAB "modelo.m" describe los parámetros del proceso linealizado. Estos parámetros serán tomados en cuenta en futuras simulaciones.

```

ARCHIVO MATLAB: modelo.m

%*****
%MODELO PROCESO DE CUATRO TANQUES INTERCONECTADOS
%Autor: Rafael Dávila
%Fecha: Noviembre del 2001
%*****
%-----
%Parámetros para el punto de operación
%-----
Modo=input('Indique modo fase: 0=Mínima; 1=No mínima\n');
At=[28 32 28 32]; %Sección de tanques
Ao=[0.071 0.057 0.071 0.057]; %Sección orificio del tanque
G=981; %Gravedad
Kc=[0.50]; %Constante sensor para nivel de líquido
If Modo==0
    Kb=[3.33 3.35]; %Constante de flujo de bombas
    Kv=[0.70 0.60]; %Constante de flujo de válvulas
    V=[3,3]; %Voltaje de bomba en punto de operación
Else
    Kb=[3.14 3.29]; %Constante de flujo de bombas
    Kv=[0.43 0.34]; %Constante de flujo de válvulas
    V=[3.15,3.15];%Voltaje de bomba en punto de operación
End
%-----
%Nivel de tanques en punto de operación
%-----

```

```

Ho=[(1/(2*g))*(((1-Kv(2))*Kb(2)*V(2)+Kv(1)*Kb(1)*V(1))/Ao(1))^2
    (1/(2*g))*(((1-Kv(1))*Kb(1)*V(1)+Kv(2)*Kb(2)*V(2))/Ao(2))^2
    (1/(2*g))*(((1-Kv(2))*Kb(2)*V(2))/Ao(3))^2
    (1/(2*g))*(((1-Kv(1))*Kb(1)*V(1))/Ao(4))^2];
for i=1:4 %Determinar constante de tiempo
    Ti(i)=(At(i)/Ao(i))*sqrt(2*Ho(i)/g);
end
%-----
%Modelo Estado-Espacio(SS) de CUATRO TANQUES ACOPLADOS
%-----
A=[-1/Ti(1)      0      At(3)/(At(1)*Ti(3))      0
    0      -1/Ti(2)      0      At(4)/(At(2)*Ti(3))
    0      0      -1/Ti(3)      0
    0      0      0      -1/Ti(4)];
%-----
B=[Kv(1)*Kb(1)/At(1)      0
    0      Kv(2)*Kb(2)/At(2)
    0      (1-Kv(2))*Kb(2)/At(3)
    (1-Kv(1))*Kb(1)/At(4)      0];
%-----
C=[Kc  0  0  0
    0  Kc  0  0];
%-----
D= [0];
%Planta
Planta=ss(A,B,C,D);

```

Al ejecutar el programa "modelo.m" se obtiene los valores de las matrices A, B, C, y D. Estos valores son:

Matriz	Fase mínima	Fase no mínima
A	$\begin{bmatrix} -0.0160 & 0 & 0.0439 & 0 \\ 0 & -0.0110 & 0 & 0.0439 \\ 0 & 0 & -0.0439 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0332 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0159 & 0 & 0.0258 & 0 \\ 0 & -0.0109 & 0 & 0.0258 \\ 0 & 0 & -0.0258 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0177 \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} 0.0833 & 0 \\ 0 & 0.0628 \\ 0 & 0.0479 \\ 0.0312 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0482 & 0 \\ 0 & 0.0350 \\ 0 & 0.0775 \\ 0.0559 & 0 \end{bmatrix}$
C	$\begin{bmatrix} 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D	[0]	[0]

La ubicación de los polos y ceros es obtenida con el comando MATLAB:

$$[P,Z]=pzmap(Planta)$$

Los valores de los polos y los ceros son:

Matriz	Fase mínima	Fase no mínima
P	-0.0160	-0.0159
(Polos)	-0.0110	-0.0109
	-0.0439	-0.0258
	-0.0332	-0.0177
Z	-0.0627	-0.0634
(Ceros)		

	-0.0145	0.0199
--	---------	--------

Notar que en fase mínima los dos ceros están en lado izquierdo del plano s, en tanto que en fase no mínima uno de los ceros está en el lado derecho del plano s.

1.6. Discretización directa del proceso y comparación con modelo linealizado

Las ecuaciones del proceso (1.5), (1.6), (1.7) y (1.8) pueden ser discretizadas directamente. El resultado de la discretización directa es el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$H_1(k+1) = H_1(k) + T_s \left(-\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gH_1(k)} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gH_3(k)} + \frac{k_{v_1} k_{b_1}}{A_1} V_1(k) \right) \quad (1.29)$$

$$H_2(k+1) = H_2(k) + T_s \left(-\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gH_2(k)} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gH_4(k)} + \frac{k_{v_2} k_{b_2}}{A_2} V_2(k) \right) \quad (1.30)$$

$$H_3(k+1) = H_3(k) + T_s \left(-\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gH_3(k)} + \frac{(1-k_{v_2}) k_{b_2}}{A_3} V_2(k) \right) \quad (1.31)$$

$$H_4(k+1) = H_4(k) + T_s \left(-\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gH_4(k)} + \frac{(1-k_{v_1}) k_{b_1}}{A_4} V_1(k) \right) \quad (1.32)$$

Donde T_s es el período de muestreo.

Para comparar la discretización directa del proceso y el modelo linealizado se hace uso del programa "discreto.m". Este programa realiza lo siguiente:

- Computa las ecuaciones (1.29), (1.30), (1.31) y (1.32).
- Computa el modelo lineal discretizado correspondiente a la ecuaciones (1.15) y (1.16).
- Realiza los gráficos de las salidas del tanque uno y dos.

ARCHIVO MATLAB: discreto.m

```

%*****
%SIMULACION PROCESO CUATRO TANQUES PARA DISCRETIZACION DIRECTA Y LINEALIZACION
%Autor: Rafael Dávila
%Fecha: Noviembre del 2001
%*****
%-----
%Modelo SS de Cuatro Tanques Acoplados
%-----
clc;
clear all;
modelo;
Muestras=input('Indique cantidad de muestras\n');
U=input('Indique señal de control\n');
Ts=1; %Tiempo de muestreo
%-----
%DISCRETIZACION DIRECTA
%-----
%H es el vector de alturas
H{1}=[0;0;0;0];
Ydiscreta(1)=[0;0];
for k=2:Muestras
    %-----
    %DISCRETIZACION DIRECTA
    %-----
    H(k)=[H(k-1)(1)+Ts*(-1*Ao(1)*sqrt(2*g*H(k-1)(1))+Ao(3)*sqrt(2*g*H(k-1)(3))+Kv(1)*Kb(1)*U(1))/At(1)
          H(k-1)(2)+Ts*(-1*Ao(2)*sqrt(2*g*H(k-1)(2))+Ao(4)*sqrt(2*g*H(k-1)(4))+Kv(2)*Kb(2)*U(2))/At(2)
          H(k-1)(3)+Ts*(-1*Ao(3)*sqrt(2*g*H(k-1)(3))+(1-Kv(2))*Kb(2)*U(2))/At(3)
          H(k-1)(4)+Ts*(-1*Ao(4)*sqrt(2*g*H(k-1)(4))+(1-Kv(1))*Kb(1)*U(1))/At(4)];
    for i=1:4
        if H(k)(i)<0
            H(k)(i)=0;
        end
    end
    Ydiscreta(k)=C*H(k);
end %Lazo for de estimaciones
%-----
%PROCESO LINEALIZADO
%-----
[Gg,Hh]=c2d(A,B,Ts);
x{1}=[0;0;0;0];
y{1}=C*x{1};
for k=2:Muestras
    x{k}=Gg*x{k-1}+Hh*U;

```



```

    y(k)=C*x(k);
end %Lazo for de estimaciones
%-----
%DIAGRAMAS
%-----
for i=1:Muestras
    t(i)=(i-1)*Ts;
    Yd1(i)=Ydiscreta{i}(1);
    Yd2 (i)= Ydiscreta{i}(2);
    Y1(i)=y{i}(1);
    Y2(i)=y{i}(2);
End
figure(1);
subplot(2,2,1);
plot(t,Yd1);
ylabel('Ydiscret. 1 (V)');
axis([0 Muestras 0 15]);
set(subplot(2,2,1),'ytick',0:3:15);
grid;
title('TANQUE UNO (DISCRETIZADO)');
subplot(2,2,2);
plot(t,Y1);
ylabel('Ylineal 1 (V)');
axis([0 Muestras 0 15]);
set(subplot(2,2,2),'ytick',0:3:15);
grid;
title('TANQUE UNO (MOD.LINEAL)');
subplot(2,2,3);
plot(t,Yd2);
ylabel('Ydiscret. 2 (V)');
if Modo==0 %0=Fase mínima; 1=Fase no-mínima
    axis([0 Muestras 0 15]);
    set(subplot(2,2,3),'ytick',0:3:15);
else
    axis([0 Muestras 0 20]);
    set(subplot(2,2,3),'ytick',0:3:20);
end
grid;
title('TANQUE DOS (DISCRETIZADO)');
subplot(2,2,4);
plot(t,Y2);
ylabel('Ylineal 2 (voltios)');
if Modo==0 %0=Fase mínima; 1=Fase no-mínima
    axis([0 Muestras 0 15]);
    set(subplot(2,2,4),'ytick',0:3:15);
else
    axis([0 Muestras 0 20]);
    set(subplot(2,2,4),'ytick',0:3:20);
end
grid;
title('TANQUE DOS (MOD.LINEAL)');
%-----
%DIAGRAMAS CON CORRECCION DE MODELO
%-----
figure(2);
subplot(2,1,1);
plot(t,2*Yd1,'b',t,Y1,'r--');
ylabel('Y1 (V)');
axis([0 Muestras 0 15]);
set(subplot(2,1,1),'ytick',0:3:15);
grid;
legend('Ylineal_1','2*Ydiscret_1')
title('TANQUE UNO');
subplot(2,1,2);
if Modo==0 %0=Fase mínima; 1=Fase no-mínima
    plot(t,2*Yd2+1.37,'b',t,Y2,'r--');
    legend('Ylineal_2','2*Ydiscret_2+1.37')
    axis([0 Muestras 0 15]);
    set(subplot(2,1,2),'ytick',0:3:15);
else
    plot(t,2*Yd2+3.74,'b',t,Y2,'r--');
    legend('Ylineal 2','2*Ydiscret 2+3.74')

```

```
axis([0 Muestras 0 20]);  
set(subplot(2,1,2),'ytick',0:3:20);  
end  
ylabel('Y2 (V)');  
grid;  
title('TANQUE DOS');
```

En la figura 1.2 se muestra el resultado de la ejecución del programa “discreto.m” de la operación del proceso en el punto de equilibrio correspondiente a fase mínima. Para este punto las señales de control uno y dos son de 3 voltios respectivamente. De la figura 2.1 se puede apreciar que los valores de Y1 e Y2 discretizado directamente son: 6.13 voltios y 6.39 voltios. Los valores Y1 e Y2 del modelo lineal son: 12.26 voltios y 14.15 voltios respectivamente. Se puede concluir que el modelo linealizado presenta similar forma de curva que el modelo discretizado directamente. Sin embargo, debe señalarse que la salida Y1 del modelo lineal es dos veces la salida Y1 discretizada directamente y que la salida Y2 del modelo lineal es dos veces la salida Y2 discretizada directamente más 1.37.

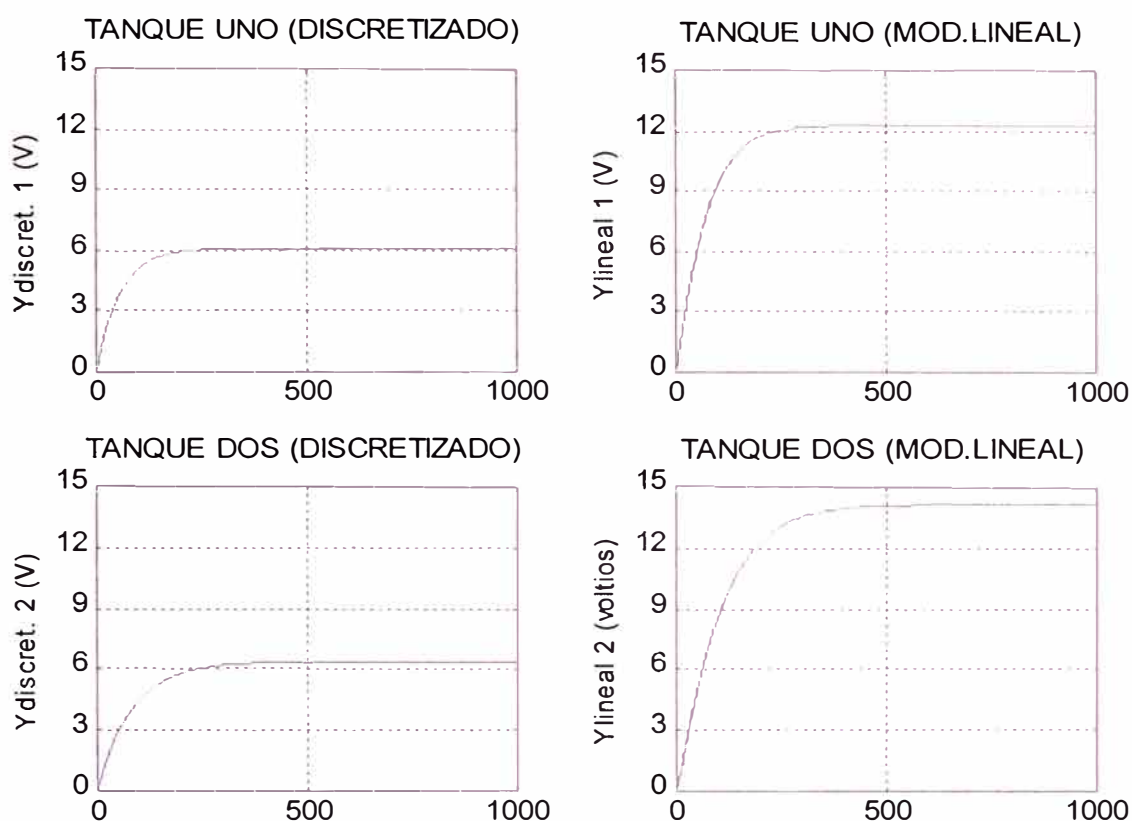


Figura 1.2: Resultado de modelo discretizado directamente y modelo linealizado para proceso de 4 tanques acoplados en fase mínima para señales de control uno y dos en 3 voltios respectivamente.

La equivalencia entre el modelo lineal y el modelo discretizado directamente (en fase mínima) puede expresarse como:

$$Y_{\text{lineal}} \equiv 2Y_{\text{discretizado}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.37 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

En la figura 1.3 se muestra el modelo lineal y el modelo discretizado directamente usando la relación de equivalencia (1.33).

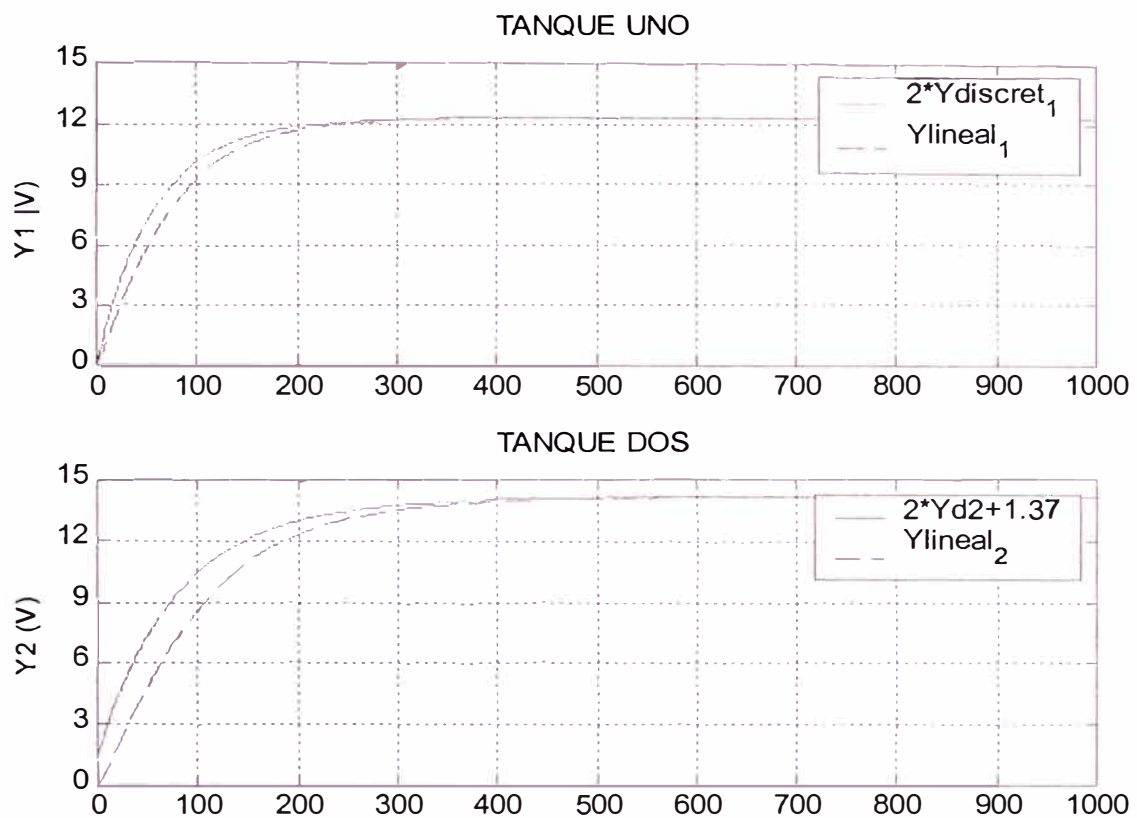


Figura 1.3: Modelo lineal y modelo discretizado directamente con relación de equivalencia (fase mínima)

La figura 1.4 muestra el resultado de la ejecución del programa "discreto.m" para operación del proceso en el punto de equilibrio correspondiente a fase no-mínima. Para este punto las señales de control uno y dos son 3.15 voltios respectivamente. En la figura 1.4 se tiene que los valores finales de $Y1$ discretizado, $Y2$ discretizado, $Y1$ lineal e $Y2$ lineal son: 12.44cm, 13.17cm, 12.44voltios y 16.91 voltios respectivamente. Puede apreciarse que el modelo linealizado presenta similar comportamiento que el modelo discretizado directamente. Sin embargo, debe señalarse que la salida $Y1$ del modelo lineal es dos veces la salida $Y1$ discretizada

directamente y que la salida Y2 del modelo lineal es dos veces la salida Y2 discretizada directamente más 3.74.

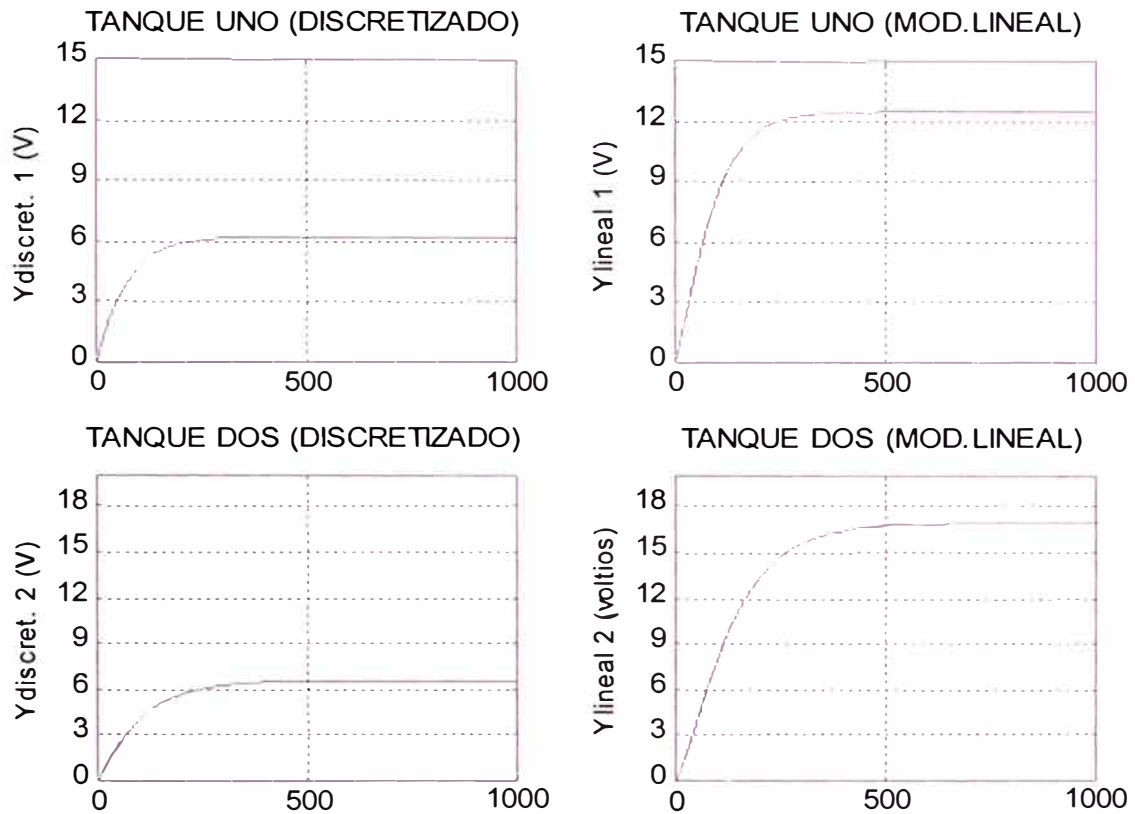


Figura 1.4: Resultado de modelo discretizado directamente y modelo linealizado para proceso de 4 tanques acoplados en fase no mínima para señales de control uno y dos en 3.15 voltios respectivamente.

La equivalencia entre el modelo lineal y el modelo discretizado directamente (en fase no-mínima) puede expresarse como:

$$Y_{\text{lineal}} \equiv 2Y_{\text{discretizado}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.74 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

En la figura 1.5 se muestra el modelo lineal y el modelo discretizado directamente usando la relación de equivalencia (1.34).

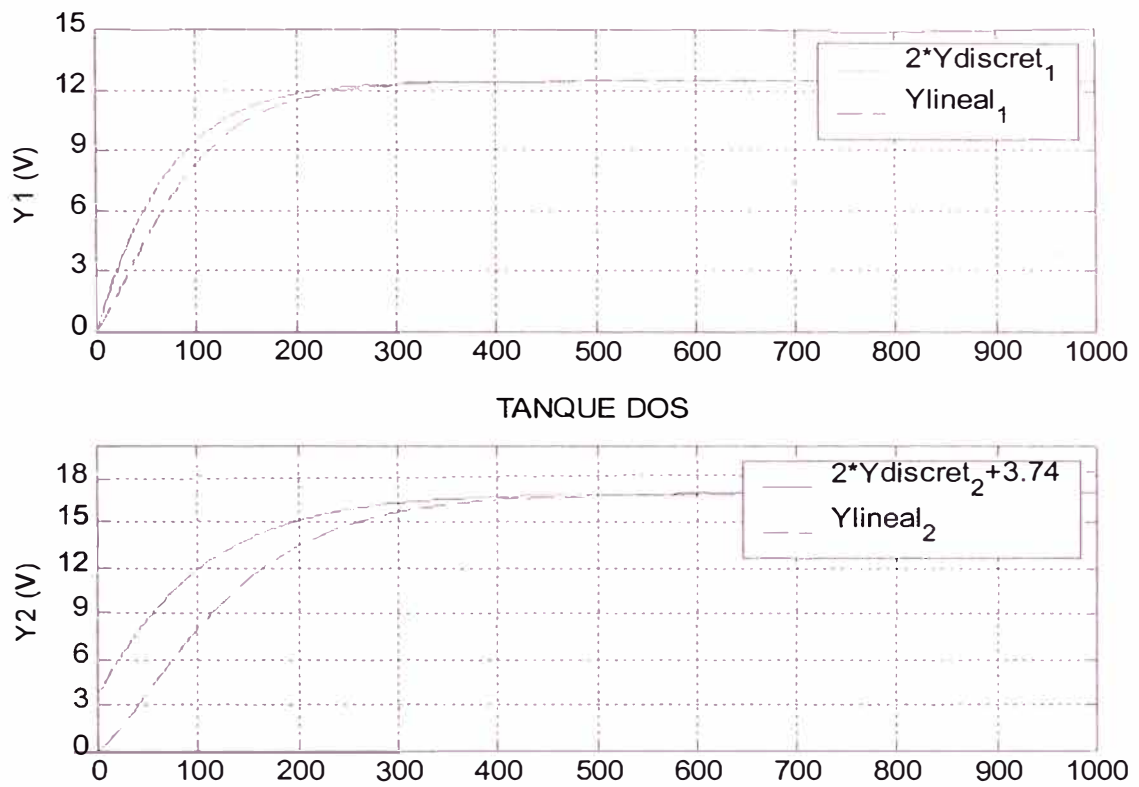


Figura 1.5: Modelo lineal y modelo discretizado directamente con relación de equivalencia (fase no-mínima)

CAPÍTULO II

CONTROL ÓPTIMO DEL PROCESO

En este capítulo se desarrolla el diseño de un regulador óptimo proporcional multivariable, donde la salida controlada sigue a una señal de referencia. Luego del desarrollo matemático del regulador se procede al diseño del mismo. Finalmente se muestra la simulación del diseño aplicado al proceso de los cuatro tanques acoplados.

2.1. Regulador óptimo proporcional para sistema multivariable

La figura 2.1. muestra el esquema de un regulador óptimo proporcional de un sistema multivariable.

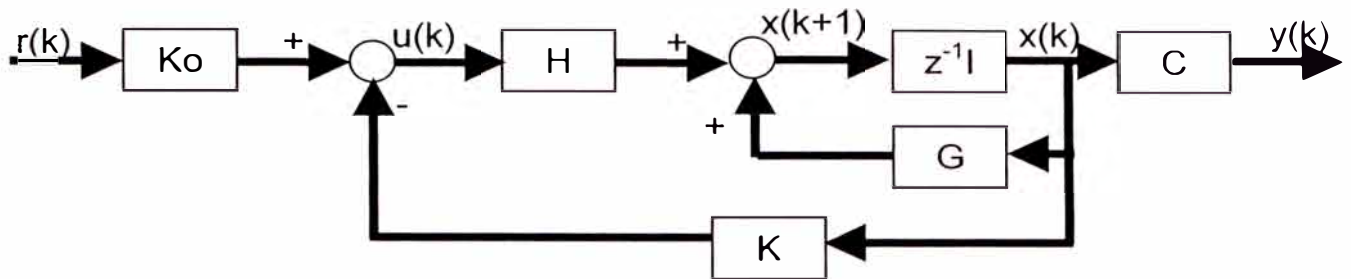


Figura 2.1: Esquema de regulador óptimo proporcional

Las condiciones a cumplir en este esquema son:

- La matriz de ganancia de realimentación de estados "K" corresponde a la solución de control óptimo cuadrático de estado estacionario. Por ello se asume que la planta debe ser completamente controlable.
- Que la salida \mathbf{y} debe seguir a la señal de referencia \mathbf{r} . Vale decir que para el estado estable $\mathbf{y}=\mathbf{r}$.
- Que la señal de referencia será del tipo escalón. Es decir: $\mathbf{r}=\mathbf{R}\mu$.

Para el esquema propuesto tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_o \mathbf{r}(k) \quad (2.3)$$

Reemplazando la ecuación (2.3) en (2.1):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(-\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_o \mathbf{r}(k)) \\
&\Downarrow \\
\mathbf{x}(k+1) &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{r}(k) \\
&\Downarrow \\
&\text{Llevando a } z \\
&\Downarrow \\
z\mathbf{x}(z) &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(z) + \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{r}(z) \\
&\Downarrow \\
(z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(z) &= \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{r}(z) \\
&\Downarrow \\
\mathbf{x}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{r}(z)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Reemplazando la ecuación (2.4) en (2.2):

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{r}(z) \tag{2.5}$$

Aplicando la propiedad de valor final en la ecuación (2.5) y teniendo en cuenta que la referencia es un escalón $\mathbf{r} = \mathbf{R}\mu$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{y}(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{R}\mu(z) \right) \\
&\Downarrow \\
\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{y}(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{R} \left(\frac{z}{z-1} \right) \right) \\
&\Downarrow \\
\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{y}(z) &= \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Como se persigue que en condición estable $\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{r}(\infty)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{y}(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{r}(z) \right) \\
&\Downarrow \\
\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{y}(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{R}_\mu(z) \right) \\
&\Downarrow \\
\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{y}(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{R} \left(\frac{z}{z-1} \right) \right) \\
&\Downarrow \\
\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathbf{y}(z) &= \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Comparando las ecuaciones (2.6) y (2.7) tendremos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{K}_o \mathbf{R} &= \mathbf{R} \\
&\Downarrow \\
\mathbf{K}_o &= (\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{H})^{-1}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2. Controlabilidad de proceso de cuatro tanques acoplados

El concepto de controlabilidad sostiene que:

Un proceso dinámico lineal es controlable, si es que existe un vector $\mathbf{u}(k)$ realizable y capaz de trasladar el estado del proceso desde un estado inicial hacia cualquier estado final $\mathbf{x}(N)$ en un tiempo finito N . Para validar este principio debe cumplirse que:

$$\text{rango}(M) = \text{rango} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \right) = n$$

donde "n" es el orden del proceso.²

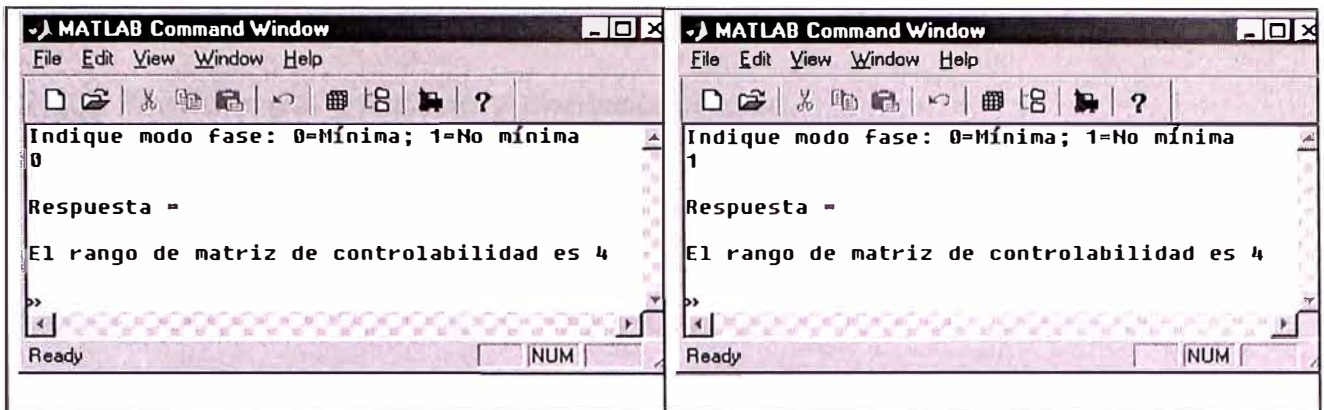
² Tomado de la referencia [1], sección 2.3.6 "Controlabilidad y Observabilidad" (página 64).

En la sección “1.5. Modelo del Proceso en MATLAB” (página 13) se derivó el modelo del proceso de cuatro tanques acoplados. El programa “controlabilidad.m” en código MATLAB determina la matriz de controlabilidad y halla su rango.

ARCHIVO MATLAB: controlabilidad.m
<pre> %***** %CONTROLABILIDAD PROCESO DE CUATRO TANQUES ACOPLADOS %Autor: Rafael Dávila %Fecha: Noviembre del 2001 %***** %----- %Modelo SS de Cuatro Tanques Acoplados %----- clc; clear all; modelo; %----- %De continuo a tiempo discreto %----- Ts=1; %Tiempo de muestreo [G,H]=c2d(A,B,Ts); %----- %Verificar Controlabilidad %----- M=[H G*H G^2*H G^3*H]; n=rank(M); Respuesta=sprintf('El rango de matriz de controlabilidad es %d',n) </pre>

El resultado de la ejecución es:

Fase mínima	Fase no mínima
-------------	----------------



Como el orden del proceso es 4 y el rango de la matriz de controlabilidad es 4, entonces el proceso de cuatro tanques es controlable.

2.3. Procedimiento de diseño

El procedimiento de diseño para controlar el nivel del proceso empleando un sistema de control óptimo cuadrático comprende los pasos siguientes:

1. Formular el problema.
2. Determinar el modelo matemático del proceso a controlar y verificar si dicho proceso es completamente controlable.
3. Cálculo de la matriz de ganancia óptima K de control.
4. Cálculo de la matriz de ganancia K_0 de ajuste de referencia.
5. Simular el sistema de control óptimo.

2.3.1. Formulación del problema

Ver sección “1.1. Descripción del Proceso” (página 3).

2.3.2. Modelo del proceso y controlabilidad

Ver secciones “1.2. Modelo Físico del Proceso” (página 5) y “2.2. Controlabilidad de proceso de cuatro tanques acoplados” (página 27).

2.3.3. Cálculo de matriz de ganancia óptima del proceso

En esta caso se trata de resolver el problema de “Control Óptimo Cuadrático Estacionario”. Si la ecuación de planta esta dada por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u} \quad (2.9)$$

Para $N=\infty$, el índice de desempeño o función de costo toma la forma:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right] \quad (2.10)$$

La ecuación de Riccati, que resuelve la matriz P , toma la forma:

$$P = Q + G^T P G - G^T P H \left[R + H^T P H \right]^{-1} H^T P G \quad (2.11)$$

En tanto que la matriz de ganancia óptima K resulta de:

$$K = \left[R + H^T P H \right]^{-1} H^T P G \quad (2.12)$$

La ley de control óptimo esta dada por:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (2.13)$$

Y la función de costo mínimo es:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) P \mathbf{x}(0) \quad (2.14)$$

Una de las maneras de resolver la ecuación de Riccati es usar la ecuación de estado no estacionario e iterar sucesivamente iniciando en $P(0)$.

Otra manera es usar herramientas que tengan funciones de solución al problema de control óptimo, tal como MATLAB, con la función “dlqr”. La sintaxis de la función “dlqr” es:

$$[K,P,e] = dlqr(G,H,Q,R)$$

2.3.4. Cálculo de matriz de ganancia K_o de ajuste de referencia

En la sección “2.1. Regulador óptimo proporcional para sistema multivariable” (página 24) se demostró que la ecuación que resuelve la matriz K_o es:

$$K_o = (C(I - G + HK)^{-1}H)^{-1}$$

2.4. Programas MATLAB para la simulación del sistema de control óptimo

Para la simulación en MATLAB del sistema de control óptimo de los cuatro tanques se hace uso del programa “optimo_p.m”. Este programa realiza lo siguiente:

1. Invoca al programa “modelo.m” que define el modelo lineal del proceso.
2. Pasa el modelo continuo a discreto con tiempo de muestreo 1 segundo.
3. Hace el cálculo de K y K_o .
4. Estima la ley de control y la restringe al rango de 0 voltios a 5 voltios.
5. Determina los valores de las señales de salida.

6. Hace los gráficos detallados para la referencia, el control y la salida de los tanques uno y dos. Para realizar estos gráficos invoca la subprograma "GraficaTanque12.m".

ARCHIVO MATLAB: optimo_p.m

```

%*****
%SIMULACION CONTROL OPTIMO PROCESO DE CUATRO TANQUES ACOPLADOS
%Autor: Rafael Dávila
%Fecha: Noviembre del 2001
%*****
%-----
%Modelo SS de Cuatro Tanques Acoplados
%-----
clc;
clear all;
modelo;
%-----
%De continuo a tiempo discreto
%-----
Ts=1; %Tiempo de muestreo
[G,H]=c2d(A,B,Ts);
%-----
%Indicar señal de referencia y numero de muestras
%-----
TipoSenal=input('Indique señal referencia: 0=Escalón; 1=Cuadrada\n');
Muestras=input('Indique cantidad de muestras\n');
CorrigeReferencia=input('Indique si corrige referencia: 0=No; 1=Si\n');
%-----
%Verificar Controlabilidad
%-----
M=[H G*H G^2*H G^3*H];
%rank(M)=4 ==> Completamente controlable
%-----
%Verificar Observabilidad
%-----
N=[C' G'*C' (G')^2*C' (G')^3*C'];
%rank(N)=4 ==> Completamente observable
%-----
%Control Optimo Cuadrático
%-----
Q=[100 0 0 0
   0 100 0 0
   0 0 0 0
   0 0 0 0];
R=[1 0
   0 1];
[K,P,e]=dlqr(G,H,Q,R);
%-----
%Ganancia de referencia Ko
%-----
Ko=inv(C*inv(eye(4)-G+H*K)*H);
%-----
%Respuesta a señal de referencia elegida
%-----
Y{1}=[0;0];
U{1}=[0;0];
X{1}=[0;0;0;0];
Hs{1}=[0;0;0;0];
Ydiscreta{1}=C*Hs{1};
Ref{1}=[0;0];
RefAju{1}=[0;0];

```

```

for k=2:Muestras
%-----
%Señal de referencia
%-----
if TipoSenal==0
    Ref(k)=[6.5;8]; %Escalon
else
    Ref(k)=3*([1.2;1.6]+sign(sin(2*pi*0.001*k*Ts))*[1;1]); %Cuadrada de 1000s de periodo
end
%-----
%Corregir señal de referencia?
%-----
if CorrigeReferencia==1 %1=Corrige; 0=No corrige
    if Modo==0 %0=Fase minima ; 1=Fase no minima
        RefAju(k)=1.95*Ref(k)+[0;0.39];
    else
        RefAju(k)=1.95*Ref(k)+[0;3.6465];
    end
else
    RefAju(k)=Ref(k);
end
%-----
%Corregir señal de referencia?
%-----
X(k)=(G-H*K)*X(k-1)+H*Ko*RefAju(k-1);
Y(k)=C*X(k);
U(k)=-K*X(k)+Ko*RefAju(k);
%-----
%Limitar señal de control
%-----
if U(k)(1)>5
    U(k)(1)=5;
else
    if U(k)(1)<0
        U(k)(1)=0;
    end
end
if U(k)(2)>5
    U(k)(2)=5;
else
    if U(k)(2)<0
        U(k)(2)=0;
    end
end
%-----
%Discretizacion directa
%-----
Hs(k)=[Hs(k-1)(1)+Ts*(-1*Ao(1)*sqrt(2*g*Hs(k-1)(1))+Ao(3)*sqrt(2*g*Hs(k-1)(3))+Kv(1)*Kb(1)*U(k-1)(1))/At(1)
        Hs(k-1)(2)+Ts*(-1*Ao(2)*sqrt(2*g*Hs(k-1)(2))+Ao(4)*sqrt(2*g*Hs(k-1)(4))+Kv(2)*Kb(2)*U(k-1)(2))/At(2)
        Hs(k-1)(3)+Ts*(-1*Ao(3)*sqrt(2*g*Hs(k-1)(3))+(-Kv(2))*Kb(2)*U(k-1)(2))/At(3)
        Hs(k-1)(4)+Ts*(-1*Ao(4)*sqrt(2*g*Hs(k-1)(4))+(1-Kv(1))*Kb(1)*U(k-1)(1))/At(4)];
for i=1:4
    if Hs(k)(i)<0
        Hs(k)(i)=0;
    end
end
Ydiscreta(k)=C*Hs(k);
end
%-----
%Graficos
%-----
GraficaTanque12(1,Muestras,Ts,Ref,U,Y);
GraficaTanque12(2,Muestras,Ts,Ref,U,Ydiscreta);

```

El subprograma MATLAB “GraficaTanque12.m” realiza los gráficos de las señales de referencia, de control y de salida.

Archivo MATLAB: GraficaTanque12.m

```

Function hWin=GraficaTanque12(nWin,Muestras,Ts,Ref,Con,Sal)
%Grafica referencia,control y salida para tanques 1 y 2
for i=1:Muestras
    t(i)=(i-1)*Ts;
    r1(i)=Ref(i)(1);
    u1(i)=Con(i)(1);
    s1(i)=Sal(i)(1);
    r2(i)=Ref(i)(2);
    u2(i)=Con(i)(2);
    s2(i)=Sal(i)(2);
end
hWin=figure(nWin);
%Referencias
subplot(3,2,1);
plot(t,r1);
ylabel('Referencia (V)');
grid;
title('TANQUE UNO');
subplot(3,2,2);
plot(t,r2);
ylabel('Referencia (V)');
grid;
title('TANQUE DOS');
%Control
subplot(3,2,3);
plot(t,u1);
ylabel('Control (V)');
grid;
subplot(3,2,4);
plot(t,u2);
ylabel('Control (V)');
grid;
%Salidas
subplot(3,2,5);
plot(t,s1);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Salida (V)');
grid;
subplot(3,2,6);
plot(t,s2);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Salida (V)');
grid;

```

2.5. Simulación del diseño del sistema de control óptimo

La simulación del sistema de control óptimo diseñado se llevará a cabo en fase mínima y en fase no mínima. Para cada una de las fases se presenta un conjunto de simulaciones con señales de referencia escalón y cuadrada.

2.5.1. Simulación del sistema de control óptimo para el proceso en fase mínima

Señal de referencia escalón

En la figura 2.2 se presenta el resultado de la simulación del sistema de control óptimo a señales de referencia escalón utilizando el modelo linealizado del proceso. En esta figura se observa que las señal de salida del tanque uno y la señal de salida del tanque dos persiguen a las señales de referencia establecidas en 6.5 voltios y 8 voltios respectivamente. En la salida del tanque uno se aprecia un pequeño sobreimpulso que en su pico llega a 6.51 voltios (0.15%). En la salida del tanque dos no se aprecia sobreimpulso alguno. La primera salida estabiliza a los 6 segundos y la segunda salida estabiliza a los 8 segundos.

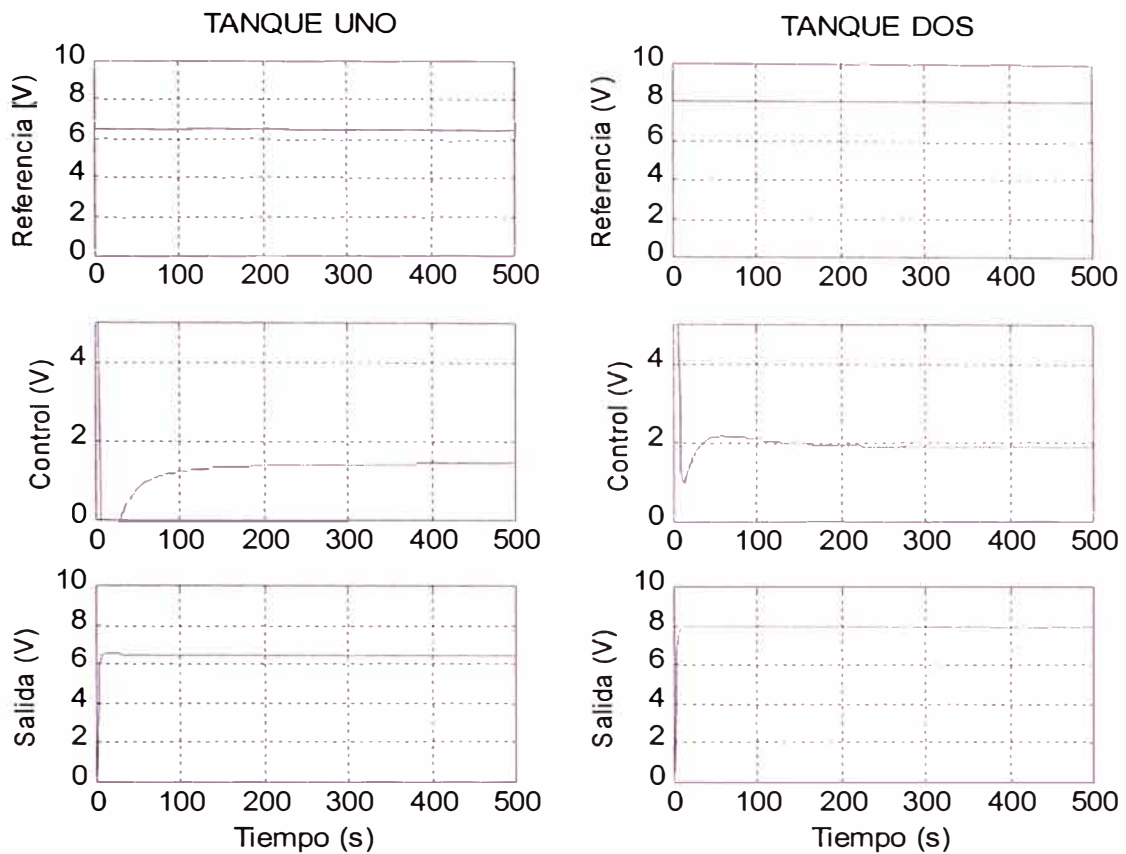


Figura 2.2: Respuesta a escalón del sistema de control óptimo utilizando el modelo linealizado del proceso operando en fase mínima.

En la figura 2.3 se muestra el resultado de la simulación del control óptimo para el proceso discretizado directamente. Se observa que las salidas de los tanques uno y dos estabilizan en 1.72 voltios y 2.11 voltios. Estos valores no corresponden a la señales de referencia debido a lo comentado en la sección “1.6. Discretización directa del proceso y comparación con modelo linealizado” (página 16). Para adecuar las salidas cuando se usa el modelo discretizado directamente debe realizarse corrección de la referencia.

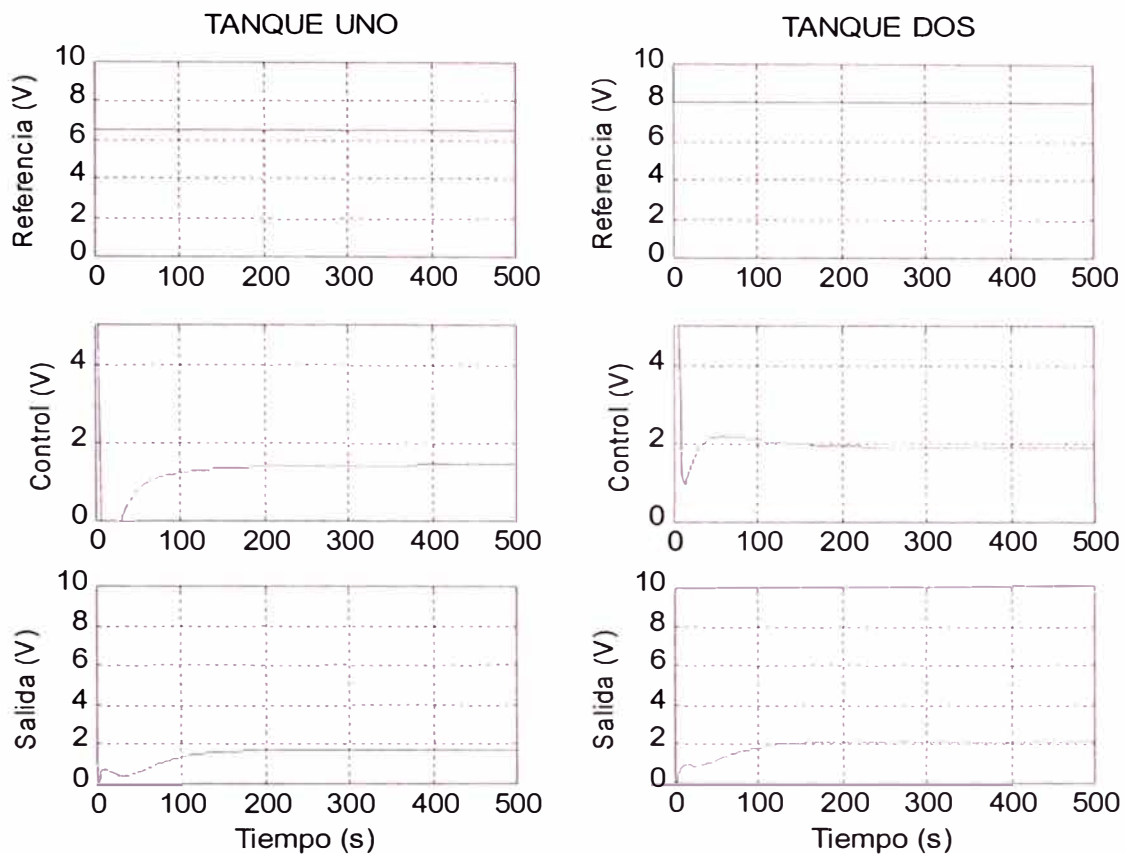


Figura 2.3: Respuesta a escalón del sistema de control óptimo con proceso discretizado directamente operando en fase mínima (sin corrección de referencia).

Para ajustar el diseño al proceso discretizado directamente debe usarse la ecuación (1.33) para corregir la referencia de modo que:

$$\mathbf{r}_{\text{corregida}}(k) = 2\mathbf{r}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.37 \end{bmatrix}$$

Luego de varias pruebas se determinó que variando ligeramente la corrección de la referencia a:

$$\mathbf{r}_{\text{corregida}}(k) = 1.95 * \mathbf{r}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.39 \end{bmatrix}$$

se obtienen resultados más satisfactorios.

En la figura 2.4 se muestra el resultado de la simulación aplicando la corrección de referencia. Notar que esta vez la salida del tanque uno se estabiliza en 6.55 voltios (0.8% de error) y la salida del tanque dos se estabiliza en 8.54 voltios (6.8% de error). Los tiempos de estabilización esta vez son 265 segundos y 230 segundos para las salidas uno y dos respectivamente.

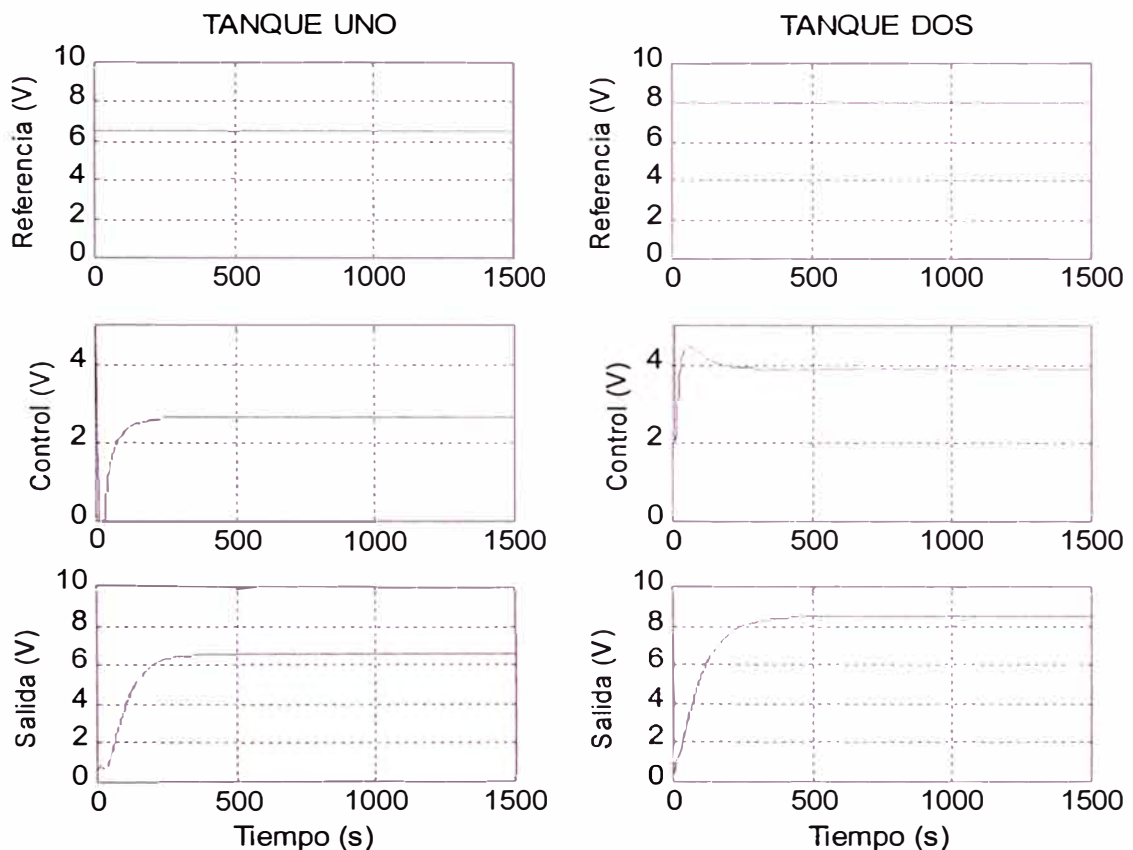


Figura 2.4: Respuesta a escalón del sistema de control óptimo usando modelo del proceso discretizado directamente (fase mínima y con corrección de referencia).

Señal de referencia cuadrada

En la figura 2.5 se presenta el resultado de la simulación del sistema de control óptimo para señales de referencia cuadrada utilizando el modelo linealizado del proceso. La señal de referencia en el tanque uno es una

señal cuadrada de 1000 segundos de periodo con amplitudes que varían entre 6.6 voltios y 0.6 voltios. La señal de referencia en el tanque dos es una señal cuadrada de 1000 segundos de periodo con amplitudes que varían entre 7.8 voltios y 1.8 voltios. Las salidas de los tanques uno y dos efectivamente siguen a las señales de referencia establecidas.

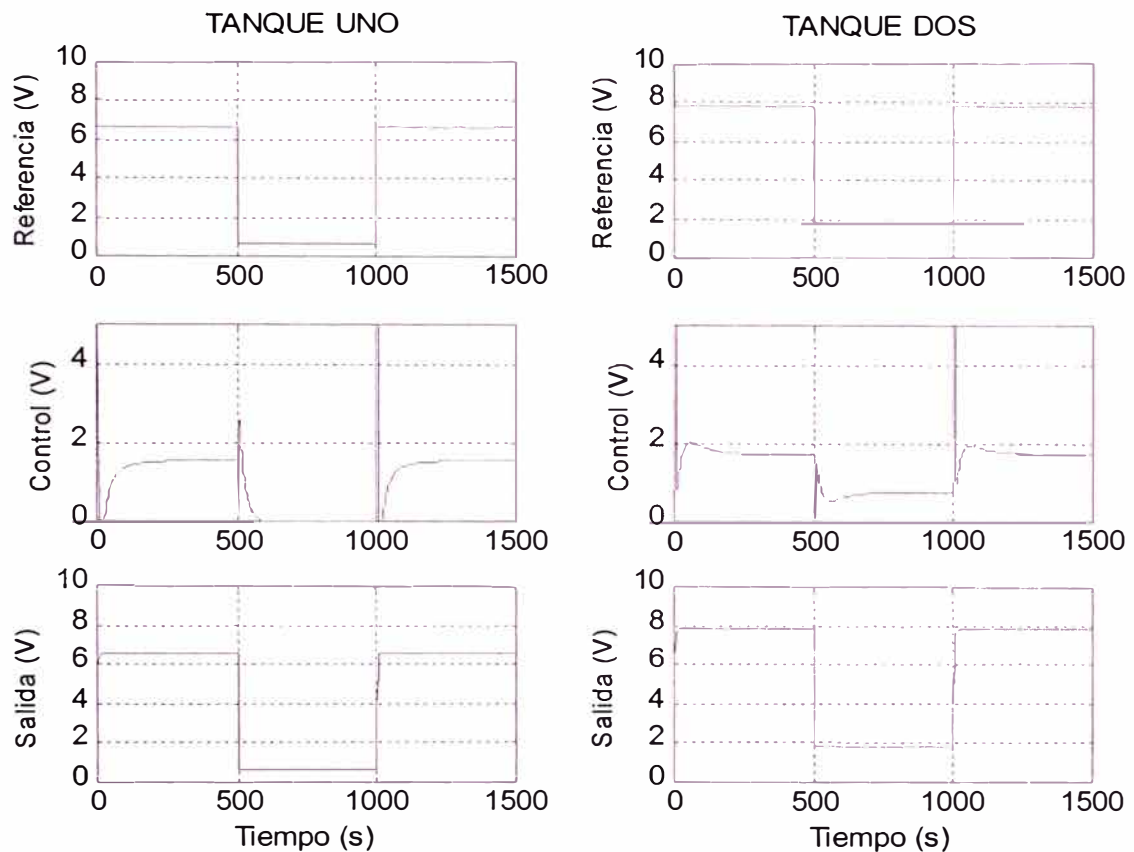


Figura 2.5: Respuesta a señal cuadrada del sistema de control óptimo utilizando el modelo linealizado del proceso operando en fase mínima.

En la figura 2.6 se muestra el resultado del sistema de control óptimo a la señal de referencia cuadrada utilizando el modelo del proceso discretizado directamente. Se usa la misma corrección de referencia establecido anteriormente. Se observa que las señales de salida de los tanques uno y dos siguen a las señales de referencia establecidas. La

amplitud de la señal de salida en el tanque uno varía entre 6.75 voltios y 0.27 voltios, que comparada con las amplitudes de la señal de referencia de 6.6 voltios y 0.6 voltios dan errores de 2.3% y 55%. La amplitud de la señal de salida en el tanque dos varía entre 7.94 voltios y 0.94 voltios, que compara con las amplitudes de la señal de referencia de 7.8 voltios y 1.8 voltios dan errores de 1.8% y 48%. El pobre desempeño para las amplitudes menores de las señales de referencia puede explicarse porque el sistema de control fue ajustado para operar con 6.5 voltios de referencia en el tanque uno y 8 voltios de referencia en el tanque dos.

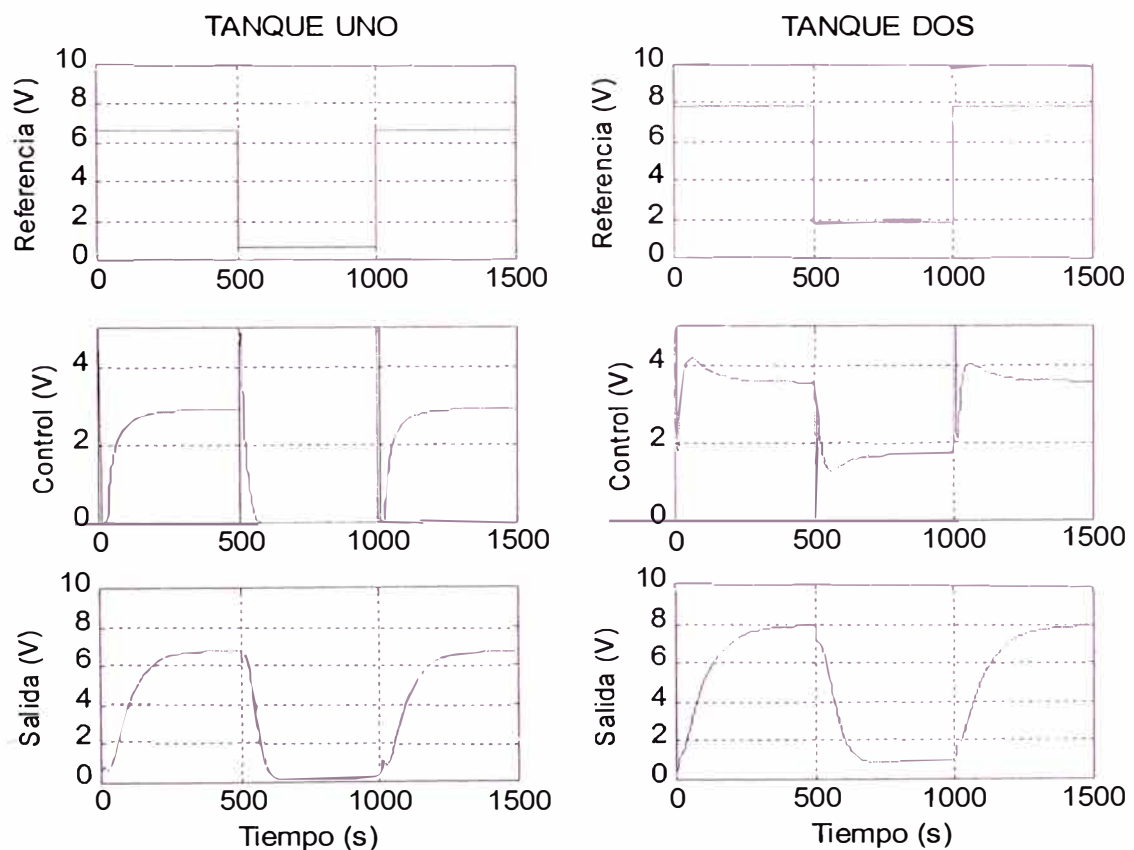


Figura 2.6: Respuesta a señal cuadrada del sistema de control óptimo utilizando modelo del proceso discretizado directamente (operación en fase mínima y referencia corregida).

2.5.2. Simulación del sistema de control óptimo para el proceso en fase no mínima

Señal de referencia escalón

En la figura 2.7 se presenta el resultado de la simulación del sistema de control óptimo para señales de referencia escalón utilizando el modelo del proceso linealizado operando en fase mínima. En esta figura se observa que las señal de salida del tanque uno y la señal de salida del tanque dos persiguen a las señales de referencia establecidas en 6.5 voltios y 8 voltios respectivamente. En la salida del tanque uno se aprecia presencia de sobreimpulso que en su pico llega a 8.07 voltios (24%). En la salida del tanque dos no se aprecia sobreimpulso alguno. Esta vez, la señal de salida en el tanque uno estabiliza a los 150 segundos y la señal de salida en el tanque dos estabiliza a los 130 segundos.

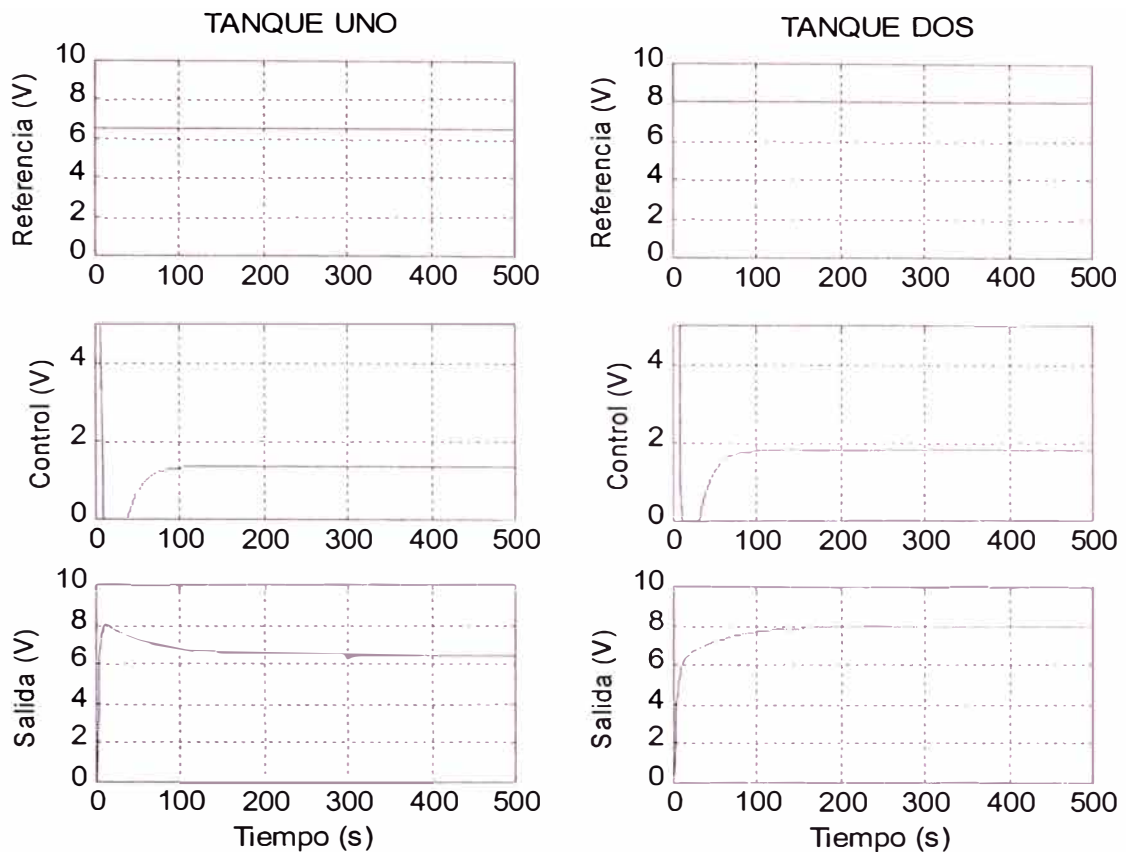


Figura 2.7: Respuesta a escalón del sistema de control óptimo utilizando modelo linealizado del proceso operando en fase no mínima.

Cuando se hace uso del modelo del proceso discretizado directamente (en fase no-mínima) tiene que aplicarse corrección a la referencia. La fórmula de corrección fue establecida en la ecuación (1.34) y es la siguiente:

$$\mathbf{r}_{\text{corregida}}(k) = 2\mathbf{r}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.74 \end{bmatrix}$$

Luego de algunas pruebas se determinó un mejor rendimiento con la siguiente fórmula de corrección:

$$\mathbf{r}_{\text{corregida}}(k) = 1.95 * \mathbf{r}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.6465 \end{bmatrix}$$

En la figura 2.8 se muestra el resultado de la simulación para el proceso discretizado directamente con corrección de referencia. Notar que esta vez la salida del tanque uno estabiliza en 6.47 voltios (0.47% de error) y la salida del tanque dos estabiliza en 8.05 voltios (0.63% de error). El tiempo de estabilización de la primera salida es de 350 segundos y de la segunda salida es de 475 segundos.

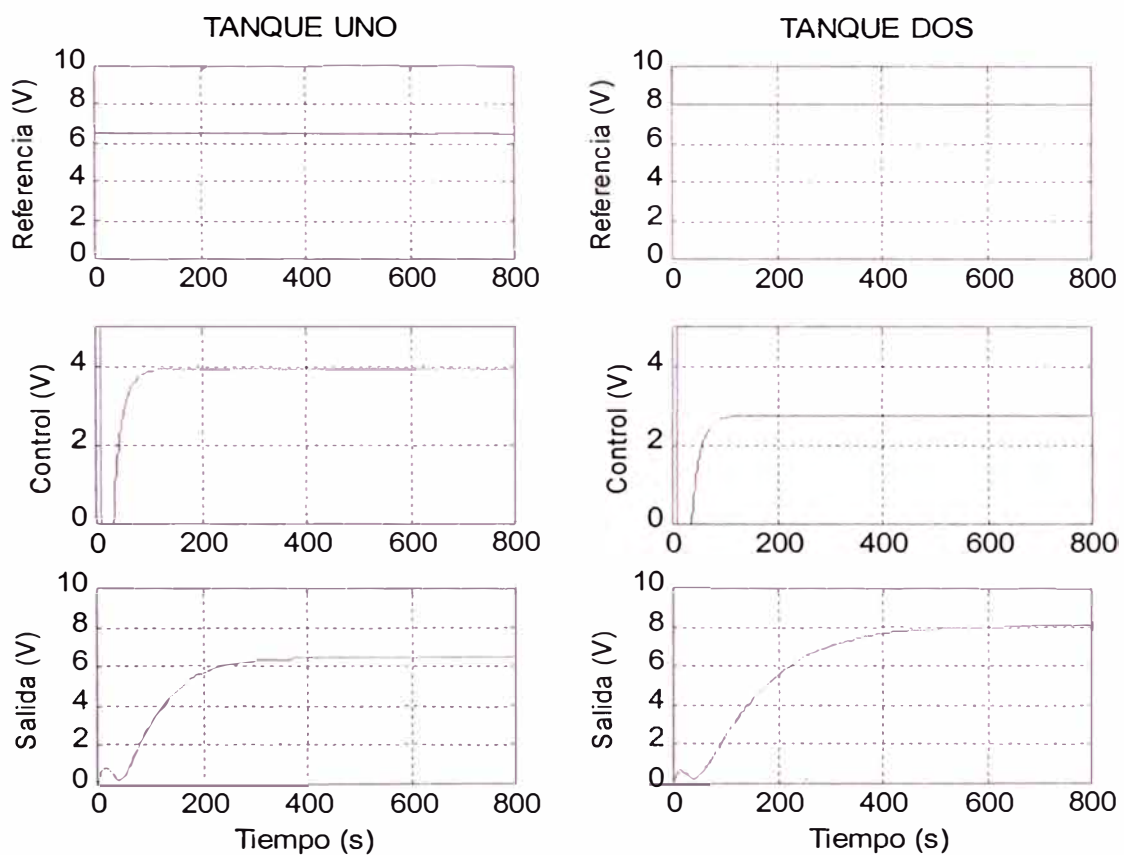


Figura 2.8: Respuesta a escalón del sistema de control óptimo con modelo del proceso discretizado directamente operando en fase no mínima (con corrección de referencia).

Señal de referencia cuadrada

En la figura 2.9 se presenta el resultado de la simulación del sistema de control óptimo para el proceso linealizado para señales de referencia

cuadrada. La señal de referencia en el tanque uno es una señal cuadrada de 1000 segundos de periodo con amplitudes que varían entre 6.6 voltios y 0.6 voltios. La señal de referencia en el tanque dos es una señal cuadrada de 1000 segundos de periodo con amplitudes que varían entre 7.8 voltios y 1.8 voltios. Las salidas de los tanques uno y dos efectivamente siguen a las señales de referencia establecidas. Notar la presencia de sobreimpulsos en la salida del tanque uno cuando la señal de referencia cambia.

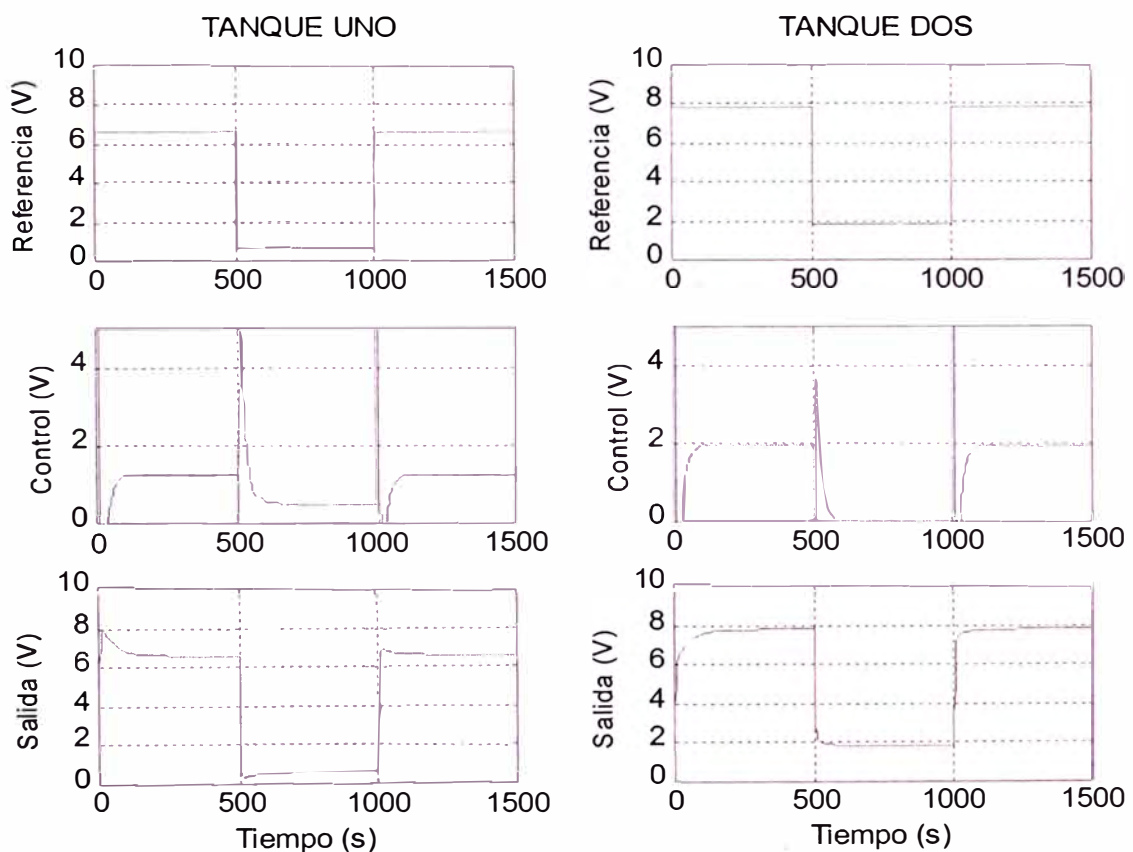


Figura 2.9: Respuesta a señal cuadrada del sistema de control óptimo utilizando modelo linealizado del proceso operando en fase no mínima.

En la figura 2.10 se muestra el resultado a señal de referencia cuadrada del sistema de control óptimo utilizando el modelo del proceso discretizado directamente. Se usa la corrección de referencia establecida

anteriormente. Se observa que las señales de salida de los tanques uno y dos siguen a las señales de referencia establecidas. La amplitud de la señal de salida en el tanque uno varía entre 6.65 voltios y 0.49 voltios, que comparada con las amplitudes de la señal de referencia de 6.6 voltios y 0.6 voltios presentan errores de 0.76% y 18.33%. La amplitud de la señal de salida en el tanque dos varía entre 7.74 voltios y 1.35 voltios, que comparada con las amplitudes de la señal de referencia de 7.8 voltios y 1.8 voltios presentan errores de 0.77% y 25%. El bajo desempeño para las amplitudes menores de las señales de referencia puede explicarse porque el sistema de control fue ajustado para operar con 6.5 voltios de referencia en el tanque uno y 8 voltios de referencia en el tanque dos. Se nota la presencia de picos (sobreimpulsos) al cambiar la señal de referencia. Uno de los picos del sobreimpulso, en la señal de salida uno, se localiza en los 540 segundos y tiene un valor de 6.92 (5%).

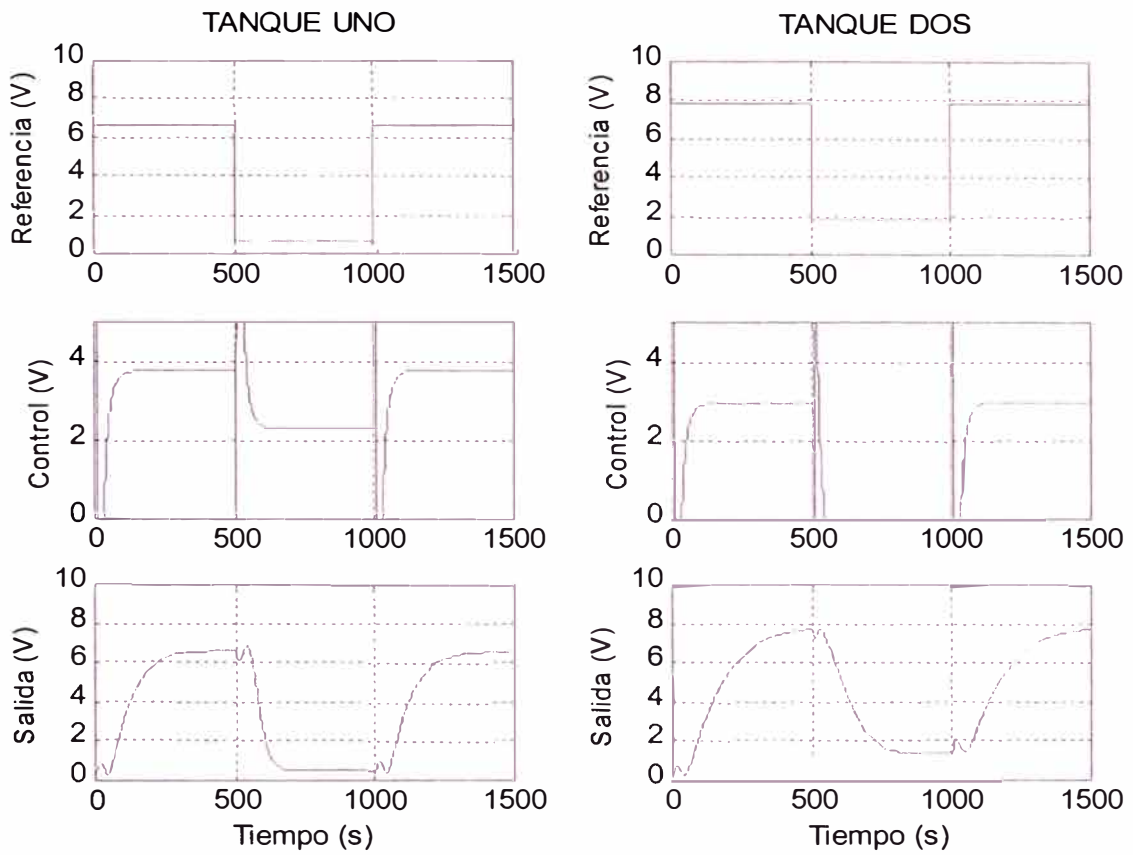


Figura 2.10: Respuesta a señal cuadrada del sistema de control óptimo utilizando proceso discretizado directamente operando en fase no mínima (con corrección de referencia).

CAPÍTULO III

CONTROL ADAPTIVO DEL PROCESO

En este capítulo se aplican las técnicas de control adaptivo al proceso de los cuatro tanques. Se inicia presentando el concepto del controlador adaptivo con autosintonización, luego se desarrollan las adecuaciones al modelo matemático de control adaptivo univariable para llevarlo al modelo multivariable, se sigue con la especificación del procedimiento de diseño para el sistema de control adaptivo de nivel los cuatro tanques y se culmina mostrando la simulación del diseño en MATLAB.

3.1. Sistema de control adaptivo con autosintonización³

Los sistemas de control adaptivo ajustan su comportamiento a las cambiantes propiedades del proceso controlado y de las señales que

³ Tomado de la referencia [1], sección 5.1: Introducción de Control Adaptivo (página 205).

interactuán sobre dicho proceso. Por el contrario, los sistemas de control fijos se gobiernan por una ley de control invariable en el tiempo.

Uno de los modelos para control adaptivo es el denominado “Controlador Adaptivo con Autosintonización” el cual se muestra en la figura 3.1. Tal sistema combina en su diseño:

- Un método de estimación de parámetros: el de los mínimos cuadrados recursivo mejorado.
- Una técnica de estimación de estados: el filtro de Kalman.
- Una representación lineal del modelo proceso.
- Y una ley de control: el controlador proporcional-integral óptimo cuadrático con realimentación de estados.

El objetivo del control es determinar una fuerza de control capaz de minimizar la diferencia entre la salida del proceso y la señal de referencia.

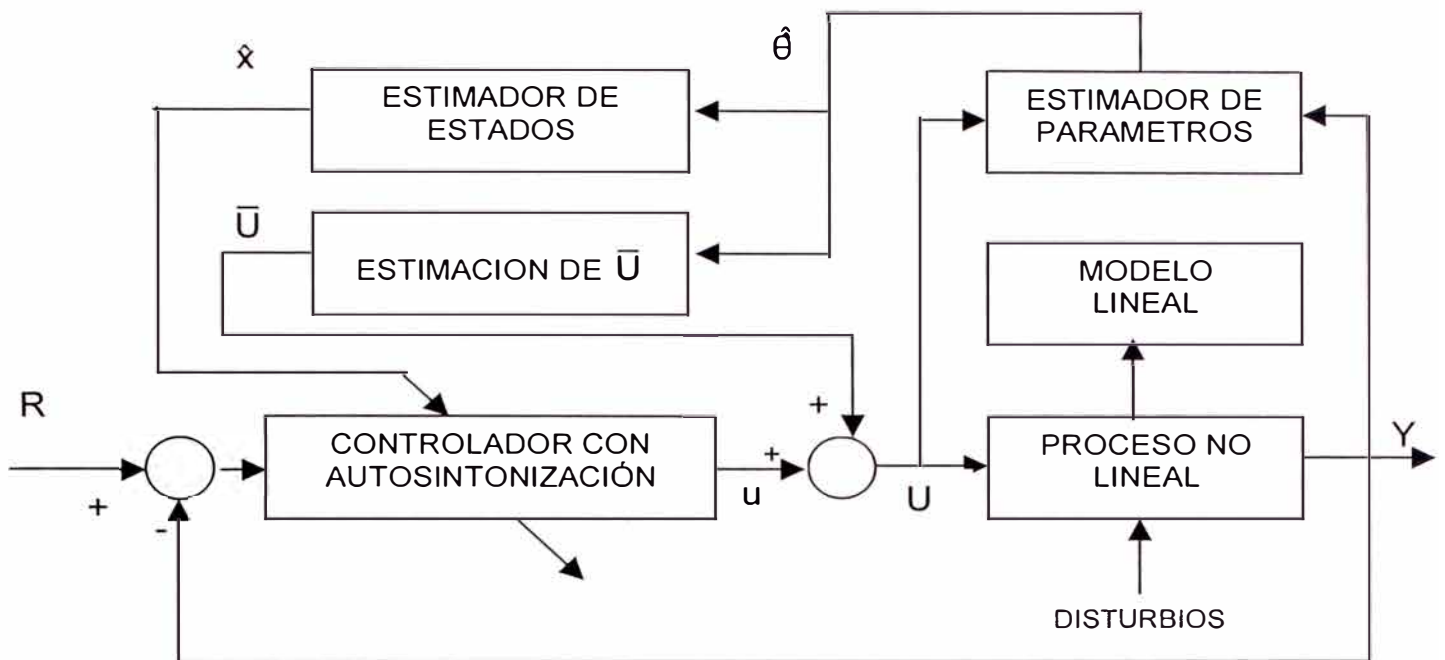


Figura 3.1: Configuración del sistema de control adaptivo con autosintonización

El sistema de control con autosintonización esquematizado en la figura 3.1 opera como sigue: luego de cada intervalo de muestreo, el vector estimado de parámetros $\hat{\theta}$ se actualiza empleando los datos proporcionados por la entrada U del proceso y por la salida Y del mismo. Luego, los elementos de $\hat{\theta}$ se usa para recuperar el modelo lineal del proceso, lo cual permite estimar el vector de estado del modelo del proceso \hat{x} (empleando un filtro de Kalman) y el valor de equilibrio \bar{U} de la ley de control actual U . Tales resultados se usan luego para computar la ley de control residual u y para actualizar la ley de control actual U a partir de la relación $U = \bar{U} + u$.

El proceso de los cuatro tanques tiene parámetros cuya fijación puede no ser exacta. Estos parámetros son: las constantes de división de flujo de las válvulas y las constantes de las bombas. Como el modelo está supuesto bajo determinados valores pudieran generarse diferencias que perjudiquen un control adecuado. Para la situación descrita una posible solución es el control adaptivo con autosintonización ya que tiene como característica su adaptación a variaciones en los parámetros del modelo.

3.2. Adecuaciones del modelo matemático de control adaptivo a proceso multivariable

En esta sección se tratan las adaptaciones a realizar en el modelo matemático usado en control adaptivo. Se enfocan dos aspectos: la representación polinomial para procesos no lineales y la estimación de parámetros usando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo mejorado.

3.2.1. Modelo polinomial de proceso no lineal

Se conoce de [1]⁴ que para un proceso no perturbado (sin incertidumbres ni disturbios) su modelo discretizado esta representado por:

$$\mathbf{X}(k + 1) = \mathbf{GX}(k) + \mathbf{HU}(k) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{CX}(k) \quad (3.2)$$

⁴Sección 5.2: "Modelando Procesos No Lineales" ecuaciones (5.3) (página 207).

donde k es el tiempo discreto y las matrices G y H poseen las mismas dimensiones que las matrices A y B respectivamente.

Recordando que la función de transferencia para el modelo representado en las ecuaciones (3.1) y (3.2) será:

$$\tau(z) = [C(zI - G)^{-1}H] \quad (3.3)$$

$$Y(z) = \tau(z)U(z) \quad (3.4)$$

El orden de la matriz \mathbf{T} será $q \times m$ siempre que el orden de cada una de las matrices G, H y C es como sigue:

- De $G \rightarrow n \times n$ (n es la cantidad de estados del vector de estados X)
- De $H \rightarrow n \times m$ (m es la cantidad de controles del vector de control U)
- Y de $C \rightarrow q \times n$ (q es la cantidad de salidas del vector Y)

Entonces la matriz \mathbf{T} de orden $q \times m$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$\tau(z) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{q1} & T_{q2} & \dots & T_{qm} \end{bmatrix} ; \quad T_{ij} = \frac{N_{ij}}{D_{ij}} \quad (3.5)$$

Y si tenemos presente que las matrices \mathbf{Y} y \mathbf{U} son de la forma:

$$Y(z) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_q \end{bmatrix} ; \quad U(z) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Entonces la ecuación (3.4) puede ser escrita usando las ecuaciones (3.5) y (3.6) como:

$$Y_1 = T_{11}u_1 + \dots + T_{1m}u_m = \frac{N_{11}}{D_{11}}u_1 + \dots + \frac{N_{1m}}{D_{1m}}u_m = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\frac{N_{1i}}{D_{1i}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{1j} \right) u_i}{\prod_{j=1}^m D_{1j}}$$

...

$$Y_q = T_{q1}u_1 + \dots + T_{qm}u_m = \frac{N_{q1}}{D_{q1}}u_1 + \dots + \frac{N_{qm}}{D_{qm}}u_m = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\frac{N_{qi}}{D_{qi}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{qj} \right) u_i}{\prod_{j=1}^m D_{qj}}$$

Eliminando denominadores en las ecuaciones (3.7):

$$Y_1 \prod_{j=1}^m D_{1j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{N_{1i}}{D_{1i}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{1j} \right) u_i$$

...

$$Y_q \prod_{j=1}^m D_{qj} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{N_{qi}}{D_{qi}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{qj} \right) u_i$$

Acomodando la ecuación (3.8) de modo matricial tendremos:

$$\begin{bmatrix} \prod_{j=1}^m D_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \prod_{j=1}^m D_{2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \prod_{j=1}^m D_{qj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{N_{11}}{D_{11}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{1j} \right) & \left(\frac{N_{12}}{D_{12}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{1j} \right) & \dots & \left(\frac{N_{1m}}{D_{1m}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{1j} \right) \\ \left(\frac{N_{21}}{D_{21}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{2j} \right) & \left(\frac{N_{22}}{D_{22}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{2j} \right) & \dots & \left(\frac{N_{2m}}{D_{2m}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{2j} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{N_{q1}}{D_{q1}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{qj} \right) & \left(\frac{N_{q2}}{D_{q2}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{qj} \right) & \dots & \left(\frac{N_{qm}}{D_{qm}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{qj} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.9

Si definimos que:

$$A = \begin{bmatrix} \prod_{j=1}^m D_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \prod_{j=1}^m D_{2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \prod_{j=1}^m D_{qj} \end{bmatrix}$$

y que:

$$B = \begin{bmatrix} \left(\frac{N_{11}}{D_{11}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{1j} \right) & \left(\frac{N_{12}}{D_{12}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{1j} \right) & \dots & \left(\frac{N_{1m}}{D_{1m}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{1j} \right) \\ \left(\frac{N_{21}}{D_{21}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{2j} \right) & \left(\frac{N_{22}}{D_{22}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{2j} \right) & \dots & \left(\frac{N_{2m}}{D_{2m}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{2j} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{N_{q1}}{D_{q1}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{qj} \right) & \left(\frac{N_{q2}}{D_{q2}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{qj} \right) & \dots & \left(\frac{N_{qm}}{D_{qm}} \right) \left(\prod_{j=1}^m D_{qj} \right) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Entonces la ecuación (3.9) queda como:

$$\Lambda \left(z^{-1} \right) Y(z) = B \left(z^{-1} \right) U(z) \quad (3.12)^5$$

Cualquier término "i" de la diagonal de A tendrá el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} \left(z^{-1} \right) &= 1 + a_{11} z^{-1} + a_{12} z^{-2} + \dots + a_{1r} z^{-r} \\ \dots & \\ \Lambda_{qq} \left(z^{-1} \right) &= 1 + a_{q1} z^{-1} + a_{q2} z^{-2} + \dots + a_{qr} z^{-r} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Combinando la ecuación (3.10) y las ecuaciones (3.13):

$$\Lambda \left(z^{-1} \right) = \begin{bmatrix} 1 + a_{11} z^{-1} + a_{12} z^{-2} + \dots + a_{1r} z^{-r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + a_{21} z^{-1} + a_{22} z^{-2} + \dots + a_{2r} z^{-r} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + a_{q1} z^{-1} + a_{q2} z^{-2} + \dots + a_{qr} z^{-r} \end{bmatrix}$$

Separando cada término de z:

$$\Lambda \left(z^{-1} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{q1} \end{bmatrix} z^{-1} + \dots + \begin{bmatrix} a_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2r} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{qr} \end{bmatrix} z^{-r}$$

De donde:

$$\Lambda \left(z^{-1} \right) = I + \Lambda_1 z^{-1} + \dots + \Lambda_r z^{-r} \quad (3.14)$$

⁵ Esta ecuación es equivalente a la ecuación (5.4) de [1] (página 207).

De manera similar se puede deducir que:

$$B(z^{-1}) = B_1 z^{-1} + \dots + B_r z^{-r} \quad (3.15)$$

Empleando las relaciones residuales $y = Y - \bar{Y}$, $x = X - \bar{X}$ y $u = U - \bar{U}$ en las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.12) se obtiene:

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k) \quad ; \quad \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \quad (3.16)$$

$$A(z^{-1})Y(k) = B(z^{-1})U(k) + c \quad (3.17)$$

donde C se determina de:

$$c = (I + A_1 + \dots + A_r) \bar{Y} - (B_1 + \dots + B_r) \bar{U} \quad (3.18)$$

3.2.2. Estimación de parámetros usando algoritmo de mínimos cuadrados recursivo mejorado

Si usamos las ecuaciones (3.14) y (3.15) en (3.17) se tendrá:

$$(I + A_1 z^{-1} + \dots + A_r z^{-r})Y(k) = (B_1 z^{-1} + \dots + B_r z^{-r})U(k) + c \quad (3.19)$$

Aplicando la propiedad de transformada z en (3.19) y despejando $Y(k)$ tendremos:

$$Y(k) = -A_1 Y(k-1) - \dots - A_r Y(k-r) + B_1 U(k-1) + \dots + B_r U(k-r) + c \quad (3.20)$$

Que en términos matriciales será:

$$Y(k) = \begin{bmatrix} -A_1 & \dots & -A_r & B_1 & \dots & B_r & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(k-1) \\ \dots \\ Y(k-r) \\ U(k-1) \\ \dots \\ U(k-r) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Si en la ecuación (3.21) se define:

$$\hat{\theta}(k) = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & -a_r & b_1 & \dots & b_r & c \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\psi^T(k) = [Y(k-1) \quad \dots \quad Y(k-r) \quad U(k-1) \quad \dots \quad U(k-r) \quad 1] \quad (3.23)$$

Entonces la ecuación (3.21) será:

$$Y(k) = \hat{\theta}(k) \psi^T(k) \quad (3.24)^6$$

La ecuación (3.24) es base para la estimación del vector $\hat{\theta}$. El algoritmo de estimación propuesto en [1] es el de los mínimos cuadrados recursivo mejorado, el cual puede implementarse de la siguiente manera:

1. Obtener el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}(0)$ usando los valores de los parámetros del modelo según ecuaciones (3.14) y (3.15).
2. Obtener valor inicial del parámetro $c(0)$ empleando ecuación (3.18), considerando $\bar{U}=0$ e \bar{Y} igual a la señal de referencia.
3. La matriz de covarianza inicial P puede tener la forma $P=\alpha I$, donde I es la matriz identidad y $\alpha \gg 1$.
4. Tomar mediciones de $Y(k)$ y $U(k)$ en el proceso para obtener una nueva ecuación de la forma (3.24).
5. Computar $\rho(k)=\max(1, \|\psi(k)\|^{-1})$. Determinar $\psi_n(k)=\psi(k)\rho(k)$.
6. Determinar la matriz $N(k)$ aplicando la factorización de Cholesky en:

$$N(k) N(k)^T = P(k)$$

⁶ Esta ecuación es similar a la ecuación (5.9) de [1] (página 208).

7. Determinar la matriz diagonal de escalamiento $S(k)$ con elementos s_{ij} . Tal matriz minimiza el número condicional del producto $S(k)N(k)$ siempre que $s_{ij}=1/n_{ij}$, donde cada n_{ij} se obtiene tomando el valor absoluto de la suma de los elementos de la fila j de $N(k)$.
8. Realizar los siguientes cálculos:⁷

$$P_s(k) = S(k)P(k)S(k)$$

$$\psi_{ns}(k) = [S(k)]^{-1}\psi_n$$

$$r(k) = 1 + \psi_{ns}^T(k)P_s(k)\psi_{ns}(k)$$

$$\lambda(k) = 1 - \frac{1}{2} \left[r(k) - \sqrt{r^2(k) - \frac{4\|P_s(k)\psi_{ns}(k)\|^2}{\text{tr}(P_s(k))}} \right]$$

$$e_n(k) = Y(k) - \hat{\rho}(k) - \hat{\theta}(k-1)\psi_n(k)$$

$$j(k) = [\psi_{ns}^T(k)P_s(k)\psi_{ns}(k) + \lambda(k)]$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + e_n(k)([\psi_{ns}^T(k)P_s(k)\psi_{ns}(k)]^{-1})^T / j(k)$$

$$H_{ns}(k) = P_s(k)\psi_{ns}(k) [j(k)]^{-1}$$

$$P_s(k+1) = [I - H_{ns}(k)\psi_{ns}^T(k)]P_s(k) / \lambda(k)$$

$$tt = \text{abs}[\max(\text{eig}(P_s(k+1))) / \min(\text{eig}(P_s(k+1)))]$$

9. Implementar el criterio para detener la estimación y encontrar la nueva matriz de escalamiento N_{new} como sigue: sabiendo que tt es el número condicionante de $P_s(k+1)$:

⁷ Se hacen modificaciones en los cálculos relacionados a: $e_n(k)$ y

$\hat{\theta}(k+1)$.

- Si $tt \leq \text{Cota_Inferior}$ se detiene la estimación. Hacer $P(k+1) = P_s(k+1)$
- Si $tt \geq \text{Cota_Superior}$ determinar:
 - N_{new} a partir de la relación $P_s(k+1) = N_{\text{new}}N_{\text{new}}^T$
 - Calcular los elementos $n_{\text{new}ij}$ como el valor absoluto de la suma de los elementos de las filas N_{new}
 - Determinar la matriz diagonal S_{new} con elementos $s_{\text{new}ij} = 1/n_{\text{new}ij}$ y calcular la matriz $P_{\text{new}S} = S_{\text{new}}P_sS_{\text{new}}$
 - Finalmente actualizar $P(k+1) = P_{\text{new}S}$

3.3. Procedimiento de Diseño

El procedimiento para diseñar el sistema de control adaptivo con autosintonización es el siguiente:

1. Formular el problema.
2. Determinar el modelo lineal y no lineal de proceso.
3. Implementar el método de los mínimos cuadrados recursivo mejorado para estimación de parámetros del proceso.
4. Estimar los estados del proceso.
5. Implementar la ley de control.
6. Simular el sistema de control adaptivo.

3.3.1. Formulación del problema

Ver sección "1.1. Descripción del Proceso" (página 3).

3.3.2. Modelo del proceso

Ver las secciones:

- “1.2. Modelo Físico del Proceso” (página 5).
- “3.2.1. Modelo polinomial de proceso no lineal” (página 50).

3.3.3. Estimación de parámetros

Seguir algoritmo descrito en la sección “3.2.2. Estimación de parámetros usando algoritmo de mínimos cuadrados recursivo” (página 54).

3.3.4. Estimación de estados

Se conoce que para una planta completamente controlable y completamente observable representada por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad ; \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

El vector de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ puede ser obtenido empleado un filtro de Kalman, con ecuación de observación:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{G}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}_e \left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k) \right] \quad (3.25)$$

y ecuación de actualización de estados:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.26)$$

En la ecuación (3.25) \mathbf{K}_e se calcula a partir de:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T \left[\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right]^{-1} \quad (3.27)$$

Donde P es la matriz definida positiva, solución de la siguiente ecuación de Riccati:

$$P = Q + G^T P G - G^T P C^T [C P C^T + R]^{-1} C P G \quad (3.28)$$

Donde Q y R son las matrices de covarianza definidas positivas correspondientes a los disturbios de estados y medición respectivamente.

MATLAB cuenta con la función "dlqe" que realiza los cálculos correspondientes al estimador de Kalman. La sintaxis es la siguiente:

$$K = dlqe(G, H, C, Q, R);$$

Para el caso de control adaptivo las matrices G, H y C dejan de ser constantes pues corresponderán a la estimación de parámetros efectuada en la sección anterior.

Para construir las matrices estimadas G_e, H_e, C_e y D_e a partir de la representación polinomial estimada usaremos la primera forma canónica controlable cuya representación es:

$$G_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -A_r & -A_{r-1} & -A_{r-2} & \cdots & A_1 \end{bmatrix} \quad H_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} B_r & B_{r-1} & \cdots & B_2 & B_1 \end{bmatrix} \quad D_e = [0]$$

Cabe señalar que estas matrices se determinarán con cada nueva estimación de parámetros que se calcule según lo descrito en la sección anterior.

3.3.5. Ley de control

La representación en el espacio de estado del controlador proporcional-integral óptimo cuadrático con realimentación de estados, es la siguiente:

$$\mathbf{x}_a(k+1) = \mathbf{G}_a \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k) \quad (3.30)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_a \mathbf{x}(k) \quad (3.31)$$

En las ecuaciones (3.30) y (3.31) el subíndice "a" significa aumentado.

Las matrices aumentadas corresponden a:

$$\mathbf{x}_a(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{z}(k) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_a(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_a = [\mathbf{C} \quad 0] \quad (3.32)^8$$

La matriz de ganancia \mathbf{K}_a se resuelve a partir de la ecuación:

$$\mathbf{K}_a = \left[\mathbf{R}_a + \mathbf{H}_a^T \mathbf{P}_a \mathbf{H}_a \right]^{-1} \mathbf{H}_a^T \mathbf{P}_a \mathbf{G}_a \quad (3.33)$$

donde \mathbf{P}_a se obtiene de resolver la siguiente ecuación de Riccati:

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{Q}_a + \mathbf{G}_a^T \mathbf{P}_a \mathbf{G}_a - \mathbf{G}_a^T \mathbf{P}_a \mathbf{H}_a \left[\mathbf{R}_a + \mathbf{H}_a^T \mathbf{P}_a \mathbf{H}_a \right]^{-1} \mathbf{H}_a^T \mathbf{P}_a \mathbf{G}_a \quad (3.34)$$

Donde \mathbf{Q}_a y \mathbf{R}_a son las matrices de covarianza definidas positivas correspondientes a los disturbios de estados y medición respectivamente.

⁸ Tener en cuenta que los valores de las matrices \mathbf{G} , \mathbf{H} y \mathbf{C} serán las estimadas en la ecuación (3.29).

MATLAB cuenta con la función “dlqr” que resuelve la matriz de ganancia K para la ley de control óptimo. La sintaxis es:

$$K=dlqr(G,H,Q,R)$$

Determinado el valor de K_a la ley de control correspondiente será:

$$\mathbf{u}(k)=-K_a\mathbf{x}(k) \quad (3.35)$$

Por consiguiente si recordamos que: $\mathbf{u} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}$, entonces:

$$\mathbf{U}(k) = \mathbf{u}(k) + \bar{\mathbf{U}} \quad (3.36)$$

El valor de \mathbf{U} se obtiene de la ecuación (3.18).

3.4. Programas MATLAB para la simulación del sistema de control adaptivo con autosintonización

El programa “adaptivo.m” escrito en código MATLAB es la implementación del diseño del sistema de control adaptivo. Dicho programa realiza lo siguiente:

1. Invoca al programa “modelo.m” que define el modelo del proceso.
2. Pasa el modelo continuo a discreto con tiempo de muestreo 1 segundo.
3. Obtiene los parámetros iniciales del proceso en base a las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.18). Para obtener los coeficientes de la representación polinomial se Invoca al subprograma “ObtienePolinomio.m”.
4. Define los valores iniciales de:
 - Matriz de covarianza (P_i).

- La señal de referencia (Ref).
 - Señales de salida (Y) y sus sendas residuales (y).
 - Alturas de los tanques discretizadas directamente (H) y las correspondientes variables de salida discretizadas directamente ($Y_{discreta}$).
 - Señales de control (U) y sus sendas residuales (u).
 - Vector de estados (X_e) y acción integral (z).
5. Itera para un número determinado de muestras. Para cada muestra realiza lo siguiente:
- Determina valor de la señal de referencia.
 - Computa las alturas discretizadas directamente.
 - Estima el valor de la señal de salida Y con el modelo lineal del proceso.
 - Calcula el valor residual de la señal de salida $y=Y-Ref$.
 - Estima los parámetros por método MCRM invocando a subprograma "EstimaParametros.m".
 - Asigna las matrices con la representación canónica controlable usando los parámetros estimados.
 - Determina la ganancia del estimador de Kalman usando la función `dlqe`.
 - Computa el nuevo vector de estados estimados.
 - Computa la acción integral.
 - Determina la ganancia del controlador óptimo de Kalman.

- Obtiene la ley de control residual.
- Actualiza vector de estados.
- Computa la señal de control actual. Se restringe a valores adecuados para evitar daño a equipos reales.

6. Grafica la señal de referencia, la señal de control y la señal de salida.

Archivo MATLAB: adaptivo.m

```

%*****
%SIMULACION CONTROL ADAPTIVO PROCESO DE CUATRO TANQUES ACOPLADOS
%Autor: Rafael Dávila
%Fecha: Noviembre del 2001
%*****
%-----
%Modelo SS de Cuatro Tanques Acoplados
%-----
clc;
clear all;
modelo;
%-----
%Control Optimo Cuadrático
%-----
%Verificar si Controlabilidad y Observabilidad
M=[B A*B A^2*B A^3*B];
N=[C' A'*C' (A')^2*C' (A')^3*C'];
%rank(M)=4 ==> Completamente controlable
%rank(N)=4 ==> Completamente observable
%-----
%De continuo a tiempo discreto
%-----
Ts=1; %Tiempo de muestreo
Planta_discreta=c2d(Planta,Ts,'zoh');
%-----
%Indicar señal de referencia y numero de muestras
%-----
TipoSenal=input('Indique señal referencia: 0=Escalón; 1=Cuadrada\n');
Muestras=input('Indique cantidad de muestras\n');
CorrigeReferencia=input('Indique si corrige referencia: 0=No; 1=Si\n');
%-----
%Obtener parametros
%-----
[a,b]=ObtienePolinomio(Planta_discreta);
%
c=(eye(2)+a(1)+a(2)+a(3))*[1;1];
%Theta es el vector de parámetros estimados
Theta(1)=[-a(1) -a(2) -a(3) b(1) b(2) b(3) c];
Theta(2)=Theta(1);Theta(3)=Theta(1);
%-----
%Condiciones iniciales
%-----
%Covarianza
Pi=1000*eye(13);
%Ref es el vector de la señal de referencia
Ref(1)=[0;0];Ref(2)=[0;0];Ref(3)=[0;0];
%Y es el vector de las variables de salida (H1 y H2)
Y(1)=[0;0];Y(2)=[0;0];Y(3)=[0;0];
%y es el vector de las variables residuales (H1 y H2)
y(1)=[0;0];y(2)=[0;0];y(3)=[0;0];

```

```

%H es el vector de alturas discretizado directamente
H{1}=[0;0;0;0];H{2}=[0;0;0;0];H{3}=[0;0;0;0];
%Yd es el vector de variables de salida discretizadas directamente.
Ydiscreta{1}=[0;0];Ydiscreta{2}=[0;0];Ydiscreta{3}=[0;0];
%U es el vector de control
U{1}=[0;0];U{2}=[0;0];U{3}=[0;0];
%u es el vector de control residual
u{1}=[0;0];u{2}=[0;0];u{3}=[0;0];
%Xe es el vector de estados estimados de la forma canónica controlable
Xe=[0;0;0;0;0;0];
%Accion integral inicial
z=[0;0];
%Estimaciones
CotaInf=15;
CotaSup=100;
for k=4:Muestras
    %-----
    %SEÑAL DE REFERENCIA
    %-----
    if TipoSenal==0
        Ref(k)=[6.5;8]; %Escalon
    Else
        Ref(k)=3*([1.2;1.6]+sign(sin(2*pi*0.001*k*Ts))*[1;1]); %Cuadrada de 1000s de
periodo
    End
    %-----
    %Corregir señal de referencia?
    %-----
    if CorrigeReferencia==1 %1=Corrige; 0=No corrige
        if Modo==0 %0=Fase minima ; 1=Fase no mínima
            RefAju=1.95*Ref(k)+[0;0.39];
        Else
            RefAju=1.95*Ref(k)+[0;3.6465];
        End
    Else
        RefAju=Ref(k);
    End
    %-----
    %DISCRETIZACION DIRECTA
    %-----
    H(k)=[H(k-1)(1)+Ts*(-1*Ao(1)*sqrt(2*g*H(k-1)(1))+Ao(3)*sqrt(2*g*H(k-1)(3))+Kv(1)*Kb(1)*U(k-1)(1))/At(1)
        H(k-1)(2)+Ts*(-1*Ao(2)*sqrt(2*g*H(k-1)(2))+Ao(4)*sqrt(2*g*H(k-1)(4))+Kv(2)*Kb(2)*U(k-1)(2))/At(2)
        H(k-1)(3)+Ts*(-1*Ao(3)*sqrt(2*g*H(k-1)(3))+(1-Kv(2))*Kb(2)*U(k-1)(2))/At(3)
        H(k-1)(4)+Ts*(-1*Ao(4)*sqrt(2*g*H(k-1)(4))+(1-Kv(1))*Kb(1)*U(k-1)(1))/At(4)];
    For i=1:4
        if H(k)(i)<0
            H(k)(i)=0;
        end
    end
    end
    Ydiscreta(k)=C*H(k);
    %-----
    %MODELO LINEAL DEL PROCESO
    %-----
    Y(k)=[-a{1} -a{2} -a{3} b{1} b{2} b{3}]*[Y(k-1);Y(k-2);Y(k-3);U(k-1);U(k-2);U(k-3)];
    y(k)=Y(k)-RefAju;
    %-----
    %ESTIMACION DE PARAMETROS (METODO MCRM)
    %-----
    Psi=[Y(k-1); Y(k-2); Y(k-3); U(k-1); U(k-2); U(k-3); 1];
    [Theta(k), Pi]=EstimaParametros(Theta(k-1), Pi, Psi, Y(k), CotaInf, CotaSup);
    %-----
    %RECUPERACION DE ECUACION CANONICA CONTROLABLE
    %-----
    %Parametros estimados
    Th=Theta(k);
    a1=-Th(1:2,1:2);a2=-Th(1:2,3:4);a3=-Th(1:2,5:6);
    b1=Th(1:2,7:8);b2=Th(1:2,9:10);b3=Th(1:2,11:12);
    c_=Th(1:2,13:13);
    %Ecuación canónica controlable
    Ge=[zeros(2,2) eye(2,2) zeros(2,2)
        zeros(2,2) zeros(2,2) eye(2,2)
        -a3 -a2 -a1];
    He=[zeros(2,2)

```

```

        zeros(2,2)
        eye(2,2)];
Ce=[b3 b2 b1];
De=[0];
%-----
%ESTIMADOR DE KALMAN
%-----
Q=0.01*diag(ones(1,2));
R=100*diag(ones(1,2));
Ko=dlqe(Ge,He,Ce,Q,R);
%Estimacion estados
X_ =Xe+Ko*(y{k}-Ce*Xe);
%Accion integral
z=z-Ce*X_;
%-----
%CONTROLADOR DE KALMAN
%-----
Q=0.1*diag(ones(1,8));
R=diag(ones(1,2));
Ga=[Ge zeros(6,2);-Ce eye(2,2)];
Ha=[He;zeros(2,2)];
Ca=[Ce zeros(2,2)];
Ka=dlqr(Ga,Ha,Q,R);
%-----
%LEY DE CONTROL RESIDUAL
%-----
u{k}=-Ka*[X_ ;z];
%-----
%ACTUALIZAR ESTADOS
%-----
Xe=Ge*X_+He*u{k};
%-----
%CALCULO DE SEÑAL DE CONTROL
%-----
U{k}=u{k}+inv(b1+b2+b3)*((eye(2)+a1+a2+a3)*RefAju-c_);
%-----
%LIMITAR SEÑALES DE CONTROL
%-----
if U{k}(1)>5
    U{k}(1)=5;
Else
    if U{k}(1)<0
        U{k}(1)=0;
    End
end
if U{k}(2)>5
    U{k}(2)=5;
Else
    if U{k}(2)<0
        U{k}(2)=0;
    End
end
end %Lazo for de estimaciones
%-----
%Diagramas
%-----
GraficaTanque12(2,Muestras,Ts,Ref,U,Y);
GraficaTanque12(3,Muestras,Ts,Ref,U,Ydiscreta);

```

El subprograma "ObtienePolinomio.m" obtiene los coeficientes de la representación polinomial del proceso. Se basa en lo descrito en la sección "3.2.1. Modelo polinomial de proceso no lineal" (página 50).

Archivo MATLAB: ObtienePolinomio.m

```

function [a,b]=ObtienePolinomio(Planta_discreta)
%-----
%OBTIENE REPRESENTACION POLINOMIAL
%Autor: Rafael Dávila
%Fecha: Noviembre del 2001
%-----
%Obtener arreglo de coeficientes de numeradores y ...
%... denominadores de la función de transferencia
[BB,AA]=tfdata(tf(Planta_discreta));
%
%Obtener matriz A de: A(z)Y(z)=B(z)U(z)
%Un elemento de la matriz A es A_(i,j)
%Cada A_ es un polinomio en z^-1
%
[Fil,Col]=size(AA); %Cuántos denominadores hay?
orden_a=0; %Contendrá el mayor orden de los polinomios A_
for i=1:Fil %Inicializar en cero los polinomios A_
    for j=1:Col
        A_(i,j)=filt(0,1);
    End
End
for i=1:Fil %Lazo que para elemento de diagonal de A multiplica todos los
denominadores.
    A_(i,i)=1;
    for j=1:Col
        A_(i,i)=A_(i,i)*filt(AA(i,j),1);
    End
    [num_a,den_a]=tfdata(A_(i,i),'v');%Obtener coeficientes
    if (size(num_a,2)-1)>orden_a %Guardar el mayor orden
        orden_a=size(num_a,2)-1;
    end
end
end
%
%Obtener matriz B de: A(z)Y(z)=B(z)U(z)
%Un elemento de la matriz B es B_(i,j)
%Cada B_ es un polinomio en z^-1
%
[Fil,Col]=size(BB); %Cuántos numeradores hay?
orden_b=0; %Contendrá el mayor orden de los polinomios B_.
for i=1:Fil %Inicializar B_ con el polinomio numerador
    for j=1:Col
        B_(i,j)=filt(BB(i,j),1);
    End
End
for i=1:Fil %Multiplicar cada B_ por los A_ de su fila
    for j=1:Col
        for k=1:size(AA,2)
            if j==k
                %Nada
            else
                B_(i,j)=B_(i,j)*filt(AA(i,k),1);
            end
        end
    end
    [num_b,den_b]=tfdata(B_(i,j),'v'); %Obtiene coeficientes
    if (size(num_b,2)-1)>orden_b %Guardar mayor orden de B
        orden_b=size(num_b,2)-1;
    end
end
end
%
%Ya se tienen en A_ y B_ los polinomios en z^-1
%Ahora se separa cada matriz coeficiente de potencia de z^-1
%Es decir:
%
%A=Matriz(A_(i,j))=a1*z^-1+a2*z^-2+...+ar*z^-r
%B=Matriz(B_(i,j))=b1*z^-1+b2*z^-2+...+br*z^-r

```

```

%
a=cell(orden_a,1); %se definen cuantos coeficientes matriz se necesitan para A_
[Fil,Col]=size(A_);
for k=1:orden_a %Obtener los coeficientes matriz de A_
    a{k}=zeros(Fil,Col);
    for i=1:Fil
        [num_a,den_a]=tfdata(A_(i,i),'v');
        a{k}(i,i)=num_a(k+1);
    end
end
b=cell(orden_b,1); %se definen cuantos coeficientes matriz se necesitan para B_
[Fil,Col]=size(B_);
for k=1:orden_b %Obtener los coeficientes matriz de B_
    b{k}=zeros(Fil,Col);
    for i=1:Fil
        for j=1:Col
            [num_b,den_b]=tfdata(B_(i,j),'v');
            b{k}(i,j)=num_b(k+1);
        end
    end
end
end
end

```

El subprograma “EstimaParametros.m” implementa el algoritmo de los mínimos cuadrados recursivo mejorado descrito en la sección “3.2.2. Estimación de parámetros usando algoritmo de mínimos cuadrados recursivo” (página 47).

Archivo MATLAB: EstimaParametros.m

```

function [THo,Po]=EstimaParametros(THi,Pi,Psi,Y,CotaInf,CotaSup)
%-----
%ESTIMA PARAMETROS METODO MRCM
%Autor: Rafael Dávila
%Fecha: Noviembre del 2001
%-----
%Tamaño de arreglos
N=size(Psi,1);
%Normalizar Psi
rho=max(1,norm(Psi));
PsiN=Psi/rho;
%Factorización de cholosky
Q=chol(Pi');
%Matriz de escalamiento
S=inv(diag(Q*ones(N,1),0));
%Computos adicionales
Ps=S*Pi*S;
PsiNs=inv(S)*PsiN;
r=1+PsiNs'*Ps*PsiNs;
lamb=1-(r-sqrt(r^2-4*norm(Ps*PsiNs)^2/trace(Ps)))/2;
e=Y/rho-THi*PsiN;
j=PsiNs'*Ps*PsiNs+lamb;
Th=THi+e*(inv(S)*Ps*PsiNs)'/j;
%
Hns=Ps*PsiNs/j;
Ps=(Ps-Hns*PsiNs'*Ps)/lamb;
tt=abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps)));
%Parar estimacion

```

```

if tt<=CotaInf
    THo=Th;
    Po=Ps;
elseif tt>=CotaSup
    THo=Th;
    Nnew=chol(Ps');
    Snew=inv(diag(Nnew*ones(N,1),0));
    Psnew=Snew*Ps*Snew;
    Po=Psnew;
Else
    THo=THi;
    Po=Pi;
End

```

3.5. Simulación del diseño del sistema de control adaptivo con autosintonización

La simulación del sistema de control adaptivo con autosintonización es realizada para operación en fase mínima y operación en fase no mínima. En cada modo de operación se presentan los resultados para señal de referencia escalón y señal de referencia cuadrada.

3.5.1. Simulación del sistema de control adaptivo con autosintonización para el proceso en fase mínima

Señal de referencia escalón

En la figura 3.2 se presenta el resultado de la simulación para señales de referencia escalón del sistema de control adaptivo con autosintonización usando el modelo linealizado del proceso. En esta figura se observa que las señal de salida del tanque uno y la señal de salida del tanque dos siguen a las señales de referencia establecidas en 6.5 voltios y 8 voltios respectivamente. En las salidas de los tanques uno y dos no se aprecian sobreimpulsos. La salida del tanque uno estabiliza en 260 segundos y la salida del tanque dos estabiliza en 370 segundos.

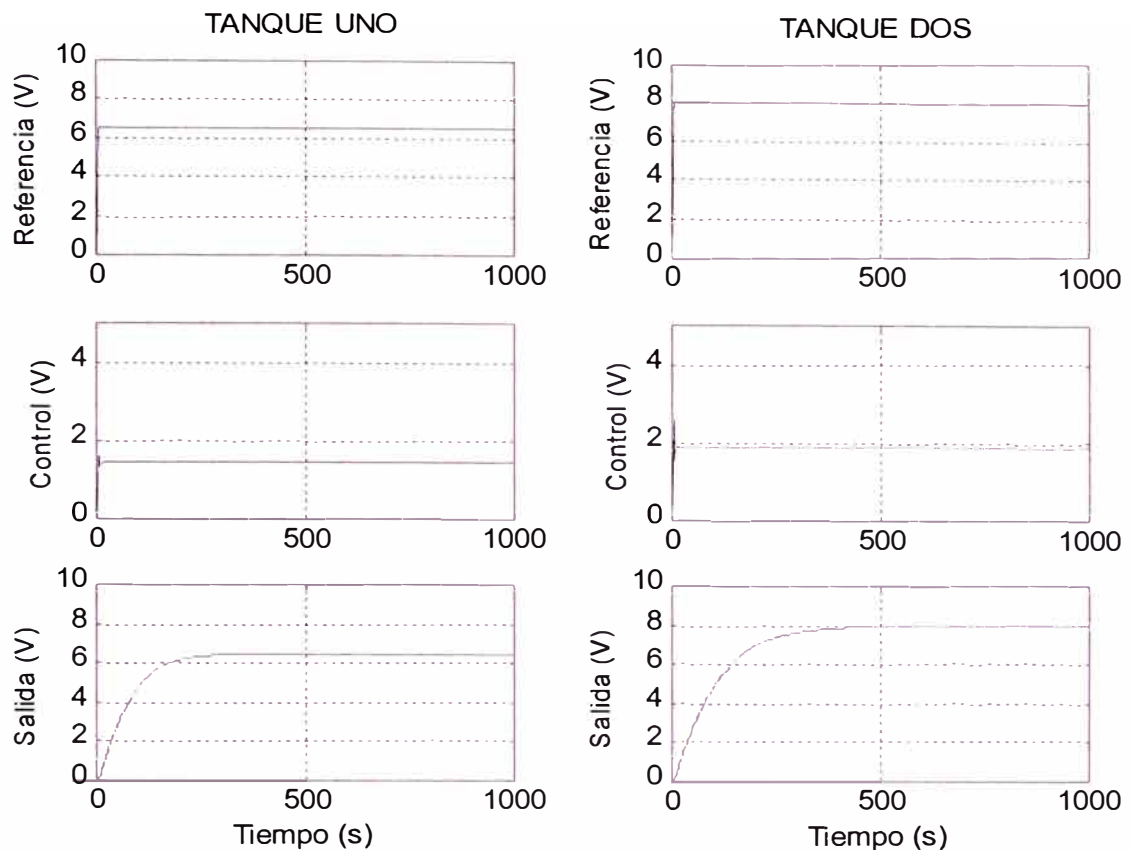


Figura 3.2: Respuesta a escalón del sistema de control adaptivo con autosintonización usando el modelo linealizado del proceso operando en fase mínima.

En la figura 3.3 se muestra el resultado de la simulación para señales de referencia escalón del sistema de control adaptivo con autosintonización usando discretización directa para el modelo del proceso. Se observa que las salidas de los tanques uno y dos estabilizan en 1.72 voltios y 2.11 voltios. Estos valores no corresponden a la señales de referencia debido a lo comentado en la sección “1.6. Discretización directa del proceso y comparación con modelo linealizado” (página 16). Para adecuar las salidas cuando se usa el modelo discretizado directamente debe realizarse corrección de la referencia.

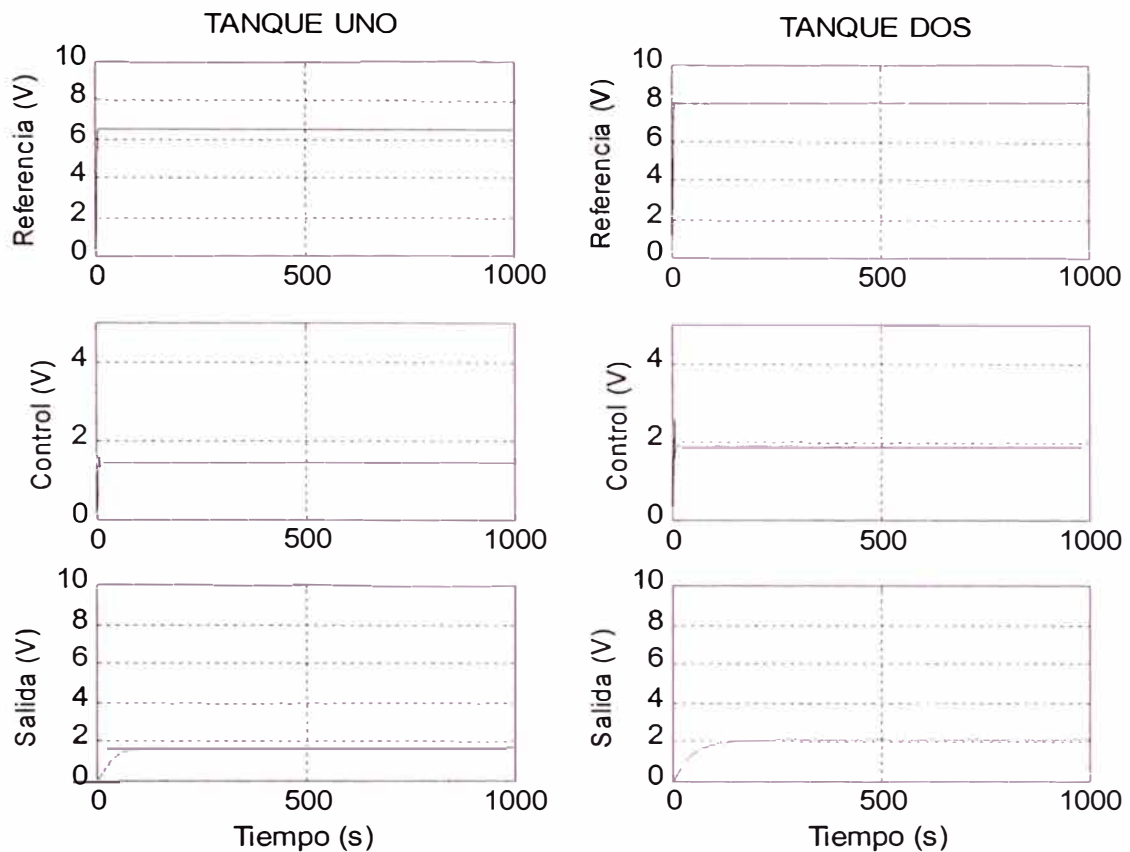


Figura 3.3: Respuesta a escalón del sistema de control adaptivo con autosintonización usando discretización directa para el proceso operando en fase mínima (sin corrección de referencia).

En el capítulo anterior se determinó que la relación para corregir la referencia cuando se usa el modelo del proceso discretizado directamente en fase mínima es:

$$\mathbf{r}_{\text{corregida}}(k) = 1.95 * \mathbf{r}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.39 \end{bmatrix}$$

En la figura 3.4 se muestra el resultado de la simulación aplicando la corrección de referencia. Notar que esta vez la salida del tanque uno estabiliza en 6.55 voltios (0.8% de error) y la salida del tanque dos estabiliza

en 8.54 voltios (6.8% de error). Los tiempos de estabilización son 250 para la primera salida y 400 segundos para la segunda salida.

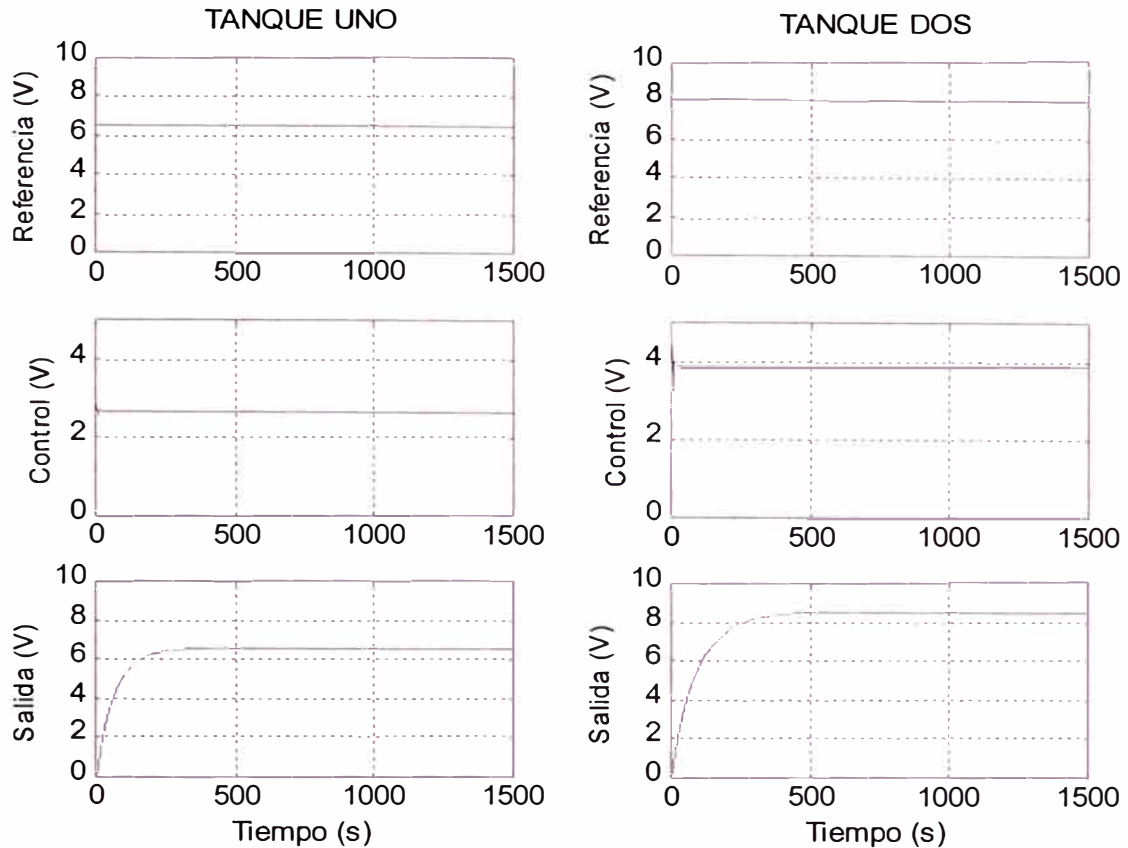


Figura 3.4: Respuesta a escalón del sistema de control adaptivo con autosintonización usando discretización directa para el proceso operando en fase mínima (con corrección de referencia).

Señal de referencia cuadrada

En la figura 3.5 se presenta el resultado de la simulación para señales de referencia cuadradas del sistema de control adaptivo con autosintonización usando el modelo linealizado del proceso. La señal de referencia en el tanque uno es una señal cuadrada de 1000 segundos de periodo con amplitudes que varían entre 6.6 voltios y 0.6 voltios. La señal de referencia en el tanque dos es una señal cuadrada de 1000 segundos de periodo con amplitudes que varían entre 7.8 voltios y 1.8 voltios. Las salidas

de los tanques uno y dos efectivamente siguen a las señales de referencia establecidas.

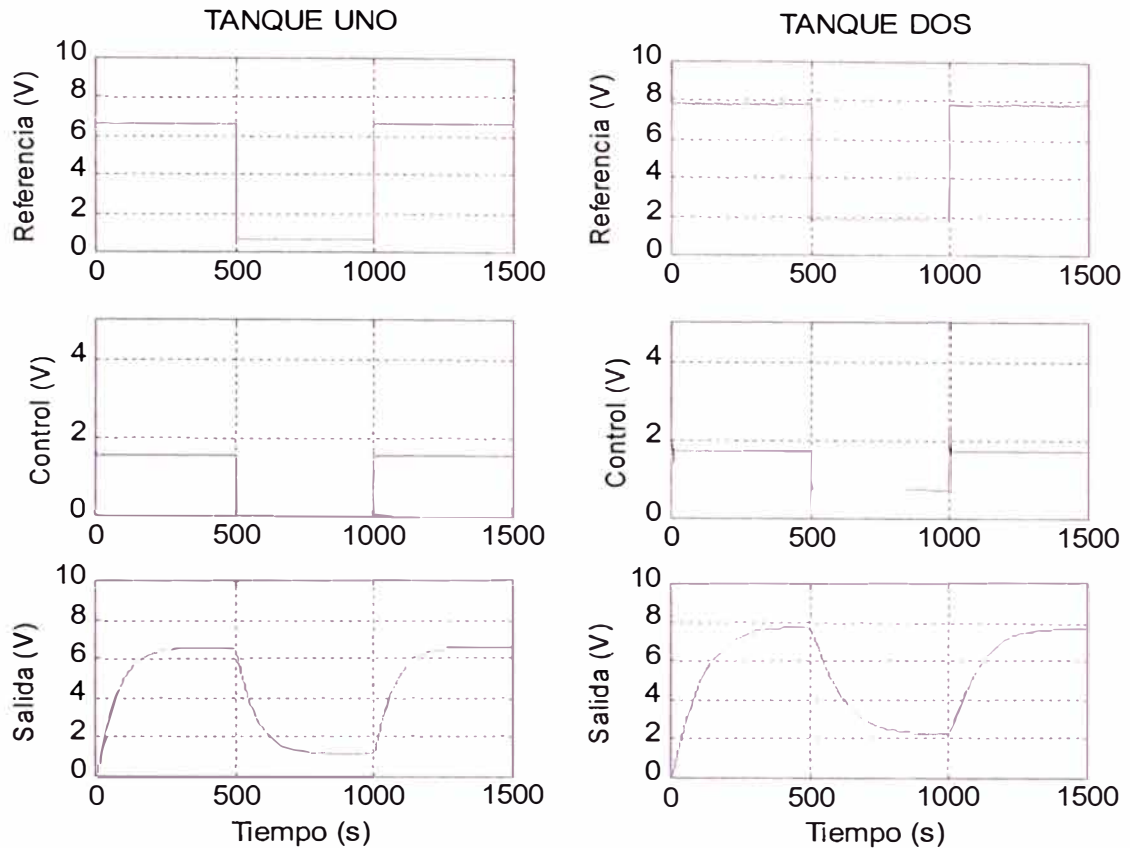


Figura 3.5: Respuesta a señal cuadrada del sistema de control adaptivo con autosintonización usando modelo linealizado del proceso operando en fase mínima.

En la figura 3.6 se muestra el resultado para señales de referencia cuadradas del sistema de control adaptivo con autosintonización usando discretización directa del proceso. Se usa la misma corrección de referencia establecida anteriormente. Se observa que las señales de salida de los tanques uno y dos siguen a las señales de referencia establecidas. La amplitud de la señal de salida en el tanque uno varía entre 6.75 voltios y 0.27 voltios, que comparada con las amplitudes de la señal de referencia de 6.6 voltios y 0.6 voltios dan errores de 2.3% y 55%. La amplitud de la señal

de salida en el tanque dos varía entre 7.93 voltios y 0.94 voltios, que comparada con las amplitudes de la señal de referencia de 7.8 voltios y 1.8 voltios dan errores de 1.8% y 48%. El pobre desempeño para las amplitudes menores de las señales de referencia puede explicarse porque el sistema de control fue ajustado para operar con 6.5 voltios de referencia en el tanque uno y 8 voltios de referencia en el tanque dos.

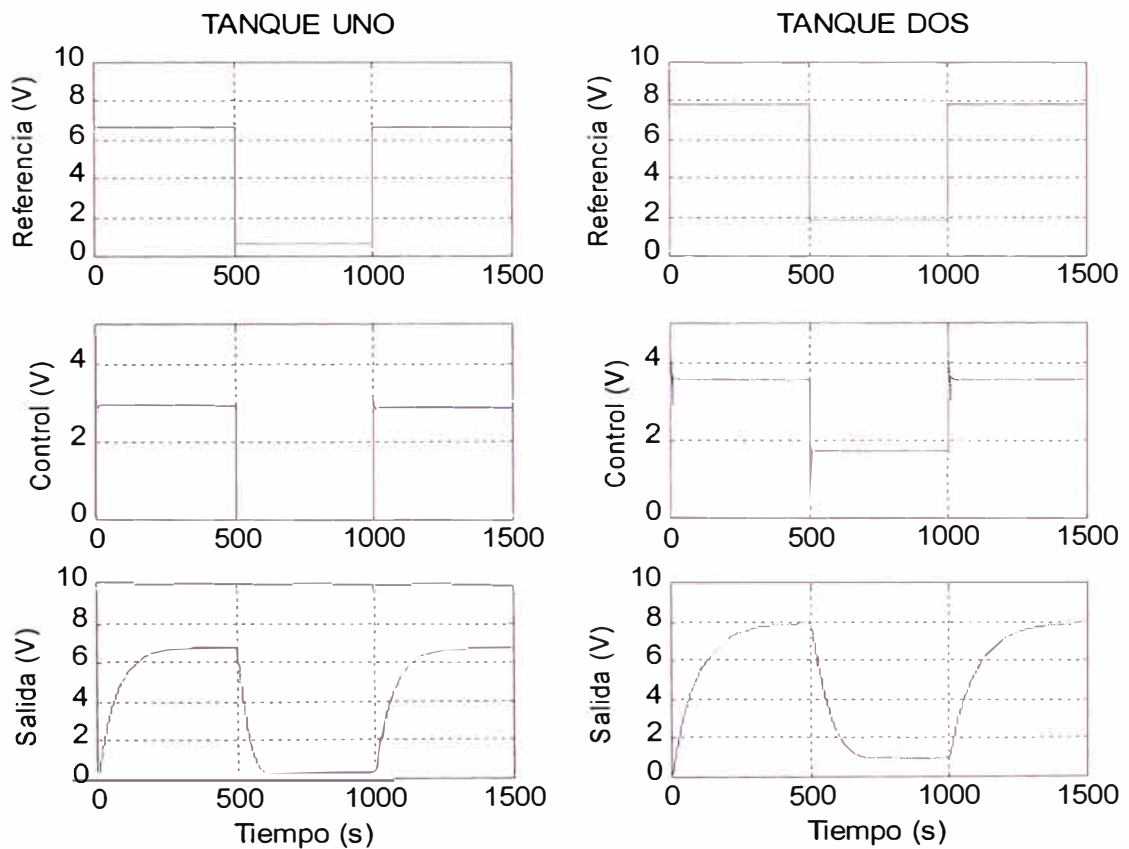


Figura 3.6: Respuesta a señal cuadrada del sistema de control adaptivo con autosintonización usando discretización directa del proceso (con corrección de referencia).

3.5.2. Simulación del sistema de control adaptivo con autosintonización para el proceso en fase no mínima

Señal de referencia escalón

En la figura 3.7 se presenta el resultado para señales de referencia escalón del sistema de control adaptivo usando el modelo linealizado del proceso. En esta figura se observa que las señal de salida del tanque uno y la señal de salida del tanque dos siguen a las señales de referencia establecidas en 6.5 voltios y 8 voltios respectivamente. No se observa presencia de sobreimpulsos en las señales de salida. La señal de salida en el tanque uno estabiliza a los 300 segundos y la señal de salida en el tanque dos estabiliza a los 430 segundos.

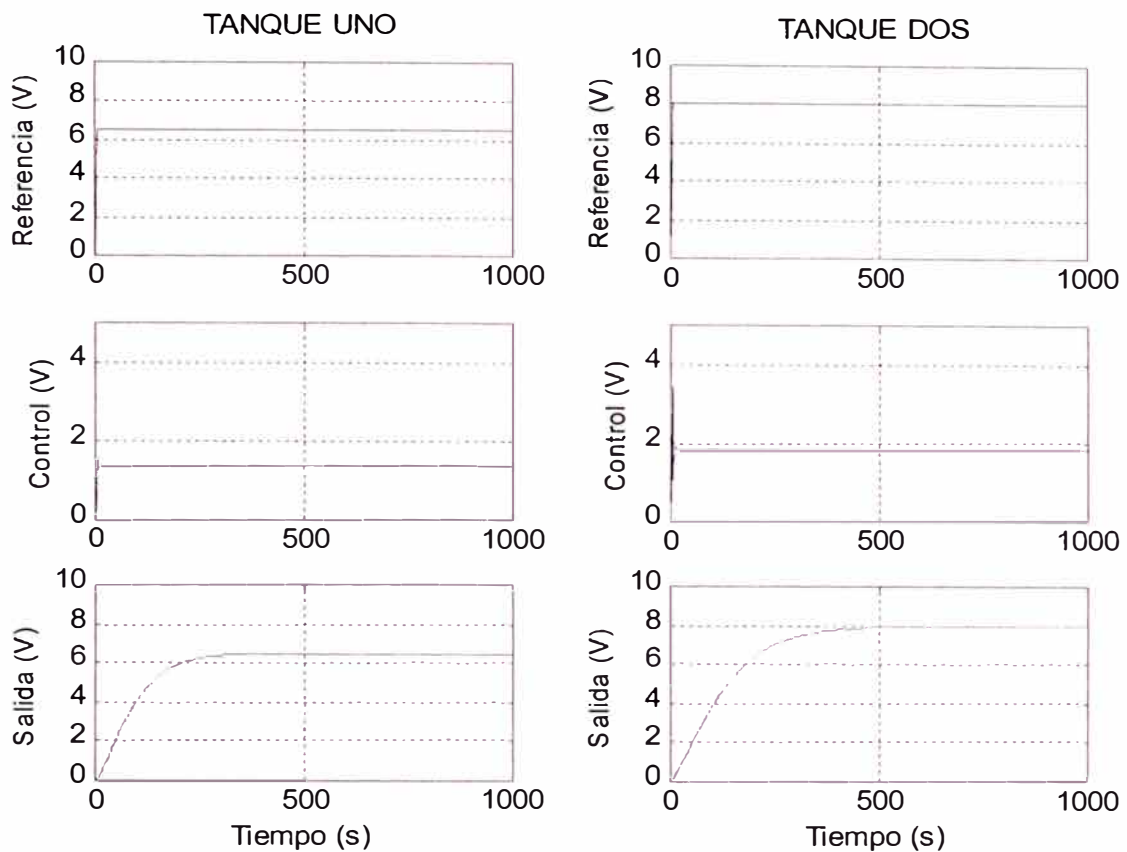


Figura 3.7: Respuesta a escalón del sistema de control adaptivo con autosintonización usando modelo linealizado del proceso operando en fase no mínima.

Cuando se usa discretización directa del proceso tiene que aplicarse corrección a la referencia. La corrección determinada en el capítulo anterior fue:

$$\mathbf{r}_{\text{corregida}}(k) = 1.95 * \mathbf{r}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.6465 \end{bmatrix}$$

En la figura 3.8 se muestra el resultado de la simulación para el proceso discretizado directamente con corrección de referencia. Notar que esta vez la salida del tanque uno estabiliza en 6.46 voltios (0.61% de error) y la salida del tanque dos estabiliza en 8.06 voltios (0.75% de error). El tiempo

de estabilización de la primera salida es de 300 segundos y de la segunda salida es de 430 segundos.

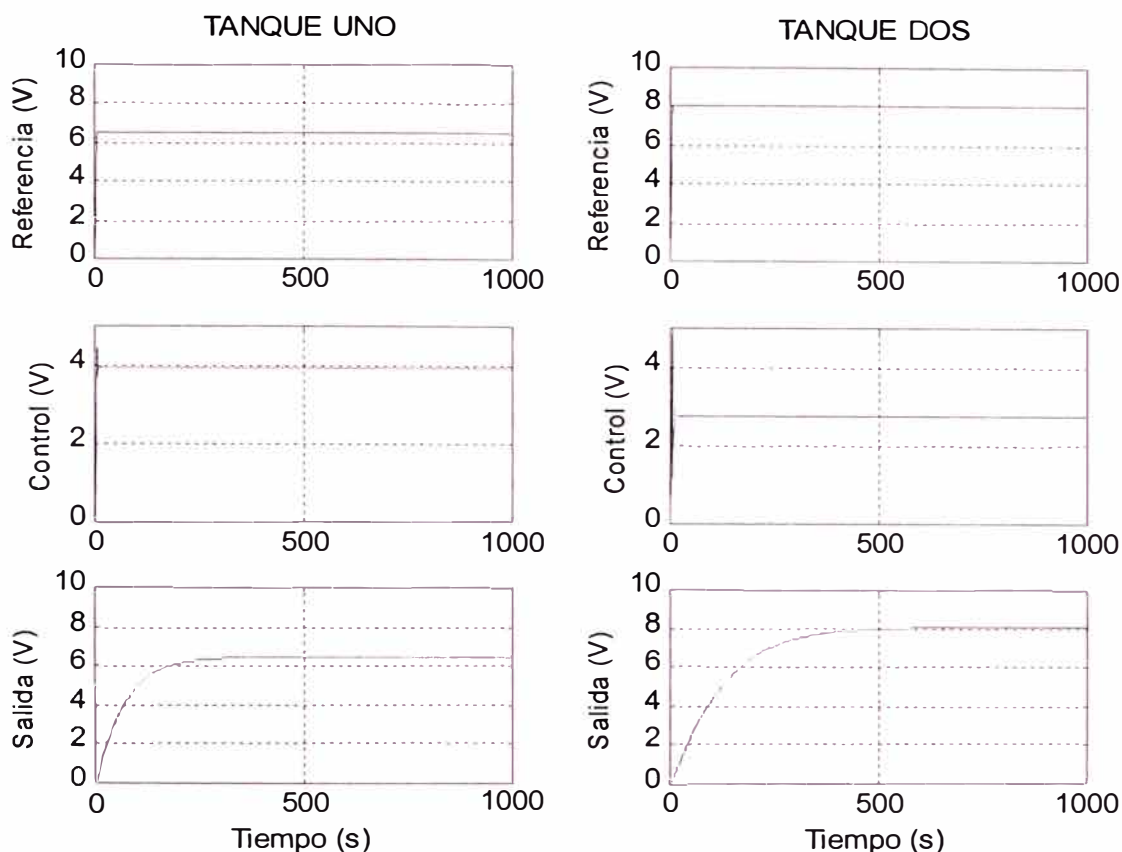


Figura 3.8: Respuesta a escalón del sistema de control adaptivo con autosintonización usando discretización directa del proceso operando en fase no mínima (con corrección de referencia).

Señal de referencia cuadrada

En la figura 3.9 se presenta el resultado para señales de referencia cuadrada del sistema de control adaptivo usando el modelo linealizado del proceso. La señal de referencia en el tanque uno es una señal cuadrada de 1000 segundos de periodo con amplitudes que varían entre 6.6 voltios y 0.6 voltios. La señal de referencia en el tanque dos es una señal cuadrada de 1000 segundos de periodo con amplitudes que varían entre 7.8 voltios y 1.8

voltios. Las salidas de los tanques uno y dos efectivamente siguen a las señales de referencia establecidas.

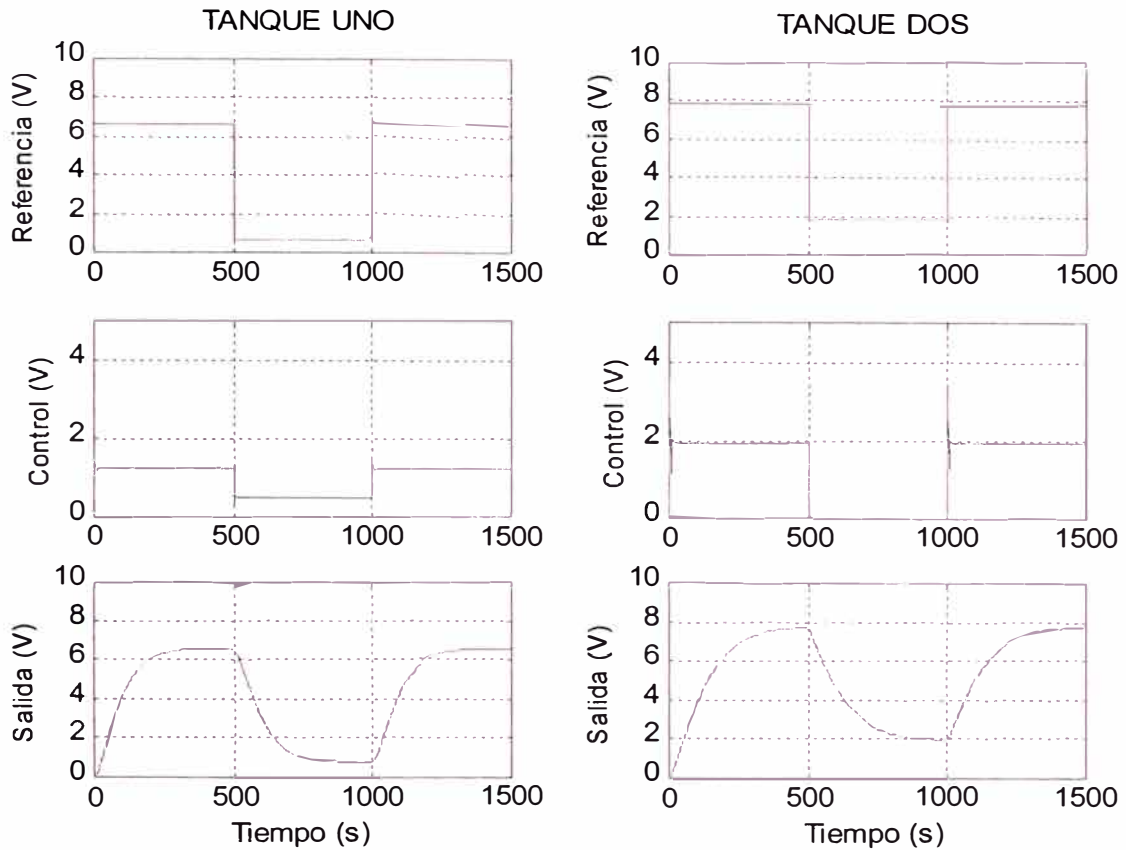


Figura 3.9: Respuesta a señal cuadrada del sistema de control adaptivo con autosintonización usando modelo del proceso linealizado operando en fase no mínima.

En la figura 3.10 se muestra el resultado del sistema de control óptimo con proceso discretizado directamente. Se usa la corrección de referencia establecida anteriormente. Se observa que las señales de salida de los tanques uno y dos siguen a las señales de referencia establecidas. La amplitud de la señal de salida en el tanque uno varía entre 6.65 voltios y 0.49 voltios, que comparada con las amplitudes de la señal de referencia de 6.6 voltios y 0.6 voltios dan errores de 0.76% y 18.33%. La amplitud de la señal de salida en el tanque dos varía entre 7.81 voltios y 1.34 voltios, que

comparada con las amplitudes de la señal de referencia de 7.8 voltios y 1.8 voltios dan errores de 0.12% y 26%. El pobre desempeño para las amplitudes menores de las señales de referencia puede explicarse porque el sistema de control fue ajustado para operar con 6.5 voltios de referencia en el tanque uno y 8 voltios de referencia en el tanque dos.

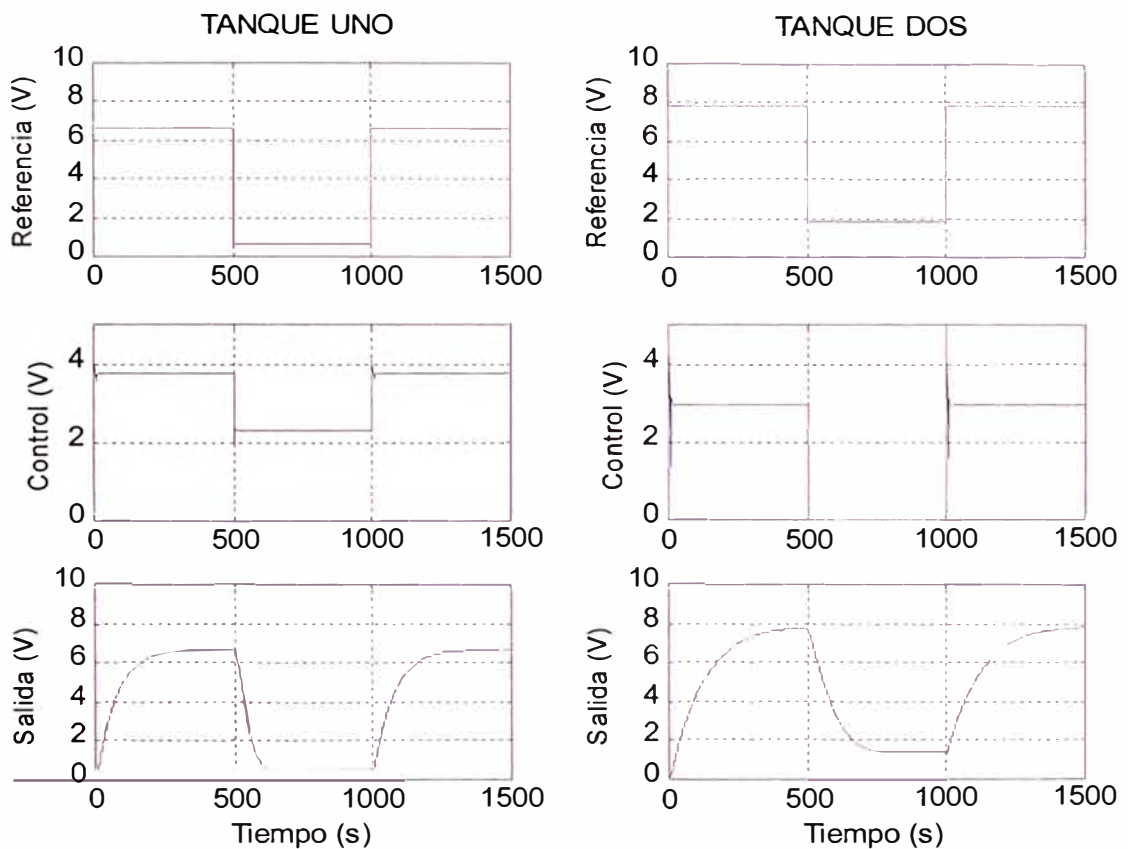


Figura 3.10: Respuesta a señal cuadrada del sistema de control adaptivo con autosintonización con proceso discretizado directamente operando en fase no mínima (con corrección de referencia).

CONCLUSIONES

Se ha presentado la aplicación de dos técnicas de diseño de control al proceso de cuatro tanques acoplados (figura 1.1) con el objetivo de controlar los niveles de líquido en los tanques uno y dos. Del desarrollo efectuado en este informe de suficiencia puede concluirse lo siguiente:

1. Para las dos técnicas de control utilizadas, control óptimo y control adaptivo con autosintonización, se logró estabilizar la salida del proceso con respecto a una señal de referencia. Esto implica que se cumplió el objetivo del diseño.
2. Es importante comparar el modelo linealizado del proceso con el proceso real. Para el caso del informe se hizo la comparación del modelo linealizado contra el modelo del proceso discretizado directamente, observándose que los valores variables de estado del modelo linealizado estaban “amplificados” respecto de los valores del modelo discretizado directamente. Para equiparar las diferencias se introdujo una relación de equivalencia entre el modelo lineal y el modelo discretizado directamente.

Las diferencias se pueden explicar por la participación de funciones no lineales (raíces cuadradas de las variables de estado) en el modelo del proceso.

3. Las características transitorias y estacionarias de los sistemas de control óptimo y adaptivo con autosintonización para el proceso son:

OPERACIÓN EN FASE MINIMA	CONTROL OPTIMO				CONTROL ADAPTIVO CON AUTOSINTONIZACION			
	MODELO LINEAL		DISCRETIZADO DIRECTAMENTE		MODELO LINEAL		DISCRETIZADO DIRECTAMENTE	
CARACTERISTICA	Salida 1	Salida 2	Salida 1	Salida 2	Salida 1	Salida 2	Salida 1	Salida 2
Tiempo estabilización	6 seg	8 seg	265 seg	230 seg	260 seg	370 seg	250seg	400 seg
Sobreimpulso	0.15%	No	No	No	No	No	No	No
Error estacionario	0%	0%	0.8%	6.8%	0%	0%	0.8%	6.8%

Tabla 1: Resumen de operación en fase mínima

OPERACIÓN EN FASE NO MINIMA	CONTROL OPTIMO				CONTROL ADAPTIVO CON AUTOSINTONIZACION			
	MODELO LINEAL		DISCRETIZADO DIRECTAMENTE		MODELO LINEAL		DISCRETIZADO DIRECTAMENTE	
CARACTERISTICA	Salida 1	Salida 2	Salida 1	Salida 2	Salida 1	Salida 2	Salida 1	Salida 2
Tiempo estabilización	150 seg	130 seg	350 seg	475 seg	300 seg	430 seg	300 seg	430 seg
Sobreimpulso	24%	No	5%	No	No	No	No	No
Error estacionario	0%	0%	0.47%	0.63%	0%	0%	0.6%	0.75%

Tabla 2: Resumen de operación en fase no-mínima

De las tablas resumen 1 y 2 se puede concluir lo siguiente:

- Para ambos sistemas de control el tiempo de estabilización es mayor cuando el proceso opera en fase no-mínima.

- Si comparamos el orden de magnitud del tiempo de estabilización del modelo linealizado y del modelo discretizado directamente para cada sistema de control, se aprecia que el sistema de control adaptivo tiene ordenes de magnitud similares para el modelo lineal y el modelo discretizado directamente. En el caso del sistema de control óptimo el orden de magnitud de los tiempos de estabilización entre el modelo linealizado y el modelo discretizado directamente varían sustancialmente. En este aspecto el sistema de control adaptivo con autosintonización tiene un mayor grado de acercamiento al comportamiento real.
 - El error estacionario es similar para ambos sistemas de control.
4. En el caso del sistema de control óptimo es necesario contar con una ganancia ajustable. Esta ganancia ajustable (denominada K_0 en la ecuación 2.8) permite que la respuesta del sistema efectivamente siga a la señal de referencia escalón. En el caso del sistema de control adaptivo con autosintonización no es necesario contar con una ganancia ajustable.
 5. El volumen de cálculos a efectuar en cada tiempo de muestreo es bastante alto para el caso del sistema de control adaptivo con autosintonización.

Finalmente se abriga la esperanza que el modelo presentado y el desarrollo de las técnicas de control realizadas sirvan de base a futuros trabajos relacionados a la teoría de control moderna.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Arturo Rojas-Moreno, Ph.D, *Control Avanzado – Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real*, Lima-Perú, 2001. ISBN 9972-9318-0-3.
- [2] K.H.Johansson, *The Quadruple-Tank Process-A multivariable process with an adjustable zero*, Aperecido en IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2000.
- [3] Katsuhiko Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*, Prentince Hall Hispanoamérica, S.A. ISBN 0-13-034281-5.
- [4] The Math Works Inc, *Control System Toolbox for use with MATLAB – User's Guide Version 4.2*, 1999.