

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**INTERPOLACIÓN DIGITAL Y MODELADO DE RUIDO EN  
PROCESADORES DE SEÑAL D / A PARA AUDIO DIGITAL**

**TITULACIÓN POR EXAMEN PROFESIONAL**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**INGENIERO ELECTRÓNICO**

**RAMÍREZ CAICEDO ROBERTO CARLOS**

**PROMOCIÓN 1995 - I**

**LIMA – PERÚ**

**2000**

Dedicado a mis padres, por su ejemplo y preocupación constante; a mi esposa, por su paciencia y comprensión y, a la memoria de Dante Alfaro, por su eterna confianza.

**INTERPOLACIÓN DIGITAL Y MODELADO DE RUIDO EN  
PROCESADORES DE SEÑAL D / A PARA AUDIO DIGITAL.**

## SUMARIO

El desarrollo del presente material corresponde al desarrollo de investigación basada en un análisis matemático rigurosamente planteado desde el punto de vista discreto y su correspondiente análisis en el plano electrónico.

El problema corresponde al análisis descriptivo de un procesador de señal D / A, es decir el análisis de un convertidor de digital a analógico pero en su etapa previa del tratamiento de la señal que se considera al recibir datos PCM para luego sobremuestrear la señal a través de un filtro digital de interpolación seguido de un recuantificador digital.

El procedimiento adoptado en cada etapa reside en el hecho de establecer límites teóricos frente a los resultados prácticos que ocurren en el tratamiento de una señal de audio digital, el plano subjetivo cubre un área importante en las decisiones finales de un diseño. Además de ello se presenta el análisis circuital con las consideraciones teóricas estudiadas en pre –grado.

Se espera como resultado final que la propuesta establezca límites teóricos de los procedimientos adoptados frente al creciente desarrollo tecnológico del cual formamos parte y al que tenemos que inevitablemente enfrentar, lo que trae como consecuencia la innovación.

## ÍNDICE

	<b>Página</b>
<b>PRÓLOGO</b>	01
<b>CAPÍTULO I.</b>	
<b>INTRODUCCIÓN AL AUDIO DIGITAL</b>	04
1.1 Etapa previa estándar	10
1.2 Sistemas de conversión D / A utilizados en procesadores digitales de señal	12
<b>CAPITULO II.</b>	
<b>MODELADO DE RUIDO: EL RECUANTIFICADOR DIGITAL</b>	14
2.1 Introducción a la teoría de la codificación y decodificación digital	14
2.2 Paridad	17
2.3 Códigos de Hamming	19
2.4 Matrices generadoras y verificación de paridad	20
2.5 Matrices de Hamming	22
2.6 Capacidad de un código	22
2.7 Códigos cíclicos	22
2.8 Códigos cíclicos sistemáticos	23
2.9 Decodificación	23

2.10	Referencias al nivel de la electrónica	25
2.11	Introducción a los códigos Reed –Solomon.	26
2.12	Los códigos Reed –Solomon (R-S)	29
<b>CAPÍTULO III.</b>		
<b>CAMPO DE GALOIS</b>		<b>34</b>
3.1	Referencias al nivel de las matemáticas discretas	34
3.2	Referencias al nivel de la electrónica	36
3.3	Cálculos R-S	41
3.4	Cálculo de polinomios del generador Reed - Solomon	46
<b>CAPÍTULO IV.</b>		
<b>LA CODIFICACIÓN Y LA RELACIÓN BÁSICA DE CONVERSIÓN</b>		<b>52</b>
<b>CAPÍTULO V.</b>		
<b>CONVERTIDORES DIGITAL A ANALÓGICO</b>		<b>57</b>
5.1	DAC de 1 bit	57
5.2	Jitter	60
5.3	Efecto de apertura	61
5.4	Error de cuantificación	63
5.5	Recuantificación y dither digital	65
5.6	Errores de un DAC	68
5.7	Factores que influyen en la calidad de los convertidores	71
5.8	Consideraciones psicoacústicas	72
5.9	Reducción de datos en audio digital	72

**CAPÍTULO VI.****FUNDAMENTOS DEL PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES**

	77
6.1 Señales y sistemas discretos en el tiempo	77
6.2 Secuencias básicas	78
6.3 Sistemas y estructuras	79
6.4 Sistemas lineales invariantes en el tiempo	80
6.5 Ecuaciones diferencia lineales con coeficientes constantes	80
6.6 Transformada de Fourier	83
6.7 Transformada discreta de Fourier	84
6.8 Transformaciones matemáticas	86
6.9 La transformada $z$	86
6.10 Sistemas de fase lineal FIR tipo I	87
6.11 Sistemas de fase lineal FIR tipo II	87
6.12 Sistemas de fase lineal FIR tipo III	87
6.13 Sistemas de fase lineal FIR tipo IV	88

**CAPÍTULO VII.****MODELADO DE RUIDO: FILTRO DE INTERPOLACIÓN DIGITAL**

	89
7.1 Análisis espectral	89
7.1.1 Retardo de grupo	90
7.2 Procesado multifrecuencia	95
7.3 Efectos de longitud de palabra finita	97

7.4	Diseño de filtros de tiempo discreto	99
7.5	Diseño discreto de filtros FIR	101
7.5.1	Diseño de filtros FIR por el método de muestreo en frecuencia	102
7.5.2	Diseño de filtros FIR por el método de ventana	106
7.6	Optimización de filtros pasa bajos FIR tipo I	115
7.7	Optimización de filtros pasa bajos FIR tipo II	118
7.8	El algoritmo de Parks- McClellan	119
7.9	Diseño Chebyshev de filtros FIR	121
7.10	El teorema de la alternancia	121
7.11	El algoritmo de cambio de Remez	123
7.12	Diseño discreto de filtros IIR	124
7.12.1	Diseño de filtros IIR en el dominio del tiempo por el método de Prony	129
7.13	Referencias al nivel de la electrónica	130
7.13.1	Características del filtro digital FIR	136
7.13.2	Características del filtro digital IIR	136
7.13.3	Caracterización de filtros digitales FIR	136
7.14	Conversión de la frecuencia de muestreo	141
7.14.1	Conversión con razón entera	143
7.14.2	Conversión con razón fraccionaria	150
7.14.3	Conversión con razón variable	152



**CAPÍTULO VIII.****CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DE LOS PROCESADORES**

<b>DE SEÑAL D / A</b>	160
8.1 Características circuitales	160
8.2 Costos de algunos productos de renombre mundial	162
<b>CONCLUSIONES</b>	164
<b>ANEXO A</b>	
ETAPA A / D STEREO PREVIA AL DSP (TEXAS INSTRUMENTS)	168
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	171

## PRÓLOGO

Como bien sabemos las señales digitales utilizadas en audio se obtienen a partir de un muestreo de señales analógicas a razón de 44,100 muestras por segundo (44.1KHz). dichas señales digitales son a continuación procesadas matemáticamente hasta llegar el momento de su conversión en señales analógicas. Hay un paso previo, todavía en el dominio de la frecuencia, en el que se deben eliminar las componentes de muy alta frecuencia para así recuperar la banda de frecuencias audibles, que al fin y al cabo es la única la que nos interesa. Para que dicha recuperación sea lo más perfecta posible, la pendiente de bajada del filtro pertinente debe ser lo más abrupta posible. En muchos casos se emplean procesadores potentes como los de Motorola, lo que elevan la relación costo / precio, dado que el empleo de ellas genera una diferencia entre la frecuencia de las bandas filtradas y el resto (no deseadas) del orden de los 148 dB (realmente estoy otorgando datos casi reales en este prólogo).

No se olvide que la frecuencia de audio límite teórica alcanza los 20,500 Hz, y es posible encontrar respuesta en frecuencia de productos basados en procesadores de señal que alcancen los 21750 Hz.

El propósito verdadero de la tesis consiste en brindar propuestas de desarrollo veraces en el campo del audio digital, desde el punto de vista matemático y electrónico a la vez, pero cuidando los excesos del procedimiento matemático, cuando en realidad, es el proceso electrónico lo que nos interesa. En cada

componente del que forman el filtro digital de interpolación y el modelado de ruido, en el que se incluye el recuantificador digital, se exponen las características matemáticas y electrónicas.

Ahora bien, es cierto que las limitaciones de nuestra realidad nacional no nos permiten extender nuestros propósitos sin embargo considero que un análisis serio como propuesta de investigación para generar desarrolladores en esta materia que propongan al mercado nacional puestos de trabajo a nivel nacional y por que no a nivel internacional.

La metodología del trabajo consiste en el riguroso análisis matemático, el mejoramiento de los modelos, acompañado siempre del contraste electrónico que se hace relevante en cada dificultad que otorgan los límites teóricos.

Los alcances varían desde un sector muy especializado en esta materia como lo es el audio digital hasta material de estudio para estudiantes de pre grado y post grado, e instituciones dedicadas a la grabación, reproducción y edición de materiales discográficos que como conocemos hoy en día se encuentra en auge, aunque con un incipiente estadio en lo que a calidad de audio se refiere.

Las limitaciones de esta propuesta varían desde una simulación para generar un filtro de precisión aritmética de 45 bits, frente a la calidad de los condensadores dedicados al tratamiento de señales de audio (Elna) que es prácticamente imposible de conseguir en el mercado. Téngase en consideración que los circuitos dedicados al tratamiento de señales de audio son o forman parte del grupo de circuitos más rigurosamente analizados y requieren de una simulación con un procesador equivalente al Pentium III, además de poseer el software ORCAD / PSPICE.

Espero entonces contar con la generosidad del entendimiento que se requiere para este tipo de investigaciones.

## **CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN AL AUDIO DIGITAL**

En las primeras técnicas empleadas para la grabación sonora, se hacía variar algún parámetro mecánico, eléctrico o magnético del mismo modo en que el sonido que se tenía que grabar había variado la presión del aire. La tensión procedente de un micrófono constituye una versión análoga de la presión del aire (o, a veces de la velocidad), pero ambos varían en la misma escala temporal.

A pesar que los equipos analógicos modernos parecen ser más sofisticados los principios utilizados son los mismos, tan solo ocurre que la tecnología ahora es más madura.

El audio digital utiliza la conocida modulación por código de impulsos (PCM), casi cerca de 31 años, existen términos conocidos en los estudios de pre grado como la corrección de la base de tiempos, y el Jitter que más adelante se explicarán. La diferencia entre el audio digital y el audio analógico es que el audio digital lleva la forma de onda en forma numérica. Utiliza un procedimiento discreto y su análisis se reproduce tanto en frecuencia como en el tiempo, pero en el tiempo su análisis matemático radica en el uso de la transformada  $z$ .

Durante muchos años la Ingeniería Electrónica ha aportado al mundo importantes logros en el campo de la medicina, servomecanismos, informática, telecomunicaciones y en nuevo campo denominado audio digital, que es una

extensión de los sistemas de radiodifusión. Menciono que es un campo nuevo, dado que en nuestro país es muy incipiente el desarrollo de la alta fidelidad en lo que a sonido musical se refiere.

En países latinoamericanos como Brasil y Argentina, si ha comenzado a desarrollarse dado que su industria se encuentra en cierto nivel que nosotros aún no poseemos.

Tratando de hacer una muy breve reseña histórica en lo que a Audio Digital se refiere, comenzaré mencionando a las cintas de audio o Cassetes que se introdujeron al mercado mundial con la finalidad de reproducir (escuchar) y grabar música, para luego años más adelante lograra la grabación de voz. En este contexto las empresas más importantes que participaron en el desarrollo de cintas de audio de calidad se encontraban BASF, TDK, MAXWELL. Las cintas de audio se distribuían tanto de tipo Normal, Cromo, Metal, que contenían componentes de óxido de Fe o Cr según sea el caso ( $\text{FeO}$  y/o  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  y/o  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ ). Actualmente se siguen distribuyendo en nuestro país estos tipos de cinta aunque con otras marcas y distintivos especiales.

Para tal efecto de calidad de grabación / reproducción de cintas de audio, se introdujeron en el mercado grabadores / reproductores de cintas de audio, participaron empresas conocidas como: SONY, TECHNICS, PIONEER, NAKAMICHI, por citar a las japonesas más exitosas; PHILIPS por citar a Holanda. Para entonces las empresas norteamericanas no participaban en el mercado con mucho éxito.

En la década del '60 NAKAMICHI lanza al mercado el DAT (Digital Audio Tape), que viene a ser como el grabador / reproductor de más alta calidad que se haya tenido en el mercado desde el lanzamiento de la cinta de audio analógica,

además de poseer un sistema especial de protección contra la copia indiscriminada de cintas de audio originales denominada SCMS (Serial Copy Management System).

Este aparato vendría a ser el reemplazo directo de la cinta de audio analógica; sin embargo debido al alto costo de su fabricación fracasó en su intento de consolidarse en el mercado, imponiéndose mas bien en equipos de grabación profesionales. Hasta este punto las empresas norteamericanas no lograban consolidarse en el mercado.

Hasta entonces el desarrollo del diseño de amplificadores de audio, con las nuevas teorías, las aplicaciones del teorema de Nyquist y los principios de la codificación digital, tenían aplicaciones en el mercado con muy poco éxito, si bien es cierto que el DAT inició el desarrollo del audio digital, el soporte de sus principios era basado en aplicaciones magnéticas.

Entonces en la década de los '80, a inicios, SONY y PHILIPS lanzan al mercado el reproductor de CD (Compact Disc) o Reproductor de Disco Compacto. La esencia del CD se basa en principios ópticos, utiliza la teoría de la modulación PCM, la conversión D/A (Digital a Analógica), codificación digital. Esta vez el medio de reproducción, es decir los discos compactos, son discos elaborados de aluminio con soporte de polycarbonato como cubierta. En su interior se aprecian "surcos", a las que se les denominan "pits", pues almacenan información de calidad sonora. Si se deseara explicar de la manera más simple lo que contiene un reproductor de discos compactos, este contiene dos circuitos: un circuito de mecánica de transporte, que contiene la bandeja que recibe al disco compacto, así como el cabezal óptico capaz de leer dichos "pits". Esta información leída de los "pits" es recibida por el otro circuito denominado DAC (Convertidor D / A: Digital a analógico).

Características técnicas: Frecuencia de muestreo: 44.1 KHz, 16 bits de cuantización, Rango dinámico entre 80dB y 110 dB.

Ahora bien esto supone un desarrollo tecnológico por brindar la más alta calidad en lo que a reproducción se refiere. Las empresas más exitosas que participan en este desarrollo son SONY, SONY-ES (para equipos de calidad profesional), PIONEER, NAKAMICHI, DENON, TECHNICS, en lo que a japoneses se refiere. PHILIPS y KENWOOD por Holanda e Inglaterra respectivamente. KRELL, THETA DIGITAL, MARK LEVINSON, PARASOUND, THRESHOLD, en lo que a norteamericanos se refiere.

Hasta entonces todo hacía suponer que la cinta de audio analógica desaparecería del mercado, así como los reproductores de discos de vinilo, sin embargo, en la década de los '90 a inicios, SONY y PHILIPS decidieron romper sus lazos de unión en lo que a tecnología de audio se refiere y decidieron cada uno por su parte lanzar al mercado el MINI-DISC creado por SONY y el DCC ( DIGITAL COMPACT CASSETE) creado por PHILIPS, creándose entonces una “guerra” de tecnologías por generar la mejor calidad de audio digital.

Las características más importantes del MINI-DISC eran de que se podía reproducir y grabar a través de discos mucho más pequeños (alrededor de 2.5 cm x 2.5 cm) que los CDs hasta un tiempo de grabación de 74 minutos, pero no era compatible con el CD dado el tamaño del MD. Características: Frecuencia de muestreo: 44.1kHz. Tipo de modulación en la grabación: magneto-óptica.

Por otro lado el DCC implantaba el cassette compacto con la finalidad de poder reproducir las cintas de audio analógicas y las nuevas cintas de cassetes compactos.

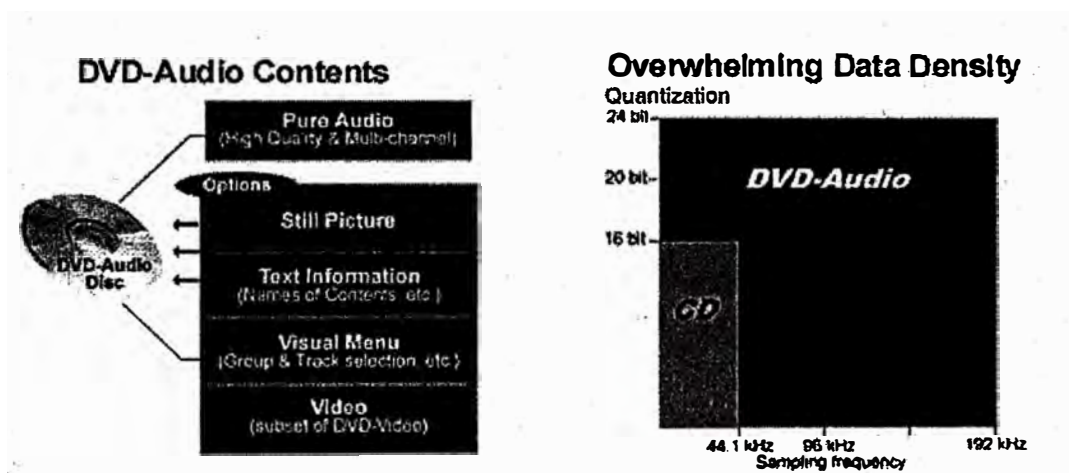


El resultado: pérdida por parte de PHILIPS en el mercado y consolidación de SONY en el Japón y mediocre aceptación en los EE.UU. El detalle radica que en los EE.UU las empresas norteamericanas comenzaban a consolidarse en su mercado con modelos de calidad extraordinaria premiados a nivel mundial inclusive. Poco a poco en el mercado comenzaba a distinguirse lo que significaba poseer un equipo de sonido doméstico y uno de alta fidelidad, el poseer cajas acústicas de mediana calidad, y poseer cajas acústicas de excelente calidad en la reproducción del sonido. En los EE.UU la información teórica de los diseños de los amplificadores de audio digital era de conocimiento general para investigadores y desarrolladores y se creaban zonas de empleo masivo para diseñadores de circuitos electrónicos discretos e integrados utilizando principios del DSP DIGITAL SIGNAL PROCESSING o Procesamiento Digital de Señales que a su vez utiliza fundamentos de Matemáticas Discretas y Transformadas Z.

Mientras el desarrollo del audio digital avanzaba a pasos agigantados, su dual, es decir el video, mantenía un desarrollo paralelo, a través de los LD (LASER DISC) se podía obtener una resolución de video con calidad excepcional, e inclusive de audio, pero la dificultad radicaba en el tamaño de los discos LD demasiado grandes (parecidos a los discos de vinilo).

Dos años más tarde del lanzamiento del MiniDisco y del Cassete Compacto, aparece en el mercado el reproductor de discos de video de la más alta calidad nunca antes vista: el DVD –VIDEO creado por PANASONIC. DVD significa DIGITAL VERSATILE DISC o Disco Digital Versátil pues poseía fidelidad en video y en audio, además de poseer una capacidad de densidad, es decir de almacenamiento, mucho mayor que los LD.

Meses más tarde lanzan al mercado el reproductor de mayor calidad, mayor capacidad de almacenamiento y reproducción multicanal superando al clásico estéreo, el DVD-AUDIO creado por TECHNICS, que se mantiene a la vanguardia el mercado actualmente. Características: Frecuencia de muestreo: 192 KHz, Cuantización de 24 bits, Capacidad: 4.7 GB superando en 7 veces la capacidad de un CD, reproducción en 6 canales, a diferencia del CD que lo realiza en 2 canales. Inicialmente no ofrecía protección de copia indiscriminada inclusive copia por Internet, actualmente ya lo ofrece.



En respuesta a TECHNICS, los antiguos socios, SONY y PHILIPS se unieron en 1999 para lanzar al mercado al reemplazo del disco compacto el SACD (SUPER AUDIO CD) cuyas características principales son las de reproducción de la más alta calidad utilizando un nuevo sistema de modulación la DSD (DIGITAL STREAM DIRECT) y ya no la PCM, además de protección frente a la copia indiscriminada de los temas. A fines del año 2000 la “guerra” entre tecnologías se viene desatando en los EE.UU y en Europa para saber quien se impondrá en el mercado y marque el paso del futuro del audio digital en los siguientes años. Lo cierto es que a pesar que en nuestro país no se conocen detalles específicos al respecto desde la creación del

minidisco hasta el DVD-Audio, y el Super Audio CD, no necesitamos tenerlo cerca de nosotros y tener el privilegio de poder escuchar desde algunos de estos aparatos, para poder investigar un poco acerca de todo este desarrollo.

Debo manifestar, además que los detalles y especificaciones técnicas de rigor serían más entendidas con la asesoría de profesionales capacitados en Ingeniería Electrónica.

Como entendido en la materia, de este último punto, mantengo y reservo una opinión al respecto de que tecnología se impondrá en el mercado en los próximos años. He tenido la oportunidad de poder analizar analítica y empíricamente estas tecnologías a excepción de la última el SACD, aunque es posible emitir opiniones al respecto.

### **1.1 Etapa previa estándar**

El diseño de algún sistema en particular para aplicaciones específicas siempre se encuentra precedida de un sistema que realiza alguna función, pues bien, debe conocerse que el sistema previo al convertidor digital a analógico es un sistema conocido como mecánica de transporte, en donde se sitúan los servomecanismos, el sistema del haz láser, el decodificador, el corrector de errores utilizando la teoría de la codificación digital, del cual tan solo se explican detalles muy particulares que en general deben conocerse. Debe tenerse en consideración que los bloques conformados por RF, PLO y control motor, EFM y decodificador subcódigo, control dirección RAM e interpolador y el corrector de errores se encuentran disponibles en un circuito integrado; sin embargo debe entenderse que en la práctica actual, un codificador / decodificador de errores de datos siempre es el dispositivo que más



cualquier aparato reproductor, sin embargo la práctica nos enseña que no es lo misma.

Ahora bien, es posible encontrar reproductores de soporte digital que mantienen la circuitería por separado en una misma unidad con dos transformadores para el tratamiento analógico y digital de la señal respectivamente, esto ocasiona que la reducción del “Jitter” es notable, sin embargo la relación costo / precio de estos equipos es costosa.

Finalmente para el caso del diseño debe entenderse que el objetivo es poseer un módulo o componente adicional a la mecánica de transporte y como tal se necesitan conocimientos previos de codificación digital, codificación del canal, fenómenos de transmisión interfaces, adaptaciones, entre otras características.

## **1.2 Sistemas de conversión D /A utilizados en los procesadores digitales de señal**

En realidad las partes principales del desarrollo de esta investigación radican en el análisis del filtro de interpolación digital y su correspondiente modelado de ruido.

Las especificaciones se verán posteriormente en capítulos siguientes. A manera de comentario se muestran los diagramas de bloques, en el primer caso, el modelado de ruido de la primera generación en los reproductores y en el segundo caso el modelado de ruido actual.

Diagrama de bloques del filtro de interpolación digital y el modelado de ruido de primera generación

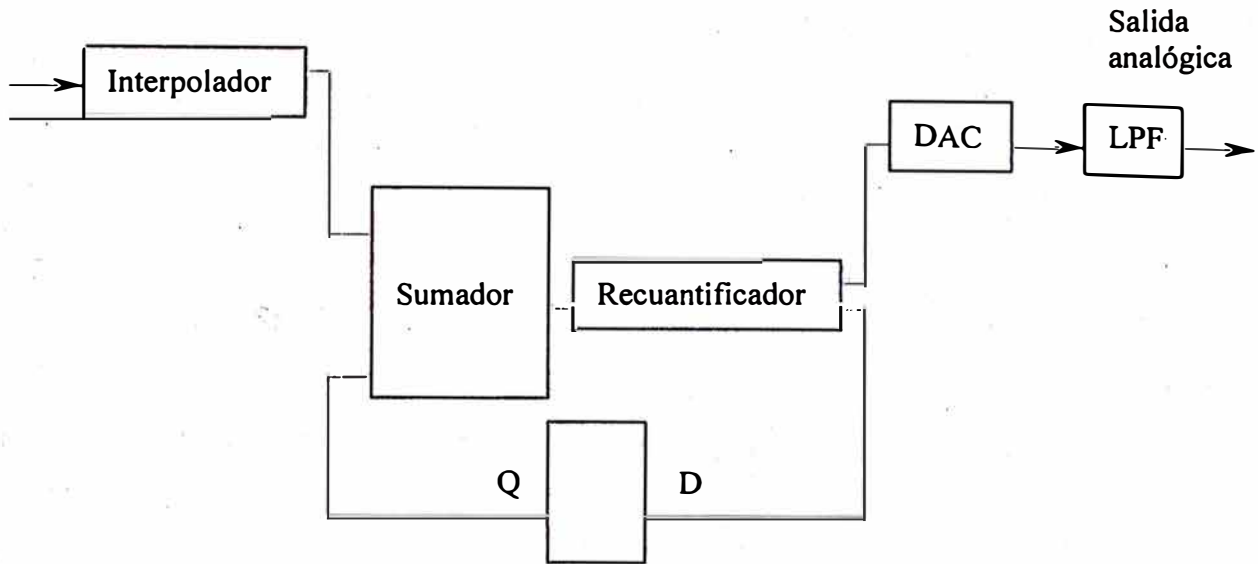
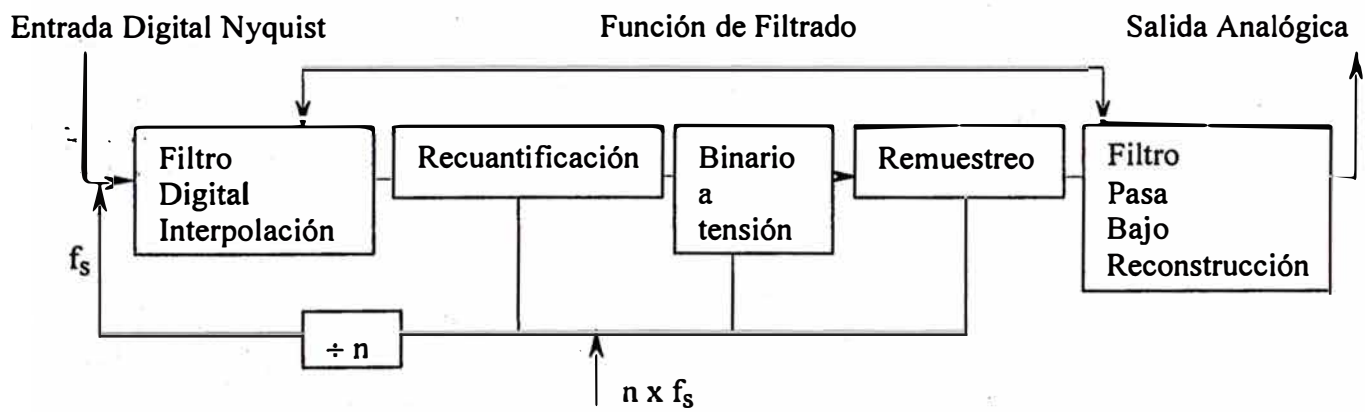


Diagrama de bloques del modelado de ruido actual



## CAPÍTULO II MODELADO DE RUIDO: EL RECUANTIFICADOR DIGITAL

### 2.1 Introducción a la teoría de la codificación y decodificación digital.

En comunicaciones digitales, de transmisión de cadenas de unos y de ceros, problemas como errores en la transmisión y recepción son frecuentes. Las posibilidades de una recepción o transmisión son frecuentes. Las posibilidades de una transmisión correcta pueden mejorarse utilizando matemáticas discretas.

$p$  = probabilidad de transmitir una señal incorrecta.

$1 - p$  = probabilidad de enviar una señal y de recibir la señal enviada (de transmisión correcta).

$$0 \leq p \leq 1.$$

Consideremos la cadena  $c = 10110$  y  $p = 0.05$ . ¿Cuál es la probabilidad de transmitir  $c$  sin errores?

$$(1-p)^5 = (0.95)^5 = 0.77$$

¿Cuál es la probabilidad de transmitir  $c = 10110$  y recibir  $r = 00110$ ?

$$p(1-p)^4 = (0.05)(0.95)^4 = 0.041.$$

Notamos que  $r = c + 10000$ . A la cadena  $e = 10000$  se le llama un patrón de errores.

### Teorema

Sea  $c \in Z_2^n$ . Para la transmisión de  $c$  por un canal simétrico binario con probabilidad  $p$  de transmisión incorrecta, se tiene:

- a) La probabilidad de recibir  $r = c + e$ , en el que “e” es un patrón de errores formado por “k” unos y “(n - k)” ceros, es:  $p^k (1-p)^{n-k}$ .
- b) La probabilidad de incurrir en “k” errores será:  $C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$ .

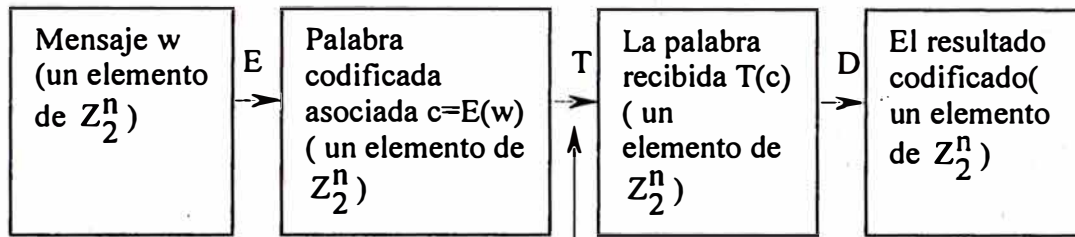
Para  $n > m$  en  $Z_2^+$  consideremos un subconjunto no vacío de  $Z_2^m$  (W: el conjunto de los mensajes) a  $w \in W$  se le añaden señales adicionales para formar la **palabra codificada**  $c$ , donde  $c \in Z_2^n$ . Este proceso se denomina **codificación** y se representa por una función:  $C: W \rightarrow C, w \rightarrow C(w) = c, C(w) \subset Z_2^n$ .

Para mejorar la precisión de la transmisión en un canal simétrico binario, pueden usarse ciertos tipos de esquemas de codificación en que se proporcionan algunas señales adicionales.

Para  $m, n \in Z^+, n > m$ . Consideremos  $\emptyset \neq W \subseteq Z_2^m$ . El conjunto W consta de los mensajes por transmitir. Añadimos a cada  $w \in W$   $n - m$  señales adicionales para formar la palabra codificada  $c$ , donde  $c \in Z_2^n$ . Después de transmitir  $c$ , se transforma en la palabra  $T(c)$ , donde  $T(c) \in Z_2^n$ . Lamentablemente  $T(c)$  no es una función, ya que  $T(c)$  puede ser distinta en diferentes momentos de transmisión (ya que el ruido en el canal cambia con el tiempo).



Puesto que la función  $E$  sólo añade bits a los mensajes (distintos), el proceso de codificación es inyectivo. En el siguiente diagrama de bloques, se aprecia el proceso de codificación y decodificación de un mensaje.



Canal simétrico binario

Después de la recepción de  $T(c)$ , queremos aplicar una función de decodificación  $D: Z_2^n \rightarrow Z_2^m$  para eliminar las señales adicionales  $y$ , esperamos, recibir el mensaje original  $w$ . Lo ideal sería que  $D(T(E))$  fuera la función identidad sobre  $W$ , con  $D: C \rightarrow W$ .

Puesto que no podemos esperar esto, buscamos funciones  $E$  y  $D$  de modo que haya una probabilidad alta de codificar correctamente la palabra recibida  $T(c)$  y volver a tomar el mensaje original  $w$ . Además, queremos que la razón  $m/n$  sea lo más grande posible, de modo que no se añada un número excesivo de señales a  $w$  para obtener la palabra codificada  $c = E(w)$ .

Esta razón  $m/n$  mide la eficiencia de nuestro esquema y se denomina razón de codificación. Por último, las funciones  $E$  y  $D$  deberían ser algo más que resultados teóricos; deben ser prácticos en el sentido de que puedan interpretarse en forma electrónica.

En dicho esquema, las funciones  $E$  y  $D$  son las funciones de codificación y decodificación respectivamente, de un código de bloque  $(n, m)$ .

Algunas aplicaciones:

Matemáticamente podemos establecer el código de bloque  $(m + 1, m)$  para  $m = 8$ .

Sea  $W = Z_2^8$ . Para cualquier  $w = w_1w_2 w_3w_4 w_5w_6 w_7w_8 \in W$ , definimos  $E: Z_2^8 \rightarrow$

$Z_2^9$  como  $E(w) = w_1w_2 w_3w_4 w_5w_6 w_7w_8 w_9$ , donde  $w_9 = \sum_{i=1}^8 w_i$  y la suma se

desarrolla en módulo 2.

Otra aplicación es el código de triple repetición  $(3m, m)$  en el que se puede detectar y corregir errores simples en la transmisión. Si  $m = 8$  y  $W = Z_2^8$ , definimos

$E: Z_2^8 \rightarrow Z_2^{24}$  como  $E(w_1w_2 w_3w_4 w_5w_6 w_7w_8) = w_1w_2 \dots w_8 w_1w_2 \dots w_8 w_1w_2$

$\dots w_8$

La función de decodificación  $D: Z_2^{24} \rightarrow Z_2^8$  se sigue por la regla de la mayoría.

## 2.2 Paridad

En principio se debe detallar la distancia de mensajes. Sea  $x$  un mensaje:  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  y  $x'$  otro mensaje  $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n)$ , se define  $d(x, x')$  equivalente a la cantidad de unos (1) que existen en  $(x \oplus x')$ .

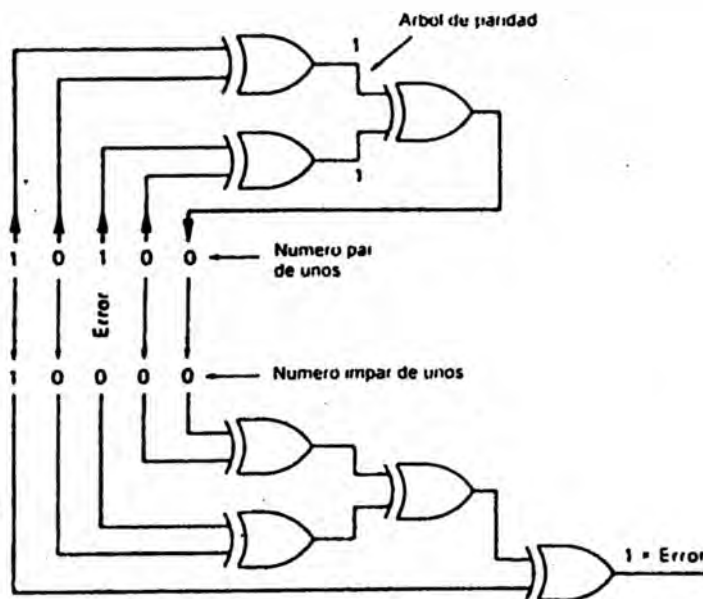
Algunas propiedades que se destacan:  $d(x, x) = 0$  y  $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ .

Sea  $c$  la palabra transmitida,  $c'$  la palabra recibida; si no hay errores en la transmisión  $d(c, c') = 0$ ; en cambio si hay error en la transmisión  $d(c, c') \neq 0$ , de esta manera  $c' = c \oplus e \Rightarrow e \oplus c' = c \oplus e \oplus e = c \Rightarrow c' \oplus e = c$ .

Ahora bien, el bit de paridad es aquel bit que puede ser cero "0", si el número de unos "1" es un número par. También puede ser uno "1" si el número de unos "1" es un número impar.

Es decir si una palabra  $c$  posee " $n$ " bits, la salida posee " $n + 1$ " bits; por lo tanto el sistema por el que ha de pasar la palabra que ha de ser transmitida para luego ser recibida, resulta ser una matriz de " $n$ " filas y " $n + 1$ " columnas. Debe tenerse en consideración que el concepto de la paridad es fundamental en la detección de errores.

En la gráfica que se muestra se trata de proteger una palabra de 4 bits. Si se añade un bit extra a la palabra, que se calcula de tal forma que el número total de unos en la palabra de 5 bits sea par, es posible comprobar esta propiedad en la recepción.



Como se aprecia, un bit erróneo y números impares de errores son detectados.

Números pares de errores no pueden detectarse.

Datos de 4 bits				Bit de paridad	
x	x	x	x	P	
1	0	1	0	0	
1	1	1	0	1	Número par de unos
0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	

El bit extra añadido al mensaje no lleva información propia, dado que ha sido calculado a partir de los otros bits; se le denomina, por tanto, **bit redundante**. La adición del bit redundante le da al mensaje una propiedad especial, es decir, el número de unos es par. Un mensaje provisto de alguna propiedad especial **independiente del contenido propio de los datos** se denomina **palabra de código**.

Toda corrección de errores se basa en la introducción de redundancia en los datos reales para formar palabras de código para la transmisión.

### 2.3 Códigos de Hamming

Sea  $E: W \rightarrow C$  una función de codificación con el conjunto de mensajes  $W \subseteq Z_2^m$  y el conjunto de palabras codificadas  $E(W) = C \subseteq Z_2^n$ , donde  $m < n$ . Para  $k \in Z^+$ , podemos detectar los errores de transmisión de peso  $\leq k$  si y solo si la distancia mínima entre las palabras codificadas es al menos  $k + 1$ .

Se puede construir una función de decodificación  $D: Z_2^n \rightarrow W$  que corrija todos los errores de transmisión de peso  $\leq k$  si y solo si la distancia mínima entre las palabras codificadas es al menos  $2k + 1$ .

## 2.4 Matrices generadoras y verificación de paridad

Para  $n, m \in \mathbb{Z}^+$ , con  $n < m$ , la función de codificación  $E: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m$  está dada por una matriz  $m \times n$   $G$  sobre  $\mathbb{Z}_2$ . Esta matriz  $G$  es la matriz generadora del código y tiene la forma  $[I_m | A]$ , donde  $A$  es una matriz  $m \times (n - m)$ . En este caso,  $E(w) = wG$  para cada mensaje  $w \in \mathbb{Z}_2^m$  y el código  $C = E(\mathbb{Z}_2^m) \subset \mathbb{Z}_2^n$ . Usamos  $G$  para definir una función de codificación.  $E(w) = wG$  es elemento en  $\mathbb{Z}_2^m$  obtenido al multiplicar  $w$ , considerando como un vector fila tridimensional, por la matriz  $G$  de su derecha.  $G$  se denomina **matriz generadora o Matriz de generación de paridad**.

La **matriz de verificación de paridad** asociada  $H$  es una matriz  $(n - m) \times n$  de la forma  $[A^{tr} | I_{n - m}]$ . También se puede usar esta matriz para definir la función de codificación  $E$ , puesto que si  $w = w_1 w_2 \dots w_m \in \mathbb{Z}_2^m$ , entonces  $E(w) = w_1 w_2 \dots w_m w_{m+1} \dots w_n$  donde podemos determinar a  $w_{m+1} \dots w_n$  del conjunto de  $n - m$  ecuaciones (de verificación de paridad) que surgen de  $H \cdot (E(w))^{tr} = 0$ , el vector columna de  $m - n$  ceros.

Esta única matriz de verificación de paridad  $H$  también proporciona un esquema de decodificación que corrige los errores simples de transmisión si:

$H$  no contiene una columna de ceros. ( Si la  $i$ -ésima columna de  $H$  tuviera solamente ceros y  $H \cdot r^{tr} = 0$ , conocido como el **síndrome de  $r$** , para una palabra recibida  $r$ , no podríamos decir si  $r$  era una palabra codificada o una palabra recibida

cuya  $i$  - ésima componente fue transmitida en forma incorrecta. No queremos comparar  $r$  con todas las palabras codificadas si  $C$  es grande.)

Ningún par de columnas de  $H$  son iguales. (Si la  $i$  - ésima y la  $j$  - ésima columnas de  $H$  son iguales y  $H \cdot r^{\text{tr}}$  es igual a esta columna repetida, no podríamos decidir cual componente de  $r$  debemos cambiar. Cuando  $H$  satisface estas dos condiciones, obtenemos el siguiente algoritmo de decodificación. Para cualquier  $r \in \mathbb{Z}_2^n$ , si  $T(c) = r$ , entonces:

Si  $H \cdot r^{\text{tr}} = 0$ , pensaremos que la transmisión fue correcta y que  $r$  es la palabra codificada que fue transmitida. El mensaje decodificado consta entonces de las primeras " $n$ " componentes de " $r$ ".

Si  $H \cdot r^{\text{tr}}$  es igual a la  $i$  - ésima componente de  $H$ , pensamos que hubo un error simple en la transmisión y cambiamos la  $i$  - ésima componente de  $r$  para obtener la palabra codificada  $c$ . En este caso, las primeras  $m$  componentes de  $c$  producen el mensaje original.

Si no ocurre ninguno de los dos casos anteriores, pensamos que hubo más de un error de transmisión y que no podemos dar una forma confiable de decodificación en esta situación. Finalmente una matriz de verificación de paridad  $H = [B \mid I_{n-m}]$  y se usa según lo descrito anteriormente para definir la función  $E$ , entonces se obtiene el mismo conjunto de palabras codificadas generado por la única matriz generadora asociada  $G = [I_m \mid B]$ .

## 2.5 Matrices de Hamming

La matriz de verificación de paridad  $H$  es útil para corregir errores simples de una transmisión cuando  $H$  no tiene una columna de ceros y cuando no hay os columnas de  $H$  que sean iguales. Si se tienen “ $r$ ” ecuaciones de verificación de paridad, entonces la matriz de verificación de paridad  $H$  puede tener hasta  $2^r - 1$  columnas y servir para corregir los errores simples. En estas circunstancias,  $H = [B \mid I_r]$  donde  $B$  es una matriz  $r \times (2^r - 1 - r)$  y  $G = [I_m \mid B^{tr}]$ , con  $m = 2^r - 1 - r$ . La matriz de verificación de paridad  $H$  asociada con un código de grupo  $(2^r - 1, 2^r - 1 - r)$  es una matriz de Hamming y el código se conoce como un código de Hamming.

## 2.6 Capacidad de un código

La capacidad de un código se va a medir en función a la distancia del código “ $d$ ”. Un código va a detectar “ $d-1$ ” bits y va a corregir  $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$  errores

## 2.7 Códigos cíclicos

Sea  $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$  una palabra del código; si hacemos una rotación  $(y_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  también será palabra del código  $(y_{n-1}, y_n, y_1, \dots, y_{n-2})$ , el polinomio asociado es  $p(x) = y_1 + y_2 x + y_3 x^2 + \dots + y_n x^{n-1}$

Un polinomio cíclico  $p(x)$  se puede generar mediante el polinomio de datos  $d(x)$  de grado “ $k-1$ ” y un polinomio generador  $g(x)$  de grado “ $n-k$ ”.

$p(x) = g(x) \cdot d(x)$ . El polinomio generador  $p(x)$  de grado  $n - k = r$ , debe ser un factor de  $x^n + 1$  y se determinarán los coeficientes.

## 2.8 Códigos cíclicos sistemáticos

En un código sistemático los primeros dígitos son de datos y los últimos son los dígitos de comprobación de paridad. En un código sistemático se cumple  $p(x) = x^{n-k}d(x) + r(x)$ , en donde  $r(x)$  es el residuo de la división  $x^{n-k}d(x) / g(x)$

## 2.9 Decodificación

Todo polinomio de código  $c(x)$  válido, es múltiplo de  $g(x)$ . Si ocurre error en la transmisión el polinomio recibido no será múltiplo de  $g(x)$  y existirá un residuo.

$r(x) = c(x) + e(x)$ . Al residuo del cociente  $e(x) / g(x)$  conocido como  $s(x)$  se le denomina **polinomio síndrome**.

Veamos la siguiente aplicación.

Un código posee la siguiente matriz de verificación de paridad

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces es posible hallar la matriz de generación}$$

de paridad  $G = [I | A]$ , pues  $H = [A^t | I]$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ de esta manera } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para la codificación:  $Y = XG$ , sea  $X = 1010$  la palabra de entrada. De esta manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Para la decodificación:  $s = Y' H^t$ .  $H^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $s = 110$

$Y' = 1010111$ ;  $E = 0100000 \Rightarrow Y = 1110111$ , de donde 1110 constituyen los datos, mientras que 111 representa la redundancia.

Por último la capacidad del código, de la matriz  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,

observamos que existen en cantidad de distancias 3, 3, 2, 4 desde la primera a la última fila.

Por lo tanto  $d = 2$ , así existen  $2 - 1 = 1$  error detectará y corregirá  $(2 - 1)/2 = 0$  errores corregirá.

Determinemos de un código cíclico (8, 4), el polinomio generador:

$n = 8$ ,  $k = 4$ ;  $g(x)$  posee grado  $n - k = 8 - 4 = 4$ ,  $g(x) = (x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

Codificando en forma no sistemática 1110.

Veamos  $d(1110) \Rightarrow d(x) = x^3 + x^2 + x$ ,  $p(x) = d(x) \cdot g(x) = (x^3 + x^2 + x)(x^4 + 1) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ , de esta manera  $Y = 11101110$

Codificando en forma sistemática 1110.

$p(x) = x^{n-k} d(x) + r(x)$ .  $x^{n-k} = x^4$ . Por otro lado  $d(x) = x^3 + x^2 + x \Rightarrow x^4 \cdot d(x) = x^7 + x^6 + x^5$ . También  $g(x) = x^4 + 1$ . Calculando el resto  $r(x) = x^3 + x^2 + x$ . Así  $p(x) = x^7 +$

$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ . Luego  $Y = 1110110$ . Debe tenerse en consideración que  $x^8 + 1$  dividido por  $x + 1$  obtiene como cociente  $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ . Debe tenerse en cuenta también que  $x^n = 1$ , así  $x^{n+1} = x$ .

## 2.10 Referencias al nivel de la electrónica.

Los datos pueden grabarse en muchos medios diferentes y pueden enviarse mediante muchas formas de transmisión. El término genérico del camino por el que la información es enviada se denomina canal.

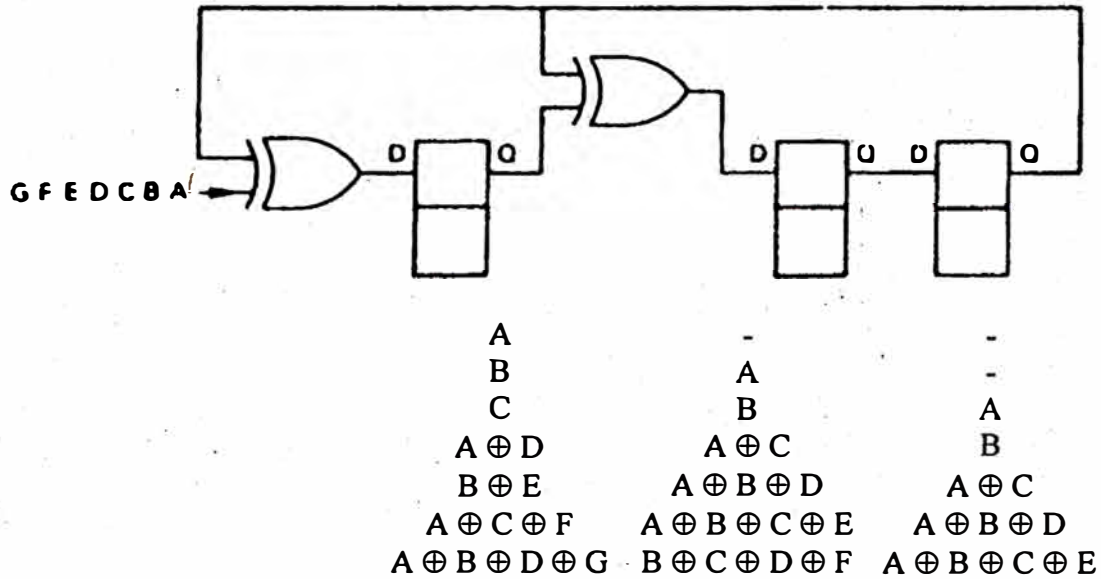
La modulación PCM tiene dentro de sus virtudes la calidad de una forma de onda puede mantenerse independiente del canal.

La mayoría de los canales se caracterizan porque se produce una pérdida de la señal que se incrementa con la frecuencia. La etapa en la que ocurre la recuperación de datos en el receptor o en el circuito de reproducción se conoce como separador de datos, es similar al convertidor analógico a digital. En la práctica se necesita un codificador de canal previo a la etapa de grabación y un decodificador digital después de la etapa de reproducción.

En realidad la razón por la cual se detallan y examinan los criterios de la codificación y decodificación digital reside en el hecho de conocer la etapa previa que corresponde a la conversión digital analógica. En audio es importante saber que un error en los datos sino puede corregirse, entonces se puede ocultar.

### 2.11 Introducción a los códigos Reed – Solomon.

El circuito que se muestra a continuación es un tipo de registro de desplazamiento, pero con una configuración de realimentación particular que se le conoce como anillo trenzado. A través de la compuerta XOR ingresan en serie los siete bits de mensaje A – G. El resultado final es el que se registra en los tres latches:



En realidad el resultado final es una matriz de verificación de paridad

	A	B	C	D	E	F	G
LSB	X	X		X			X
		X	X	X		X	
MSB	X	X	X		X		

Esencialmente, el circuito realiza tres comprobaciones de paridad a lo largo del mensaje, dejando el resultado de cada una en las tres etapas del registro. Se han utilizado estas expresiones para representar una matriz de verificación. El significado de las tres etapas es como sigue: los bits A, B, C y D son cuatro bits de datos, y los

bits E, F y G son redundantes. Cuando se calcula la redundancia, se elige el bit E de modo que haya un número par de unos en los bits A, B, C y E; se escoge el bit F de forma que ocurra lo mismo con los bits B, C, D y F y algo similar ocurre con el bit G. De este modo los cuatro bits de datos y los tres bits de verificación forman una palabra de código de 7 bits. Si no hay ningún error en la palabra de código, cuando se introduce en el circuito mostrado, el resultado de cada una de las tres verificaciones de paridad será cero y se borrará cada etapa del registro de desplazamiento.

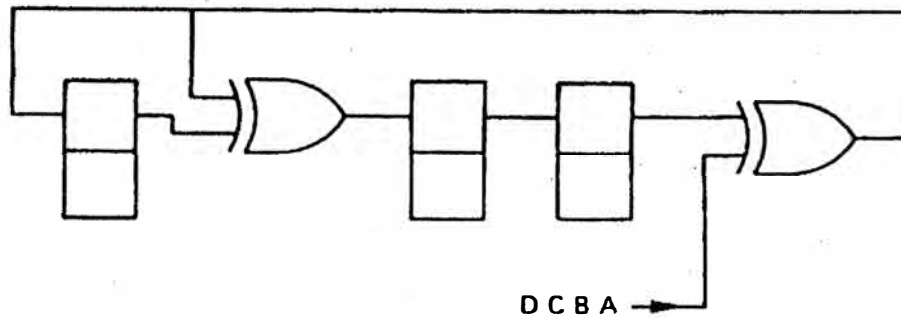
Dado que el registro tiene 8 estados posibles, y uno de ellos es la condición libre de error, quedan entonces siete estados restantes; de aquí viene el término de palabra de código de 7 bits. El circuito en realidad divide la palabra de código que es dividida por 1011 o equivalentemente por el polinomio  $x^3 + x + 1$ , es decir para bases distintas de dos o simplemente utilizando aritmética fundamental.

$$x^3 + x + 1 = 1011$$

Si una palabra de código tiene que dar cero cuando es dividida, se deduce que los datos pueden ser convertidos en una palabra de código sumando el resto cuando los datos sean divididos.

Hablando de forma genérica, el resto tendría que ser restado, pero en módulo 2 no hay distinción. En el esquema anterior los cuatro bits de datos llevan tres ceros situados a la derecha, para igualar la longitud de la palabra con la de la palabra de código, y esta palabra se divide entonces por el polinomio para calcular el resto. El resto se suma a los datos ampliados con ceros para formar la palabra de código.

Puede utilizarse el circuito mostrado como la premultiplicación de los datos por  $x^3$  antes de la división.



Los códigos CRC son de gran importancia para detectar errores, y se han estandarizado varios para poder utilizarlos en comunicaciones digitales. Los más comunes son:

$$x^{16} + x^{15} + x^2 + 1 \text{ (CRC-16)}$$

$$x^{16} + x^{12} + x^5 + 1 \text{ (CRC-CCITT)}$$

Característica de este tipo de aplicaciones es el integrado Fairchild 9401.

Los códigos perforados se refieren exclusivamente a acortar la longitud de la palabra de código.

En la muestra que se detalla a continuación, en un código perforado, solo se utiliza el extremo final de la palabra de código, y los datos y la redundancia son precedidos de una cadena de ceros. Es sencilla la implementación de un código perforado.

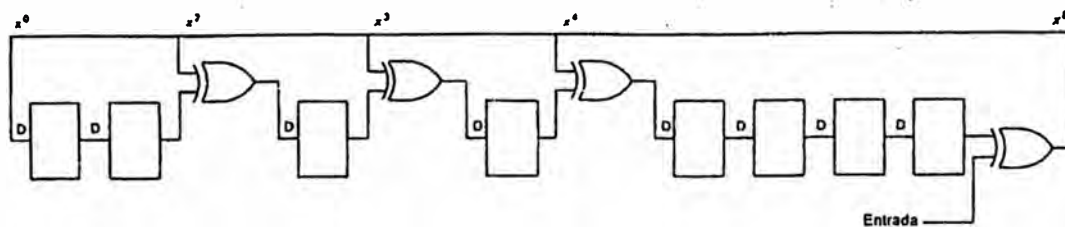
Si un generador CRC comienza con el registro puesta a cero y se introducen ceros en serie, no variará su estado. Por tanto no es necesario suministrar los ceros; el proceso de codificación puede comenzar con el primer bit de datos. De igual modo no es necesario suministrar los ceros iniciales durante la reproducción. La única precaución necesaria es que, si un síndrome calcula la posición de un error, éste provendrá del comienzo de la palabra de código y no del comienzo de los datos. El hecho de utilizarlo en detección no tiene consecuencias.

**Máxima longitud posible de palabra de código**

Ceros iniciales	Datos enviados realmente	Redundancia
Ni se graban ni se transmiten	Código "perforado" menor que el máximo	
La localización del error siempre se calcula con relación al código de máxima longitud		

Finalmente el CRC en el interfaz AES/EBU en el que se generan premultiplicando los datos por  $x^8$  y dividiendo por  $x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ . el proceso puede realizarse con una entrada serie mediante el circuito mostrado. La premultiplicación se consigue conectando la entrada en el extremo más significativo del sistema. Si la salida de la puerta XOR de la derecha es 1, entonces se realimenta un 1 en todas las potencias mostradas y se lleva a cabo el proceso polinómico requerido.

Al final de los 23 bytes de datos, el CRCC se encontrará en los 8 latches. Al final de un mensaje de 24 bytes libre de errores, los latches contendrán solo ceros.



## 2.12 Los códigos Reed – Solomon (R-S)

Los códigos Reed – Solomon (Irving Reed y Gustave Solomon) son inherentemente correctores de ráfagas ya que operan sobre símbolos multibit en lugar de hacerlo sobre bits individuales. Los códigos R-S tienen además un uso extremadamente flexible. Un código puede utilizarse tanto para detectar como para corregir errores y es posible elegir el número de ráfagas que pueden corregirse en la etapa de diseño mediante la cantidad de redundancia. Una ventaja más de los códigos

R-S es que pueden emplearse junto con un mecanismo individual de detección de errores, en cuyo caso lleva a cabo el proceso e corrección mediante borrado únicamente.

Los códigos R-S funcionan en el límite teórico de la eficiencia de corrección. En otras palabras no es posible encontrar otro código más eficaz. Si analizamos el sistema CRC descrita anteriormente, el efecto del error es detectado asegurándonos que la palabra de código pueda ser dividida por un polinomio. La palabra de código CRC se formó añadiendo un símbolo redundante a los datos. En los códigos R-S es posible aislar varios errores asegurándonos que la palabra de código se divida por un número determinado de polinomios. En el caso de que la palabra de código pueda dividirse por dos polinomios, debe incorporar dos símbolos redundantes. Este es el caso mínimo de un código R-S. Al recibir un mensaje codificado en R-S, se producirán dos síndromes tras la división. En el caso que no haya errores ambos serán cero. Si ambos no son cero se habrá producido un error. El efecto de un error consiste en añadir un polinomio erróneo al polinomio del mensaje. El número de términos en el polinomio erróneo es el mismo que en el número de errores en la palabra de código. La palabra de código se divide por cero y los síndromes se constituyen en una función del error únicamente. Existen dos síndromes y dos ecuaciones. Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneamente, es posible despejar dos incógnitas. Una de ellas es la posición del error, conocido como localizador, y la otra es el modelo de bits de error, conocido como corrector. Como el localizador tiene el mismo tamaño que el símbolo de código, la longitud de la palabra de código está determinado por el tamaño del símbolo. Se suele emplear un símbolo de un tamaño de 8 bits debido a que se ajusta convenientemente tanto a las muestras de

audio de 16 bits como a los ordenadores orientados por bytes. Un síndrome de 8 bits tiene como resultado un localizador con la misma longitud de palabra. Ocho bits tienen 256 combinaciones, pero una de ellas constituye la condición libre de error, por lo que el localizador puede especificar uno de los 255 símbolos únicamente. Dado que cada símbolo contiene 8 bits, la palabra de código tendrá una longitud de  $255 \times 8 = 2040$  bits. Si tenemos una palabra de código de siete símbolos, cinco símbolos de 3 bits cada uno, A-E son los datos, siendo P y Q los dos símbolos redundantes. En esta muestra se logra obtener el localizado y corregido de un símbolo erróneo.

Siete símbolos = palabra de código							
1	1	0	1	1	1	1	3 símbolos de 3 bits
0	0	1	0	1	0	0	
1	0	0	0	0	1	0	
Cinco símbolos de datos = 15 bits. A, B, C, D, E				Dos símbolos de redundancia P y Q			

Es decir como los símbolos son de tres bits solamente pueden haber ocho valores de síndromes posibles. Uno de ellos es todo cero el caso de libre de errores, por lo que solo es posible apuntar a siete errores, entonces es más conocido el término la longitud de palabra de código de siete símbolos. Dos de éstos redundantes, quedando cinco símbolos de datos.

Sin embargo no importa el número de bits del símbolo que sean erróneos. Los dos símbolos de verificación son las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus E \oplus P \oplus Q = 0$$

$$a^7 A \oplus a^6 B \oplus a^5 C \oplus a^4 D \oplus a^3 E \oplus a^2 P \oplus aQ = 0. \text{ Donde "a" es una constante. Los}$$

datos originales A-E seguidos de la redundancia P y Q pasan a través del canal.



El receptor realiza dos comprobaciones del mensaje para ver si se trata de una palabra de código. Esto se realiza calculando los síndromes mediante las siguientes expresiones, donde el símbolo de primo (') implica el símbolo recibido que no es necesariamente correcto:

$$S_0 = A' \oplus B' \oplus C' \oplus D' \oplus E' \oplus P' \oplus Q'$$

En realidad se trata de una sencilla verificación de paridad

$$S_1 = a^7 A' \oplus a^6 B' \oplus a^5 C' \oplus a^4 D' \oplus a^3 E' \oplus a^2 P' \oplus a Q' = 0. \text{ Si no se obtienen dos}$$

síndromes de todo cero, se habrá producido un error. La información contenida en los síndromes se utiliza para corregir el error. Supongamos que  $D'$  se ha deteriorado antes de pasar al caso general. Puede considerarse  $D'$  el resultado de añadir un error con valor  $E$  al valor original  $D$ , de forma que:

$$D' = D \oplus E$$

Dado que:  $A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus E \oplus P \oplus Q = 0$ , entonces:  $A \oplus B \oplus C \oplus (D \oplus E) \oplus P \oplus Q = E = S_0$ , puesto que:  $D' = D \oplus E$ , entonces  $D = D' \oplus E = D' \oplus S_0$

Por tanto el valor del corrector se conoce inmediatamente ya que es igual al síndrome de paridad  $S_0$ . El símbolo de datos corregido se obtiene con solo añadir  $S_0$  al símbolo incorrecto.

Sin embargo en esta etapa el símbolo deteriorado no ha sido aún identificado, pero es igualmente sencillo. Dado que:  $a^7 A \oplus a^6 B \oplus a^5 C \oplus a^4 D \oplus a^3 E \oplus a^2 P \oplus a Q =$

$$0, \text{ entonces } a^7 A \oplus a^6 B \oplus a^5 C \oplus a^4 (D \oplus E) \oplus a^3 E \oplus a^2 P \oplus a Q = a^4 E = S_1.$$

Por tanto el síndrome  $S_1$  es el patrón de bits de error  $E$ , pero ha sido elevado a una potencia de "a" que es una función de la posición del símbolo de error en el bloque. Si la posición del error se encuentra en el símbolo "k", entonces "k" es el valor localizador y  $S_0 \times a^k = S_1$ . El valor de "k" puede hallarse multiplicando  $S_0$  por varias potencias de "a" hasta que el producto sea igual a  $S_1$ . Luego la potencia de "a" necesaria es igual a "k". La utilización de potencias descendientes de "a" en el cálculo de la palabra de código resulta ahora evidente, ya que el error se multiplica entonces por una potencia diferente de "a" dependiente de su posición. A  $S_1$  se le conoce como localizador puesto que da la posición del error.

## CAPÍTULO III CAMPO DE GALOIS

### 3.1 Referencia al nivel de las matemáticas discretas.

Basados en la teoría de las matemáticas discretas con énfasis en codificación digital, los campos están basados en anillos especiales que surgen en los sistemas de números racionales, reales y complejos. La definición dice que un **anillo** conmutativo con 1  $(A, +, \cdot)$ , tal que  $(A - \{0\}, \cdot)$  es un **grupo**, se dirá un campo.

Algunos ejemplos de campos son  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , también lo son  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ . Primeramente se definen los conceptos de grupos y anillos.

En el caso de grupos: Sea  $G$  un conjunto no vacío y

$$: G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow * (x, y) = x * y$$

si se verifica:

$$g1: (x * y) * z = x * (y * z). \text{ Asociativa}$$

$$g2: \exists e \in G / x * e = x = e * x. \text{ Existencia del elemento neutro}$$

$$g3: \text{ Para cada } x \in G, \exists y \in G / x * y = e = y * x. \text{ Existencia del elemento inverso}$$

(elemento  $y$  se denota por  $x^{-1}$ )  $\Rightarrow$  el par  $(G, *)$  se denomina **grupo**.

Ejemplos de grupos:  $(\mathbb{Z}, +)$ ;  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ ;  $(\mathbb{Z}_2, +)$ .  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ .

En el caso de los anillos: Sea  $A$  un conjunto no vacío con 2 operaciones “+” y “.” tal que satisface:

a1:  $(A, +)$  es un grupo conmutativo

a2:  $a.(b.c)=(a.b).c, \forall a, b, c \in A$

a3:  $a(b+c)=a.b + a.c; (b+c).a=b.a + c.a, \forall a, b, c \in A$  se denomina **anillo**.

Todo anillo se denotará por  $(A, +, \cdot)$ .

Además para cualquier primo "p",  $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$  es un **campo finito**. Por otro lado, dado un anillo  $(R, +, \cdot)$ , una expresión de la forma  $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$ , donde  $a_i \in R, 0 \leq i \leq n$ , es un polinomio en la indeterminada  $x$  (símbolo que no es elemento del anillo) con coeficientes en  $R$ .

El propósito de resolver estas ecuaciones polinomiales residen en el hecho de investigar la teoría de los campos. En la teoría de las matemáticas discretas, es posible utilizar la teoría de los conjuntos para establecer clases de equivalencia, así por ejemplo en  $\mathbb{Z}_5$ , es posible reconocer que  $[2] = [3]$ , es decir que las clases de equivalencia en 3 son las mismas que 2 (dado que  $3 + 2$  es 5), pero también que  $[-2] = [3]$ , pues  $3 - -2 = 5$ .

En el caso de polinomios, considerando en el anillo  $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$  los polinomios  $f(x) = 5x^2 + 3x - 2x^0$  y  $g(x) = 5x^2 + 3x + 4x^0$  son equivalentes ya que  $[4] = [-2]$  en  $\mathbb{Z}_6$ .

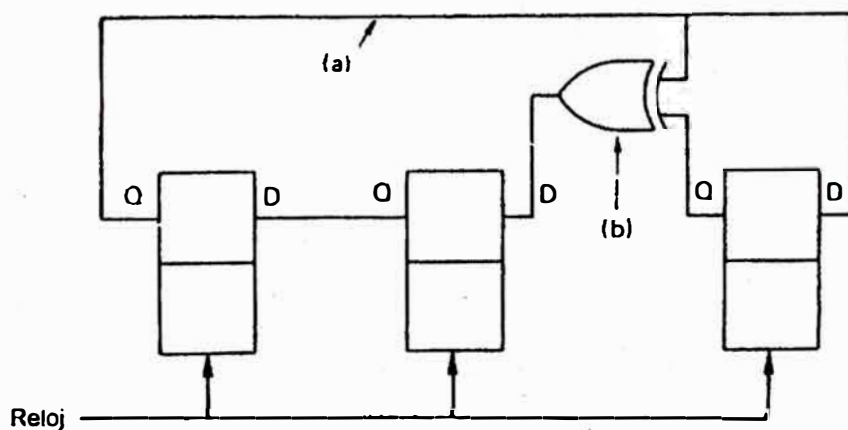
Continuando con la teoría, se denomina "orden" al número de elementos de un álgebra booleana finita (Si  $S$  es un conjunto finito entonces  $B = P(S)$  es un álgebra booleana, donde para  $A, B \subseteq U$ , se tiene  $A + B = A \cup B$ ,  $AB = A \cap B$ ,  $A^c$  es el complemento de  $A$  en  $S$ , y  $\emptyset$  es el elemento cero y  $S$  es el elemento unidad), que en

la teoría elemental de conjuntos representa el número de elementos del conjunto potencia, que es potencia de 2.

De esta manera cualquier campo finito "K" tiene orden  $p^t$ , donde "p" es primo y " $t$ "  $\in \mathbb{Z}^+$ . Si bien es cierto que un par de campos del mismo orden son isomorfos según la teoría de las matemáticas discretas ( es decir en el caso de los anillos  $(R, +, \cdot)$  y  $(S, \oplus, \otimes)$  si la función  $f: R \rightarrow S$  talque  $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$  y  $f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$ , es inyectiva y sobreyectiva) estos campos son la referencia de Evariste Galois (1811-1832) acerca de la falta de existencia de fórmulas que permitan poder resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor que 4.

### 3.2 Referencias al nivel de la electrónica.

En la figura se muestra un circuito compuesto de tres latches (flip flop) de tipo D, que son activados por reloj simultáneamente. Se encuentran conectados en serie para formar un registro de desplazamiento.



Los resultados en los latches, son los que se muestran:

1	0	1	=5
0	0	1	=1
0	1	0	=2
1	0	0	=4
0	1	1	=3
1	1	0	=6
1	1	1	=7

Al respecto del circuito que se muestra, en (a) se ha realizado una conexión de realimentación desde la salida a la entrada y el resultado es un contador en anillo en el que los bits contenidos circulan en forma interminable. En (b) se ha añadido una compuerta XOR de forma que la salida se realimenta a más de una etapa. El resultado se conoce como contador en anillo trenzado y presenta ciertas propiedades interesantes. Siempre que el circuito es activado por reloj, el bit de la izquierda se desplaza al latch de la derecha, el bit central se desplaza al latch de la izquierda y el latch central se convierte en la XOR de los dos latches exteriores. La figura muestra que, cualquiera sea la condición de los 3 bits en los latches, siempre se volverá a ese mismo estado transcurridos siete impulsos de reloj, excepto si se utiliza el cero. Los estados de los latches forman un anillo sin fin de números no secuenciales denominados **campo Galois**.

Los estados del circuito forman una secuencia de longitud máxima debido a que hay tantos estados como permite la longitud de la palabra.

Dado que los estados de la secuencia presentan muchas de las características de los números aleatorios, y sin embargo son repetibles, el resultado puede denominarse

también como secuencia pseudo aleatoria. Puesto que el caso de todo cero no está permitido, la longitud de una secuencia de longitud máxima generada por un registro de “m” bits no puede exceder  $2^m - 1$  estados. Sin embargo, el campo Galois incluye el término cero. El campo Galois es útil en procesos que se requieran de dither digital y los códigos de canal aleatorizados.

El circuito entonces puede considerarse como un contador y los cuatro puntos mostrados representan, por tanto, diferentes potencias de dos a partir del MSB de la izquierda hasta el LSB de la derecha. La conexión de realimentación del MSB con las demás etapas significa que siempre que el MSB sea uno, otras dos potencias se verán forzadas a ser uno, de forma que se genere el código 1011.

Puede describirse cada etapa del circuito mediante combinaciones de potencias de  $x$ , de forma que:  $x^2 = 100$ , así  $x = 010$ , de esta manera  $x^2 + x = 110$ . El hecho de que 3 bits tengan el mismo estado debido a que se encuentran conectados entre sí se representa con la ecuación módulo 2:  $x^2 + x + 1 = 0$ . Si hacemos  $x = a$ , obtenemos:

$$a^2 + a + 1 = 0.$$

$$\text{Por lo tanto en módulo 2: } a + a = a^2 + a^2 = 0.$$

$$a^3 = a + 1.$$

$$a^4 = a \cdot a^3 = a \cdot (a + 1) = a^2 + a.$$

$$a^5 = a \cdot a^4 = a \cdot (a^2 + a) = a^3 + a^2 = a^2 + a + 1.$$

$$a^6 = a \cdot a^5 = a \cdot (a^2 + a + 1) = a^3 + a^2 + a = a + 1 + a^2 + a = a^2 + 1.$$

$$a^7 = a \cdot a^6 = a \cdot (a^2 + 1) = a^3 + a = a + 1 + a = 1 = 001.$$

De este modo se observa que todo el conjunto de elementos del campo de Galois puede expresarse mediante potencias sucesivas del elemento primitivo. Hay que notar que el circuito en anillo trenzado simplemente eleva "a" a potencias cada vez mayores a medida que es activado por el reloj; por tanto, los cambios multibit aparentemente complejos provocados por una sola señal de reloj de registro son fáciles de calcular utilizando el primitivo correcto y la potencia adecuada.

Los números producidos por el contador en anillo trenzado no son aleatorios; son totalmente previsible si se conoce la ecuación. No obstante las secuencias generadas se asemejan bastante a números aleatorios que, en muchos casos, resultan de gran utilidad. Se denominan por tanto secuencias pseudo aleatorias. La conexión de realimentación se elige de manera tal que la expresión que se genera no se factorice. De no ser así no se podría generar una secuencia de longitud máxima debido a que el circuito podría secuenciarse alrededor de un factor u otro dependiendo de la condición inicial.

La comparación práctica reside en el hecho de utilizar los clásicos engranajes para calcular el número de vueltas que resulta ser proporcional al mínimo común múltiplo del número de dientes de cada engranaje, pues bien si el número de dientes de ambos engranajes tienen un múltiplo común, el número de vueltas es menor del que se obtendría si los números de dientes son relativamente primos entre sí.

Note además que en el caso de multiplicación de un símbolo de dato por alguna potencia de "a", se procedería evitando la multiplicación binaria, más bien es utilizando propiedades de potenciación, sabiendo además que todos los productos deben ser elementos del campo de Galois. Ahora bien suele suceder que las potencias



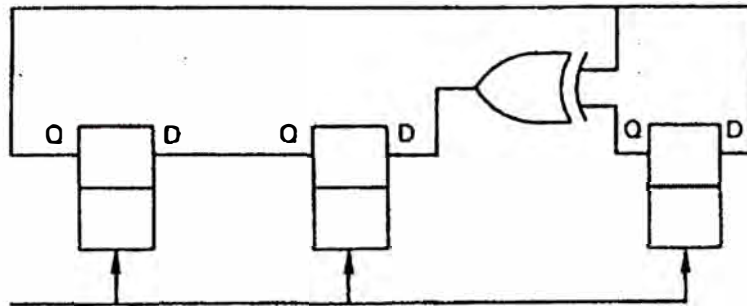
que exceden de siete siguen circulando cíclicamente habiéndose sustraído siete.

Citando dos ejemplos:

$$100 \times a^3 = a^2 \times a^3 = a^5 = 111.$$

$$a^5 \times a^6 = a^{11} = a^4 = 110.$$

En el siguiente circuito se muestran los resultados de los latches, además de la caracterización del elemento primitivo "a":



$$0 \ 1 \ 0 \ 2 = a$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 4 = a^2$$

$$0 \ 1 \ 1 \ 3 = a^3$$

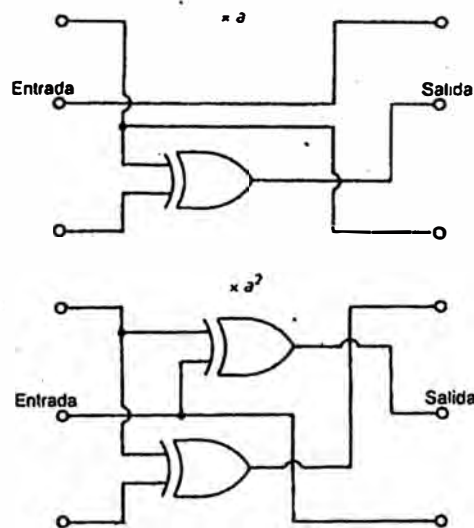
$$1 \ 1 \ 0 \ 6 = a^4$$

$$1 \ 1 \ 1 \ 7 = a^5$$

$$1 \ 0 \ 1 \ 5 = a^6$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 = a^7$$

Los circuitos que se muestran son circuitos multiplicadores de Galois:



### 3.3 Cálculos R – S

Aunque las expresiones anteriores determinan los valores de P y Q son tales que las dos expresiones de síndrome suman cero, no está claro aún cómo calcular P y Q a partir de los datos. Se pueden hallar expresiones para P y Q resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones R – S. Las siguientes expresiones deben utilizarse para calcular P y Q a partir de los datos con el fin de satisfacer las ecuaciones de las palabras de código, y son:

$$P = a^7 A \oplus aB \oplus a^2 C \oplus a^5 D \oplus a^3 E$$

$$Q = a^2 A \oplus a^3 B \oplus a^6 C \oplus a^4 D \oplus aE$$

En esta muestra se detalla el proceso de codificación Reed – Solomon. Se ha empleado el campo de Galois, siendo el elemento primitivo  $a = 010$ .

	A	101	$a^6 A=111$	$a^2 A=010$
	B	100	$aB=011$	$a^3 B=111$
Datos de entrada	C	010	$a^2 C=011$	$a^6 C=001$
	D	100	$a^5 D=001$	$a^4 D=101$
	E	111	$a^3 E=010$	$aE=101$
Símbolos de verificación	P	100	100	100
	Q	100		
	A	101	$a^7 A=101$	
	B	100	$a^6 B=010$	
	C	010	$a^5 C=101$	
	D	100	$a^4 D=101$	
Palabra de código	E	111	$a^3 E=010$	
	P	100	$a^2 P=110$	
	Q	100	$aQ=011$	
		$S_0=000$	$S_1=000$	

Al comienzo del cálculo de P, el símbolo A se multiplica por  $a^6$ , esto se lleva a cabo convirtiendo A en un apotencia de "a". Por un lado de acuerdo al circuito del

campo de Galois  $a^6=101$ , por lo tanto el producto será  $a^{6+6}=a^{12}=a^5=111$ , del mismo modo B se multiplica por a y así sucesivamente, y los productos se suman en módulo 2.

En la siguiente muestra se desarrolla la corrección de errores basados en la palabra de código. El símbolo erróneo está marcado con una línea. Como se ha producido un error, los síndromes  $S_0$  y  $S_1$  no serán cero.

7	A 101	$a^7 A=101$
6	B 100	$a^6 B=010$
5	C 010	$a^5 C=101$
4	D 101	$a^4 D'=011$
3	E 111	$a^3 E=010$
2	P 100	$a^2 P=110$
1	Q 100	$aQ=011$
<hr/>		
	$S_0 = 001$	$S_1 = 110$

El cálculo  $S_1 / S_0 = a^4 / 1$ ;  $k = 4$ .  $D' + S_0 = 101 + 001 = D = 100$

En otro desarrollo:

7	A 101	$a^7 A=101$
6	B 100	$a^6 B=010$

5	C' 110	$a^5 C = 100$
4	D 101	$a^4 D = 101$
3	E 111	$a^3 E = 010$
2	P 100	$a^2 P = 110$
1	Q 100	$aQ = 011$
<hr/>		
	$S_0 = 100$	$S_1 = 001$

El cálculo  $S_1 / S_0 = 1 / a^2 = (1 / a^2) \times (a^5 / a^5) = a^5$ ;  $k = 5$ .  $C' + S_0 = 110 + 100$   
 $= C = 010$ .

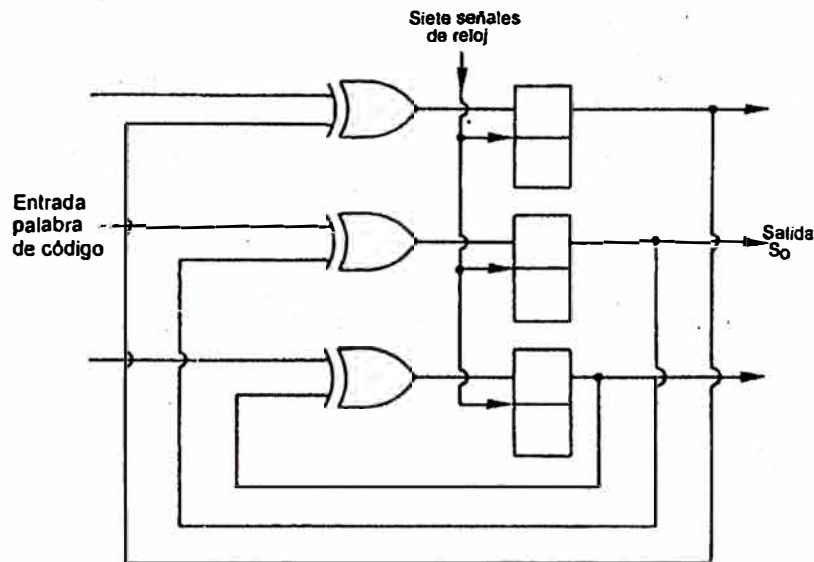
Finalmente:

7	A' 111	$a^7 A = 111$
6	B 100	$a^6 B = 010$
5	C 110	$a^5 C = 101$
4	D 101	$a^4 D = 101$
3	E 111	$a^3 E = 010$
2	P 100	$a^2 P = 110$
1	Q 100	$aQ = 011$
<hr/>		
	$S_0 = 010$	$S_1 = 010$

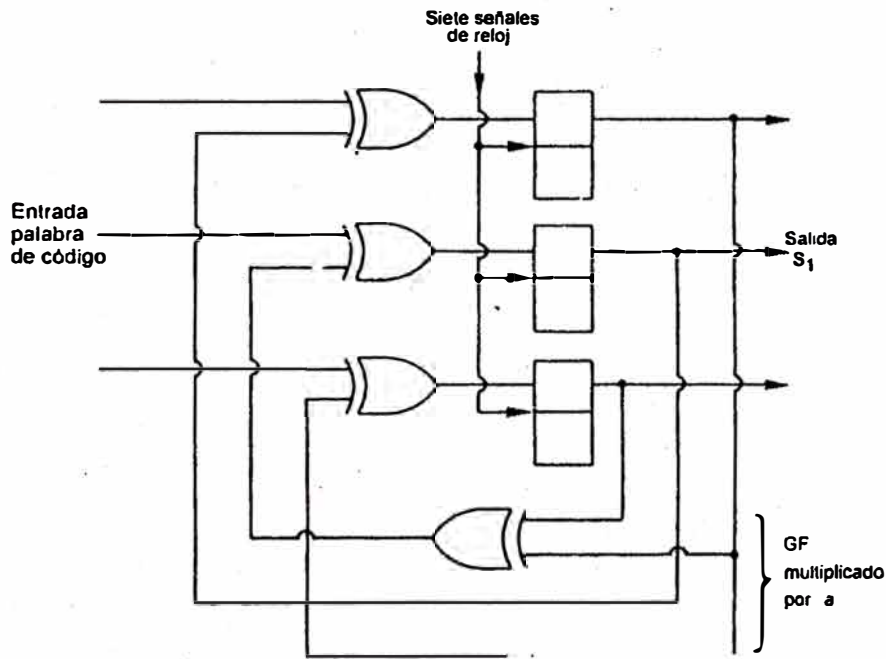
El cálculo  $S_1 / S_0 = a / a = 001 = a^7$ ;  $k = 7$ .  $A' + S_0 = 111 + 010 = A = 101$ .

Los circuitos de la figura muestran los cálculos de los síndromes en el receptor.

El circuito  $S_0$  es un simple verificador de paridad que acumula la suma módulo 2 de todos los símbolos que le son introducidos.



El circuito  $S_1$  es más elaborado, ya que contiene un multiplicador de campo Galois en un bucle de realimentación, de forma que los primeros símbolos introducidos son elevados a potencias mayores que los símbolos introducidos posteriormente ya que han circulado por el multiplicador de campo Galois más veces.



En conclusión estos circuitos para el cálculo paralelo de los síndromes  $S_0$  y  $S_1$ .  $S_0$  es simplemente una verificación de paridad.  $S_1$  tiene una multiplicación GF por “a” en la realimentación, de forma que “A” es multiplicado por  $a^7$ , “B” es multiplicada por  $a^6$ , y así sucesivamente, y se suman todos para obtener  $S_1$ .

### 3.4 Cálculo de polinomios del generador Reed - Solomon

Para una palabra de código Reed Solomon sobre  $GF(2^3)$ , habrá siete símbolos de tres bits. Para la localización y corrección de un símbolo, debe haber dos símbolos redundantes P y Q, dejando A-E para los datos.

Las siguientes expresiones deben ser verdaderas, en las que “a” es el elemento primitivo de  $x^3 \oplus x \oplus 1$ .

$$A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus E \oplus P \oplus Q = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$a^7 A \oplus a^6 B \oplus a^5 C \oplus a^4 D \oplus a^3 E \oplus a^2 P \oplus aQ = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) por “a”:

$$a^6 A \oplus a^5 B \oplus a^4 C \oplus a^3 D \oplus a^2 E \oplus aP \oplus Q = 0 = A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus E \oplus P \oplus Q$$

anulando Q y agrupando los términos:

$$(a^6 \oplus 1)A \oplus (a^5 \oplus 1)B \oplus (a^4 \oplus 1)C \oplus (a^3 \oplus 1)D \oplus (a^2 \oplus 1)E = (a \oplus 1)P.$$

Ahora bien, utilizando las propiedades del campo Galois:  $a^2 A \oplus a^4 B \oplus a^5 C \oplus aD$   
 $\oplus a^6 E = a^3 P$ . De esta manera:  $a^6 A \oplus aB \oplus a^2 C \oplus a^5 D \oplus a^3 E = P$

Por otro lado multiplicando la ecuación (1) por “a<sup>2</sup>” e igualando a la ecuación (2):

$$a^2 A \oplus a^2 B \oplus a^2 C \oplus a^2 D \oplus a^2 E \oplus a^2 P \oplus a^2 Q = 0 = a^7 A \oplus a^6 B \oplus a^5 C \oplus a^4 D \oplus$$

$$a^3 E \oplus a^2 P \oplus aQ. \text{ Anulando entonces los términos } a^2 P \text{ y agrupando los términos:}$$

$$(a^7 \oplus a^2)A \oplus (a^6 \oplus a^2)B \oplus (a^5 \oplus a^2)C \oplus (a^4 \oplus a^2)D \oplus (a^3 \oplus a^2)E = (a^2 \oplus a)Q.$$

De esta manera sumando potencias:

$$a^6 A \oplus B \oplus a^3 C \oplus aD \oplus a^5 E = a^4 Q$$

$$a^2 A \oplus a^3 B \oplus a^2 C \oplus a^4 D \oplus aE = Q$$

La corrección mediante borrado se detalla a continuación. En realidad se han utilizado los dos símbolos redundantes P y Q para localizar y corregir un símbolo de error; en cambio si se conocen las posiciones de los errores mediante otro mecanismo independiente, como el caso de los códigos de producto, no es necesario calcular el localizador. En su lugar, pueden resolverse las ecuaciones simultáneas para dos correctores. En este caso el número de símbolos que pueden corregirse es igual al



número de símbolos redundantes. Se muestra un desarrollo de dos errores, y se sabe que se encuentran en los símbolos C y D.

Dado que  $S_0$  es una simple verificación de paridad, reflejará la suma módulo 2 de los dos errores:  $S_0 = E_C \oplus E_D$ .

Los dos errores habrán sido multiplicados por potencias diferentes en  $S_1$  de forma que  $S_1 = a^2 E_C \oplus a^4 E_D$ . Se pueden resolver estas dos ecuaciones, para hallar  $E_C$  y  $E_D$ , y se obtendrá el valor correcto de los símbolos si se suman estos correctores a los valores erróneos. Sin embargo, es más fácil poner a cero los valores de los símbolos erróneos. De este modo, la naturaleza del error resulta irrelevante y no interfiere en los cálculos. La puesta a cero de los símbolos da origen al término “borrado”. De esta manera, en este caso:  $S_0 = C \oplus D$ .  $S_1 = a^5 C \oplus a^4 D$ .

El hecho de borrar los símbolos erróneos hace que los errores se igualen a los valores de símbolos correctos y éstos puedan hallarse fácilmente. Los detalles de los cálculos se muestran a continuación:

Como consecuencia de los cálculos, si se conoce el lugar donde se encuentran los errores, entonces los síndromes son una función conocida de los errores.

Entonces es mucho más sencillo poner a cero los símbolos incorrectos, esto es, borrarlos.

$$A \quad 101 \quad a^7 A = 101$$

$$B \quad 100 \quad a^6 B = 010$$

$C \oplus E_C$	001	$a^5 (C \oplus E_C) = 111$
$D \oplus E_D$	010	$a^4 (D \oplus E_D) = 111$
E	111	$a^3 E = 010$
P	100	$a^2 P = 110$
Q	100	$aQ = 011$
$S_1$	101	$S_1 = 000$

$$S_0 = E_C \oplus E_D, \quad S_1 = a^5 E_C \oplus a^4 E_D.$$

$$S_1 = a^5 E_C \oplus a^4 E(S_0 \oplus E_C) = a^5 E_C \oplus a^4 S_0 \oplus a^4 E_C$$

$$\therefore E_C = (S_1 \oplus a^4 S_0) / (a^5 \oplus a^4) = 000 \oplus 011 / 001 = 011$$

$$C = (C \oplus E_C) \oplus E_C = 001 \oplus 011 = 010$$

$$S_1 = a^5 (S_0 \oplus E_D) \oplus a^4 E_D = a^5 S_0 \oplus a^5 E_D \oplus a^4 E_D.$$

$$\therefore E_D = (S_1 \oplus a^5 S_0) / (a^5 \oplus a^4) = 000 \oplus 110 / 001 = 110$$

$$D = (D \oplus E_D) \oplus E_D = 010 \oplus 110 = 100$$

Como consecuencia inmediata de lo anterior los síndromes constituyen una función de los símbolos deseados y la corrección es más fácil.

$$A \quad 101 \quad a^7 A = 101$$

$$B \quad 100 \quad a^6 B = 010$$

C	000	$a^5 C = 000$
D	000	$a^4 D = 000$
E	111	$a^3 E = 010$
P	100	$a^2 P = 110$
Q	100	$aQ = 011$
$S_0$	100	$S_1 = 000$

$$S_0 = C \oplus D.$$

$$S_1 = a^5 S_0 \oplus a^5 D \oplus a^4 D = a^5 C \oplus a^4 D$$

$$\therefore D = S_1 \oplus a^5 S_0 = 000 \oplus 100 / 001 = 100$$

$$S_1 = a^5 C \oplus a^4 C \oplus a^4 S_0 = C \oplus a^4 S_0$$

$$\therefore C = S_1 \oplus a^4 S_0 = 000 \oplus 010 = 010$$

Si se pretende corregir mediante borrado un número arbitrario de símbolos erróneos representados por “t”, la palabra de código debe ser divisible por “t” polinomios diferentes. De manera alternativa si los errores deben localizarse y corregirse, se necesitarán “2t” polinomios. Estos pueden adoptar la forma  $(x + a)^n$ , donde n adopta todos los valores para alcanzar “t” o “2t”, “a” es el elemento primitivo. Cuando se han de corregir cuatro símbolos mediante borrado, lo bien se han de localizar y corregir dos símbolos, son necesarios cuatro símbolos redundantes, y el polinomio de la palabra de código debe ser divisible por  $(x + a^0)(x + a^1)(x +$

$a^2)(x + a^3)$ . Cuando se recibe el mensaje, deben calcularse cuatro síndromes, y los cuatro correctores o los dos modelos de error y sus posiciones se determinan resolviendo cuatro ecuaciones simultáneas. Por lo general esto requiere un procedimiento iterativo y, para ello, existen una serie de algoritmos. En el caso de la tecnología de audio digital de formato óptico utilizan códigos R-S de 8 bits y sistema de borrado de forma muy extendida. El polinomio primitivo normalmente utilizado con GF(256) es decir, campo Galois (256) es:  $x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ . La palabra de código tendrá una extensión de 255 bytes, pero normalmente es acortada mediante la perforación. Los campos Galois mayores requieren menos redundancia, pero aumenta el problema del cálculo.

Existen circuitos integrados LSI que realizan la decodificación R-S, y como alternativa a la circuitería delicada existe software para realizar los cálculos R-S.

## **CAPÍTULO IV LA CODIFICACIÓN Y LA RELACIÓN BÁSICA DE CONVERSIÓN**

Un DAC acepta una clave de entrada digital. El código de entrada aparece por lo común en paralelo, es decir, simultáneamente, en un conjunto de líneas paralelas. Sin embargo se puede presentar en serie, como un tren de niveles o impulsos sobre una línea simple. Si se aplica un código dado al DAC, no se podrá saber cuál será su salida a menos que se conozcan dos datos. El significado cuantitativo del código y la relación de conversión que se abarca en el convertidor. Hay muchos tipos de códigos, pero el más popular es el binario, en otras palabras el código se representa en el sistema binario.

En la práctica de convertidores es útil emplear el equivalente fraccionario de los números binarios. En esta representación se divide por  $2^n$ , donde "n" es el número de bits. Considerando el número 1011:  $N = (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) / 2^4 = 11/16$ . Para el caso se muestra la tabla de codificación binaria fraccionaria y sus equivalentes en base 10.

Tabla 1.

Fracción decimal	Fracción binaria	MSB (x 1/2)	Bit 2 (x 1/4)	Bit3 (x 1/8)	Bit4 (x 1/16)
0	0.0000	0	0	0	0
$1/16=2^{-4}$ (LSB)	0.0001	0	0	0	1
$2/16=1/8$	0.0010	0	0	1	0
$3/16=1/8 + 1/16$	0.0011	0	0	1	1
$4/16=1/4$	0.0100	0	1	0	0
$5/16=1/4 + 1/16$	0.0101	0	1	0	1
$6/16=1/4 + 1/8$	0.0110	0	1	1	0
$7/16=1/4 + 1/8 + 1/16$	0.0111	0	1	1	1
$8/16=1/2$ (MSB)	0.1000	1	0	0	0
$9/16=1/2 + 1/16$	0.1001	1	0	0	1
$10/16=1/2 + 1/8$	0.1010	1	0	1	0
$11/16=1/2 + 1/8 + 1/16$	0.1011	1	0	1	1
$12/16=1/2 + 1/4$	0.1100	1	1	0	0
$13/16=1/2 + 1/4 + 1/16$	0.1101	1	1	0	1
$14/16=1/2 + 1/4 + 1/8$	0.1110	1	1	1	0
$15/16=1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16$	0.1111	1	1	1	1

Sin tomar en consideración el número de bits, todos los valores se pueden referir a una “escala completa”, nunca alcanzada del todo, con un valor normalizado de la unidad. De hecho, cada bit tiene un valor constante (en este caso, el MSB siempre es  $1/2$ ), sea cual sea el número de bits.

Ahora bien puesto que esos valores se refieren a la escala completa, se pueden expresar en porcentajes, partes por millón (ppm) o incluso decibeles, dB.

Al interpretar la codificación decimal codificado en binario (BCD) la “palabra” de entrada se divide en grupos de cuatro bits (cuadretes) a partir de la derecha. Se deja que cada cuadrete tenga un valor binario máximo de 1001 (9). El LSB del cuadrete tiene un valor fraccionario de  $1/10$  del peso del cuadrete. El cuadrete del extremo izquierdo tiene un peso de 1 y cada cuadrete a su derecha se sopesa sucesivamente mediante un factor adicional de  $1/10$  como se aprecia en la tabla de datos mostradas

en las líneas siguientes. En el caso del número BCD de 12 bits (3 dígitos),  $M = 001101010111$ , sería  $(3 \times 0.1)$  más  $(5 \times 0.01)$  más  $(7 \times 0.001)$ , es decir, 0.357. El valor fraccionario máximo es de 0.999. En algunas aplicaciones del decimal codificado en binario hay dígitos adicionales “de sobregrama”, que añaden un significado de números enteros. En el caso de  $3 \frac{1}{2}$  dígitos tiene un dígito adicional con un peso de 1.000;  $3 \frac{3}{4}$  dígitos tiene dos dígitos adicionales con un valor máximo de 3.999.

Tabla 2.

Fracción decimal	MSQ ( $\times 1/10$ ) $\times 8 \times 4 \times 2 \times 1$	Segundo cuadro ( $\times 1/100$ ) $\times 8 \times 4 \times 2 \times 1$
0.00=0.00 + 0.00	0000	0000
0.01=0.00 + 0.01	0000	0001
0.02=0.00 + 0.02	0000	0010
0.03=0.00 + 0.03	0000	0011
0.04=0.00 + 0.04	0000	0100
0.05=0.00 + 0.05	0000	0101
0.06=0.00 + 0.06	0000	0110
0.07=0.00 + 0.07	0000	0111
0.08=0.00 + 0.08	0000	1000
0.09=0.00 + 0.09	0000	1001
0.10=0.10 + 0.00	0001	0000
...		
0.99=0.99 + 0.09	1001	1001

La relación de conversión D / A en BCD es  $MV_{FS}$ , en donde M es el valor fraccionario BCD. Además de los bits de magnitud, un convertidor BCD puede aceptar un bit adicional de polaridad de la salida. Los códigos complementarios, tales como el binario complementario, son códigos simples para los que todos los bits se complementan (códigos negativos verdaderos). En otras palabras los “1” y los “0” se intercambian, tal como se detalla en la tabla.

Tabla 3.

Número decimal	Binario natural	Binario complementario	BCD	BCD Complementario
0 BIN DEC	0000	1111	0000	1111
1, 1/16 1/10	0001	1110	0001	1110
2, 2/16 2/10	0010	1101	0010	1101
3, 3/16 3/10	0011	1100	0011	1100
4, 4/16 4/10	0100	1011	00100	11011
5, 5/16 5/10	0101	1010	00101	11010
6, 6/16 6/10	0110	1001	00110	11001
7, 7/16 7/10	0111	1000	00111	11000
8, 8/16 8/10	1000	0111	01000	10111
9, 9/16 9/10	1001	0110	01001	10110
10 10/16 10/10	1010	0101	10000	01111
11 11/16 11/10	1011	0100	10001	01110

Las razones para que los DAC necesiten códigos de entrada complementarios son la disponibilidad de componentes de conmutación de alta precisión, las limitaciones de espacio y un bajo costo de producción (para algunos fabricantes).

Para aplicaciones bipolares, el MSB se convierte en bit de signo y los restantes representan la magnitud. Sabemos que uno de los códigos digitales binarios más populares es el de complemento a dos, el que se forma por complementación (complemento de 1), agregando un LSB y pasando por alto el sobreflujo. Un LSB de cero indica un número positivo; 1 un número negativo. Si consideramos el número de tres bits de signo más 0101 (5) se hace negativo complementando todos los bits (1010) y agregando un LSB (1011). Cuando se verifica el resultado, si se pasa por alto el acarreo de sobreflujo,  $0101 + 1011 = 0000$ .

Se puede aplicar complemento a dos con un DAC binario, si se complementa el LSB a un número de bits compensado, como se muestra en la tabla.



Tabla 4.

Número	Fracción decimal		Magnitud de signo +	Complemento a dos	Binario compensado	Complemento a uno
	Referencia positiva	Referencia negativa				
7	7/8	-7/8	0111	0111	1111	0111
6	6/8	-6/8	0110	0110	1110	0110
5	5/8	-5/8	0101	0101	1101	0101
4	4/8	-4/8	0100	0100	1100	0100
3	3/8	-3/8	0011	0011	1011	0011
2	2/8	-2/8	0010	0010	1010	0010
1	1/8	-1/8	0001	0001	1001	0001
0	0+	0-	0000	0000	1000	0000
0	0-	0+	1000	0000	1000	1111
-1	-1/8	1/8	1001	1111	0111	1110
-2	-2/8	2/8	1010	1110	0110	1101
-3	-3/8	3/8	1011	1101	0101	1100
-4	-4/8	4/8	1100	1100	0100	1011
-5	-5/8	5/8	1101	1011	0011	1010
-6	-6/8	6/8	1110	1010	0010	1001
-7	-7/8	7/8	1111	1001	0001	1000
-8	-8/8	8/8		1000	0000	

La progresión de valores en el binario compensado va de todo cero a menos la escala completa (-FS), a todos 1 a (FS -1LSB). El cero analógico se presenta en 1000. Así una relación de conversión de un DAC binario unipolar se puede hacer complemento de 2 agregándole una compensación negativa fija a la salida a la media escala, amplificando la salida un factor de 2 y complementando el MSB.

La relación de conversión de binario compensado se expresa mediante:

$V_0 = V_{FS}(2N - 1)$ . Donde  $V_0$  es el voltaje de salida y  $N$ , el valor fraccionario del código de entrada en binario compensado.

## CAPÍTULO V CONVERTIDORES DIGITAL A ANALÓGICO

### 5.1 DAC de 1 bit

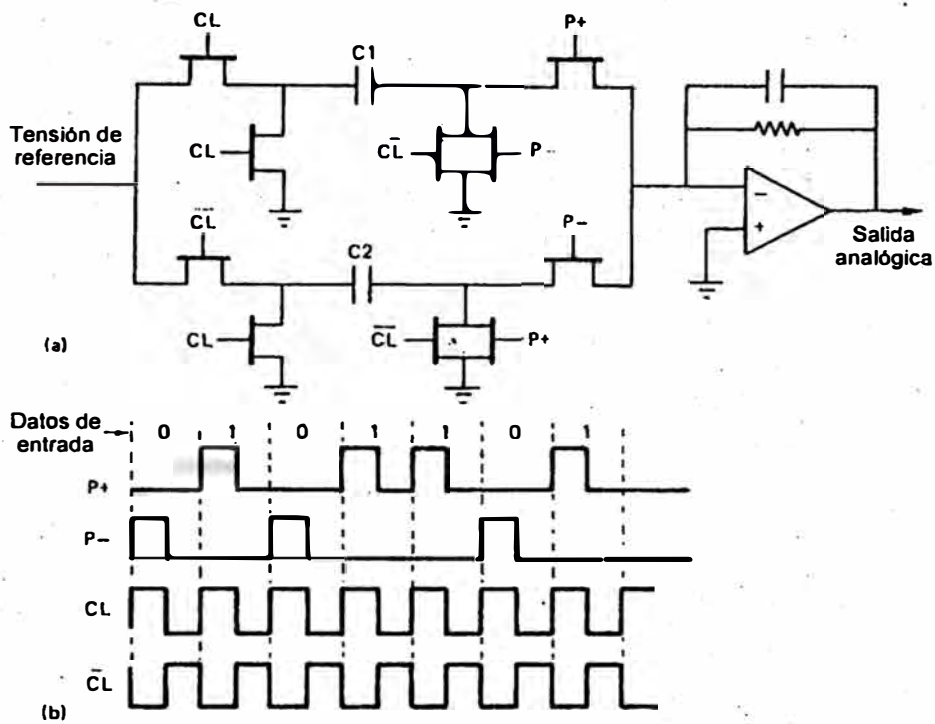
Conocido como “One Bit DAC” Se conoce correctamente que la señal de entrada es una señal lógica que tan solo necesita estar por encima o por debajo de un umbral para que su valor binario sea recibido correctamente. Puede presentar una serie de distorsiones en la forma de onda y un offset de factor de trabajo. El área que hay por debajo de los impulsos puede variar enormemente. En la salida del DAC, la amplitud debe ser extremadamente precisa. Un DAC de 1 bit utiliza sólo la información binaria de la entrada, pero vuelve a mandar una señal de reloj para producir una sincronización exacta y utiliza una tensión de referencia para producir niveles exactos. El área de los impulsos producidos es entonces constante. Los DAC de 1 bit pueden encontrarse en ADC modeladores de ruido así como en las aplicaciones más normales de producción de audio analógico. En la figura se muestra un DAC de 1 bit implementado con conmutadores de efecto de campo MOS y un par de condensadores. Se introducen o se sacan “cuantos” de carga de un amplificador conectado a masa virtual configurado como integrador por la acción conmutada del condensador. Además se muestran las formas de onda asociadas. Cada período de bit de datos se divide en dos partes iguales para cuando la señal de reloj es alta y la otra para cuando es baja. Durante la primera mitad del período de bit, se genera el impulso  $P +$  si el bit de datos es un “1”, o bien se genera el impulso  $P -$  si el bit de

datos es un "0". La entrada de referencia es una tensión limpia correspondiente a la ganancia requerida.

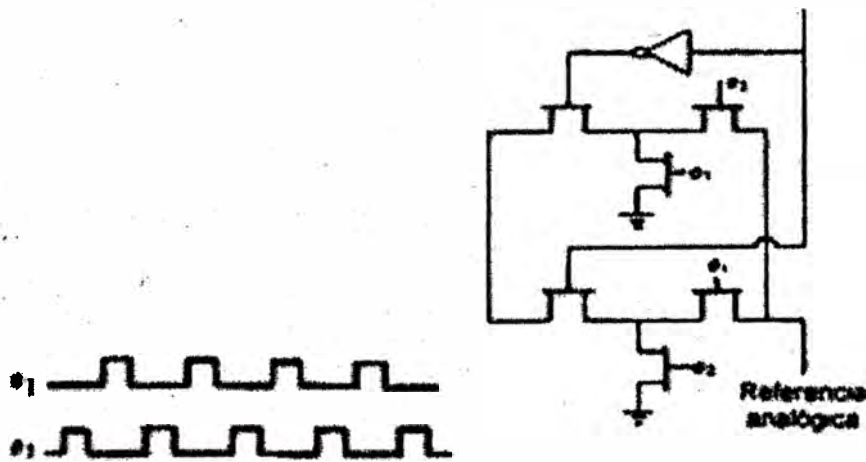
$C_1$  se descarga durante la segunda mitad de cada ciclo gracias a las conmutaciones procedentes de la señal de reloj complementada. Si el siguiente bit es un "1", durante el siguiente período de nivel alto de la señal de reloj, el condensador estará conectado entre la referencia y la masa virtual. La corriente fluirá a la masa virtual hasta que el condensador se cargue. Si el siguiente bit es un "1", la corriente que fluye por  $C_1$  pasará masa.  $C_2$  se carga con la tensión de referencia durante la segunda mitad de cada ciclo mediante las conmutaciones procedentes del reloj complementado.

Durante el siguiente período de estado alto de la señal de reloj, el extremo de referencia de  $C_2$  pasará a masa y, de este modo, el extremo del amplificador operacional asumirá una tensión de referencia negativa. Si el siguiente bit es un "0", esta referencia negativa conmutará a la masa virtual; si no el condensador se descargará.

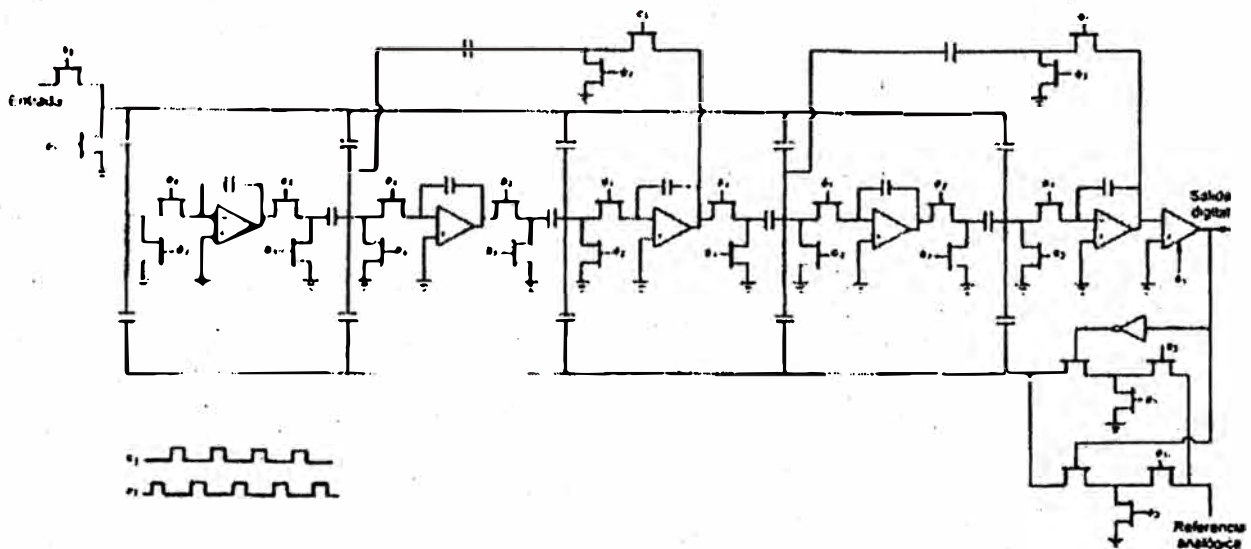
Así en cada ciclo de reloj, un "cuanto" de carga es inyectado al integrador gracias a  $C_1$ , o bien es sacado gracias a  $C_2$ . Por tanto, la salida analógica refleja con precisión la relación existente entre ceros y unos.



Típicamente un DAC de 1 bit de este tipo se contiene en un modulado sigma delta.



También en el siguiente gráfico nos muestra un modulador sigma delta de tercer orden que utiliza un filtro con bucle y condensadores conmutados:



## 5.2 Jitter

Se denomina “Jitter”, a la variación producida por efecto de un reloj que constantemente alimente al DAC. Si dicho reloj está provisto de cierto desfase, produce entonces fluctuación en la base de tiempos del convertidor. En otras palabras “Jitter” es la inestabilidad del reloj del sistema.

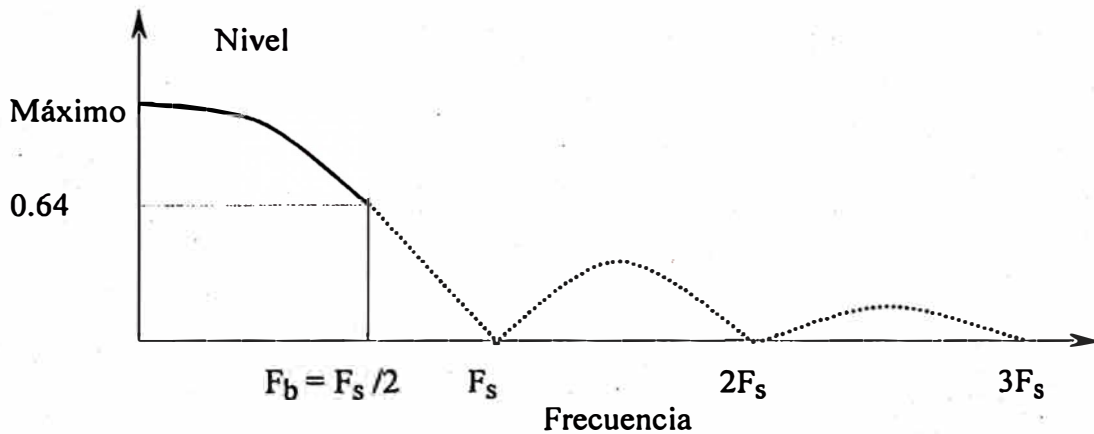
A medida que aumente la resolución del sistema por el uso de una mayor longitud de palabra de las muestras, se reduce más el grado de tolerancia del “Jitter”. La naturaleza de la señal no deseada depende del espectro del “Jitter”. Si éste es aleatorio, el efecto se asemeja al ruido y es relativamente benigno a menos que la amplitud sea excesiva. Aunque en realidad no necesariamente es aleatorio.

Dependiendo de la precisión de la frecuencia de muestreo requerida, algunos sistemas de audio digital pueden optar entre un VCO de cristal o un VCO de banda ancha, para filtrar el “Jitter” del reloj, que debe introducirse a través de un bucle de fase sincronizada bien diseñado y amortiguado (la alta Q del cristal produce una

señal de reloj más limpia, pero se consigue un desplazamiento de frecuencia bastante reducido)

### 5.3 Efecto de apertura

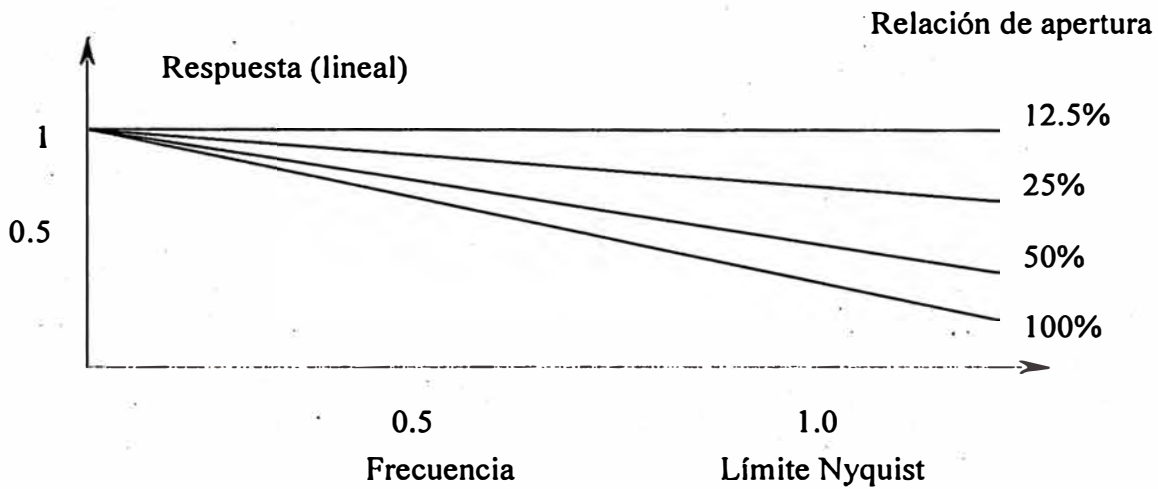
Cuando la salida de las muestras son interpoladas, es decir, filtradas digitalmente por el filtro digital, sucede que se debe cuantificar, recuantificar, binario a tensión, remuestreo y luego filtro pasa bajo de reconstrucción, debe considerarse el efecto de apertura, que en el dominio de la frecuencia, se observa que los impulsos con una relación de apertura del 100% presentan la forma de la señal  $\frac{\text{Sen}x}{x}$ , que cae a cero a



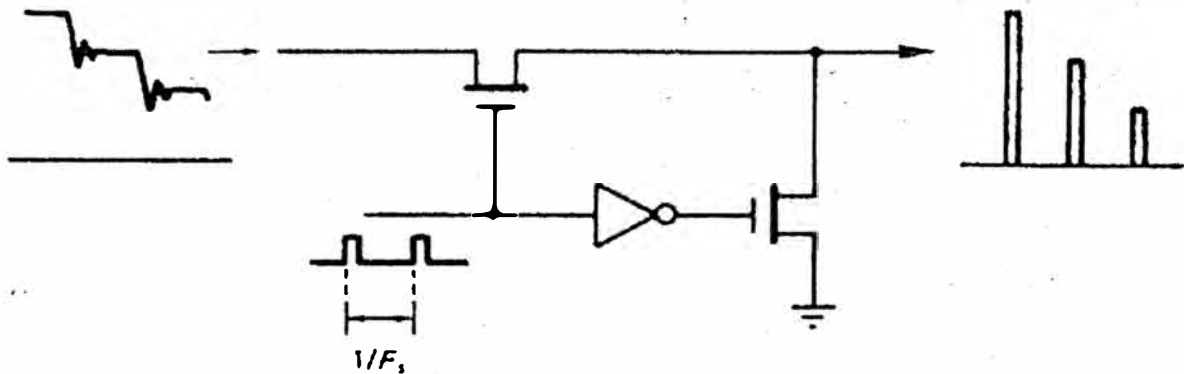
la frecuencia de muestreo. Utilizando un circuito de remuestreo, haciendo pasar la retención de orden cero (relación de apertura 100%) por una etapa adicional de muestreo sincrónico, que reduce el efecto de apertura. Se desea obtener una relación de apertura del 12.5%. En los gráficos siguientes se muestran:

En primer caso la respuesta en frecuencia con una apertura del 100% que se ve anulada en los múltiplos de la frecuencia de muestreo. La zona de interés llega hasta la mitad de la frecuencia de muestreo.

En este gráfico:



Se presenta la respuesta con varias relaciones de apertura.



La cuantificación es el proceso por el cual se expresa una cantidad infinitamente variable mediante valores discretos o escalonados. La cuantificación se presenta en una gran variedad de aplicaciones comunes. Un reloj digital cuantifica el tiempo, pero la pantalla no indica el tiempo transcurrido entre los instantes en que cambian los dígitos.

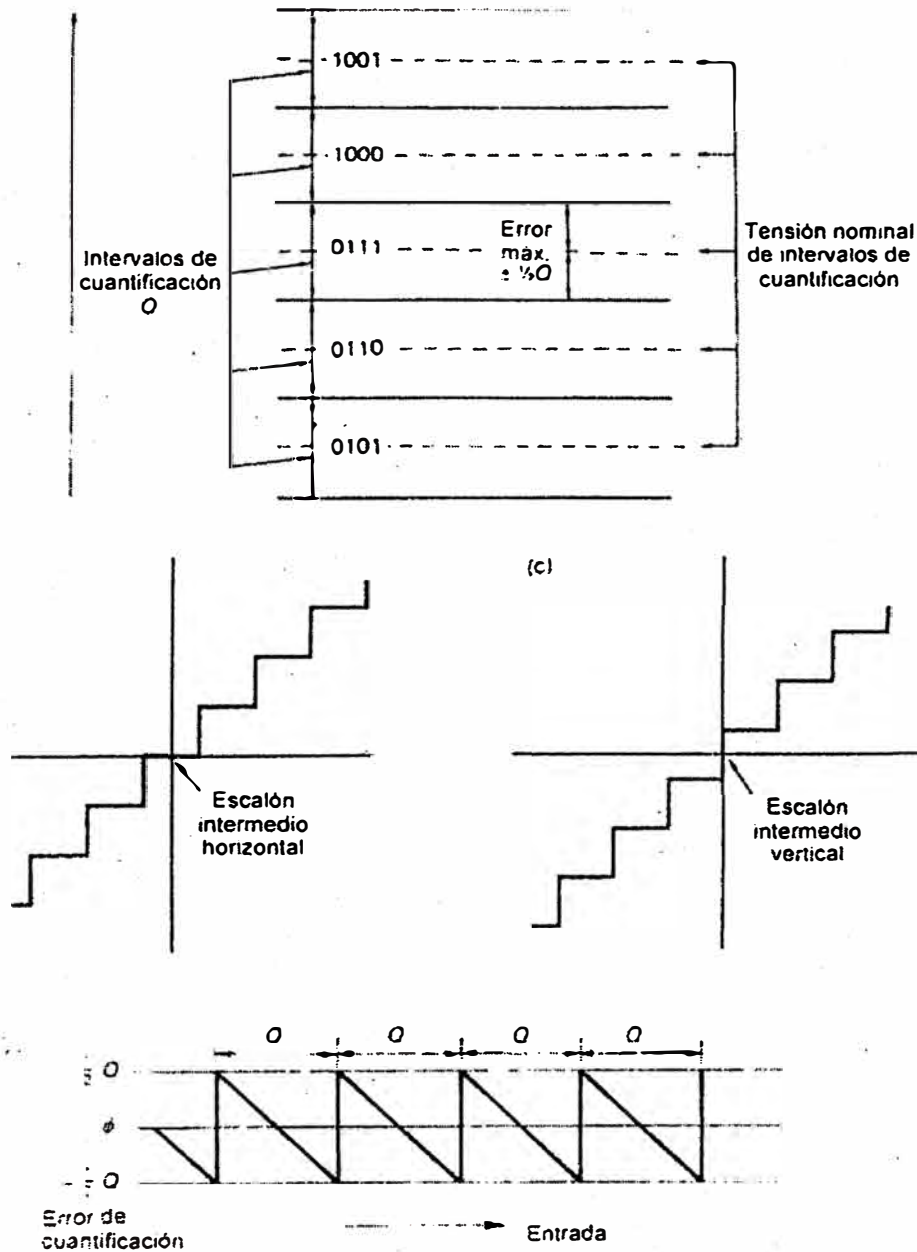
En audio, los valores que se han de cuantificar son tensiones infinitamente variables procedentes de una fuente analógica. La cuantificación propiamente dicha es un proceso que funciona únicamente en el dominio de la tensión.

#### **5.4 Error de cuantificación**

En audio, cuando se emplea el término “linealidad”, generalmente significa la rectitud de la función de transferencia. La linealidad constituye un objetivo en audio; sin embargo el cuantificador ideal es cualquier cosa menos lineal.

En los siguientes gráficos se analizan las características de los errores de la cuantificación:





El dither es considerado como un ruido añadido a una señal analógica para linealizar el cuantificador. A niveles altos de señal, el error de cuantificación se convierte en ruido. A medida que disminuye el nivel de audio, el error de cuantificación de un cuantificador ideal se correlaciona más con la señal y el resultado es la distorsión. Si el error de cuantificación se puede decorrelacionar de la

señal de entrada de alguna manera, el sistema podrá mantenerse lineal pero con ruido. El dither, entonces, realiza la función de decorrelación, haciendo que la acción del cuantificador sea imprevisible y le da al sistema una base de ruido similar a la de un sistema analógico.

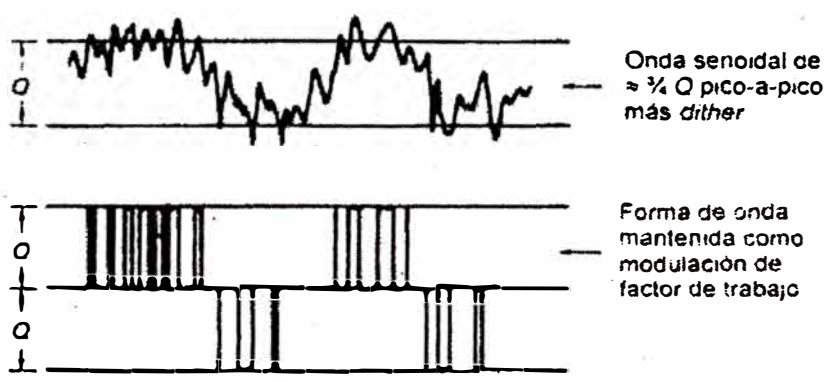
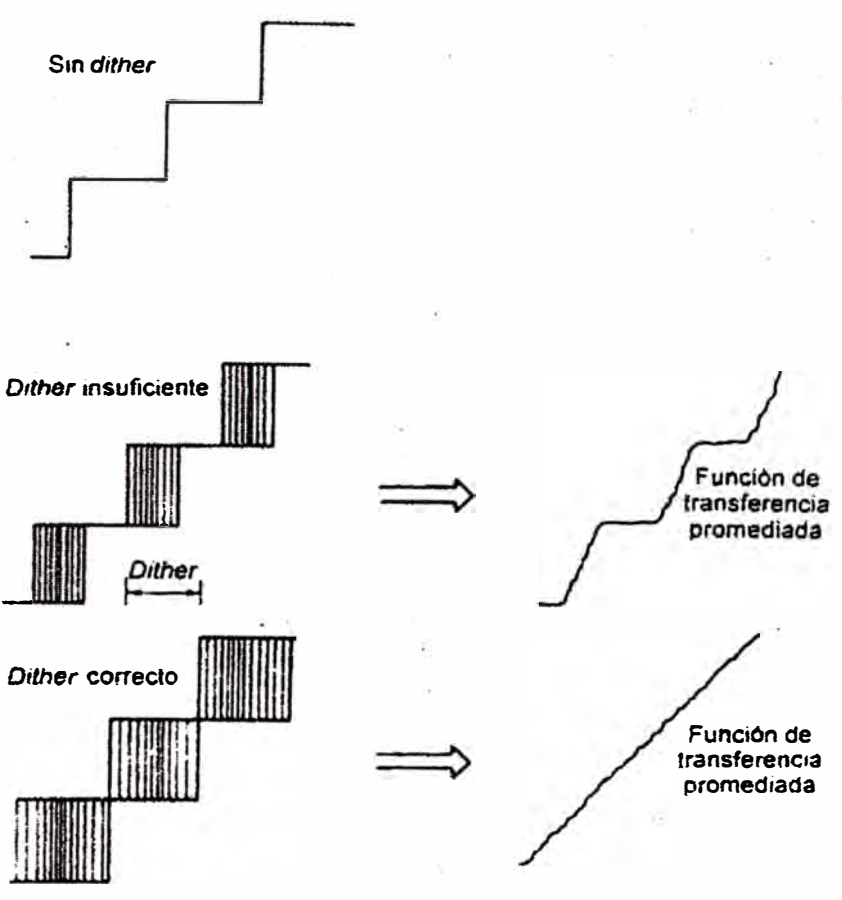
Todos los sistemas prácticos de audio digital utilizan un dither no sustractivo, en el que la señal de dither es introducida antes del proceso de cuantificación y no se intenta eliminarla en el DAC. La aplicación de dither con anterioridad a un cuantificador convencional provoca inevitablemente una ligera reducción en la relación señal ruido alcanzable, pero esta reducción es un pequeño precio que hay que pagar para eliminar las no linealidades.

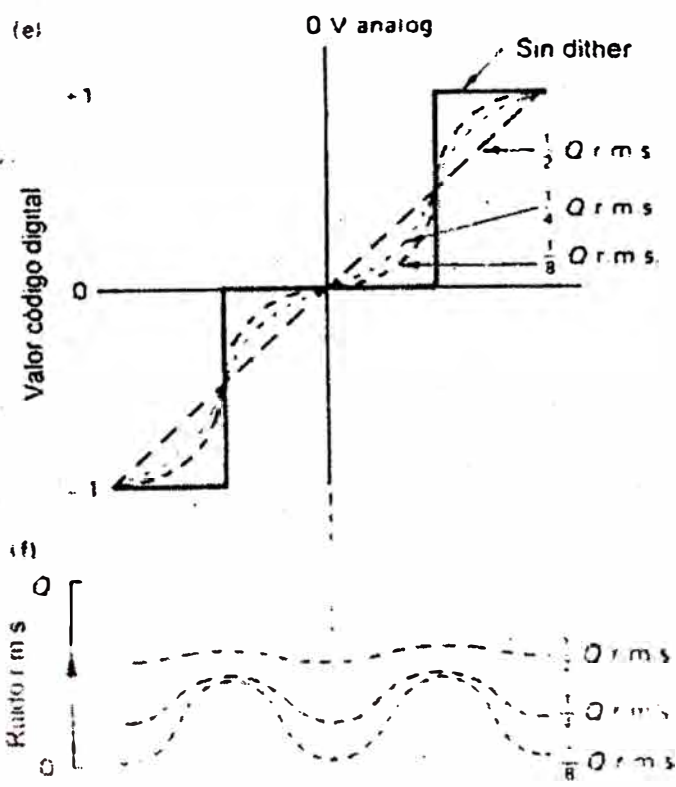
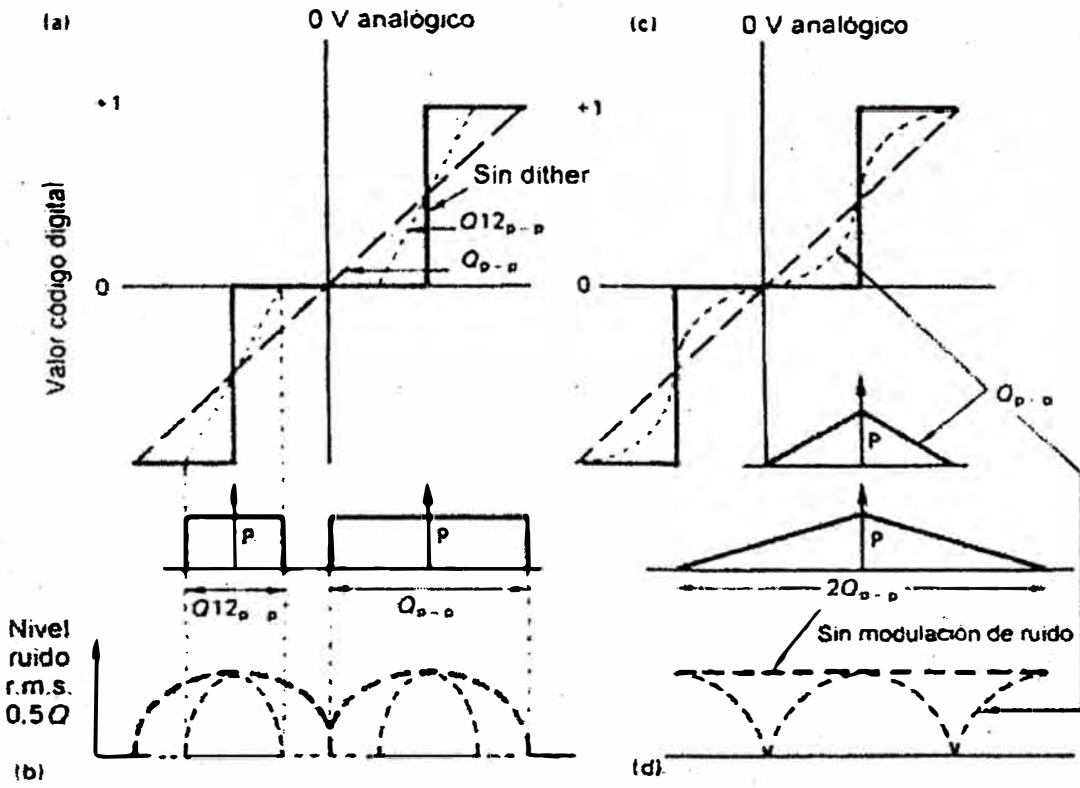
Es aquí que la técnica del modelado de ruido junto con el dither superan esta restricción, obteniéndose un rendimiento por encima del dither sustractivo.

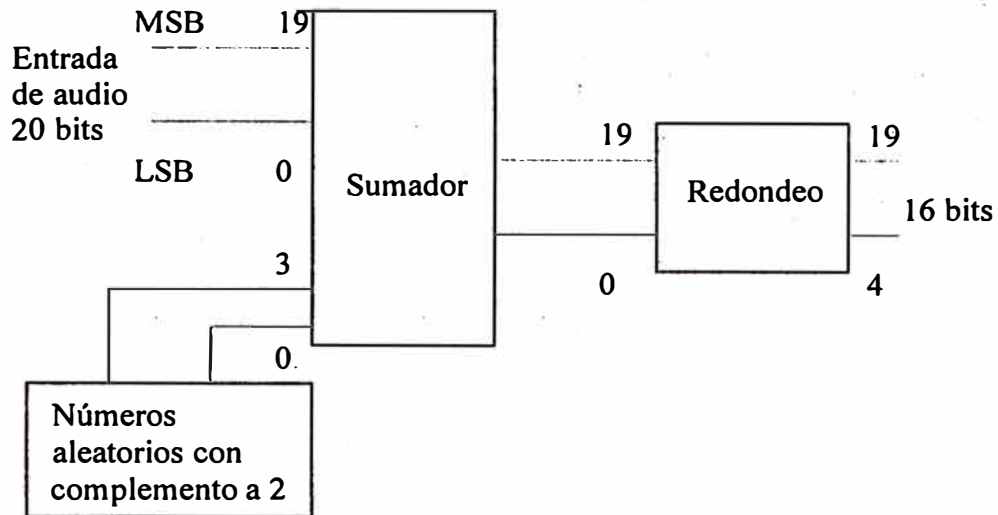
### **5.5 Recuantificación y dither digital**

En realidad, recuantificación significa reducción de la longitud de la palabra de las muestras. En la práctica, la reducción de la palabra de las muestras debe ser acortada de forma que el error de cuantificación se convierta en ruido en lugar de distorsión.

Una técnica que cumple este requisito consiste en utilizar dither digital antes de realizar el redondeo. El dither digital consiste en una secuencia numérica pseudo aleatoria. Si se requiere para simular la señal de dither analógica, entonces el ruido debe ser bipolar con el fin de que tenga una tensión media de cero. Debe utilizarse un sistema de codificación con complemento a dos para los valores dither como ocurre con las muestras de audio.

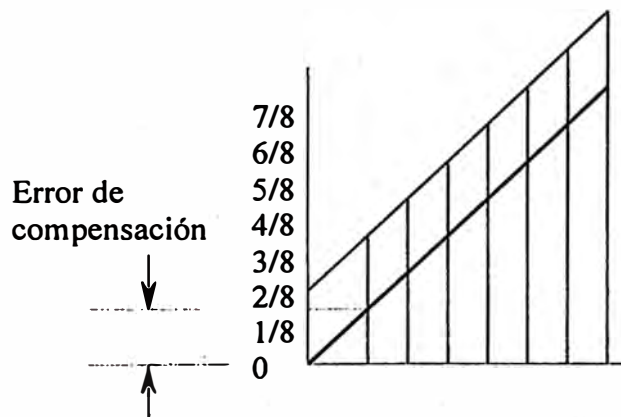






### 5.6 Errores de un DAC

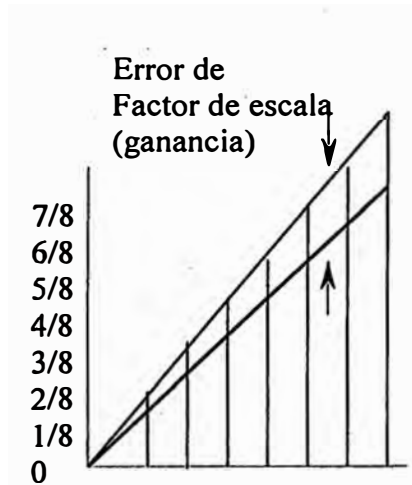
**Error de compensación a cero.** Es la cantidad en la que su salida difiere de cero cuando el código de entrada pide cero. Si se ajusta la salida para el valor correcto de cero, todos los demás códigos de salida se traducirán de conformidad con el mismo



valor.

**Error de ganancia.** Es la cantidad en la que el ámbito de salida (del código más negativo al código más positivo) difiere del valor teórico. Lo provocan los errores de razón general de resistencias, y en los DAC de referencia fija, los errores de

referencia. El ámbito se ajusta para una magnitud de  $V_{ES}(1-2^{-n})$  en el DAC binario unipolar, y  $2 V_{ES}(1-2^{-n})$  en los DAC bipolares. La compensación “cero” del DAC bipolar se ajusta, a menudo a  $-V_{ES}$ . En algunos casos se proporciona un ajuste separado de compensación para que el MSB asegure una salida cero al valor cero de escala media.



**Error de linealidad.** Cualquier desviación de la “mejor línea recta” se denomina error de linealidad. No es raro encontrar disposiciones para el recorte externo de los errores de linealidad. Se conocen dos tipos de errores de este tipo:

**1º. No- linealidad diferencial.** Se debe a las diferencias de tamaño de los bits. Conduce a errores de magnitud diferente cuando los bits se suman en diversas combinaciones. Teóricamente, cada etapa de un código al siguiente, en incrementos de LSB tiene que ser igual a 1 LSB. Una desviación en el tamaño de la etapa de este valor se denomina error de linealidad diferencial. Si en ciertas transiciones que incluyen interrupciones simultáneas de números grandes de bits, la digital da en realidad como resultado una disminución de la salida analógica. Una separación de la respuesta monotónica esperada se conoce como no monotonicidad. Además de ser

inherentemente inexacta, la conducta no monotónica esperada se conoce como no monotonicidad. Además de ser inherentemente inexacta, la conducta monotónica es intolerable en muchas aplicaciones, tales como presentaciones, sistemas de control y convertidores ADC, que emplean DAC.

**2°. No- linealidad integral.** Se puede deber a amplificadores no lineales y resistencias de realimentación. Inclusive si todos los valores de bits son individualmente exactos, su suma puede no ser precisa. En algunos casos, la carga variable presentada por una impedancia de salida de un DAC de salida de corriente o ganancia al voltaje de compensación de salida del amplificador operacional, puede introducir errores de linealidad.

Las propiedades de un convertidor varían con la temperatura. Si se considera un convertidor que tiene un error total que está dentro de  $\frac{1}{2}$  LSB a  $25^{\circ}\text{C}$  y además tiene una precisión compatible con su resolución, puede tener errores importantes a temperaturas cercanas a los extremos de su gama nominal. Los valores de resistencia cambian con la temperatura; los voltajes de referencia y las corrientes de polarización del amplificador operacional y el voltaje de compensación se desvían con la temperatura; las resistencias de interrupción y las fugas varían con la temperatura; por lo tanto se espera como resultado de todo lo anterior, que la ganancia, la compensación los pesos relativos de cada bit (la linealidad) cambien con la temperatura.

Los coeficientes de temperatura (TC) especifican un cambio máximo de un parámetro que se puede esperar en una gama dada de temperaturas; los coeficientes se especifican generalmente para los errores de compensación, ganancia y linealidad diferencial.

**Importancia:** Depende de la magnitud y de la aplicación: en el caso de un DAC de 12 bits, cuando su salida es presentada en un osciloscopio, la importancia de unos cuantos bits de desviación de compensación (posición) o ganancia (tamaño) no es tan relevante (esto es, con respecto a su medición, bastante pequeña, del orden de los  $\mu\text{V}$ ); pero el problema se presentaría por excesiva no monotonicidad o no-linealidad diferencial excesiva.

### 5.7 Factores que influyen en la calidad de los convertidores

**Error de offset.** En los DACs puede obtenerse un golpe de ruido seco en el caso de editarse dos señales con diferentes offsets.

Eliminación del error: utilizando un filtro digital HPF.

**Error de ganancia.** La pendiente de la función de transferencia es incorrecta con respecto a la ideal.

Consecuencias: error de offset.

**Linealidad Integral.** Desviación de la función de transferencia con dither con respecto a una línea recta.

Consecuencias: distorsión de armónicos.

**No-linealidad diferencial.** Diferencia en tamaño de los intervalos de cuantificación adyacentes.

Consecuencias: distorsión en la forma de onda.

**Monotonicidad.** Caso especial de no-linealidad diferencial, es decir, la salida no aumenta si se aumenta la entrada. Si un dispositivo tiene una linealidad mayor que  $0.5Q$ , deberá ser monotónico. Es imposible que un convertidor sea no monotónico.

Consecuencias: error de medición en fuentes de corriente.



**Precisión absoluta.** Diferencia entre la salida real y la salida que se espera cuando se aplica un código digital dado al convertidor (suele denominarse salida ideal) de una determinada entrada. Fuentes de error: ganancia, cero (compensación a), linealidad y ruido. El error suele ser conmensurado a la resolución (puede darse el caso que se tenga menos de  $2^{-(n+1)}$  o  $\frac{1}{2}$  LSB de escala completa. Sin embargo, la precisión puede ser mucho mejor que la resolución en algunas aplicaciones.

Consecuencias: distorsión de armónicos.

### **5.8 Consideraciones psicoacústicas**

El sentido al que denominamos oído es el resultado de una serie de procesos acústicos, mecánicos, nerviosos y mentales dentro de la combinación oído / cerebro, lo que nos lleva al término de psicoacústica.

Normalmente el grado de sensibilidad del oído humano es mayor entre los 2 KHz y los 5 KHz aproximadamente y, aunque algunas personas pueden detectar 20 KHz a nivel alto, existen muchas pruebas que sugieren que la mayoría de los oyentes no pueden distinguir si el límite superior de frecuencia del sonido se encuentra en los 20 KHz o los 16 KHz. Se ha comprobado que la reducción de frecuencias por debajo de los 20 KHz mejora las cualidades de realidad y de ambiente sonoro. El rango dinámico del oído tiene una respuesta logarítmica de los 100 dB.

### **5.9 Reducción de datos en audio digital**

Cuando existe una restricción práctica o económica en el ancho de banda del canal o la capacidad de almacenamiento, es esencial una reducción de datos. En la radiodifusión, el ancho de banda es de gran importancia ya que la radio sonora tiene que compartir el espectro con otros servicios.

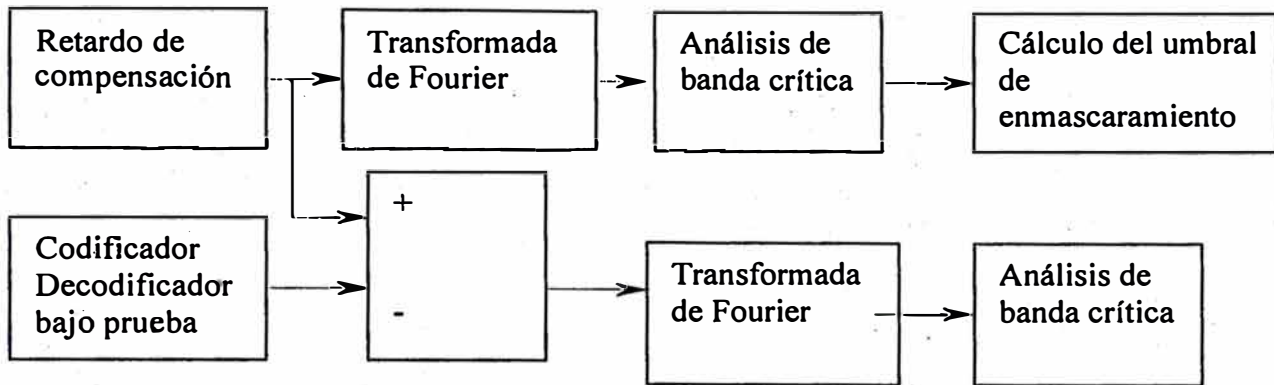
Toda reducción de datos de audio se basa en la comprensión de nuestro mecanismo auditivo, por lo que constituye una forma de codificación perceptual. El oído es solo capaz de extraer una cierta proporción de la información contenida en un determinado sonido. A esto se le puede denominar entropía perceptual, siendo redundante el sonido adicional. Un sistema ideal debe eliminar toda redundancia, dejando únicamente la entropía. Una reducción adicional de la velocidad de la transferencia de datos se traducirá en una reducción de la entropía; por tanto, existe un límite en cuanto al grado de reducción de datos que puede realizarse inclusive con un codificador ideal. La conclusión directa del hecho que la velocidad de transferencia de datos de salida de un codificador es prácticamente independiente de la frecuencia de muestreo de entrada. Esto se debe a que la entropía del sonido se encuentra en la forma de onda y no en el número de muestras que llevan.

La membrana basilar del oído se comporta como un tipo de analizador de espectros; la parte de dicha membrana que resuena como resultado de la aplicación de un sonido es una función de la frecuencia. Las altas frecuencias son detectadas en el extremo de la membrana más próximo al tímpano y las bajas frecuencias son detectadas en el otro extremo. El oído analiza con bandas de frecuencias, conocidas como bandas críticas, con una anchura aproximada de 100 Hz por debajo de los 500 Hz y de un sexto a un tercio del ancho de una octava, proporcional a la frecuencia, por encima. El oído es incapaz de registrar energía en algunas bandas cuando existe más energía en otra banda cercana. La vibración de la membrana en sintonía con una sola frecuencia no puede ser localizada en una zona infinitamente pequeña, por lo que las zonas cercanas se ven obligadas a vibrar a la misma frecuencia con una amplitud que decrece con la distancia. Otras frecuencias son excluidas a menos que la

amplitud sea lo bastante alta como para dominar la vibración local de la membrana. Por lo tanto la membrana tiene un valor eficaz  $Q$  que es responsable del fenómeno de enmascaramiento auditivo, definido como la audibilidad reducida de un sonido en presencia de otro. Por encima de la frecuencia de enmascaramiento, éste se hace más pronunciado y su grado aumenta con el nivel acústico.

Por debajo de la frecuencia de enmascaramiento, el grado de enmascaramiento cae de forma acusada hasta 90 dB por octava. De esta manera se necesitan filtros muy precisos si se desea confinar el ruido a frecuencias por debajo del sonido enmascarador dentro del umbral de enmascaramiento. Debido a la naturaleza resonante de la membrana, no puede empezar a vibrar ni dejar de hacerlo rápidamente; el enmascaramiento puede tener lugar incluso cuando el tono de enmascaramiento empieza después y cesa antes del sonido enmascarado. A esto se le denomina enmascaramiento directo y retroactivo.

Por lo tanto para diseñar un sistema de reducción de ruidos es necesario considerar todas las características del enmascaramiento del oído. En realidad el diseño de unidades de reducción de ruidos requiere pruebas meticolosas de audición. Existe un modelo conocido como sistema de medida de relación ruido enmascaramiento (NMR), como se muestra en la gráfica.



El factor de compresión de un codificador es un dato que solo representa un efecto irrelevante. Todos los codificadores decodificadores bajo prueba provocan retardo y, por lo general, cuanto mayor es la compresión, mayor es el retardo. En algunas aplicaciones en las que el sonido original puede escucharse al mismo tiempo que haya pasado por el codificador decodificador bajo prueba, un retardo mayor resulta inaceptable.

La codificación predictiva emplea circuitería que utiliza un conocimiento de muestras previas con el fin de predecir el valor de la siguiente. Sólo es necesario enviar la diferencia entre la predicción y el valor real. El receptor contiene un circuito de predicción idéntico al que se añade la diferencia transmitida para obtener el valor original. Los codificadores predictivos tiene la ventaja de trabajar sobre la forma de onda de la señal en el dominio del tiempo y necesitan un historial de la señal relativamente corto para funcionar. Provocan un retardo relativamente corto en las etapas de codificación y decodificación y los datos diferenciales son en realidad menos propensos a sufrir errores de bit que la PCM. Sin embargo existen, poca limitación de la banda de ruido de recuantificación y éste no está tan bien enmascarado como en otras técnicas posteriores.

## CAPÍTULO VI. FUNDAMENTOS DEL PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

El procesamiento de señales estudia la representación, transformación y manipulación de señales y la información que ellos contienen. Una señal es una función que contiene información de un sistema. La representación es una función matemática de una o más variables.

### 6.1 Señales y sistemas discretos en el tiempo

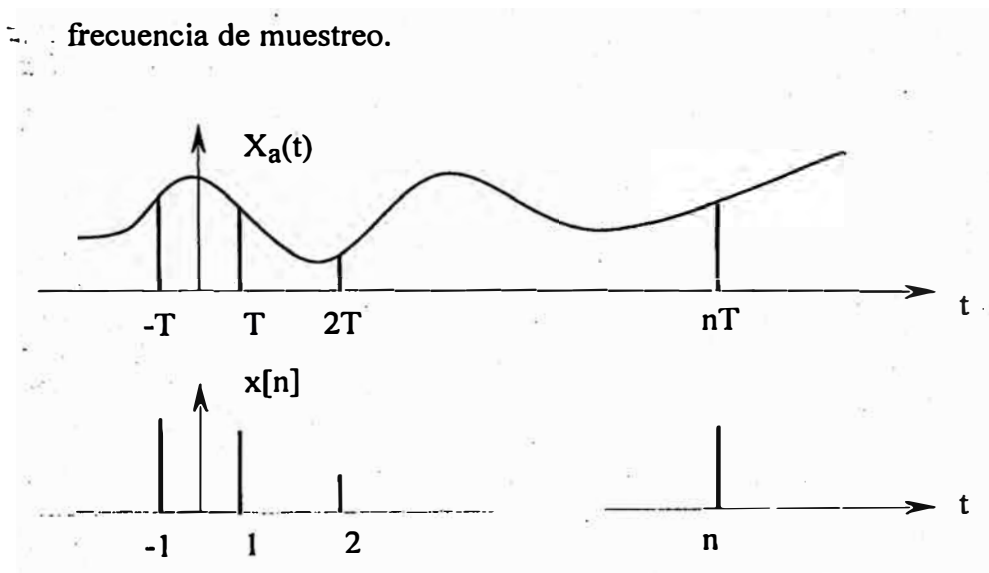
Las señales discretas se representan como una secuencia de números.

$x[n]$ ,  $X=\{x[n]\}$ ,  $-\infty < n < \infty$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$\{x[n]\}$  proviene del muestreo de una señal análoga  $X_a(t)$  en el instante  $nT$  ( $X[n]=$

$X_a(nT)$ ,  $-\infty < n < \infty$ ).  $T$  se define como el período de muestreo;  $1/T = f_s$ , es la

frecuencia de muestreo.



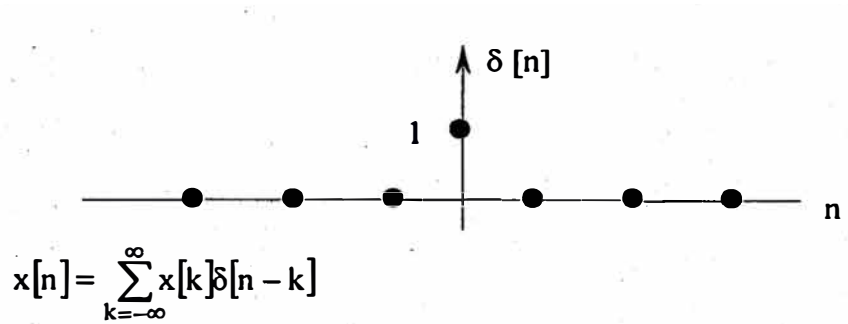
La codificación de la sub-banda divide el espectro de audio en muchas bandas de frecuencias diferentes con el fin de explotar el hecho de que la mayoría de las bandas contiene señales cuyo nivel es inferior al de la señal más alta.

En la codificación espectral se calcula periódicamente una transformada de Fourier de la forma de onda. Dado que la transformada de una señal de audio varía lentamente, ha de ser transmitida con mucha menor frecuencia que las muestras de audio. El receptor lleva a cabo una transformada inversa.

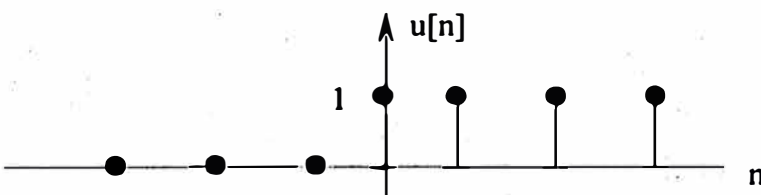
La mayoría de las unidades prácticas de reducción de datos utilizan alguna combinación entre la codificación de la sub-banda y la espectral con el fin de enmascarar la recuantificación de las muestras de la sub-banda o transformar los coeficientes.

## 6.2 Secuencias básicas

- \* Secuencia desplazamiento (retardo):  $y[n]=x[n - n_0]$
- \* Secuencia muestra unitaria (impulso):  $\delta [n]=1, n = 0; \delta [n]=0, n \neq 0$



- \* Secuencia escalón unitario:  $u[n]=0, n < 0; u[n]=1, n \geq 0$



$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta [n - k]$$

$$\delta [n] = u[n] - u[n - 1],$$

- \* Secuencia senoidal:  $x[n]=A \cos(w_0 n + \Theta)$

$w_0$  = frecuencia de la señal (rad /muestra)

$\Theta$  = fase (rad)

A = Amplitud

### 6.3 Sistemas y estructuras

Los sistemas lineales con coeficientes constantes se pueden describir de diferentes maneras. En el dominio del tiempo, tanto una ecuación en diferencias, que pueden ser dada en notación de variables de estado, como la respuesta al impulso, contiene toda la información del sistema. De igual modo, la función del sistema  $H(z)$  representada de distintos modos ofrece una descripción completa en el dominio  $z$ . Su particularización en la circunferencia de radio unidad conduce a la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  y a sus componentes.

Sobre la base del comportamiento de los sistemas, éstos se pueden agrupar en diferentes clases. Los distintos tipos representan unas propiedades que se manifiestan en la función de sistema  $H(z)$ , en la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  o en sus componentes, y en la respuesta al impulso. Existen:

- \* Sistemas sin memoria:  $y[n]=x^2[n]$
- \* Sistemas lineales:  $T\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=aT\{x_1[n]\}+ bT\{x_2[n]\}$
- \* Sistemas invariantes en el tiempo:  $x[n - n_0] \rightarrow T\{\cdot\} \rightarrow y[n - n_0]$
- \* Sistemas causales: La salida no anticipa la entrada,  $y[n]$  depende solo de  $x[k]$ ,  $k \leq n$ .
- Causal:  $y[n]=x[n]- x[n-1]$ ; no causal:  $y[n]=x[n+1]- x[n]$
- \* Sistema estable: Entrada acotada, salida acotada



### 6.4 Sistemas lineales invariantes en el tiempo

$\delta[n - k] \rightarrow$  Sistema Lineal Invariante en el tiempo  $\rightarrow h_k[n]$ . Como

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$ , luego:  $x[n] \rightarrow$  Sistema Lineal Invariante en el tiempo

$T\{\cdot\} \rightarrow y[n]$ ;  $y[n] = T\{x[n]\} = T\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]\}$ . Se debe entender como  $h[n]$  la

respuesta al impulso. Contiene las siguientes propiedades:

- \* Conmutatividad de la convolución  $x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$
- \* Distributiva con respecto a la suma  $x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$
- \* Estabilidad
- \* Causalidad

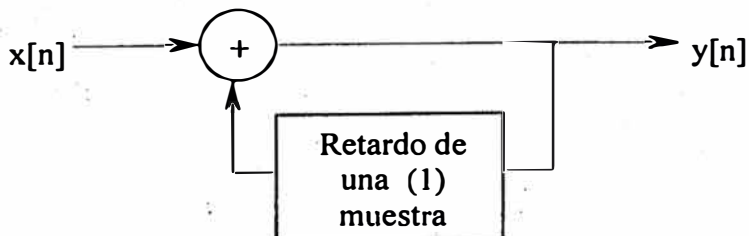
### 6.5 Ecuaciones diferencia lineales con coeficientes constantes

Las ecuaciones diferencia lineales son una sub clase importante de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, y está representados por:

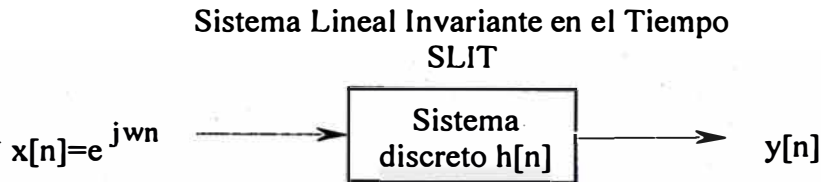
$$\sum_{k=0}^n a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^n b_k x[n - k].$$

Puede representarse un sistema al que se le denomina acumulador:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]; y[n] = y[n-1] + x[n] \Rightarrow x[n] = y[n] - y[n-1]$$



Si consideramos el siguiente diagrama de bloques en el que participa el sistema discreto con respuesta al impulso  $h[n]$ :



$$x[n] = e^{j\omega n}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

Si se define  $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$ , entonces dicha representación será la respuesta en frecuencia del sistema.

Como aplicación consideremos el sistema "moving average",  $0 \leq M_1 \leq M_2$ .

$$y[n] = \left( \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \right) \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

Sucede que el sistema cumple con los requisitos que la hacen un sistema lineal invariante en el tiempo, puesto que para la linealidad se aplica el principio de la aditividad, superposición y homogeneidad. En el caso de la invarianza en el tiempo:

$$y[n - n_0] = c. \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k - n_0], \text{ es decir la variable "n" no se afecta de } n_0. \text{ Nótese}$$

que si "n" sería de la forma  $Mn$  con  $M \neq 1$ , entonces no existiría la invarianza.

En el caso de la estabilidad:  $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ .

Calculando primeramente la respuesta al impulso  $h[n]$ :

$$h[n] = \left( \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \right) \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k], \text{ es decir:}$$

$$h[n] = \left( \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \right) \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k], -M_1 \leq n \leq M_2$$

$$\text{Luego } s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \left( \frac{M_1 + M_2 + 1}{M_1 + M_2 + 1} \right) = 1$$

Calculando la respuesta en frecuencia en módulo y fase:

$$h[n] = \left( \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \right) \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k] \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \left( \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \right) \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}$$

Realizando operaciones en variable compleja resulta que  $H(e^{j\omega})$  se obtiene de la

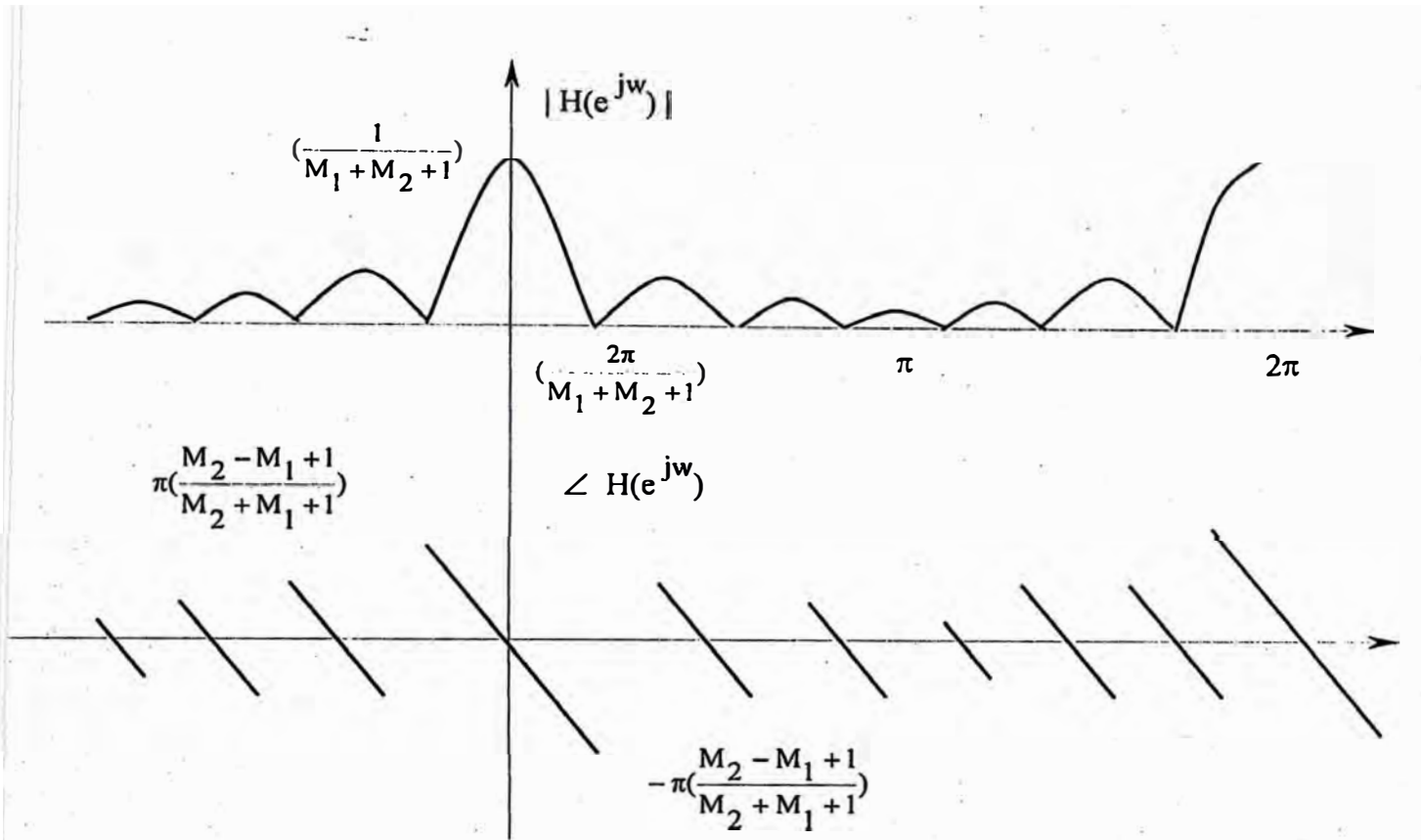
forma

$$H(e^{j\omega}) = \left( \frac{e^{-j\omega(M_2 - M_1 + 1)/2}}{M_1 + M_2 + 1} \right) \frac{\text{Sen}[\omega(M_1 + M_2 + 1)/2]}{\text{Sen}(\omega/2)}$$

$$\text{Módulo } |H(e^{j\omega})| = \left( \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \right) \frac{\text{Sen}[\omega(M_1 + M_2 + 1)/2]}{\text{Sen}(\omega/2)}$$

$$\text{Fase } \angle |H(e^{j\omega})| = -\left( \frac{M_2 - M_1 + 1}{2} \right) \omega$$

Las gráficas de la respuesta en frecuencia en módulo y fase se muestran a continuación. Nótese la periodicidad de la respuesta en frecuencia tanto en módulo como en fase.



Debido a la respuesta en frecuencia, se aprecia que se trata de un filtro pasabajo.

## 6.6 Transformada de Fourier

Es en realidad la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT). La representación de Fourier de una señal por medio de la DTFT directa e inversa es una clase particular de análisis de la señal. Las ecuaciones que la representan son:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

La respuesta en frecuencia, que es la DTFT de la respuesta al impulso unitario. Es posible calcular la DTFT de señales de longitud finita e infinita.

Habitualmente no es posible calcular la DTFT de señales de longitud infinita. Sin embargo, hay una importante clase de señales para lo cual es cálculo es fácil. Estas señales son las exponenciales, para las que la DTFT es una función racional de  $e^{-j\omega}$ .

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{l=0}^Q b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^P a_k e^{-j\omega k}}$$

La señal exponencial  $h[n] = a^n u[n]$  es un elemento de esta clase. La DTFT se calcula:

$$h[n] = a^n u[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{n=0}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}, \text{ si } |a| < 1.$$

### 6.7 Transformada discreta de Fourier

Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas discretos. Si definimos:  $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \Rightarrow y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ .

De aquí es que se definen los filtros selectivos: Filtro pasabajo, filtro pasa alto, filtro pasabanda, filtro supresor de banda. La transformada discreta de Fourier de

$$x[n] \text{ es } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$\text{La transformada inversa de Fourier es } x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Para que exista la transformada de Fourier, es necesario  $|X(e^{j\omega})| < \infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] <$

$\infty$ . La DFT o Discrete Fourier Transform, Transformada Discreta de Fourier, se

define como una operación sobre un vector de N puntos  $x[n]=\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ , cuyo resultado es otro vector  $X[k]=\{X[0], X[1], \dots, X[N-1]\}$  también de N puntos:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \text{ Donde } W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

La operación anterior puede interpretarse como la transformación de una secuencia  $x[n]$ , de N puntos, con muestras en el dominio del tiempo, en otra secuencia  $X[k]$ , asimismo de N puntos, con muestras en el dominio de la frecuencia. La DFT también puede verse como un muestreo en frecuencia de la transformada de Fourier,  $X(e^{j\omega})$ , de la secuencia  $x[n]$ .

Es preciso acotar que la FFT, Fast Fourier Transform, Transformada Rápida de Fourier, es un algoritmo que permite calcular rápidamente la DFT.

Ahora bien, es posible calcular la Transformada Discreta de Fourier inversa:

$$x[n] = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \text{ } n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

La Transformada Discreta de Fourier puede relacionarse de forma inmediata con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica. Si el período de la secuencia es M, los coeficientes de la correspondiente DFT de M puntos son exactamente los mismos (salvo un cambio de escala de 1/N) que necesitamos para realizar el desarrollo en serie de Fourier de dicha secuencia periódica. Además esta periodicidad inherente de la señal (que se deriva de las series de Fourier) es equivalente al indexado circular que siempre se emplea en la DFT.

## 6.8 Transformaciones matemáticas

Si consideramos a  $f(k)$  como una variable discreta en el tiempo. Esta variable discreta en el tiempo es una secuencia en el tiempo, que puede ser escrita como:  $[f(k)] = f(0), f(1), f(2), \dots, f(k), \dots$  tomando en lugar del tiempo:  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t, \dots$ , una conveniente forma de representar esta data en forma de polinomio sería:  $f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots + f(k)z^{-k}$ , que es una serie de potencias en  $z^{-k}$  teniendo como coeficientes los valores de la secuencia en el tiempo  $[f(k)]$ ; como consecuencia esta serie puede ser escrita por la siguiente forma compacta:  $Z[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ , donde se asume  $f(k) = 0, \forall k < 0$ .  $F(z)$  se conoce como la transformada  $z$  de la secuencia  $f(k)$ .

## 6.9 La transformada $z$

La transformada  $z$  otorga un procedimiento por el cual una secuencia de números puede ser transformado en una función de variable compleja  $z$

La variable  $z^{-k}$  puede ser interpretada como un tipo operador que en multiplicación desplaza las muestras de señal hacia la derecha (retardo) por  $k$  unidades de tiempo. La multiplicación por  $z^k$  desplaza las señales hacia la izquierda.

Otra interpretación de la variable  $z$  se desarrolla bajo el concepto de que  $z$ , en sistemas de data muestreada, es un número complejo tal que  $z = e^{sT}$ , donde  $T$  es el período de muestreo. La transformada  $z$  es una generalización de la transformada de Fourier en el análisis de señales y sistemas discretos en el tiempo.

La transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  de una secuencia  $x[n]$  se define como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \text{ luego la transformada } z, X(z) \text{ de una secuencia } x[n] \text{ es}$$

$$\text{definido como } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = Z\{x[n]\}$$

### 6.10 Sistemas de fase lineal FIR tipo I

Son sistemas que poseen una respuesta impulso simétrica:  $h[n]=h[M-n]$ ;  $0 \leq n \leq M$ ,  $M$  entero par, el retardo  $M/2$  es entero. La respuesta en frecuencia está dada por:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega M/2} \sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cos \omega k$$

$$a[0]=h[M/2];$$

$$a[k]=2h[(M/2) - k]; k=1, 2, \dots, M/2.$$

### 6.11 Sistemas de fase lineal FIR tipo II

Se considera  $M$  entero impar. En este caso:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k] \cos \omega(k-1/2)$$

$$b[k]=2h[(M+1)/2 - k]; k=1, 2, \dots, (M+1)/2.$$

### 6.12 Sistemas de fase lineal FIR tipo III

Es un sistema que posee una respuesta impulso antisimétrica:  $h[n]= -h[M-n]$ ;  $0 \leq n \leq M$ ,  $M$  entero par. La respuesta en frecuencia está dada por:

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega M/2} \sum_{k=1}^{M/2} c[k] \sin \omega k$$

$$c[k]=2h[(M/2) - k]; k=1, 2, \dots, M/2.$$



### 6.13 Sistemas de fase lineal FIR tipo IV

Similar al anterior; pero con M impar. La respuesta en frecuencia está dada por:

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega M/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k] \text{Sen}\omega(k - 1/2)$$

$$d[k] = 2h[(M+1)/2 - k]; k=1, 2, \dots, (M+1)/2.$$

## CAPÍTULO VII MODELADO DE RUIDO: FILTRO DIGITAL DE INTERPOLACIÓN

Se analizarán cuatro aspectos:

- \* Análisis espectral
- \* Procesado multifrecuencia
- \* Efectos de longitud de palabra finita
- \* Diseño de filtros de tiempo discreto

### 7.1 Análisis espectral

El análisis espectral está referido al análisis de señales en el dominio de la frecuencia. Existen para el propósito de estudio diversificación de ventanas espectrales. La ventana actúa en el dominio del tiempo truncando la longitud de la señal:  $y[n]=x[n].w[n]$ , donde  $w[n]=0$  fuera de  $0 \leq n \leq L - 1$ .

Las propiedades de las ventanas se suelen describir en el dominio de la frecuencia, donde la aplicación de una ventana supone que la señal resultante tiene una transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) que es la convolución de la verdadera transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) y de la transformación de la ventana.

$$y[n]=x[n].w[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Theta})W(e^{j(\omega-\Theta)})d\omega . \text{ La DTFT de la}$$

ventana es  $W(e^{j\omega})$ .

La DTFT de la ventana se calcula muestreando la DTFT  $W(e^{j\omega})$ , es decir calculando la FFT completando con ceros la secuencia.

### 7.1.1 Retardo de grupo

Una medida adecuada de la linealidad de fase es el retardo de grupo. El concepto de retardo de grupo está relacionado con la fase de una señal de banda estrecha. Considerando la salida de un sistema con respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  para una entrada de banda estrecha  $x[n]=s[n]\cos\omega_0 n$ . La señal  $s[n]$  se denomina envolvente y debe variar lentamente, lo que significa que posee un espectro paso bajo estrecho. Como se asume que  $X(e^{j\omega})$  no es nula sólo alrededor de  $\omega = \omega_0$ , la fase del sistema alrededor de  $\omega = \omega_0$ , se puede aproximar a una función lineal, si se expresa en función únicamente de los términos lineales de su desarrollo en serie de Taylor.

$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\phi_0 - \omega n_d.$$

Con esta aproximación, se puede demostrar que para la entrada  $x[n]=s[n]\cos\omega_0 n$ , la respuesta es  $y[n]=s[n-n_d]\cos(\omega_0 - \phi_0 - \omega n_d)$ . En consecuencia, el retardo en el tiempo de la envolvente  $s[n]$  de la señal de banda estrecha  $x[n]$ , cuya transformada de Fourier está centrada alrededor de  $\omega_0$ , está dado por la opuesta de la pendiente de la fase alrededor de  $\omega_0$ .

Si se considera la aproximación lineal, según Taylor, alrededor de  $\omega = \omega_0$ , se debe considerar la respuesta en fase como una función continua de  $\omega$ .

La respuesta en fase especificada se denota por  $\text{Arg}[H(e^{j\omega})]$  y se denomina como fase desplegada de  $H(e^{j\omega})$ . El retardo de grupo de un sistema entonces, quedará

$$\text{definido como } \tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \text{Arg} \left[ H(e^{j\omega}) \right] \right\}$$

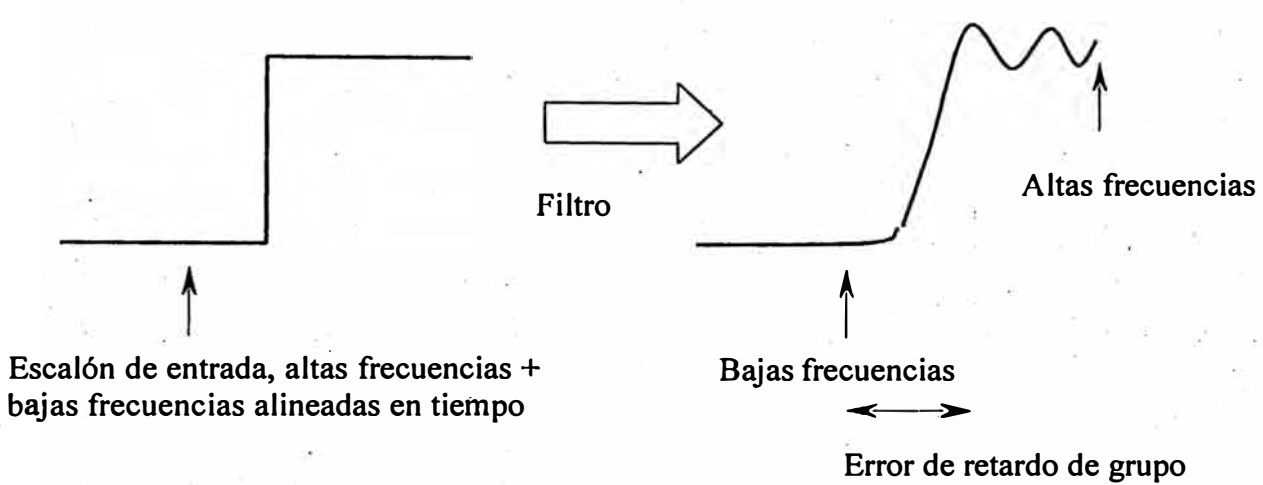
Un valor constante y entero del retardo de grupo representa un retardo perfecto. Un valor constante no entero representa un retardo no entero, el cual se interpreta en términos de interpolación de banda limitada y retardo. Cualquier desviación del retardo de grupo de un valor constante indica alguna no linealidad en la fase y la dispersión correspondiente.

Las consideraciones al nivel de la electrónica consisten en que el proceso de filtrado es inseparable del audio digital. Se necesitan filtros digitales o analógicos y, en ocasiones, ambos tanto en los ADCs como en los DACs.

La diferencia principal entre los filtros analógicos y los filtros digitales es que, en el dominio digital, pueden construirse arquitecturas muy complejas a bajo coste en LSI y que los cálculos aritméticos no están sujetos a la tolerancia o las variaciones de sus componentes.

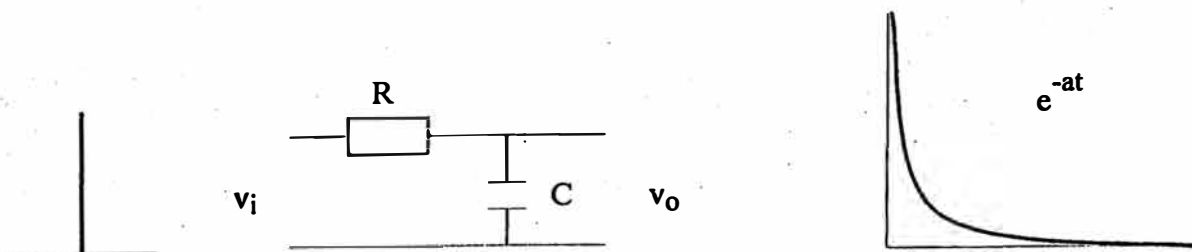
El filtrado puede modificar la respuesta en frecuencia de un sistema y/o la respuesta de fase. Toda combinación entre la respuesta en frecuencia y la de fase determinan la respuesta impulsiva en el dominio temporal. En el gráfico se aprecia que la comprobación de la respuesta impulsiva nos puede decir mucho sobre un filtro. En un filtro perfecto, todas las frecuencias deben experimentar el mismo retardo temporal. Dado que un impulso contiene un espectro infinito, un filtro que

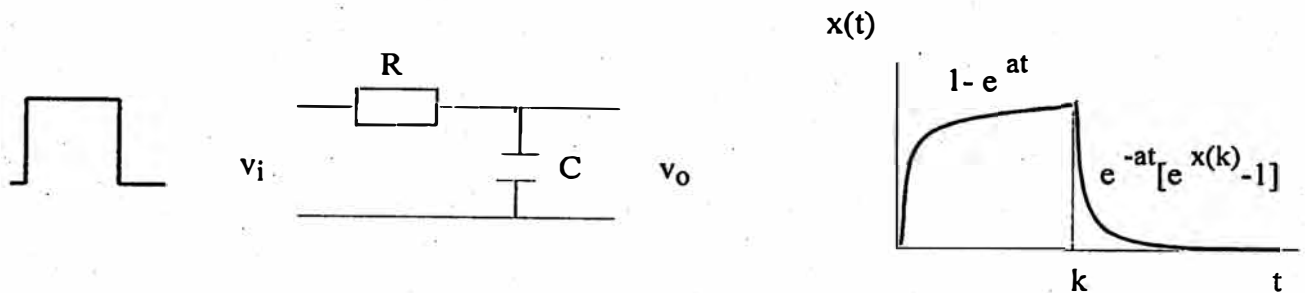
presente un error de retardo de grupo separará las distintas frecuencias de un impulso a lo largo del eje temporal.



Un retardo puro provoca un desplazamiento de fase proporcional a la frecuencia, y un filtro que presente esta característica se dice que es de fase lineal. La respuesta impulsiva de un filtro de fase lineal es simétrica. Si un filtro presenta un error de retardo de grupo, no podrá ser de fase lineal. Es prácticamente imposible fabricar un filtro analógico con una fase lineal perfecta, por lo que muchos filtros van seguidos de una etapa de ecualización de retardo de grupo que, a menudo, es igual de compleja que el propio filtro. En el dominio digital, es sencillo realizar un filtro de fase lineal, por lo que la ecualización de fase no es necesaria.

El retardo de grupo desplaza las señales en el tiempo como una función de la frecuencia. En un análisis clásico de una red RC, para una entrada función impulso y para otra entrada función cuadrada:





Se aprecia que la respuesta impulsiva de una red RC constituye una caída exponencial. Ahora bien, puede utilizarse este resultado para calcular la respuesta a una onda cuadrada.

En cualquier filtro, la forma de onda de salida en el dominio temporal representa la convolución de la repuesta impulsiva con la forma de onda de entrada.

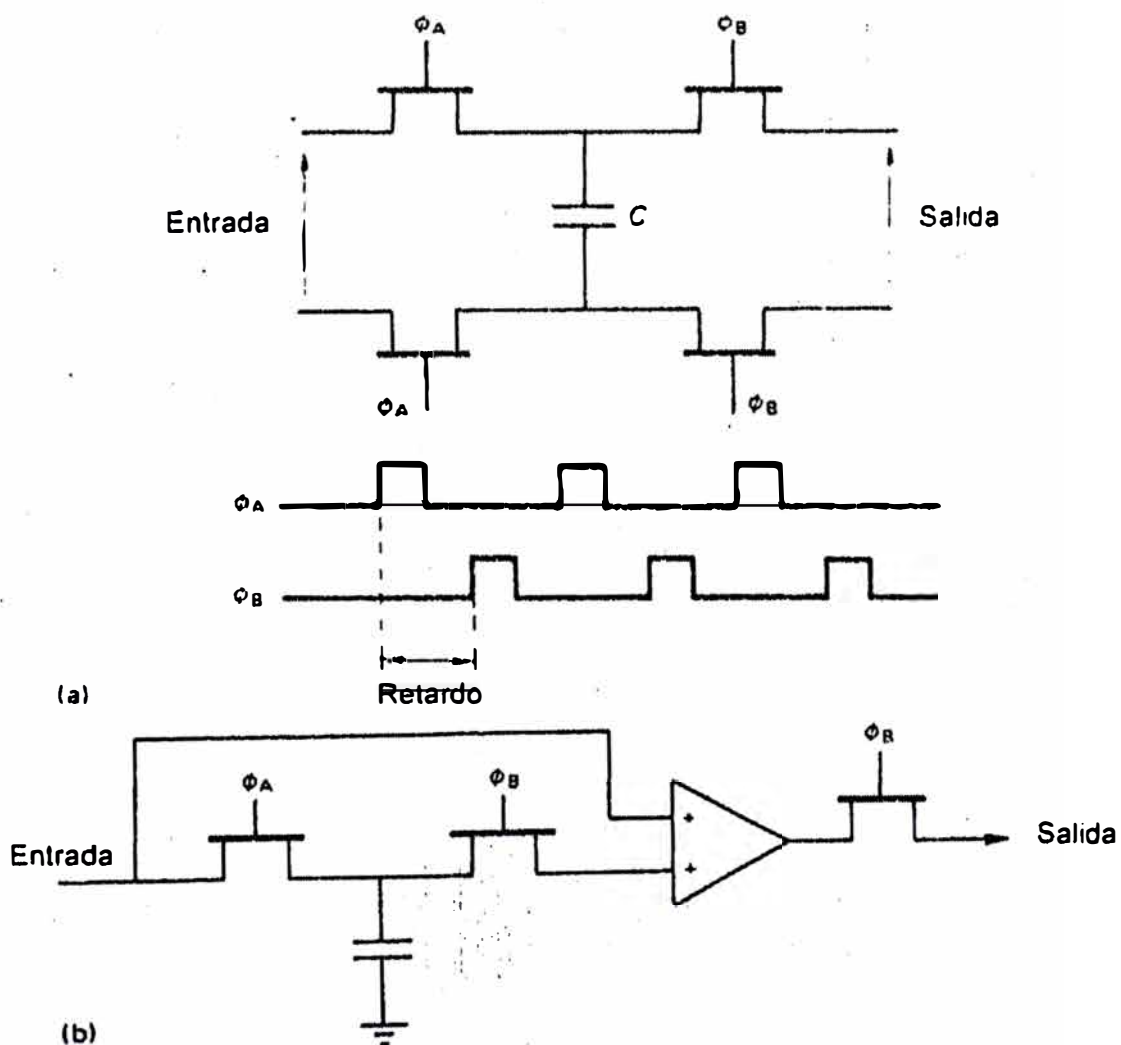
Es bien conocido que el proceso de convolución en el dominio temporal es tedioso y es mejor trabajarlo en el dominio de la frecuencia.

Ahora bien, entre el filtro analógico y el filtro digital, se encuentra el filtro con condensador conmutado. Este filtro emplea magnitudes analógicas, es decir, las cargas de los condensadores, pero el eje temporal es discreto debido a que las diferentes cargas son direccionadas mediante conmutadores electrónicos que se cierran durante varias fases del reloj de frecuencia de muestreo. Los filtros con condensadores conmutados presentan las mismas características que los filtros digitales con una precisión infinita. Se suelen utilizar en lugar de los filtros analógicos de tiempo continuo en convertidores con circuitos integrados ya que pueden implementarse empleando las mismas técnicas de integración.

En la figura se aprecia el retardo de un condensador conmutado. Existen dos fases de reloj y, durante la primera, la tensión de entrada es transferida al condensador.

Durante la segunda fase, la tensión del condensador se transfiere a la salida. Combinando el retardo con la suma de un amplificador operacional es posible obtener la circuitería dependiente de la frecuencia.

En el otro gráfico muestra un condensador conmutado. El retardo provoca un desplazamiento de fase que depende de la frecuencia. La respuesta en frecuencia es senoidal.



Por otro lado el proceso de convolución como se mencionó y además la práctica lo describe de esa manera, es más sencillo trabajarlo en el dominio de la frecuencia.

Para poder pasar al dominio de la frecuencia o del espectro desde el dominio temporal o de la forma de onda, es necesario utilizar la transformada de Fourier o, en sistemas muestreados, la transformada discreta de Fourier DFT. El análisis de Fourier sostiene que cualquier forma de onda puede ser reproducida sumando un número arbitrario de ondas senoidales relacionadas armónicamente con distintas amplitudes y fases.

## **7.2 Procesado multifrecuencia**

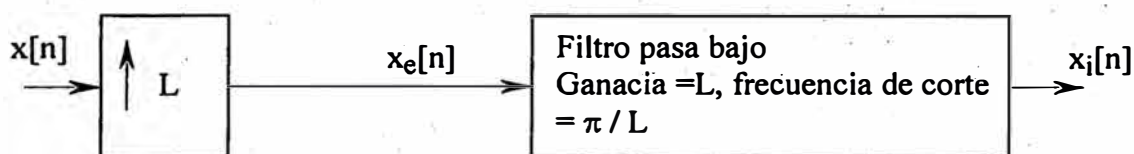
El procesado multifrecuencia es una técnica que no existe en el procesado de la señal continua en el tiempo. De cualquier forma, los filtros digitales lineales e invariantes en el tiempo realizan las mismas funciones que los de tiempo continuo. El procesado multifrecuencia de señales de tiempo discreto aporta importantes ventajas al tratamiento de la señal y ciertas operaciones de filtrado se pueden realizar mucho más eficientemente usando esta técnica. Por ejemplo, una operación de filtrado pasa bajo puede dividirse en dos etapas colocadas en cascada, cada una de las cuales es un filtro pasa bajo, y si se tiene en cuenta que la salida del primer filtro tiene un ancho de banda menor que el de la señal de entrada, la frecuencia de muestreo empleada puede ser menor, reduciéndose así la carga computacional necesaria. Una idea fundamental en la técnica del procesamiento multifrecuencia es que los cálculos se realizan a la velocidad más baja posible, y en caso de necesitarse una frecuencia de muestreo más alta para visualizar una señal, se empleará la **interpolación**



La técnica del procesamiento multifrecuencia es muy extensa e incluye temas tales como el diezmado e interpolación, además de los bancos de filtros y los wavelets. Básicamente nos interesamos en la interpolación por encontrarse en el procesamiento D / A.

La interpolación se realiza sobre un sobremuestreo de la señal, y un filtrado de la señal sobremuestreada. El proceso de interpolación consiste esencialmente en una estimación o reconstrucción de los valores de una señal en localizaciones temporales entre los valores de las muestras. En la figura se muestra un sistema para interpolar una señal por un factor  $L$ , donde la salida del primer sistema, tomado como un expansor de la frecuencia de muestreo es:

$x_e[n] = x[n/L]$  para  $n=0, \pm L, \pm 2L, \pm 3L, \dots$  y cero (0) para el resto.



El filtro pasabajo interpola entre los valores no nulos de  $x_e[n]$  para generar la señal interpolada  $x_i[n]$ . La salida  $x_i[n]$  se corresponde esencialmente con una versión de sobremuestreada de  $x[n]$ . Si el filtro pasabajo empleado es un filtro pasa bajo ideal, la interpolación se denomina interpolación en banda limitada. Una buena interpolación en banda limitada necesita un filtro pasabajo de alto orden cuidadosamente diseñado. Para ello suelen utilizarse dos procedimientos aproximados sencillos el **retenedor de orden cero** y la **interpolación lineal**.

Para la interpolación de retenedor de orden cero, cada valor de  $x[n]$  se repite  $L$  muestras:

$$x_i[n] = \begin{cases} x_e[0] & n = 0, 1, \dots, L-1 \\ x_e[L] & n = L, L+1, \dots, 2L-1 \\ x_e[2L] & n = 2L, 2L+1, \dots \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Esto se puede conseguir realizando la convolución de  $x_e[n]$  con la respuesta al impulso siguiente:  $h_{zoh}[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \dots + \delta[n-(L-1)]$

**La interpolación con el retenedor de orden cero** suele emplearse en convertidores digitales a analógicos D/A, obteniéndose formas de onda en escalera (cada muestra digital se convierte en un voltaje, y ese voltaje se mantiene durante todo el período de muestreo).

**La interpolación lineal** se puede conseguir usando un sistema con una respuesta impulsiva:  $H_{lineal}[n] = 1 - |n|/L$ , si  $|n| \leq L-1$  y cero (0) para el resto.

A diferencia del interpolador con retenedor de orden cero, la interpolación lineal es no casual y tiene un retardo de grupo cero.

**El interpolador en banda limitada** tiene también una respuesta impulsiva no

$$\text{causal: } H_{ideal}[n] = \begin{cases} \frac{\text{Sen}(\frac{\pi n}{L})}{\frac{\pi n}{L}} & \text{para } n \neq 0 \\ 1 & \text{para el caso en que } n = 0 \end{cases}$$

### 7.3 Efectos de longitud de palabra finita

Bajo condiciones ideales (trabajando con un número ilimitado de bits para representar tantos coeficientes como variables), un filtro digital se comportará en la forma esperada, siempre que su diseño sea correcto. En este caso, la elección de una u otra estructura, de entre las numerosas existentes, solo influye en la complejidad y, por lo tanto, en la velocidad que puede conseguirse con un determinado hardware. Si

exceptuamos lo anterior, el comportamiento del filtro siempre será el mismo. Sin embargo en la realidad, nos encontramos con una situación diferente y algo más complicada.

Tanto coeficientes como datos deben almacenarse en registros de longitud finita. Los coeficientes cuantificados siempre provocarán un comportamiento más o menos incorrecto del sistema (por ejemplo, una respuesta en frecuencia diferente). La desviación con respecto al funcionamiento esperado dependerá de la estructura elegida (es decir, su sensibilidad) y en algunos casos puede suceder que la cuantificación de coeficientes convierta un sistema estable en inestable.

También aparece otro efecto que puede modificar el comportamiento del sistema: los resultados de las operaciones aritméticas, realizadas con números de una determinada longitud de palabra, a menudo superan la longitud original; puesto que el sistema no puede trabajar con un tamaño de palabra mayor, es necesario recortar (truncar, redondear) dichos resultados. El proceso consistente en reducir los bits con que representamos un número para poder almacenarlo con una longitud de palabra menor es "no lineal" de modo que el sistema resultante puede alejarse mucho del comportamiento lineal deseado. Así sucede cuando se originan ciclos límite como resultado de una inestabilidad. Podemos esperar, por supuesto, que los diferentes errores disminuyan conforme se incrementa la longitud de palabra empleada para almacenar coeficientes y datos. Sin embargo, una parte importante del diseño consiste en determinar la mínima longitud de palabra necesaria para que el sistema funcione correctamente, o comprobar si para un caso concreto (empleando un procesador con una longitud de palabra fija ya conocida) el comportamiento será satisfactorio dentro del margen de error tolerable. Por todas estas razones, resulta

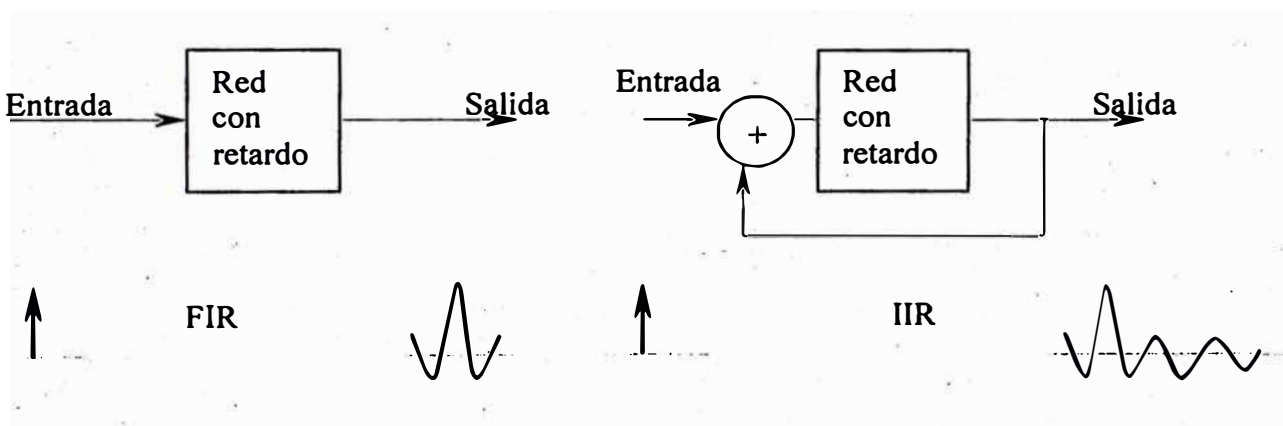
interesante investigar a fondo los problemas mencionados anteriormente. Teniendo en cuenta que es prácticamente imposible analizar en forma general un sistema que trabaja con una longitud de palabra limitada, lo habitual consiste en investigar una a una las distintas cuestiones. Para ello necesitamos un modelo del sistema y de sus señales que proporcione una descripción bastante aproximada de los efectos que se producen. Así, la influencia de la cuantificación de los coeficientes se estudia ignorando la no linealidad del sistema real. El efecto de cuantificar la señal de entrada o redondear el resultado de una multiplicación se modela añadiendo unas determinadas fuentes de ruido con las propiedades adecuadas (densidad de probabilidad), densidad espectral de potencia, correlación con las señales originales sin cuantificar, entre otras). Finalmente se estudia la existencia de ciclos límite y los métodos para evitarlos en casos mas bien sencillos, como el de un bloque de segundo orden. La investigación de los efectos de la longitud de la palabra finita es una tarea que presenta grandes desafíos y exige mucho tiempo debido al enorme número de posibles implementaciones. Se comienza eligiendo bien aritmética en punto fijo o bien en punto flotante y se continúa seleccionando uno de entre los distintos modos de reducir la longitud de la palabra de los resultados de las operaciones aritméticas. Además, existe una gran variedad de estructuras para realizar el sistema que, en general, se comportan de forma diferente bajo condiciones de palabra finita.

#### **7.4 Diseño de filtros de tiempo discreto**

El filtrado es una de las operaciones más importantes del tratamiento de señales de tiempo discreto (o el procesamiento digital de señales). Como su propio nombre lo indica, un filtro intenta separar componentes de una señal de acuerdo con algún criterio (por ejemplo, eliminar un ruido de una señal o separa dos emisoras de radio).

Se podría querer distinguir las variaciones semanales de precios del mercado de valores de las variaciones mensuales.

Hay dos tipos de filtros de tiempo discreto: los filtros FIR (respuesta al impulso infinita) y los IIR (respuesta al impulso infinita). Para ambos tipos hay dos partes distintas en el diseño: por un lado, el problema de la aproximación, donde el objetivo consiste en aproximarse a las características del filtro deseado en la medida de lo posible, y por otro, el problema de la realización, donde se realiza la función del sistema empleando hardware o software.



En el problema del diseño del filtro, la etapa de aproximación se puede dividir en cuatro partes relacionadas:

- \* Elegir una respuesta ideal deseada, normalmente en el dominio de la frecuencia.
- \* Elegir un tipo de filtro permitido (por ejemplo, una longitud  $L$  para un FIR).
- \* Elegir la medida o el criterio de aproximación.
- \* Desarrollar un método para encontrar el mejor filtro de un grupo de acuerdo con el criterio de aproximación.

Los cuatro pasos se repiten a menudo en varias ocasiones hasta obtener un filtro aceptable. Después de diseñar y evaluar el mejor filtro, se podría cambiar la

respuesta en frecuencia deseada, la clase permitida o la medida de la calidad, con lo que el filtro se volvería a diseñar.

Hay tres medidas de aproximación que se usan ampliamente: el error cuadrático mínimo, el de Chebyshev y el maximalmente plano. El error cuadrático medio es importante, pues emplea la potencia o la energía como una medida del tamaño del error. El error de Chebyshev tiene un significado físico interesante debido a que es la máxima diferencia entre lo que se quiere y lo que se tiene. Mientras que el error cuadrático y el de Chebyshev son medidas globales, la aproximación por series de Taylor es un método local que hace máxima la suavidad de la aproximación, igualando cuantas derivadas sean posibles en un punto.

### **7.5 Diseño discreto de filtros FIR**

La transformada discreta de Fourier (DFT) de la respuesta al impulso de un filtro FIR da muestras uniformemente espaciadas de su respuesta en frecuencia. Esto sugiere un método para diseñar filtros: elegida una respuesta en frecuencia ideal, se muestrea con  $L$  muestras equiespaciadas, y se toma la DFT inversa de estas muestras para obtener la respuesta al impulso del filtro.

Esta técnica se denomina método de muestreo en frecuencia y la respuesta en frecuencia del filtro diseñado será una interpolación exacta de las muestras deseadas. El principal defecto de esta aproximación es la falta de control sobre el valor de la respuesta en frecuencia de las muestras.

Un segundo método de diseño se formula para usar un número de muestras en frecuencia mayor que la longitud del filtro. Bajo estas condiciones, la respuesta en frecuencia obtenida (la actual) no pasará generalmente sobre las muestras

especificadas, pero se puede diseñar fácilmente un filtro cuya respuesta tenga el error cuadrático medio mínimo sobre las muestras de frecuencia.

### 7.5.1 Diseño de filtros FIR por el método de muestreo en frecuencia

Este método diseña un filtro cuya respuesta en frecuencia pasa exactamente por las muestras especificadas de la respuesta en frecuencia deseada y, por tanto, es una técnica de interpolación. La base del diseño de filtros es la que sigue. Puesto que la Transformada Discreta de Fourier (DTF) de la respuesta al impulso de un filtro FIR es un conjunto equiespaciado de muestras de su respuesta en frecuencia, la DTF inversa de la muestras es la respuesta al impulso del filtro.

La respuesta en frecuencia de un filtro FIR de longitud  $L$  viene dada por la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) de la respuesta al impulso

$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]e^{-j\omega n}$ . La DTF de longitud  $L$  de  $h[n]$  es un conjunto de  $L$

muestras sobre  $\omega$  equiespaciadas de  $H(e^{j\omega})$  de cero a  $2\pi$  dado por  $H_k = H(e^{j2k\pi/L}) =$

$\sum_{n=0}^{L-1} h[n]e^{-j2kn\pi/L}$  con  $k=0, 1, 2, \dots, L-1$ . Puesto que la longitud del filtro es igual

que el número de muestras en frecuencia, la IDTF de las muestras de la respuesta en

frecuencia deseada  $H_d(e^{j\omega})$  es la respuesta al impulso  $h[n] = \text{IDTF} \{ H_d(e^{j2k\pi/L}) \}$

$$= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} H_k e^{j2kn\pi/L}.$$

La respuesta en frecuencia del filtro deseado coincidirá exactamente con las muestras interpoladas de la respuesta en frecuencia deseada.

En el caso general,  $h[n]$  y  $H(e^{j\omega})$  son valores complejos, lo que significa que hay  $2L$  grados de libertad y  $2L$  ecuaciones necesarias para determinar los  $2L$  desconocidos. Las muestras de la respuesta en frecuencia están equiespaciadas en el rango de frecuencias de  $\omega$  de  $-\pi$  a  $\pi$  o de  $0$  a  $2\pi$ .

La mayoría de los problemas de diseños de filtros prácticos tiene restricciones. La respuesta al impulso  $h[n]$  normalmente es real, lo que significa que la parte real de  $H(e^{j\omega})$  debe ser una función par y su parte imaginaria debe ser impar. Por lo tanto solo hay  $L$  grados de libertad.

Si la respuesta en frecuencia tiene fase lineal, la respuesta al impulso es simétrica o antisimétrica y por tanto tenemos el orden de la mitad de grados de libertad de su longitud.

Es importante que se entienda una diferencia inherente entre la respuesta en frecuencia del filtro de longitud par y otro impar. La respuesta en frecuencia de un filtro de fase lineal de longitud par simétrico debe ser cero en  $\omega = \pi$ . El retardo de grupo, o la derivada de la fase, es un número entero para un filtro de longitud impar y un múltiplo impar de un medio para longitud par.

La respuesta en frecuencia de un filtro se puede expresar en varios modos.  $H(e^{j\omega})$  se puede descomponer en sus partes real e imaginaria, ambas funciones reales en la variable  $\omega$ , pero normalmente no es lo que se desea. En la mayoría de los casos, en concreto para filtros de fase lineal, se prefiere expresarla en función del módulo y de la fase de la respuesta en frecuencia de esta manera:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}, \text{ donde } |H(e^{j\omega})| = \sqrt{\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\}^2 + \operatorname{Im}\{H(e^{j\omega})\}^2}.$$



$$\phi(\omega) = \text{ArcTg} \left( \frac{\text{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\text{Re}\{H(e^{j\omega})\}} \right)$$

La descripción de amplitud - fase de los valores complejos de  $H(e^{j\omega})$  tiene problemas cuando  $H(z)$  tiene ceros exactamente en la circunferencia de radio unidad.  $|H(e^{j\omega})|$  no será analítica, ya que tendrá discontinuidades en dichos ceros, y la fase presentará saltos de valor igual a un múltiplo impar de  $\pi$ . Estos problemas se pueden eliminar empleando la función de amplitud  $A(\omega)$ , en vez del módulo de la respuesta en frecuencia  $|H(e^{j\omega})|$ , donde  $|H(e^{j\omega})| = A(\omega) e^{j\Theta(\omega)}$  y  $A(\omega) = \pm |H(e^{j\omega})|$  es real pero puede tomar valores positivos o negativos, ya que es necesario para suavizar  $A(\omega)$  y eliminar las discontinuidades de  $\pi$  en la fase.  $\Theta(\omega)$  es la fase de la respuesta en frecuencia consistente con  $A(\omega)$  y es igual a  $\phi(\omega)$  con las discontinuidades eliminadas. Si  $h[n]$  es real,  $A(\omega)$  y  $|H(e^{j\omega})|$  son funciones reales pares en  $\omega$  y  $\phi(\omega)$  y  $\Theta(\omega)$  son funciones impares.

Es importante distinguir que para filtros de fase lineal  $H(e^{j\omega})$  y  $|H(e^{j\omega})|$  son periódicas en  $\omega$  de período  $2\pi$ , pero  $A(\omega)$  es periódica de período  $2\pi$  si  $L$  es impar y  $4\pi$  si  $L$  es par.

Un filtro de fase lineal se define como aquel en cuya descripción amplitud-fase viene dada por  $\Theta(\omega) = K\omega$ .

Un filtro de fase estrictamente lineal definido en función del módulo y con  $\phi(\omega) = K(\omega)$  es normalmente demasiado restrictivo. La definición más empleada en términos de la función de amplitud es  $H(\omega) = A(\omega) e^{-jK\omega}$  la cual permite trabajar con

la función real  $A(\omega)$  y situar toda la información de fase en un número  $K$ , que es el retardo de grupo.

Se pueden obtener fórmulas de diseño especiales que incluyen las condiciones derivadas del hecho que  $h[n]$  sea real y de fase lineal y que se emplean más que la general determinada por la IDTF. Dichas fórmulas están en función de  $L$  muestras en

$\omega$  de la función de amplitud  $A(\omega)$  de cero a  $2\pi$  y viene dadas por:  $A_k = A \frac{2\pi k}{L}$ .

La respuesta al impulso para  $L$  impar se puede obtener

$$h[n] = \frac{1}{L} \left[ A_0 + \sum_{k=1}^M 2A_k \cos \frac{2\pi(n-M)k}{L} \right],$$

donde la constante de linealidad de fase se expresa como  $K = -M = -1/2(L-1)$ , siendo  $H_k = A(2k\pi/L) e^{-j2k\pi(L-1)/L}$  las

muestras de la respuesta en frecuencia relacionadas con las muestras de la función de amplitud y de la fase lineal.

Si la longitud es par, la respuesta al impulso es  $h[n] =$

$$\frac{1}{L} \left[ A_0 + \sum_{k=1}^{L/2-1} 2A_k \cos \frac{2\pi(n-M)k}{L} \right]$$

con la misma constante de linealidad.

Las discusiones anteriores asumen que las muestras en frecuencia están en  $\omega_k = 2k\pi/L$ . La otra posibilidad consiste en muestras equiespaciadas situadas en  $\omega_k = (2k+1)\pi/L$ , con una fórmula de diseño para una longitud impar  $h[n] =$

$$\frac{1}{L} \left[ (-1)^M A_M + \sum_{k=0}^{M-1} 2A_k \cos \frac{2\pi(n-M)(k+1/2)}{L} \right]$$

de nuevo con  $M = (L-1)/2$ . La

respuesta al impulso para un filtro de longitud par es  $h[n]=$

$$\frac{1}{L} \left[ \sum_{k=0}^{L/2-1} 2A_k \cos \frac{2\pi(n-M)(k+1/2)}{L} \right]$$

### 7.5.2 Diseño de Filtros FIR con funciones ventana

Aunque los métodos de diseño por aproximación del error cuadrático mínimo tiene características muy atractivas, el fenómeno de Gibbs lo hace en algunas ocasiones cuestionable, ya que se produce una sobreoscilación relativamente grande en las cercanías de la discontinuidad de la respuesta ideal. Esta sobreoscilación se debe al truncamiento abrupto de la respuesta al impulso de duración infinita, de manera que usando diversas funciones ventana se puede truncar la secuencia de manera más suave. El resultado es un método híbrido que parte de aproximación del error cuadrático mínimo, y se modifica para reducir el error de Chebyshev. El método de la ventana es una alternativa para definir  $H_d(e^{j\omega})$  con bandas de transición.

El método de la ventana para diseñar filtros FIR comienza con una aproximación según el error cuadrático mínimo. Si el filtro deseado tiene una respuesta pasa bajo

básica, la respuesta al impulso óptimo es  $\hat{h}_d(n) = \frac{\text{Sen}(\omega_0 n)}{\pi n}$ , la versión truncada y

desplazada es:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\text{Sen}(\omega_0(n-M))}{\pi(n-M)} & \text{para } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

para  $M = (L - 1) / 2$ . El truncamiento se obtenía multiplicando la respuesta al impulso óptimo por una función rectangular.

La interpretación matemática rigurosamente analizada con notación normalizada consiste en considerar inicialmente una respuesta en frecuencia ideal deseada, dada

por:  $H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n}$ , donde  $h_d[n]$  es la correspondiente secuencia de

la respuesta impulso, que puede ser expresada en términos de  $H_d[e^{j\omega}]$  por:

$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ , es decir que puede determinarse los coeficientes

de la serie de Fourier correspondiente.

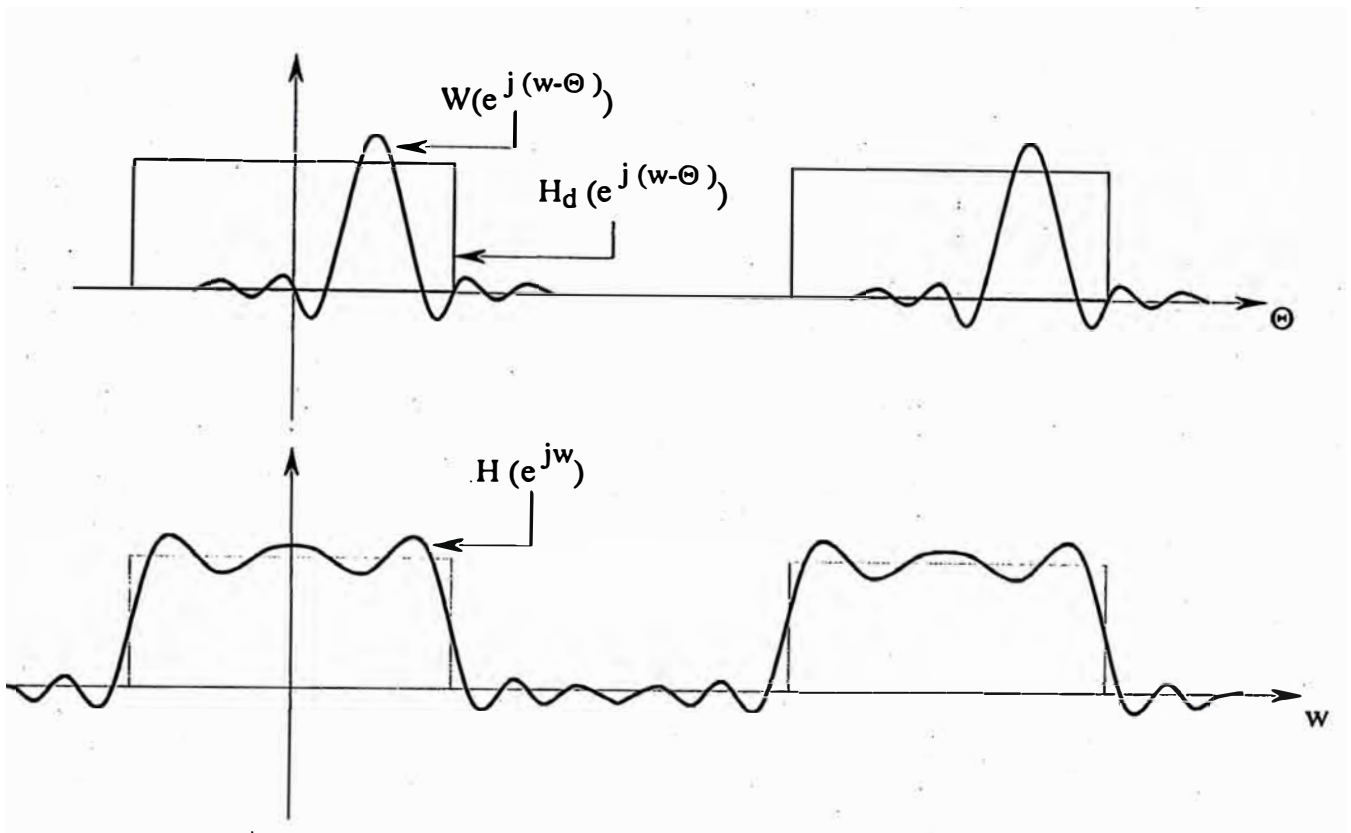
El problema radica en que si existe un truncamiento, por la cantidad de términos a considerar, debe tenerse en cuenta el fenómeno de Gibbs, que reproduce una convergencia no uniforme cercana justo en la frecuencia de corte.

Por otro lado el camino más sencillo para obtener un filtro FIR causal de  $h_d[n]$ , es definir un nuevo sistema con respuesta impulso  $h[n]$ , dado por:  $h[n] = h_d[n]$ ;  $0 \leq n \leq M$  ( $M$  es el orden del sistema de la función polinomial,  $M + 1$  es la longitud de la duración respuesta impulso de un filtro FIR). De esta manera  $w[n] = 1$ ,  $0 \leq n \leq M$ .

Finalmente la respuesta en frecuencia está dado por:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Theta}) W(e^{j(\omega-\Theta)}) d\Theta.$$

$$\text{Además } W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = e^{-j\omega M/2} \left( \frac{\text{Sen}[\omega(M+1)/2]}{\text{Sen}(\omega/2)} \right)$$



En el diseño de muchos tipos de filtros FIR, es deseable obtener sistemas causales con una respuesta de fase lineal. Con respecto a los tipos de ventanas comúnmente usados, es notable considerar que tiene la propiedad:  $w[n] = w[M - n]$ , si  $0 \leq n \leq M$ , es decir existe simetría cerca de  $M/2$ . Como resultado sus transformadas de Fourier son de la forma:

$W(e^{jw}) = W_e(e^{jw}) e^{-jwM/2}$ , donde  $W_e(e^{jw})$  es una función par real de  $w$ , asimismo la respuesta en frecuencia de su fase lineal es:  $H(e^{jw}) = A_e(e^{jw}) e^{-jwM/2}$ , donde  $A_e(e^{jw})$  es real y es una función par de  $w$ , es decir:  $H(e^{jw}) = jA_o(e^{jw}) e^{-jwM/2}$ , donde  $A_o(e^{jw})$  es una función impar de  $w$ ; por lo tanto:  $H_d(e^{jw}) = H_e(e^{jw})$

$e^{-j\omega M/2}$ , donde  $H_e(e^{j\omega})$  es real y par. La expresión que resulta de obtener  $H(e^{j\omega})$

es:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{-j\Theta}) e^{j\Theta M/2} W_e(e^{j(\omega-\Theta)}) e^{-j(\omega-\Theta)M/2} d\omega = A_e(e^{j\omega}) e^{-j\omega M/2}$$

, donde  $A_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\Theta}) W_e(e^{j(\omega-\Theta)}) d\Theta$ , así resulta que la función  $A_e$

$(e^{j\omega})$  es el resultado de la convolución de las funciones reales  $H_e(e^{j\omega})$  y  $W_e(e^{j\omega})$ .

La multiplicación en el dominio del tiempo por un rectángulo es una convolución con una función  $\frac{\text{Sen}x}{x}$  en el dominio de la frecuencia. Puesto que esto es lo que causa el efecto Gibbs, posteriormente se multiplicará por una función ventana que tiene una Transformada de Fourier más suave debido a que presenta lóbulos laterales de menor amplitud.

Un método para suavizar el rizado causado por la función  $\frac{\text{Sen}x}{x}$ , consiste en emplear ésta en el dominio de la frecuencia. Esto se traduce en el dominio del tiempo que la ventana es una función triangular, también denominada ventana Barlett.

Las cuatro ventanas coseno generalizadas vienen dadas por:

$$W[n] = \begin{cases} a - b\text{Cos}\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + c\text{Cos}\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right) & \text{para } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Los nombres de las ventanas y de sus parámetros son:

Tabla 5.

Ventana	a	b	c
Rectangular	1	0	0
Hanning	0.5	-0.5	0
Hamming	0.54	-0.46	0
Blackman	0.42	-0.5	0.08

- \* Ventana Rectangular:  $w[n]=1$ , si  $0 \leq n \leq M$ ;  
 $w[n]=0$ , en otro caso.
- \* Ventana Bartlett (Triangular):  $w[n]=2n/M$ , si  $0 \leq n \leq M/2$ ;  
 $w[n]=2-(2n/M)$ , si  $M/2 \leq n \leq M$ ;  
 $w[n]=0$ , en otro caso.
- \* Ventana Hanning  $w[n]=0.5-0.5\cos(2\pi n/M)$ , si  $0 \leq n \leq M$ ;  
 $w[n]=0$ , en otro caso.
- \* Ventana Hamming  $w[n]=0.54-0.46\cos(2\pi n/M)$ , si  $0 \leq n \leq M$ ;  
 $w[n]=0$ , en otro caso.
- \* Ventana Blackman  $w[n]=0.42-0.5\cos(2\pi n/M)+0.08\cos(4\pi n/M)$ ,  
si  $0 \leq n \leq M$ ;  
 $w[n]=0$ , en otro caso.

Una ventana más flexible es la de Kaiser, que viene expresada como:

$$W[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta\sqrt{1-[2(n-M)/(L-1)]^2})}{I_0(\beta)} & \text{para } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Donde  $M = (L - 1) / 2$ ,  $I_0(x)$  es una función de Bessel modificada de primera clase y de orden cero, y  $\beta$  es un parámetro para ajustar la anchura y la forma de la ventana.

Las ventanas coseno generalizadas no poseen la capacidad de ajustar el compromiso entre la anchura de la banda de transición y los picos de las oscilaciones, y por lo tanto, no son unas herramientas flexibles en el diseño de filtros.

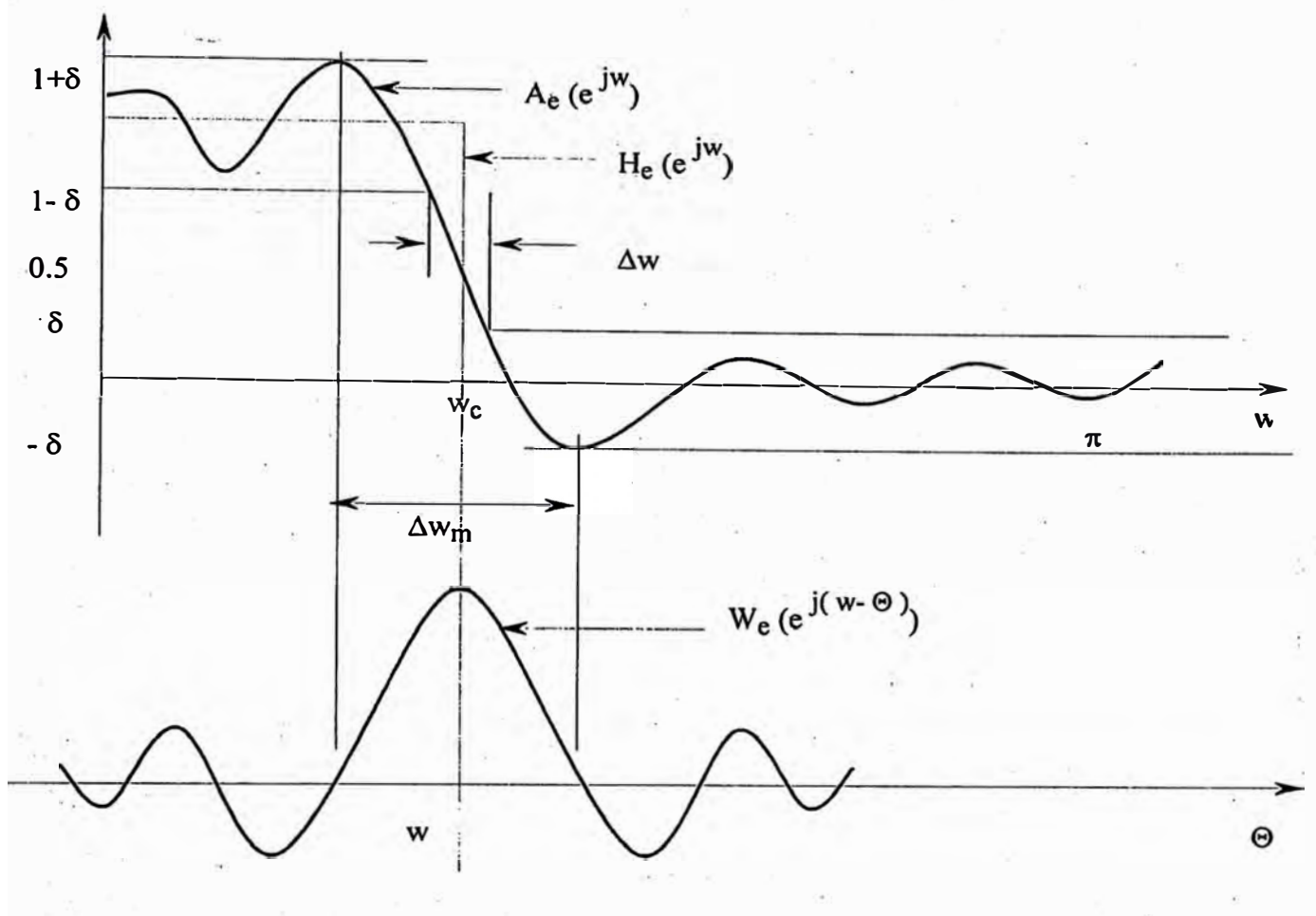
La ventana de Kaiser sin embargo, tiene un parámetro  $\beta$  que permite tener este compromiso y, por lo tanto, la hace una ventana de aproximación óptima. Una fórmula empírica para  $\beta$  que minimiza la sobre oscilación de Gibbs es:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50. \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50. \\ 0.0, & A < 21 \end{cases}$$

donde:  $A = -20 \log_{10} \delta$ , el valor de  $\Delta = \omega_s - \omega_p$  y por último  $L - 1 = (A - 8) / 2.285 \Delta$

Siendo  $\delta$  el máximo rizado entre las bandas de paso y eliminada. El valor de  $\delta$  es determinado de acuerdo a una selección de  $\beta$ . Entonces dado que  $\delta$  es fijo, la frecuencia de corte  $\omega_p$  del filtro pasabajo está definido por la más alta frecuencia tal que  $|H(e^{j\omega})| \geq 1 - \delta$ . La otra frecuencia de corte  $\omega_p$  está definido por la más baja frecuencia tal que  $|H(e^{j\omega})| \leq \delta$ .





Ya que las ventanas de Bartlett, Hanning y Blackmann son cero en sus puntos extremos, la multiplicación por ellas reduce la longitud del filtro en 2. Lo anterior no es necesario para las ventanas de Hamming y de Kaiser. Las ventanas se pueden usar tanto en el diseño de un filtro pasa bajo ideal clásico, así como para suavizar una discontinuidad de cualquier respuesta ideal.

Otro aspecto alternativo que se puede sustentar matemáticamente son los que se detallan. Los objetivos que se consideran entre el ancho del mayor lóbulo y el área de la banda, pueden ser cuantificados por la búsqueda de la función ventana que está máximamente concentrada cerca de  $\omega = 0$  en el dominio de la frecuencia. Una cercana aproximación de la ventana con estas consideraciones pueden formarse

usando la función modificada de Bessel del primer tipo de orden cero. La ventana Káiser está definida por:

$$w[n] = \frac{I_0 \left[ \beta \sqrt{1 - \left[ \frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2} \right]}{I_0(\beta)}, \text{ donde } I_0 \text{ representa la función Bessel modificada de}$$

orden cero del primer tipo.

Comparación de la ventana Káiser con otras ventanas:

Tabla 6.

Tipo de ventana	Amplitud lateral de lóbulo (relativo)	Ancho aproximado del lóbulo mayor	Error de aproximación $20 \log_{10} \delta$	Ventana Káiser equivalente $\beta$	Ancho de transición (equivalente Káiser)
Rectangular	-13	$4\pi / (M + 1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

Debe considerarse que  $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ , además:  $I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^M \left( \frac{(x/2)^m}{m!} \right)^2$

En realidad cuando se trata de diseñar un filtro pasabajo lo importante es tratar de establecer la pendiente de caída, donde se refleja que en un filtro pasabajo ideal, como el que se conoce:

$h[n] = h_d[n]$ ,  $0 \leq n \leq M$ , en realidad lo que se trata es de minimizar la expresión

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega. \text{ Si se considerara un filtro causal del Tipo I}$$

lineal en fase, es conveniente considerar el diseño de fase cero, es decir un filtro que posea  $h_e[n] = h_e[-n]$  y luego insertar un retardo para hacerlo al filtro causal. De esta

manera su respuesta en frecuencia está dada por:  $A_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h_e[n] e^{-j\omega n}$ , con  $L =$

$M/2$  entero; pero por otro lado  $A_e(e^{j\omega}) = h_e[0] + \sum_{n=1}^L 2h_e[n] \cos(\omega n)$ . Notando que

$A_e(e^{j\omega})$  es una función real, par y periódica de  $\omega$ . Un sistema causal puede ser

obtenido de  $h_e[n]$  por el retardo de  $L = M/2$  muestras. El sistema resultante tiene una

respuesta impulso  $h[n] = h_e[n - M/2] = h_e[M - n]$  y respuesta en frecuencia  $H_e(e^{j\omega}) =$

$A_e(e^{j\omega}) e^{-j\omega M/2}$ . En la figura se muestra la tolerancia para una aproximación de un

filtro pasabajo con una función real  $A_e(e^{j\omega})$  además el objetivo consiste en utilizar

un algoritmo que reúna todas estas especificaciones para variar los comprimidos  $L+1$

valores de la respuesta impulso de  $h_e[n]$ , donde  $0 \leq n \leq L$ .

Un algoritmo eficiente es el del Parks y Mc Clellan que se basan en el término

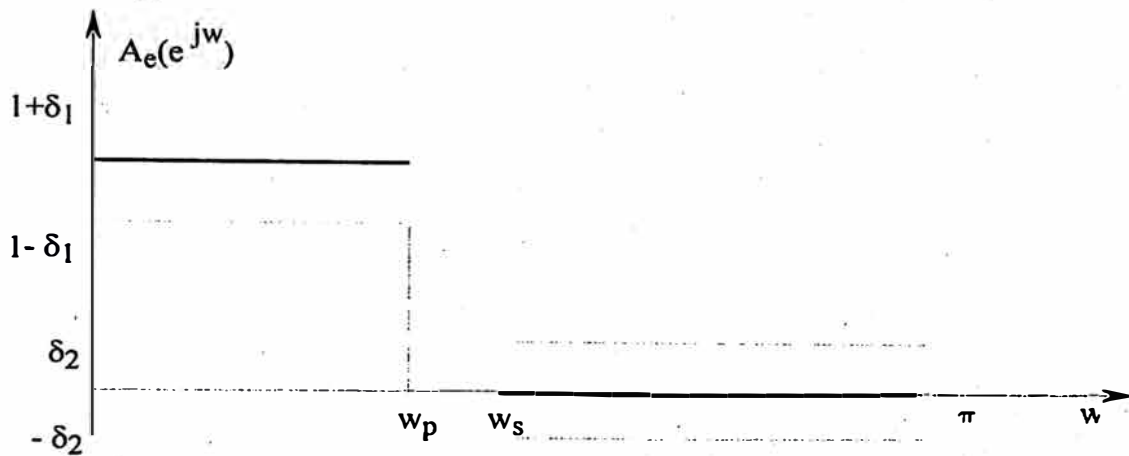
$\cos(\omega n)$ , que se utiliza  $\cos(\omega n) = T_n(\cos \omega n)$ , donde  $T_n(x)$  es el polinomio de

Chebyshev de  $n$ -orden definido como  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ . Por lo tanto la

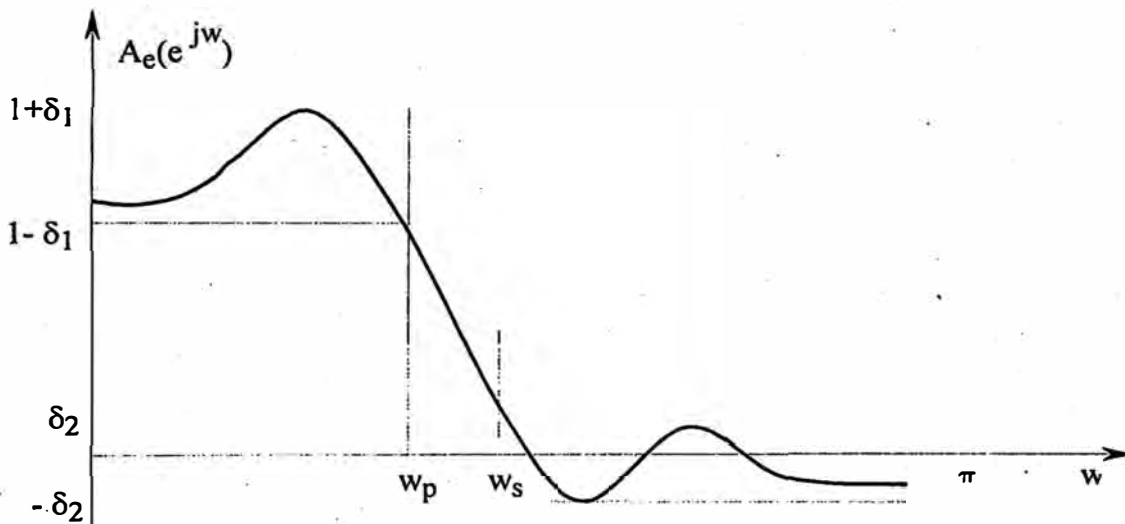
expresión de la respuesta en frecuencia  $A_e(e^{j\omega})$  resulta:  $A_e(e^{j\omega}) = h_e[0] +$

$$\sum_{n=1}^L 2h_e[n] \cos(\omega n) = \sum_{k=0}^L a_k \cos^k(\omega), \text{ que finalmente puede ser reconocido como el}$$

polinomio de  $L$ -orden en  $\cos \omega$ .



La respuesta en frecuencia típica resulta:



### 7.6 Optimización de filtros pasa bajos FIR tipo I .

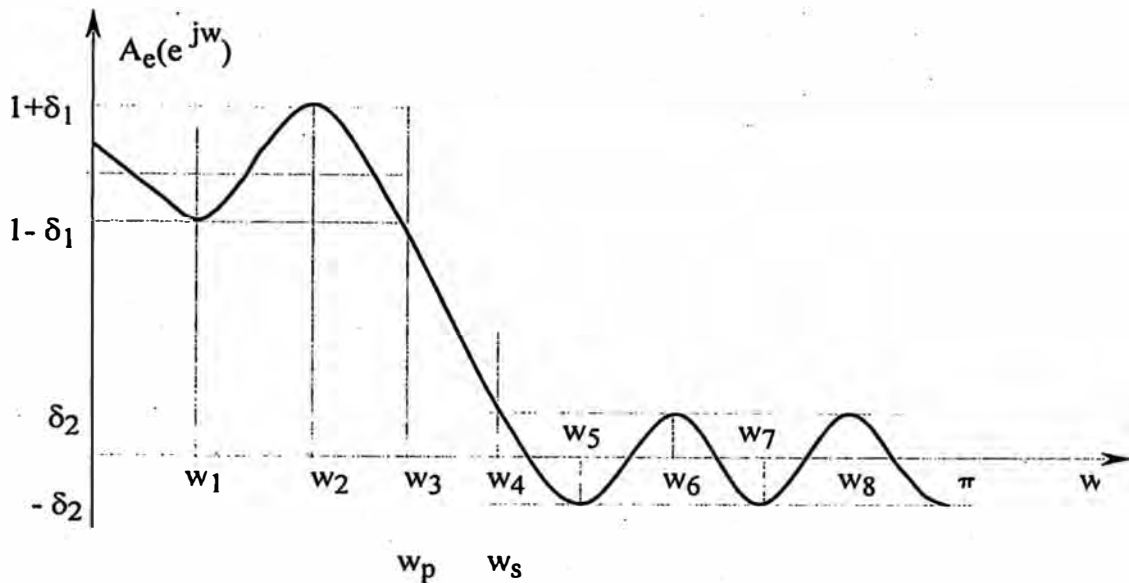
Para los filtros Tipo I, el polinomio  $P(x)$  es el coseno polinomial  $A_e(e^{j\omega})$ ,

haciendo  $x = \cos \omega$  y  $r = L$ :  $P(\cos \omega) = \sum_{k=0}^L a_k \cos^k(\omega)$ . Si además generamos  $D_p(x)$

como la respuesta en frecuencia deseada del filtro pasabajo, con  $x = \cos \omega$ :

$$D_p(\cos \omega) = \begin{cases} 1, & \cos \omega_p \leq \cos \omega \leq 1 \\ 0, & -1 \leq \cos \omega \leq \cos \omega_s \end{cases}$$

En este caso típico para  $L = 7$ , la gráfica que se muestra con las alternaciones:



Características del filtro Tipo I:

- \* El número máximo posible de alternaciones de error es  $(L+3)$
- \* Las alternaciones siempre ocurrirán en  $w_s$  y  $w_p$ .
- \* El filtro tendrá un equirizado en todos los puntos de corte excepto posiblemente en 0 y en  $\pi$

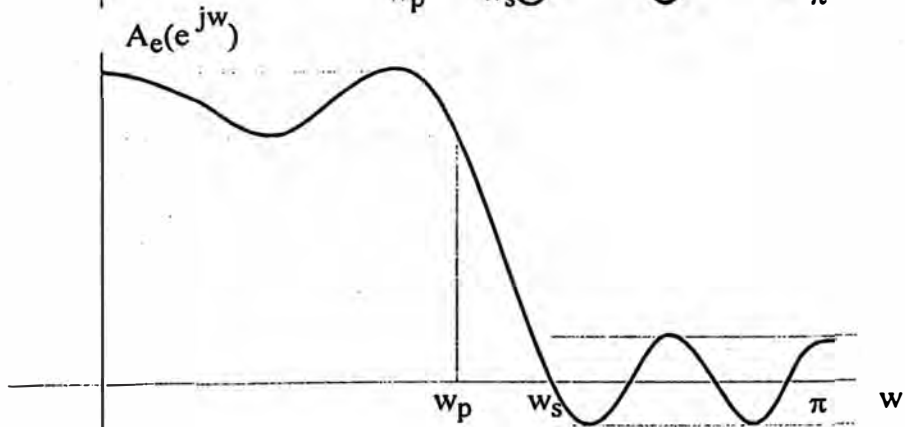
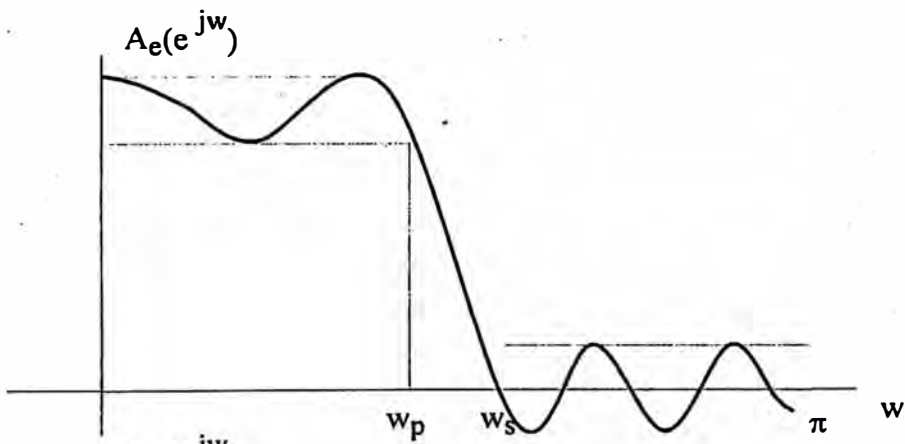
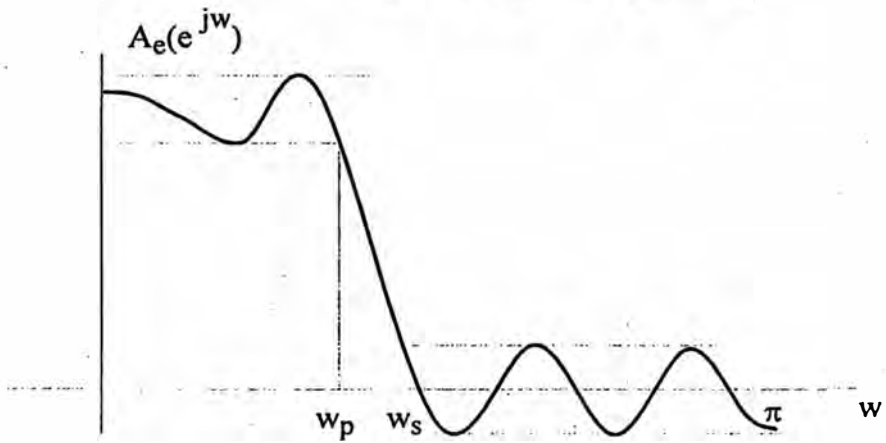
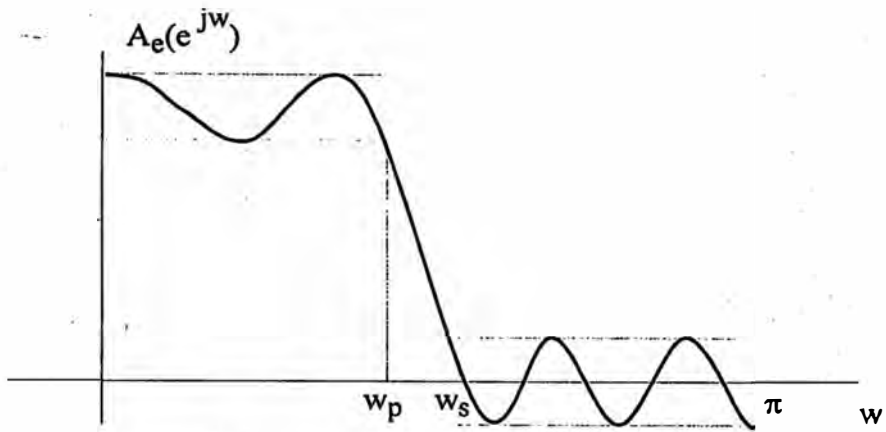
Ahora bien, considerando las posibles aproximaciones óptimas para  $L = 7$

$L + 3$  alternaciones

$L + 2$  alternaciones ( extremo en  $w = \pi$ )

$L + 2$  alternaciones ( extremo en  $w = 0$ )

$L + 2$  alternaciones ( extremo en  $w = \pi$  y  $w = 0$ )



### 7.7 Optimización de filtros pasa bajos FIR tipo II

Los filtros tipo II son aquellos en el que  $h[n]=0$  fuera del rango  $0 \leq n \leq M$ , con la longitud del filtro  $(M + 1)$  par, es decir  $M$  impar y con la propiedad de simetría:  $h[n]=h[M-n]$ . Consecuentemente la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  puede ser expresada en la forma:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} 2h[n] \cos\left[\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right].$$

Haciendo  $b[n]=2h[(M + 1)/2 - n]$ ,  $n = 1, 2, \dots, (M + 1)/2$ , entonces podemos expresar la respuesta en frecuencia de la forma:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left\{ \sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \right\}.$$

Ahora bien, debido a la alternación:

$$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = \cos(\omega/2) \sum_{n=0}^{(M-1)/2} b[n] \cos n\omega.$$

Por lo tanto  $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \cos(\omega/2) P(\cos \omega)$ , donde  $P(\cos \omega) = \sum_{k=0}^L a_k \cos^k(\omega)$ , con  $L = (M - 1) / 2$ .

Además  $H_d(e^{j\omega}) = D_P(\cos \omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$

**7.8 El algoritmo de Parks – McClellan**

Estableciendo que un filtro óptimo  $A_e(e^{jw})$  satisface la ecuación:  $W(w_i)[A_e(e^{jw_i}) - A_e(e^{jw_{i+1}})] = (-1)^{i+1} \delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, (L + 2)$ . Donde  $\delta$  es el error óptimo y  $A_e(e^{jw}) = h_e[0] + \sum_{n=1}^L 2h_e[n] \text{Cos}(wn)$ . En este caso  $x_i = \text{Cos}w_i$ . Si  $w_1 = w_p$ , entonces  $w_{L+1} = w_s$ .

Parks y McClellan determinaron que  $\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(e^{jw_k})}{\sum_{k=1}^{L+2} b_k (-1)^{k+1} W(w_k)}$ ;  $b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{x_k - x_i}$ .

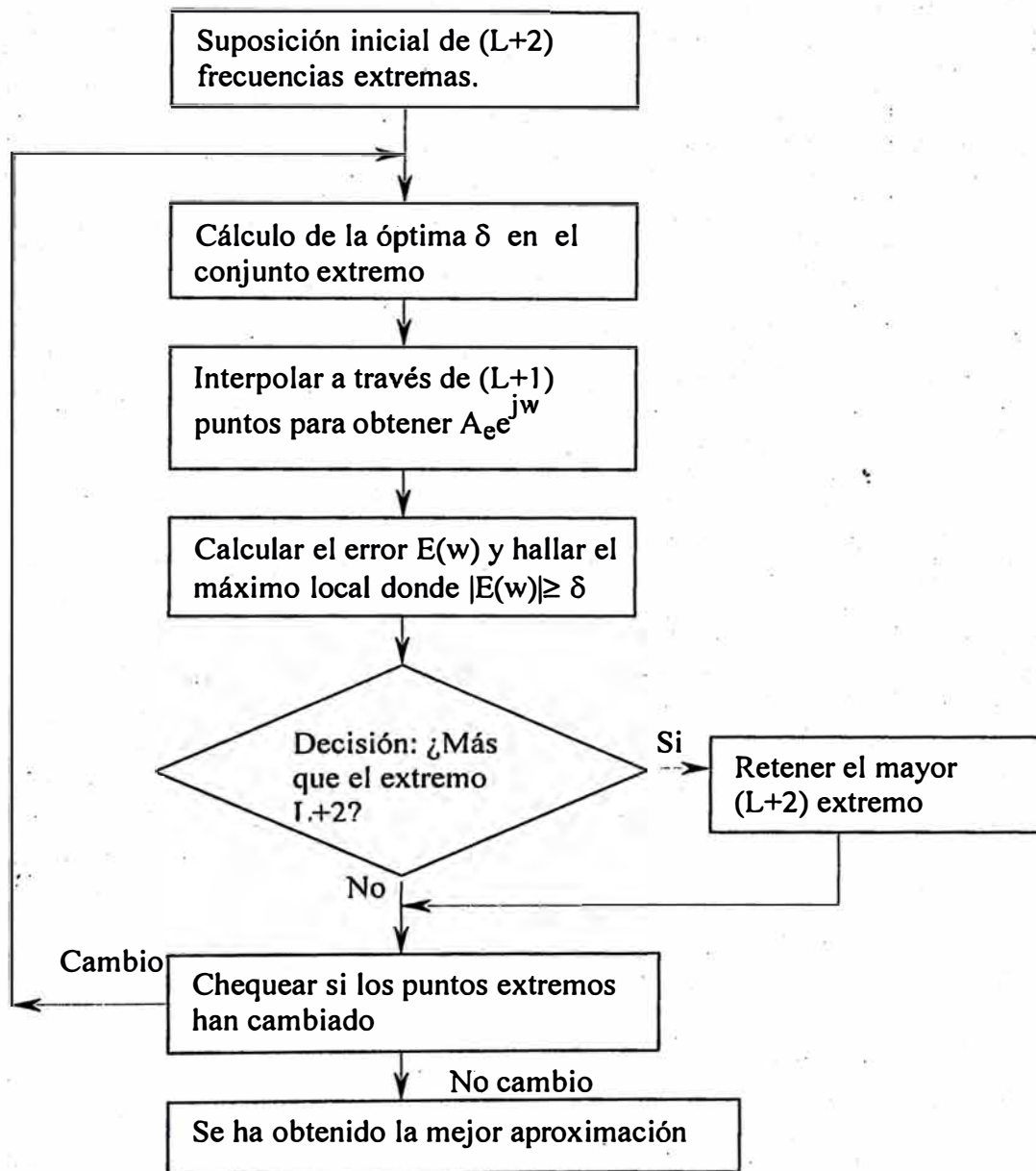
Además obtuvieron que:

$A_e(e^{jw}) = P(\text{Cos}w) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} \frac{d_k}{x - x_k} C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} \frac{d}{x - x_k}}$ , donde  $x = \text{Cos}w$ ;  $x_i = \text{Cos}w_i$ . Por otro lado:

$C_k = H_d(e^{jw_k}) - \frac{(-1)^{k+1} \delta}{W(w_k)}$ , y  $d_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_i} = b_k (x_k - x_{L+2})$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^L & \frac{1}{W(w_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^L & -\frac{1}{W(w_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & \dots & x_{L+2}^L & \frac{(-1)^{L+2}}{W(w_{L+2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(e^{jw_1}) \\ H_d(e^{jw_2}) \\ \vdots \\ \vdots \\ H_d(e^{jw_{L+2}}) \end{bmatrix}$$





## 7.9 Diseño Chebyshev de filtros FIR

Una de las medidas del error más importantes en el diseño de filtros FIR óptimos es la máxima diferencia entre la respuesta en frecuencia deseada y la respuesta en frecuencia actual sobre un rango de frecuencias de interés. Este se denomina error de Chebyshev y es el más obvio en una evaluación visual de la respuesta en frecuencia. Cuando se minimiza, el error toma una forma que oscila con rizado constante. En el problema de diseño de un filtro, la minimización de este error se hace normalmente empleando el algoritmo de Parks – McClellan. Las características de la solución se describen a través del teorema de la alternancia. El algoritmo de cambio de Remez es empleado por Parks - McClellan.

### 7.10 El teorema de la alternancia

El teorema de la alternancia establece que una aproximación de Chebyshev óptima tendrá una función de error cuyo rizado presenta un número dado de oscilaciones de igual módulo y que alternan en signo. El algoritmo de cambio de Remez es un claro método de construcción de una aproximación a la solución de Chebyshev de rizado constante. En vez de minimizar directamente el error de Chebyshev, este algoritmo cambia sucesivamente las mejores aproximaciones de las posiciones del error del rizado. Así se garantiza la convergencia de la solución óptima de rizado constante bajo condiciones bastante generales y es la base del algoritmo de Parks - McClellan para diseñar filtros de fase lineal.

La respuesta en frecuencia de un filtro FIR de longitud  $L$  con una respuesta al impulso  $h[n]$  viene dada por la DTFT como  $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]e^{-j\omega n}$ . Para un filtro

FIR de fase lineal y longitud impar, la respuesta al impulso puede tener simetría par

y por lo tanto la ecuación anterior se convierte en:  $H(e^{jw}) = e^{-jMw} \sum_{n=0}^M a[n] \text{Cos}(nw)$

donde  $M = (L - 1) / 2$  es el retardo de grupo del filtro y la constante de linealidad para la fase. Entonces se puede escribir  $H(e^{jw}) = e^{-jMw} A(w)$  donde  $A(w) =$

$\sum_{n=0}^M a[n] \text{Cos}(nw)$  es una función par de valores reales denominada función de amplitud. Los coeficientes de  $a[n]$  de los términos coseno se relacionan con la respuesta al impulso mediante

$$a[n] = \begin{cases} h(M) & \text{para } n = 0 \\ 2h(n - M) & \text{para } 0 < n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El problema del diseño del filtro con la aproximación de Chebyshev consiste en encontrar los  $a[n]$  que minimizan el error medido como  $\epsilon = \max_{w \in \Omega} |A_d(w) - A(w)|$

donde  $\Omega$  es un subconjunto compacto de frecuencias incluidas en la banda  $w \in [0, \pi]$ . Esta es la unión de las bandas de frecuencia sobre las que se realiza la aproximación. Dichas bandas son las bandas de paso y la eliminada del filtro dado y pueden ser puntos aislados.

El teorema de la alternancia de la teoría de Chebyshev establece que si  $A(w)$  es una combinación lineal de  $r$  ( $r = M + 1$  para  $M$  impar) funciones coseno, una condición necesaria y suficiente para que  $A(w)$  sea la única aproximación óptima en el sentido de Chebyshev a  $A_d(w)$  sobre las frecuencias  $w \in \Omega$  que es la función de error  $E(w) = A(w) - A_d(w)$  tenga al menos  $r + 1$  (o  $M + 2$ ) frecuencias extremas en  $\Omega$ .

Estas frecuencias extremas son puntos tales que  $E(w_k) = -E(w_{k+1})$ , para  $k = 1, 2, \dots, r$ , donde  $w_1 < w_2 < \dots < w_r < w_{r+1}$  y  $|E(w_k)| = \delta = \max_{w \in \Omega} |E(w)|$  para  $1 \leq k \leq r + 1$ .

El teorema de la alternancia establece que la aproximación de Chebyshev óptima tiene necesariamente un error de rizado constante, presenta bastante rizado y además es única.

### 7.11 El algoritmo de cambio de Remez

Es un método que construye una aproximación al error de rizado constante y satisface las condiciones del teorema de la alternancia para la optimización. Lo anterior se consigue cambiando aproximaciones viejas de frecuencia extremas por otras mejores. El método tiene dos pasos distintos. El primero calcula la aproximación de Chebyshev óptima sobre  $r + 1$  ( $M + 2$ ) puntos de frecuencia

diferentes resolviendo  $A_d(w_k) = \sum_{n=0}^{r-1} a[n] \cos(nw_k) + (-1)^k \delta$  para  $k = 1, 2, \dots, r + 1$ .

Para los  $r$  valores de  $a[n]$  y para  $\delta$ . El segundo paso calcula las frecuencias extremas de  $A(w)$  sobre una gran densidad de frecuencias que cubren  $\Omega$ , encontrando el error local máximo y mínimo sobre  $\Omega$ . El algoritmo establece que si se parte de unos valores iniciales de  $r + 1$  ( $M + 2$ ) frecuencias extremas, calcula los  $a[n]$  sobre estas frecuencias empleando la ecuación anterior, encuentra un nuevo conjunto de frecuencias extremas de  $A(w)$  sobre  $\Omega$  utilizando la ecuación de la respuesta en frecuencia dado en el teorema de la alternancia, e itera estos cálculos, las soluciones convergen a la aproximación óptima.

### 7.12 Diseño discreto de filtros IIR

Los filtros de tiempo discreto con una respuesta al impulso de duración infinita (IIR) son los sistemas más genéricos de tratamiento digital de la señal. Cada punto de salida se calcula a través de una ecuación en diferencias recursiva:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

en la cual se asume que  $a_k$  y  $b_m$  no son

funciones de la variable de tiempo discreto  $n$ .

Un filtro FIR es un caso particular donde  $N = 0$  y sólo se emplean muestras pasadas de la señal de entrada. El problema de diseño consiste en tomar las especificaciones del sistema deseado, dadas normalmente en el dominio de la frecuencia, y encontrar el conjunto de coeficientes  $a_k$  y  $b_m$  que más se les aproximen o las satisfagan. El filtro FIR de tiempo discreto es análogo al filtro RLC de tiempo continuo o a filtro activo RC. En realidad, uno de los métodos de diseño de filtros IIR, parte del diseño de un prototipo de tiempo continuo que se convierte en el filtro equivalente de tiempo discreto.

La ventaja de los filtros IIR sobre los FIR está en su mayor eficiencia. A menudo se puede satisfacer un conjunto de especificaciones empleando un filtro IIR con un orden significativo menor que el de un FIR. Las desventajas de los filtros IIR se encuentran en los problemas debidos a la estabilidad y a los efectos de cuantificación, en la imposibilidad de conseguir respuestas en frecuencia con fases exactamente lineales, y en que los algoritmos de diseño son más complicados. La mayoría de las características positivas y negativas se deben a la realimentación propia de los filtros IIR. Esta realimentación de valores pasados es la que puede causar que el filtro se vuelva inestable o amplifique los efectos debidos a la

cuantificación numérica, y es la realimentación la que produce la duración infinita de la respuesta al impulso.

Diversos métodos de diseño de filtros IIR emplean filtros de tiempo continuo (analógicos) como prototipos para luego convertirlos en filtros IIR de tiempo discreto (digitales). Hay tres descripciones de un filtro que se deben comprender y relacionar. La primera de las tres es la respuesta al impulso, la cual es la descripción entrada salida en el dominio del tiempo más básica de un sistema lineal. La segunda es el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia, puesto que ambas son las descripciones entrada salida más elementales en el dominio de la frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo. En tercer lugar está el diagrama polo cero en el plano complejo, el cual proporciona la descripción más básica de la función del sistema.

Hay cuatro filtros IIR clásicos y sus correspondientes analógicos: Butterworth, Chebyshev, Chebyshev II, Elípticos. Ellos representan cuatro combinaciones diferentes de dos medidas de error de aproximación. Una medida de error emplea las series de Taylor. Este método iguala tantas derivadas de la respuesta deseada como sea posible a las de la respuesta actual. El otro método de aproximación minimiza la máxima diferencia entre la respuesta deseada y la actual sobre una banda de frecuencias. Por lo general se representará la frecuencia de tiempo continuo como  $\Omega$  y la frecuencia de tiempo discreto como  $w$ .

1. El filtro analógico de Butterworth se basa en una aproximación de las series de Taylor en el dominio de la frecuencia con expansiones en  $w = 0$  y  $w = \infty$ . Este filtro también se denomina aproximación maximalmente plana, ya que es óptima en el sentido de que tantas derivadas como sea posible son iguales a cero en  $w = 0$  y  $w =$

$\infty$ . La aproximación local es local en el sentido de que todas las condiciones se aplican en sólo dos puntos, y la suavidad de la respuesta es la que influye en el comportamiento de las restantes frecuencias. La fórmula para el cuadrado del módulo de la respuesta en frecuencia normalizada de un filtro analógico pasa bajo de

Butterworth de orden N viene dada por: 
$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2N}}$$

La respuesta está normalizada, de manera que el cuadrado del módulo es siempre 1/2 en  $\Omega = 1$  para cualquier N. Sustituyendo  $\Omega$  por  $\Omega / \Omega_0$  se obtendría un límite arbitrario de la banda en  $\Omega_0$ .

2. El filtro analógico de Chebyshev tiene un error máximo que es mínimo sobre la banda de paso y una aproximación de Taylor en  $\Omega = \infty$ . El máximo error sobre una banda se denomina error de Chebyshev. Esta terminología se puede confundir, puesto que los filtros de Chebyshev minimizan el error de Chebyshev sólo sobre una banda. Una de las características más interesantes de la aproximación de Chebyshev que es fácilmente observable consiste en que el error oscila con un rizado de igual amplitud. La aproximación de Chebyshev a menudo se denomina aproximación de rizado constante, pero esto puede resultar equívoco, ya que el error no sólo debe tener rizado constante, sino que debe presentar bastantes oscilaciones.

3. El filtro analógico de Chebyshev II (algunas veces denominado filtro inverso de Chebyshev) es una aproximación de las series de Taylor en  $\Omega = 0$  y tiene un error de Chebyshev mínimo en la banda eliminada. Es una de las combinaciones de características más prácticas, incluso más que el filtro normal de Chebyshev.

4. El filtro elíptico analógico (denominado en ocasiones filtro de Cauer) emplea una aproximación de Chebyshev en las bandas de paso y eliminada. Los filtros de Butterworth, Chebyshev y Chebyshev II tiene fórmulas que pueden calcular la posición de sus polos y ceros empleando solamente funciones trigonométricas; sin embargo, el filtro elíptico requiere la evaluación de las funciones elípticas completas y, por lo tanto, la teoría es considerablemente más complicada.

Los cuatro filtros analógicos óptimos se pueden transformar en filtros digitales óptimos con la transformación bilineal.

Los cuatro diseños de filtros IIR normalmente se desarrollan y realizan diseñando inicialmente un filtro prototipo analógico que se convierte posteriormente en otro de tiempo discreto con la transformación bilineal. El proceso se lleva a cabo por dos razones. La primera se debe a que los métodos de diseño de filtros analógicos emplean la transformada de Laplace, donde la frecuencia es simplemente la parte imaginaria de la variable compleja. Las aproximaciones se desarrollan y describen de manera mucho más fácil con las coordenadas rectangulares de la transformada de Laplace que con las polares de la transformada  $z$ . En segundo lugar, con un método se pueden diseñar tanto filtros de tiempo continuo como de tiempo discreto.

La transformación bilineal convierte el dominio entero de la frecuencia analógica  $-\infty \leq \Omega \leq \infty$  en el intervalo de frecuencias de tiempo discreto  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ . La

transformación es:  $s = \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)$ . Sustituyendo esta ecuación en la función del

sistema en el dominio de Laplace se obtiene la función de transferencia en el dominio  $z$  del sistema discreto con la respuesta en frecuencia deseada. Las

frecuencias analógica y de tiempo discreto están relacionadas por  $\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{Tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ ,



donde  $T$  es el período de muestreo en segundos. De la fórmula anterior es sencillo observar que cada frecuencia analógica del semieje positivo se convierte en una frecuencia en el dominio discreto cuyo valor va de cero a  $\pi$ . La transformación no es lineal en el sentido de que en las proximidades de  $\omega = 0$ , las frecuencias analógicas y de tiempo discreto están muy próximas unas de otras. Sin embargo, cuando la frecuencia de tiempo discreto se aproxima a  $\pi$ , la frecuencia analógica se va al infinito. En otras palabras hay una distorsión no lineal en el rango de las frecuencias analógicas para ajustarlo al rango finito de la frecuencia de tiempo discreto. Se produce una compresión de la frecuencia analógica que se incrementa cuando la frecuencia digital se aproxima a  $\pi$ . Cuando se diseñan filtros IIR, con este método se debe tener en cuenta el efecto de distorsión de la frecuencia de transformación bilineal. Por lo tanto el método de la transformación bilineal es aprovechable para transformar respuestas en frecuencia, tales como de los filtros pasa bajo y pasa banda. El método no proporciona buenos resultados cuando se diseña un retardo de grupo o se ajustan unas características de un módulo como las de un diferenciador.

El diseño de filtros IIR con la transformación bilineal conlleva los siguientes pasos:

- a. Modificar las especificaciones de diseño de filtros de tiempo discreto de manera que sean las apropiadas tras aplicar la transformación bilineal. El proceso se denomina distorsión.
- b. Diseñar el prototipo analógico empleando las especificaciones predistorcionadas.
- c. Convertir la función del sistema analógico en la función de transferencia en el dominio  $z$  del filtro de tiempo discreto utilizando la transformación bilineal.

### 7.12.1 Diseño de filtros IIR en el dominio del tiempo por el método de Prony

La mayoría de los filtros IIR se diseñan dando las especificaciones de partida en el dominio de la frecuencia, pero hay situaciones en las que se desea realizar el diseño en el dominio del tiempo. Una técnica especialmente potente emplea el método de Prony (o método de Padé) para diseñar un filtro IIR mediante aproximación o interpolación de una primera porción de la respuesta al impulso deseada.

La función del sistema en el dominio  $z$  de un filtro IIR está dado por

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots, \quad \text{donde la}$$

respuesta al impulso  $h[n]$  tiene un número infinito de términos.

En la formulación más normal del problema de aproximación para el diseño de

filtros, se define un error como  $\epsilon_s(\omega) = \left[ H(e^{j\omega}) - \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \right]$  y se eligen los

coeficientes  $a_k$  y  $b_m$  para minimizar algún modelo de  $\epsilon_s$ . Como se analizó en el diseño de filtros FIR, para un polinomio es un problema lineal, pero éste no es el caso, ya que los coeficientes forman parte del numerador y del denominador de la función racional. El problema se puede volver a formular para convertirlo en lineal definiendo una ecuación de error  $\epsilon_l(\omega) = A(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) - B(e^{j\omega})$  que puede minimizarse resolviendo ecuaciones lineales. La versión de lo indicado en el tiempo se denomina método de Prony. En el dominio del tiempo se debe elegir un número finito de los infinitos términos de  $h[n]$ . Si el número de muestras de la respuesta al impulso es el mismo que el de coeficientes desconocidos, es decir, que  $L = M + N + 1$ , el problema se puede resolver exactamente de modo que la respuesta al impulso

obtenida sea la misma que la que se deseaba para  $0 \leq n \leq L$  y sin ningún comentario acerca de lo que ocurre para  $n > L$ . Si  $L > M + N + 1$ , los coeficientes se encuentran de manera que la suma del cuadrado de la ecuación del error se minimice.

Si los coeficientes se calculan de manera que hagan  $\epsilon_s$  o  $\epsilon_l$  igual a cero, el otro es también cero. Si el error mínimo no es cero, pero es pequeño, los coeficientes que minimizan  $\|e_s\|$  normalmente están relacionados estrechamente con los que minimizan  $\|e_l\|$ . Si el mínimo no es tan pequeño, las soluciones pueden ser bastantes diferentes. Sin embargo es necesario recordar que la solución a ambos problemas es óptima de acuerdo con diferentes medidas de error. Lo usual es que se desee hacer mínimo el error, pero es mucho más sencilla minimizar la ecuación del error mediante el método de Prony. Debe tenerse en consideración que no existe control de estabilidad.

### 7.13 Referencias al nivel de la electrónica

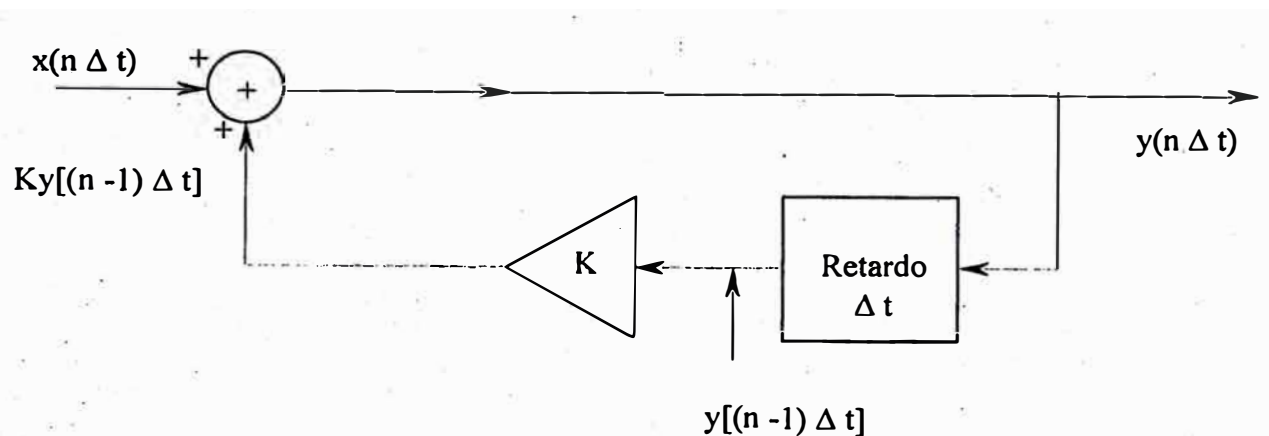
Son aquellos filtros, tales al igual que los filtros analógicos, cumplen diversos objetivos específicos, con la diferencia que se tratan con muestras discretas en el tiempo, y sus funciones de transferencia se desarrollan sobre la base de las transformadas Z.

Los filtros digitales son particularmente una clase importante de los sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Como las señales son discretas, pueden ser consideradas simplemente como secuencia de números. Las operaciones de la aritmética básica requeridas en las redes digitales que procesan estas señales son las de adición (o sustracción) y multiplicación o división; también se requiere un elemento que retarde todo impulso

( los biestables de tipo D con entrada y salida únicas) dado exactamente un período  $\Delta t$ . Estos tres elementos se interconectan como se desee para formar redes digitales.

En el siguiente gráfico se muestra un filtro digital cuya ecuación diferencia lineal de primer orden es  $y(n\Delta t) = Ky[(n-1)\Delta t] + x(n\Delta t)$



Si se tuviese una entrada impulso de amplitud  $A$  en  $t = 0$  y si  $y(-\Delta t) = 0$ , entonces el impulso de entrada en  $t = 0$  indica que  $x(n\Delta t) = A$ , en  $n=0$ , y es igual a cero en  $n=0$ .

$$n=0: y(0) = Ky(-\Delta t) + x(0)$$

$$n=1: y(\Delta t) = Ky(0) + x(\Delta t)$$

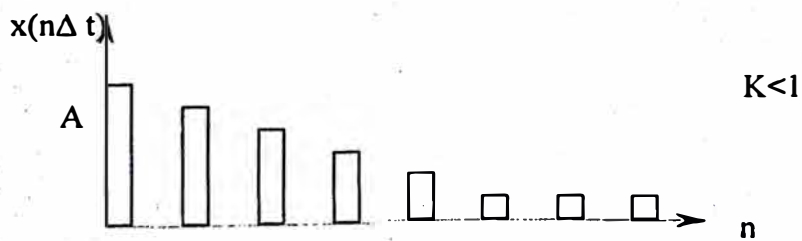
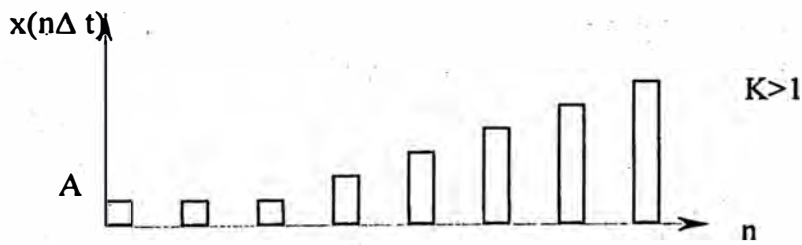
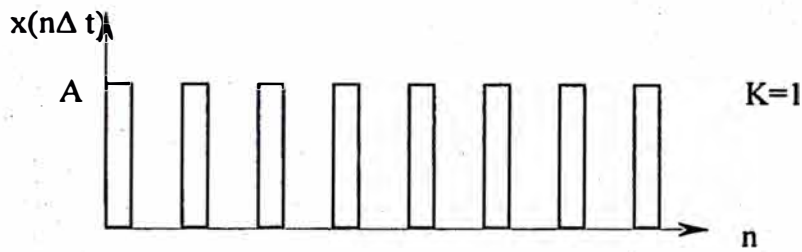
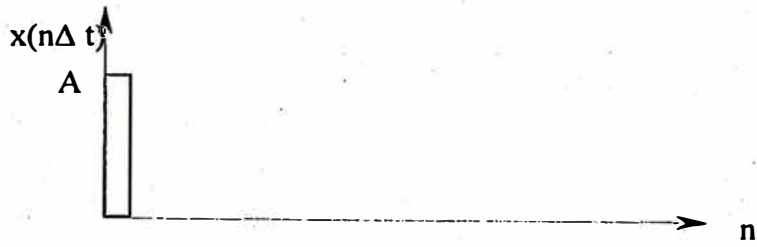
$$n=2: y(2\Delta t) = Ky(\Delta t) + x(2\Delta t)$$

$$n=3: y(3\Delta t) = Ky(2\Delta t) + x(3\Delta t)$$

En la primera ecuación,  $y(-\Delta t) = 0$  y  $x(0) = A$  son las condiciones iniciales; así  $y(0) = A$ , por lo tanto  $y(\Delta t) = AK$ , de esta manera se genera la secuencia:

$n$	$0$	$1$	$2$	$3$	$\dots$
$Y(n\Delta t)$	$A$	$AK$	$AK^2$	$AK^3$	$\dots$

Por inducción obtenemos la solución general  $y(n\Delta t) = AK^n$ . Cuando  $k < 1$  representa estabilidad.



Ahora bien se determinará la respuesta para una entrada senoidal  $x(t)=X_m \cos \omega t$ .

Primero se halla la respuesta a  $x_1(t)=X_m e^{j\omega t}$ . Entonces la entrada deseada es la parte real de  $x_1(t)$ . La respuesta del filtro a  $x_1(t)$  será  $y_1(t)=Y_m e^{j\omega t}$ , donde  $Y_m$  es un número complejo. Por lo tanto la respuesta a  $x(t)$  es  $y(t)$  que es la parte real de  $y_1(t)$ .

La entrada muestreada  $x_1(n\Delta t)=Y_m e^{j\omega n\Delta t}$ . De aquí que la respuesta sea  $y_1(n\Delta t)=Y_m e^{j\omega n\Delta t}$ . Además  $y_1[(n-1)\Delta t]=Y_m e^{j\omega(n-1)\Delta t}$ . En la ecuación diferencia, se

obtiene entonces: 
$$H(f) = \frac{Y_m}{X_m} = \frac{1}{1 - K e^{-j\omega\Delta t}}$$

La función de transferencia es una función compleja de la frecuencia, cuya magnitud  $|H(f)|$  y cuya fase es  $\varphi(f)$ :

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2 - 2K \cos \omega\Delta t}} \quad \text{y} \quad \varphi(f) = -\text{ArcTg}\left(\frac{K \sin \omega\Delta t}{1 - K \cos \omega\Delta t}\right)$$

La respuesta estacionaria  $y(t)=\text{Re}(Y_m e^{j\omega n\Delta t})$  a la entrada muestreada  $x(n\Delta t)=X_m \cos \omega n\Delta t$ , es pues,  $y(n\Delta t)=\text{Re}[X_m |H(f)| e^{j\varphi(f)} e^{j\omega n\Delta t}] =$

$$\frac{X_m}{\sqrt{1 + K^2 - 2K \cos \omega\Delta t}} \cos \left[ \omega n\Delta t - \text{ArcTg} \frac{K \sin \omega\Delta t}{1 - K \cos \omega\Delta t} \right]$$

Para determinar la nada de frecuencia que pasa por el filtro conviene representar  $|H(f)|$  en función de la frecuencia. Como la frecuencia de muestreo es  $f_s = 1/\Delta t$ , es necesario graficar  $|H(f)|$  en función de  $f/f_s$ .

La magnitud de la función de transferencia  $|H(f)|$  es una función periódica de la frecuencia. Pasa por su valor máximo cuando  $\text{Cos}2\pi f / f_s = 1$ , lo que ocurre cuando  $f / f_s = 0, 1, 2, \dots$

El valor máximo es  $|H(f)|_{\text{max}} = 1 / (1 - K)$ .

El valor mínimo de  $|H(f)|$  ocurre cuando  $\text{Cos}2\pi f / f_s = -1$ , lo que resulta siempre que  $f / f_s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$

El valor mínimo es  $|H(f)|_{\text{min}} = 1 / (1 + K)$ .

Se observa que la diferencia entre  $|H(f)|_{\text{max}}$  y  $|H(f)|_{\text{min}}$  aumenta cuando  $K$  se aproxima a la unidad.

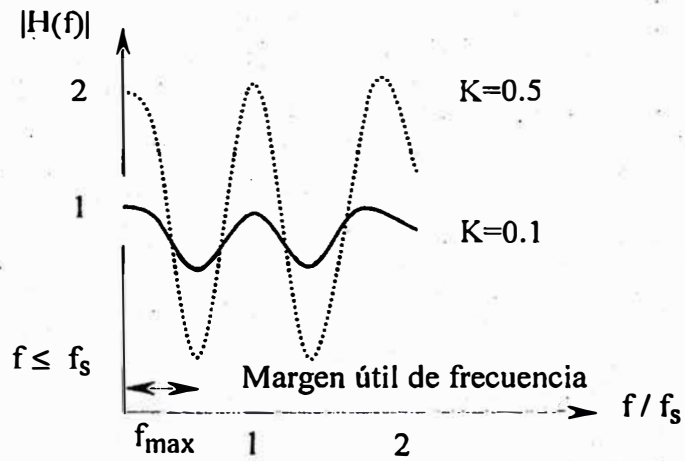
Tabla 7.

K	$ H(f) _{\text{max}}$	$ H(f) _{\text{min}}$
0.99	100	0.502
0.8	5	0.55
0.5	2	0.67
0.1	1.1	0.9

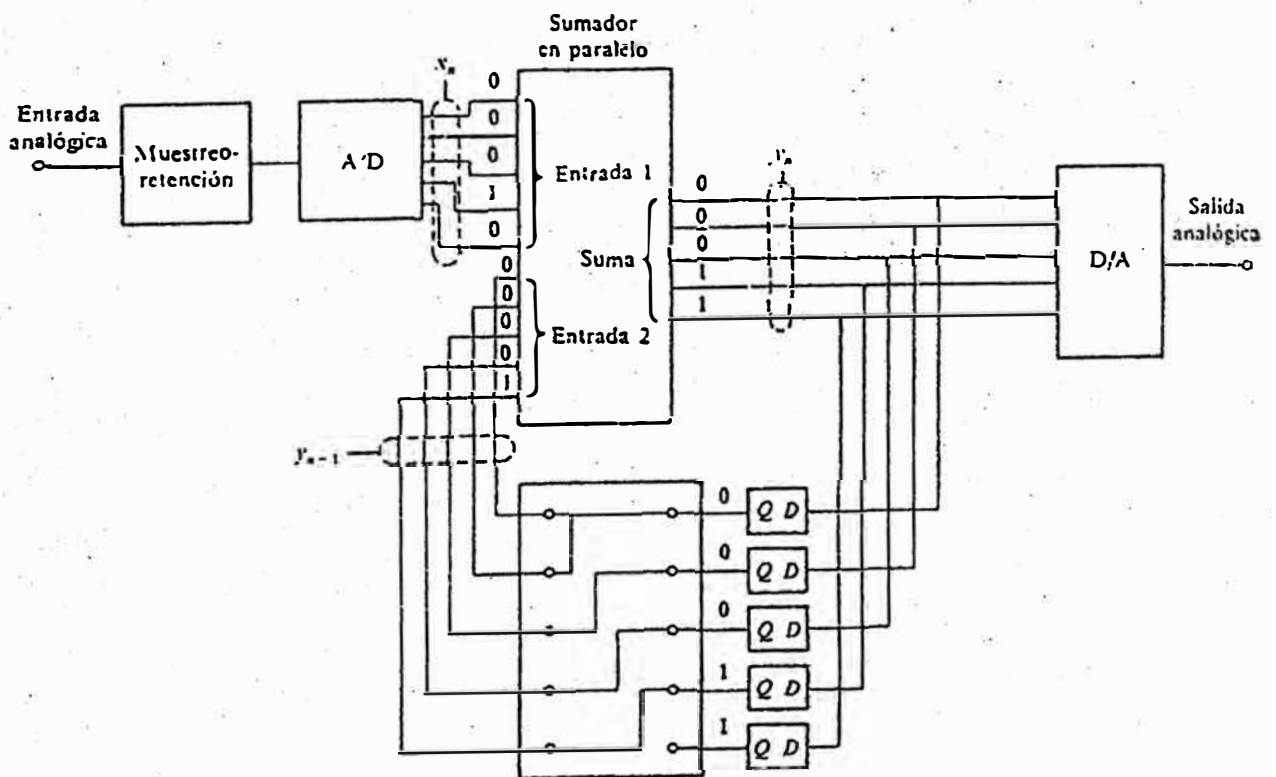
Se observa que  $|H(f)|_{\text{max}} > 1$ , lo que proporciona amplificación desde la entrada hasta la salida. Esta es una característica de los filtros digitales.

La variación de  $|H(f)|$  en función de la frecuencia se muestra a continuación para  $K = 0.5$  y  $K = 0.1$ . El filtro se comporta como filtro pasa bajo para frecuencias menores que la frecuencia de muestreo. Sin embargo a diferencia de su contrapartida analógica ( el filtro RC pasa bajo), el filtro digital es periódico y cuando  $f = f_s$  la señal es realmente reforzada.

## Respuesta en frecuencia del filtro digital



## Realización del filtro digital





### **7.13.1 Características del filtro digital FIR**

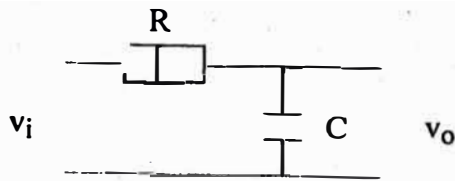
- 1) Necesidades de implementar un Filtro Digital FIR. Son sencillos de comprender; pero difíciles de poner a punto en lo que a hardware se refiere.
- 2) Estabilidad. Siempre son estables los filtros FIR. En el dominio temporal, el tiempo en el que un filtro responde a una entrada es finito, fijo y bien establecido. Los filtros FIR pueden hacerse perfectamente lineales si es necesario.
- 3) Conversión de la frecuencia de muestreo y el sobremuestreo. La mayoría de los filtros empleados para estas necesidades son filtros FIR.

### **7.13.2 Características del filtro digital IIR**

- 1) Necesidades de implementar un Filtro Digital IIR. Son difíciles de comprender; pero sencillos de poner a punto en lo que a hardware se refiere.
- 2) Inestabilidad. Los filtros IIR no son necesariamente estables, dado que tienen un camino de retorno de la salida a la entrada. Se les denominan filtros recursivos.
- 3) Ecuación digital. La mayoría de filtros empleados para este tipo de necesidades son filtros IIR.

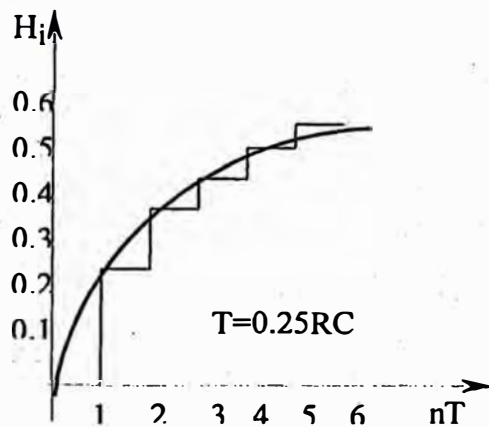
### **7.13.3 Caracterización de filtros digitales FIR**

Si se considera un filtro de paso bajo RC. La ecuación diferencial para obtener la configuración analógica que se describe es:



$\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o(t)}{RC} = \frac{v_i(t)}{RC}$ , tomando transformada de Laplace, obtenemos:

$$V_o(s) = \frac{a}{sT+a} \left( \frac{1}{sT} \right), \text{ cuya solución es: } v_o(t) = (1 - e^{-t/RC})$$

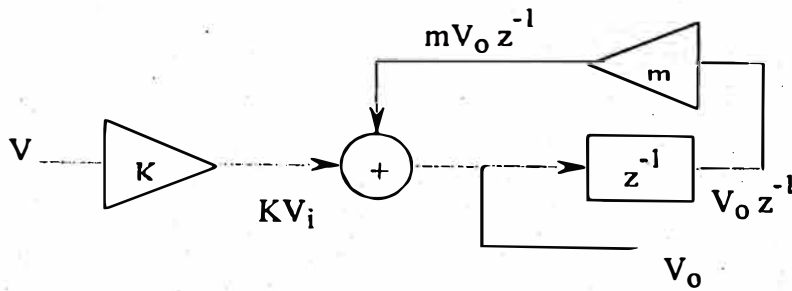


La ecuación diferencia para obtener la configuración digital es:

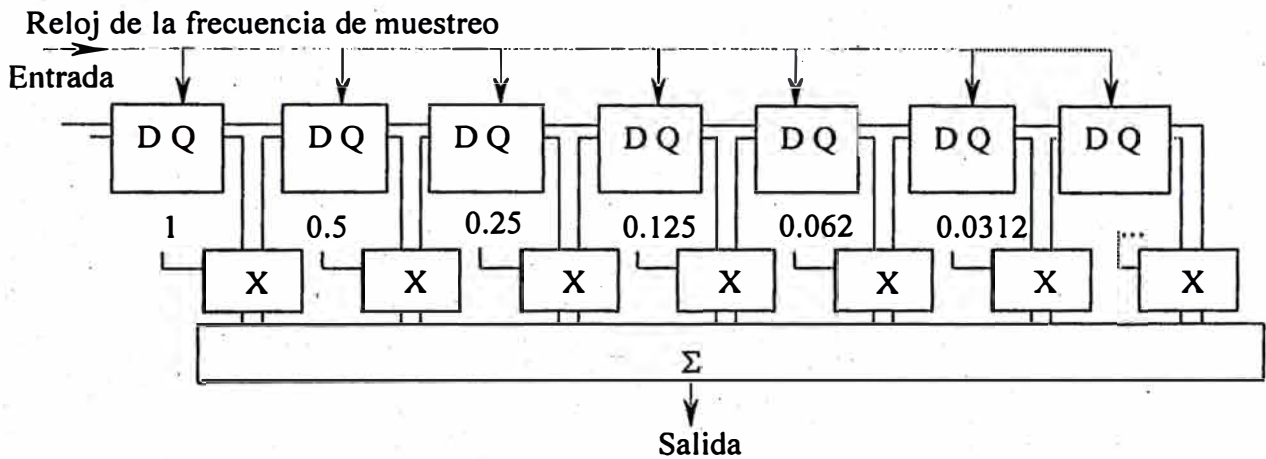
$$\frac{V_o(z)}{V_i(z)} = \frac{a}{1 - z^{-1} + a} = \frac{m}{1 - Kz^{-1}}$$

$$\Rightarrow V_o(z) = KV_i(z) + mV_o(z)z^{-1} \Rightarrow v_o[n] = K v_i[n] + m v_o[n-1].$$

Donde  $K = a / (1 + a)$ ;  $m = 1 / (1 + a)$ .  $K$  es un factor y  $z^{-1}$  es un retardo unitario.

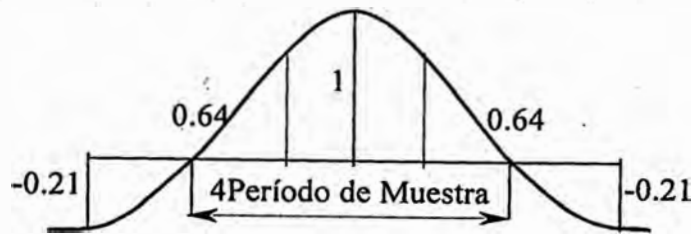


Un filtro FIR funciona reconstruyendo gráficamente la respuesta impulso de cada muestra de entrada.

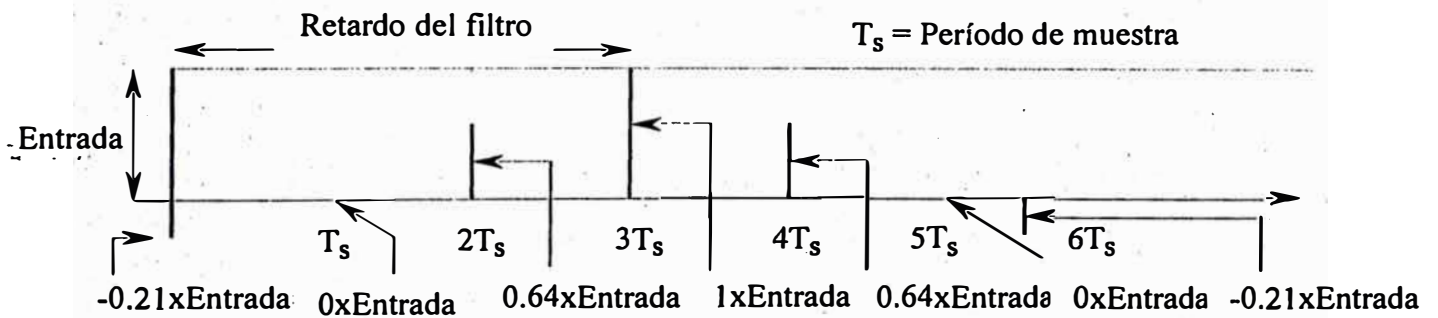


Analizando la respuesta impulso correctamente: si tratáramos con un filtro pasa bajo que corta a  $\frac{1}{4}$  de la frecuencia de muestreo. Sabemos que la respuesta en frecuencia de un filtro pasa bajo perfecto es una curva  $\frac{\text{Sen}x}{x}$ , en la que el tiempo entre los dos puntos centrales es el recíproco de la frecuencia de corte. También sucede que el valor de pico de la salida coincide con el impulso de entrada, entonces según la teoría de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, la salida ha cambiado antes que se conociera la entrada, es decir el filtro no es causal. La necesidad de truncar los extremos de la respuesta impulso (que provocará luego un

efecto de apertura), además de un retardo de tiempo en el filtro igual a la mitad de duración del impulso truncado para que el filtro sea causal.

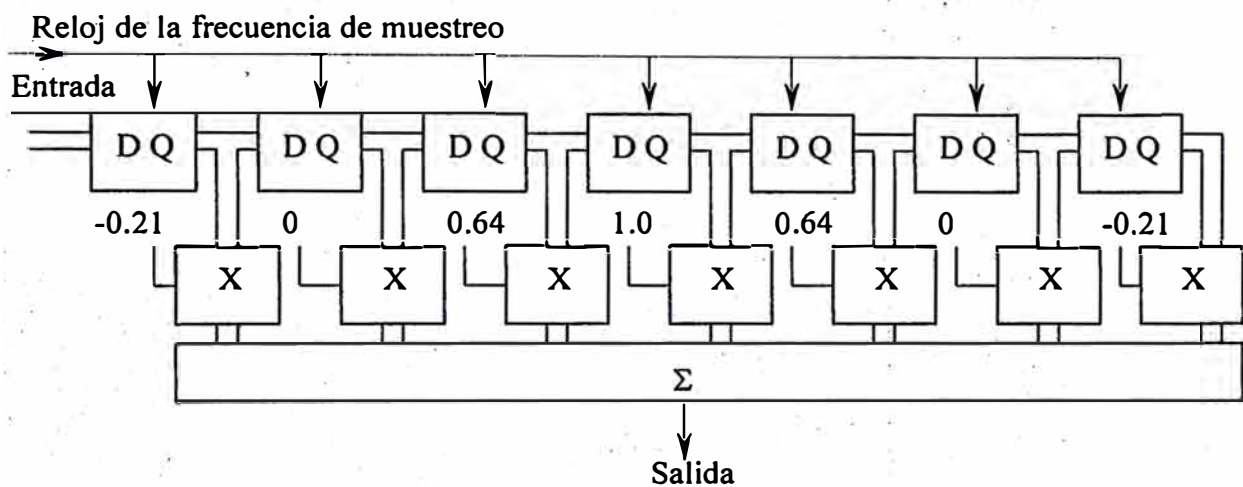


La respuesta impulsiva se determina cuando cada impulso de entrada es desplazado por una serie de registros, que es multiplicada por un coeficiente. Estos coeficientes son el resultado de muestrear y cuantificar la respuesta impulsiva deseada. La frecuencia de muestreo empleada para muestrear el impulso debe ser la misma que la frecuencia de muestreo del cual está diseñado el filtro. Realmente lo primero que debe hacerse es calcular los coeficientes.



Si simplemente se trunca la respuesta impulsiva, se produce una transición abrupta de las muestras de entrada que interesan y de aquellas que no. Este truncamiento del filtro superpone un perfil rectangular a la respuesta impulsiva en el dominio temporal. En el dominio de la frecuencia, el perfil rectangular se transforma en una curva  $\text{Sen}x$  que se superpone a la respuesta en frecuencia deseada en forma de

rizado. Una de las consecuencias que esto produce es el fenómeno de Gibbs: la tendencia que tiene la respuesta a alcanzar el valor pico justo antes de la frecuencia de corte. Por lo tanto, la longitud del impulso se debe considerar no solo de la respuesta en frecuencia sino también de la cantidad de rizado que debe tolerarse. Si el período relevante del impulso se mide en períodos de muestra, el resultado será el número de puntos o multiplicaciones que son necesarios en el filtro.



Una alternativa en lugar de truncar la respuesta impulsiva, se sugiere realizar una transición suave entre las muestras que no cuentan y las que si cuentan. Esto se consigue multiplicando los coeficientes del filtro por una función ventana que presente su valor pico justo en el centro del impulso. Una ventana Bartlett puede utilizarse para este efecto.

La respuesta en frecuencia del filtro puede variarse a voluntad modificando los coeficientes; es decir un filtro programable solo requiere de una serie de memorias; la dirección suministrada a las PROM seleccionará la respuesta. Si el reloj se varía, también se varía la respuesta en frecuencia.



muestras reproducidas se van a introducir en una consola de mezcla digital que funciona a una frecuencia estándar, será necesario una conversión de la frecuencia.

3) En el pasado, se utilizaban muchas frecuencias de muestreo diferentes en los grabadores que hoy están quedando obsoletos. Con la conversión de la frecuencia de muestreo, las grabaciones realizadas con tales máquinas pueden reproducirse y transferirse a formatos más modernos con frecuencias de muestreo estándar.

Hoy existen distintas frecuencias de muestreo con diferentes propósitos. La conversión de frecuencia permite cambiar libremente la frecuencia entre materiales. Las cintas máster a 48 KHz en grabadores multipista pueden mezclarse digitalmente en dos pistas a esa misma frecuencia y, luego, convertirlas a 44.1 KHz para realizar el máster de disco compacto o DCC, o bien a 32 KHz para radiodifusión.

4) Cuando se utiliza el audio digital en conjunción con cine o video, surgen dificultades ya que no siempre es posible sincronizar la frecuencia de muestreo con la frecuencia de cuadro.

5) Cuando se transmiten programas a larga distancia, no hay garantía de que el origen o el destino estén utilizando la misma fuente de temporización. En este caso, la frecuencia de muestreo en ambos extremos de un enlace serán nominalmente idénticas, pero una desviación en los osciladores de referencia hará que la fase relativa de las muestras sea arbitraria.

Existen tres categorías básicas de conversión de frecuencia relacionadas entre sí:

### **7.14.1 Conversión con razón entera**

Varía la frecuencia de acuerdo con una relación de un valor de entero, de forma ascendente o descendente. La temporización del sistema queda simplificada ya que todas las muestras (entrada y salida) se encuentran presentes en los flancos de la señal de reloj de muestreo de mayor frecuencia. Este sistema se suele adoptar para los convertidores con sobremuestreo; la frecuencia de muestreo exacta inmediatamente adyacente al dominio analógico no es crítica y es elegida para hacer que los filtros sean más fáciles de implementar.

Cuando tiene que aumentarse la frecuencia de muestreo por un factor entero, debe crearse muestras adicionales con un espaciamiento uniforme entre las ya existentes. No hay necesidad de reducir el ancho de banda de las muestras de entrada, ya que, si la frecuencia de muestreo original era adecuada, otra que sea mayor también será adecuada.

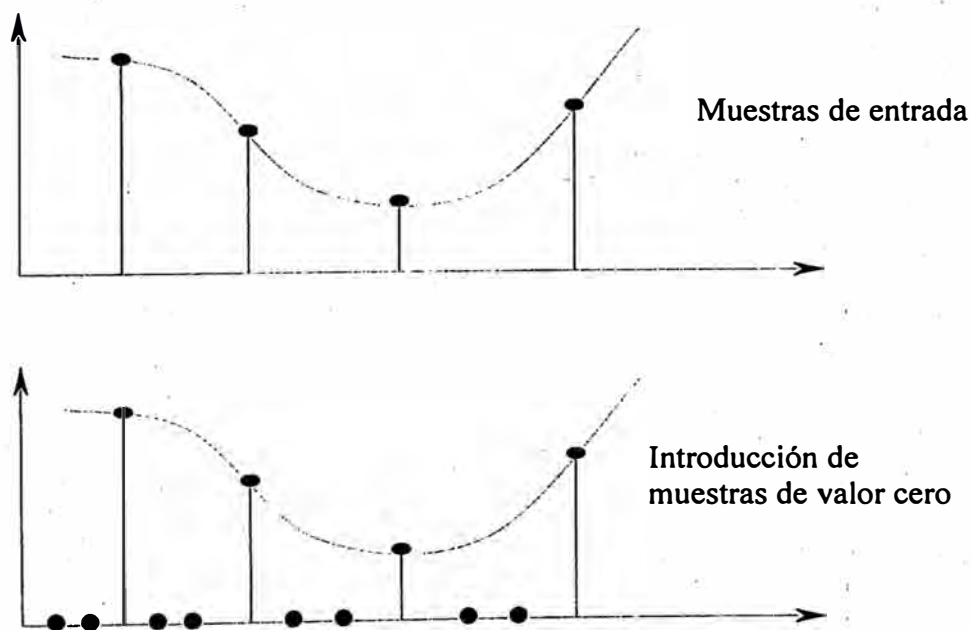
El proceso de aumentar la frecuencia de muestreo consta de dos etapas:

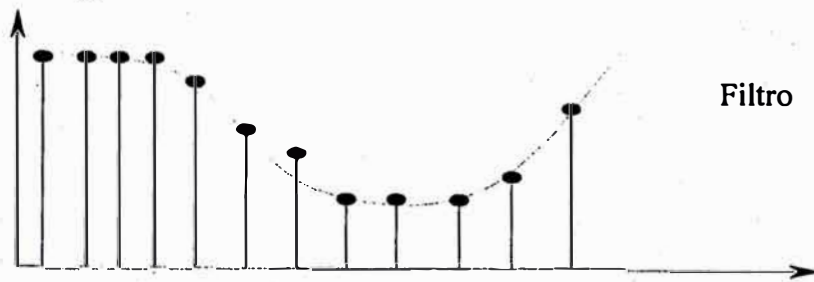
Primero se consigue la frecuencia correcta insertando muestras con valor cero en el instante adecuado y, luego, se les da a las muestras adicionales avalores significativos haciendo pasar el flujo de muestras a través de un filtro pasa bajo que corta la frecuencia de Nyquist de la frecuencia de muestreo original. A este filtro se le conoce como filtro interpolador, y una de sus funciones consiste en evitar la aparición de imágenes del espectro de entrada con menor frecuencia de muestreo en la banda base extendida del espectro de salida de mayor frecuencia.

Por lo tanto, los interpoladores, de acuerdo a la teoría del muestreo, todos los sistemas tiene un ancho de banda finito. El valor de una muestra digital individual se obtiene muestreando la tensión instantánea de la forma de onda analógica original y,



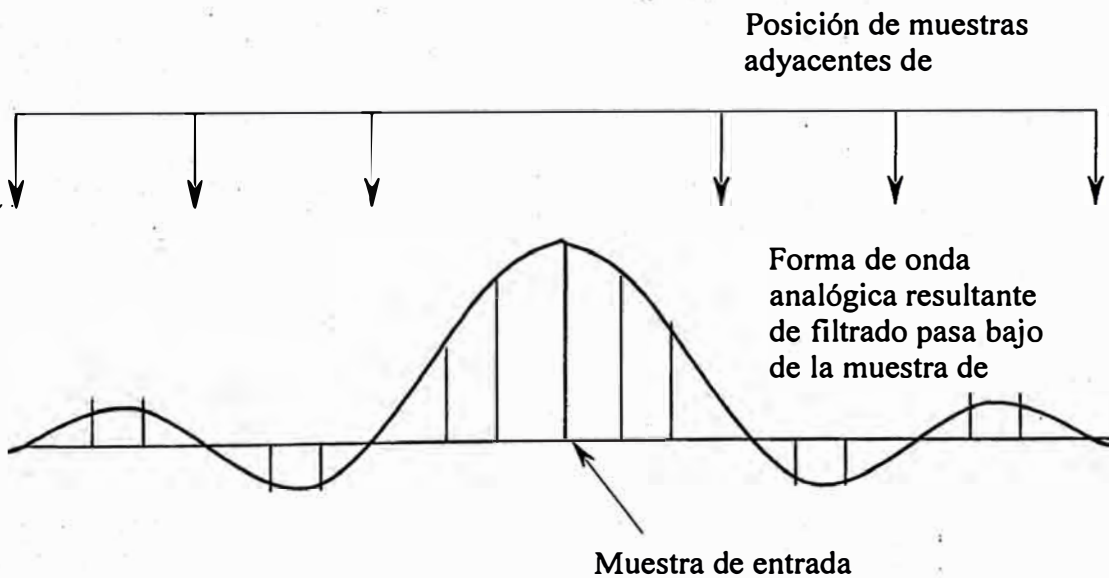
debido a que tiene una duración cero, debe contener un espectro infinito. No obstante, dicha muestra nunca puede escucharse de esa forma debido al proceso de reconstrucción, que limita el espectro del impulso hasta alcanzar el límite de Nyquist. Tras la reconstrucción, una muestra digital infinitamente corta representa idealmente un impulso  $\text{Sen}x$  cuyo ancho de pico central está determinado por la respuesta del filtro de reconstrucción y cuya amplitud es proporcional al valor de la muestra. Esto implica que, en realidad, el valor de una muestra tiene significado a lo largo de un considerable espacio de tiempo, y no solo en el instante de muestreo. De no ser así sería imposible construir un interpolador.





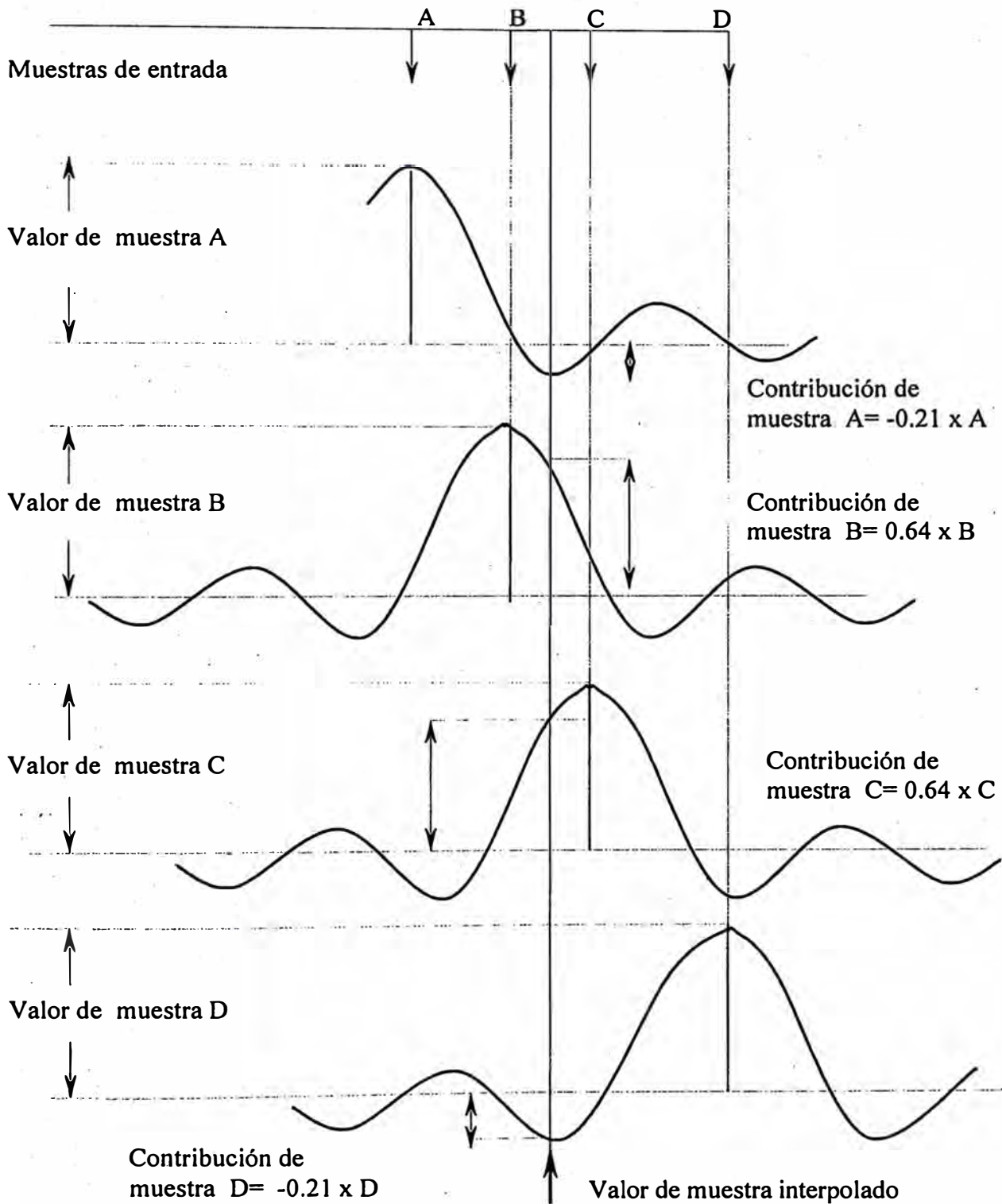
Dado que el propósito del sistema es únicamente incrementar la frecuencia de muestreo, el filtro debe ser lo más transparente posible, lo que implica la obligatoriedad de una configuración de fase lineal, por lo tanto se debe emplear una estructura de tipo FIR.

En la figura, se muestra la respuesta teórica de un filtro FIR es una curva  $\frac{\text{Sen}x}{x}$  de valor cero en la posición de muestras de entrada adyacentes.



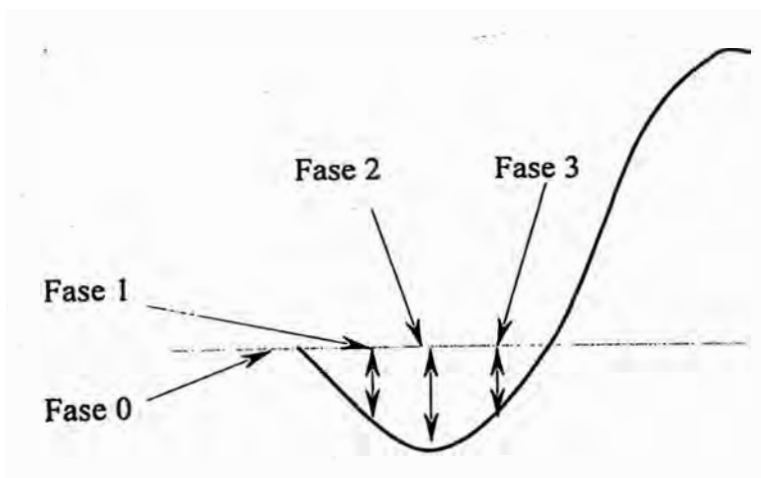
Las muestras a una mayor frecuencia de muestreo llevan la misma información que una muestra de entrada

En la práctica este impulso no puede implementarse debido a que es infinito. La respuesta impulsiva empleada será truncada y pasará por una ventana como se ha descrito anteriormente. Para simplificar este aspecto, supongamos que se va a utilizar un impulso  $\frac{\text{Sen}x}{x}$ . Para ver como funciona este proceso de interpolación, hay que tener en consideración el proceso de reconstrucción de la señal. La tensión analógica es devuelta al estado del tiempo continuo sumando los impulsos analógicos provocados por cada muestra. En un filtro de interpolación digital este proceso se duplica. Si la frecuencia de muestreo se duplica, habrá que interpolar nuevas muestras exactamente en medio de las muestras existentes. La respuesta impulsiva necesaria es la que aparece en el siguiente grafico, puede ser muestreada al período de muestra de salida y cuantificada para obtener los coeficientes. Se detalla que cada uno de los coeficientes es cero lo que confirma que no es necesario realizar cálculos sobre las muestras existentes; simplemente son transferidas a la salida. La muestra intermedia se calcula sumando las respuestas impulsivas de cada muestra de entrada que hay en la ventana.

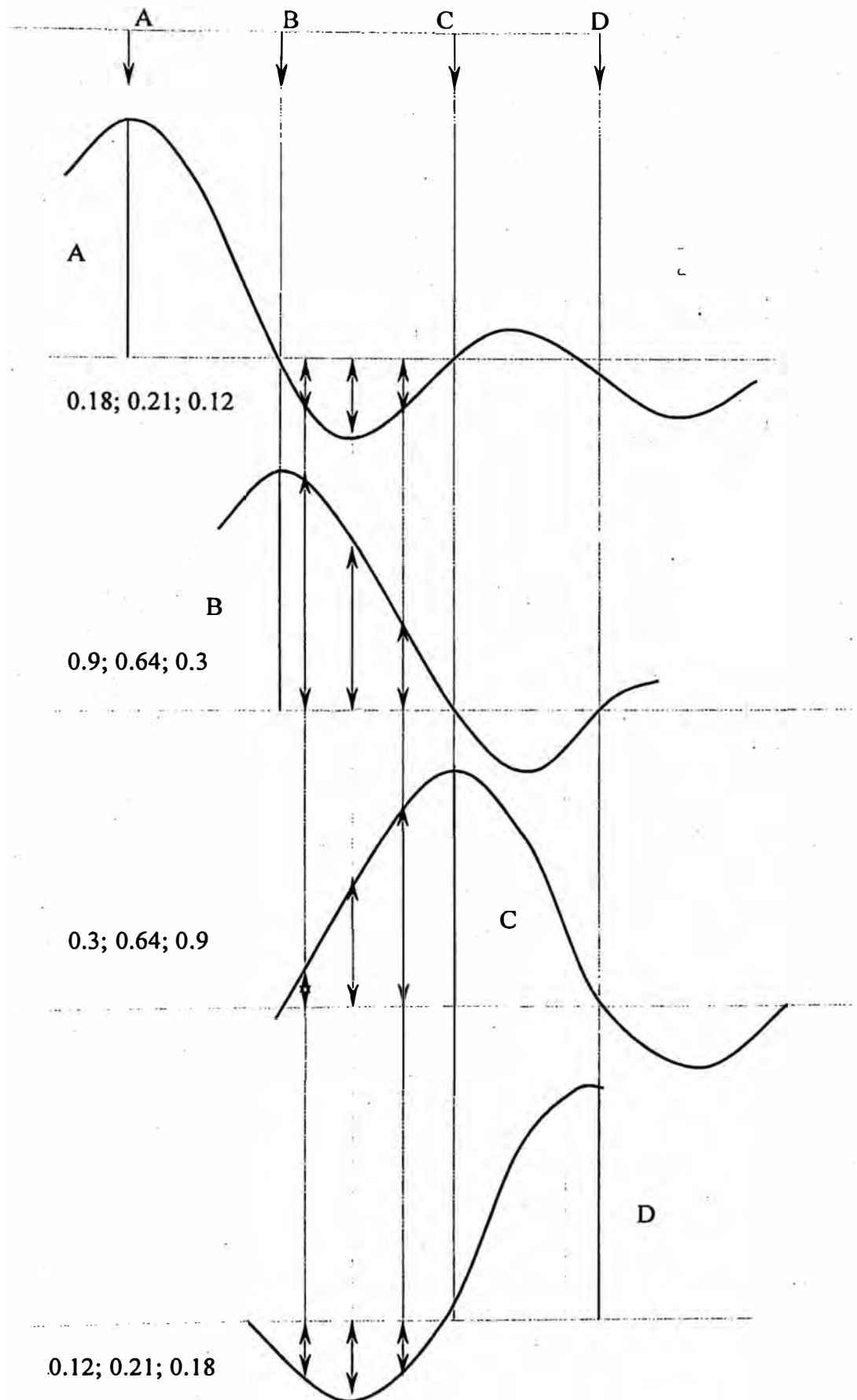


La figura muestra el funcionamiento de este mecanismo. Si se tiene que incrementar la frecuencia de muestreo por un factor de cuatro, deben interpolarse tres valores de muestra entre las muestras de entrada existentes. Entonces el valor de la muestra interpolado resulta igual a  $-0.21A + 0.64B + 0.64C - 0.21D$ .

Una conclusión interesante en la relación con conversión entera, las muestras de menor frecuencia siempre coinciden con las de mayor frecuencia, se necesita un reducido número de fases. En el siguiente gráfico muestra que sólo es necesario muestrear la respuesta impulsiva a un cuarto del período de las muestras de entrada para obtener tres conjuntos de coeficientes que serán utilizados sucesivamente. En los filtros implementados por hardware, la muestra de entrada que pasa directamente a la salida se transfiere utilizando una cuarta fase de filtrado en la que todos los coeficientes son cero excepto el central, que es igual a la unidad.



Muestras de entrada



En la última parte del gráfico, existen 4 fases:

$$\text{Fase 0} = 0 \times A + 1 \times B + 0 \times C + 0 \times D$$

$$\text{Fase 1} = -0.18A + 0.9B + 0.3C - 0.12D$$

$$\text{Fase 2} = -0.21A + 0.64B + 0.64C - 0.21D$$

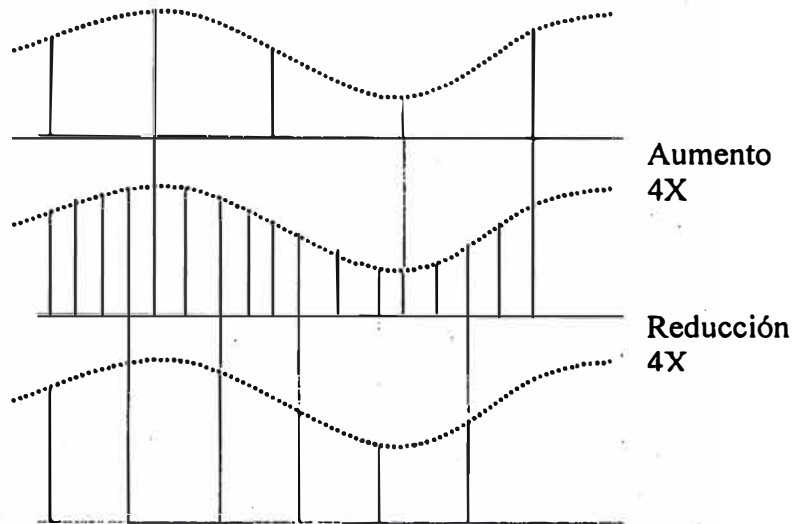
$$\text{Fase 3} = -0.12A + 0.3B + 0.9C - 0.18D$$

En el gráfico entonces, en un sobremuestreo 4X, son necesarias cuatro fases de coeficientes para cada grupo de muestras de entrada, y cada una de tales fases produce uno de los valores sobremuestreados.

#### **7.14.2 Conversión con razón fraccionaria**

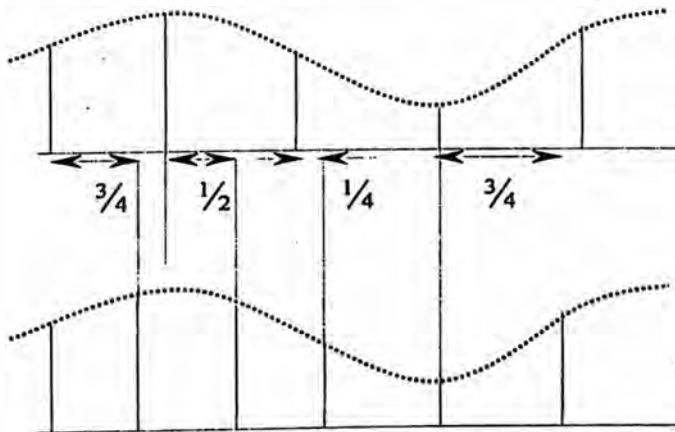
Por oren de dificultad, en la conversión con razón fraccionaria la frecuencia varía de acuerdo con la relación entre dos números enteros de acuerdo con la relación entre dos números enteros de reducido valor. Las muestras de entrada se alinean periódicamente en el tiempo con las de salida. Muchas de las primeras propuestas para las frecuencias de muestreo estaban basadas en simples razones fraccionarias respecto a 44.1 KHz tal como 8/7, con el fin de poder especificar esta técnica, que no es adecuada para reproducción a velocidad variable o para funcionamiento asíncrono.

Cuando la relación entre las frecuencias de muestreo tiene una razón fraccionaria de razón  $m / n$ , es posible hacer que el reloj de un sistema funcione a la frecuencia del mínimo común múltiplo que divida a ambas frecuencias. En el siguiente gráfico se ilustra el proceso.



El gráfico muestra que se obtiene una conversión con relación fraccionaria de  $3/4$  de la muestra incrementando la entrada por un factor de  $4X$  antes de reducirla por un factor  $3X$ . Resulta evidente la ineficacia debido a que se han descartado valores previamente calculados.

En el siguiente gráfico se detalla con mayor eficacia ya que se calculan sólo valores necesarios. La fase de interpolación varía para cada salida. No es posible seguir utilizando los coeficientes fijos.





### 7.14.3 Conversión con razón variable

Los anteriores casos trataban a la frecuencia de muestreo de la salida del filtro con una relación constante con la de la entrada, lo que suponía que las dos frecuencias estaban enganchadas en fase. Esto supone un impedimento no deseable en algunas aplicaciones, incluso los convertidores de frecuencia de muestreo utilizados en la reproducción a velocidad variable. En un convertidor con relación variable existirán valores para los instantes en los que se tomaron muestras de entrada, pero es necesario calcular cuáles habrían sido los valores de muestra en absolutamente cualquier tiempo transcurrido entre las muestras disponibles. **El concepto general de interpolador es el mismo que para el convertidor de relación fraccionaria, salvo en que se necesita un número infinito de fases del filtro.**

Dado que un filtro realizable posee un número infinito de fases, es necesario estudiar la degradación que esto provoca. El eje de tiempo continuo deseado del interpolador es cuantificado mediante el espaciamiento de fases, y el valor de una muestra necesario es un momento particular será sustituido por el valor de la fase del filtro más cercana disponible. Por tanto el número de fases del filtro determina la precisión del filtro determina la precisión de tiempo de la interpolación. Los efectos de calcular un valor en un tiempo erróneo son idénticos al muestreo con "Jitter", en cuanto a que se produce un error proporcional a la pendiente de la señal. El resultado es ruido modulado por el programa. Cuanto mayores sean las especificaciones del ruido, mayor será la precisión del tiempo deseado y mayor será el número de fases requeridas. El número de fases es igual al número de conjuntos de coeficientes disponibles, que no ha de confundirse con el número de puntos de un filtro, que es igual al número de coeficientes de un conjunto (y al número de multiplicaciones

necesarias para calcular un valor de salida). La precisión de un “Jitter” de muestreo para funcionar a 16 bits era de unos pocos cientos de pico segundos. Esto implica que se requieren aproximadamente  $2^{15}$  fases del filtro para un funcionamiento adecuado, en un convertidor de frecuencia de muestreo de 16 bits. La incorporación directa de tantas fases es difícil puesto que han de almacenarse más de un millón de coeficientes diferentes; así que se han ideado métodos alternativos. Cuando se conectan en cascada varios interpoladores, el número de fases disponibles es el producto del número de fases en cada etapa. En el caso de un filtro que pudiera interpolar valores de muestra situados en mitad de muestras existentes estuviera seguida de un filtro capaz de interpolar a un cuarto, un medio y tres cuartos del período de entrada, el número total de fases disponible sería ocho. Para el caso, el gráfico se muestra.

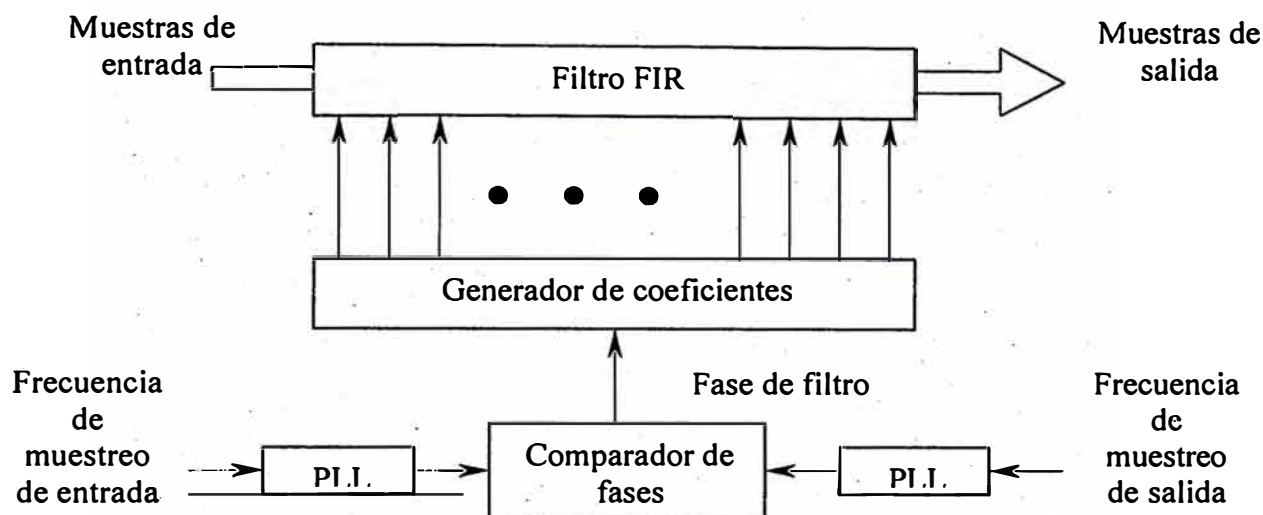
Para un convertidor práctico, podrían necesitarse cuatro filtros en serie. Para incrementar la frecuencia de muestreo, los dos primeros filtros interpolan en puntos fijos situados entre las muestras de entrada en ellos, multiplicando así la frecuencia de muestreo de entrada por un factor mayor al tiempo que elimina las imágenes del espectro; los otros dos funcionan con coeficientes variables, igual que el convertidor con relación fraccionaria, de modo que solo se calculan las muestras que coinciden con el reloj de salida. Para reducir la frecuencia de muestreo, se invierten las posiciones de los dos pares de filtros de respuesta fija realicen la función de anti aliasing a la frecuencia de muestreo de salida.

La respuesta del filtro digital es siempre proporcional a la frecuencia de muestreo.

Cuando varía la frecuencia de muestreo en la entrada o la salida, la fase de los interpoladores debe cambiar dinámicamente. Debe seleccionarse la fase necesaria de acuerdo con la precisión establecida, lo que implica que la posición del flanco relevante de la señal de reloj debe medirse en tiempo con la misma precisión. Esto no es posible debido a que, en los sistemas reales, la presencia de ruido en las señales binarias con tiempo de elevación finito desplaza el tiempo donde se considera que el estado lógico ha cambiado. La única forma de medir la posición de los relojes de tiempo sin "Jitter" consiste en filtrar la medida digitalmente, y puede realizarse con un bucle digital enganchado en fase (DPLL, digital phase-locked loop). En un DPLL una señal de reloj estable de alta frecuencia es dividida por un factor que depende del error de fase existente entre la salida del divisor y la entrada de la señal de reloj de muestreo. Tras un período de ajuste, la salida del divisor asume la misma frecuencia que la del reloj de muestreo. Si se introduce amortiguamiento que limite la frecuencia a la que la relación de división puede variar en respuesta al error de fase, el "Jitter" del reloj de muestreo se filtrará de la salida del divisor, que puede utilizarse con fines de medición. Se necesitan dos DPLL, uno para el reloj de muestreo de entrada y otro para la salida. Puede entonces llevarse a cabo la medición desprovista de "Jitter" de la fase de la muestra de salida en relación con las muestras de entrada. El inconveniente que presenta utilizar un bucle enganchado en fase amortiguado es que cuando varía una de las frecuencias de muestreo, el bucle se retarda ligeramente con respecto al reloj de muestreo real.

Esto supone la aparición de un error de fase, que provoca ruido modulado por el programa. En un equipo bien diseñado, el error de fase se produce tan lentamente

que no puede clasificarse como “Jitter”; el ruido resultante es subsónico y menos problemático que los efectos del “Jitter” del reloj de muestreo.

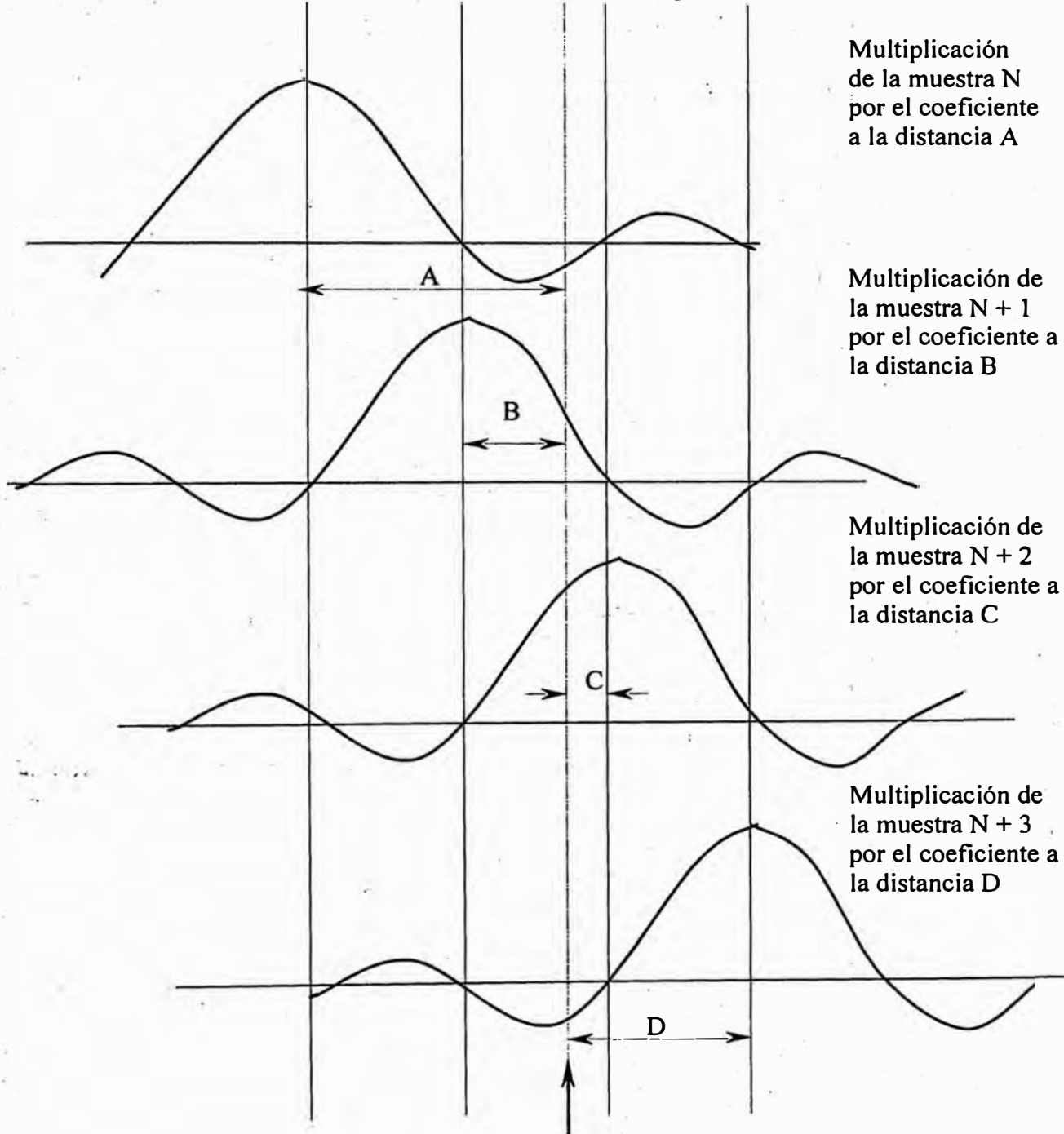


En el gráfico se determina que en un convertidor con relación variable, debe medirse la relación de fase entre los flancos de la señal de reloj de entrada y la de salida para determinar los coeficientes necesarios.

El “Jitter” de las señales de reloj impide su uso directo, por lo que se han de realizar bucles enganchados en fase (PLL) para promediar el “Jitter” de muchas señales de reloj de muestreo.

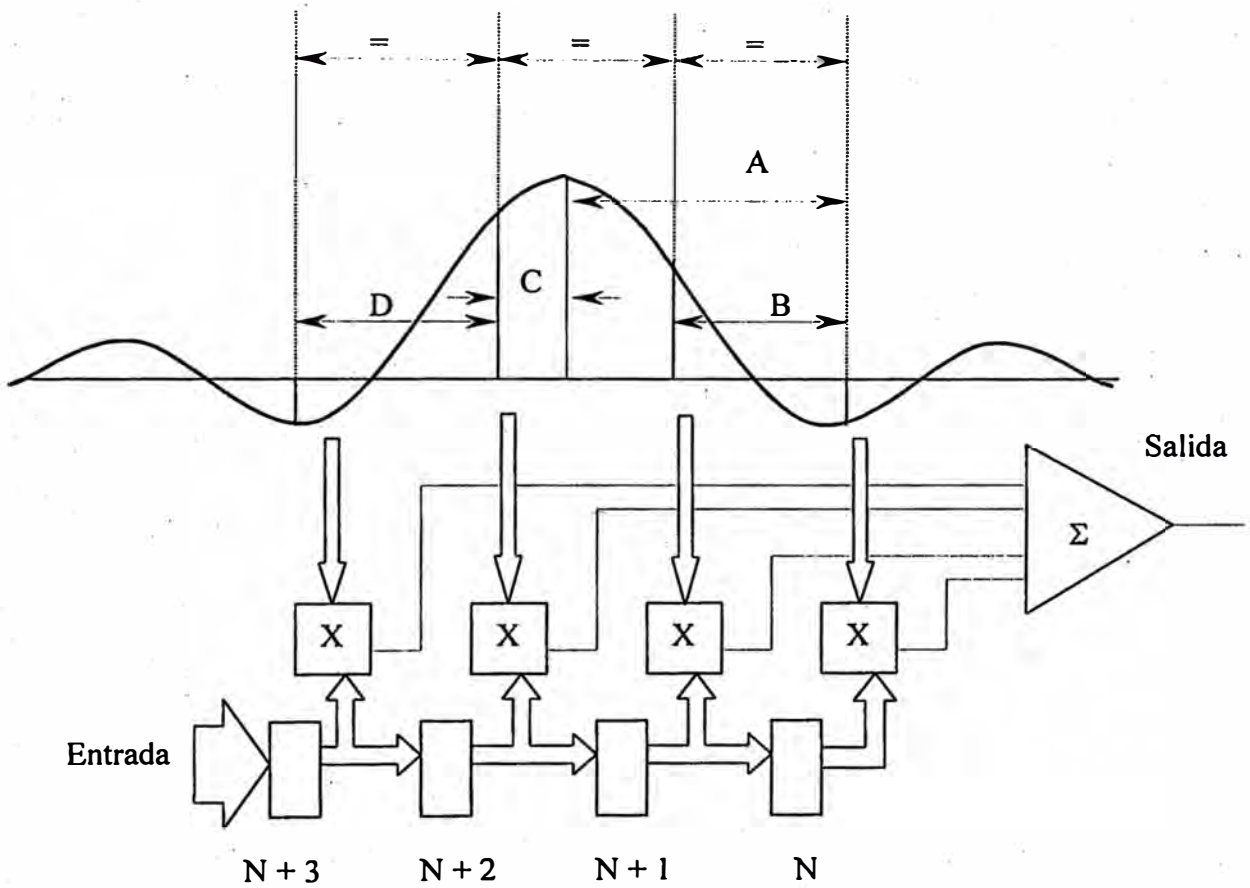
Muestras de entrada

N N+1 N+2 N+3



La muestra de salida es la suma de estas contribuciones

Las relaciones de señales de reloj en el gráfico anterior determinan las fases relativas de las muestras de entrada y salida, que, junto con la respuesta impulsiva del filtro, determina los coeficientes necesarios.



Los coeficientes determinados en el gráfico anterior del procedimiento detallado se introducen en la configuración mostrada (o su implementación equivalente en software) para calcular la muestra de salida en la posición interpolada correcta. En realidad el filtro real tiene mucho más puntos que esta muestra.

## **CAPÍTULO VIII CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS EN LOS PROCESADORES DE SEÑAL D / A.**

Los procesadores digitales de señal DAC, también conocidos como convertidores D/A , cuando se procede a su distribución, la hoja técnica refiere:

**Sistema de conversión D / A utilizado:** Convertidores D / A en configuración doble monoaural con característica de montaje en topología diferencial balanceada. También puede destacarse el “pulse” de “1 bit” implementado en convertidores D/ A configurados en modo complementario. En el caso de los sistemas multibit se destacan los convertidores D / A Burr – Brown de 18 bits.

**Tasa de sobremuestreo:** Utilizada y referida al proceso de conversión.

**Filtro Digital:** No necesariamente debe darse el dato ya sea FIR o IIR, lo que se refiere es a la precisión aritmética del filtro.

**Tasa de sobremuestreo del filtro:** Referido al proceso de conversión de los datos digitales a codificar.

**Relación señal / ruido:** Especificado en dB.

**Separación entre canales:** También referido en dB.

**Dimensiones:** Lo estándar, ancho, largo, fondo.

**Peso:** Es importante el peso del módulo, mientras mayor sea, es un indicio de que el producto haya sido fabricado en condiciones a las que se denomina de “high tech”.

**Jitter:** Generalmente dado en picosegundos.



**Precisión en número de bits:** Dato que conlleva a una linealidad estática referida en -120 dB por lo general.

**Tipo de arquitectura:** Ya sea modular o no modular.

**Utilización exclusiva de tipo de filtros:** Activos o pasivos.

**Buffer analógico de salida:** Ya sea en base a transistores de efecto de campo FET o discretos BJT, también se puede dar el caso de ambos, pero no de componentes BICMOS.

**Especificaciones de salida:** Es referida por lo general a las salidas analógicas fijas (normal y balanceadas), la salida variable. Las salidas digital, coaxial y óptica. Toma de auriculares. Funciones de edición, reproducción. Calidad del chasis.

### **8.1 Características circuitales**

Los procesadores de señal D / A así como cualquier componente electrónico, debe alimentarse a través de una fuente. Ahora bien, los procesadores pueden situarse dentro del conjunto mecánica de transporte y convertidor D / A, o por separado como es el caso que se ha venido exponiendo; en todo caso aquellos reproductores digitales de señales de audio de alta calidad posee a nivel de integridad circuital las mismas características que el de componente separado, la diferencia importante radica en que los componentes independientes utilizan para el procesamiento digital de señales circuitos integrados de mayor precisión lo que involucra un tamaño del circuito integrado que ocupa un área del circuito impreso mucho mayor que el del conjunto.

**La fuente de alimentación.** Por lo general, y dado que teóricamente ofrece una de las mejores performances, la fuente de alimentación está diseñada en **configuración push – pull**.

**Razones electrónicas:** Al contrario de las fuentes de alimentación convencionales, este tipo de montaje permite controlar de un modo más efectivo las fluctuaciones de la carga. Se consigue un nivel de rechazo del rizado superando los 110 dB.

**El amplificador de línea.** Es claramente conocido en audio que los amplificadores utilizados son configurados en base a transistores FET (dado que en el plano subjetivo se obtiene una musicalidad imposible de lograr con los amplificadores operacionales de audio convencionales).

Se incorpora una etapa diferencial de dos etapas, implementadas en base a transistores FET discretos y una de salida MOSFET configurados en clase A pura.

**Sistemas de conversión D /A empleados.** Los sistemas de conversión actuales se destacan por su alta capacidad de conversión, entre los tantos que existen, se presenta el “High Density Linear Converter System” (Sistema de Conversión Lineal de Alta Densidad) que está caracterizado por el uso de 8 convertidores D / A implementados en dos cuádruples convertidores integrados, que en el caso de audio, se distingue el Sony CXD 2552, en el denominado Modo complementario, de tipo “Pulse” (versión “1bit” original de Sony).

**Filtro Digital.** Caracterizado por su precisión aritmética, en el caso de los convertidores D / A, se encuentra el Sony CXD -1244, acompañado de un dispositivo de conformación de ruido multietapa extendida (Noise Shaping). El CXD-2552 incorpora un conformador de ruido de tercer orden y trabaja con un tasa de sobremuestreo de orden 64, lo que le permite ofrecer un rango dinámico de 118 dB y una tasa de distorsión armónica total (THD) del 0.001 %. Hay que especificar que la precisión de 45 bits está referida a la precisión aritmética.

La tasa de sobremuestreo con la que trabaja es de orden 8 mientras que el nivel de rizado es del orden de los 0.00001 dB. El uso de convertidores de tipo "1 bit" se justifica por el mejor tratamiento que dan a las señales de bajo y muy bajo nivel, lo que contrasta con los convertidores multibit, pues resultaría muy costoso y más difícil de obtener. También la combinación de una elevada tasa de sobremuestreo, que incrementa la precisión equivalente en número de bits, y un sofisticado sistema de conformación de ruido, que en realidad no es nada más que desplazar las frecuencias residuales hacia zonas muy alejadas de la frecuencia audible, permite obtener una relación señal / ruido, muy elevada, siempre en cualquier caso, mayor que 110 dB. Por último es necesario considerar el uso de condensadores Elna, que son utilizados específicamente para audio.

## **8.2 Costos de algunos productos de renombre mundial**

En el mercado nacional, es muy difícil considerarlo como apto para la demanda de aparatos de alto costo, dado que nuestra situación económica no amerita realizar esfuerzos de esta naturaleza, sin embargo es necesario precisar, que para estudios de grabación y reproducción de música de alta fidelidad, dado que en este sentido la industria discográfica está en auge en estos momentos, se presentan los siguientes costos:

Tabla 8.

Marca	Modelo	Especificaciones	Costo del producto USA (en dólares americanos, respecto al año de su fabricación)
SONY	CDP X777 ES	Componentes mecánica de transporte y convertidor D / A	\$ 400
SONY	CDP X779 ES	Componentes mecánica de transporte y convertidor D / A	\$ 450
THETA DIGITAL	DSPro Generation V	Componente D / A separado	\$ 750
KRELL	Reference 64 D /A Converter	Componente D / A separado	\$ 1350
TECHNICS	SL PS900	Componentes mecánica de transporte y convertidor D / A	\$ 150
THRESHOLD	DAC 1/e	Componente D / A separado	\$ 1050

## CONCLUSIONES

Es cierto, y la realidad nacional es una dificultad para hacer realidad el desarrollo de investigaciones y aplicaciones en el campo del audio digital, sin embargo, considero, que a pesar de ello, se rescatan características importantes que se revelan como conclusiones:

1°. Se espera que como fruto de la investigación, este aporte contribuya para que la formación del ingeniero electrónico en el Perú posea otra línea de desarrollo paralela a las telecomunicaciones, en el caso de especialista en ingeniería de audio, analista en grabaciones y reproducciones musicales de alto nivel.

2°. El aporte a la investigación teniendo como base el procesamiento digital de señales, para los cursos de pre grado, con énfasis en el diseño de filtros digitales, Téngase en cuenta, que el tratamiento en el dominio de la frecuencia, siempre requerirá su tratamiento en el tiempo discreto.

3°. La industria discográfica está ascendiendo a niveles muy altos, hoy en día a pesar de las dificultades económicas en nuestro país, lo que implica que en un futuro a mediano plazo se requerirá de especialistas nacionales y / o de asesores en el campo del audio digital para tratar de equilibrar el nivel de calidad de grabación y reproducción musical frente a otros países, lo que implica un alto nivel de competitividad nacional para profesionales vinculados a la ingeniería electrónica.

4°. El hecho de desarrollar altos niveles de competitividad, implicaría un alto nivel de importación de equipos de radiodifusión, específicamente de audio, lo que significa que crearía nuevos puestos de trabajo en servicios aduaneros, y el contrabando entraría en una etapa de franca reducción.

5°. Aunque la realidad nacional es incipiente en este campo, existe un porcentaje bien reducido de la población, que pertenecen específicamente a sociedades de clases adineradas, conviene entonces incentivar este tipo de actividades, para de esta manera, mantener cautivo a este sector.

6°. A nivel latinoamericano, Argentina, Brasil y México mantienen el liderazgo en lo que a marketing se refiere, y también de sus niveles de ventas. En Europa, España mantiene un nivel ya cotizado. Pues bien, sucede que empresas norteamericanas, japonesas, inglesas, italianas y francesas, mantienen sus vínculos con los países mencionados no solo porque su economía lo permite, sino también porque existe el interés y el conocimiento por difundir este tipo de actividades. No olvidemos que las relaciones con otros países trae como consecuencia, no solo aporte económico sino también aporte cultural, aporte de carácter investigativo.

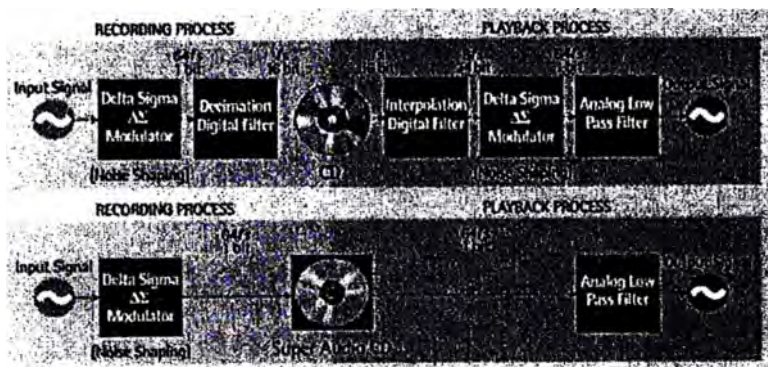
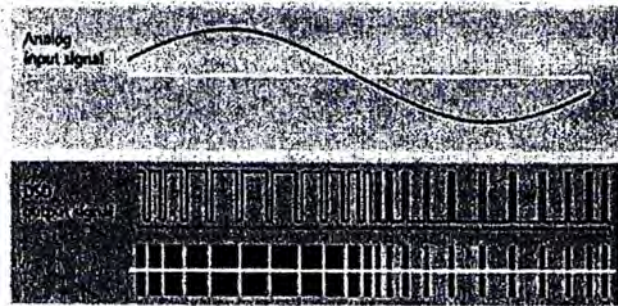
7°. El aporte de este desarrollo no solo traería consigo apertura en el mercado nacional, sino también oportunidades de empleo al exterior.

8°. Al nivel científico es importante considerar como resultado de las investigaciones el porqué del uso en las salidas para las conexiones de los convertidores D /A óptica y coaxial. Las investigaciones indican que la velocidad de la luz tiene una característica importante en ambos casos: en el cable coaxial de calidad la velocidad de la luz puede viajar al 95 % de su velocidad máxima, mientras que en una fibra

óptica del tipo ATT, este porcentaje se reduce al 40 %; sin embargo en lo que a musicalidad se refiere la fibra óptica ofrece mayor capacidad.

9°. No olvidemos que la codificación perceptual, es decir la subjetiva, aquella que mide la respuesta del oyente, es muy importante en nuestros días, tan es así que en el mercado existen grabadores / reproductores Mini Disc, que valgan verdades, en lo que calidad se refiere poseen en su interior procesadores de señal D / A de muy pobre nivel, esto es, los de tipo portátil, pero es uno de los productos que más se vende. Esto implica que en el futuro el conocimiento de lo que designa a la alta fidelidad de la doméstica jugará un papel importante en los siguientes pocos años, para determinar un vencedor en lo que a ventas se refiere, y esto será material de análisis.

10°. Por último, como consecuencia del desarrollo de la investigación, los adelantos del procesamiento digital de señales, los avances de Internet y el detalle consignado en el acápite 9°, debo indicar que desde fines de 1999 las empresas SONY y PHILIPS lanzaron al mercado el Super Audio CD, generando como consecuencia una revolución en el campo del audio digital, dejando la modulación PCM después de 30 años para imponer la nueva tecnología DSD (Direct Stream Digital), pero encuentran en el mercado al opositor TECHNICS quien lanzó al mercado el DVD – Audio, manteniendo la codificación PCM. Es decir existe por lo tanto análisis de investigación y cabe recordar que la actualización de los conocimientos es necesaria hoy en día, por lo tanto innovarse es una seria necesidad. Como parte de la última conclusión se muestran las bondades gráficas de la modulación DSD de SONY, como un nuevo y revolucionario aporte para la electrónica de consumo de audio digital particularmente.





**ANEXO A**

**ETAPA A / D STEREO PREVIA AL DSP (TEXAS INSTRUMENTS)**



THE WORLD LEADER IN DSP AND ANALOG

Search

Tech Support

Comments

Site Map

TI&ME

Home

PRODUCTS

DEVELOPMENT TOOLS

APPLICATIONS

Mixed-Signal Product Information

Mixed-Signal News

Mixed-Signal Tools

Mixed-Signal  
Sync-On

Mixed-Signal  
ShowCase

## Multimedia

### *Digital Audio Converters*

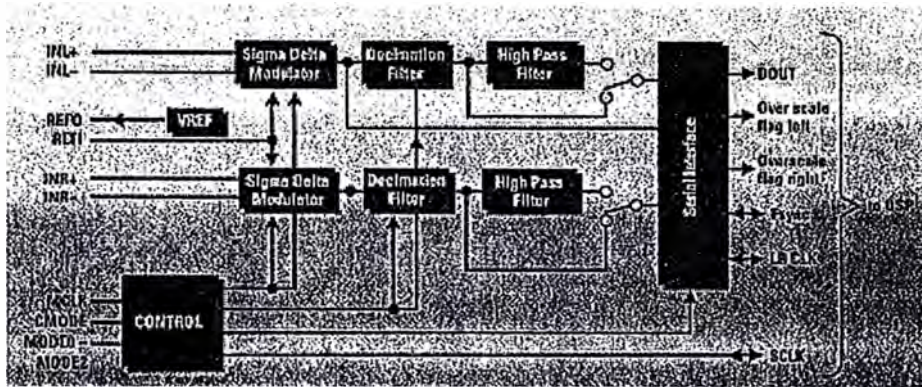
OVERVIEW	TLC320AD57	TLC320AD58	TLC320AD76
TLC320AD80	TLC320AD90	TLC320AD91	TMS320C44

# TLC320AD57

## DESCRIPTION

The TLC320AD57 is a stereo analog-to-digital converter utilizing the sigma-delta architecture. This converter contains two separate converters with a common control and serial interface.

## BLOCK DIAGRAM



## KEY FEATURES

- Power supply: Single 5 V
- Power-down mode
- Serial port interface
- 95-dB dynamic range
- 93-dB S/N+D
- 18 bit resolution
- Sample rates to 48 kHz

## APPLICATIONS

- Consumer audio
- Digital radio
- Industrial process control
- Multimedia audio
- Workstations
- DSP analog interface

[Search](#)

[Tech Support](#)

[Comments](#)

[Site Map](#)

[TI&ME](#)

[Home](#)

## BIBLIOGRAFÍA

1. Título: Tratamiento de la señal utilizando MatLab. Autor: Alan V. Oppenheim – Ronald W. Schafer-Mc Clellan. Editorial: Prentice Hall. Año: 1999. Páginas: 1 – 250
2. Título: An Introduction to Digital Audio. Autor: John Watkinson. Editorial: Butterworth-Heinemann. Año: 1998. Páginas: 51-201. 459-527.
3. Título: Conversión Analógica-Digital. Autor: Daniel H. Sheingold. Editorial: Analog Devices, Inc., Norwood, Mass. Año: 1998. Páginas: 1-27(Capítulo 15).
4. Título: Digital and Kalman Filtering. Autor: S.M. Bozic. Editorial: Edward Arnold. Año: 1996. Páginas: 1-90.
5. Título: Discrete Time Signal Processing. Autor: Alan V. Oppenheim – Ronald W. Schafer. Editorial: Prentice Hall International. Año: 1988. Páginas: 1-490.
6. Título: Principios de Microprocesadores. Autor: Ian L. Sayers – Adrian P. Robson – Alan E. Adams – E. Chester. Editorial: CRC Press, Inc. Año:1996. Páginas 1-345.
7. Título: Los Microprocesadores Intel 8086/8088, 80186, 80286, 80386 y 80486. Arquitectura, programación e interfaces. Barry B. Brey. Macmillan Publishing Company. Año: 1996. Páginas 1 –125.
8. Título: Circuitos Electrónicos. Autor: Donald Schilling Charles Belove Mc Graw Hill. Año: 1996. Páginas: 734-781.

9. Título: Matemáticas Discretas. Autor: Ralph Grimaldi. Editorial: Prentice Hall.  
Año: 1998. Páginas: 369-395.
10. Título: Matemáticas Discretas. Autor: Richard Johnsonbaugh. Editorial: Prentice Hall. Año: 1999. Páginas: 52 –164.
11. Título: Sound & Vision. January –December issues. Hachette Filippachi Magazines. 1998-2000
12. Título: Stereophile. January –December issues. 1999-2000. Hachette Filippachi Magazines. 1998-2000