Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Tesis para Optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

El Calor de las Finanzas: La Ecuación de Black-Scholes-Merton.

Heinz Guillermo ROQUE LOYOLA

Asesores:

Mg. Sergio HINOJOSA RAMÍREZ, PhD(c)
Mg. Fidel JARA HUANCA

La investigación más pura, nace de los esfuerzos de resolver problemas prácticos, y la mejor investigación aplicada nace de la curiosidad intelectual.

Fisher Black

Dedicatoria

Esta tesis esta dedicada a mi hijo Heinz Olivier, quien es mi fuente de energía e inspiración, para que cada día a día logre ser un mejor profesional. A mis padres, quienes con su entrega han logrado de mi el profesional que tanto anhelaban. A Don Sergio Hinojosa Ramírez, por todo el apoyo brindado en diversos temas: económicos, financieros, matemáticos y estadísticos; Así como por tu interés en transmitirme tu sapiencia con mucha paciencia y voluntad. A Don Patricio Mansilla Caro, quien nunca dejo de apoyarme en la realización de esta producto, así como sus aportes que hicieron realidad está tesis. A Don Fidel Jara Huanca, por siempre motivarme a inclinarme al campo de las matemáticas aplicadas, y este es el producto de su motivación dada en la aulas. Y a todas aquellas personas que de alguna manera hicieron posible llevar a cabo este producto final.

Índice general

Índice de Gráficas

Índice de Tablas

Motivación

El 14 de Octubre la Real Academia de Ciencias de Suecia decidió otorgar el Premio del Banco de Suecia para las Ciencias Económicas en Memoria de Alfred Nobel, 1997, a los profesores Robert C. Merton, de la Universidad de Harvard, Cambridge, USA, y Myron S. Scholes de la Universidad de Stanford, USA, por haber desarrollado un nuevo método para determinar el valor de los derivativos, el cual se conoce como la fórmula de Black-Scholes-Merton[1] *(en adelante B&S).*

Así lo informaba el diario El Comercio, en su edición del 15 de Octubre del mismo año. Este anuncio, aunque recortado, estaba a la vista de todos aquellos que transitaban por el corredor de la Escuela de Matemática. Cuando lo vi, esto dio respuesta a una pregunta que yo tenía desde el primer día que ingrese a la UNI, ¿Las matemáticas como carrera profesional, tiene alguna aplicación práctica en la vida real? Esto daba respuesta a una inquietud temprana, pero a su vez motivó una pregunta adicional ¿Que son las opciones financieras y los derivativos? y ¿Por qué su valoración mereció el Premio Nobel?

La formulación de B&S es una astuta y elegante representación matemática, que se fundamenta en la conocida ecuación de calor desarrollada por Fourier en 1822, y utilizada por Einstein en 1905 precisamente en la explicación formal del movimiento browniano, que es uno de los pilares de las finanzas modernas. Por consiguiente, las finanzas modernas y la física moderna si están conectadas. De ahí proviene el título de la tesis que presento a continuación.

[1] El premio Nobel no fue entregado a Fischer Black, PhD en matemáticas aplicadas de la Universidad de Harvard porque había fallecido el 30 de agosto del año 1995 (dos años antes del Nobel) que de acuerdo a las regulaciones del Nobel, éste no se entrega post morten.

Mi motivación principal es investigar, y en consecuencia conocer, con más precisión y detalle, la relación y los principios fundamentales de la matemática que gobiernan la solución de B&S para la determinación del precio de las opciones en particular y en general de todo derivado financiero que sigue procesos estocásticos relativamente estandarizados. Desafortunadamente, en los dos artículos seminales, el primero de Fischer Black y Myron Scholes (1973) **The Pricing of Options and Corporate Liabilities** publicado en el Journal of Political Economy 81 (3): 637-654 en sus ediciones de mayo-junio 1973 y el segundo de Robert C. Merton (1973) **Theory of Rational Option Pricing** publicado en el desaparecido Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1): 141-183 de la primavera (Spring) de 1973, el desarrollo de los principios matemáticos y particularmente de la conexión con la ecuación de calor no son directos, rigurosos y menos intuitivos.

Durante el año 2008, mi motivación inicial de investigar sobre los principios matemáticos de la formulación de B&S, se ha incrementado de manera importante debido a dos razones. La primera razón, es la actual crisis financiera que está viviendo el mundo y que se gatilló a partir de los problemas que ha vivido el mercado de hipotecas en Estados Unidos. La segunda razón, se relaciona con Perú, y se vincula con el substancial déficit relativo de infraestructura que vive mi país.

Crisis Financiera

En efecto, de acuerdo a varios analistas especializados[2], los grandes **culpables** de la actual crisis financiera internacional son las denominadas ventas cortas y los seguros contra impagos (CDS). Ambas se relacionan directamente con los supuestos y las aplicaciones iniciales de B&S.

La venta corta (en inglés, short selling) es un mecanismo financiero, donde un inversionista que no tiene un activo (por ejemplo, acciones, bonos, monedas), se lo puede **arrendar** a otro que sí lo posee. El inversionista que **arrienda** vende el activo a otro interesado y luego debe recomprarlo en el mercado para devolvérselo a quien se lo **arrendó**. La

[2]Laitman (2008) en www.laitman.com, Murphy (2008), Boyd (2008) en Behavior Analyst, The Economist, Wall Street Journal y Financial Times (2008)

estrategia ganadora, es que el precio del activo estará más barato cuando deba recomprarlo. Así, él lo vende **caro**, y lo recompra **barato**. Ahí está su ganancia.

Cuando los inversionistas tienen temor que grandes compañías de seguros o bancos de inversión pueden colapsar, se desata una ola de **ventas cortas**, precisamente especulando con que esas acciones en un tiempo más valdrían muy poco. Eso contribuye a hacer bajar fuertemente las acciones, sobre todo de instituciones financieras, generando una mayor sensación de pánico financiero. Estados Unidos[3], siguiendo los mismos pasos que otra decena de países, resolvió en septiembre del 2008 suspender las ventas cortas sobre 799 acciones financieras, para poner fin a las especulaciones. La existencia de la estrategia de ventas corta permite construir carteras o portfolios libres de riesgos, compuestos por acciones y opciones, y constituye la base de la valoración de B&S.

Por otra parte, una pregunta valida de plantearse es cómo fue posible que las hipotecas de alto riesgo (también denominadas subprime[4], en inglés) despertaran una alta demanda por parte de los inversionistas. Las hipotecas subprime lograron entrar al mercado gracias a la **securitización,** mecanismo donde se empaquetan un grupo de activos (en este caso hipotecas) y se venden como garantía de un bono[5] que se paga con el flujo

[3]Securities and Exchange Commission, Informe Nº 34-58592, Septiembre 18, 2008

[4]Subprime: esta palabra, con la que se ha bautizado a la crisis, fue elegida en el año 2007 como la palabra del año por la Sociedad Americana de Dialectos, dedicada al estudio de la lengua inglesa en EE.UU. Este adjetivo inglés se utiliza para describir un préstamo, hipoteca o inversión de alto riesgo, lo que está dado por la situación del deudor (bajos ingresos, poco trabajo y poco patrimonio). Cuando se clasifica el riesgo, a la hipoteca se le asigna un puntaje. La hipoteca **prime**, con bajo riesgo de impago, es aquella clasificada entre 850 y 620 puntos.

[5]Los bonos son instrumentos que permiten a las empresas y a los gobiernos obtener fondos para financiarse. El bono representa la suma de dinero solicitada. Tienen un vencimiento, al cabo del cual se le habrá pagado la totalidad de capital solicitado más intereses (los cuales se cobran de manera anual). Los bonos hipotecarios o subprime precisamente son instrumentos que los bancos emitieron. Dentro de sí tenían **empaquetados** estas hipotecas de alto y bajo riesgo, lo cual aseguraba pagos tanto del capital como intereses a quienes compraban estos instrumentos.

de ellas.

Aquellas hipotecas **prime** no tienen problema para entrar al mercado, pero para colocar las subprime se crea un producto llamado obligaciones de deuda colaterizadas - CDO (Collateralized Debt Obligations). Este tipo de productos se dividen en **niveles** (o tranches, en inglés), de modo que en un mismo bono se **empaquetan** hipotecas de distinto riesgo. Por lo tanto, en el mismo producto hay hipotecas prime y subprime, y entre todas ellas se asegura el flujo al inversionista que compra el bono. Asegurado el pago del flujo, las agencias de clasificación de riesgo las catalogan con altos niveles de seguridad.

En el contexto anterior, aparecen los Credit Default Swap (CDS), que son sofisticados contratos de seguros mediante los cuales se busca proteger contra los riesgos de impago que pueda tener un bono. Para ello, el comprador del bono le paga a un **asegurador** - mediante un sistema de primas anuales, usualmente por cinco años- para que en caso de default[6] de la empresa que emitió el bono el asegurador cubra los pagos que corresponden a dicho bono.

Estos contratos de garantías, a su vez, son transables en el mercado. Las espectaculares condiciones financieras hasta antes del 2008, llevaron a que se creara un gigantesco mercado de CDS, el que de acuerdo con algunas estimaciones llega a la impresionante cifra de US$ 62 trillones. La forma de colocarle precio a estos instrumentos garantizadores (CDS), es a través de modelos de riesgos de default, cuya principal familia de modelación sigue la formulación de B&S.

Es fácil darse cuenta que gracias a la existencia de estos seguros contra impago, el mercado de los bonos ligados a hipotecas subprime (los CDO) incrementaron aún más la demanda de los inversionistas por este tipo de bonos, ya que se hicieron **más seguros**. El problema es que estos seguros no se transan de manera competitiva en los mercados formales sino directamente entre las partes, por lo que no había una regulación específica y determinar su valoración y precio exacto es muy complejo.

[6]Palabra inglesa que se refiere cuando un deudor ya no puede seguir pagando los intereses o el capital asociados a un bono. En estos tiempos ha sido frecuente escuchar a empresas que entran en insolvencia y se declaran en **default**, pues ya no podrán pagar a sus acreedores.

Lo que sigue no es difícil intuirlo. Al caer el valor de las propiedades y comenzar las ejecuciones hipotecarias, disminuye el valor del activo que está en garantía y que respalda el valor de los bonos hipotecarios. Ello provoca una desvaloración del bono hipotecario, y por supuesto arrastra también al seguro que lo respalda (CDS), el que también se desvaloriza (pues aumenta el riesgo de impago).

Déficit de Infraestructura en Perú, Participación Privada y Garantías Estatales

Según el Informe Global de Competitividad 2008 - 2009, publicado el 08 de octubre del 2008, por el Foro Económico Mundial[7], ubica al Perú en el puesto 83 del ranking, mejorando 3 posiciones con relación al reporte del año anterior. Por su lado, Chile descendió 2 posiciones siendo, de igual forma, el mejor posicionado de la región.

Por su parte, en Noviembre del 2008, se desarrolló en la ciudad de la Lima las cumbres de Líderes y Empresarial del Foro de Cooperación Económica Asia Pacífico (APEC), donde se resaltó la importancia de la inversión pública y privada en los proyectos de infraestructura, como medida para enfrentar la crisis financiera internacional. Pero, cuando un Estado necesita desarrollar obras de infraestructura, y no cuenta con los medios económicos, ni los recursos de gestión para ello, entonces surgen las denominadas Asociaciones Público-Privadas (APPs).

En Perú, las APPs se clasifican en proyectos cofinanciados y autofinanciados, los que según sea el caso pueden necesitar garantías financieras estatales, los que se transforman en pasivos contingentes para el gobierno. Cabe señalar, que la característica de contingente proviene del hecho que estos pasivos se tienen que pagar únicamente bajo la ocurrencia de un evento específico. Una de las formas de valorar estos pasivos contingentes, es a través, de una técnica denominada Análisis de Activos Contingentes (AAC), cuyo fundamento central está basado en las proposiciones de Black, Scholes y Merton. Por esta razón, en el capítulo final se desarrolla los principales aspectos y algunas aplicaciones del AAC.

[7] WEF por sus siglas en inglés World Economic Forum

Finalmente, deseo mencionar a dos economistas que terminaron de motivarme en esta Tesis, los cuales conocí justamente 10 años después de otorgado el premio Nobel a Scholes y Merton. El primero es uno de mis profesores de Tesis, Don Sergio Hinojosa, quien me ha enseñado y me ha guiado en las aplicaciones de las finanzas y los procesos estocásticos en el mundo real. El segundo es Don Patricio Mansilla, quien me ha motivado y alentado en complementar mi aprendizaje de matemáticas con la teoría económica y particularmente con la economía financiera. Con ellos, estoy trabajando, entre otras materias, en aplicaciones de opciones financieras, opciones reales y flexibilidad al crecimiento económico.

Así como también a mi profesor de tesis de la Universidad Nacional de Ingeniería, don Fidel Jara, por siempre motivarme a inclinarme al campo de las matemáticas aplicadas, y este es el producto de su motivación.

Introducción

Uno de los desarrollos más notables en los mercados financieros, ha sido la comercialización de instrumentos derivados. En efecto, en el año 2007, el volumen total de transacciones en estos instrumentos ascendió a 516 mil millones de dólares[8], de los cuales más de la mitad correspondió a derivados de tasas de interés y dónde diariamente se negocian 5 mil millones de dólares (Bank of Internacional Settlements (2007), Salazar (2008)).

Los derivados son instrumentos financieros cuyo precio no sólo varía en función de los tradicionales parámetros como riesgo y plazo, sino que, también depende de la cotización que alcance en el mercado otro activo, al que se denomina subyacente. En este sentido su precio se "deriva"de la evolución del precio y de la cantidad de otro activo relacionado. Existen una serie de instrumentos derivados que se clasifican en categorías y en tipologías de uso. Entre los más importantes, clasificados por categorías, se encuentran los futuros, contratos a plazo (forwards), swaps, opciones de venta y compra, garantías. Mientras que los clasificados por tipologías, se encuentran los derivados de tipos de interés, acciones, índices, tipo de cambio, cobre, bienes agrícolas, metales, petróleo, crédito.

Extensa información para la enseñanza y comprensión sobre este tipo de instrumentos se encuentra en la literatura y en libros formales de la academia. Dentro de los más citados y usados en la enseñanza de derivativos, a nivel intermedio y avanzado se encuentran en primer lugar Hull (2002), y lo siguen libros como Kolb (1997), Miller (1997), Durban (2005) y Das (1994), entre otros. Esta literatura carece de desarrollos explicativos detallados de los principios y fundamentos de la matemática,

[8] Cinco veces mayor al PBI de Perú

para entender la valoración de los derivados financieros. Si bien el objetivo pedagógico de este tipo de libros, no es necesariamente profundizar en los fundamentos matemáticos, es precisamente esta sobre-simplificación formal que se detecta en estos textos de estudio la que ha contribuido en su justa medida, a mi juicio, a explicar la actual crisis financiera internacional. En los programas formales de MBA y de diplomas especializados en el mundo y por cierto en Perú, los fundamentos matemáticos no son mencionados, y su tratamiento es el mismo que se entrega al desarrollo de una fórmula, por ejemplo, como la derivación de la solución a la ecuación polinómica de segundo grado por todos conocidas y enseñada en la educación secundaria.

El caso más ilustrativo al respecto, es el artículo seminal para la valoración moderna de derivados financieros, escrito en 1973 por el matemático Fischer Black y el economista Myron Scholes. En este artículo, se muestra una fórmula directa para valorar opciones financieras usando para ello como fundamento central la formulación de la ecuación de calor de Fourier. Esta ecuación es solamente citada, más no desarrollada ni menos explicada. La prescripción del paper es una fórmula matemática, que es la que se presenta en los cursos de finanzas y programas de negocios especializados, y es la que los traders y operadores de derivados usan de manera usual en las valoraciones de miles de millones de dólares anualmente. Se trata de colocarle un precio a un instrumento derivado, y por lo tanto comercializarlo en un mercado primario o secundario, que esencialmente contiene variables aleatorias que siguen procesos estocásticos. Para lo anterior, es necesario conocer, evidentemente una serie de principios y fundamentos de teoría de probabilidades y de movimientos estocásticos estandarizados o semi estandarizados. Asimismo, es necesario conocer principios básicos de cálculo estocástico, algunos teoremas y lemas y algunos principios de matemática para la física aplicada. A partir de esos elementos anteriores, recién es posible comprender el desarrollo por etapas, de la valoración financiera de instrumentos derivados y sus aplicaciones.

En lo que sigue, en el presente documento se desarrollan de una manera etápica y consistente, los principales elementos de la matemática y de la física necesarios para comprender la valoración de instrumentos financieros derivados y sus aplicaciones. El documento se organiza como sigue:

En el Capítulo 1, se realiza una concisa revisión de la definición de espacios de probabilidad y variables aleatorias, que es la base para las siguientes secciones de la tesis. Con estas herramientas, se hace una revisión acerca de los procesos estocásticos y medidas de dispersión, para efectos de análisis con respecto a la curva normal.

Además se revisan las definiciones de la Integral de Riemann y la Integral de Riemann-Stieltjes, con la finalidad de definir la integral $\int_a^b f(t)dg(t)$, para cualquier función continua f y g sobre el intervalo $[a, b]$. Aún cuando, $f = g$ no resulta ser un problema no trivial. En realidad, no existe una respuesta definitiva. Es por ello, para poder responder a esta inquietud, se considera el estudio de los caminos aleatorios.

En el Capítulo 2, en base al marco teórico del Capítulo 1, se procede de definir al Movimiento Browniano Estándar, que fue la pieza clave para el estudio sobre opciones financieras que realizo Bachelier (1900). Así como también, definimos lo que es un Proceso de Wiener y realizamos su equivalencia con el Movimiento Browniano Estándar. Con estas ideas en mente, se desarrolla el Movimiento Geométrico Browniano, el cual fue introducido por Samuelson (1965) y que además juega un rol muy importante en el campo de las finanzas, en la valoración de derivados financieros.

En el Capítulo 3, con las definiciones del movimiento browniano, se estudia como este proceso juega un papel preponderante en la definición de las Martingalas, la Integral de Wiener, e Integrales Estocásticas.

Capítulo 4, todo lo anterior, se resume en la diferenciación estocástica, en particular, en el Lema de Itô. Las cuales forman la estructura de la modelación de instrumentos financieros, los cuales fueron posibles estudiarlos, gracias a la fórmula de Itô.

En el Capítulo 5, hacemos un alto al cálculo estocástico, para entrar al cálculo determinístico. Aquí abordamos es estudio de las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, en especial la ecuación de calor, por medio de la cual se modelan todos los derivados financieros, bajo sus respectivas condiciones de frontera, en este caso, estudiaremos el caso particular de la ecuación de calor en un medio ilimitado, el cual servirá para la obtención de la fórmula de BSM.

En el Capítulo 6, aquí desarrollamos los tópicos necesarios de la economía financiera para la comprensión del modelo de BSM. Para luego plantear los supuestos que subyacen al modelo y obtener la fórmula de valoración de opciones financieras europeas.

En el Capítulo 7, empezamos explicado que es un análisis de demandas contingentes, y aplicarlo a la valoración de garantías financieras en un proyecto de infraestructura por medio de la fórmula de B&S para una opción de venta, para diferentes escenarios de volatilidad. Así como también, como el Análisis de Activos Contingentes, se aplica en Warrants, Bonos Convertibles y LYONs.

Finalmente, se presenta las conclusiones y las líneas futuras de investigación a partir del presente trabajo de tesis. Así como un par de anexos donde se hace una breve descripción del tiempo continuo, y los algoritmos en Visual Basic, para las aplicaciones. Y por último la Bibliografía y enlaces web empleados para el desarrollo de la tesis.

1

Algunos Elementos de Teoría de la Probabilidad.

En la vida diaria, nos enfrentamos a menudo, a situaciones que muestran nuestra ignorancia respecto al futuro (lo cual es natural). Como, cuando intentamos prever la densidad del tráfico, la cotización en la bolsa de valores del precio de las acciones la proxima semana, los resultados de las próximas elecciones y a menudo no conocemos la respuesta con certeza. En su lugar, estamos obligados a suponer, o estimar nuestra posible respuesta.

Con la finalidad de dilucidar estas inquietudes, estudiaremos algunas de las propiedades de la Teoría de la Probabilidad, la cual es la ciencia de la incertidumbre. Aunque la incertidumbre, ha estado siempre presente entre nosotros, las teorías matemáticas de la probabilidad, se originaron en el siglo XVII. En 1654, el caballero de Mére, un jugador parisino, pregunto a Blaise Pascal sobre algunas situaciones relacionadas con la probabilidad que se dan en los juegos de azar, tales como la probabilidad de ganar que tendría cada jugador si se continuara un juego de azar detenido a la mitad. Interesado en el tema, Pascal inició una intensa correspondencia con el matemático y abogado Pierre de Fermat. Posteriormente Pascal escribió la obra **Traité du Triangle Arithmetique**, donde describe los coeficientes binomiales (el triángulo de Pascal) y la distribución binomial de probabilidad.(Para mayores detalles ver, [36], [54])

1.1. Introducción.

La definición formal de probabilidad se inicia con el **espacio muestral** o **espacio total**, generalmente representado por Ω. El espacio muestral es un conjunto que incluye todos los posibles resultados de un experimento o situación. Con esta finalidad, se presenta el siguiente ejemplo[1]:

1.1.1. Paradoja de Bertrand

Dado un circulo de radio $2m$., elijamos una cuerda de este circulo de manera aleatoria. ***¿Cuál es la probabilidad que esta cuerda intersecte al circulo de radio 1m., el cual es concéntrico con el circulo de radio $2m$.?***

1. **Solución** N^o1**:** Cualquier cuerda (siempre que no pase por el centro) se encuentra únicamente determinado por la localización de su punto medio.

   Así,

[1] Joseph Bertrand (1822-1900) fue un matemático francés cuyas principales áreas de trabajo fueron la Teoría de Números, la Geometría Diferencial y la Teoría de las Probabilidades. En 1888 publicó el libro **Calcul des Probabilitiés**, el cual, contiene numerosos ejemplos de problemas de probabilidades en los cuales el resultado depende del método de resolución del problema. De todos ellos, el más renombrado es el que presentamos a continuación y que es conocido como la **Paradoja de Bertrand**.

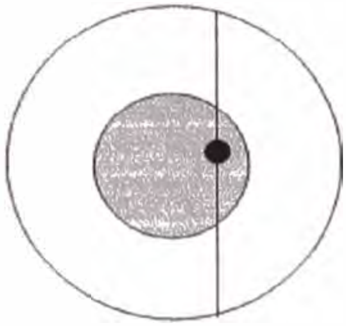

Gráfico 1.1: Paradoja de Bertrand: Primer caso.

$$
\begin{aligned}
\textit{Probabilidad de pasar por el centro} &= \frac{\textit{área del circulo interior}}{\textit{área del circulo exterior}} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

2. **Solución** N^o**2:** Por la simetría de la rotación inferior podemos asumir que la cuerda es vertical. El diámetro del circulo mayor es $4m.$ y la cuerda pasara por el círculo pequeño si cae dentro de su diámetro de $2m.$.

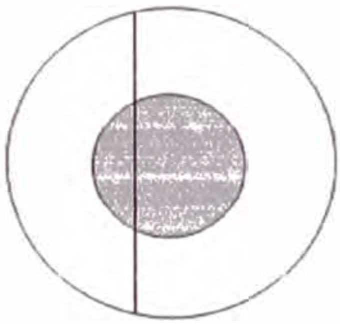

Gráfico 1.2: Paradoja de Bertrand: Segundo caso.

Por lo tanto

$$
\textit{La probabilidad de que pase por el circulo interior} = \frac{2m.}{4m.} = \frac{1}{2}.
$$

3. **Solución** N^o3 Por simetría podemos asumir que los extremos de la cuerda se encuentra bastante separados. El ángulo θ que hace la cuerda con la recta horizontal se encuentra entre $\pm\frac{\pi}{2}$ y la cuerda pasara por el circulo interior si θ se encuentra entre $\pm\frac{\pi}{6}$.

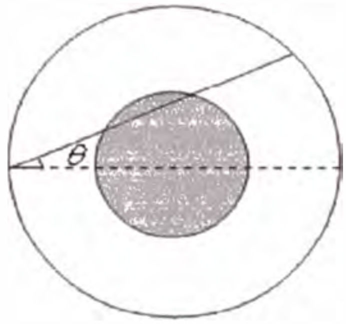

Gráfico 1.3: Paradoja de Bertrand: Tercer caso.

Por lo tanto

$$\textit{La probabilidad de que pase por el circulo interior} = \frac{\frac{2\pi}{6}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

□

Oservación 1.1 *Este ejemplo muestra que debemos tener mucho cuidado al momento de definir que significado tiene el término* ***aleatorio****. La manera correcta de hacer esto es introducir a continuación la estructura matemática precisa de un* ***espacio de la probabilidad****.*

1.2. Espacio de Probabilidad.

Cuando se elabora una teoría matemática, generalmente, lo primero que se suele hacer es, definir una estructura sobre la cual se va a desarrollar la teoría. En **Teoría de la Medida** se definen ciertas estructuras que por sí mismas tienen interés, pero fundamentalmente lo tienen cuando son utilizadas precisamente en **Teoría de la Probabilidad**.

En lo sucesivo se entenderá por Ω, como un conjunto fijo al cual se le denominará, espacio total y al conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ se le denominará el conjunto potencia de Ω. Además, recibirá el nombre de una sucesión de conjuntos, a toda aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\Omega)$. El cual se representará por $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Dado que la probabilidad, no puede ser definida sobre una colección cualquiera de sucesos, sino que la clase de subconjuntos del espacio muestral, sobre la que puede establecerse una probabilidad debe tener una estructura mínima, que se denomina sigma álgebra (σ-álgebra). Por consiguiente, una clase de sucesos constituye una sigma álgebra si cumple con las siguientes propiedades:

Definición 1.1 *Dado el espacio total Ω, una clase $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene una estructura de σ-álgebra si y sólo si*

(i) $\Omega \in \mathcal{U}$.

(ii) Para todo $A \in \mathcal{U}$, se verifica que $A^c \in \mathcal{U}$.

(ii) Dado cualquier sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ se verifica que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{U}.$$

Donde $A^c := \Omega \setminus A$ es el complemento de A.

Propiedades

1. $\emptyset \in \mathcal{U}$.

   En efecto: Es claro que $\emptyset = \Omega^c$ y como $\Omega \in \mathcal{U}$ por (i) y (ii) se tiene que $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{U}$.

2. Para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \in \mathcal{U}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}.$$

En efecto: Al ser $A_n \in \mathcal{U}, \forall n \in \mathbb{N}$ *se tiene por* (ii) *que* $A_n^c \in \mathcal{U}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Por* (iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{U}$, *y por* (ii)

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c \in \mathcal{U}$$

Finalmente como

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c$$

se tiene el resultado enunciado.

3. Para cualquier sucesión $\{A_k\}_{k=1,\ldots,n}$ con $A_k \in \mathcal{U}, \forall\ k = 1,\ldots,n$, se verifica que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{U}.$$

En efecto: La sucesión $A_1, \ldots, A_n, \emptyset, \ldots$ *es una sucesión infinita de elementos de* $\mathcal{U}$. *Por* (iii), *se tiene*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{U}.$$

4. Para cualquier sucesión $\{A_k\}_{k=1,\ldots,n}$ con $A_k \in \mathcal{U}, \forall\ k = 1,\ldots,n$, se verifica que

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{U}.$$

En efecto: La sucesión $A_1, \ldots, A_n, \Omega, \Omega, \ldots$ *es una sucesión infinita de elementos de* $\mathcal{U}$ *y por la propiedad* (2), *que se acaba de demostrar*

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \cap \Omega \cap \cdots \cap \Omega \cap \cdots \in \mathcal{U}.$$

5. La intersección de σ-álgebras definidas sobre el mismo espacio total es un σ-álgebra.

En efecto: Sea T la familia de σ-álgebras dada por

$$T = \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ es una } \sigma - \text{álgebra y } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)\}$$

Se establecerá que

$$\mathcal{H} = \bigcap_{\mathcal{U} \in T} \mathcal{U}$$

es una σ-álgebra. Para ello se verá que se verifican las condiciones que caracterizan a las σ-álgebras:

a) $\Omega \in \mathcal{H}$, *por ser las* $\mathcal{U} \in T$ *σ-álgebras y ser* $\Omega \in \mathcal{U}, \forall\, \mathcal{U} \in T$.

b) Si $A \in \mathcal{H}$, *entonces* $A \in \mathcal{U}, \forall\, \mathcal{U} \in T$, *entonces, por ser* $\mathcal{U}$ *una σ-álgebra,* $A^c \in \mathcal{U}, \forall\, \mathcal{U} \in T$ *y como consecuencia*

$$A^c \in \bigcap_{\mathcal{U} \in T} \mathcal{U} = \mathcal{H}.$$

c) Si $A_n \in \mathcal{H}$ *se tiene que* $A_n \in \mathcal{U}, \forall\, \mathcal{U} \in T$. *Por lo tanto,* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}, \forall\, \mathcal{U} \in T$. *En consecuencia*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U} = \mathcal{H}.$$

Definición 1.2 *Sea $\mathcal{U}$ un σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Llamamos a*

$$P : \mathcal{U} \to [0, 1]$$

una ***medida de probabilidad*** *siempre que:*

(i) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

(ii) *Dado cualquier sucesión* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ *se verifica que*

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

(iii) *Dado cualquier sucesión disjunta* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ *se verifica que*

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Se concluye que si $A,\ B \in \mathcal{U}$*, entonces*

$$A \subseteq B \quad implica \quad P(A) \leq P(B).$$

Definición 1.3 *La terna* $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ *es llamado un* ***espacio de probabilidad*** *siempre que* Ω *es un conjunto cualquiera,* $\mathcal{U}$ *es una* σ*- álgebra de subconjuntos de* Ω *y* P *es una* ***medida de probabilidad*** *sobre* $\mathcal{U}$.

Terminología.

(i) Un conjunto $A \in \mathcal{U}$ es llamado un **evento**; y los puntos $\omega \in \Omega$ son llamados **puntos de la muestra**.

(ii) $P(A)$ es la **probabilidad** del evento A.

(iii) Una propiedad el cual es cierto, excepto para un evento de probabilidad cero es llamado **casi seguramente** (usualmente abreviado **c.s.**).

Ejemplo 1.1 *Sea* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ *un conjunto finito, y supongamos que están dados los numeros* $0 \leq p_j \leq 1$ *para* $j = 1, \ldots, N$*, satisfaciendo* $\sum p_j = 1$. *Tomaremos* $\mathcal{U}$ *para abarcar todos los subconjuntos de* Ω. *Para cada conjunto* $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_m}\} \in \mathcal{U}$*, con* $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq N$*, definimos* $P(A) := p_{j_1} + p_{j_2} + \cdots + p_{j_m}$.

Ejemplo 1.2 *La menor σ-álgebra que contiene a todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ es llamado la σ-álgebra de Borel, denotado por $\mathcal{B}$. Supongamos que f es función integrable y no negativa, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f dx = 1$. Definimos*

$$P(B) := \int_B f(x)dx$$

para cada $B \in \mathcal{B}$. Entonces $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, P)$ es un espacio de probabilidad. Llamaremos a f la **densidad de la medida de probabilidad** *P.*

Ejemplo 1.3 *Supongamos que en vez de fijar un punto $z \in \mathbb{R}^n$, definimos*

$$P(B) \quad := \quad \begin{cases} 1 & si\ z \in B \\ 0 & si\ z \notin B \end{cases}$$

para conjuntos $B \in \mathcal{B}$. Entonces $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, P)$ es un espacio de probabilidad. Llamaremos a P la **masa de Dirac** *concentrada en el punto z, y escribiremos $P = \delta_z$.*

Ejemplo 1.4 ***Problema de la Aguja de Buffon,*** *es un problema de probabilidad geométrica planteado y resuelto en 1777 por el matemático y naturalista francés Georges-Louis Lecher, Conde de Buffon. El problema se presenta con un plano dividido en rectas paralelas equidistantes en 2cm. y con una aguja de longitud de 1cm. que se deja caer en forma aleatoria sobre el plano.* ***¿Cuál es la probabilidad de que esta aguja corte a alguna de estas rectas?***

Primero debemos encontrar algún espacio de probabilidad apropiado $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Para esto, sea

$$\begin{cases} h: \text{distancia desde el centro de la aguja hasta la recta mas cercana,} \\ \theta: \text{ángulo } \left(\leq \dfrac{\pi}{2}\right) \text{ que hace la aguja con la horizontal.} \end{cases}$$

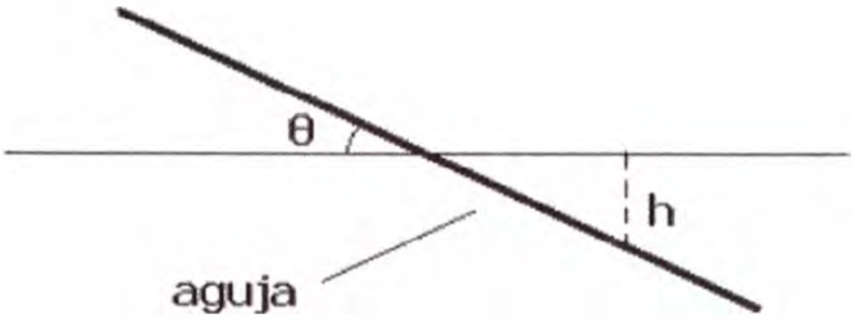

Gráfico 1.4: El Problema de la aguja de Buffon.

Esto determina completamente la posición de la aguja, hasta la traslación y la reflexión. Tomemos

$$\Omega = \underbrace{[0, \frac{\pi}{2})}_{valores\ de\ \theta} \times \underbrace{[0,1]}_{valores\ de\ h}, \qquad \mathcal{U} = Subconjuntos\ de\ Borel\ de\ \Omega,$$

$$P(B) = \frac{2 \cdot \acute{a}rea\ de\ B}{\pi} \quad para\ cada\ B \in \mathcal{U}$$

Denotaremos por A el evento que la aguja corta a una recta horizontal. Podemos comprobar que esto sucede siempre que $\frac{h}{\sin\theta} \leq \frac{1}{2}$. Por consiguiente, $A = \{(\theta, h) \in \Omega : h \leq \frac{\sin\theta}{2}\}$, y por lo tanto:

$$P(A) = \frac{2(area\ de\ A)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin\theta d\theta = \frac{1}{\pi}.$$

1.3. Variables Aleatorias.

Podemos pensar acerca del espacio de probabilidad Ω, como una construcción matemática esencial, el cual no es **directamente observable**. Por lo tanto, estamos interesados en introducir aplicaciones $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, cuyos valores se puedan observar. Recordemos del Ejemplo 1.2 que

$\mathcal{B}$ denota la colección de ***subconjuntos de Borel*** *de $\mathbb{R}^n$, el cual es la menor σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ conteniendo a todos los conjuntos abiertos.*

Definición 1.4 *Sea $(\Omega.\mathcal{U}, P)$ un espacio de probabilidad. Una aplicación*

$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

es llamado una ***variable aleatoria*** *n-dimensional si para cada $B \in \mathcal{B}$, tenemos*

$$\mathbf{X}^{-1}(B) \in \mathcal{U}$$

Equivalentemente decimos que $\mathbf{X}$ es $\mathcal{U}$-medible.

Nota 1.1 *Usualmente escribiremos $\mathbf{X}$ y no $\mathbf{X}(\omega)$. Es costumbre dentro de la teoría de la probabilidad no exhibir la dependencia de las variables aleatorias sobre la muestra $\omega \in \Omega$. También denotaremos $P(\mathbf{X}^{-1}(B))$ como $P(\mathbf{X} \in B)$, la probabilidad que $\mathbf{X}$ esta en B.*

Emplearemos letras capitales para denotar las variables aleatorias. Las letras en negrilla usualmente significan una aplicación vectorial.

Ejemplo 1.5 *Sea $A \in \mathcal{U}$. Entonces la* ***función indicador*** *de A.*

$$\chi_A(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A, \end{cases}$$

es una variable aleatoria.

Ejemplo 1.6 *En general, si $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{U}$, con $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, y los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_m$, entonces*

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$$

es una variable aleatoria, llamada una ***función simple****.*

Lema 1.1 *Sea $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una variable aleatoria. Entonces*

$$\mathcal{U}(X) := \{X^{-1}(B) : \ B \in \mathcal{B}\}$$

es un σ-álgebra, llamada la σ-álgebra generada por $\mathbf{X}$. Está es la menor sub-σ-álgebra de $\mathcal{U}$ con respecto a, el cual $\mathbf{X}$ es medible.

Oservación 1.2 *Es importante entender en términos probabilísticos que la σ-álgebra $\mathcal{U}(X)$ puede ser interpretada como aquella que* ***contiene toda la información relevante*** *acerca de la variable aleatoria.*

En particular, si una ***variable aleatoria*** *Y es una función de $\mathbf{X}$, es decir, si*

$$Y = \Phi(X)$$

para alguna función razonable Φ, ***entonces*** *Y es $\mathcal{U}(X)$-**medible**.*

Recíprocamente, supongamos que $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{U}(X)$-medible. Entonces existe una función Φ tal que

$$Y = \Phi(X).$$

Por lo tanto, si Y es $\mathcal{U}(X)$-medible. Y es en realidad una función de $\mathbf{X}$. Por consiguiente, si conocemos el valor de $X(\omega)$, en principio sabemos también que $Y(\omega) = \Phi(X(\omega))$, aunque no podemos tener una manera práctica de construir Φ. $\square$

Oservación 1.3 *Se entenderá por variables aleatorias distribuidas idénticamente e independientemente, si cada una de ellas tiene la misma distribución de probabilidad y son mutuamente independientes.*

Formalmente esto es, dado dos variables aleatorias X e Y se dirá que están distribuidas idénticamente si ellos están definidos sobre el mismo espacio de *probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *y la función de distribución* F_X *de* X *y la función de distribución* F_Y *de* Y *son las mismas:* $F_X = F_Y$.

Una colección de variables aleatorias X_i, *se dice que está idénticamente e independientemente distribuida, si los* X_i *son idénticamente distribuidas y mutuamente independiente (cada subfamilia finita de* X_i *es independiente).*

1.4. Procesos Estocásticos.

Sea:

$$\begin{array}{rcccl} X & : & [0,\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & X(t) = X_t \end{array}$$

una función real de variable real. Por ejemplo, la función X_t puede describir la velocidad o la aceleración de un cuerpo solido en función del tiempo t. Pero X_t, también puede representar el precio de un activo financiero en el tiempo, llamada trayectoria del activo financiero X. Sin embargo, existe una diferencia fundamental entre estas dos interpretaciones. En el primer caso, X como una función de t, es una función suave, no solo es continua (*natura non facit saltus!*[2]), sino que también (a menudo) es diferenciable. Para esta clase de funciones, existen herramientas conocidas del cálculo clásico. Empleando la notación $\dot{X}_t := \frac{dX_t}{dt}$ para la derivación de X_t con respecto al tiempo t, tan común en física, la relación entre la diferenciación y la integración puede ser formulada de la siguiente manera:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \dot{X}_s ds \qquad ó \qquad dX_t = \dot{X}_t dt.$$

Sea $F \in C^2(\mathbb{R})$ una función real dos veces continuamente diferenciable sobre $\mathbb{R}$. Entonces, por el Teorema de Taylor (Ver [28], [56]), se llega a la siguiente expresión:

$$\triangle F(X_t) = F(X_{t+\triangle t}) - F(X_t) = F'(X_t)\triangle X_t + \frac{1}{2}F''(X_{\bar{t}})(\triangle X_t)^2$$

[2] La naturaleza no da saltos

con $\triangle X_t = X_{t+\triangle t} - X_t$ y algún $\tilde{t} \in [t, t + \triangle t]$. Tomando el límite cuando $\triangle t \longrightarrow 0$, obtenemos:

$$dF(X_t) = F'(X_t)dX_t$$

o, equivalentemente,

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)dX_s$$

donde, para una función suave X_t, $\triangle X_t \longrightarrow dX_t = \dot{X}_t dt$, y el término de mayor orden, que son de orden $(dt)^2$, se anulan.

Sin embargo, esta clásica relación no se aplica para aquellas funciones reales, que describen las trayectorias de los activos financieros, como ocurre en la matemática financiera. Cuando en el siglo XIX, el matemático alemán Weierstrass, construyó una función real continua, pero que no era diferenciable en ninguna parte, esta función fue considerada como una curiosidad matemática. Desafortunadamente, esta **curiosidad** se encuentra en el corazón de la matemática financiera. Las trayectorias de las tasas de cambio, las tasas de interés, y los activos líquidos son prácticamente continuos, debido a la alta frecuencia de los datos. Pero ellas no son de variación acotada, en cada intervalo de tiempo dado. En particular, ellos no son diferenciables en ninguna parte, por lo tanto la función de Weierstrass representa una posible gráfica financiera. Por consiguiente, el cálculo clásico requiere una extensión hacia las funciones de variación acotada, una tarea que fue pasada por alto, durante mucho tiempo. Este vacío, fue cubierto con el desarrollo del cálculo estocástico, el cual puede ser considerado como la teoría de diferenciación e integración de los procesos estocásticos, el cual es el objetivo de esta sección. Antes, definamos variables aleatorias que dependen del tiempo.

Definición 1.5 *Sea $(\Omega.\mathcal{U}, P)$ un espacio de probabilidad:*

(i) Una colección de variables aleatorias $\{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado un ***proceso estocástico****.*

(ii) Para cada punto $\omega \in \Omega$, la aplicación $t \mapsto X(t, \omega)$ es la correspondiente ***trayectoria de la muestra****.*

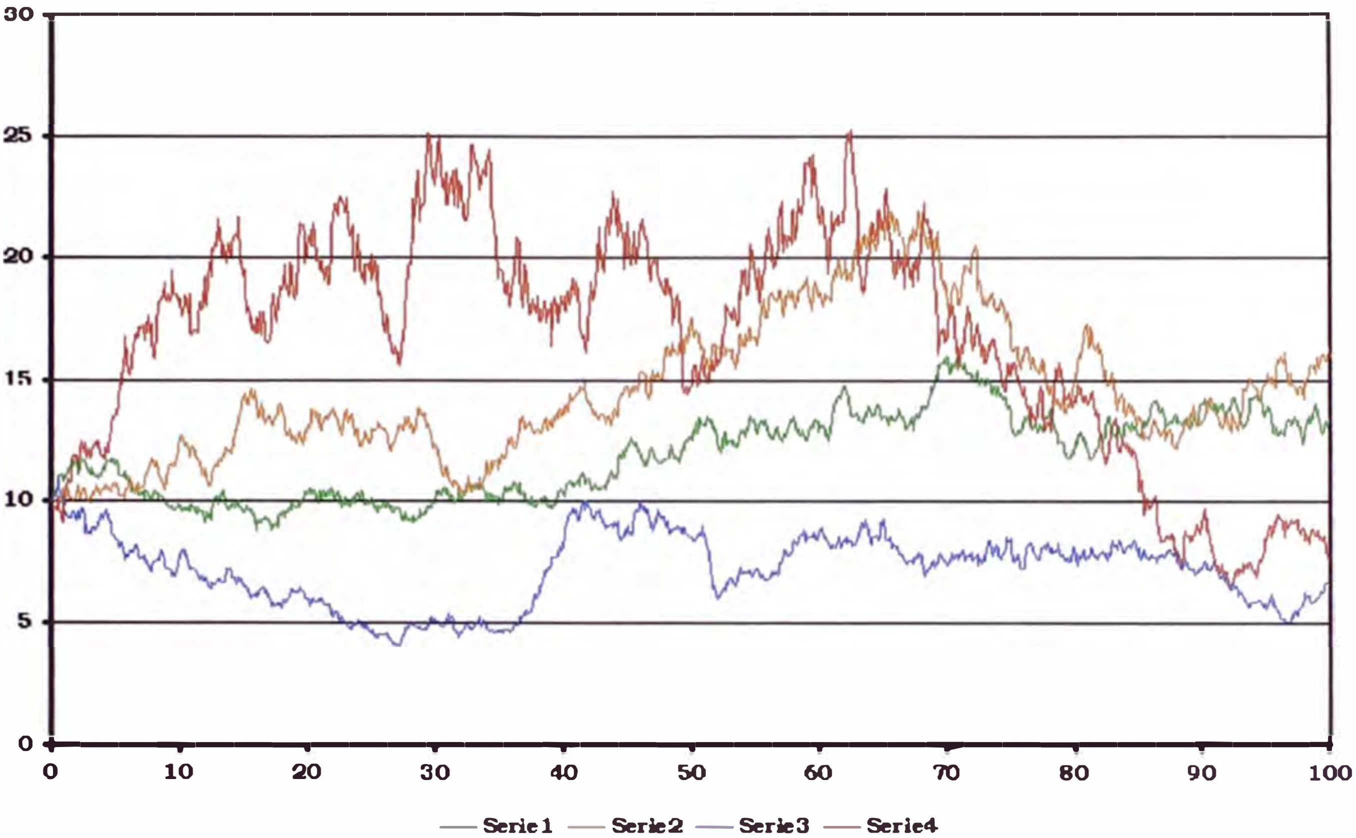

Gráfico 1.5: Trayectorias de un proceso estocástico.

La idea es que si ejecutamos un experimento y observamos como los valores aleatorios de $\mathbf{X}(\cdot)$ se desarrollan con el tiempo, en realidad estamos observando una trayectoria de la muestra $\{\mathbf{X}(t) : t \geq 0\}$ para algún $\omega \in \Omega$ fijo. Si volvemos a efectuar el experimento, observaremos en general una nueva trayectoria para la muestra, tal como se indica en el Gráfico 1.5.

1.5. Medidas de Dispersión.

Una explicación intuitiva de la definición de la **esperanza**, se basa precisamente en la interpretación de la probabilidad como límite de frecuencias relativas; es decir, sea $\mathbf{X}$ es una variable aleatoria, con función de probabilidad $p(x_i)$. Tal que $\mathbf{X}$ es una característica numérica del resultado de un experimento, supongamos que vamos a repetir (por lo menos conceptualmente) el experimento una cantidad finita n de veces, independientemente, al observar los valores de esa característica numérica. Si el tamaño del experimento, n, es un valor muy grande, las observaciones tomarán el valor x_i con una frecuencia relativa aproximadamente igual a $p(x_i)$, para todo i. Es decir, x_i aparecerá más o menos una cantidad $np(x_i)$ de veces, en las n observaciones. Por consiguiente, el valor promedio esperado en estos n ensayos del experimento, es decir, la media aritmética de los n valores observados, será aproximadamente igual a:

$$\frac{1}{n}\sum_i [x_i \cdot np(x_i)] = \sum_i [x_i \cdot p(x_i)]$$

Este valor será el límite cuando $n \to \infty$, i.e., el valor medio obtenido en n ensayos del experimento convergerá a $\mathbb{E}(\mathbf{X})$ cuando $n \to \infty$. (Está es una versión de la **Ley de los Grandes Números**[3]). Por lo tanto, podemos decir que *esperamos* obtener un valor medio $\mathbb{E}(\mathbf{X})$. (Ver [3])

Definición 1.6 *Llamaremos a*

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X dP$$

*la **esperanza** o **valor esperado**[4] de X, siempre que exista la integral.*

La **varianza**, es una medida que en promedio, cuantifica el nivel de dispersión o de variabilidad de los valores de una variable cuantitativa con respecto a su valor promedio. La concentración de los datos alrededor de su valor promedio, es proporcional al valor de la varianza.

Definición 1.7 *Llamaremos a*

[3]La Ley de los Grandes Números, afirma que la media aritmética de los n valores observado es aproximadamente igual a $\mathbb{E}(\mathbf{X})$ cuando n es muy grande.

[4]Algunas veces también llamado: **Valor medio**

$$Var(X) := \int_{\Omega} |\mathbf{X} - \mathbb{E}(X)|^2 dP$$

*la **varianza** de **X**, donde $|\cdot|$ denota la norma Euclidiana y siempre que la integral exista.*

Observemos que

$$Var(\mathbf{X}) = \mathbb{E}(|\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X})|^2) = \mathbb{E}(|\mathbf{X}|^2) - |\mathbb{E}(\mathbf{X})|^2.$$

La **desviación estándar** o **volatilidad**, es una medida de dispersión que nos indica cuánto tienden a alejarse los valores de una variable cuantitativa, del promedio en una distribución, es decir, es el promedio de la distancia de cada punto respecto del promedio.

Definición 1.8 *Llamaremos a*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

*la desviación estándar o volatilidad de **X**.*

A continuación se enunciaran sin demostración algunas propiedades, acerca de las medidas de dispersión, donde **X** es una variable aleatoria, para su demostración se puede consultar [3], [30], [59], [62] y [67].

Proposición 1.1

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Proposición 1.2

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Proposición 1.3

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Proposición 1.4

$$Cov(X, X) = Var(X)$$

Proposición 1.5

$$Cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = Cov(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$$

Proposición 1.6

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$$

Nota 1.2 *La Proposición 1.6, puede ser enunciada de manera equivalente, en términos del algebra lineal, de la siguiente manera:*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{X}_i\right) = w' V w$$

donde:

w = *vector columna de los valores* w_i, *para* $i = 1, \ldots, n$.

w' = *transpuesta de* w, *un vector fila.*

V = *matriz cuadrada de dimensión* n *de las covarianzas* $Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$.

Proposición 1.7

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y})$$

Lema 1.2 *Sea* $\mu = \mathbb{E}(X)$ *y* $\sigma = S(X)$. *Definimos* $\hat{\mathbf{X}} = \dfrac{\mathbf{X} - \mu}{\sigma}$. *Entonces*

$$\mathbb{E}(\hat{\mathbf{X}}) = 0 \quad y \quad Var(\hat{\mathbf{X}}) = \sigma(\hat{\mathbf{X}}) = 1.$$

1.6. La Distribución Normal y Lognormal

Sea $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ es un espacio de probabilidad y $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una variable aleatoria.

Nota 1.3 *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *e* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$x \leq y$$

significa que $x_i \leq y_i$, *para* $i = 1, \ldots, n$.

Definición 1.9 *Sea* $(\Omega.\mathcal{U}, P)$ *un espacio de probabilidad. La* ***función distribución*** *de la variable aleatoria* $\mathbf{X}$ *es la función*

$$\begin{array}{rcccl} F_{\mathbf{X}} & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & [0,1] \\ & & x & \longmapsto & F_{\mathbf{X}}(x) := P(\mathbf{X} \leq x), \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Definición 1.10 *Sea* $\mathbf{X}$ *una variable aleatoria y* $F = F_{\mathbf{X}}$ *su función distribución. Si existe una función integrable, no negativa* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dy,$$

entonces f *es llamado la* ***función densidad*** *para la variable aleatoria* $\mathbf{X}$.

Se concluye entonces que:

$$P(\mathbf{X} \in B) = \int_B f(x)dx, \quad \forall\, B \in \mathcal{B} \tag{1.1}$$

La distribución normal fue considerada por primera vez por De Moivre en 1753, pero quedó en el olvido, hasta que a principios del siglo XIX Gauss y Laplace la pusieron de actualidad y por ello en la literatura estadística se la conoce también con el nombre de distribución de Laplace-Gauss (Ver [5], [30]).

El nombre de **normal** tiene solamente carácter histórico, dado que en la práctica, la mayoría de las distribuciones era de este tipo, normal y las restantes anormales. Es por ello que, **normal** es sólo un nombre y hoy en día esta distribución es tan corriente como otra cualquiera (Triangular, Uniforme, Binomial, Poisson, etc.). La distribución normal es el modelo más importante y utilizado para variables aleatorias continuas.

Su importancia se da, porque aparece (de manera aproximada) en muchas situaciones, como en los campos de la física, economía y las finanzas, por citar algunos. En general, la distribución normal, surge siempre que los resultados de un experimento sean debidos a un conjunto muy grande de causas independientes que actúan *sumando* efectos, siendo cada efecto individual, de poca importancia respecto al conjunto.

Siempre que una variable aleatoria pueda ser expresada como *producto* de pequeños factores independientes, entonces, diremos que esta es modelada por una distribución **Lognormal**, como es el caso del retorno a largo plazo de un proyecto de inversión. Es decir, Si **X** es una variable aleatoria con distribución normal, entonces $e^{\mathbf{X}}$ tiene una distribución **Lognormal**.

Oservación 1.4 *Sea X una variable aleatoria la cual se distribuye normalmente, entonces X puede tomar cualquier valor positivo o negativo. Sin embargo, si X es una variable aleatoria la cual se distribuye lognormalmente sólo puede ser positiva, con media, moda y mediana todas diferentes. Esto es sumamente importante cuando se desea valorar activos financieros, dado que es imposible que un activo adquiera un valor negativo, por lo que suponer que los mismos se distribuyen normalmente es una grave falencia*[5]

A continuación se enunciara la definición formal de la distribución normal y lognormal, así como alguna de sus propiedades más importantes.

Definición 1.11 La distribución normal de parámetros μ y σ, que representan la media y la volatilidad respectivamente, $(-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0)$, se representará abreviadamente por $N(\mu, \sigma)$, es el modelo de probabilidad caracterizado por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

[5]Extraído de Natenberg Sheldon - Option, Volatility & Pricing.

Oservación 1.5 *(**Distribución Normal Estándar**). Si la variable aleatoria X tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$, entonces, la **variable aleatoria estándar** $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, tiene distribución normal $N(0,1)$, con media $\mu_Z = 0$ y varianza $\sigma_Z^2 = 1$*

Definición 1.12 Se dice que una variable aleatoria no negativa **X** tiene una distribución lognormal, si la variable aleatoria $Y = \ln(\mathbf{X}))$ tiene una distribución normal. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria lognormal cuando $\ln(\mathbf{X})$ tiene una distribución normal con parámetros μ y σ es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.8

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Prueba. *Primero supongamos que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Sea*

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Entonces:

$$a^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dxdy$$

Aplicando transformadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dxdy = rdrd\theta$:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{\frac{-r^2}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-e^{\frac{-r^2}{2}}\right]_0^{\infty} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[0-(-1)]d\theta = \frac{1}{2\pi}(2\pi) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Dado que $a > 0$, y como se ha probado que $a^2 = 1$, entonces se tiene que $a = 1$.
Para el caso general, se aplica la siguiente transformación:

$$
y = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad dy = \frac{dx}{\sigma}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-y^2}{2}} \sigma dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

Proposición 1.9

$$
\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu \quad \forall x \in \mathbb{R}
$$

Prueba. *Supongamos que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.*

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} x e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \left[-e^{\frac{-x^2}{2}}\right]_{-n}^{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to\infty}\left[(-e^{\frac{-n^2}{2}}) - (-e^{\frac{-n^2}{2}})\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Para el caso general, se aplica la siguiente transformación:

$$
y = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad dy = \frac{dx}{\sigma}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx &= \int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma Y)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{y^2}{2}}\sigma dy \\
&= \mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{y^2}{2}}dy + \sigma\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{y^2}{2}}dy \\
&= \mu\times 1 + \sigma\times 0 \\
&\qquad \textit{Por la Proposición 1.8} \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

□

Proposición 1.10

$$
\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \mu^2+\sigma^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}
$$

Prueba. *Supongamos que* $\mu = 0$ *y* $\sigma = 1$. *Integrando por partes, hacemos* $f = x$, $f' = 1$, $g = -e^{\frac{-x^2}{2}}$, $g' = xe^{\frac{-x^2}{2}}$:

$$
\int_{-n}^{n} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \int_{-n}^{n} fg'dx
$$

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^{n} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} dx &= f(n)g(n) - f(-n)g(-n) - \int_{-n}^{n} f' g dx \\
&= (-ne^{\frac{-n^2}{2}}) - (ne^{\frac{-n^2}{2}}) - \int_{-n}^{n} -e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= -2ne^{\frac{-n^2}{2}} dx - \int_{-n}^{n} -e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= \int_{-n}^{n} -e^{\frac{-x^2}{2}} dx - 2ne^{\frac{-n^2}{2}}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \left[\int_{-n}^{n} e^{\frac{-x^2}{2}} dx - 2ne^{\frac{-n^2}{2}} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx - \lim_{n\to\infty} 2ne^{\frac{-n^2}{2}} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} 2ne^{\frac{-n^2}{2}} \\
&\quad \textit{Por la Proposición 1.8}
\end{aligned}$$

Queda por demostrar que el límite converge a 0, por la regla de L'Hôspital, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} 2ne^{\frac{-n^2}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{e^{\frac{n^2}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{ne^{\frac{n^2}{2}}} = 0$$

Para el caso general, se aplica la siguiente transformación:

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad dy = \frac{dx}{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu+\sigma y)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-y^2}{2}} \sigma dy \\
&= \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} \sigma dy + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} \sigma dy + \\
&\quad \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} \sigma dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \mu^2 \times 1 + 2\mu\sigma \times 0 + \sigma^2 \times 1 \\
&\qquad \textit{Por la Proposición 1.8 y 1.9} \\
&= \mu^2 + \sigma^2
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.11 *Si* $\boldsymbol{X}$ *es* $N[\mu,\sigma^2]$*, entonces* $\mathbb{E}(X) = \mu$ *y* $Var(X) = \sigma^2$.

Prueba.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu \\
&\qquad \textit{Por la Proposición 1.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&\qquad \textit{Por la Proposición 1.1} \\
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx - \mu^2 \\
&= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\
&\qquad \textit{Por la Proposición 1.10} \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.12 *La función de densidad de probabilidad de* $LN(\mu,\sigma^2)$ *es:*

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Prueba. *Supongamos que la variable aleatoria* $\boldsymbol{X}$ *es* $LN(\mu,\sigma^2)$. *Entonces* $X = e^{Y}$, *donde* Y *es* $N(\mu,\sigma^2)$. *Entonces:*

$$\begin{aligned} Prob(\boldsymbol{X} < k) &= Prob(e^{Y<k}) = Prob(Y < \ln(k)) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \end{aligned}$$

Aplicando la transformación:

$$x = e^{y},\ y = \ln(x),\ dy = \frac{1}{x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{k} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

□

Lema 1.3 *Sea* $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una variable aleatoria, y supongamos que su función distribución* $F = F_{\boldsymbol{X}}$ *tiene una densidad* f. *Supongamos que*

$$\begin{aligned} g\ :\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{X} &\longmapsto g(\boldsymbol{X}) = Y \end{aligned}$$

es integrable. Entonces

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)dx.$$

En particular,

$$E(\boldsymbol{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} xf(x)dx \qquad y \quad V(\boldsymbol{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - E(\boldsymbol{X})|^2 f(x)dx.$$

Prueba. *Supongamos primero que g es una función simple sobre $\mathbb{R}^n$:*

$$g = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i} \qquad (B_i \in \mathcal{B}).$$

Entonces

$$E(g(\mathbf{X})) = \sum_{i=1}^{m} b_i \int_{\Omega} \chi_{B_i}(\mathbf{X}) dP = \sum_{i=1}^{m} b_i P(\mathbf{X} \in B_i).$$

Pero también

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx &= \sum_{i=1}^{m} b_i \int_{B_i} f(x) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^{m} b_i P(\mathbf{X} \in B_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula se cumple para todas las funciones simples g y, por la aproximación, se verifica por lo tanto para cualquier función g en general. □

A continuación enunciaremos algunos resultados sobre variables aleatorias que se distribuyen normal estándar, que serán de gran utilidad para la construcción del movimiento Browniano.

Lema 1.4 *Supongamos que X es una variable aleatoria el cual se distribuye normal estándar. Entonces, para todo $x > 0$,*

$$\frac{x}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}\{X > x\} \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Prueba. *La desigualdad del lado derecho se obtiene mediante la siguiente estimación*

$$\mathbb{P}\{X > x\} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{u}{x} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Para la desigualdad del lado izquierdo definimos la siguiente función:

$$f(x) = x e^{-x^2/2} - (x^2+1) \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

De la definición se observa que $f(0) < 0$ *y* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Además,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - x^2 + x^2 + 1)e^{-x^2/2} - 2x\int_x^{\infty} e^{-u^2/2}du \\ &= -2x\left(\int_x^{\infty} e^{-u^2/2}du - \frac{e^{-x^2/2}}{x}\right), \end{aligned}$$

el cual es positivo para $x > 0$, *por la primera parte. Por consiguiente* $f(x) \leq 0$, *probando el lema.* □

1.6.1. Regla 68-95-99

Aunque existen muchas curvas normales, todas ellas tienen propiedades comunes. En particular, todas las distribuciones normales cumplen las propiedades de la Regla 68-95-99. Para cualquier variable aleatoria que se distribuye normalmente con media μ y volatilidad σ, se cumple lo siguiente

- El 68 % de todas las observaciones se encuentran dentro del intervalo $\mu \pm \sigma$.
$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827 = 68.27\,\%$$
- El 95 % de todas las observaciones se encuentran dentro del intervalo $\mu \pm 2\sigma$.
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545 = 95.45\,\%$$
- El 99.7 % de todas las observaciones se encuentran dentro del intervalo $\mu \pm 3\sigma$.
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973 = 99.73\,\%$$

Además, de la simetría de la función de probabilidad $f(x)$, $P(X > \mu) = P(X < \mu) = 0.5 = 50\,\%$.

Cuando no se conoce el tipo de distribución de la variable aleatoria, se emplea la desigualdad de Tchebychev (Ver [3], [67]).

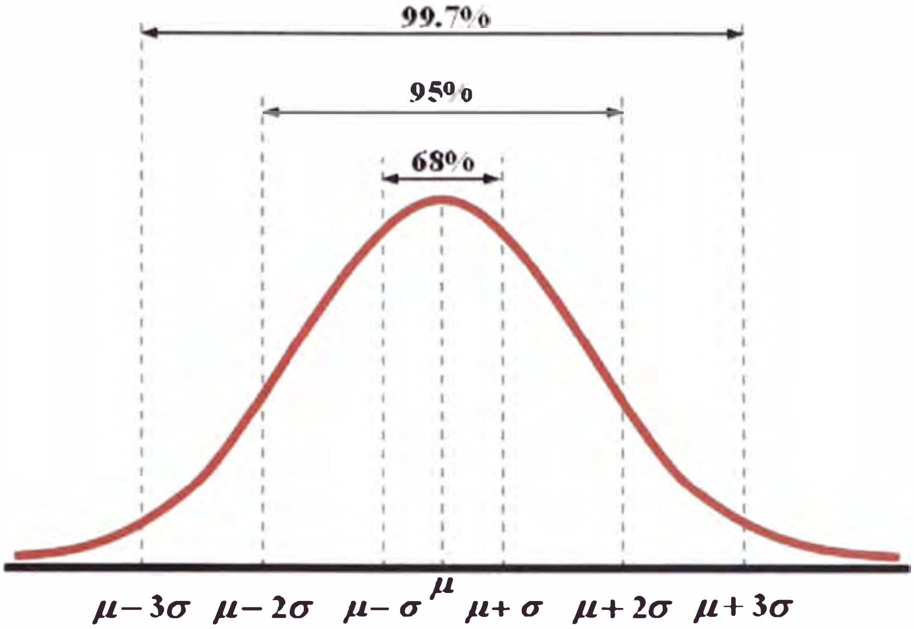

Gráfico 1.6: Regla 68-95-99.

1.7. Integrales.

Primero revisaremos la definiciones de la integral de Riemann en cálculo y la integral de Riemann-Stieltjes en cálculo avanzado (Para mayores detalles ver [56]).

1. **Integral de Riemann.** Una función acotada f definida sobre un intervalo cerrado y finito $[a, b]$ es llamado **Riemann Integrable** si el siguiente límite existe:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}),$$

donde $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ con la siguiente convención

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b, \quad \|\Delta_n\| = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}),$$

y τ_i es un punto de evaluación en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, i.e. $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Si f es una función continua sobre $[a, b]$, entonces es

Riemann integrable. Además, se sabe que una función acotada sobre $[a, b]$ es Riemann integrable si y sólo si, es continua casi en todas partes con respecto a la medida de lebesgue (Ver [30]).

2. **Integral Riemann-Stieltjes.** Sea g una función monótona creciente sobre un intervalo cerrado y finito $[a, b]$. Una función acotada f definida sobre el intervalo $[a, b]$ se dice que es **Riemann-Stieltjes integrable** con respecto a g si el siguiente límite existe:

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \tag{1.2}$$

   donde la partición Δ_n y los puntos de evaluación τ_i siguen la definición anterior. Se sabe que: las funciones continuas sobre $[a, b]$ son Riemann-Stieltjes integrables con respecto a cualquier función monótona creciente sobre $[a, b]$.

Supongamos que la función f monótonamente creciente y continua y la función g es continua. Entonces, podemos emplear la fórmula de integración por partes para definir:

$$\int_a^b f(t)dg(t) \equiv f(t)g(t)\,]_a^b - \int_a^b g(t)df(t), \tag{1.3}$$

donde la integral del la derecho es definido como en la Ecuación (1.2) con f y g intercambiando. Esto nos conduce a la siguiente pregunta.

Para cualquier función continua f y g sobre el intervalo $[a, b]$, ¿Es posible definir la integral $\int_a^b f(t)dg(t)$ por la Ecuación (1.2)?

Consideremos el caso especial $f = g$, i.e., la integral:

$$\int_a^b f(t)df(t).$$

Sea $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición sobre el intervalo $[a, b]$. Sea L_n y R_n las cuales denotan las correspondientes sumas de Riemann con los puntos de evaluación $\tau_i = t_{i-1}$ y $\tau_i = t_i$, respectivamente, i.e.,

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,(f(t_i) - f(t_{i-1}))\,, \tag{1.4}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(f(t_i) - f(t_{i-1}))\,. \tag{1.5}$$

De estas dos ecuaciones se desprende la siguiente pregunta: ¿ $\lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} L_n = \lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} R_n$?. Con la finalidad de dar respuesta a esta interrogante observemos las siguientes expresiones:

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2, \tag{1.6}$$

$$R_n + L_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f^2(t_i) - f^2(t_{i-1})\right) = f^2(b) - f^2(a). \tag{1.7}$$

Por consiguiente, luego de reordenar encontramos las expresiones de R_n y L_n, las cuales son:

$$R_n = \frac{1}{2}\left(f^2(b) - f^2(a) + \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2\right),$$

$$L_n = \frac{1}{2}\left(f^2(b) - f^2(a) - \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2\right),$$

El límite del lado derecho de la Ecuación (1.6) cuando $\|\Delta_n\| \to 0$, si existe, este es llamado la **variación cuadrática** de la función f sobre el intervalo $[a, b]$. Por consiguiente, $\lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} L_n \neq \lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} R_n$, si y sólo si, la variación cuadrática de la función f es diferente de cero.

Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.7 *Sea $f \in C^1$ una función, i.e., f' es una función continua. Entonces por el* ***Teorema del Valor Medio***[6]*:*

[6](**Teorema del Valor Medio.**, Rudin (1990)) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$, entonces existe un $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}.$$

$$\begin{aligned}
|R_n - L_n| &= \sum_{i=1}^{n} \left(f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})\right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|f'\|_\infty^2 (t_i - t_{i-1})^2 \\
&\leq \|f'\|_\infty^2 \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= \|f'\|_\infty^2 \|\Delta_n\| (b-a) \\
&\longrightarrow 0, \quad \textit{cuando } \|\Delta_n\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

donde $t_{i-1} < t_i^* < t_i$ y la norma $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del supremo. Así lím $L_n =$ lím R_n *cuando $\|\Delta_n\| \to 0$. Entonces, por la Ecuación (1.7) tenemos:*

$$\lim_{\|\Delta_n\| \to 0} L_n = \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} R_n = \frac{1}{2}\left(f^2(b) - f^2(a)\right). \tag{1.8}$$

Además, como $f \in C^1$, entonces podemos definir la integral $\int_a^b f(t)df(t)$ como:

$$\int_a^b f(t)df(t) = \int_a^b f(t)f'(t)dt.$$

Por el ***Teorema Fundamental del Cálculo***[7]*, tenemos:*

$$\int_a^b f(t)df(t) = \int_a^b f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}\left(f^2(b) - f^2(a)\right),$$

el cual nos da el mismo valor obtenido en la Ecuación (1.8).

Ejemplo 1.8 *Supongamos que f es una función continua, la cual satisface la siguiente condición:*

[7]**(Teorema Fundamental del Cálculo,** Rudin (1990)) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y existe una función diferenciable F sobre $[a, b]$ tal que $F' = f$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$$|f(t) - f(s)| \approx |t - s|^{1/2}.$$

en este caso, tenemos:

$$0 \leq R_n - L_n \approx \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{\Delta_n \to 0} R_n \neq \lim\limits_{\Delta_n \to 0} L_n$ *cuando* $a \neq b$. *Por consiguiente, la integral* $\int_a^b f(t)df(t)$ *no puede ser definida por la Ecuación (1.2) con* $f = g$ *para tal función* f. *Donde la variación cuadrática de la función es* $b - a$.

De los ejemplos anteriores se observo que la definición de la integral aun cuando $f = g$ es un problema no trivial. En realidad, no existe una respuesta definida para la primera pregunta planteada. Debido al último ejemplo podemos hacernos la siguiente pregunta:

¿Existe funciones continuas f que satisfacen la siguiente condición $|f(t) - f(s)| \approx |t - s|^{1/2}$?

Con la finalidad de responder a esta pregunta, consideraremos caminos aleatorios y tomaremos un límite conveniente en la siguiente sección.

1.8. Caminos Aleatorios.

Consideremos un camino aleatorio que inicia en 0 con saltos h y $-h$ en los tiempos $\delta, 2\delta, \ldots,$ donde h y δ son números positivos. Formalizemos esta intuición por medio de la teoría de probabilidad, sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias distribuidas independientemente e idénticamente con

$$P(X_j = h) = P(X_j = -h) = \frac{1}{2}.$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$ y definamos:

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, definamos $Y_{\delta,h}(t)$ por medio de una linealización, i.e., para $n\delta < t < (n+1)\delta$, definimos

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}\left((n+1)\delta\right).$$

Podemos pensar acerca de $Y_{\delta,h}$ como la posición de un camino aleatorio en el tiempo t. En particular, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ es la posición de este camino aleatorio en el tiempo $n\delta$.

¿Cuál es el límite del camino aleatorio $Y_{\delta,h}$?, i.e.,

$$\lim_{\delta,h\to 0} Y_{\delta,h} = ?$$

Con la finalidad de dar respuesta a esta pregunta, calculemos el siguiente límite de la función característica de la función $Y_{\delta,h}(t)$:

$$\lim_{\delta,h\to 0} \mathbb{E}\left(e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right),$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es fijo. Para la derivación heurística, sea $t = n\delta$ de modo que $n = \frac{t}{\delta}$. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right) &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_j}\right) \\
&= \left(\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_1}\right)^n\right) \\
&= \left(e^{i\lambda h}\frac{1}{2} + e^{-i\lambda h}\frac{1}{2}\right)^n \\
&= (\cos(\lambda h))^n \\
&= (\cos(\lambda h))^{t/\delta}. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

De donde se concluye que para λ y t fijos, el límite de $e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}$ no existe cuando δ y h tienden a cero independientemente. Así, con la finalidad que este límite exista, impondremos alguna relación entre δ y h. Sin embargo, dependiendo de está relación, podemos obtener diferentes límites.

Sea $u = (\cos(\lambda h))^{1/\delta}$. Entonces, $\ln(u) = \frac{1}{\delta}\ln\cos(\lambda h)$. Además,

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 h^2, \qquad \textit{para h pequeño.}$$

Pero, sabemos que $\ln(1 + x) \approx x$ cuando x toma valores muy pequeños. Por consiguiente:

$$\ln\cos(\lambda h) \approx \ln\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2 h^2\right) \approx -\frac{1}{2}\lambda^2 h^2.$$

Por lo tanto, para δ y h pequeños, tenemos que $\ln(u) \approx -\dfrac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2$ de modo que,

$$u \approx e^{\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2}.$$

Entonces, por la Ecuación (1.9),

$$\mathbb{E}\left(e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right) \approx e^{-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2 h^2}. \tag{1.10}$$

En particular, si δ y h están relacionados por $h^2 = \delta$, entonces:

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbb{E}\left(e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right) = e^{-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por consiguiente, se ha derivado el siguiente teorema acerca del límite de un camino aleatorio $Y_{\delta,h}$ cuando $\delta, h \to 0$ de tal manera que $h^2 = \delta$.

Teorema 1.13 *Sea $Y_{\delta,h}(t)$ un camino aleatorio que inicia en 0 con saltos iguales h y $-h$ en los tiempos δ, 2δ, $3\delta, \ldots$. Supongamos, que $h^2 = \delta$. Entonces, para cada $t \geq 0$, el límite*

$$B(t) = \lim_{\delta \to 0} Y_{\delta,h}(t)$$

existe en distribución. Además tenemos:

$$\mathbb{E}\left(e^{i\lambda B(t)}\right) = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Oservación 1.6 *En base a la discusión anterior, se espera que el proceso estocástico $B(t)$ tenga las siguientes propiedades:*

1. *El valor absoluto de la pendiente de $Y_{\delta,h}$ en cada paso es* $\dfrac{h}{\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}} \longrightarrow \infty$ *cuando* $\delta \longrightarrow 0$. *Así, es plausible que cada trayectoria* $B(t)$ *es en ninguna parte diferenciable. En realidad, si hacemos* $\delta = |t-s|$, *entonces:*

$$|B(t) - B(s)| \approx \frac{1}{\sqrt{\delta}}|t-s| = |t-s|^{1/2}. \tag{1.12}$$

   Así, casi todas las trayectorias aleatorias de $B(t)$ *tiene la propiedad de la segunda pregunta.*

2. *Casi todas las trayectorias aleatorias de* $B(t)$ *son continuas.*

3. *Para cada* t, $B(t)$ *es una variable aleatoria Gaussiana con media 0 y varianza* t. *Esta es una consecuencia directa de la Ecuación (1.11).*

4. *El proceso estocástico* $B(t)$ *tiene incrementos independientes, i.e., para cualquier* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, *las variables aleatorios*

$$B(t_1),\, B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1}),$$

   son independientes.

Las propiedades (2), (3) y (4) especifican un proceso fundamental llamado movimiento Browniano, el cual se estudiará en los siguientes capítulos.

2

El Movimiento Browniano

A principios del siglo XX, científicos rusos como Andrei A. Markov, Andrey N. Kolmogorov y Pafnuty L. Chebyshev (y el norteamericano Norbert Wiener) desarrollaron una teoría de probabilidad matemática más formal. En los años 50, los norteamericanos William Feller y Joe Doob escribieron importantes obras sobre la matemática de la teoría de la probabilidad, popularizando el tema en el mundo occidental como un área de la Matemática Pura y como una herramienta importante en Física, Química y posteriormente en Economía, Finanzas e Informática.

En el siglo XX, empleando el movimiento browniano, nombrado así en honor al botánico inglés Robert Brown, se logran importantes resultados, donde se introduce dos de los conceptos más importantes de la teoría moderna de la probabilidad: la integral estocástica y las ecuaciones diferenciales estocásticas. Estos conceptos no solo han sido además una herramienta esencial en muchos campos de la matemática, como por ejemplo en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, sino que además en la física teórica, la biología e ingeniería, y últimamente en la matemática y economía financiera.

2.1. Breve Reseña Histórica del Movimiento Browniano Estándar.

Gráfico 2.1: Movimiento Browniano de un par de partículas

En 1827, el médico y botánico escocés Robert Brown (1773-1858) mientras examinaba partículas de polen (de *Clarckia Pulchella*[1]) en el microscopio, observó que cuando éstas se encontraban suspendidas en agua y en otros líquidos se movían sin cesar en forma errática. En un principio, Brown pensó que las partículas tenían movimiento propio e incluso vida. Posteriormente, el fenómeno se asoció no sólo con partículas de polen, sino también con partículas de materia inorgánica como polvo

[1]Meriwether Lewis y William Clark en su expedición por el noroeste de Estados Unidos en 1803-1806, encontraron la planta *Clarkia Pulchella* a lo largo del río Idaho. El género *Clarkia* toma el nombre del capitán William Clark y el de la especie *Pulchella* tiene el significado de hermosa

fino de algunos minerales (vidrio, carbón, roca, etc.). Su investigación **A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies** fue publicada en el Edinburg New Philosophial Journal, Julio Septiembre (1828), pp. 358-371.

No fue sino hasta principios del siglo XX, cuando se demostró que el movimiento irregular de las partículas de polen se debían al golpeteo constante de las moléculas invisibles de agua sobre las moléculas visibles de las partículas de polen. En 1905, el físico judío-alemán Albert Einstein (1879-1955) escribe tres artículos seminales en física sobre **El Efecto Fotoeléctrico, La Relatividad Especial**, y **La Mecánica Estadística**. Por el primero, la Academia Sueca le otorgó el premio Novel en 1921, por el segundo obtuvo el reconocimiento de unificar la mecánica clásica con la electrodinámica y por el tercero la satisfacción de haber resuelto un problema que llevaba casi dos siglos sin respuesta, el Movimiento Browniano. Einstein proporcionó la explicación y formulación matemática del Movimiento Browniano, de la cual se deriva que la desviación estándar del desplazamiento de una partícula suspendida en un líquido, en un tiempo dado, es proporcional a la raíz cuadrada de dicho tiempo.

En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) en su tesis **Theorie de la Spéculation** sobre el modelo del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la Bolsa de París, se anticipó a Einstein con la formulación matemática del Movimiento Browniano, abordando un problema completamente diferente al de la mecánica estadística o al del movimiento errático de partículas de polen suspendidas en agua. Sin embargo su trabajo no fue reconocido como una contribución relevante por sus profesores y compañeros de la **Sorbonne** de París. Su vida transcurrió en el anonimato, hasta la fecha poco se sabe de este enigmático y misterioso personaje. La relevancia del trabajo de Bachelier fue reconocida hasta 1960, tristemente después de su muerte. El Movimiento Browniano, así como sus aspectos teóricos y prácticos, es objeto de numeros estudios en muchas y diversas areas de las finanzas. Sin lugar a dudas, el Movimiento Browniano se encuentra implícitamente o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo en ambientes estocásticos. Para ser mas precisos el Movimiento Browniano ocupa el 99% en la teoría de evaluación de portafolios y productos derivados en tiempo continuo; el 1% restante se refiere a detalles sin importancia

Otro destacado matemático asociado con una axiomática del Movimiento Browniano, en términos de filtraciones, es Norbert Wiener (1849-1964), de origen estadounidense, nació Columbia, Missouri. Wiener obtuvo su doctorado en Harvard en 1912, a la edad de 18 años, presentando una tesis sobre lógica matemática. Al concluir sus estudios en Harvard se fue a Cambridge, Inglaterra, donde fue alumno de Bertrand Russell y G. H. Hardy. Y, posteriormente, en 1914, se trasladó a Göttingen, Alemania, a trabajar bajo la dirección de David Hilbert y Edmund Landau. Es importante destacar que Norbert Wiener también ha sido reconocido como el Padre de la cibernética.

En 1923, Norbert Wiener junto con Paul Lévy, matemático francés que trabajo principalmente en la Teoría de Probabilidades, y que se graduó en la Escuela Politécnica de París, dieron la primera definición matemática rigurosa del Movimiento Browniano. Elaboraron el modelo que supone una partícula que en cada instante se desplaza de manera independiente de su pasado: es decir, la partícula no tiene memoria con respecto a su movimiento y decide moverse continuamente de manera aleatoria. Lo cual implica que el movimiento es continuo, cambiando en cada instante de dirección y de velocidad. Sin embargo a pesar de tener una trayectoria continua, está no tiene tangente en ningún punto. Las dos propiedades básicas que supuso Wiener son:

- Todas las trayectorias deben ser continuas.
- Una vez que fue observada la posición de la partícula en el instante $t = 0$ (posición por tanto conocida), su posición (aleatoria) en un instante posterior t' debe estar regido por la ley de Gauss, cuyos parámetros dependen del tiempo t transcurrido.

2.2. El Movimiento Browniano Estándar.

Definición 2.1 *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad fijo, el* ***Movimiento Browniano Estándar y unidimensional*** *es una función*

$$\begin{aligned} B \ : \ [0,\infty)\times\Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t,\omega) &\mapsto X(t,\omega) \end{aligned}$$

En particular,

1. *Para cada $t \geq 0$, la función $B(t,\cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variables aleatoria definida en $(\Omega, \mathfrak{F})$.*

2. *Para cada $\omega \in \Omega$, la función $B(\cdot,\omega) : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[0,\infty)$*

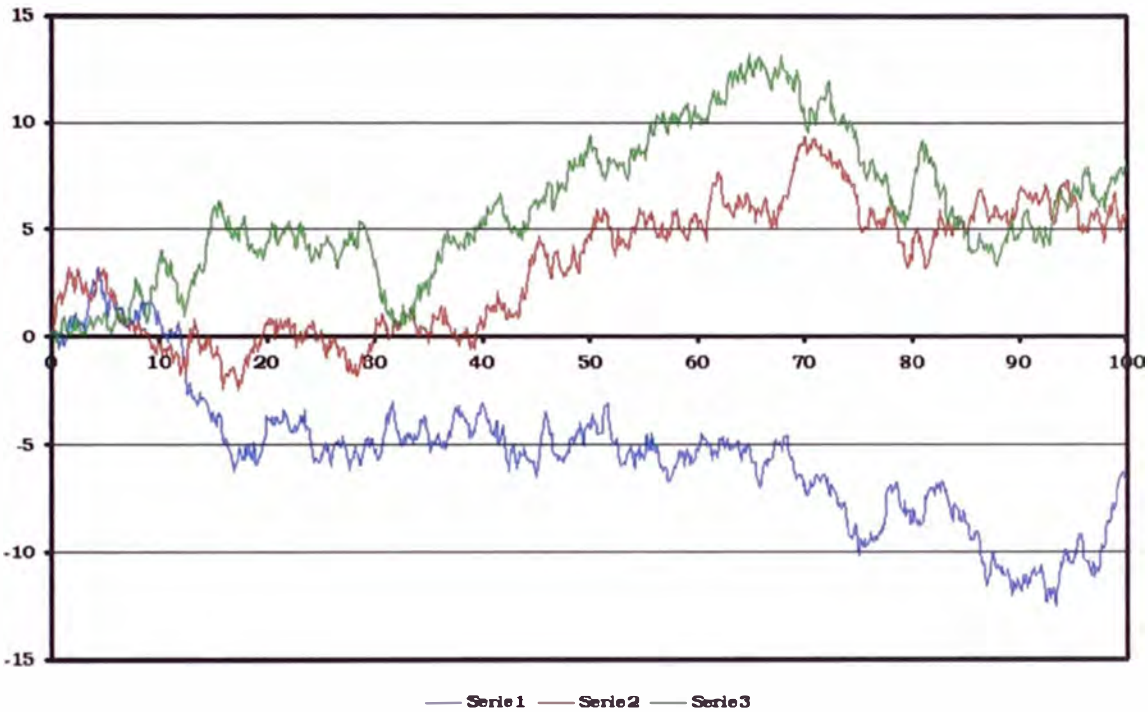

Gráfico 2.2: Movimiento Browniano Estándar

La familia de variables aleatorias $B(t,\cdot)$ es denotada, cuando no exista confusión, en forma breve como $\{B_t\}_{t\geq 0}$. Las funciones $B(\cdot,\omega)$ son llamadas trayectorias y se denotan por $\omega(t)$

Definición 2.2 *Un proceso estocástico $B(t,\omega)$ es llamado un* ***Movimiento Browniano Estándar****, si esté satisface las siguientes propiedades:*

1. *$B_0 = 0$ casi en todas partes, i.e.,*

$$P\{\omega \in \Omega \,/\, B_0(\omega) = 0\} = 1$$

En palabras más simples, el proceso siempre empieza en $t = 0$ con probabilidad uno;

2. *Para cualquier $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $B_t - B_s$ está normalmente distribuida con media 0 y varianza $t - s$, i.e., para cualquier $a < b$,*

$$P\{a \leq B_t - B_s \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-x^2/2(t-s)} dx.$$

3. *B_t tiene incrementos independientes, i.e., para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, las variables aleatorias*

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

son independientes.

4. *La función $B : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, de caminos aleatorios $B(t, \omega)$ es continua casi seguramente, i.e.,*

$$P\{\omega \in \Omega \,/\, B(\cdot, \omega) \text{ es continua}\} = 1.$$

Definición 2.3 *El **Movimiento Browniano Estándar** se encuentra estrechamente relacionado con la distribución normal. De la Proposición 1.8 tenemos para una variable aleatoria X, con media μ y varianza σ^2, si*

$$\mathbb{P}\{B > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^\infty e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.2.1. Propiedades del Movimiento Browniano Estándar.

Sea $B(t)$ un movimiento Browniano fijo. Daremos algunas propiedades básicas que se concluyen directamente de la definición del movimiento Browniano.

Proposición 2.1 *Para cualquier $t > 0$, $B(t)$ esta normalmente distribuido con media 0 y varianza t. Para cualquier $s, t \geq 0$, tenemos $\mathbb{E}(B(s)B(t)) = \mathrm{mín}\{s, t\}$.*

Oservación 2.1 *Recordando la Definición 2.2, esto puede probar que la condición (2) y $\mathbb{E}(B(s)B(t)) = \mathrm{mín}\{s, t\}$ implican la condición (3).*

Prueba. *Por la condición (1), tenemos que $B(t) = B(t) - B(0)$, de modo que la primera afirmación se concluye de la condición (2). Para probar que $\mathbb{E}(B(S)B(t)) = \mathrm{mín}\{s, t\}$, supongamos que $s < t$. Entonces de las condiciones (2) y (3), se concluye:*

$$\mathbb{E}(B(S)B(t)) = \mathbb{E}(B(s)(B(t) - B(s)) + B^2(s)) = 0 + s = s,$$

el cual es igual al $\mathrm{mín}\{s, t\}$. $\square$

Proposición 2.2 ***(Invariante por Traslación)*** *Para cualquier $t_0 \geq 0$, el proceso estocástico $\widetilde{B} = B(t + t_0) - B(t_0)$ es también un movimiento Browniano.*

Prueba. *El proceso estocástico $\widetilde{B}(t)$ obviamente satisface las condiciones (1) y (4) de un movimiento Browniano. Para cualquier $s < t$,*

$$\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s) = B(t + t_0) - B(s + t_0). \tag{2.1}$$

Por la condición (2) de $B(t)$, se observa que $\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)$ esta normalmente distribuido con media 0 y varianza $(t + t_0) - (s + t_0) = t - s$. Así, $\widetilde{B}(t)$ satisface la condición (2). Para verificar la condición (3) para $\widetilde{B}(t)$, supongamos que $t_0 > 0$. Entonces para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, tenemos que $0 < t_0 \leq t_1 + t_0 < \cdots < t_n + t_0$. Por lo tanto, por la condición (3) de $B(t)$, se concluye que $B(t_k + t_0) - B(t_{k-1} + t_0)$, para $k = 1, 2, \ldots, n$

son variables aleatorias independientes. Así, por la ecuación 2.1, las variables aleatorias $\widetilde{B}(t_k) - \widetilde{B}(t_{k-1})$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n$ *son independientes, de modo que* $\widetilde{B}(t)$ *satisface la condición (3) de un movimiento Browniano.* □

La propiedad anterior de la **Invariante por Traslación**, dice que un movimiento Browniano se reinicia en cualquier momento como un nuevo movimiento Browniano.

Proposición 2.3 ***(Invariante por un Escalar)*** *Para cualquier número real* $\lambda > 0$, *el proceso estocástico* $\widetilde{B} = \dfrac{B(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}}$ *es también un movimiento Browniano.*

Prueba. *Las condiciones (1), (3) y (4) de un movimiento Browniano ya han sido verificadas para el proceso estocástico* $\widetilde{B}(t)$. *Verifiquemos la condición (2), para cualquier* $s < t$ *tenemos:*

$$\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(B(\lambda t) - B(\lambda s)),$$

el cual demuestra que $\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)$ *esta normalmente distribuido con media 0 y varianza* $\dfrac{1}{\lambda}(\lambda t - \lambda s) = t - s$. *Por consiguiente* $\widetilde{B}(t)$ *satisface la condición (2).*□

Se concluye de la propiedad de **Invariante por un Escalar** que para cualquier $\lambda > 0$ y $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ los vectores aleatorios

$$(B(\lambda t_1), B(\lambda t_2), \ldots, B(\lambda t_n)), (\sqrt{\lambda}B(t_1), \sqrt{\lambda}B(t_2), \ldots, \sqrt{\lambda}B(t_n))$$

tienen la misma distribución.

2.2.2. Filtraciones del Movimiento Browniano Estándar

Muy frecuentemente, cuando se trabaja con procesos estocásticos, es necesario especificar el tipo de información, que está disponible en cada punto en el tiempo. Por ejemplo, si se quiere calcular la esperanza, condicional a la información disponible, de valores futuros de un proceso, entonces es necesario especificar de manera precisa la información que se utiliza en los cálculos. Usualmente, en los modelos financieros se requiere que los precios, presentes y pasados, de los activos sean conocidos para producir un pronóstico. Esta idea es formalizada con el concepto de filtración.

Definición 2.4 *Una filtración es una familia* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ *de* σ*-álgebras tales que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *para toda* $t \in \mathcal{T}$*. La familia* $\mathbb{F}$ *es creciente en el sentido de que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *cuando* $s, t \in \mathcal{T}$ *y* $s \leq t$*.*

Una filtración puede ser pensada como una estructura de información dinámica. La interpretación es que $\mathcal{F}_t$ representa la información disponible al tiempo t. El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida. A continuación se estudia el concepto de filtración del Movimiento Browniano.

Definición 2.5 ***(Filtración del Movimiento Browniano Estándar)*** *Para* $t \geq 0$ *fijo, considere la siguiente familia de subconjuntos de* Ω*:*

$$\mathcal{A}_t = \{A_{x,t} \,/\, x \in \mathbb{R}\},$$

donde $A_{x,t} = \{\omega \in \Omega \,/\, \omega(s) \leq x,\, 0 \leq s \leq t\}$*.*

La σ*-álgebra generada por* $\mathcal{A}_t$*, es decir, la mínima* σ*-álgebra que hace que las funciones* W_s*, con* $0 \leq s \leq t$*, sean variables aleatorias, se denota mediante*

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma(\mathcal{A}_t) = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t).$$

En este caso $\mathcal{F}_0^B$ *contiene sólo conjuntos de probabilidad cero o uno. Claramente, si* $t \leq u$*, entonces* $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_u^B$*. La familia creciente de* σ*-álgebras* $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t \geq 0}$ *es llamada la filtración natural generada por* $\{B_t\}_{t \geq 0}$*. Si* $\mathcal{N}$ *es el conjunto de eventos* $X \in \mathcal{F}$ *tales que* $\mathbb{P}(X) = 0$*, se define la filtración aumentada de* $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t \geq 0}$ *mediante la familia de* σ*-álgebras*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\mathcal{F}_t^B \bigcup \mathcal{N}\right)$$

De hecho, basta que este procedimiento se efectúe únicamente para $t = 0$, *ya que si* $\mathcal{F}_0 = \sigma\left(\mathcal{F}_0^B \cup \mathcal{N}\right)$, *entonces* $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$ *para toda* $t \geq 0$. *Por último, observe que la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *es continua por la derecha, es decir,*

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u\geq t} \mathcal{F}_u$$

y continua por la izquierda en el sentido de que

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{0\leq s\leq t} \mathcal{F}_s\right).$$

Sin embargo, $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geq 0}$ *es continua por la izquierda, pero no por la derecha.*

Frecuentemente, los agentes requieren que la información disponible en cada punto en el tiempo para hacer pronósticos. En este caso, $\mathcal{F}_t$ representa la información relevante disponible hasta el tiempo t, ya que si al tiempo t ocurre $\omega \in \Omega$, entonces los agentes saben si ω está o no en $A \in \mathcal{F}_t$, para algún A dado, a fin de efectuar pronósticos. El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida. Por último, es importante mencionar que si $s \leq t$, $B_t - B_s$ es independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}_s$.

2.3. El Proceso de Wiener

Sea $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración. Un proceso estocástico $\{B_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener relativo a $\mathbb{F}$ si cumple con las siguientes dos condiciones:

(i) $B_0 = 0$ con probabilidad uno, es decir, $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \,/\, B_0(\omega) = 0\} = 1$;

(ii) B_t es continuo en t;

(iii) B_t es adaptado a la filtración $\mathbb{F}$;

(iv) Si $0 \leq s < t$, el incremento $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y normalmente distribuido con media cero y varianza $t - s$.

Una primera diferencia entre el proceso de Wiener y el Movimiento Browniano es que el primero considera la filtración $\mathbb{F}$ y el segundo no. En otras palabras, el Movimiento Browniano es independiente del concepto de filtración. La segunda diferencia que se observa es la ausencia del requerimiento de incrementos independientes en el proceso de Wiener.

2.3.1. Condiciones de Equivalencia entre el Proceso de Wiener y el Movimiento Browniano

A continuación se presentan las condiciones bajo las cuales el Movimiento Browniano Estándar coincide con el Proceso de Wiener.

Definición 2.6 *Todo Proceso de Wiener es un Movimiento Browniano Estándar. En efecto, un proceso $\{B_t\}_{t\geq 0}$ es un Proceso Wiener relativo a $\mathbb{F}$ si y sólo si*

(i) B_t es un Movimiento Browniano;

(ii) B_t es adaptado a la filtración $\mathbb{F}$;

(iii) $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ cuando $0 \leq s \leq t$.

Prueba. *Supongamos, primero que $\{B_t\}_{t\geq 0}$ es un Proceso de Wiener relativo a $\mathbb{F}$. Sólo se tiene que ver que si $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$, entonces los incrementos $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son independientes. Es suficiente verificar que estos incrementos son independientes dos a dos. Si $0 \leq k \leq l \leq n$, los incrementos $B_{t_{l+1}} - B_{t_l}$ son independientes de $\mathcal{F}_{t_l}$. En consecuencia, los incrementos $B_{t_{l+1}} - B_{t_l}$ son también independientes de los incrementos $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$.*

Por otro lado, si $\{B_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano, entonces $\{B_t\}_{t\geq 0}$ es un Proceso de Wiener relativo a la filtración aumentada que éste genera. Todo lo que *se necesita ver es que el incremento $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^{(t)}$ siempre que $0 \leq s < t$. Considere los tiempos $0 = t_0 \leq t_1 < \cdots < t_n < s$, entonces las variables aleatorias*

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_t - B_s$$

son independientes. Por lo tanto, la σ-álgebra

$$\sigma(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) = \sigma(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$$

es independiente de $B_t - B_s$. Considere la siguiente familia de eventos:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq s, n \in \mathbb{N}} \sigma(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}),$$

la cual es independiente de $B_t - B_s$. Claramente, en este caso,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_s$$

es independiente de $B_t - B_s$. □

2.4. El Movimiento Geométrico Browniano

Aun cuando el movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de los modelos financieros y económicos, éste no puede, por sí mismo. Por ejemplo, el precio de los activos, no pueden ser descritos apropiadamente por el Movimiento Browniano Estándar, ya que los precios no parten de cero. Sus incrementos podrían tener medias distintas de cero, o bien podrían tener varianzas que no necesariamente son proporcionales al tiempo. En general, los precios de los activos comienzan en valores diferentes de cero, tienen incrementos con medias diferentes de cero, varianzas que no son proporcionales al tiempo y covarianzas diferentes de cero.

Definición 2.7 *Se obtiene por una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar. Específicamente, si B_t es un Movimiento Browniano Estándar, μ es una constante (media), σ es una constante positiva (volatilidad) y S_0 es un precio inicial conocido, entonces el proceso*

$$S_t = S_0 e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$$

es llamado el Movimiento Geométrico Browniano.

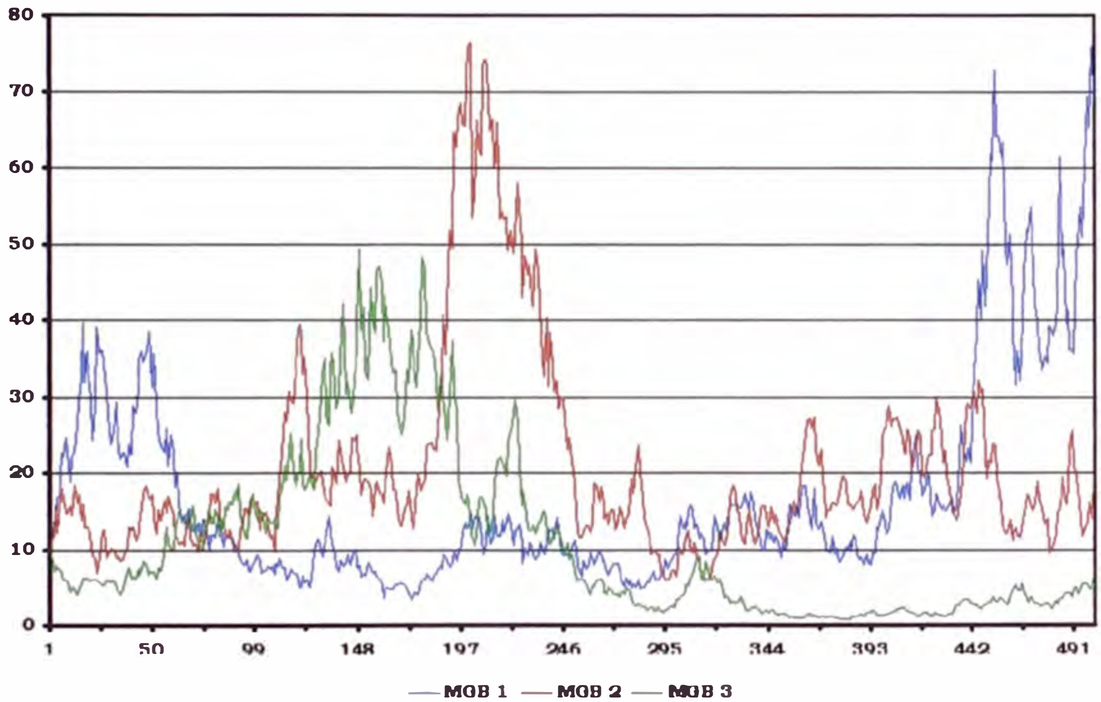

Gráfico 2.3: Movimiento Geométrico Browniano

Este proceso es frecuentemente empleado para describir el cambio porcentual (rendimiento) del precio de un activo. Observe que

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t.$$

Por lo tanto, la distribución de $\ln(S_t)$ es normal con

$$\mathbb{E}[\ln(S_t)] = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t$$

y

$$Var[\ln(S_t)] = \sigma^2 t.$$

En este caso, la tasa de rendimiento continuamente capitalizable, por unidad de tiempo, sobre un intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, es

$$\frac{1}{\Delta t} \ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{\Delta t}\sigma(B_{t+\Delta t} - B_t).$$

Este rendimiento, por unidad de tiempo, se distribuye normalmente con media $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, varianza $\frac{\sigma^2}{\Delta t}$ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{\Delta t}}$. Se observa que la varianza tiende a cero cuando $\Delta t \longrightarrow \infty$. De hecho la tasa de rendimiento, por unidad de tiempo, converge a $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ con probabilidad uno cuando $\Delta t \longrightarrow \infty$. Esto proviene de la Ley de los Grandes Números del Movimiento Browniano. El Gráfico 2.3 muestra trayectorias de un Movimiento Geométrico Browniano, con $\mu = 0.1$ y $\sigma = 0.3$. El tiempo t corre a lo largo del eje horizontal y los posibles Movimiento Geométrico Browniano son representados en el eje vertical. En este caso, el Movimiento Geométrico Browniano parte de un valor positivo $S_0 = 10$.

3

Elementos del Cálculo Estocástico

Para modelar adecuadamente la dinámica de las variables financieras se requiere, sin duda alguna, de la teoría de procesos estocásticos. Una de las ramas de esta teoría que ha cobrado creciente importancia, debido a su gran utilidad en el modelado en tiempo continuo, es el cálculo estocástico. El objetivo de este capítulo consiste en presentar en forma accesible e intuitiva el cálculo estocástico.

3.1. Martingalas.

La noción de martingala[1] es de gran importancia en la modelación financiera (Ver [55]) y sobretodo en la valoración mediante arbitraje y

[1]Estrategia de juego de la ruleta que consiste en que, si un jugador pierde una ronda, dobla su apuesta en la siguiente, de tal forma que si gana, recupera todo lo que había

fue introducida en la Teoría de Probabilidades por Jean Paul Lévy, el desarrolló de la teoría se debe a Joseph Leo Dobb, y fue orientada a demostrar la inexistencia de estrategias de juegos infalibles. En 1989, Ross decía que:

> **El elemento clave de la economía es la igualdad entre la oferta y la demanda, mientras que el elemento clave del campo financiero es la ausencia de oportunidades de arbitraje.**

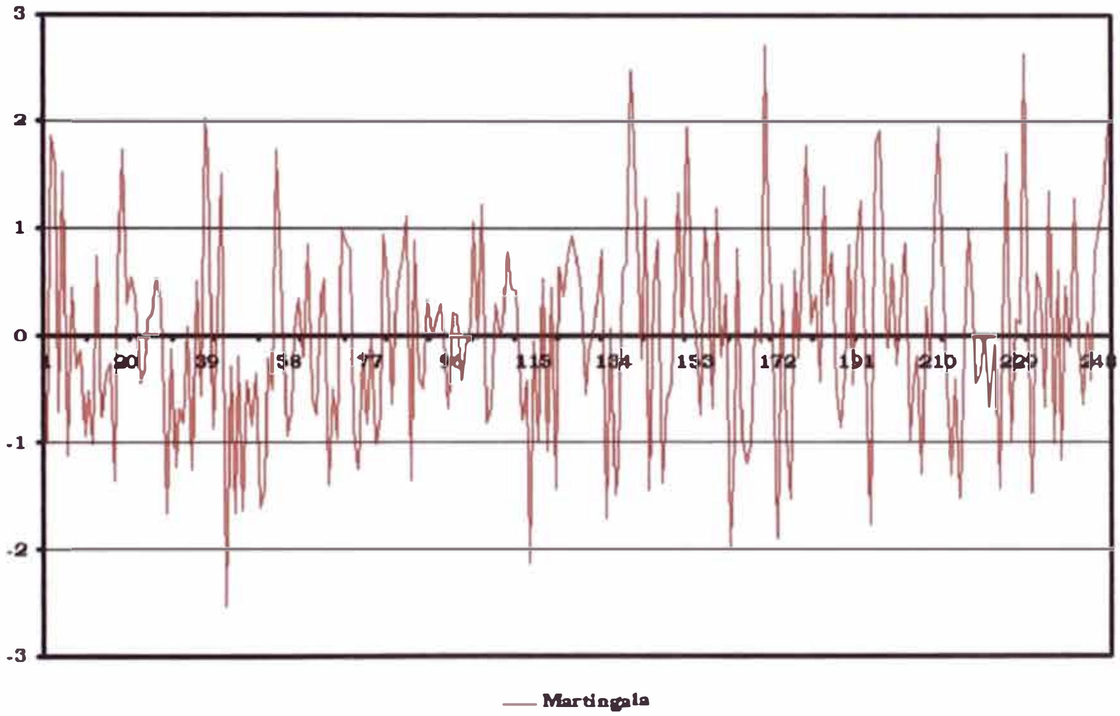

Gráfico 3.1: Martingala con media 0 y volatilidad 1.

Una contribución muy importante en el campo de la finanzas (Ver [22]), consistió en demostrar que cuando los activos se pueden valorar mediante arbitraje, el proceso del precio es una martingala con respecto a una probabilidad particular[2]. Además, la principal preocupación de los inversionistas giran en torno a la capacidad de poder predecir los precios de mercado y valorar distintos activos

perdido y posiblemente algo más.

[2]Modelo de Valoración de Opciones de Black-Scholes

financieros. Uno de los primeros modelos empleados con el objetivo de vencer al mercado fue el modelo de Martingala, tanto así que la Hipótesis de Martingala fue considerada por mucho tiempo como una condición de eficiencia de mercado. Sin embargo, la necesidad de incorporar un **trade off**[3] entre rentabilidad esperada y riesgo condujo al desarrollo de los modelos de caminos aleatorios.

Supongamos que $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots$ son variables aleatorias reales e independientes, con

$$E(\mathbf{Y}_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Definamos la suma $\mathbf{S}_n := \mathbf{Y}_1 + \cdot + \mathbf{Y}_n$. **¿Cuál es la mejor conjetura de $\mathbf{S}_{n+k}$ dado los valores de $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n$?** La respuesta es

$$\begin{aligned} E(\mathbf{S}_{n+k}|\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) &= E(\mathbf{Y}_1 + \cdots + \mathbf{Y}_n|\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) + \\ &\quad + E(\mathbf{Y}_{n+1} + \cdots + \mathbf{Y}_{n+k}|\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) \qquad (3.1) \\ &= \mathbf{Y}_1 + \cdots + \mathbf{Y}_n + \underbrace{E(\mathbf{Y}_{n+1} + \cdots + \mathbf{Y}_{n+k})}_{=0} \\ &= \mathbf{S}_n \end{aligned}$$

Es decir, la mejor estimación del **valor futuro** de $\mathbf{S}_{n+k}$, esta dado por la historia hasta el tiempo n, la cual es justamente $\mathbf{S}_n$.

Si interpretamos $\mathbf{Y}_i$, como el **payoff**[4] de un juego imparcial en el tiempo i, y por lo tanto $\mathbf{S}_n$ como la ganancia total en el tiempo n, entonces, el cálculo anterior dice que: **la ganancia esperada del futuro, dado la ganancia hasta la fecha, es justo la cantidad actual de dinero**. De modo que la fórmula (3.1) caracteriza un juego **imparcial**. Incorporaremos estas ideas en una definición formal.

Sea $f \in L^2[a, b]$ y consideremos el proceso estocástico definido por

$$M_t = \int_a^t f(s)dB(s), \qquad a \leq t \leq b. \tag{3.2}$$

[3]En español, Solución de compromiso

[4]En español, Pago recibido

Demostraremos que M_t es una martingala. Pero primero revizaremos el concepto de martingala. Sea T un intervalo en $\mathbb{R}$ o el conjunto de enteros positivos.

Definición 3.1 *Una filtración sobre T es una familia creciente $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ de σ-campos. Un proceso estocástico X_t, con $t \in T$, se dice que es* ***adaptado*** *para $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ si para cada t, la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.*

Oservación 3.1 *Un σ-campo $\mathcal{F}$ es llamado* ***completo*** *si $A \in \mathcal{F}$ y $P(A) = 0$ implica que $B \in \mathcal{F}$ para cualquier subconjunto B de A. Se asumirá que los σ-campos siempre son completos.*

Definición 3.2 *Sea X_t un proceso estocástico adaptado para una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ para todo $t \in T$. Entonces X_t es llamado una* ***martingala*** *con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ si para cualquier $s \leq t$ en T,*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s, \quad \textit{casi seguramente.} \tag{3.3}$$

En el caso que la filtración no este explícitamente especificado, entonces la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ se entenderá que viene dado por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$.

El concepto de martingala es una generalización de la sucesión de sumas parciales de una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Entonces la sucesión $\{S_n\}$ es una martingala.

Las submartingala y la supermartingala se definen al reemplazar la igualdad en la Ecuación (3.3) con $\geq$ y $\leq$, respectivamente, i.e., para cualquier $s \leq t$ en T,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) &\geq X_s, \quad \textit{casi seguramente} \quad (\textit{submartingala}), \\ \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) &\leq X_s, \quad \textit{casi seguramente} \quad (\textit{supermartingala}). \end{aligned}$$

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita y sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Entonces $\{S_n\}$ es una submartingala si $\mathbb{E}(X_1) \geq 0$ y una supermartingala si $\mathbb{E}(X_1) \leq 0$.

Proposición 3.1 *Un movimiento Browniano $B(t)$ es una martingala.*

Prueba. *Para probar esto, sea*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s) : s \leq t\}.$$

Entonces para cualquier $s \leq t$,

$$\mathbb{E}(B(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B(s)|\mathcal{F}_s).$$

Donde $B(t) - B(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, tenemos

$$\mathbb{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B(t) - B(s)).$$

Pero $\mathbb{E}(B(t)) = 0$ para cualquier t. Por lo tanto, $\mathbb{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) = 0$. Por otro lado, $\mathbb{E}(B(s)|\mathcal{F}_s) = B(s)$, debido a que $B(s)$ es $\mathcal{F}_s$-medible. Así, $\mathbb{E}(B(t)|\mathcal{F}_s) = B(s)$ para cualquier $s \leq t$ y esto demuestra que $B(t)$ es una martingala. □

En realidad es el proceso estocástico martingala mas básico, con parámetro tiempo en un intervalo.

Ahora retornemos al proceso estocástico M_t definido en la Ecuación (3.2) y probaremos que esta es una martingala en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Sea $f \in L^2[a, b]$. Entonces el proceso estocástico*

$$M_t = \int_a^t f(s)dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s) : s \leq t\}$.

Prueba. *Primero necesitamos demostrar que* $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$ *para todo* $t \in [a, b]$ *con la finalidad de tomar la esperanza condicional de* M_t. *Aplicando el Teorema 3.2 obtenemos:*

$$\mathbb{E}(|M_t|^2) = \int_a^b |f(s)|^2 ds \leq \int_a^b |f(s)|^2 ds.$$

Por consiguiente, $\mathbb{E}(|M_t|) \leq \{\mathbb{E}(|M_t|^2) =\}^{1/2} < \infty$. *A continuación, necesitamos demostrar que* $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ *casi seguramente, para cualquier* $s \leq t$. *Pero*

$$M_t = M_s + \int_s^t f(u)dB(u)$$

y M_s *es* $\mathcal{F}_s$*-medible. Por lo tanto*

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s + \mathbb{E}\left(\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right).$$

Por lo que será suficiente con demostrar que para cualquier $s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right) = 0. \tag{3.4}$$

En efecto, primero supongamos que f *es una función escalón* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}$, *donde* $t_0 = s$ *y* $t_n = t$. *En este caso, tenemos:*

$$\int_s^t f(u)dB(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right).$$

Pero, todos los $B(t_i) - B(t_{i-1})$, *con* $i = 1, \ldots, n$ *son independientes del* σ*-campo* $\mathcal{F}_s$. *Por lo tanto,* $\mathbb{E}(B(t_i) - B(t_{i-1})|\mathcal{F}_s) = 0$ *para todo* i, *de modo que la Ecuación (3.4) se verifica.*

A continuación supongamos que $f \in L^2[a,b]$. *Elegimos una sucesión* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de funciones escalonadas las cuales convergen a* f *en* $L^2[a,b]$. *Entonces, por la desigualdad de condicional de Jensen*[5] *con* $\phi(x) = x^2$, *tenemos la siguiente desigualdad*

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|^2 \leq \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left(\int_s^t (f_n(u) - f(u))dB(u)|\mathcal{F}_s\right)\right| \\
&\quad \leq \mathbb{E}\left(\left(\int_s^t (f_n(u) - f(u))dB(u)\right)^2 |\mathcal{F}_s\right).
\end{aligned}$$

A continuación empleamos la siguiente propiedad $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$ *de esperanza condicional y entonces aplicamos el Teorema 3.2 obteniendo:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left(\int_s^t (f_n(u) - f(u))dB(u)|\mathcal{F}_s\right)\right|^2 &\leq \int_s^t (f_n(u) - f(u))^2 du \\
&\leq \int_a^b (f_n(u) - f(u))^2 du
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left(\int_s^t (f_n(u) - f(u))dB(u)|\mathcal{F}_s\right)\right|^2 \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. *Por lo tanto la sucesión* $\mathbb{E}\left(\int_s^t f_n(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right)$ *de variables aleatorias converge a* $\mathbb{E}\left(\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right)$ *en* $L^2(\Omega)$. *Donde*

[5]**(Desigualdad Condicional de Jensen)** Sea $X \in L^1(\Omega)$. Supongamos que ϕ es una función convexa sobre $\mathbb{R}$ y $\phi \in L^1(\Omega)$. Entonces

$$\phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G})$$

se observa que la convergencia de una sucesión en $L^2(\Omega)$ implica convergencia en probabilidad, el cual implica la existencia de una subsucesión convergente casi seguramente. Por consiguiente, eligiendo una subsucesión podemos concluir que con probabilidad 1,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_s^t f_n(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right). \tag{3.5}$$

Ahora $\mathbb{E}\left(\int_s^t f_n(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right) = 0$, *como ya se ha demostrado que la Ecuación (3.4) se cumple para funciones escalonadas. Por consiguiente la Ecuación (3.5),*

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right) = 0,$$

y por la Ecuación (3.4) se verifica para cualquier $f \in L^2[a,b]$. □

De manera intuitiva podemos afirmar que, una martingala es un proceso estocástico que evoluciona en forma equilibrada, es decir sin tendencia. Una consecuencia, es que su valor esperado es constante. A continuación formalizamos estos resultado mediante la siguiente definición.

Definición 3.3 *Si $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ es una martingala, entonces:*

$$E(M_0) = E(M_t) \quad \text{para todo } t.$$

3.2. Integral de Wiener.

En la sección anterior se a estudiado un movimiento Browniano en dimensión uno $\{W(t) : t \geq 0\}$ considerado como una función continua aleatoria. Además esta función es casi seguramente de variación no acotada, i.e., porque no se puede emplear **la integración de Riemann-Stieltjes** para definir integrales de la forma $\int_a^b f(t)dg(t)$. Sin embargo, existe un escape a este dilema, para ello, se aprovecha la ventaja que los movimientos brownianos son funciones aleatorias y por lo tanto se puede hacer uso de las formas más débiles de los límites. Está es la idea de la integración estocástica.

Ahora consideremos la siguiente integral:

$$\int_a^b f(t)dB(t,\omega),$$

donde f es una función determinística (i.e., esta no depende de ω) y $B(t,\omega)$ es un movimiento Browniano. Supongamos que para cada $\omega \in \Omega$ deseamos emplear la fórmula de integración por partes, para definir esta integral en el sentido de Riemann-Stieltjes por

$$(RS)\int_a^b f(t)dB(t,\omega) = f(t)B(t,\omega)\mid_a^b - (RS)\int_a^b B(t,\omega)df(t). \tag{3.6}$$

Entonces la clase de funciones $f(t)$ para el cual la integral $(RS)\int_a^b f(t)dB(t,\omega)$ es definido para cada $\omega \in \Omega$ esta algo limitada, i.e., $f(t)$ necesita ser una función continua de variación acotada. Por consiguiente para funciones continuas de variación no acotada tales como $f(t) = t\sin(\frac{1}{t})$, donde $0 < t \leq 1$, y $f(0) = 0$, no se puede usar la Ecuación (3.6) para definir la integral

$$\int_0^1 f(t)dB(t,\omega) \quad \text{para cada } \omega \in \Omega.$$

Es necesario una idea diferente, para poder definir la integral $\int_a^b f(t)dB(t,\omega)$ para una amplia clase de funciones $f(t)$. Esta nueva integral, sera llamada la integral de Wiener de f, la cual esta definido para todas las funciones $f \in L^2[a,b]$[6]. Por ejemplo, $\int_0^1 t\sin(\frac{1}{t}dB(t))$ es una integral de Wiener.

A continuación definiremos la integral de Wiener en dos pasos:

[6] $L^2[a,b]$ denota el espacio de Hilbert de todas las funciones reales cuadrado integrables sobre $[a,b]$

Paso 1. Supongamos que f es una función escalón, dado por $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i)}$, donde $t_0 = a$ y $t_n = b$. En este caso, definimos

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right). \tag{3.7}$$

De aquí se concluye que $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ para cualquier a, $b \in \mathbb{R}$ y las funciones escalón f y g. Además, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.1 *Para una función escalón f, la variable aleatoria $I(f)$ es Gaussiana con media 0 y varianza*

$$\mathbb{E}\left(I(f)^2\right) = \int_a^b f^2(t)dt. \tag{3.8}$$

Prueba. *Es bien conocido que la combinación lineal de variables aleatorias Gaussianas independientes es también una variable aleatoria Gaussiana. Por consiguiente, por las condiciones (2) y (3) de la Definición 2.2 del movimiento Browniano, la variable $I(f)$ definida por la Ecuación (3.7) es Gaussiana con media 0. Para verificar la Ecuación (3.8), observemos que*

$$\mathbb{E}\left(I(f)^2\right) = \mathbb{E}\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)\left(B(t_j) - B(t_{j-1})\right).$$

Por las condiciones (2) y (3) de la Definición 2.2 de un movimiento Browniano,

$$\mathbb{E}\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)^2 = t_i - t_{i-1},$$

y para $i \neq j$,

$$\mathbb{E}\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)\left(B(t_j) - B(t_{j-1})\right) = 0.$$

Por consiguiente,

$$\mathbb{E}\left(I(f)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f^2(t)dt.$$

□

Paso 2. Sea $f \in L^2[a,b]$. Elegimos una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones escalón, tal que $f_n \longrightarrow f$ en $L^2[a,b]$. Por el Lema 3.1 la sucesión $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$[7]. Por consiguiente, este converge en $L^2(\Omega)$. Definamos

$$I(f) = \lim_{n\longrightarrow\infty} I(f_n), \qquad en\, L^2(\Omega). \tag{3.9}$$

¿Esta bien definido $I(f)$?

Con la finalidad que $I(f)$ este bien definido, necesitamos demostrar que el límite en la Ecuación (3.9) es independiente de la elección de la sucesión $\{f_n\}$. Supongamos que $\{g_m\}$ es otra sucesión, i.e., las g_m son funciones escalonadas y $g_m \longrightarrow f$ en $L^2[a,b]$. Entonces, por la linealidad de la aplicación I y la Ecuación (3.8),

$$\mathbb{E}\left(|I(f_n) - I(g_m)|^2\right) = \mathbb{E}\left(|I(f_n - g_m)|^2\right) = \int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2\, dt.$$

Escribimos $f_n(t) - g_m(t) = (f_n(t) - f(t)) - (g_m(t) - f(t))$, entonces obtenemos[8]:

[7] $L^2[a,b]$ denota el espacio de Hilbert de variables aleatorias reales cuadrado integrable sobre Ω, con el producto interno $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}(XY)$

[8] Aquí se ha empleado la siguiente desigualdad $(x^2 - y^2)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned}\int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2\,dt &\leq 2\int_a^b \left((f_n(t) - f(t))^2 - (g_m(t) - f(t))^2\right)dt \\ &\to 0, \quad \textit{cuando} \quad n, m \to \infty\end{aligned}$$

De aquí se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = \lim\limits_{m\to\infty} I(g_m)$ en $L^2(\Omega)$. Esto demuestra que $I(f)$ esta bien definido.

Definición 3.4 *Sea $f \in L^2[a, b]$. El límite $I(f)$ definido en la Ecuación 3.9 es llamado la integral de Wiener de f*

La integral de Wiener $I(f)$ de f será denotado por

$$I(f)(\omega) = \left(\int_a^b f(t)dB(t)\right)(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad \textit{casi seguramente}.$$

Por simplicidad, se denotará por $\int_a^b f(t)dB(t)$ o $\int_a^b f(t)dB(t,\omega)$. Note que la aplicación I es lineal en $L^2[a, b]$.

Teorema 3.2 *Para cada $f \in L^2[a, b]$, la integral de Wiener $\int_a^b f(t)dB(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media 0 y varianza $\|f\|^2 = \int_a^b f^2(t)dt$.*

Prueba. *Por el Lema 3.1, la afirmación se verifica, cuando f es una función escalonada. Pero en general, para un $f \in L^2[a, b]$, la afirmación se concluye del siguiente hecho ya conocido: Si X_n es una variable aleatoria Gaussiana con media μ_n y varianza σ_n^2 y X_n converge a X en $L^2(\Omega)$, entonces X es una variable aleatoria Gaussiana con media $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$ y varianza $\sigma^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^2$.* □

Así la integral de Wiener $I : L^2[a, b] \to L^2(\Omega)$ es una isometría. Es decir, este preserva el producto interno, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 3.1 *Si $f, g \in L^2[a,b]$, entonces:*

$$\mathbb{E}\left(I(f)I(g)\right) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{3.10}$$

En particular, si f y g son ortogonales, entonces las variables aleatorias Gaussianas $I(f)$ y $I(g)$ son independientes.

Prueba. *Por la linealidad de I y el Teorema 3.2 tenemos:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(I(f)+I(g))^2\right] &= \mathbb{E}\left[(I(f+g))^2\right] \\
&= \int_a^b (f(t)+g(t))^2\,dt \qquad (3.11) \\
&= \int_a^b f^2(t)dt + 2\int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por el Teorema 3.2 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(I(f)+I(g))^2\right] &= \mathbb{E}\left[I(f)^2 + 2I(f)I(g) + I(g)^2\right] \\
&= \int_a^b f^2(t)dt + 2\mathbb{E}\left[I(f)I(g)\right] + \int_a^b g^2(t)dt \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Por consiguiente, de las Ecuaciones (3.11) y (3.12) se concluye la Ecuación (3.10). □

Ejemplo 3.1 *La integral de Wiener $\int_0^1 s\,dB(s)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media 0 y varianza $\int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$.*

Teorema 3.3 *Sea f una función continua de variación acotada. Entonces para casi todo $\omega \in \Omega$,*

$$\left(\int_a^b f(t)dB(t)\right)(\omega) = (RS)\int_a^b f(t)dB(t,\omega),$$

donde el lado izquierdo es la integral de Wiener de f y el lado derecho es la integral de Riemann-Stieltjes de f definida en la Ecuación (3.6).

Prueba. *Para cada partición $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ de $[a, b]$. definimos la función escalón f_n por*

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i)}.$$

La cual converge a f en $L^2[a, b]$ cuando $n \to \infty$, i.e., cuando $\|\Delta_n\| \to 0$. Por consiguiente, por la definición de la integral de Wiener en la Ecuación (3.9),

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right), \quad en\, L^2(\Omega). \qquad (3.13)$$

De otro lado, por la Ecuación (3.6), se concluye que el límite se verifica para cada $\omega \in \Omega_0$, para algún Ω_0 con $P(\Omega_0) = 1$,

$$(RS)\int_a^b f(t)dB(t, \omega)$$

$$= f(b)B(b, \omega) - f(a)B(a, \omega) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} B(t_i, \omega)\left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right)$$

$$
\begin{aligned}
(RS)&\int_a^b f(t)dB(t,\omega)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(f(b)B(b,\omega)-f(a)B(a,\omega)-\sum_{i=1}^{n}B(t_i,\omega)\left(f(t_i)-f(t_{i-1})\right)\right)
\end{aligned}
$$

el cual, después de reagrupar los términos, obtenemos la siguiente igualdad para cada ω en Ω_0:

$$
(RS)\int_a^b f(t)dB(t,\omega)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(t_{i-1})\left(B(t_i)-B(t_{i-1})\right). \tag{3.14}
$$

Donde la convergencia en $L^2(\Omega)$ implica la existencia de un subsucesión convergente casi seguramente, podemos escoger una sucesión de $\{f_n\}$ para obtener la conclusión del teorema de las Ecuaciones (3.13) y (3.14). □

Ejemplo 3.2 *Consideremos la integral de Riemann $\int_0^1 B(t,\omega)dt$ definido para cada $\omega\in\Omega_0$, para algún Ω_0 con $P(\Omega_0)=1$. Encontremos la distribución de esta variable aleatoria. Empleando la fórmula de integración por partes, obtenemos:*

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 B(t,\omega)dt &= B(t,\omega)(t-1)\,\Big]_0^1-\int_0^1(t-1)dB(t,\omega)\\
&= (RS)\int_0^1(1-t)dB(t,\omega).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto por el Teorema 3.3, se observa que para casi todo $\omega\in\Omega$,

$$
\int_0^1 B(t,\omega)dt=\left(\int_0^1(1-t)dB(t)\right)(\omega),
$$

Donde el lado derecho es la integral de Wiener. Así la integral $\int_0^1 B(t)dt$ *y la integral de Wiener* $\int_0^1 (1-t)dB(t)$ *tienen la misma distribución Gaussiana con media 0 y varianza*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 (1-t)dB(t)\right)^2 = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}.$$

3.3. Integrales Estocásticas.

Sea $B(t, \omega)$ un movimiento Browniano. En esta sección estudiaremos la primera integral estocástica $\int_a^b f(t, \omega)dB(t, \omega)$ definida por Kiosk Itô en 1944[9]. El integrando $f(t, \omega)$ es un proceso estocástico no anticipado con respecto a la filtración

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s) : s \leq t\}\, y \int_a^b \mathbb{E}\left(|f(t)|^2\right) dt < \infty.$$

El término no anticipado empleado por Itô es hoy en día comúnmente llamado **adaptado** el cual es definido en la Definición 3.1. Cuando el integrando es una función determinística $f(t)$, la integral de Itô $\int_a^b f(t)dB(t, \omega)$ se reduce a la integral de Wiener definida en la sección anterior.

3.3.1. Motivación.

La teoría de Itô de la integración estocástica fue originalmente motivado como un método directo para construir procesos de difusión[10], como soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas. Esto, también puede ser motivado desde el punto de vista de las martingalas. Sea $B(t)$ un movimiento Browniano. Supongamos que $f(t)$ es una función determinística en $L^2[a, b]$. Se demostró en el Teorema 3.1 que el proceso estocástico

[9] Itô, K., (1944).**Stochastic Integral**; Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 pp. 519-524.

[10] Una subclase de procesos de Markov

$$M_t = \int_a^t f(s)dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

es una martingala. Ahora planteamos una pregunta natural.

¿Cómo podemos definir una integral estocástica $\int_a^b f(t,\omega)dB(t,\omega)$ para un proceso estocástico $f(t,\omega)$ de tal manera que el proceso estocástico

$$M_t = \int_a^b f(t,\omega)dB(t,\omega), \quad a \leq t \leq b,$$

es una martingala?

Con la finalidad de obtener ideas claves para responder esta pregunta, vamos a considerar un ejemplo simple con $f(t) = B(t)$ de modo que la integral es

$$\int_a^b B(t)dB(t).$$

Sea $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Sea L_n y R_n las cuales denotan las correspondientes sumas de Riemann evaluados en los puntos extremos izquierdo $\tau_i = t_{i-1}$ y derecho $\tau_i = t_i$, respectivamente, donde:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right). \tag{3.15}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} B(t_i)\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right). \tag{3.16}$$

Por consiguiente, reagrupando obtenemos:

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^{n} \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)^2. \tag{3.17}$$

Aquí el límite $\lim\limits_{n\to\infty}(R_n - L_n)$, si existe, representa la variación cuadrática del movimiento Browniano $B(t)$. El siguiente teorema prueba que $B(t)$ fluctúa de modo que su variación cuadrática es diferente de cero.

Teorema 3.4 *Sea $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ una partición de un intervalo finito $[a, b]$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \to b - a \tag{3.18}$$

en $L^2(\Omega)$ cuando $\|\Delta_n\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} (t_i - t_{i-1})$ tiende a 0.

***Oservación* 3.2** *Antes tengamos en cuenta lo siguiente:*

1. *La convergencia en $L^2(\Omega)$, implica convergencia en probabilidad.*
2. *La convergencia en probabilidad de una sucesión implica casi seguramente la convergencia de alguna subsucesión*

Por consiguiente existe una subsucesión $\{\widetilde{\Delta}_n\}$ de $\{\Delta_n\}$ tal que la convergencia en la Ecuación (3.18) converge casi seguramente cuando $\|\widetilde{\Delta}_n\|$ tiende a 0. En realidad, la convergencia casi segura en la Ecuación (3.18) esta garantizado si la sucesión $\{\Delta_n\}$ satisface la siguiente condición:

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_n \subset \cdots .$$

La convergencia casi segura esta también garantizada cuando $\{\Delta_n\}$ satisface la condición $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\|^2 < \infty$.

Prueba. *Sabemos que $b - a = \sum\limits_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})$ y definamos*

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{n} \left[(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{3.19}$$

donde $X_i = (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})$. Entonces:

$$\Phi_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} X_i X_j. \tag{3.20}$$

Para $i \neq j$, tenemos que $\mathbb{E}(X_i X_j) = 0$, donde $B(t)$ tiene incrementos independientes y $\mathbb{E}\left[B(t) - B(s)\right]^2 = |t-s|$. De otro lado, $\mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))^4\right] = 3(t-s)^2$ y así para $i = j$ en la Ecuación (3.20), tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i^2) &= \mathbb{E}\Big((B(t_i) - B(t_{i-1}))^4 - 2(t_i - t_{i-1})\,(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \\
&\quad + (t_i - t_{i-1})^2\Big) \\
&= 3(t_i - t_{i-1})^2 - 2(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2 \\
&= 2(t_i - t_{i-1})^2.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, de la Ecuación (3.20), tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Phi_n^2) &= \sum_{i=1}^{2} 2(t_i - t_{i-1})^2 \leq 2\|\Delta_n\| \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= 2(b-a)\|\Delta_n\| \to 0, \qquad \textit{cuando } \|\Delta_n\| \to 0.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que Φ_n converge a 0 en $L^2(\omega)$. Por lo tanto de la Ecuación (3.19), se observa que la Ecuación (3.18) se verifica. □

Ahora aplicando el Teorema 3.4 en la Ecuación (3.17) se concluye que

$$\lim_{\|\Delta_n\| \to 0} (R_n - L_n) = b - a, \quad \textit{en } L^2(\omega).$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{\|\Delta_n\| \to 0} R_n \neq \lim\limits_{\|\Delta_n\| \to 0} L_n$. Pero, **¿Cuáles son estos límites?** Con la finalidad de obtener esta respuesta, obsérvese que:

$$\begin{aligned}
R_n + L_n &= \sum_{i=1}^{n}(B(t_i) + B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(B^2(t_i) + B^2(t_{i-1})) \\
&= B^2(t_n) - B^2(t_0) \\
&= B^2(b) - B^2(a). \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

De las Ecuaciones (3.17) y (3.21) se concluye que:

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{2}\left(B^2(b) - B^2(a) + \sum_{i=1}^{n}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2\right), \\
L_n &= \frac{1}{2}\left(B^2(b) - B^2(a) - \sum_{i=1}^{n}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2\right).
\end{aligned}$$

Empleando el Teorema 3.4 y tomando el límite en $L^2(\omega)$ de R_n y L_n, obtenemos:

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} R_n = \frac{1}{2}\left(B^2(b) - B^2(a) + (b-a)\right), \qquad (3.22)$$

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} L_n = \frac{1}{2}\left(B^2(b) - B^2(a) - (b-a)\right). \qquad (3.23)$$

El cual nos conduce a la siguiente pregunta: **¿Cuál de las Ecuaciones (3.22) o (3.23) deberemos de tomar para la integral $\int_a^b B(t)dB(t)$? Es decir, ¿Cuál es el extremo (izquierdo o derecho) que debemos de tomar para la evaluación del integrando?**

Para responder estas preguntas, vamos a tomar $a = 0$ y $b = t$ en las Ecuaciones (3.22) y (3.23) para definir el proceso estocástico

$$R(t) = \frac{1}{2}(B^2(t) + t), \quad L(t) = \frac{1}{2}(B^2(t) - t).$$

Dado que $\mathbb{E}(R(t)) = t$. Por lo tanto, $R(t)$ no es una martingala, donde $\mathbb{E}(M(t))$ debe ser una constante para cualquier martingala $M(t)$. Por otro lado, $L(t)$ es una martingala.

En efecto, sea $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s) : s \leq t\}$. Entonces, para cualquier $s \leq t$,

$$\mathbb{E}(L(t)|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(B^2(t)|\mathcal{F}_s) - \frac{1}{2}t. \tag{3.24}$$

Recordemos que la esperanza condicional tiene las siguiente propiedades:

1. Si X y $\mathcal{F}$ son independientes, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$.
2. Si X es $\mathcal{F}$-medible, entonces $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$, en particular, tenemos que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$.

Dado que $B(t) - B(s)$ y $B(u)$ son independientes para todo $u \leq s$, se concluye que $B(t) - B(s)$ y $\mathcal{F}_s$ son independientes. Por consiguiente,

$$\mathbb{E}(B^2(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B(t) - B(s) + B(s))^2|\mathcal{F}_s)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B^2(t)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B(t) - B(s))^2 + 2B(s)(B(t) - B(s)) + B^2(s)|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(B(t) - B(s))^2 + 2B(s)\mathbb{E}(B(t) - B(s)) + B^2(s) \\
&= t - s + B^2(s).
\end{aligned}$$

Así, $\mathbb{E}(B^2(t)|\mathcal{F}_s) = t - s + B^2(s)$, el cual colocamos dentro de la Ecuación (3.24), obtenemos:

$$\mathbb{E}(L(t)|\mathcal{F}_s) = L(s), \quad \textit{para todo } s \leq t.$$

Esto demuestra que $L(t)$ es una martingala. De este ejemplo, podemos sacar la siguiente conclusión:

Definida la integral estocástica $\int_a^t f(s)dB(s)$, para obtener la propiedad de la martingala, deberíamos tomar el extremo izquierdo de cada subintervalo como punto de evaluación.

Además, consideremos otro ejemplo:

$$X(t) = \int_0^t B(1)dB(s), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Intuitivamente, deberíamos esperar que $X(t) = B(1)B(t)$. Pero, el proceso estocástico $X(t)$ no es una martingala, donde

$$\mathbb{E}(B(1)B(t)) = \text{mín}\{1, t\} = t,$$

el cual no es una constante. Así la integral $\int_0^t B(1)dB(s)$ no es la que se esperaba definir si deseábamos obtener un proceso martingala. La razón por la cual tal integral es indefinida (cuando deseamos obtener martingalas) es debido a que el integrando $B(1)$ no se encuentra adaptado a la filtración $\sigma\{B(s) : S \leq t\}$, $0 \leq t \leq 1$. De modo que es un requisito importante para el integrando:

> **Definida la integral estocástica $\int_a^t f(s)dB(s)$, para obtener la propiedad de la martingala, necesitamos asumir que el integrando esta adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.**

3.3.2. Definición de Integrales Estocásticas.

Fijemos un movimiento Browniano $B(t)$ y una filtración $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. Para cada t, $B(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible;
2. Para cualquier $s \leq t$, la variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es independiente del σ-campo $\mathcal{F}_s$.

Nota 3.1 *Por conveniencia, emplearemos $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ para denotar el espacio de todos los procesos estocásticos $f(t, \omega)$, $a \leq t \leq b$, $\omega \in \Omega$, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. *$f(t, \omega)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$;*
2. $\int_a^b \mathbb{E}\left(|f(t)|^2\right) dt < \infty$.

En esta sección emplearemos las ideas originales de Itô para definir la integral estocástica

$$\int_a^b f(t)dB(t) \tag{3.25}$$

para $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Por motivos de claridad, dividiremos la discusión en tres pasos. En el Paso 1, definimos la integral estocástica para un proceso estocástico escalón en $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. En el Paso 2, demostraremos un lema muy importante. En el Paso 3, definiremos la integral estocástica para un proceso estocástico general en $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$.

Paso 1 f es un proceso estocástico en $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$.

Supongamos que f es un proceso estocástico escalón dado por

$$f(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i)}(t),$$

donde ξ_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-medible y $\mathbb{E}(\xi^2_{i-1}) < \infty$. En este caso definimos

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right). \tag{3.26}$$

De la Ecuación (3.26) se concluye que $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ y cualquier proceso estocástico escalón f y g. Además, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2 *Sea $I(f)$ definida por la Ecuación (3.26). Entonces $\mathbb{E}(I(f)) = 0$ y*

$$\mathbb{E}(|I(f)|^2) = \int_a^b \mathbb{E}(|f(t)|^2)dt. \tag{3.27}$$

Prueba. *En efecto, para cada $1 \leq i \leq n$ en la Ecuación (3.26),*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))|\mathcal{F}_{t_{i-1}})) \\
&= \mathbb{E}(\xi_{i-1}\mathbb{E}(B(t_i) - B(t_{i-1})|\mathcal{F}_{t_{i-1}})) \\
&= \mathbb{E}(\xi_{i-1}\mathbb{E}(B(t_i) - B(t_{i-1}))) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por consiguiente se demuestra que $\mathbb{E}I(f) = 0$. *Además, tenemos:*

$$|I(f)|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \zeta_{i-1}\zeta_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})).$$

de donde tenemos para $i \neq j$, *por ejemplo para* $i < j$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\zeta_{i-1}\zeta_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))\right) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\cdots|\mathcal{F}_{t_{j-1}})) \\
&= \mathbb{E}(\zeta_{i-1}\zeta_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))\mathbb{E}((B(t_j) - B(t_{j-1}))|\mathcal{F}_{t_{j-1}})) \\
&= 0 \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{E}(((B(t_j) - B(t_{j-1}))|\mathcal{F}_{t_{j-1}})) = \mathbb{E}(B(t_j) - B(t_{j-1})) = 0$. *Por otro lado, para* $i = j$, *tenemos:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\zeta_{i-1}^2(B(t_j) - B(t_{j-1}))^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\cdots|\mathcal{F}_{t_{i-1}})) \\
&= \mathbb{E}(\zeta_{i-1}^2\mathbb{E}((B(t_i) - B(t_{i-1}))^2) \\
&= \mathbb{E}(\zeta_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})) \\
&= (t_i - t_{i-1})\mathbb{E}(\zeta_{i-1}^2). \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la Ecuación (3.27) se concluye de las Ecuaciones (3.28) y (3.29).

□

Paso 2 Un lema de aproximación.

Necesitamos probar un lema de aproximación, con la finalidad de poder definir la integral estocástica $\int_a^b f(t)dB(t)$ para procesos estocásticos generales $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Lema 3.3 *Supongamos que* $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. *Entonces, existe una sucesión* $\{f_n(t) : n \geq 1\}$ *de procesos estocásticos escalonados en* $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ *tales que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \mathbb{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) dt = 0. \tag{3.30}$$

Prueba. *Dividiremos la prueba en casos especiales del caso general.*

Caso 1 $\mathbb{E}(f(t)f(s))$ *es una función continua de* $(t, s) \in [a, b]^2$.

En este caso, sea $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ *es una partición de* $[a, b]$ *y definimos el proceso estocástico* $f_n(t, \omega)$ *por*

$$f_n(t, \omega) = f(t_{i-1}, \omega), \quad t_{i-1} < t \leq t_i. \tag{3.31}$$

Entonces $\{f_n(t, \omega)\}$ *es una sucesión de procesos estocásticos escalón adaptados. Por la continuidad de* $\mathbb{E}(f(t)f(s))$ *sobre* $[a, b]^2$ *tenemos*

$$\lim_{s \to t} \mathbb{E}(|f(t) - f(s)|^2) = 0,$$

lo cual implica que para cada $t \in [a, b]$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) = 0. \tag{3.32}$$

Además, empleando la desigualdad $|x - y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$ *obtenemos:*

$$|f(t) - f_n(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2).$$

Por consiguiente, para todo $a \leq t \leq b$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) &\leq 2(\mathbb{E}(|f(t)|^2) + \mathbb{E}(|f_n(t)|^2)) \\ &\leq 4 \sup_{a \leq s \leq b} \mathbb{E}(|f(s)|^2). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Por consiguiente, de las Ecuaciones (3.32) y (3.33), podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue[11]*, para concluir que:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \mathbb{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) dt = 0.$$

Caso 2 *f es acotado.*

En este caso, definimos el proceso estocástico g_n por

$$g_n(t, \omega) = \int_0^{n(t-a)} e^{-\tau} f(t - \frac{\tau}{n}, \omega) d\tau.$$

De donde se concluye que g_n es adaptado para $\mathcal{F}_t$ y $\int_a^b \mathbb{E}(|g_n(t)|^2) dt < \infty$.

Afirmación 1: *Para cada n, $\mathbb{E}(g_n(t) g_n(s))$ es una función continua de (t, s).*

En efecto, sea $u = t - \frac{\tau}{n}$ reescribirlos $g_n(t, \omega)$ como:

[11] **Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue.** Supongamos que $X_n \leq Y$, $Y \in L^1(\Omega)$, y $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ existe casi seguramente. Entonces

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n)$$

$$g_n(t,\omega) = \int_a^b ne^{-n(t-u)} f(u,\omega)du,$$

el cual puede ser empleado para verificar, que:

$$\lim_{t \to s} \mathbb{E}(|g_n(t) - g_n(s)|^2) = 0,$$

de donde queda probado la afirmación.

Afirmación 2: $\displaystyle\int_a^b \mathbb{E}(|f(t) - g_n(t)|^2)dt \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

En efecto, nótese que:

$$f(t) - g_n(t) = \int_0^\infty e^{-\tau}(f(t) - f(t - \frac{\tau}{n}))d\tau,$$

donde $f(t)$ *es cero para* $t < a$*. Como* $e^{-\tau}d\tau$ *es una medida de probabilidad sobre* $[0,\infty)$*, podemos aplicar la Desigualdad de Schwartz para obtener:*

$$|f(t) - g_n(t)|^2 \leq \int_0^\infty |f(t) - f(t - \frac{\tau}{n})|^2 e^{-\tau} d\tau.$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \mathbb{E}(|f(t) - g_n(t)|^2)dt \\
\leq \quad & \int_a^b \int_0^\infty e^{-\tau}\mathbb{E}(|f(t) - f(t - \frac{\tau}{n})|^2)d\tau dt \\
= \quad & \int_0^\infty e^{-\tau} \left(\int_a^b \mathbb{E}(|f(t) - f(t - \frac{\tau}{n})|^2)dt \right) d\tau \\
= \quad & \int_0^\infty e^{-\tau}\mathbb{E} \left(\int_a^b |f(t) - f(t - \frac{\tau}{n})|^2 dt \right) d\tau. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Como sea supuesto que f es acotada, tenemos:

$$\int_a^b |f(t,\cdots) - f(t - \frac{\tau}{n},\cdots)|^2 dt \to 0, \quad \textit{casi seguramente} \tag{3.35}$$

cuando $n \to \infty$. Entonces la Afirmación 2, se concluye de las Ecuaciones (3.34) y (3.35).

Ahora por la Afirmación 1, podemos aplicar el Caso 1 a g_n para cada n tomando un proceso estocástico escalonado adaptado $f_n(t,\omega)$ tal que

$$\int_a^b \mathbb{E}(|g_n(t) - f_n(t)|^2) dt \leq \frac{1}{n}. \tag{3.36}$$

Por lo tanto, por la Afirmación 2 y la Ecuación (3.36) tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbb{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) dt = 0,$$

el cual completa la prueba para el segundo caso.

Caso 3 *El caso general, para $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.*

Sea $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Para cada n, definimos:

$$g_n(t,\omega) = \begin{cases} f(t,\omega) & , \ si\, |f(t,\omega)| \leq n; \\ 0 & , \ si\, |f(t,\omega)| > n. \end{cases}$$

Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada, tenemos:

$$\int_a^b \mathbb{E}(|f(t) - g_n(t)|^2) dt \to 0, \quad \textit{cuando}\ n \to \infty. \tag{3.37}$$

Ahora, para cada n aplicamos el Caso 2, para g_n tomando un proceso estocástico escalonado adaptado $f_n(t,\omega)$, tal que:

$$\int_a^b \mathbb{E}(|g_n(t) - f_n(t)|^2)dt \leq \frac{1}{n}. \tag{3.38}$$

Por consiguiente la Ecuación (3.30) se concluye de las Ecuaciones (3.37) y (3.38), con lo cual se ha completado la prueba del lema. □

Paso 3 La integral estocástica $\int_a^b f(t)dB(t)$ para $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$.

Ahora podemos emplear lo que se ha demostrado en los Pasos 1 y 2, para definir la integral estocástica

$$\int_a^b f(t)dB(t), \qquad f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega).$$

Aplicando el Lema 3.3, tomamos una sucesión $\{f_n(t,\omega) : n \geq 1\}$ para procesos estocásticos escalonados adaptados, tal que la Ecuación (3.30) se verifica. Para cada n, $I(f_n)$ está definido por el Paso 1. Por el Lema 3.2, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I(f_n) - I(f_m)|^2) &= \int_a^b \mathbb{E}(|f_n(t) - f_m(t)|^2)dt \\ &\longrightarrow 0, \qquad \textit{cuando}\, n, m \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión $\{I(f_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Definamos:

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n), \qquad en\, L^2(\Omega). \tag{3.39}$$

Podemos emplear argumentos similares a los utilizados en la Sección 1.8 para la integral de Wiener, para demostrar que $I(f)$ está bien definido.

Definición 3.5 *El límite $I(f)$ definido en la Ecuación (3.39) es llamado la integral de Itô de f y es denotado por $\int_a^b f(t)dB(t)$.*

Así la integral de Itô $I(f)$ es definido para $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ y la aplicación I es lineal, es decir, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$,

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g).$$

Del Paso 2, se observa que el Lema 3.2 permanece valido para $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Formalizaremos este resultado por medio del siguiente teorema.

Teorema 3.5 *Supongamos que $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Entonces la integral de Itô $I(f) = \int_a^b f(t)dB(t)$ es una variable aleatoria con $\mathbb{E}(I(f)) = 0$ y*

$$\mathbb{E}(|I(f)|^2) = \int_a^b \mathbb{E}(|f(t)|^2)dt. \tag{3.40}$$

Por este teorema, la integral de Itô $I : L^2_{ad}([a,b] \times \Omega) \to L^2(\Omega)$ es una isometría. Donde I es lineal, y tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2 *Para cualquier $f, b \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$, se verifica la siguiente igualdad:*

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b f(t)dB(t) \int_a^b g(t)dB(t)\right) = \int_a^b \mathbb{E}(f(t)g(t))dt.$$

3.3.3. Ejemplos de Integrales Estocásticas.

Ahora, pondremos en práctica todas las herramientas desarrolladas en esta subsecciones, para aplicarlos a ejemplos prácticos de integrales estocásticas.

Ejemplo 3.3 $\int_a^b B(t)dB(t) = \frac{1}{2}\left\{B^2(b) - B^2(a) - (b-a)\right\}.$

En la Subsección 1.10.1 se probo definir la integral $\int_a^b B(t)dB(t)$*. Cuando empleamos el extremo izquierdo de cada subintervalo en una partición de* $[a, b]$ *para evaluar el integrando, obtenemos la suma* L_n *en la Ecuación (3.15). Si tomamos como la integral el límite de* L_n *cuando* $n \longrightarrow \infty$*, entonces de la Ecuación (3.23), tenemos:*

$$\int_a^b B(t)dB(t) = \frac{1}{2}\left\{B^2(b) - B^2(a) - (b-a)\right\}. \tag{3.41}$$

Es esté valor igual a la integral $\int_a^b B(t)dB(t)$ ***tal como se definió en la Sección 1.10.2*** *Primero nótese que* $\mathbb{E}(B(t)B(s)) = \text{mín}\{t, s\}$*, el cual es una función continua de* t *y* s*. Por lo tanto, podemos aplicar el Caso 1, en la prueba del Lema 3.3 para el integrando* $f(t) = B(t)$*, es decir, para una partición* $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ *de* $[a, b]$*, definimos un proceso estocástico* $f_n(t, \omega) = B(t_{i-1}, \omega)$*, para todo* $t_{i-1} < t \leq t_i$*.*

Entonces, por el Paso 2, de la definición de una integral estocástica, se observa que la integral estocástica $\int_a^b B(t)dB(t)$ *tal como se definió en la Sección 1.10.2, esta dado por:*

$$\int_a^b B(t)dB(t) = \lim_{n \to \infty} I(f_n), \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Ahora, por la Ecuación (3.26) en el Paso 1, de la definición de la integral estocástica, $I(f_n)$ *está dado por:*

$$I(f_n) = \sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right),$$

el cual es L_n *en la Ecuación (3.15). Así la integral estocástica* $\int_a^b B(t)dB(t)$ *tal como se definió en la Sección 1.10.2, tiene el mismo valor que la integral estocástica de la Ecuación (3.41).*

Ejemplo 3.4 *Empleamos la misma idea como en el Ejemplo 3.3, para demostrar que:*

$$\int_a^b B^2(t)dB(t) = \frac{1}{3}\left(B^3(b) - B^3(a)\right) - \int_a^b B(t)dt, \tag{3.42}$$

donde la integral del lado derecho, es la integral de Riemann de $B(t,\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$. Nótese que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B^2(t) \quad & B^2(s)) \\
&= \mathbb{E}(((B(t) - B(s)) + B(s))^2 B^2(s)) \\
&= \mathbb{E}(((B(t) - B(s))^2 + 2B(s)(B(t) - B(s)) + B^2(s))B^2(s)) \\
&= (t-s)s + 3s^2 \\
&= ts + 2s^2,
\end{aligned}$$

de aquí se concluye que $\mathbb{E}(B^2(t)B^2(s))$ es una función continua de t y s. Por lo tanto, aplicando el Caso 1 en la prueba del Lema 3.3 para el integrando $f(t) = B^2(t)$. Para una partición $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ de $[a, b]$, define un proceso estocástico $f_n(t,\omega) = B(t_{i-1},\omega)$ para todo $t_{i-1} < t \leq t_i$.

Entonces, la integral estocástica $\int_a^b B^2(t)dB(t)$ esta dado por

$$\int_a^b B^2(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n B^2(t_{i-1})\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right), \tag{3.43}$$

donde las series convergen en $L^2(\Omega)$. Esto se puede comprobar al observar que:

$$\begin{aligned}
3\sum_{i=1}^n & B^2(t_{i-1})\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right) \\
&= B^3(b) - B^3(a) - \sum_{i=1}^n \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)^3 \\
&\quad -3\sum_{i=1}^n B(t_{i-1})\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)^2 .
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Empecemos por la primera suma del lado derecho de está ecuación, empleando los mismos argumentos hasta ahora empleados y además que $\mathbb{E}(|B(t)-B(s)|^6) = 15|t-s|^3$ *para demostrar que*

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1}))^3\right|^2\right) = 15\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})^3$$
$$\leq 15\|\Delta_n\|^2(b-a)\to 0. \quad (3.45)$$

Por otro lado, para el segundo sumando en la Ecuación (3.44), podemos modificar los argumentos en la prueba del Teorema 3.4 empleando la misma idea como en la prueba del Lema 3.2 para obtener la desigualdad

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})\,(B(t_i)-B(t_{i-1}))^2-\sum_{i=1}^{n}B(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})\right|^2\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}2t_{i-1}(t_i-t_{i-1})^2 \leq 2b(b-a)\|\Delta_n\|\to 0. \quad (3.46)$$

La Ecuación (3.45) significa que el primer sumando del lado derecho de la Ecuación (3.44) converge a 0 en $L^2(\Omega)$*, mientras que la Ecuación (3.46) significa que el segundo sumando del lado derecho de la Ecuación (3.44) converge a* $\int_a^b B(t)dt$*. Por lo tanto, de las Ecuaciones (3.43) y (3.44) se concluye que la igualdad en la Ecuación (3.42) se verifica.*

Ejemplo 3.5 *Sea* $a=0$ *y* $b=t$ *en la Ecuación (3.42). Entonces tenemos un proceso estocástico*

$$X_t=\int_0^t B^2(u)dB(u)=\frac{1}{3}B^3(t)-\int_0^t B(u)du, \quad t\geq 0.$$

Sea $0\leq s\leq t$*. Primero escribimos* $B^3(t)$ *como:*

$$(B(t) - B(s))^3 + 3(B(t) - B(s))^2 B(s) + 3(B(t) - B(s))B^2(s) + B^3(s)$$

al tomar la esperanza condicional obtenemos:

$$\mathbb{E}(B^3(t)|\mathcal{F}_s) = 3(t-s)B(s) + B^3(s). \tag{3.47}$$

Además, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^t B(u)du \mid \mathcal{F}_s\right) &= \int_0^s B(u)du + \int_s^t \mathbb{E}(B(u)|\mathcal{F}_s)du \\ &= \int_0^s B(u)du + B(s)(t-s). \end{aligned} \tag{3.48}$$

De las Ecuaciones (3.47) y (3.48) se concluye que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$. *Por consiguiente* X_t *es una martingala.*

3.3.4. Sumas de Riemann e Integrales Estocásticas.

Teorema 3.6 *Supongamos que* $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ *y que* $\mathbb{E}(f(t)f(s))$ *es una función continua de* t *y* s. *Entonces:*

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right), \quad en\, L^2(\Omega),$$

donde $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ *y* $\|\Delta_n\| = \max\limits_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1})$.

Prueba. *Sea* $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. *Para una partición* $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ *del intervalo* $[a, b]$, *definimos la suma de Riemann de* f *con respecto a* $B(t)$ *por*

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,(B(t_i) - B(t_{i-1}))\,. \tag{3.49}$$

Es natural preguntarse si esta sucesión de sumas de Riemann convergen a la integral de Itô $\int_a^b f(t)dB(t)$. *Supongamos que* $\mathbb{E}(f(t)f(s))$ *es una función continua de t y s. Definamos un proceso estocástico* f_n *como en la Ecuación (3.31), es decir,*

$$f_n(t,\omega) = f(t_{i-1},\omega), \qquad t_{i-1} < t \leq t_i.$$

Tal como se demostró en el Caso 1, en la prueba del Lema 3.3, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbb{E}(|f(t) - f_n(t)|^2)dt = 0.$$

Por consiguiente, por la Ecuación (3.39),

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty} I(f_n), \qquad en\, L^2(\Omega).$$

Pero, por la Ecuación (3.26), $I(f_n)$ *viene expresado de la siguiente manera,*

$$\begin{aligned} I(f_n) &= \sum_{i=1}^{n} f_n(t_{i-1})\,(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,(B(t_i) - B(t_{i-1}))\,, \end{aligned}$$

el cual es exactamente la suma de Riemann en la Ecuación (3.49). Lo cual prueba el teorema. □

4

Diferenciación Estocástica: Lema de Itô.

Una de la herramientas más útiles en las matemáticas financieras modernas es el llamado cálculo estocástico, o cálculo de Itô, sobre el cual descansa prácticamente toda la teoría económica y el análisis financiero en tiempo continuo y en ambientes estocásticos. En términos estrictos, el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral y no la diferencial. Cuando se escribe una ecuación diferencial estocástica, realmente se está pensando en una integral estocástica, así pues una ecuación diferencial estocástica es una notación simplificada de una integral estocástica. El presente capítulo tiene como objetivo el estudio de variables aleatorias cuya dinámica es guiada por ecuaciones diferenciales, las cuales tiene una componente estocástica que involucra al Movimiento Browniano.

4.1. Regla del Producto de Itô.

La definición de un movimiento Browniano, conlleva a la siguiente expresión:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX \tag{4.1}$$

Sin embargo, la ecuación (4.1) no puede ser tratada como una ecuación diferencial ordinaria (esta ecuación involucra términos aleatorios y es no diferenciable), la cual es conocida como una **ecuación diferencial estocástica**.

Es necesario, desarrollar un entendimiento más amplio de las propiedades de las diferencias estocásticas. De la construcción del movimiento Browniano, tenemos que:

$$dB(t) \equiv \lim_{h\to dt} \left(B(t+h) - B(t)\right),$$

Recordando la definición del movimiento Browniano dada en la Sección 2.1 y la Proposición 2.1, los incrementos del movimiento Browniano se distribuyen con media cero ($\mu = 0$) y varianza igual a la longitud del intervalo h (ya que $\sigma = 1$). Por consiguiente, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(dB) &= \lim_{h\to dt} \mathbb{E}(B(t+h) - B(t)) \\
&= \lim_{h\to dt} \mu = 0, \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(dB) &= \lim_{h\to dt} \mathbb{E}((B(t+h) - B(t))^2) \\
&= \lim_{h\to dt} h = dt, \qquad (4.3) \\
\mathbb{E}((dB)^2) &= \lim_{h\to dt} \mathbb{E}((B(t+h) - B(t))^2) \\
&= Var(dB) = dt, \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var((dB)^2) &= \lim_{h\to dt} \left\{E((dB)^2) - \mathbb{E}^2((dB)^2)\right\} \\
&= \lim_{h\to dt} \left\{\mathbb{E}((B(t+h) - B(t))^4) - h^2\right\} = \mathcal{O}(dt), \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(dBdt) &= \lim_{h\to dt} \mathbb{E}((B(t+h)-B(t))h) \\ &= \lim_{h\to dt} \mu h = 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}Var(dBdt) &= \lim_{h\to dt} \left\{\mathbb{E}(dB(dt)^2) - \mathbb{E}^2(dBdt)\right\} \\ &= \lim_{h\to dt} \mathbb{E}((B(t+h)-B(t))^2h^2) = \mathcal{O}(dt). \end{aligned} \tag{4.7}$$

De la definición del movimiento Browniano y de las ecuaciones (4.2) y (4.3), se concluye que dB puede ser visto como una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza dt y aunque dt podría no parecer del todo una varianza no es insignificante del todo.

En el cálculo de variables reales, si t es una variable independiente, se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal, $(dt)^2$, es una cantidad despreciable y se escribe

$$(dt)^2 = 0 \tag{4.8}$$

en otras palabras, si algo es pequeño, entonces su cuadrado es todavía mas pequeño. De hecho, $(dt)^a = 0$ si $a > 1$. La regla central del cálculo estocástico, que hace la distinción con el cálculo de variables reales, es que el cuadrado de una cantidad infinitesimal *normal* es significativa.

Si se interpreta los términos de orden $\mathcal{O}(dt)$ como cero, entonces (4.4)-(4.7) muestran que $(dB)^2$ y $dBdt$ no son aleatorias (porque son de orden $\mathcal{O}(dt)$) ya que las relaciones $(dB)^2 = dt$ y $dBdt = 0$ se satisfacen en la esperanza. Estos resultados se resumen en la siguiente tabla, la cual es conocida como la **La Regla del Producto de Itô** o también llamadas reglas empíricas de diferenciación estocástica.

Tabla 4.1: Caja de multiplicación de Itô

*	dB	dt
dB	dt	0
dt	0	0

4.2. El Lema de Itô

Aun cuando una ecuación diferencial estocástica es la notación simplificada de una integral estocástica, las reglas que se establecen con la notación diferencial y los resultados que a partir de ellas se desprenden son consistentes con las propiedades de la integral estocástica. Asombrosamente, la diferencial estocástica permite, en muchos casos, obtener resultados de manera más rápida y sencilla sobre la integral estocástica.

Consideremos una función $y = f(S_t, t)$, donde:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dB_t. \tag{4.9}$$

Cabe destacar que la mayor parte del desarrollo de la teoría financiera y económica en tiempo continuo utiliza la notación simplificada (4.9), teniendo siempre en mente una integral estocástica

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(S_u, u)du + \int_0^t \sigma(S_u, u)dB_u. \tag{4.10}$$

Debido a la regla $(dB_t)^2 = dt$, es conveniente calcular la diferencial de $y = f(S_t, t)$ considerando los términos de segundo orden en una expansión en Serie de Taylor. En el caso de variables reales, la diferencial se calcula sólo con los términos de primer orden ya que el producto de cantidades infinitesimales es de orden despreciable. La expansión en Serie de Taylor de $y = f(S_t, t)$ hasta términos de segundo orden conduce a

$$dy = \frac{\partial f}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}(dS_t)(dt) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right) \tag{4.11}$$

La sustitución de (4.9) y la aplicación de la Caja de Multiplicación de Itô, se obtiene:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}[\mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dB_t] \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}[\mu^2(S_t, t)(dt)^2 + 2\mu(S_t, t)\sigma(S_t, t)(dt)(dB_t) + \sigma^2(S_t, t)(dB_t)^2]\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}[\mu(S_t,t)(dt)^2+\sigma(S_t,t)(dt)(dB_t)]+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\Big] \\
dy &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}+\mu(S_t,t)\frac{\partial f}{\partial S_t}+\frac{1}{2}\sigma^2(S_t,t)\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\right)dt+\sigma(S_t,t)\frac{\partial f}{\partial S_t}dB_t.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

En términos estrictos la ecuación anterior debería ser escrita como

$$
\begin{aligned}
y_t = y_0 &+ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial u}+\mu(S_u,u)\frac{\partial f}{\partial S_u}+\frac{1}{2}\sigma^2(S_u,u)\frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2}\right)du \\
&+ \int_0^t \sigma(S_u,u)\frac{\partial f}{\partial S_u}dB_u
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

ó

$$
y_t = y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u}dS_u + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(S_u,u)\frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2}du
$$

Por supuesto, se supone que $y = f(S_t,t)$ tiene segundas derivadas parciales continuas. Este resultado es conocido como el **Lema de Itô** en su forma diferencial. En ocasiones, a fin de identificar el término du que proviene de $(dB_u)^2 = du$ la ecuación (4.13) se escribe como

$$
y_t = y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u}dS_u + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(S_u,u)\frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2}(dB_t)^2.
$$

Para su demostración revisar [5], [30], [31], [32], [59] y [67].

4.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Una ecuación diferencial

$$
\frac{dx}{dt} = f(t,x)
$$

en el cálculo de Leibnitz-Newton puede ser interpretado como la ecuación integral

$$
x(t) = x_a + \sum_a^t f(s,x(s))ds.
$$

Cuando es perturbado por la derivada informal $\dot{B}$ de un movimiento Browniano B, esta ecuación toma la siguiente forma:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(t, X)\dot{B}(t) + f(t, X)$$

En el cálculo de Itô $\dot{B}$ y dt se combinan para formar el diferencial Browniano $dB(t)$. La ecuación diferencial estocástica $dX = \sigma(t, X)dB(t) + f(t, X)dt$ es una expresión simbólica y es interpretado por medio de la ecuación integral estocástica $X_t = X_a + \int_a^t \sigma(s, X_s)dB(s) + \int_a^t f(s, X_s)ds$, para todo $a \leq t \leq b$. La motivación original para que Kiyosi Itô desarrollara la teoría de integración estocástica fue la construcción de procesos estocásticos para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas.

4.3.1. Algunos Ejemplos.

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos previos.

Ejemplo 4.1 *Consideremos la* ***Ecuación de Langevin:***

$$dX_t = \alpha dB(t) - \beta X_t dt, \quad X_0 = x_0.$$

Cuya solución es un ***Proceso de Ornstein-Uhlenbeck***

$$X_t = e^{-\beta t}x_0 + \alpha \int_0^t e^{-\beta(t-u)}dB(u).$$

Ejemplo 4.2 *Sea $m = n = 1$ y supongamos que g es una función continua (no una variable aleatoria). Entonces la única solución de*

$$\begin{cases} dX &= gXdW \\ X(0) &= 1 \end{cases} \tag{4.14}$$

es

$$X(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t g^2 ds + \int_0^t g dW}$$

para $0 \leq t \leq T$. *Para verificar esto, nótese que*

$$Y(t) := -\frac{1}{2}\int_0^t g^2 ds + \int_0^t g dW.$$

satisface

$$dY = -\frac{1}{2}g^2 dt + g dW.$$

Así por el Lema de Itô, para $u(x) = e^x$, *tenemos:*

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial u}{\partial x} dY + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} g^2 dt \\ &= e^Y \left(-\frac{1}{2} g^2 dt + g dW + \frac{1}{2} g^2 dt \right) \\ &= gX dW, \end{aligned}$$

La unicidad será probada después. □

Ejemplo 4.3 ***(Precio de una Acción)*** *Sea* $P(t)$, *el cual denota el precio de una acción en el tiempo* t. *Podemos modelar la evolución de* $P(t)$ *en el tiempo suponiendo que* $\frac{dP}{P}$, *es el cambio del precio relativo, el cual se desarrolla según la ecuación diferencial estocástica*

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW$$

para ciertas constantes μ *y* σ, *llamadas el* ***flujo*** *y la* ***volatilidad*** *de la acción. Por consiguiente*

$$dP = \mu P dt + \sigma P dB; \tag{4.15}$$

es decir el precio de la acción es log-normal o el rendimiento es normal y por lo tanto

$$d(\log(P)) = \frac{dP}{P} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 P^2 dt}{P^2} \quad \textit{por la formula de Itô}$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW.$$

Por consiguiente

$$P(t) = p_0 e^{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t},$$

Se observa que el precio es siempre positivo, asumiendo que el precio inicial p_0 *es positivo. Como (4.15) implica*

$$P(t) = p_0 + \int_0^t \mu P ds + \int_0^t \sigma P dW$$

y $E(\int_0^t PdW) = 0$, *vemos que*

$$E(P(t)) = p_0 + \int_0^t \mu E(P(s))ds.$$

Por lo tanto

$$E(P(t)) = p_0 e^{\mu t} \quad para \quad t \geq 0.$$

El valor esperado del precio de la acción coincide con la solución determinística de la ecuación (4.15) correspondiente a $\sigma = 0$. *Sea* r *una tasa de interés constante y definamos el precio futuro de la acción como*

$$F_{t,T} = Pe^{r(T-t)} \tag{4.16}$$

Observe primero que

$$\frac{\partial F_{t,T}}{\partial t} = -rPe^{r(T-t)}, \qquad \frac{\partial F_{t,T}}{\partial P} = e^{r(T-t)}, \quad y \quad \frac{\partial^2 F_{t,T}}{\partial P^2} = 0.$$

En este caso el ***Lema de Itô*** *produce*

$$
\begin{aligned}
dF_{t,T} &= \left(-rPe^{r(T-t)} + \mu Pe^{r(T-t)}\right) dt + \sigma e^{r(T-t)} PdB \\
&= (-rF_{t,T} + \mu F_{t,T})dt + \sigma F_{t,T} dB \\
&= (\mu - r)F_{t,T} dt + \sigma F_{t,T} dB.
\end{aligned}
$$

La expresión anterior se puede escribir como

$$dF_{t,T} = \frac{\lambda}{\sigma} F_{t,T} dt + \sigma F_{t,T} dB,$$

donde

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

es el premio al riesgo de mercado por unidad de volatilidad. De esta forma, el precio futuro sigue también un Movimiento Browniano con la misma volatilidad del activo subyacente, pero con parámetro de tendencia menor. □

Ejemplo 4.4 ***(Puente Browniano)*** *La solución de la ecuación diferencial estocástica*

$$
\begin{cases}
dB = -\dfrac{B}{1-t} dt + dB & (0 \leq t < 1) \\
B(0) = 0
\end{cases}
\tag{4.17}
$$

es

$$B(t) = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW \qquad (0 \leq t < 1),$$

el cual se comprueba mediante un cálculo directo. Resulta también que $\lim_{t \to 1^-} B(t) = 0$ *casi seguramente. Llamamos a* $B(\cdot)$ ***puente Browniano,*** *entre el tiempo 0 original y el tiempo 1.*

Ejemplo 4.5 ***(Proceso con Reversión a la Media)*** *Un excelente modelo del movimiento Browniano es proporcionado por el Proceso con Reversión a la Media*

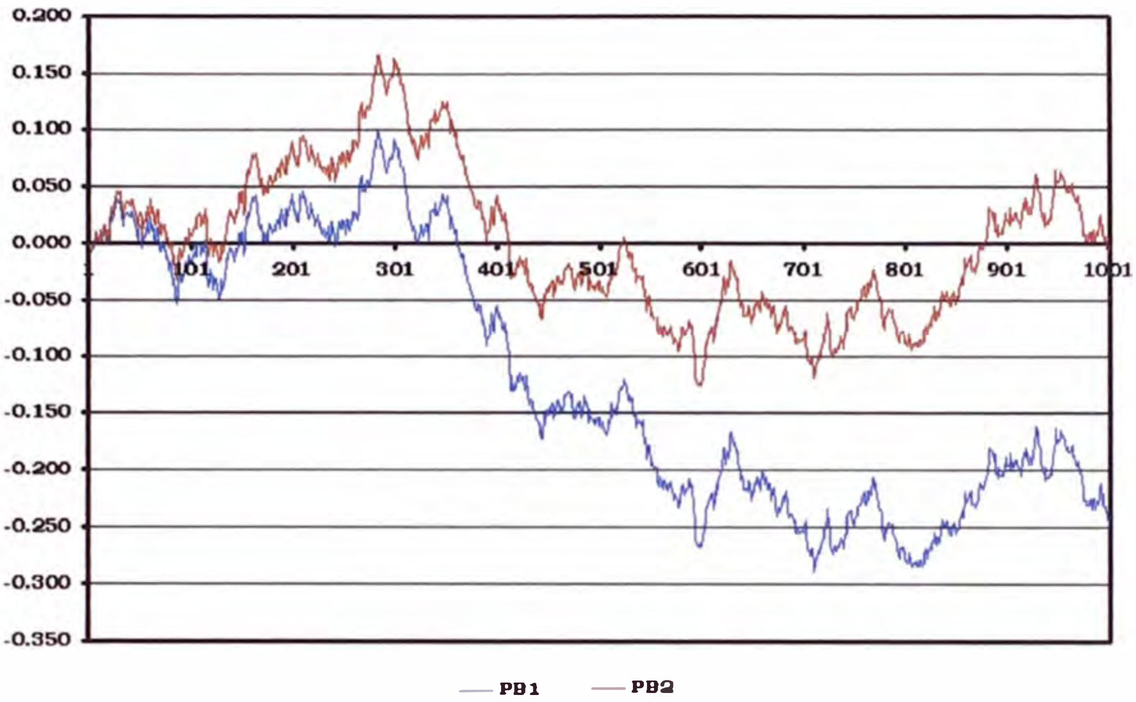

Gráfico 4.1: Puente Browniano.

o también conocido como la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck

$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= -b\dot{Y} + \sigma\xi \\ Y(0) &= Y_0,\ \dot{Y}(0) = Y_1, \end{aligned}$$

donde $Y(t)$ es la ***posición*** *de la partícula Browniana en el tiempo t, Y_0 y Y_1 son variables aleatorias Gaussianas dadas. Sea $b > 0$ el coeficiente de fricción, σ es el coeficiente de difusión, y $\xi(\cdot)$ como de costumbre es el* ***ruido blanco****. En el Gráfico 4.5, se muestra Costo del Riesgo Promedio de Ingresos Públicos del Proyecto (CRIN), el cual es un procesos con reversión a la media*[1]

[1]Ver el **Manual del Comparador Público Privado para Evaluación de Concesiones Cofinanciadas**, http://www.mef.gob.pe/DGPM/estudios-docum.php, http://www.americaeconomia.com/Multimedios/Otros/3234.pdf

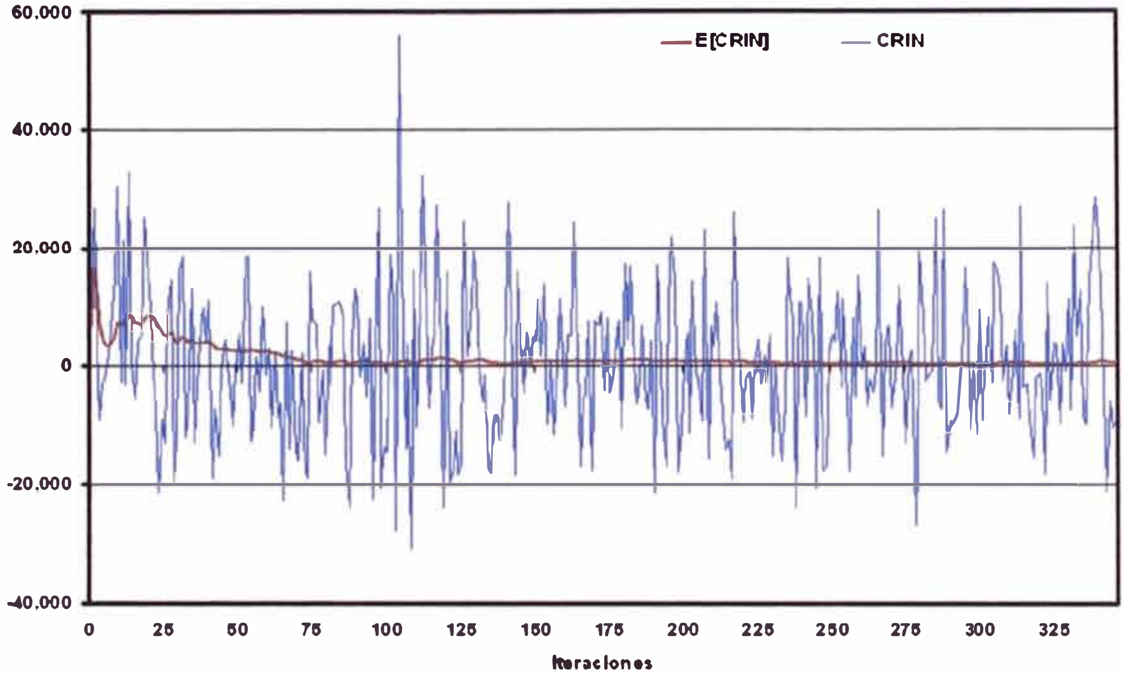

Gráfico 4.2: Costo del Riesgo Promedio de Ingresos Públicos del Proyecto: Proceso con Reversión a la Media

Entonces $X := \dot{Y}$, la ***velocidad*** *del proceso, satisface la ecuación de Langevin*

$$\begin{cases} dX &= -bXdt + \sigma dW \\ X(0) &= Y_1, \end{cases} \tag{4.18}$$

estudiado en el ejemplo anterior. Supondremos que Y_1 es normal, de dónde la fórmula explícita para la solución es

$$X(t) = e^{-bt}Y_1 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)}dW,$$

muestra que $X(t)$ será Gaussiana para todo $t \geq 0$. Ahora el ***proceso de posición*** *es*

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t Xds.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E(Y(t)) &= E(Y_0) + \int_0^t E(X(s))ds \\ &= E(Y_0) + \int_0^t e^{-bs} E(Y_1)ds \\ &= E(Y_0) + \left(\frac{1-e^{-bt}}{b} \right) E(Y_1); \end{aligned}$$

y después de una serie de cálculos obtenemos

$$V(Y(t)) = V(Y_0) + \frac{\sigma^2}{b^2}t + \frac{\sigma^2}{2b^3}(-3 + 4e^{-bt} - e^{-2bt}).$$

Ejemplo 4.6 ***Un Ejemplo en una Dimensión.*** *Primero vamos a suponer que* $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es de clase* C^1*, con* $|b'| \leq L$ *para alguna constante* L*, e intentaremos solucionar la ecuación diferencial estocástica 1-dimensional.*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX &=& b(X)dt + dW \\ X(0) &=& x \end{array} \right. \tag{4.19}$$

donde $x \in \mathbb{R}$*. Ahora la ecuación diferencial estocástica significa que*

$$X(t) = x + \int_0^t b(X)ds + W(t), \; \forall \, t \geq 0$$

y esta formulación sugiere que intentemos un ***método de aproximaciones sucesivas*** *para construir la solución. Para ello definimos* $X_0(t) \equiv x$*, y entonces*

$$X_{n+1}(t) := x + \int_0^t b(X^n)ds + W(t) \qquad (t \geq 0) \quad n = 0, 1, \ldots$$

A continuación hacemos

$$D^n(t) := \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s b(x)dr + W(s) \right| \leq C \quad \forall \, 0 \leq t \leq T$$

donde C *depende de* ω*. Ahora deseamos que*

$$D^n(t) \leq C\frac{L^n}{n!}t^n \quad \forall n = 0, 1, \ldots \quad 0 \leq t \leq T.$$

En efecto, para ellos veamos que

$$\begin{aligned}
D^n(t) &= \max_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s b(X_n(r)) - b(X_{n-1}(r))dr\right| \\
&\leq L\int_0^t D^{n-1}(s)ds \\
&\leq L\int_0^t C\frac{L^{n-1}s^{n-1}}{(n-1)!}ds \quad \text{por la inducción supuesta} \\
&= C\frac{L^n}{n!}t^n.
\end{aligned}$$

En vista de la desigualdad deseada, tenemos para $m \geq n$

$$\max_{0\leq t\leq T}|X_m(t) - X_n(t)| \leq C\sum_{k=n}^{\infty}\frac{L^kT^k}{k!} \longrightarrow 0 \quad \text{cuandon} \longrightarrow \infty.$$

Así, para casi todo ω, $X_n(\cdot)$ *converge uniformemente para* $0 \leq t \leq T$ *a un proceso límite* $X(\cdot)$ *el cual, se comprueba fácilmente, al resolver (4.19).* □

Ejemplo 4.7 ***Resolviendo una Ecuación Diferencial Estocástica por Cambio de Variables.***

Dado una ecuación diferencial estocástica unidimensional general de la forma

$$\begin{cases} dX = b(X)dt + \sigma(X)dW \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{4.20}$$

primero solucionemos

$$\begin{cases} dY = f(Y)dt + dW \\ Y(0) = y. \end{cases} \tag{4.21}$$

donde f será seleccionada más adelante, e intentaremos encontrar una función u tal que

$$X := u(Y)$$

resuelve nuestra ecuación diferencial estocástica (4.20). Se observa que podemos al menos solucionar (4.21), de acuerdo al ejemplo anterior. Supongamos por el momento que u y f son conocidos. calculemos empleando la fórmula de Itô que

$$\begin{aligned} dX &= u'(Y)dY + \frac{1}{2}u''(Y)dt \\ &= \left[u'f + \frac{1}{2}u''\right] dt + u'dW. \end{aligned}$$

Así $X(\cdot)$ resuelve (4.20) siempre que

$$\begin{cases} u'(Y) = \sigma(X) & = \sigma(u(Y)), \\ u'(Y)f(Y) + \frac{1}{2}u''(Y) & = b(X) = b(u(Y)), \end{cases}$$

y

$$u(y) = x.$$

De modo que primero vamos a resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} u'(z) & = \sigma(u(z)) \\ u(y) & = x \end{cases} \qquad (z \in \mathbb{R}),$$

donde $' = \frac{d}{dx}$, y entonces, una vez que es conocido, resolvemos para

$$f(z) = \frac{1}{\sigma(u(z))}\left[b(u(z)) - \frac{1}{2}u''(z)\right].$$

□

Nótese que ambos métodos descritos anteriormente evitan del todo, el empleo de estimaciones de martingala.

Ejemplo 4.8 *Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = X_t^2 dB(t) + X_t^3 dt, \quad X_0 = 1, \tag{4.22}$$

El cual proviene de la siguiente ecuación integral estocástica:

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 dB(s) + \int_0^t X_s^3 ds.$$

Para resolver esta ecuación, aplicamos la fórmula de Itô para hallar que:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{X_t}\right) &= -\frac{1}{X_t^2} dX_t + \frac{1}{2}\frac{2}{X_t^3}(dX_t)^2 \\ &= -\frac{1}{X_t^2}(X_t^2 dB(t) + X_t^3 dt) + X_t dt \\ &= -dB(t). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\frac{1}{X_t} = -B(t) + C$. *La condición inicial* $X_0 = 1$ *implica que* $C = 1$. *Por lo tanto, la solución de la Ecuación (4.22) viene dado por*

$$X_t = \frac{1}{1 - B(t)}.$$

Ejemplo 4.9 Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = 3X_t^{2/3} dB(t) + 3X_t^{1/3} dt, \quad X_0 = 0, \tag{4.23}$$

lo cual implica la siguiente ecuación integral estocástica:

$$X_t = 3\int_0^t X_s^{2/3} dB(s) + 3\int_0^t X_s^{1/3} ds.$$

Para cualquier constante $a > 0$ fijo, se define la siguiente función $\theta_a(x) = (x-a)^3 \mathbb{1}_{\{x \geq a\}}$. Luego de derivar obtenemos:

$$\theta_a'(x) = 3\theta_a^{2/3}(x), \qquad \theta_a''(x) = 6\theta_a^{1/3}(x).$$

Por la fórmula de Itô, tenemos:

$$d\left(\theta_a(B(t))\right) = 3\theta_a^{2/3}(B(t))dB(t) + 3\theta_a^{1/3}(B(t))dt.$$

Además, $\theta_a(B(0)) = 0$. Por consiguiente, $\theta_a(B(t))$ es una solución de la Ecuación (4.23) para cualquier $a > 0$. Esto demuestra que la Ecuación (4.23) tiene infinitas soluciones.

4.3.2. La Desigualdad de Bellman-Gronwall.

En esta subsección, demostraremos dos desigualdades que serán empleadas en la siguiente subsección. La primera, es conocida como la desigual de Bellman-Gronwall, el cual abarca la siguiente situación. Supongamos que tenemos la siguiente función $\phi \in L^1[a, b]$ el cual satisface la siguiente desigualdad

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t \phi(s)ds, \quad \textit{para todo } t \in [a, b], \tag{4.24}$$

donde $f \in L^1[a, b]$ y β es una constante positiva.

Dado la Ecuación (4.24), ¿Cómo podemos estimar ϕ en términos de f y β?

Definamos una nueva función g de la siguiente manera:

$$g(t) = \beta \int_a^t \phi(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo y por la Ecuación (4.24), tenemos:

$$g'(t) = \beta\phi(t) \leq \beta f(t) + \beta g(t), \quad \textit{casi en todas partes}.$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$g'(t) - \beta g(t) \leq \beta f(t).$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por el factor integrante $e^{-\beta t}$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\beta t}g(t)\right) = e^{-\beta t}\left(g'(t) - \beta g(t)\right) \leq \beta f(t)e^{-\beta t}$$

el cual, luego de integrar desde a hacia t, se logra obtener:

$$e^{-\beta t}g(t) \leq \beta \int_a^t f(s)e^{-\beta s}ds.$$

Por lo tanto,

$$g(t) \leq \beta \int_a^t f(s)e^{\beta(t-s)}ds.$$

Por consiguiente, por la Ecuación (4.24),

$$\phi(t) \leq f(t) + g(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t f(s)e^{\beta(t-s)}ds.$$

Lema 4.1 ***(Desigualdad de Bellman-Gronwall)*** *Supongamos que* $\phi \in L^1[a, b]$ *satisface la Ecuación (4.24). Entonces:*

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t f(s)e^{\beta(t-s)}ds.$$

En particular, cuando $f(t)$ es una constante α, tenemos:

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\beta(t-a)}, \quad \textit{para todo } a \leq t \leq b. \tag{4.25}$$

Para la segunda desigualdad necesaria en la siguiente subsección, sea $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $L^1[a, b]$ los cuales satisfacen la siguiente desigualdad

$$\phi_{n+1}(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t \theta_n(s)ds, \quad \textit{para todo } a \leq t \leq b. \tag{4.26}$$

donde $f \in L^1[a, b]$ y β es una constante positiva.

Dado la Ecuación (4.26), ¿Cómo podemos estimar θ_{n+1} en términos de f, β, n y θ_1?

El artificio empleado para demostrar el Lema 4.1 no puede ser empleado para este caso. En realidad, necesitamos iterar la desigualdad dada y aplicar inducción, el cual también puede ser empleado para demostrar el Lema 4.1.

Haciendo $n = 1$ en la Ecuación (4.26), obtenemos:

$$\theta_2(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t \theta_1(s)ds. \tag{4.27}$$

Haciendo $n = 1$ en la Ecuación (4.26), y empleando la Ecuación (4.27) obtenemos:

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &\leq f(t) + \beta \int_a^t \theta_2(s)ds \\ &\leq f(t) + \beta \int_a^t f(s)ds + \beta^2 \int_a^t \left(\int_a^s \theta_1(u)du \right) ds. \end{aligned}$$

Al intercambiar el orden de integración obtenemos:

$$\theta_3(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t f(s)ds + \beta^2 \int_a^t (t-u)\theta_1(u)du.$$

Análogamente, tenemos:

$$\theta_4(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t f(s)ds + \beta^2 \int_a^t (t-u)f(u)du + \beta^3 \int_a^t \frac{(t-u)^2}{2}\theta_1(u)du.$$

En general, podemos emplear la inducción para demostrar que para cualquier $n \geq 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}(t) &\leq f(t) + \beta \int_a^t f(s)ds + \beta^2 \int_a^t (t-u)f(u)du \\ &+ \cdots + \beta^{n-1} \int_a^t \frac{(t-u)^{n-2}}{(n-2)!} f(u)du \\ &\beta^n \int_a^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\theta_1(u)du. \end{aligned}$$

Donde se tiene que tener en cuenta que $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\beta^k (t-u)^k}{k!} \leq e^{\beta(t-u)}$. Por lo tanto, podemos simplificar la estimación de $\theta_{n+1}(t)$ por

$$\theta_{n+1}(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t f(u)e^{\beta(t-u)}du + \beta^n \int_a^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\theta_1(u)du. \quad (4.28)$$

Esto prueba el siguiente Lema.

Lema 4.2 *Sea $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $L^1[a, b]$ las cuales satisfacen la Ecuación (4.26). Entonces, la Ecuación (4.28) se verifica para cualquier $n \geq 1$. En particular, cuando $f(t) \equiv \alpha$ y $\theta_1(t) \equiv c$ sean constantes, entonces la siguiente desigualdad se verifica para cualquier $n \geq 1$:*

$$\theta_{n+1}(t) \leq \alpha e^{\beta(t-a)} + c\frac{\beta^n(t-a)^n}{n!}. \quad (4.29)$$

4.3.3. Teorema de Existencia y Unicidad.

Sea B un movimiento Browniano y $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$ una filtración, los cuales satisfacen las condiciones dadas al inicio de la Subsección 1.10.2, i.e., $B(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t y $B(t) - B(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ para cualquier $s \leq t$.

Sean $\sigma(t,x)$ y $f(t,x)$ funciones medibles de $t \in [a, b]$ y $x \in \mathbb{R}$. Consideremos la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB(t) + f(t, X_t)dt, \quad X_a = \xi,$$

el cual debe ser interpretado como la ecuación integral estocástica (EIE)

$$X_t = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s)dB(s) + \int_a^t f(s, X_s)ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (4.30)$$

Primero necesitamos explicar el significado, que un proceso estocástico X_t es una solución de la EIE en la Ecuación (4.30).

Definición 4.1 *Un conjunto de procesos estocásticos medibles X_t, para todo $a \leq t \leq b$, es llamado una solución de una EIE en la Ecuación (4.30) si este satisface las siguientes condiciones:*

1. *El proceso estocástico* $\sigma(t, X_t) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])^2$, *de modo que* $\int_a^t \sigma(s, X_s)dB(s)$ *es una integral de Itô para cada* $t \in [a, b]$;

2. *Casi todos los caminos aleatorios del proceso estocástico* $f(t, X_t)$ *pertenecen a* $L^1[a, b]$;

3. *Para cada* $t \in [a, b]$. *La Ecuación (4.30) se verifica casi seguramente.*

Tal como se indico en los ejemplos de la Subsección 1.12.1, necesitamos imponer condiciones sobre las funciones σ y f de modo que podamos asegurar la existencia de una única solución no explosiva de la EIE en la Ecuación (4.30). Enunciaremos estas condiciones en las dos definiciones siguientes.

Definición 4.2 *Una función medible* $g(t,x)$ *sobre* $[a, b] \times \mathbb{R}$ *se dice que satisface la condición de Lipschitz en* x, *si existe una constante* $K > 0$ *tal que:*

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x - y|, \quad \text{para todo} a \leq t \leq b, \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.3 *Una función medible* $g(t,x)$ *sobre* $[a, b] \times \mathbb{R}$ *se dice que satisface la condición de crecimiento lineal en* x, *si existe una constante* $K > 0$ *tal que:*

$$|g(t,x)| \leq K(1 + |x|), \quad \text{para todo} a \leq t \leq b, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.31}$$

La siguiente desigualdad, siempre se verifica para todo $x \geq 0$:

$$1 + x^2 \leq (1 + x)^2 \leq 2(1 + x^2).$$

[2] $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b]$ denota el espacio de procesos estocásticos $f(t, \omega)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $f(t)$ es adaptado en la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.

b) $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ casi seguramente

Por consiguiente, la condición en la Ecuación (4.31) es equivalente a la existencia de una constante $C > 0$ tal que:

$$|g(t,x)|^2 \leq C(1+x^2), \quad para\, todo a \leq t \leq b,\; x \in \mathbb{R}.$$

Lema 4.3 *Sea $\sigma(t,x)$ y $f(t,x)$ funciones medibles sobre $[a,\, b] \times \mathbb{R}$, que satisface la condición de Lipschitz en x. Supongamos que ξ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_a$-medible con $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$. Entonces, la ecuación integral estocástica en la Ecuación (4.30) tiene al menos una solución continua X_t.*

Prueba. *Sea X_t e Y_t dos soluciones continuas de la EIE en la Ecuación (4.30). Haciendo $Z_t = X_t - Y_t$. Entonces Z_t es un proceso estocástico continuo y*

$$Z_t = \int_a^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\, dB(s) + \int_a^t (f(s,X_s) - f(s,Y_s))\, ds.$$

Empleando la desigualdad $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} Z_t^2 \leq 2\,[(&\int_a^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\, dB(s)\Big)^2 \\ &+ \left(\int_a^t (f(s,X_s) - f(s,Y_s))\, ds\right)^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Por la condición de Lipschitz de la función $\sigma(t,x)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_a^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\, dB(s)\right)^2 &= \int_a^t \mathbb{E}\left[(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))^2\right] ds \\ &\leq K^2 \int_a^t \mathbb{E}(Z_s^2) das. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Ahora, por la condición de Lipschitz para la función $f(t,x)$ tenemos:

$$\left(\int_a^t (f(s,X_s) - f(s,Y_s))\,ds\right)^2 \leq (t-a)\int_a^t (f(s,X_s) - f(s,Y_s))^2\,ds$$

$$\leq (b-a)K^2 \int_a^t Z_s^2 ds. \qquad (4.34)$$

Al incorporar las Ecuaciones (4.33) y (4.34) en la Ecuación (4.32) obtenemos:

$$\mathbb{E}(Z_t^2) \leq 2K^2(1+b-a)\int_a^t \mathbb{E}(Z_s^2)ds.$$

Por la desigualdad de Bellman-Gronwall en el Lema 4.1, tenemos $\mathbb{E}(Z_t^2) = 0$ *para todo* $t \in [a, b]$. *Por lo tanto* $Z_t = 0$ *casi seguramente para cada* $t \in [a, b]$. *Sea* $\{r_1, r_2, \ldots\}$ *un conteo de los números racionales en el intervalo* $[a, b]$. *Entonces, para cada* r_n, *existe* Ω_n *tal que* $P(\Omega_n) = 1$ *y* $Z_{r_n}(\omega) = 0$ *para todo* $\omega \in \Omega_n$. *Sea* $\Omega' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. *Entonces* $P(\Omega') = 1$ *y para cada* $\omega \in \Omega'$, *tenemos* $Z_{r_n}(\omega) = 0$ *para todo* n. *Como* Z_t *es un proceso estocástico continuo, existe un* Ω'' *tal que* $P(\Omega'') = 1$ *y para cada* $\omega \in \Omega''$, *la función* $Z_t(\omega)$ *es una función continua de* t. *Finalmente, sea* $\Omega_0 = \Omega' \bigcap \Omega''$. *Entonces* $P(\Omega_0) = 1$ *y para cada* $\omega \in \Omega_0$, *la función* $Z_t(\omega)$ *es una función continua que es nula para todo los número racionales en* $[a, b]$. *De esto se concluye que para cada* $\omega \in \Omega_0$ *la función* $Z_t(\omega)$ *es 0 para todo* $t \in [a, b]$. *Por lo tanto,* X_t *e* Y_t *son ambos el mismo proceso estocástico continuo.* □

Teorema 4.1 *Sea* $\sigma(t,x)$ *y* $f(t,x)$ *funciones medibles sobre* $[a, b] \times \mathbb{R}$ *satisfaciendo las condiciones de Lipschitz y de crecimiento lineal en* x. *Supongamos que* ξ *es una variable aleatoria* $\mathcal{F}_a$*-medible con* $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$. *Entonces la ecuación integral estocástica en la Ecuación (4.30) tiene una única solución continua* X_t.

Prueba. *La unicidad de la solución continua se concluye del Lema 4.3. Procedemos a demostrar la existencia de una solución.*

De la hipótesis, existe una constante $C > 0$ tal que las siguientes desigualdades se verifican para todo $t \in [a, b]$ e $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C|x-y|, \qquad |f(t,x) - f(t,y)| \leq C|x-y|; \tag{4.35}$$

$$|\sigma(t,x)|^2 \leq C(1+x^2), \qquad |f(t,x)|^2 \leq C(1+x^2). \tag{4.36}$$

De manera similar al procedimiento iterativo para ecuaciones diferenciales ordinarias se procederá para producir una solución de la EIE en la Ecuación (4.30). Definimos la sucesión $\{X_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de procesos estocásticos continuos inductivamente haciendo $X_t^{(1)} \equiv \xi$ y para $n \geq 1$,

$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB(s) + \int_a^t f(s, X_s^{(n)})ds. \tag{4.37}$$

Donde $X_t^{(1)}$ pertenece a $L^2([a, b] \times \Omega)$[3].Supongamos por inducción que el proceso estocástico $X_t^{(n)}$ pertenece a $L^2([a, b] \times \Omega)$. Entonces, por la condición de crecimiento lineal en la Ecuación (4.36),

$$\mathbb{E}\int_a^b \sigma(t, X_t^{(n)})^2 dt \leq C(b-a) + C\mathbb{E}\int_a^b |X_t^{(n)}|^2 dt < \infty;$$

$$\int_a^b |f(s, X_s^{(n)})| ds \leq \sqrt{C(b-a)} \left(\int_a^b (1 + |X_t^{(n)}|^2) dt \right)^{1/2} < \infty, \quad c.s.$$

Por la tanto la primera integral en la Ecuación (4.37) es una integral de Itô como la definida en la Sección 1.10, mientras que la segunda integral es una

[3] Ver Nota 3.1

integral de Lebesgue en t para casi todo $\omega \in \Omega$. Así $X_t^{(n+1)}$ es un proceso estocástico continuo y es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Además, como $|a+b+c|^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, tenemos:

$$\left|X_t^{(n+1)}\right|^2 \leq 3\left[\xi^2+\left(\int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB(s)\right)^2+\left(\int_a^t f(s, X_s^{(n)})ds\right)^2\right], \tag{4.38}$$

el cual junto con la condición de crecimiento lineal implica que:

$$\mathbb{E}\int_a^b \left|X_t^{(n+1)}\right|^2 dt < \infty.$$

Esto demuestra que el proceso estocástico $X_t^{(n+1)}$ pertenece a $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Así, por inducción tenemos una sucesión $\{X_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de procesos estocásticos continuos en el espacio $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$.

Ahora, calculemos $\mathbb{E}\left(\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|^2\right)$. Por conveniencia, sea

$$Y_t^{(n+1)}=\int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB(s), \qquad Z_t^{(n+1)}=\int_a^t f(s, X_s^{(n)})ds.$$

Entonces $X_t^{(n+1)}=\xi+Y_t^{(n+1)}+Z_t^{(n+1)}$. Como $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left(\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|^2\right)\\ &\leq 2\left\{\mathbb{E}\left(\left|Y_t^{(n+1)}-Y_t^{(n)}\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\left|Z_t^{(n+1)}-Z_t^{(n)}\right|^2\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.39}$$

Por la condición de Lipschitz en la Ecuación (4.35),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}\right|^2\right) &= \int_a^t \mathbb{E}\left(\left|\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})\right|^2\right) ds \\
&\leq C^2 \int_a^t \mathbb{E}\left(\left|Y_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right) ds. \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Análogamente, por la condición de Lipschitz en la Ecuación (4.35) tenemos:

$$\left|Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}\right|^2 \leq (b-a)C^2 \int_a^t \left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2 ds. \qquad (4.41)$$

De las Ecuaciones (4.39), (4.40), y (4.41) implica que para cualquier $n \geq 2$,

$$\mathbb{E}\left(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right) \leq 2C^2(1+b-a) \int_a^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right) ds.$$

Por la condición de crecimiento lineal en la Ecuación (4.36),

$$\mathbb{E}\left(\left|X_t^{(2)} - X_t^{(1)}\right|^2\right) \leq 2C^2(1+b-a) \int_a^t \left(1 + \mathbb{E}(\xi^2)\right) ds.$$

Entonces por el Lema 4.2

$$\mathbb{E}\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq \rho \frac{\beta^n (t-a)^n}{n!}, \qquad (4.42)$$

donde $\rho = 1 + \mathbb{E}(\xi^2)$ y $\beta = 2C^2(1+b-a)$. Donde para cualquier $t \in [a, b]$,

$$\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right| \leq \left|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}\right| + \left|Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}\right|.$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\sup_{a \leq t \leq b} \left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right| \leq \sup_{a \leq t \leq b} \left|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}\right| + \sup_{a \leq t \leq b} \left|Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}\right|,$$

lo cual implica que

$$\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|>\frac{1}{n^2}\right\}$$
$$\subset\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|Y_t^{(n+1)}-Y_t^{(n)}\right|>\frac{1}{2n^2}\right\}\bigcup\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|Z_t^{(n+1)}-Z_t^{(n)}\right|>\frac{1}{2n^2}\right\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|>\frac{1}{n^2}\right\} &\leq P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|Y_t^{(n+1)}-Y_t^{(n)}\right|>\frac{1}{2n^2}\right\}\\ &+P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|Z_t^{(n+1)}-Z_t^{(n)}\right|>\frac{1}{2n^2}\right\}.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Aplicando la ***Desigualdad de Dobb***[4] *y empleando las Ecuaciones (4.35) y (4.42) obtenemos:*

$$\begin{aligned}P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|Y_t^{(n+1)}-Y_t^{(n)}\right|>\frac{1}{2n^2}\right\} &\leq 4n^2\mathbb{E}\left(\left|Y_b^{(n+1)}-Y_b^{(n)}\right|^2\right)\\ &\leq 4n^2C^2\int_a^b\mathbb{E}\left(\left|X_t^{(n)}-X_t^{(n-1)}\right|^2\right)\\ &\leq 4n^2C^2\rho\frac{\beta^{n-1}(b-a)^n}{n!}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

Por la Ecuación (4.35) tenemos:

$$\left|Z_t^{(n+1)}-Z_t^{(n)}\right|^2\leq C^2(b-a)\int_a^t\left|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}\right|^2ds,$$

[4]**(Desigualdad de Dobb.)** Si X_t es una martingala continua por la derecha, entonces para cualquier $\epsilon>0$,

$$P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}|X_t|\geq\epsilon\right\}\leq\frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}|X_b|$$

lo cual implica que:

$$\sup_{a\leq t\leq b}\left|Z_t^{(n+1)}-Z_t^{(n)}\right|^2\leq C^2(b-a)\int_a^t\left|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}\right|^2 ds,$$

De esta desigualdad y la Ecuación (4.42) se obtiene:

$$\begin{aligned}P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|Z_t^{(n+1)}-Z_t^{(n)}\right|>\frac{1}{2n^2}\right\} &\leq 4n^4\mathbb{E}\left[\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|Z_t^{(n+1)}-Z_t^{(n)}\right|^2\right\}^2\right]\\ &\leq 4n^4C^2(b-a)\rho\frac{\beta^{n-1}(b-a)^n}{n!}. \qquad (4.45)\end{aligned}$$

Entonces, de las Ecuaciones (4.43), (4.44), y (4.45) se obtiene:

$$P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|>\frac{1}{2n^2}\right\}\leq 2\rho\frac{n^4\beta^n(b-a)^n}{n!}.$$

Donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\beta^n(b-a)^n}{n!}$ *es covergente. Por lo tanto, por el Lema de Borel-Cantelli*[5]*, tenemos:*

$$P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|>\frac{1}{n^2}\ infinitas\ veces\right\}=0.$$

Esto implica que la serie $\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right)$ *converge uniformemente sobre* $[a,\ b]$ *con probabilidad 1, i.e.,* X_t*. Además la n-estima suma parcial de esta series es* $X_t^{(n)}$*. Por lo tanto, con probabilidad 1,*

$$\lim_{n\to\infty}X_t^{(n)}=X_t,\quad uniformemente\ para\ t\in[a,\ b].$$

[5]**(Lema de Borel-Cantelli.)** Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de eventos tal que $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$. Entonces $P(A_n\ infinitas\ veces)=0$.

Donde el proceso estocástico X_t es continuo y adaptado para la filtración $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$. Además, por la Ecuación (4.42) implica que

$$\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\| \leq \sqrt{\rho}\frac{\beta^{n/2}(b-a)^{n/2}}{\sqrt{n!}},$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en $L^2(\Omega)$. Esta desigualdad implica que para cada t, la serie $\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right)$ converge en $L^2(\Omega)$ y

$$\|X_t\| \leq \|\xi\| + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\rho}\frac{\beta^{n/2}(b-a)^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Por consiguiente, se concluye que $\mathbb{E}\int_a^b |X_t|^2 dt < \infty$. Por lo tanto, el proceso estocástico X_t pertenece al espacio $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega) \subset \mathcal{L}^2_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$, dado que X_t satisface las condiciones de la Definición 4.1. Además, cuando $n \longrightarrow \infty$ ingresa a la integral en la Ecuación (4.37) se obtiene:

$$X_t = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s)dB(s) + \int_a^t f(s, X_s)ds.$$

Por lo tanto X_t es una solución de la Ecuación (4.30) y la prueba es completada. □

4.4. Descripción del Proceso de Itô

En la matemática formal de las finanzas en tiempo continuo[6], los modelos de caminos aleatorios se encuentran por lo general, formulados en términos de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu' dt + \sigma dB_t \quad donde \quad dB_t \quad es \quad N(0, dt) \tag{4.46}$$

De los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se puede concluir que una variable S el cual satisface esta ecuación es llamado un

[6]Merton, R., (1990). **Continuous - Time Finance**, Blackwell

Proceso de Itô. El número μ' es llamado la **tasa de retorno instantáneo**. Esta formulación, resulta equivalente a la siguiente expresión:

$$\frac{dS_t}{S_t} = e^{\mu dt+\sigma dB_t} - 1 \quad donde \quad dB_t \quad es \quad N(0,dt)$$

En realidad, ellas son bastantes diferentes. Sin embargo, demostraremos que ellas son equivalentes, mediante una conveniente interpretación de la variable μ', el cual aparece en la ecuación (4.46). Con la finalidad de lograr este objetivo, es necesario un resultado fundamental de la teoría del cálculo estocástico, el cual fue demostrado en la sección anterior.

Ahora estamos listos para demostrar el teorema principal de este capitulo.

Teorema 4.2 *Para una variable aleatoria S,*

$$\frac{dS_t}{S_t} = e^{\mu dt+\sigma dB_t} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu' dt + \sigma dB_t$$

donde dB_t es $N(0,dt)$ y $\mu' = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$.

En este caso, S sigue un Movimiento Geométrico Browniano[7]*. El logaritmo de $\frac{S(1)}{S(0)}$ está normalmente distribuido con media μ y desviación estándar σ. μ' es la anualidad instantánea del retorno esperado, μ es la anualidad continuamente compuesta del retorno esperado y σ es la desviación estándar de estos retornos. En cualquier horizonte de tiempo t, S_t esta lognormalmente distribuido con:*

$$S_t = S_0 \times e^{\mu t+\sigma B_t} \quad donde \quad B_t \, es \, N(0,t) \tag{4.47}$$

Prueba. *Primero supongamos que $\frac{dS_t}{S_t} = \mu' dt + \sigma dB_t$. Aplicando el* ***Lema de Itô****, para $f = \log(S_t)$ obtenemos:*

[7]Camino aleatorio lognormal

$$df = \sigma S_t f' dB_t + \left(\alpha S_t f' + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''\right) dt$$

Sustituyendo $f' = \dfrac{1}{S_t}$ *y* $f'' = -\dfrac{1}{S_t^2}$ *obtenemos:*

$$\begin{aligned} df &= \sigma dB_t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt \\ &= \sigma d_t + \mu dt \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} df &= f(S_{t+dt}) - f(S_t) \\ &= \log(S_{t+dt}) - \log(S_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df &= \log\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right) \\ &= \log\left(\frac{dS_t}{S_t} + 1\right) \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos:

$$\log\left(\frac{dS_t}{S_t} + 1\right) = \sigma dB_t + \mu dt$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = e^{\mu dt + \sigma dB_t} - 1$$

Lo cual demuestra la condición necesaria del teorema, para demostrar la condición suficiente, supongamos que $\dfrac{dS_t}{S_t} = e^{\mu dt + \sigma dB_t} - 1$. *De nuevo, sea* $f(S_t) = \log(S_t)$. *Por consiguiente:*

$$\begin{aligned} df &= \log\left(\frac{dS_t}{S_t} + 1\right) \\ &= \sigma dB_t + \mu dt \end{aligned}$$

Aplicando el Lema de Itô, con:

$$S_t(f) = e^f = e^{\log(S_t)} = S_t$$

De donde, se observa que $S_t = S'_t = S''_t = e^f$. *Por el Lema de Itô, tenemos:*

$$
\begin{aligned}
dS_t &= \sigma S'_t dB_t + \left(\mu S' + \frac{1}{2}\sigma^2 S''\right) dt \\
&= \sigma S_t dB_t + \left(\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t\right) \\
dS_t &= \sigma S_t dB_t + \alpha S_t dt
\end{aligned}
$$

Dividiendo por S_t *obtenemos:*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha dt + \sigma dB_t$$

Lo cual completa la prueba del teorema. □

5

El Modelo de Black-Scholes-Merton

En 1973, el profesor estadounidense Myron Scholes junto con su colega Robert Merton, fueron premiados por su trabajo sobre el análisis de las opciones financieras, el cual es un instrumento derivado que mueve alrededor de $150,000 millones de dólares al año. Ellos recibieron el premio Nobel por el estudio sobre el riesgo de los derivados financieros y particularmente, sobre su valoración en una aplicación sobre las opciones financieras. La opción es un contrato financiero derivado de un activo cualquiera, que otorga a quien lo posee el poder de comprar o vender este activo en un periodo de tiempo determinado a un precio establecido con anterioridad. Esto le permite a los agentes realizar, en el futuro, una negociación sobre la cual no se tiene mucha incertidumbre en el presente; al margen, obviamente, de la generada por la volatilidad[1] del precio del activo involucrado en la transacción. Al final del proceso, una de las partes se beneficiará más de este pacto, de acuerdo con el precio del activo en el momento de la transacción final, en comparación con el precio acordado. Sin embargo, este mismo mercado ofrece alternativas para cubrirse de una eventual gran diferencia entre los precios que se dan efectivamente y los que se esperaban. En efecto, un agente económico puede hacer dos acciones simultáneas: comprometerse a comprar un activo financiero en una fecha determinada y vender otro desde ahora, con entrega en esa fecha. Con esta operación, llamada cobertura, busca que la pérdida o ganancia neta sea casi cero.

5.1. Economía Financiera

A continuación se definirán algunos términos financieros con la finalidad de la comprensión del trabajo, en el que se analizarán modelos para **mercados financieros**, los activos que se negocian en ellos y en particular, los derivados financieros (Opciones Financiera). Para más detalle en las definiciones así como ejemplos enriquecedores ver [29].

1. **Activo.** Es cualquier posesión que pueda producir beneficios económicos, que pueden ser acciones, derivados, bonos, etc. Otros ejemplos de activos son los índices de los mercados, por ejemplo el índice Merval, o el Nasdaq 100. Otros tipos de activo son las monedas extranjeras.

2. **Derivado.** Es un instrumento financiero, cuyo precio depende, o se deriva, del precio de otro activo.

3. **Portafolio.** es un conjunto de activos. Los grandes inversores poseen portafolios con varios activos tanto para especular con más ganancias, como para respaldarse ante la eventual baja de alguno de ellos.

[1]También conocida como la Desviación Estándar, es una medida de la variabilidad del activo subyacente, i.e., proporciona la dispersión de los posibles precios futuros de una opción; a mayor dispersión de los precios, mayor será el precio de la opción de compra.

4. **Costos de Transacción.** Es el costo de realizar una operacıon. Además, depende si es una transacción de un activo subyacente o un derivado, si se trata de una compra o una venta, de la cantidad del inversor, etc. En general trabajaremos sin estos costos para facilitar cálculos.

5. **Posición de la Inversión.** Se dice que en una inversión se toma una posición **long** cuando se compra y se dice que se toma una posición **short** cuando se vende, aún cuando no se tenga posesión del activo, lo cual no es intuitivo, pero totalmente válido en el mercado.

6. **Tasa de Interés Libre de Riesgo.** A nivel internacional la tasa libre de riesgo son los bonos del tesoro del gobierno de Estados Unidos (Treasury Bond). A nivel del Perú, la tasa libre de riesgo, es el precio de los bonos soberanos emitidos por la República del Perú.

7. **Rentabilidad.** Es la ganancia relativa de una inversión, es decir, si llamamos I_0 a la inversión inicial, y I_T a lo que se obtiene a un tiempo T, la rentabilidad R es:

$$R = \frac{I_T - I_0}{I_0}$$

mientras que en tiempo continuo:

$$R = \ln\left(\frac{I_T}{I_0}\right)$$

Oservación 5.1 *Algunos activos pagan periódicamente* ***dividendos****, que en general están relacionados con las ganancias de las empresas. El precio de un derivado sobre un activo que pague dividendos se verá afectado por estos pagos (el precio tiende a bajar, ya que los dividendos se capitalizan). Hay muchos tipos de estructura de pagos de dividendos que tienen que ver con cada cuanto se paga, si el pago es constante o no, etc.*

En cuanto a los **traders** o **negociadores** del mercado se pueden caracterizar en tres grupos.

1. **Hedgers.** También conocidos como los **replicadores** o **cobertores** son aquellos que intentan reducir el riesgo al mínimo y tratan de no exponerse a los cambios adversos de los valores de los activos. En general conforman portfolios con activos en una posición (long o short) y algún derivado sobre estos en la otra. Así, si el precio del activo se mueve de manera muy desfavorable, está la opción, por ejemplo, que amortigua la pérdida.

2. **Especuladores.** A diferencia de los hedgers, estos intentan asumir una posición firme en el mercado. Apuestan tanto a la suba como a la baja del precio.

3. **Arbitradores.** Son quienes, buscan fallas en el sistema. En general involucra hacer transacciones en más de un mercado, pues en la práctica no es instantánea la información. Un arbitrador, por ejemplo, podría comprar acciones de una empresa en Nueva York e inmediatamente venderlas en Londres y ganar con la tasa de cambio.

5.1.1. Derivados Financieros.

A continuación se detallará un tipo especial de derivado financiero, cuya valoración y aplicación es el objetivo de la presente tesis. Un **derivado financiero** o producto derivado, o simplemente derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende de otros activos, como por ejemplo una acción, un commodity, o hasta de otro derivado. Se usan para **transferir riesgo**. Como por ejemplo los futuros y las opciones que se negocian activamente hoy en día en la mayoría de los mercados de valores. Otros derivados como los forwards y algunos tipos de opciones se negocian en cambio **over-the-counter** ó **sobre el escritorio**, es decir directamente entre instituciones financieras, corporaciones y particulares. Se llamara **payoff** de un derivado, de un activo o de un portafolio, al resultado final de la inversión.

A continuación se describirán algunos tipos de derivados más usados, los cuales son los siguientes:

1. **Contrato Forward.** Es un acuerdo para comprar o vender un activo específico de precio S en un cierto tiempo t llamado tiempo de maduración o de expiración por un

precio K, llamado precio de ejercicio. Normalmente estos contratos no se realizan en los mercados financieros, sino over-the-counter, como por ejemplo un banco con alguno de sus clientes importantes. Una parte asume una posición **long** acordando comprar el activo, la otra una posición **short** acordando venderlo en un tiempo t a un precio K sin costo inicial. El **payoff** en este caso es $S_t - K$ para la posición long y $K - S_t$ para la short, donde S_t es el valor del activo a tiempo t. Es decir en este caso hay una de las partes que gana y otra que pierde la misma cantidad. Los contratos forward son usados comúnmente sobre monedas extranjeras para cubrirse de los riesgos de grandes subidas o bajadas de los precios[2].

2. **Contrato Future.** Es análogo al forward con la diferencia que el future se negocia en el mercado, con los tecnicismos que esto representa. Por ejemplo, hay cotas para el tamaño del contrato, tiempos predeterminados de entrega. Otra diferencia es que el contrato future tiene un depósito o prima que el comprador tiene que hacer.

3. **Opción.** Es un contrato que le da a su poseedor el **derecho, pero no la obligación**, de negociar un **activo subyacente** a un precio de mercado S, por un **precio de ejercicio** K en una **fecha de expiración** t.

Este ultimo tipo de contrato, es el que se abordara en los subsiguientes secciones y capítulos. Con la finalidad de describir su análisis, así como también sus aplicaciones.

[2]Una compañía japonesa dedicada al transporte de petróleo por vía maritima, decide comprar un nuevo buque petrolero inglés por una cantidad fija de Libras (moneda inglesa) a pagar en un año. Tomando una posición larga en un contrato forward sobre la moneda inglesa (a pagar en Yenes) se puede eliminar el riesgo de una suba de la Libra Esterlina

5.2. Opciones Financieras.

Las opciones[3] son, en su fundamento, diferentes a los contratos a plazo y de futuros. Una opción da a su poseedor el derecho a hacer algo. El poseedor de la opción no esta obligado a ejercer ese derecho, i.e., es un contrato que le da a su poseedor el **derecho, pero no la obligación**, de negociar un activo. Por el contrario, en un contrato a plazo o de futuros, las dos partes están sometidas a una obligación. Aunque al firmar un contrato a plazo o de futuros, esté no tiene ningún costo (excepto por los requisitos de garantías), la compra de una opción requiere de un pago inicial.

5.2.1. Posiciones de una Opción Financiera.

De acuerdo al precio de la opción y al precio de ejercicio se tiene cuatro posiciones:

1. **Dentro del Dinero** (*In the Money*). Se dice que una opción está dentro del dinero, cuando el precio de mercado del activo subyacente S es mayor que el precio de ejercicio K en el caso de las opciones de compra ($S > K$), o cuando esté por debajo de dicho precio, en el caso de opciones de venta ($S < K$).

2. **En el Dinero** (*At the Money*). Se dice que una opción está en el dinero, cuando el precio del mercado del activo subyacente S es igual al precio de ejercicio K en el caso de opciones de compra y venta ($S = K$).

3. **Fuera del Dinero** (*Out of the Money*). Se dice que una opción está fuera del dinero, cuando el precio de mercado del activo subyacente S es menor que el precio de ejercicio K en el caso de opciones de compra ($S < K$), o por arriba de dicho precio en el caso de opciones de venta ($S > K$). Por consiguiente, la opción no tiene posibilidades de ejercerse.

[3]Las opciones financieras tuvieron sus inicios en los países anglosajones, aunque la primera referencia escrita esta en español, y le pertenece al judío español Juan de la Vega (1688), **Confusión de Confusiones**.

5.2.2. Formas de ejercer una Opción Financiera.

Existen dos formas de ejercer una opción financiera, las cuales son:

1. **Liquidación en efectivo**. Se da cuando al ejercer la opción, el emisor de ésta entrega en efectivo la diferencia entre el precio de ejercicio K y el valor de mercado del activo subyacente[4] S.

2. **Liquidación es especie**. Se da cuando al ejercer la opción, el emisor de ésta recibe o entrega la diferencia entre el precio de ejercicio K y el valor del mercado del activo subyacente S, de acuerdo con lo establecido en el contrato de la opción.

5.2.3. Tipos de Riesgos.

Al invertir en opciones, el poseedor de ellas (el inversionista) adquiere un gran riesgo, estos riesgos se clasifican de la siguiente manera:

1. **Riesgo Específico**. Es la componente del riesgo asociada con una posición simple, es decir, afecta sólo a un sector del mercado.

2. **Riesgo no Específico**. Se le llama también riesgo sistémico, el cual es asociado con factores que afectan a todo el mercado en general.

3. **Riesgo de Portafolio**. Es la varianza de la ganancia, es decir, es la diferencia entre la ganancia real y la ganancia esperada.

En conclusión, una opción es un contrato realizado bajo las siguientes condiciones:

1. Concede al poseedor un derecho, más no una obligación.

2. El poseedor obtiene una garantía, es decir, un activo subyacente.

3. Posee una fecha de vencimiento establecida de antemano, conocida como la fecha de expiración.

[4]El valor de mercado es el valor o precio de un bien indicado por las cotizaciones de mercado.

4. Al expirar lleva consigo un precio de ejercicio establecido de antemano.

En los contratos de opciones intervienen dos partes:

a) La parte que compra la opción es quien paga una prima por la adquisición de ésta, y a su vez obtiene un derecho.

b) La parte que emite o vende la opción es quien recibe una prima por este hecho, y a su vez adquiere una obligación.

5.2.4. Tipos de Opciones Financieras.

Las opciones financieras pueden ser de dos tipos:

1. La **opción de compra** (*Call Option*). Da a su poseedor el derecho, más no la obligación a comprar un activo en una fecha determinada a un precio determinado.

2. La **opción de venta** (*Put Option*). Da a su poseedor el derecho, más no la obligación a vender un activo en una fecha determinada a un precio determinado.

La fecha especificada en el contrato se conoce como **Fecha del Vencimiento** (expiration date, exercise date, strike date, o maturity). El precio especificado en el contrato se conoce como **Precio de Ejercicio** (exercise price o strike price).

Además las opciones se clasifican de acuerdo al tiempo en que pueden ser ejercidas, indistintamente con la ubicación geográfica, en:

1. **Opciones Europeas.** Son opciones que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento.

2. **Opciones Americanas.** Son opciones que pueden ser ejercidas en cualquier momento hasta su fecha de vencimiento.

La mayoría de las opciones negociadas en los mercados de opciones son las Opciones Americanas. Sin embargo, las Opciones Europeas son generalmente más fáciles de analizar que las Opciones Americanas, y algunas propiedades de éstas últimas son frecuentemente deducidas de sus análogas las Europeas.

El **payoff**, de una opción de compra es máx$\{S_t - K, 0\}$, dado que, si en la fecha de expiración se tiene que $S_t > K$,se ejerce a K y se vende a S_t, lo que da una ganancia de $S_t - K$, caso contrario la opción no se ejerce y el payoff es 0. El **payoff** de una opción de venta es máx$\{K - S_t, 0\}$, se describe de manera análoga. El hecho de que uno tenga el derecho y no la obligación es lo que hace difícil la valuación de una opción. Las opciones recién definidas se denominan **vanilla** y son las más simples.

5.2.5. Objetivo de las Opciones.

Las opciones financieras son instrumentos que tienen básicamente los siguientes objetivos:

Nivel Microeconómico.

1. Es un producto con el cual un inversionista puede protegerse del riesgo. Como por ejemplo las fluctuaciones de los precios de las acciones en el futuro pero manteniendo la posibilidad de movimientos favorables en los mismos.
2. Un inversionista las puede emplear para invertir y/o especular, i.e., para tratar de hacer una ganancia cuando se tiene la creencia de un movimiento favorable en los precios.

Nivel Macroeconómico.

1. Formación más eficiente de precios de valores subyacentes.
2. Mejorar los niveles de liquidez en el mercado.
3. Ampliar oportunidades de arbitraje.
4. Permitir perfiles de riesgo y rendimientos controlables

Uso de las Opciones.

Las opciones financieras son empleadas de la siguiente manera:

1. Para ajustar el riesgo y rendimientos de una posición determinada a un costo muy bajo.
2. Para cubrirse de los riesgos de movimientos en los precios y en las cantidades, en otras palabras, las opciones son mejores que los futuros siempre que la cantidad que se desea proteger resulte ser incierta.

Por consiguiente, después de todo, lo que importa es calcular el valor de la opción, así como también el tiempo exacto conveniente para ejercerla. Es el modelo de la valoración de opciones de **Black-Scholes-Merton** que se describirá con esta finalidad, en lo que resta de la tesis.

5.3. La Ecuación de Calor en las Finanzas

Antes de entrar al objetivo principal de la tesis, haremos una revisión cronológica, de la valoración de las opciones financieras, dado que, no fue abordado desde el punto de vista matemático sino hasta finales del siglo XIX.

5.3.1. Evolución de la Valoración de Opciones Financieras

- La historia de la valoración de opciones financieras comienza con el matemático frances, Louis Bachelier. quien en el año 1900, derivo una fórmula para la valoración de opciones call y put, en su tesis doctoral **Teoría de la Especulación** presentada en la Universidad de la Sorbona. Sus supuestos, fueron bastante revolucionarios para su época, como que, el precio de las acciones siguen un Movimiento Browniano Estándar. A diferencia de la fórmula de BSM, los retornos son normales (el cual es opuesto a la lognormal). El demostró que para acciones que no pagan dividendos y para tasas de interés cero, el precio de una opción call europea es:

$$c(S,T) = S \times N\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K \times N\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \sigma\sqrt{t} \times n\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

donde S es el precio actual del activo, K es el precio de ejercicio, σ es la volatilidad normal del precio del activo[5], T es la fecha de maduración de la opción, $N(\cdot)$ es la función de densidad normal acumulada[6], y $n(\cdot)$ la función de densidad de probabilidad de la distribución normal estándar[7]. Bachelier, trabajo bajo la supervisión del famoso matemático Poincare, estaba muy por encima de su tiempo con la Teoría del Movimiento Browniano. Y que tardó más de sesenta años en ofrecer nuevas alternativas a la Teoría de Valoración de Opción.

- Sin embargo, en 1961, Sprenkle fue el primero en adaptar la aproximación de Bachelier para precios no negativos asumiendo retornos lognormales. Sprenkle, también asumió que los inversionistas son adversos al riesgo y obtuvo una fórmula del tipo:

$$C(S,T) = e^{\rho T} \times S \times N(d_1) - (1-A) \times K \times N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\rho + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right], \quad y \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

donde ρ es la tasa promedio de crecimiento de precio de la acción, y A es el grado de aversión al riesgo. Esta fórmula, aunque esta muy cerca a la fórmula de BSM, no recibió mucha atención debido a los numerosos parámetros a estimar. En realidad, es necesario calcular el grado de aversión al riesgo A, así como el crecimiento promedio de la rentabilidad ρ. Sprenkle (1961) en su artículo no da mucha información de como calcularlos.

- En 1964, Boness mejora la fórmula al contabilizar el valor temporal del dinero, a través del descuento del precio terminal de la acción, empleando la tasa esperada del retorno de la acción. La fórmula fue cambiado a:

$$C(S,T) = S \times N(d_1) - K \times e^{-\rho T} \times N(d_2)$$

[5]En otras palabras, la desviación estándar instantánea del precio del activo

[6]$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$

[7]$n(u) = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$

con la misma definición para d_1 y d_2 como en la fórmula de Sprenkle (1961).

- En 1965, Samuelson permitió que la fórmula para la valoración de una opción tenga diferentes niveles de riesgos sobre las acciones. El definió α como la tasa del retorno esperado del activo, y ρ es la tasa del retorno esperado del warrant o la tasa de descuento aplicada al warrant. Samuelson supone que los posibles valores del activo del warrant siguen una distribución lognormal y toma el valor esperado de esta distribución, y llegó a las siguientes fórmula:

$$C(S,T) = S \times e^{(\rho-\alpha)T} \times N(d_1) - K \times e^{-\alpha T} \times N(d_2)$$

con la misma definición para d_1 y d_2 como en la fórmula de Sprenkle (1961).

En 1969 Samuelson ya era considerado un economista brillante (fue distinguido con el Premio Novel en 1970), había notado el interés y la importancia de la Teoría de Valoración de Opciones en la economía. De está manera, Samuelson sugiere a su más joven y brillante estudiante, Merton para que inicie investigaciones en mayor detalle. En 1969, Samuelson y Merton publicaron, que el precio de la opción debe ser una función del precio de la acción y que la tasa de descuento empleada para valorar la opción debería ser determinada por una estrategia de cobertura donde los inversionistas poseen una opción y alguna cantidad de acciones. Ello conlleva a una fórmula que depende de la función de utilidad.

- No fue sino hasta 1973, cuando **Black-Scholes** y **Merton** publicaron artículos fundamentales sobre Modelos de Valoración de una Opción, las cuales fueron **Valoración de Opciones y Pasivos Corporativos** y **Teoría de Valoración de una Opción Racional**, respectivamente. Esto se dió porque en esta fecha comenzó rápidamente el cambio con la apertura de opciones comerciales en el intercambio de opciones en la Bolsa de Chicago (*Chicago Board Options Exchange*) y la llegada de los contratos de futuros financieros basados en las corrientes extranjeras en el Mercado Monetario Internacional de Intercambio Mercantil de Chicago (*Chicago Mercantile Exchange*).

5.3.2. Valuación de una Call Europea

Los modelos de valoración de opciones financiera fueron muy simples e incompletos hasta 1973, tal como se describió en la subsección anterior. Cuando Fisher Black y Myron Scholes publicaron **The pricing of options and corporate liabilities** (Ver [4]), al cual se le conoce actualmente como el modelo de valoración de Black-Scholes. Myron Scholes recibió el Premio Nobel de Economía en 1997 por este trabajo, junto con Robert C. Merton[8]. Saliéndose de lo habitual, Fisher Black fue específicamente mencionado en el premio, pero no fue premiado, dado que, el premio no se entrega postmortem.

La disponibilidad de una buena estimación del valor teórico de las opciones financieras, contribuyó a la explosión del comercio de opciones. Se han desarrollado otros modelos de valoración de opciones para otros mercados y situaciones usando argumentos, suposiciones y herramientas parecidos, como el modelo de Black para opciones sobre futuros. Además de otros métodos de valoración, como el Método de Monte Carlo o el Modelo Binomial.

Para la derivación de una fórmula para la valoración de una opción en términos del precio de la acción, enunciaremos los supuestos de mercado para la acción y la opción:

1. **El precio de un activo subyacente sigue Movimiento Geométrico Browniano.**

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

   Es decir, el precio del activo subyacente es lognormal.

2. **La volatilidad σ del activo son funciones conocidas a lo largo de la vida de la opción.**

   Es posible modelar σ con procesos estocásticos, pero no tomaremos ese camino (Ver [41], [39])

[8]En 1973, Robert C. Merton publicó **Theory of Rational Option Pricing**, en él hacia referencia a un modelo matemático que Fisher Black y Myron Scholes habían logrado desarrollar.

3. **No hay costos de transacción asociados a la cobertura del portafolio.**

   Es decir, no existen comisiones e impuestos.

4. **El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato de la opción.**

   En general, cuando se conocen de antemano los dividendos, existen variantes a Black-Scholes que introducen saltos en los instantes de pago de dividendos.

5. **No hay posibilidad de arbitraje.**

   La ausencia de arbitraje significa que todos los portafolios libres de riesgo deben tener el mismo retorno, es decir, los mercados están en equilibrio.

6. **La compra y venta del activo puede tomar lugar continuamente.**

   Es decir, no hay sábados, domingos y feriados.

7. **La venta en corto del activo subyacente es permitida**

   Está permitido vender aunque no tengamos posesión. Es decir, que se trata de un mercado completo

8. **El mercado de activos subyacentes es líquido y divisibles.**

   Es decir, el activo subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción de título.

9. **La tasa de interés libre de riesgo, es constante**

   Existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa).

10. **La información es simétrica**

    Es decir, todos los agentes comparten exactamente la misma información.

Bajo estos supuestos, el precio de una opción dependerá de cinco factores: el precio actual del subyacente, el precio de ejercicio, el tipo de interés libre de riesgo, el tiempo hasta la fecha de ejercicio y la volatilidad del subyacente. Finalmente, el modelo de BSM también fue adaptado para ser capaz de valorar opciones sobre acciones que pagan dividendos. Asimismo, con base en los supuestos anteriores, es posible crear una estrategia de cobertura (perfecta y dinámica) consistente en una posición larga en la acción y una posición corta en la opción.

Definición 5.1 Un universo es **neutral al riesgo**, si para todo los activos A y todos los periodos t, el valor de la acción $V(A,0)$ en el tiempo $t=0$ es el valor esperado de las acciones descontadas a su valor presente usando la tasa libre de riesgo. La ecuación es:

$$V(A,0) = e^{-rt}\mathbb{E}(V(A,t))$$

donde r es la tasa libre de riesgo continuamente compuesta y $V(A,t)$ es una variable aleatoria que da el valor de la acción en el tiempo t. (Ver el Anexo A, para el tratado de la tasa de descuento en tiempo continuo.)

Lema 5.1 *En un universo neutral al riesgo, si el valor de una acción sigue una trayectoria aleatoria* $\frac{ds_t}{s_t} = e^{\mu dt+\sigma dB_t} - 1$, *donde* dB_t *es* $N(0,dt)$, *y si* r *es la tasa libre de riesgo continuamente compuesta, entonces:*

$$r = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$$

Prueba. *Por la Definición 2.7, podemos afirmar que:*

$$S_t = S_0 \times e^{\mu t+\sigma B_t} \text{ donde } B_t \text{ es } N(0,t)$$

S_t es $LN(log(S_0) + \mu t, \sigma^2 t)$, por la Proposición 1.11, tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{E}(S_t) = S_0 \times e^{(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

Dado que, el universo es neutral al riesgo, por la Definición 5.1, tenemos:

$$S_0 = e^{-rt}\mathbb{E}(S_t) = e^{-rt}S_0 e^{(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

Por consiguiente: $rt = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)t$, de aquí se concluye que $r = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$

Oservación 5.2 *Se observa que la esperanza del retorno de la tasa compuesta sobre el activo en el Lema es $e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} - 1$, y el retorno de la tasa libre de riesgo compuesta es $e^r - 1$. Así, el lema dice que todos los activos cuyos valores siguen caminos aleatorios en un universo neutral al riesgo tiene la misma esperanza del retorno de la tasa compuesta como los activos libres de riesgo. Cuando los inversionistas son neutrales al riesgo, ellos no demandan un premio por riesgo, de modo que el retorno sobre el activo riesgoso no tiene premio sobre el retorno de la tasa libre de riesgo.*

Teorema 5.1 ***(Fórmula de una Opción de Compra Europea).*** *Teniendo en cuenta los supuestos mencionados anteriormente, consideremos un universo libre de riesgo, si el valor de un activo sigue un camino aleatorio*

$$\frac{dS_t}{S_t} = e^{\mu dt+\sigma dB_t} - 1$$

donde dB_t es $N(0, dt)$, con $S_t = S_0$ el valor del activo en el tiempo t, y si C es el valor en el tiempo $t = 0$ de una opción de call Europea sobre la acción, con un *precio de ejercicio (Strike) K y con un tiempo de expiración t, y si r es la tasa libre de riesgo compuesta, entonces:*

$$C = S_t \times N(d_1) - e^{-rt}K \times N(d_2)$$

donde N es la función de densidad acumulada de la distribución normal, además:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{t}.$$

Prueba. *En el Teorema 4.2, se demostró que*

$$\frac{dS_t}{S_t} = e^{\mu dt + \sigma dB_t} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu' dt + \sigma dB_t$$

Por consiguiente. supondremos que la dinámica del precio del activo subyacente sigue un Movimiento Geométrico Browniano de la forma:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \qquad dB_t \sim \mathcal{N}(0, dt), \tag{5.1}$$

donde μ y $\sigma > 0$ son, respectivamente, el rendimiento medio esperado y la volatilidad instantánea del activo. Consideremos ahora un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $C(S_t, t)$. Si Π_t denota el valor actual del portafolio, entonces

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 C(S_t, t). \tag{5.2}$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante dt, debido a fluctuaciones propias del mercado está dado por

$$d\Pi_t = \omega_1 dS_t + \omega_2 dC. \tag{5.3}$$

Si en particular, se elige $\omega_1 = 1$ *y*

$$\omega_2 = -\frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S_t}}, \tag{5.4}$$

se sigue que

$$d\Pi_t = dS_t - \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S_t}} dC \tag{5.5}$$

A continuación demostraremos que la selección anterior de ω_1 *y* ω_2 *diversifica (elimina) completamente el riesgo de mercado. Además, como* S_t *cambia en el tiempo, el número de opciones en la posición corta también cambia con el tiempo, lo que hace que la cobertura sea dinámica.*

En efecto, si expandemos dC en serie de Taylor hasta términos de segundo orden se tiene que[9]

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} dt. \tag{5.6}$$

Si se sustituye la ecuación (5.6) en (5.5), se obtiene que el cambio en el valor del portafolio es

$$d\Pi_t = - - \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S_t}} \left(\frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} dt \right) dt. \tag{5.7}$$

Como el rendimiento del portafolio es conocido éste tiene que ser igual a rdt, en condiciones de equilibrio. Por lo tanto,

[9]En este caso, se aplica la propiedad $dB_t^2 = dt$, la cual fue justificado en la Sección 4.1

$$d\Pi_t = \left(S_t - \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S_t}} C \right) rdt. \tag{5.8}$$

Después de igualar las ecuaciones (5.7) y (5.8), se tiene que

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}, \tag{5.9}$$

junto con la condición final

$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\} \tag{5.10}$$

Con el propósito de resolver la ecuación diferencial parcial anterior, realizamos la siguiente sustitución:

$$C(S_t, t) = B(t, T) \times G(u(S_t, \tau), \tau) \tag{5.11}$$

donde

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)},$$

$$u \equiv u(S_t, \tau) = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \ln \left(\frac{S_t}{K} + \tau \right)$$

y

$$\tau = \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 (T - t).$$

Si se calculan las derivadas parciales que aparecen en la ecuación diferencial parcial (5.9), se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= rBG + B\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)\\ &= rBG - B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 - B\frac{\partial G}{\partial \tau}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial S_t} &= B\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial S_t}\\ &= B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} &= -B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t^2} + B\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t}\frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)\\ &= -B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t^2} + B\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^2\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2\frac{1}{S_t^2}.\end{aligned}$$

Después de sustituir las derivadas parciales anteriores en la ecuación (5.9), se tiene que

$$\begin{aligned}&rBG - B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 - B\frac{\partial G}{\partial \tau}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2\\ &\qquad + rS_t\left[B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t}\right]\\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\left[-B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t^2} + B\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^2\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2\frac{1}{S_t^2}\right]\\ &\qquad - rc = 0.\end{aligned}$$

Dado que $rc = rBG$, la ecuación anterior se simplifica de la siguiente manera

$$-\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2-\frac{\partial G}{\partial \tau}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2$$

$$+r\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

$$-\frac{\partial G}{\partial u}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2=0.$$

al agrupar términos, se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}-\frac{\partial G}{\partial \tau}\right)\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2$$

$$+\frac{\partial G}{\partial u}\underbrace{\left(-\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2+r\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)}_{=0}=0$$

Por lo tanto, la función G satisface la siguiente ecuación de calor:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \tag{5.12}$$

De aquí se observa que si hacemos $t=T$, entonces $\tau=0$, por lo que

$$u=\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\ln\left(\frac{S_t}{K}\right).$$

En consecuencia,

$$S_t = Kexp\left\{\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}\right\}.$$

De esta manera, la condición final de la ecuación de calor está dada por

$$\begin{aligned} G_0(u) \equiv G(u,0) &= \text{máx}\left(Kexp\left\{\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}\right\} - K, 0\right) \\ &= K\,\text{máx}\left(exp\left\{\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}\right\} - 1, 0\right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

En particular, si $u < 0$, se tiene que $G_0(u) = 0$. En conclusión, la ecuación de calor asociada al precio de la opción y su condición de frontera están dadas por

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}, \qquad -\infty < u < \infty, \quad \tau > 0 \\ &G(u,0) = G_0(u), \qquad -\infty < u < \infty. \end{aligned} \tag{5.14}$$

La solución de la ecuación de calor está dada por

$$\begin{aligned} G(u,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(s) e^{-\frac{1}{2}((s-u)/\sqrt{2\tau})^2} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Lambda_s}^{\infty} K\left(exp\left\{\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}\right\} - 1\right) e^{-\frac{1}{2}((s-u)/\sqrt{2\tau})^2} ds \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde

$$\Lambda_s = \left\{ s | exp \left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\} > 1 \right\}.$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable:

$$q = \frac{s-u}{\sqrt{2\tau}}.$$

De esta manera, $s = u + q\sqrt{2\tau}$ *y*

$$ds = \sqrt{2\tau}dq.$$

En consecuencia,

$$G(u,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K \left(e^{\frac{1}{2}\sigma^2(u+q\sqrt{2\tau})/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}q^2} \sqrt{2\tau}dq$$

donde

$$\Lambda_q = \left\{ q | q > -\frac{u}{\sqrt{2\tau}} \right\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(u,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{\frac{1}{2}\sigma^2(u+q\sqrt{2\tau})/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2}q^2} dq, \qquad (5.16) \\ &= \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2. \end{aligned}$$

Además, tenemos que

$$-\frac{u}{\sqrt{2\tau}} = -\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sqrt{2\tau}}\right)$$

$$= -\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sqrt{2\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2(T-t)}}\right)$$

$$= -\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$= -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Lambda_q &= \left\{q|q > -\frac{u}{\sqrt{2\tau}}\right\} \\ &= \left\{q|q > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\} \qquad (5.17) \\ &= \left\{q|-\infty < q < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}.\end{aligned}$$

De esta manera, la primera integral en (5.16) satisface

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty} Ke^{-\frac{1}{2}q^2}dq = K \times N(d_2) \tag{5.18}$$

donde

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}q^2}dq$$

es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. Para calcular la primera integral que aparece en la ecuación (5.16), considere el argumento de la exponencial en el integrando, es decir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{u+q\sqrt{2\tau}}{r-\frac{1}{2}\sigma^2}\right) &= \frac{\frac{1}{2}\sigma^2}{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}\left[\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\right.\right.\\
&\left.\left.\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)+q\sqrt{2\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right]\\
&= \frac{\frac{1}{2}\sigma^2}{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}\left[\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\right.\right.\\
&\left.\left.\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+q\sigma\sqrt{(T-t)}\right)\right]\\
&= \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+q\sigma\sqrt{(T-t)}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{\ln(S_t/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+q\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq \\
&= e^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty} S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+q\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq \\
&= S_t e^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2-2q\sigma\sqrt{T-t}+\sigma^2(T-t)} dq \\
&= S_t e^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{T-t})^2} dq.
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

Ahora, procedemos a realizar el siguiente cambio de variables $z = q - \sigma\sqrt{T-t}$, *además* $dz = dq$ *y*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= S_t e^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q-\sigma\sqrt{T-t})^2} dq \\
&= S_t e^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_z}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

Se observa que

$$
q > -\frac{u}{\sqrt{2\tau}}
$$

implica

$$
z + \sigma\sqrt{T-t} > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

o

$$
z > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.
$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Lambda_z &= \left\{ z | z > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\
&= \left\{ z | -\infty < z < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

De esta manera, se concluye que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= S_t e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_z}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= S_t e^{r(T-t)} \times N(d_1),
\end{aligned} \tag{5.22}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

De aquí se concluye, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$. *De las ecuaciones (5.15), (5.18) y (5.22), se tiene que*

$$G(u,\tau) = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = S_t e^{r(T-t)} \times N(d_1) - K \times N(d_2). \tag{5.23}$$

Finalmente, la ecuación (5.11) produce

$$
\begin{aligned}
C(S_t, t) &= B(t, T) \times G(u(S_t, \tau), \tau) \\
&= e^{-r(T-t)} \left(S_t e^{r(T-t)} \times N(d_1) - K \times N(d_2) \right) \qquad (5.24) \\
&= S_t \times N(d_1) - K \times e^{-r(T-t)} \times N(d_2),
\end{aligned}
$$

donde

$$
d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

y

$$
d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

□

5.3.3. Factores que determinan el Precio de las Opciones.

Existen seis factores que determinan el precio de una opción sobre un activo:

1. El precio actual de los activos, S.
2. El precio de ejercicio, K.
3. El tiempo hasta el vencimiento, t.
4. La volatilidad del precio de los activos, σ.
5. La tasa libre de riesgo, r.
6. Los dividendos esperados durante la vida de la opción.

En la siguiente tabla se resume los efectos sobre el precio de una opción por estos factores:

Tabla 5.1: Resumen de los efectos sobre el precio de una opción sobre activos incrementando una variable y dejando fijas las demás

Variable	Opción Europea de Compra	Opción Europea de Venta	Opción Americana de Compra	Opción Americana de Venta
Precio de los activos	+	-	+	-
Precio de ejercicio	-	+	-	+
Tiempo hasta el vencimiento	?	?	+	+
Volatilidad	+	+	+	+
Tasa Libre de Riesgo	+	-	+	-
Dividendos	-	+	-	+

+ : Indica que el incremento en la variable produce un incremento del precio de la opción

- : Indica que el incremento de la variable causa una reducción en el precio de la opción

? : Indica que la relación es incierta

Fuente: Hull (2002)

5.3.4. Ventajas del Modelo de Black-Scholes-Merton.

1. Es aplicable a cualquier institución financiera, al cambiar sólo los parámetros requeridos por la fórmula, de acuerdo a los requerimientos de la institución.

2. No es totalmente exacto, pero resulta muy fácil adecuarlo para que se ajuste a la realidad.

3. Requiere poco información del mercado para el cálculo del valor de una opción, dado que sólo es necesario conocer: el activo subyacente, su tasa de interés (o dividendo), la tasa de interés en el mercado y cuanto se mueve la varianza del activo subyacente.

6

Análisis de Demandas Contingentes y Aplicaciones

Esta capítulo está basado en [26]y [27].

El **Análisis Contingente** es una técnica para determinar el precio de un valor cuyo resultado depende del precio de uno o más valores. El origen del **Análisis Contingentes** es el modelo de opciones de B&S, el cual contiene elementos cualitativos con un gran significado práctico. Esta teoría sostiene que las deudas corporativas, en general, pueden ser vistas como combinaciones de simples contratos de opciones[1].

El **Análisis Contingente**, provee un marco de trabajo unificado donde

[1] Extraído de [47]: página 301

se puede analizar la estructura de las deudas corporativas e implica que el modelo de opciones puede ser usado para determinar el precio de las acciones. Este modelo generalizado es el fundamento del **Análisis de Activos Contingentes**.

6.1. Introducción

Fisher Black y Myron Scholes (1973), en su publicación seminal proporcionaron un importante resultado. Ellos demostraron que los pasivos corporativos pueden ser vistos como combinaciones de contratos de opciones. Cuando una empresa realiza un préstamo, está crea una opción. La razón es que el prestatario no está obligado a pagar la deuda en la fecha de vencimiento. Si el valor de los activos de la empresa es inferior al monto de la deuda, la empresa elegirá el incumplimiento del pago y los tenedores de bonos mantendrán los activos de la empresa[2]. Por lo tanto, cuando la empresa toma la deuda, entonces el prestamista adquiere efectivamente la empresa y los accionistas obtienen la opción de compra, mediante el pago de la deuda. Esta generalización de la valoración de opciones fue rápidamente extendida por Merton (1974,1977), siendo conocido como Análisis de Activos Contingentes (en adelante AAC).

En esta sección se mostrara como el AAC puede ser aplicado particularmente y adecuadamente a la valoración de garantías en dos pasos:

1. A través de la interpretación de una garantía como una opción de venta, y
2. A través de un modelo de valoración de opciones para la valoración de la garantía utilizando el modelo de B&S.

Se construirán ejemplos hipotéticos y supuestos para la modelación de los préstamos garantizados y su correspondiente precio de garantía. Adicionalmente se mostrarán otras aplicaciones para el análisis AAC.

[2] Al ser corporaciones de responsabilidad limitada.

6.2. Pasivos Corporativos como Opciones

Para ilustrar la correspondencia entre un pasivo corporativo y opciones, consideremos primero el caso que la firma tiene dos clases de pasivos: acciones con valor de mercado igual a E y un bono cero cupón[3] con valor de mercado igual a B. El balance tendrá los activos en el lado izquierdo con valor V y será igual a $B + E$, es decir la suma de deuda y acciones en el lado derecho. Si el valor de la firma excede el valor de la deuda $V > B$, entonces los tenedores de los bonos recibirán el pago B y los accionistas recibirán el valor de E.

Sin embargo si el valor del bono excede el valor de la firma $B > V$, los accionistas encontrarán preferible ejercer sus derechos de responsabilidad limitada, declarar en **default** el bono y no recibir ninguna cantidad su capital E.

Cómo podemos ver, el prestamista efectivamente adquiere la compañía y los accionistas obtienen la opción de recompra pagando la deuda. Los accionistas han comprado una opción **call** sobre los activos de la compañía y los tenedores de bonos se la han vendido. Gráficamente:

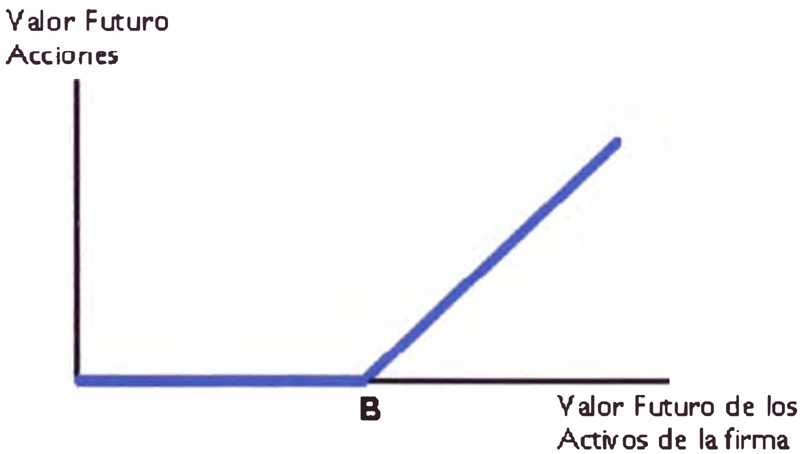

Gráfico 6.1: Valor Futuro de los Activos.

El gráfico muestra que, si el valor futuro de los activos es menor que B, el valor de las acciones valen cero. Si el valor futuro del activo es

[3]Los intereses y el principal se pagan de manera conjunta al final del vencimiento del bono.

mayor que B, los accionistas recibirán $V - B$ Por lo tanto, los pagos a los accionistas pueden ser expresados como $\max\{0, V - B\}$. Esta expresión (y también la del gráfico) son idénticas a una opción **call** sobre los activos de la firma, con un precio de ejercicio igual a B.

Adicionalmente usando la relación básica de la paridad Put - Call dada por:

Valor de la Call + Valor Presente Precio de Ejercicio = Valor de la Put + Valor de la Acción.

En nuestro caso, debido que la opción de compra es sobre los activos de la firma, el valor de la acción es V y el valor presente (VP) de los precios de ejercicio equivale al valor presente de los pago prometidos a los tenedores de bonos. Por consiguiente:

Valor de la Call + VP Pagos Prometidos del Bono = Valor de Put + Valor de la Firma

Por construcción sabemos que el valor de bono debe ser igual al valor de la empresa menos el pago a los accionistas. Como se mostró anteriormente, el pago a los accionistas es una opción call sobre los activos de la empresa cuyo valor es $\max\{0, V - B\}$. Usando paridad Put Call se obtiene:

Valor del Bono = VP Pagos Prometidos a los Tenedores de Bonos - Valor de la Put.

Los compradores de los bonos han:

1. Compraron un bono seguro,
2. Entregado la opción a los accionistas de venderles los activos de la firma por el monto de la deuda.

Nótese que los pagos de una opción put son $\max\{0, V - B\}$.

Nótese que el bono con riesgo B ha sido transformado en un bono sin riesgo menos el valor de la opción de venta que tienen los accionistas sobre los activos de la empresa. En consecuencia para valorar un bono riesgoso necesitamos valorar un bono seguro y la opción put. Esto es un resultado extremadamente importante[4].

[4] Esta relación fue reconocida por primera vez por Fischer Black and Myron Scholes (1973)

6.3. Garantía como una Opción de Venta

El valor presente de una garantía para un préstamo, es el monto que ellos estarían a pagar por evitar el riesgo de default. Es fácil ver que esto será la diferencia entre el valor presente neto de un préstamo garantizado menos el valor presente neto de un préstamo sin garantías. Esto es:

Valor de una Garantía = Valor del Préstamo Garantizado - Valor de un Préstamo no Garantizado.

Usando la expresión que:

Valor del Bono = VP Pagos Prometidos a los Tenedores de Bonos - Valor Opción Put

y dado que Pagos Prometidos a los Tenedores de Bonos es un pago seguro, es decir un préstamo garantizado, tenemos que el valor de la garantía es igual a:

Valor de la Garantía = Valor de una Opción Put

6.4. Valoración

La solución estándar de B&S para una opción de venta sobre una acción con precio de ejercicio E y precio spot de la acción S está dada por:

$$p(S,t,E) = -S \times N(-d_1) + e^{-rt}E \times N(-d_2) \tag{6.1}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \tag{6.2}$$

Donde $N(\cdot)$ es la función de densidad acumulada para la distribución normal estándar, r es la tasa libre de riesgo y σ es la volatilidad.

Teniendo en cuenta que el valor de una garantía de préstamo pagando cualquier déficit en el valor de la empresa que sea necesario para devolver plenamente la promesa del pago de

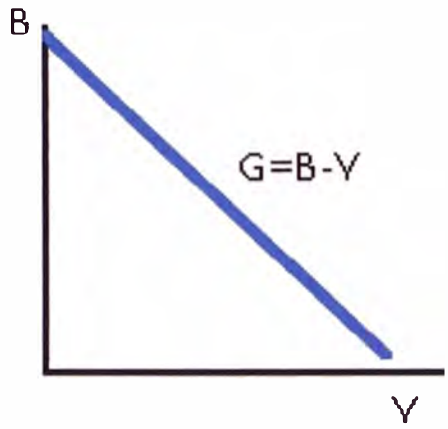

Gráfico 6.2: Valor de la Garantía.

la deuda es similar a tener un seguro. Como se muestra en el gráfico 7.2.

Si en la fecha de vencimiento, el valor de la empresa es menor que el pago prometido $B > V$, el préstamo garantizado tendrá que compensar la diferencia entre la promesa de pago y el valor de la empresa $B - V$, sin embargo, si el valor de la empresa supera el pago prometido $V > B$, la garantía no tendrá que realizar ningún pago. Es decir:

$$G(V, 0, B) = \text{máx}\{0, B - V\}$$

Como hemos dicho, la garantía de préstamo es equivalente a una opción de venta europea sobre el valor de la empresa V, con un precio de ejercicio igual al pago prometido B. El valor de la garantía de préstamo, por lo tanto, es dado por la solución del precio de una opción put de B&S, con la sustitución de G por P, V por S y B por E:

$$G(V, t, B) = -V \times N(-d_1) + e^{-rt} B \times N(-d_2)$$

Donde d_1, d_2 y $N(\cdot)$ están dadas en la ecuación (2).

6.5. Valoración de la Garantía de Crédito Parcial por medio del Modelo de BSM

Supongamos que una empresa privada internacional está tratando de recaudar fondos para financiar una inversión valorada en $100 millones en un proyecto de infraestructura. Según las proyecciones de flujo de caja de la empresa, necesita recaudar $70 millones emitiendo bonos a una tasa fija en el mercado interno con una fecha de vencimiento igual a 10 años. La diferencia será el financiamiento de la emisión de acciones. Principalmente debido a las condiciones económicas y política en el país, estos fondos son muy difíciles de conseguir. La compañía está pensando en el uso de garantías financieras (Por ejemplo de algún organismo multilateral como el International Finance Corporation - IFC - del Banco Mundial). Con una garantía de crédito parcial, la empresa obtiene un spread en el momento de la emisión igual a 250 puntos básicos (en adelante pb) pagadero en el 2018. La garantía de crédito parcial cubre todos los eventos de falta de pago de la empresa por la cantidad asegurada.

La garantía pagará la primera pérdida que es igual en cada período al 70% de intereses y principalmente de los bonos emitidos. La suposición es, que el IFC está garantizando únicamente el 70% de la deuda. La siguiente tabla muestra el interés, el principal, el cupón y el importe del IFC garantizado para cada año:

Tabla 6.1: El interés, el principal, el cupón y el importe del IFC por año

Año	Interés	Principal	Valor del Cupón	IFC Garantiza el 70% (Interés y Principal) PCG_t
2009	5,106,500	1,400,000	6,506,500	4,554,550
2010	5,004,370	2,100,000	7,104,370	4,973,059
2011	4,851,175	3,500,000	8,351,175	5,845,823
2012	4,595,850	4,200,000	8,795,850	6,157,095
2013	4,289,460	6,300,000	10,589,460	7,412,622
2014	3,829,875	7,000,000	10,829,875	7,580,913
2015	3,319,225	8,400,000	11,719,225	8,203,458
2016	2,706,445	10,500,000	13,206,445	9,244,512

Tabla 6.1: El interés, el principal, el cupón y el importe del IFC por año

Año	Interés	Principal	Valor del Cupón	IFC Garantiza el 70 % (Interés y Principal) PCG_t
2017	1,940,470	12,600,000	14,540,470	10,178,329
2018	1,021,300	14,000,000	15,021,300	10,514,910

Fuente: Elaboración Propia

Si el retorno esperado sobre el equity es mayor que el costo de capital de la empresa, los ingresos netos del proyecto deberían de pagar los cupones y los dividendos[5] para los accionistas, debido a que el 30 % se encuentra financiado. En este caso, la garantía del IFC nunca se activará. Sin embargo por diferentes razones en uno o más años, la empresa puede experimentar crisis de liquidez, ya sea porque el país se enfrenta a una recesión o cualquier otra razón que provoque una disminución en los flujos netos de efectivo. En este caso, a fin de evitar el impago de los bonos la garantía del IFC, se adquiere.

Instrumento : Bono a una tasa fija.

Estructura de la Garantía : 50 % Principal e interés.

IFC colateral : Acciones de la empresa.

Monto : $70 millones.

Sector del mercado : Doméstico.

Fecha de Vencimiento : 10 años.

Spread a la emisión : 285 pb sobre el Tesoro de US con vencimiento al 2018.

El siguiente cuadro muestra la proyección de los flujos de caja netos, que la empresa ha demostrado para el IFC en el inicio de la operación.

Tabla 6.2: Proyección de los Flujos de Caja Neto para el IFC

Año	Flujo de Caja Neto Esperado NCF_t	Bono Cupón	Flujo de Caja Neto para el Ratio Total de Pasivos	IFC Garantiza el 50 % (Interés y Principal) PCG_t
2009	7,254,748	6,506,500	1.115	4,554,550

[5]En un proyecto financiero de Retención de Salarios es conveniente en vez de la distribución de los dividendos, al menos en los primeros cinco años del proyecto.

Tabla 6.2: Proyección de los Flujos de Caja Neto para el IFC

Año	Flujo de Caja Neto Esperado NCF_t	Bono Cupón	Flujo de Caja Neto para el Ratio Total de Pasivos	IFC Garantiza el 50 % (Interés y Principal) PCG_t
2010	7,921,373	7,104,370	1.115	4,973,059
2011	9,311,560	8,351,175	1.115	5,845,823
2012	9,807,373	8,795,850	1.115	6,157,095
2013	11,807,248	10,589,460	1.115	7,412,622
2014	12,075,311	10,829,875	1.115	7,580,913
2015	13,066,936	11,719,225	1.115	8,203,458
2016	14,725,186	13,206,445	1.115	9,244,512
2017	16,212,624	14,540,470	1.115	10,178,329
2018	16,748,750	15,021,300	1.115	10,514,910

6.5.1. Garantía de Riesgo de Crédito Parcial en Términos de Opciones

El mecanismo de las Garantías de Riesgo de Crédito Parcial (GCP), tiene el objetivo de absorber las pérdidas cuando los flujos de caja netos de efectivo (RTR) son bajos.

- Cuando $PCG_t < NCF_t$, los flujos de caja netos obtenido por la empresa es considerada inferior y, por lo tanto, el IFC debe indemnizar a la empresa. La garantía se activa. Por lo tanto, de acuerdo a nuestra búsqueda, la empresa tiene la opción de vender el total de sus flujos de caja efectivo recogidas del IFC en el *precio* PCG_t fijado en el acuerdo de garantía del contrato. Evidentemente, la opción sólo será conveniente para la empresa, si NCT_t resulta inferior a PCG_t. En términos financieros, el IFC vende a la empresa una opción de venta con un precio de ejercicio igual al PCG_t.
- Habrán opciones de venta como años de garantía de pagos (bonos de vencimiento). En nuestro ejemplo, debido a que la madurez es de 10 años y cada año tiene cupones, el IFC da a la empresa un paquete de 10 opciones de venta.

Habida cuenta de que las opciones de venta son capaces de ser modeladas y valoradas con tiempos diferentes de expiración, el valor del paquete será simplemente la suma del valor de cada una de las opciones que esta abarca.

Asumiendo que la volatilidad puede tomar los siguientes valores 2 %, 4 %, 6 %, 8 %, 10 %, 12 %, 14 %, 16 %, 18 % y 20 % respectivamente, para los flujos de caja neto de efectivo y la tasa de interés libre de riesgo del IFC es del 5 %, el valor de cada opción se muestra como sigue en la Tabla 4.3:

Los cálculos se han llevado a cabo de la siguiente manera: De la Tabla 5.2, se obtiene el valor de precio de Stock, el cual es $7,254,748, i.e. es el Flujo de Caja Neto Esperado para el año 2009, dada la formulación de B&S, este valor permanece fijo durante el proceso de cálculo. Los valores correspondientes a los Precio de Ejercicio, corresponde a los valores de la columna de IFC Garantiza el 50 % (Interés y Principal), respectivamente. Los valores de la volatilidad son tomados según el escenario a evaluar, mientras que la Tasa Libre de Riesgo es igual a 5 %.

Por ejemplo, calculemos el precio de la Opción de Venta Europea en el escenario de volatilidad igual al 2 %, en el año 2016.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{7,254,748}{9,244,512}\right) + \left(5\,\% + \frac{(2\,\%)^2}{2}\right) \times 8}{(2\,\%)\sqrt{8}} = 2.81$$

$$d_2 = 2.81 - (2\,\%)\sqrt{8} = 2.76$$

con estos valores así obtenidos, procedemos a calcular el valor de la Opción de Venta Europea, de la siguiente manera:

$$p = -9,244,512 \times e^{-5\,\% \times 8} N(-2.76) - 7,254,748 \times N(-2.81) = 301.97$$

donde N es la función de densidad acumulada para la distribución normal estándar.

Los cálculos para los diferentes escenarios de volatilidad se realizan de manera similar con respecto al año a evaluar.

Teniendo en cuenta que los posibles escenarios son las volatilidades del 3 % y del 5 %, para una inversión inicial de US$ 100 millones, se obtiene por medio del modelo de BSM, para estos valores, los montos de

Tabla 6.3: IFC de la Garantía de Riesgo de Crédito empleando Black y Scholes (En $ millones).

Valoración de Opciones de Venta Europea, para diferentes volatilidades

Año	$\sigma = 1\,\%$	$\sigma = 2\,\%$	$\sigma = 3\,\%$	$\sigma = 4\,\%$	$\sigma = 5\,\%$	$\sigma = 6\,\%$	$\sigma = 7\,\%$	$\sigma = 8\,\%$	$\sigma = 9\,\%$	$\sigma = 10\,\%$
2009	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2010	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	1.69	15.10	76.30
2011	0.00	0.00	0.00	0.00	1.34	33.71	262.12	1,073.05	2,990.93	6,515.73
2012	0.00	0.00	0.00	0.26	20.02	245.64	1,235.39	3,797.61	8,672.00	16,342.48
2013	0.00	0.01	36.76	978.08	5,456.30	15,738.82	32,454.66	55,162.02	83,029.82	115,190.88
2014	0.00	0.00	29.21	877.40	5,184.38	15,444.02	32,492.82	55,977.13	85,067.42	118,856.61
2015	0.00	0.65	317.82	3,897.54	15,015.23	35,147.97	65,562.41	98,838.49	139,582.79	184,633.09
2016	0.00	301.97	7,010.77	28,200.97	63,108.23	108,124.25	160,203.91	217,229.36	277,775.20	340,872.95
2017	5.05	5,088.76	32,027.48	78,407.01	136,509.67	201,568.67	270,936.04	343,091.00	417,112.08	492,410.92
2018	1.10	3,300.44	25,898.91	69,074.16	125,668.02	190,514.94	260,573.84	334,046.95	409,826.89	487,199.48
Total	**6.15**	**8,691.82**	**65,320.95**	**181,435.43**	**350,963.19**	**566,818.02**	**821,721.26**	**1,109,217.31**	**1,424,072.24**	**1,762,098.46**
VP	**3.93**	**5,511.29**	**41,566.52**	**116,226.14**	**226,691.24**	**369,141.91**	**539,141.02**	**732,552.08**	**945,946.91**	**1,176,532.66**
NVP % Inv.	$3.9e^{-6}\,\%$	0.006 %	0.042 %	0.116 %	0.227 %	0.369 %	0.539 %	0.732 %	0.946 %	1.177 %

activación de las garantías como porcentaje de los ingresos son extremadamente bajos relativos al nivel de inversión inicial y al valor de los ingresos esperados bajo un escenario pesimista. En el primer caso el valor esperado como porcentaje de los ingresos es del 0.042 % de los ingresos y en el segundo caso el valor es del 0.227 % de los ingresos. En el caso difícilmente probable de una volatilidad del 10 % de los ingresos del proyecto en infraestructura en cada uno de los periodos, el nivel de activación como porcentaje de la inversión asciende a 1.117 %. Lo cual indica que la garantía financiera no se activa.

6.6. Valoración Fundamental de los Pasivos Corporativos: El Riesgo de Deuda y el Equity de la Empresa

Sabemos que la relación básica entre las opciones de compra y venta, conocida como la paridad compra - venta está dada por:

$$C + X = P + S$$

Como se ha visto el valor de la opción de compra es el valor del capital propio $E = \text{máx}\{0, V - D\}$, por lo tanto $C = E$. Por ser parte X es una cantidad fija de dinero (sin riesgo) y se sustituye por B, donde B es un bono cupón cero libre de riesgo que representa el valor nominal de D. S puede ser sustituido por el valor de los activos de la empresa V. Por lo tanto, tenemos:

$$E + B = P + V \quad o \quad V - E = B - P$$

Sin embargo, debido a que sabemos por construcción que $D = V - E$, entonces podemos expresar $D = B - P$ y tenemos:

Valor del Bono con Riesgo (D) = Bono Libre de Riesgo (B) - Valor de la Opción de Venta (P)

Los Tenedores de bonos de la empresa, han realizado lo siguiente:

1. Compraron un seguro de bonos (B), y

2. Dan a los accionistas la opción de vender los activos de la empresa por el valor de la deuda.

El payoff de la venta o el valor en la fecha de vencimiento se puede expresar como $\max\{0, B - V\}$.

Nótese que un bono con riesgo (B) se ha transformado en un bono libre de riesgo menos el valor de las opciones de venta.

En consecuencia en la fecha de vencimiento los tenedores de bonos reciben el $\max\{V, D\}$. En efecto, en la fecha de vencimiento si la empresa tiene éxito, es decir $V \geq D$, los tenedores de bonos recibirán el valor nominal de los bonos de riesgo D. Si la empresa está en quiebra, ellos recibirán el valor nominal de los bonos riesgosos, pero una opción de venta ha sido en efecto ejercida contra ellos, debido a que ellos perdieron la diferencia entre el valor nominal de la deuda riesgosa D, y el valor de mercado de la empresa V.

El precio del capital propio (E) y el bono con riesgo (D), en términos de AAC, podemos pensar que el retorno o el precio de cualquier pasivo corporativo pueden ser replicado utilizando una estrategia de inversión similar a la empleada por B&S en el los casos de la valoración de las opciones de compra y venta[6], pero debe añadirse las siguientes suposiciones:

El movimiento del valor de la empresa V a través del tiempo puede ser descrito mediante la siguiente ecuación:

$$dV = (\alpha V - P)dt + \sigma V dZ$$

Donde α es la tasa esperada del retorno de la empresa por unidad tiempo, P es conocida como la ganancia total neto por parte de la empresa y σ es la volatilidad del retorno de la empresa por unidad de tiempo. Merton (1974) demostró que es posible obtener una estrategia de arbitraje de una cartera que contiene las posiciones desaparecidas en la empresa con los activos libre de riesgo para producir un patrón de retornos que replican exactamente el retorno para cualquier pasivo corporativo de la empresa. Básicamente, los argumentos de replicación de arbitraje, los supuestos acerca el movimiento de la empresa resulta en una ecuación fundamental en derivadas parciales:

[6] Ver [48]

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (rV - P)\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\partial F}{\partial T} - rF + P = 0$$

donde F es el precio del pasivo y r es la tasa libre de riesgo.

Por ejemplo, la equidad $E(V,T,B)$ deberá satisfacer la ecuación diferencial parcial fundamental

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} + (rV - P)\frac{\partial E}{\partial V} - \frac{\partial E}{\partial T} - rE + P = 0$$

Para resolver la ecuación, es necesario anexar las condiciones límites y de frontera:

1. $E(V) = \text{máx}\{V - B, 0\}$ si $V \geq B$.
2. $E(V) = 0$ si $V \leq 0$.

La solución es analítica y tiene el mismo formato que la típica fórmula de la opción de compra de Black y Scholes, donde S se sustituye por V y X se sustituirá por B.

Además, el valor del riesgo de deuda D deberá de satisfacer la misma ecuación diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 D}{\partial V^2} + (rV - P)\frac{\partial D}{\partial V} - \frac{\partial D}{\partial T} - rD + P$$

Aquí las condiciones de frontera y terminales son las siguientes:

1. $D(0,T) = 0$.
2. $D = \text{mín}\{V, B\}$

La solución para esta ecuación, también es analítica:

$$D(V,T,B) = Be^{-rt}N(h_1) + VN(h_2)$$

Dónde:

$$h_1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{B}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad h_1 = \frac{\ln\left(\frac{B}{V}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

6.7. Análisis de Activos Contingentes y Warrants

Esta sección está adaptada de [29], [12] y [4]

Un warrant es una opción a largo plazo emitida por una empresa sobre sus propias acciones y representan un pasivo de la empresa. Se compromete a vender acciones a un precio de ejercicio fijo en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento. Un warrant es una opción de compra escrito por parte de la empresa. Cuando el warrant es ejercido incrementa el número de acciones en circulación y, por tanto, diluye el capital de los accionistas.

Con el fin de explicar el proceso de valoración, consideremos un ejemplo con una empresa con N acciones en circulación y M warrants pendientes. Cada warrants faculta al titular para comprar m acciones de la compañía en el tiempo T a un precio X por acción.

Si E_T es el valor del capital propio de la empresa en el tiempo T y el ejercicio del titular de los warrant, la empresa recibe un flujo de caja del pago del precio de ejercicio de MmX y el valor de la equidad de la empresa se incrementa en $E_T + MmX$. Este valor debe ser dividido por $N + Mm$ acciones con el fin de obtener el precio de la acción inmediatamente después de ser ejercida.

Por lo tanto, el nuevo precio de las acciones es el siguiente:

$$S = \frac{E_T + MmX}{N + Mm}$$

y, en consecuencia, el warrant debería ser ejercido sólo si su payoff es positiva:

$$W = m\,\text{máx}\{S_T - X\},$$

donde W es el orden de precio en el tiempo T. O

$$W = m\,\text{máx}\left\{\frac{E_T - MmX}{N + Mm} - X\right\} = \frac{Nm}{N + Mm}\,\text{máx}\left\{\frac{E_T}{N} - X\right\}$$

El valor del capital propio en el tiempo cero esta dado por:

$$E_0 = NS_0 + MW \qquad o \qquad \frac{E_0}{N} = S_0 + \frac{M}{N}W$$

El precio del warrant en el tiempo 0 es igual a:

$$W = \left(\frac{Nm}{N+Mm}\right) \text{máx}\left\{\left(S_0 + \frac{M}{N}W\right) - X\right\}$$

W puede ser expresado mediante la fórmula de la opción de compra de Black y Scholes por la sustitución de S_0 por $\left(S_0 + \frac{M}{N}W\right)$ como sigue:

$$W(S,t,X) = \left[\frac{Nm}{N+Mm}\right]\left(S_0 + \frac{M}{NW}\right)N(w_1) - Xe^{-rt}N(w_2)$$

La ecuación fundamental ecuación diferencial parcial implícita en esta ecuación es:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + (rS)\frac{\partial W}{\partial S} - \frac{\partial W}{\partial T} - rW = 0$$

y sus correspondientes condiciones de frontera es:

1. $W(0,T) = 0$.
2. $W(S,0) = \left(\frac{Nm}{N+Mm}\right) \text{máx}\left\{\left(S_0 + \frac{M}{N}W\right) - X\right\}$ siempre que se verifique $\left(S_0 + \frac{M}{N}W\right) \geq X$.

Sin embargo podemos ver a $W(S,t)$, como una función de W. Como es indicado por [11]: este tipo de modelos puede ser resuelto numéricamente con diferentes técnicas tales como árboles binomiales y trinomiales y esquemas en diferencias finitas. Si asumimos que la opción depende de múltiples factores aleatorios, por ejemplo, opciones sobre activos múltiples o modelos en los cuales incorporamos la simulación de Montecarlo de la volatilidad estocástica ofrece un método interesante de la valoración de estos tipos de instrumentos.

6.8. Análisis de Activos Contingentes y Bonos Convertibles con Opción de Prepago

Esta sección está basado en [47], [18], [12] y [66]

Un bono convertible con opción de prepago es un pasivo corporativo con una opción de compra para adquirir el capital del emisor en la forma de acciones. Por lo tanto, los tenedores de bonos tienen derecho a convertir el bono, en un número predeterminado de acciones del capital del emisor. El valor de un bono convertible puede ser dividido en dos partes:

1. El valor como un bono de tasa fija, y
2. El valor potencial del capital en acciones.

El número de acciones que el tenedor del bono recibirá al ejercer la opción de compra se llama el ratio de conversión.

El valor de conversión de un bono convertible, es el valor de los certificados si se convierte inmediatamente, esto es:

Valor de Conversión = Precio de Mercado de Acciones Comunes × Ratio de Conversión

El valor mínimo de los bonos convertibles en acciones y además prepagable, es mayor que:

1. Su valor de conversión.
2. Su valor como certificados de reintegro corporativos sin la opción. Este valor es llamado valor directo.

Por lo tanto, el valor total del mercado de los bonos convertibles (CRC), es igual al valor de mercado de deuda directamente más un warrant W.

CRC**= certificados de reintegro directos + Warrant**

Un bono convertible en acciones y prepagable también puede ser exigible. En este caso, el tenedor de los CRC vende al emisor una opción de compra que permite al emisor la recompra de los flujos de caja contractuales de los certificados de reintegro. En este caso, el precio para un bono prepagable y convertible en acciones es igual a:

CCD**= Certificados de Reintegro Directos - Precio de la Opción de Compra + Warrant**

Según Mason y Merton (1988) la ecuación fundamental en derivadas parciales de una deuda convertible exigible es como sigue:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 CCD}{\partial V^2} + (rV - c)\frac{\partial CCD}{\partial V} - \frac{\partial CCD}{\partial T} - rCCD + c = 0$$

Con condiciones de frontera y terminales como:

1. $CCD(0,T) = 0$.
2. $CCD(V^*(T),T) = \gamma V^*(T)$.
3. $CCD(V,0) = \text{mín}\{V, \text{máx}\{B, \gamma V\}\}$.

Donde γ es la fracción del capital que podría ser exigido por parte de los propietarios de las deudas convertibles, si todos los certificados de reintegro fueron reconvertidos, B es un bono libre de riesgo con la mismo fecha de vencimiento y los cupones $V^*(T)$ es el calendario de la empresa de acciones que es óptimo. El valor del CCD sólo puede ser resuelto numéricamente.

6.9. Análisis de Activos Contingentes y LYONs

Esta sección está basado principalmente en [45][7] y en los siguientes artículos [8], [45] y [66].

Uno de los más inusuales tipos de bonos convertibles son las notas de retorno líquidas (LYON)[8]. Estas notas es un bono de cupón cero (es decir, el principal y los intereses se pagan de manera conjunta a la fecha de vencimiento), es convertible en acciones, tiene una opción de pre-pago y puede ser vendido. Como [45], indican que la complejidad de este activo financiero es incrementada debido a que los

[7] Eduardo Schwartz, Es uno de los más prestigiosos profesores chilenos de finanzas en el mundo. Con un Master y PhD en Finanzas de la Universidad de British Columbia e Ingeniero Civil de la Universidad de Chile. Actualmente es full-professor de Finanzas en la Anderson School de la Universidad de California, UCLA y posee una de las pocas Chair de esa escuela, máximo nivel que alcanza un académico en el sistema universitario.

[8] En inglés, Liquid Yield Option Notes

precios al cual el emisor puede comprar el bono y el precio al cual el inversor puede vender el bono es escalada a través del tiempo. Ellos desarrollaron un modelo de valoración de opciones LYONs empleando la técnica del análisis de activos contingentes asumiendo que el valor de las opciones LYON depende del precios de acciones de los emisores (S).

Por lo tanto, de acuerdo a los supuestos de Black y Scholes del precio de una opción LYON (L) se debe satisfacer, como siempre, la típica ecuación diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 L}{\partial S^2} + (rS)\frac{\partial L}{\partial S} - \frac{\partial L}{\partial T} - rL = 0$$

La solución de la ecuación diferencial parcial está sujeta a las siguientes cuatro condiciones de frontera dada por la definición de las opciones LYON:

1. $L(S,T) = \text{máx}(C_r S, F)$.
2. $L(S,t) \geq C_r S$.
3. $L(S,t_p) \geq P(t_p)$.
4. $L(S,t) \leq \text{máx}\{C(t), C_r S\}$

Donde:

S	:	*Precio de las Acciones.*
C_r	:	*Ratio de Conversión.*
$C_r S$	:	*Valor de la Conversión.*
F	:	*Valor nominal de la opción LYON en la fecha de maduración.*
$P(t_p)$	:	*Precio de venta en el tiempo t_p.*
$C(t)$	:	*Precio de compra de la opción LYON en el tiempo t.*

Aunque no existe una solución explícita para esta ecuación diferencial parcial, este puede ser resuelto por medio de métodos numéricos.

7

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue investigar, y en consecuencia conocer, con más precisión y detalle, la relación y los principios fundamentales de la matemática que gobiernan la solución de Modelo de Black - Scholes - Merton (BSM), para la determinación del precio de las opciones en particular, y en general, de todo derivado financiero que sigue procesos estocásticos relativamente estandarizados. La matemática es compleja y está lejos de ser entendida por traders de Wall Street y por CFA y MBAs, que son los principales usuarios de estos modelos. Al menos en un porcentaje, aunque sea menor, de la actual crisis financiera, probablemente está explicada por la excesiva matemática y física que está implícita en estos modelos. Al respecto, ya en el año 2007, Pablo Triana, Director del Centre for Advanced Finance del Instituto de Empresa Business School de España señalaba: *Quizás hemos estado asumiendo una excesiva complejidad detrás de las cotizaciones de las opciones, dando por sentado la influencia de construcciones cuantitativas imposibles de entender* *para aquellos sin un PhD en física*. En efecto, precisamente por lo anterior, en este trabajo, se ha desarrollado de manera etápica y consistente, los principales elementos de la matemática y de la física matemática, que son necesarios para comprender la valoración de instrumentos financieros derivados y sus aplicaciones. Hasta ahora, esta sistematización ordenada y de detalle no ha estado presente en la literatura y es la principal contribución de la tesis.

Mediante las herramientas de la teoría de la probabilidad, el análisis estocástico y las ecuaciones diferenciales parabólicas, hicieron posible la obtención de una fórmula de valoración de las opciones financieras, bajo ciertos supuestos de mercado. Este tipo de valoración tiene sus inicios en la tesis doctoral de Bachelier (1900), posteriormente su formulación fue mejorada por Sprenkle (1961), asumiendo que los retornos son lognormales. Más tarde en 1964, Boness logró mejorar esta fórmula al incorporar el valor temporal del dinero, a través del descuento del precio terminal de la acción, empleando la tasa esperada del retorno de la acción. Ya en 1965, Samuelson obtuvo la fórmula de valoración de una warrant, tomando en cuenta que los posibles valores del activo del warrant siguen una distribución lognormal y un movimiento geométrico browniano.

Luego de obtener la fórmula para la valoración de opciones financieras del tipo de europeo, se logró aplicarla a la valoración de garantías financieras, donde se muestra que el valor de la garantía es igual al valor de una opción de venta europea.

El modelo de BSM desde hace algunos años, se ha visto abordado por una serie de acantonamientos a su metodología y a sus supuestos. Estas criticas comenzaron en 1998, cuando paradojalmente, el fondo de inversión gestionado directamente por los premios Nobel Myron Scholes y Robert Merton, **Long-Term Capital Management**[1] (LTCM) quebró con pérdidas de más de 3 billones de dólares, amenazando la estabilidad financiera mundial. Evidentemente, estas críticas han sido ejercidas con mayor fuerza producto de la actual crisis financiera y sus efectos en ésta de la presencia de los credit de default swap. Uno de los mayores críticos, ha sido Nassin Nicholas Taleb, cuyos principales argumentos de su pensamiento se pueden encontrar en un libro llamado el **Cisne Negro: El Impacto de lo altamente improbable** (Taleb (2008)). En dicho libro, se realiza un análisis audaz y original de

[1]Para una revisión sobre desastres financieros, consultar [53]

como las personas tratamos de dar sentido a acontecimientos imprevistos, y particularmente porque la distribución normal no funciona en la realidad. También el matemático BenoÎt Mandelbrot ha criticado los métodos de BSM de manera indirecta, al generalizar el movimiento browniano, por medio de un modelo basado en el vuelo de Lévy. El uso de la distribución de Lévy busco explicar las grandes fluctuaciones en los mercados, el cual no puede ser explicado por medio del movimiento browniano que utiliza BSM.

En un reciente estudio, que potencialmente puede ser revolucionario, Haug y Taleb (2009) exponen dos argumentos muy atrevidos que están dirigidos directamente al al centro del modelo de valoración de opciones Black-Scholes-Merton. Primero, argumentan que BSM no supuso ninguna invención original, dado que formulas similares ya existían con anterioridad. Segundo, la mayoría de los traders valora opciones usando bien los métodos pre-BSM ó sin utilizar ningún modelo en absoluto (simplemente vía oferta y demanda). Haug y Taleb (2009) señalan que la fórmula realmente utilizada debería ser llamada **Bachelier-Thorp**, en honor del matemático francés Louis Bachelier, que en 1900 inventó los métodos matemáticos utilizados para describir el comportamiento de los activos financieros (Bernstein (2005)) y Edwars Thorp, que a finales de los 60 obtuvo una fórmula igual a BSM, la cuál utilizó en la práctica antes de la publicación de BSM. Sus métodos, según Haug y Taleb (2009), son superiores porque, al contrario que BSM, no imponen la distribución normal y no dependen de las técnicas de replicación dinámica (imprácticas en la realidad) que asumen que los dealers de opciones pueden cubrir sus posiciones mediante compra y venta continua del activo subyacente. Todo esto tiene dos implicaciones claves. Por un lado, la aplicación de modelos matemáticos sofisticados en finanzas podría perder credibilidad.

Futuras Línea de Investigación.

Una primera línea de investigación, está precisamente orientada a re-estudiar los supuestos y las implicancias de las críticas señaladas por Haug y Taleb (2009), incluyendo los modelos basados en los vuelos de Lévy, la teoría fractal, redes neuronales y las implicancias de la inclusión (o no) de las volatilidades estocásticas basados en modelos de tipo ARCH y GARCH en valoración de derivados, de tal forma de contribuir a ampliar el conocimiento en lo que se ha denominado ciencia de la incertidumbre.

Una segunda línea de investigación que puede resultar interesante, es encontrar y sistematizar los elementos de fundamentos y conceptuales de otros métodos de valoración de opciones. Al respecto, se señala que los mecanismos de valoración de opciones pueden ser clasificados en cuatro categorías:

1. Valoración a través de la solución de una Ecuación Diferencial Parcial. Este método es el más elegante y genera una solución analítica al problema de valoración de opciones. Como ha sido desarrollado a lo largo de esta investigación, la fórmula más conocida de valoración de opciones es la de Black y Scholes (1973), que pertenece a esta clase de soluciones. Desgraciadamente, debido a las particularidades de cada problema, no siempre es posible encontrar soluciones analíticas y es necesario intentar alguno de los otros procedimientos.

2. Valoración por Programación Dinámica. Este método es esencialmente numérico y esta basado en la optimalidad de las decisiones de los agentes en cada momento del tiempo. El mas común dentro de esta clase es el método árboles binomiales desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein (1979).

3. Valoración por Simulaciones. En este caso se generan múltiples trayectorias posibles para las variables y se estiman los valores esperados incorporando las opciones que existen **en el camino**. El método más usual en esta clase de mecanismos es Monte Carlo, que en su aplicación a valoración de opciones ha sido propuesto por Boyle (1977), el cual se ha popularizado en los últimos años por la existencia de computadores de alto poder de memoria y rapidez.

4. Para el caso de opciones que puede ser ejercidas en cualquier momento del tiempo (es decir las denominadas opciones americanas), el método más común es el propuesto por el Longstaff y Schwartz (2001).

Como se ha señalado, una forma alternativa de valoración de garantías por Black y Scholes es invocando el principio de valoración neutral al riesgo, que establece que cualquier activo cuyo valor dependa del precio de un activo subyacente (acciones, tráfico, tarifas, tipo de cambio, precios de los commodities, entre otros) puede valorarse desde el supuesto que el mundo es neutral al riesgo. Este modelo ha sido desarrollado por Cox et al (1976), el cual relaciona el principio neutral al riesgo y árboles binomiales. Esto significa que para propósitos de valorar una opción o cualquier activo derivado se puede suponer que:

1. La rentabilidad esperada de todos los valores es el tipo de interés libre de riesgo

2. Los flujos de caja futuros pueden valorarse descontando sus valores esperados al tipo de interés libre de riesgo.

Bajo este argumento, la gran contribución es que no requiere necesariamente absolutamente ninguna información acerca de las probabilidades que pueden tomar el o los activos subyacentes en el futuro, y basta con asumir los posibles valores que tomará el activo subyacente y la probabilidad se calcula exógenamente. Este resultado es sorprendente y muy útil para valorar opciones, pero a mi juicio, los supuestos en los cuales descansa también pueden ser sistematizados y ordenados, y conectados con la ecuación fundamental de calor.

En las aplicaciones de análisis de activos contingentes (AAC), y manteniendo por cierto, las prescripciones y formulaciones de BSM, la gama de líneas de investigación es muy amplia. Por ejemplo, es posible, especialmente en tiempos de turbulencia financiera, estudiar la aplicabilidad de los modelos de incumplimiento (default) de empresas privadas, valoración de empresas cómo método complementario al flujo de caja descontado (DFCF), valorización y calculo de precios de garantías de seriedad o garantías de crédito tales como los stand by letter of credits , seguros de depósitos bancarios, compromisos de deuda, pensiones mínimas para el caso de las AFPs, seguros de desempleo, seguros agrícolas, seguros médicos, entre otras aplicaciones.

Finalmente, una línea interesante que recientemente ha sido formalizada en Hinojosa (2008), son las opciones reales, es decir la flexibilidad aplicada a la evaluación social de proyectos. La aplicación y la forma cómo los supuestos de Black y Scholes soportan su utilización en inversiones públicas principalmente de infraestructura con capitales privados, son especialmente importantes para la incorporación de manera formal en las metodologías de sistemas nacionales de inversión, tales como el SNIP.

A

Tiempo Continuo

En los mercados financieros se comercializan activos en intervalos de tiempo muy frecuentes (fracciones de minutos). Una razonable aproximación (teórica) es considerar intervalos de tiempo cercanos a cero, lo cual nos ubicaría en un mundo de modelos de tiempo continuo. Técnicamente, estos modelos son fáciles de manejar, y la fórmula de B&S esta basado en un modelo de tiempo continuo.

A.1. La Tasa de Descuento.

Una de las primeras cosas que cambian en el tiempo continuo es la tasa de descuento, esto se manifiesta cuando necesitamos homogenizar las utilidades obtenidas en tiempos diferentes, dado que no es lo mismo recibir A unidades monetarias ahora que recibirlas dentro de cuatro o cinco años, como tampoco es lo mismo tener de utilidad U ahora que tenerla dentro de varios años. Por consiguiente, la tasa de descuento es una medida financiera que nos permite determinar el valor actual de un pago futuro.

Consideremos el siguiente ejemplo, Supongamos que se deposita en un banco $\$A$ a una tasa de interés anual del $\delta\,\%$. Dicha cuenta de ahorro se mantiene abierta durante varios años, sin ingresos, ni reintegros, acumulándose de esta manera los intereses ganados en el tiempo. Procedamos a calcular la cantidad de dinero que se va acumulando año tras año, debido a la tasa de interés. Para ello consideremos los siguientes casos, según la forma de como se contabiliza la tasa de interés: una vez al año, dos veces al año, n veces al año y de manera continua.

A.1.1. El Interés es contabilizado una vez al año.

La cantidad de dinero que se tendrá en la cuenta a través del tiempo será:

- Al inicio, A.
- Al cabo de un año, $(1+\delta)A$.
- Al cabo de dos años, $(1+\delta)^2A$.
- Al cabo de tres años, $(1+\delta)^3A$.
- En general, al cabo de t años, $(1+\delta)^tA$.

Es decir, la cantidad acumulada dentro de t años es $B = (1+\delta)^tA$. En la siguiente tabla se muestra la proyección de la cantidad acumulada a diferentes tasas de interés en el tiempo, donde se considera que $A = \$10,000$

Tabla A.1: Valores futuros cuando de contabiliza una vez al año

Tiempo (Años)	$\delta = 2\,\%$	$\delta = 3\,\%$	$\delta = 4\,\%$	$\delta = 5\,\%$
1	10,200.00	10,300.00	10,400.00	10,500.00
2	10,404.00	10,609.00	10,816.00	11,025.00
3	10,612.08	10,927.27	11,248.64	11,576.25
4	10,824.32	11,255.09	11,698.59	12,155.06
5	11,040.81	11,592.74	12,166.53	12,762.82
10	12,189.94	13,439.16	14,802.44	16,288.95

20	14,859.47	18,061.11	21,911.23	26,532.98
50	26,915.88	43,839.06	71,066.83	114,674.00

Fuente: Elaboración Propia

La tabla anterior muestra el monto acumulado para diferentes tasas de interés, en el tiempo. Recíprocamente, si deseamos conocer cuanto es el cantidad que debemos de depositar para tener $\$B$ en la cuenta dentro de t, se calcula de la siguiente manera:

$$A = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^t B \tag{A.1}$$

Está fórmula, se puede leer de la siguiente manera: $\$B$ dentro de t años, corresponde a (A.1) dólares ahora.

A continuación, se presenta en la siguiente tabla, la proyección del deposito que se tiene que realizar, a diferentes tasas de interés en el tiempo. Con $B = \$10,000$

Tabla A.2: Valores presentes descontados al contabilizar una vez al año

Tiempo (Años)	$\delta = 2\,\%$	$\delta = 3\,\%$	$\delta = 4\,\%$	$\delta = 5\,\%$
1	9,803.92	9,708.74	9,615.38	9,523.81
2	9,611.69	9,425.56	9,245.56	9,070.29
3	9,423.22	9,151.42	8,889.96	8,638.38
4	9,238.45	8,884.87	8,548.04	8,227.02
5	9,057.31	8,626.09	8,219.27	7,835.26
10	8,203.48	7,440.94	6,755.64	6,139.13
20	6,729.71	5,536.76	4,563.87	3,768.89
50	3,715.28	2,281.07	1,407.13	872.04

Puente: Elaboración Propia

A.1.2. El interés es contabilizado dos veces al año.

Manteniendo las condiciones anteriores, pero teniendo en cuenta que la cuenta se contabiliza dos veces al año, i.e., cada seis meses. Entonces el monto se obtendrá en la cuenta a través del tiempo será:

- Al inicio, A.

- Al cabo de seis meses, $\left(1+\frac{\delta}{2}\right)A$.
- Al cabo de un año, $\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2 A$.
- Al cabo de año y medio, $\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^3 A$.
- Al cabo de dos años, $\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^4 A$.
- En general, al cabo de t años, $\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2t} A$.

Es decir, la cantidad acumulada dentro de t años es $B = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2t} A$. En la siguiente tabla se muestra la proyección de la cantidad acumulada a diferentes tasas de interés en el tiempo, donde se considera que $A = \$10,000$

Tabla A.3: Valores futuros cuando de contabiliza una vez al año

Tiempo (Años)	$\delta = 2\%$	$\delta = 3\%$	$\delta = 4\%$	$\delta = 5\%$
1	10,201.00	10,302.25	10,404.00	10,506.25
2	10,406.04	10,613.64	10,824.32	11,038.13
3	10,615.20	10,934.43	11,261.62	11,596.93
4	10,828.57	11,264.93	11,716.59	12,184.03
5	11,046.22	11,605.41	12,189.94	12,800.85
10	12,201.90	13,468.55	14,859.47	16,386.16
20	14,888.64	18,140.18	22,080.40	26,850.64
50	27,048.14	44,320.46	72,446.46	118,137.16

Fuente: Elaboración Propia

La tabla anterior muestra el monto acumulado para diferentes tasas de interés, en el tiempo. Recíprocamente, si deseamos conocer cuanto es el cantidad que debemos de depositar para tener $\$B$ en la cuenta dentro de t, se calcula de la siguiente manera:

$$A = \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}} \right)^{2t} B \tag{A.2}$$

Está fórmula, se puede leer de la siguiente manera: $\$B$ dentro de t años, corresponde a (A.2) dólares ahora.

A continuación, se presenta en la siguiente tabla, la proyección del deposito que se tiene que realizar, a diferentes tasas de interés en el tiempo. Con $B = \$10,000$, que es contabilizado dos veces al año.

Tabla A.4: Valores presentes descontados al contabilizar una vez al año

Tiempo (Años)	$\delta = 2\%$	$\delta = 3\%$	$\delta = 4\%$	$\delta = 5\%$
1	9,802.96	9,706.62	9,611.69	9,518.14
2	9,609.80	9,421.84	9,238.45	9,059.51
3	9,420.45	9,145.42	8,879.71	8,622.97
4	9,234.83	8,877.11	8,534.90	8,207.47
5	9,052.87	8,616.67	8,203.48	7,811.98
10	8,195.44	7,424.70	6,729.71	6,102.71
20	6,716.53	5,512.62	4,528.90	3,724.31
50	3,697.11	2,256.29	1,380.33	846.47

Fuente: Elaboración Propia

A.1.3. El interés es contabilizado n veces al año.

En este caso, el monto se obtendrá en la cuenta a través del tiempo será:

- Al inicio, A.
- Al cabo de $\frac{1}{n}$ años, $\left(1 + \frac{\delta}{n}\right) A$.
- Al cabo de $\frac{2}{n}$ años, $\left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^2 A$.
- Al cabo de $\frac{3}{n}$ años, $\left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^3 A$.

- Al cabo de un año, $\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{n} A.$
- Al cabo de dos años, $\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{2n} A.$
- En general, al cabo de t años, $\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{tn} A.$

Es decir, la cantidad acumulada dentro de t años es $B = \left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{tn} A.$
En la siguiente tabla se muestra la proyección de la cantidad acumulada a diferentes tasas de interés en el tiempo, donde se considera que $A =$ \$10,000, para $\delta = 4\,\%$.

La tabla anterior muestra el monto acumulado para diferentes tasas de interés, en el tiempo. Recíprocamente, si deseamos conocer cuanto es el cantidad que debemos de depositar para tener \$$B$ en la cuenta dentro de t, se calcula de la siguiente manera:

$$A = \left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{n}}\right)^{tn} B \tag{A.3}$$

Está fórmula, se puede leer de la siguiente manera: \$$B$ dentro de t años, corresponde a (A.3) dólares ahora.

A continuación, se presenta en la siguiente tabla, la proyección del deposito que se tiene que realizar, a diferentes tasas de interés en el tiempo. Con $B =$ \$10,000, y $\delta = 4\,\%$ que es contabilizado n veces al año.

A.1.4. El interés es contabilizado de manera continua.

Si asumimos que el intervalo de tiempo es casi cero, entonces contabilizaremos de manera continua, i.e., este es el caso cuando n tiende al infinito. Entonces, la monto de dinero que se tendrá al cabo de t años será:

Tabla A.5: Valores futuros cuando se contabiliza *n* veces al año

Año	$n = 2\,\%$	$n = 3\,\%$	$n = 4\,\%$	$n = 5\,\%$	$n = 6\,\%$	$n = 10\,\%$	$n = 20\,\%$	$n = 50\,\%$	$n = 100\,\%$
1	10,404.00	10,405.36	10,406.04	10,406.45	10,406.73	10,407.28	10,407.69	10,407.94	10,408.02
2	10,824.32	10,827.15	10,828.57	10,829.42	10,830.00	10,831.14	10,832.01	10,832.52	10,832.70
3	11,261.62	11,266.03	11,268.25	11,269.59	11,270.48	11,272.27	11,273.62	11,274.43	11,274.70
4	11,716.59	11,722.71	11,725.79	11,727.64	11,728.88	11,731.36	11,733.23	11,734.36	11,734.73
5	12,189.94	12,197.90	12,201.90	12,204.31	12,205.92	12,209.16	12,211.59	12,213.05	12,213.54
10	14,859.47	14,878.87	14,888.64	14,894.52	14,898.46	14,906.35	14,912.29	14,915.86	14,917.05
20	22,080.40	22,138.07	22,167.15	22,184.68	22,196.40	22,219.92	22,237.64	22,248.29	22,251.85
50	72,446.46	72,920.45	73,160.18	73,304.90	73,401.76	73,596.37	73,743.12	73,831.50	73,861.02

Fuente: Elaboración Propia

Tabla A.6: Valores presentes descontados al contabilizar n veces al año

Año	$n = 2\%$	$n = 3\%$	$n = 4\%$	$n = 5\%$	$n = 6\%$	$n = 10\%$	$n = 20\%$	$n = 50\%$	$n = 100\%$
1	9,66.69	9,610.43	9,609.80	9,609.42	9,609.17	9,608.66	9,608.28	9,608.05	9,607.97
2	9,238.45	9,236.04	9,234.83	9,234.10	9,233.61	9,232.64	9,231.90	9,231.46	9,231.31
3	8,879.71	8,876.24	8,874.49	8,873.44	8,872.74	8,871.33	8,870.27	8,869.63	8,869.42
4	8,534.90	8,530.45	8,528.21	8,526.86	8,525.96	8,524.16	8,522.80	8,521.98	8,521.71
5	8,203.48	8,198.14	8,195.44	8,193.83	8,192.74	8,190.57	8,188.94	8,187.96	8,187.63
10	6,729.71	6,720.94	6,716.53	6,713.88	6,712.10	6,708.55	6,705.88	6,704.27	6,703.74
20	4,528.90	4,517.11	4,511.18	4,507.61	4,505.23	4,500.47	4,496.88	4,494.73	4,494.01
50	1,380.33	1,371.36	1,366.86	1,364.17	1,362.37	1,358.76	1,356.06	1,354.44	1,353.89

Fuente: Elaboración Propia

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{tn}\times A &= A\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{tn} \\
&= A\times \text{lím}_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/\delta}\right)^{n/\delta}\right]^{t\delta} \\
&= Ae^{\delta t},
\end{aligned}$$

donde se emplea la siguiente fórmula:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=e.$$

Por consiguiente, en tiempo continuo tendremos la siguiente expresión:

$$B = Ae^{\delta t}$$

que es la cantidad obtenida al depositar en el banco a una tasa δ luego de t años. La siguiente tabla muestra los valores presentes contabilizados de manera continua. Donde $A = \$10,000$.

Tabla A.7: Valores futuros contabilizados de manera continua.

Tiempo (Años)	$\delta = 2\%$	$\delta = 3\%$	$\delta = 4\%$	$\delta = 5\%$
1	10,202.01	10,304.55	10,408.11	10,512.71
2	10,408.11	10,618.37	10,832.87	11,051.71
3	10,618.37	10,941.74	11,274.97	11,618.34
4	10,832.87	11,274.97	11,735.11	12,214.03
5	11,051.71	11,618.34	12,214.03	12,840.25
10	12,214.03	13,498.59	14,918.25	16,487.21
20	14,918.25	18,221.19	22,255.41	27,182.82
50	27,182.82	44,816.89	73,890.56	121,824.94

Fuente: Elaboración Propia

Recíprocamente, al igual como en los casos anteriores, la cantidad que se necesita depositar, para que dentro de t años se tenga $\$B$, viene expresado de la siguiente manera:

$$A = e^{-\delta t}B \tag{A.4}$$

esto se interpreta como, $\$B$ dentro de t años corresponde a (A.4) ahora. La siguiente tabla muestra los valores presentes descontados al contabilizar de manera continua.

Tabla A.8: Valores futuros contabilizados de manera continua.

Tiempo (Años)	$\delta = 2\%$	$\delta = 3\%$	$\delta = 4\%$	$\delta = 5\%$
1	9,801.99	9,704.46	9,607.89	9,512.29
2	9,607.89	9,417.65	9,231.16	9,048.37
3	9,417.65	9,139.31	8,869.20	8,607.08
4	9,231.16	8,869.20	8,521.44	8,187.31
5	9,048.37	8,607.08	8,187.31	7,788.01
10	8,187.31	7,408.18	6,703.20	6,065.31
20	6,703.20	5,488.12	4,493.29	3,678.79
50	3,678.79	2,231.30	1,353.35	820.85

Fuente: Elaboración Propia

B

Visual Basic:Valoración de Opciones Europeas

A continuación se muestra los algoritmos que hicieron posibles las salidas mostradas en el Capitulo 5: **Análisis de Demandas Contingentes y Aplicaciones,** como también en el Anexo A: **Tiempo Continuo**.

B.1. Simulación de un Movimiento Browniano Estándar.

```
Sub Simulacion_del_Movimiento_Browniano()
Dim T, dt, Sqrdt, BrownianMotion, i, N
```

```
T = InputBox("Ingrese en tiempo (T)")
N = InputBox("Ingrese el número de periodos (N)")
dt = T / N Sqrdt = Sqr(dt)
ActiveCell.Value = "Tiempo"
ActiveCell.Offset(0, 1) = "Movimiento Browniano"
ActiveCell.Offset(1, 0) = 0 ' Tiempo de Inicio
ActiveCell.Offset(1, 1) = 0 ' Valor inicial del Movimiento Browniano
BrownianMotion = 0
For i = 1 To N
        ActiveCell.Offset(i + 1, 0) = i * dt ' Siguiente vez
        BrownianMotion = BrownianMotion + Sqrdt * Application.NormSInv(Rnd())
        ActiveCell.Offset(i + 1, 1) = BrownianMotion ' Siguiente valor
Next i
End Sub
```

B.2. Simulación de un Movimiento Browniano Geométrico.

```
Sub Simulacion_del_Movimiento_Browniano_Geometrico()
Dim T, S, mu, sigma, dt, SigSqrdt, LogS, drift, i, N
T = InputBox("Ingrese en tiempo (T)")
N = InputBox("Ingrese el número de periodos (N)")
S = InputBox("Ingrese el Precio Inicial del Activo (S)")
mu = InputBox("Ingrese la Tasa del Retorno Esperado (mu)")
sigma = InputBox("Ingrese la Volatilidad")
dt = T / N Sqrdt = Sqr(dt)
drift = (mu - 0.5 * sigma * sigma) * dt
LogS = Log(S)
ActiveCell.Value = "Tiempo"
ActiveCell.Offset(0, 1) = "Precio del Activo"
ActiveCell.Offset(1, 0) = 0 ' Tiempo de Inicio
```

```
ActiveCell.Offset(1, 1) = S ' Valor inicial del Activo
BrownianMotion = 0
For i = 1 To N
        ActiveCell.Offset(i + 1, 0) = i * dt ' Siguiente vez
        LogS = LogS + SigSqrdt * Application.NormSInv(Rnd())
        ActiveCell.Offset(i + 1, 1) = Exp(LogS) ' Siguiente precio del Activo
Next i
End Sub
```

B.3. Valoración de una Opción Compra

```
Function BSM_Call(S, K, r, sigma, T)
'
' S=Precio inicial del activo
' K=Precio de ejercicio
' r=Tasa libre de riesgo
' Sigma=Volatilidad
' t=Tiempo de maduración
'
Dim d1, d2, N1, N2
If sigma=0 Then
        BSM_Call=Application.Max(0, S - Exp(-r * T) * K)
Else
        d1 = (Log(S / K) + (r + 0.5 * sigma * sigma) * T) / (sigma * Sqr(T))
        d2 = d1 - sigma * Sqr(T)
        N1 = Application.NormSDist(d1)
        N2 = Application.NormSDist(d2)
        BSM_Call = S * N1 - Exp(-r * T) * K * N2
Next If
End Function
```

B.4. Valoración de una Opción Venta

```
Function BSM_Call(S, K, r, sigma, T)
'
' S=Precio inicial del activo
' K=Precio de ejercicio
' r=Tasa libre de riesgo
' Sigma=Volatilidad
' t=Tiempo de maduración
'
Dim d1, d2, N1, N2
If sigma=0 Then
        BSM_Put=Application.Max(0, Exp(-r * T) * K - S)
Else
         d1 = (Log(S / K) + (r + 0.5 * sigma * sigma) * T) / (sigma * Sqr(T))
         d2 = d1 - sigma * Sqr(T)
         N1 = Application.NormSDist(-d1)
         N2 = Application.NormSDist(-d2)
         BSM_Put = Exp(-r * T) * K * N2 - S * N1
Next If
End Function
```

B.5. Simulación del Modelo de B&M para una Opción de Compra

```
Sub Simulación_de_BSM_Call()
Dim año, T, i, j, v, S, K, r
'
' S = Precio Actual del Activo
' K = Precio de Ejercicio
' r = Tasa Libre de Riesgo
```

```
'
año = InputBox("Ingrese el Año de Inicio")
T = InputBox("Fecha de Vencimiento en Años (T)")
S = InputBox("Ingrese el Precio Actual del Activo (S)")
K = InputBox("Ingrese el Precio de Ejercicio (K)")
r = InputBox("Ingrese la Tasa Libre de Riesgo (r)")
ActiveCell.Value = .^ño"
For v = 1 To 10
        ActiveCell.Offset(0, v) = v / 100 Next v
For i = 1 To T
        ActiveCell.Offset(i, 0) = año + (i - 1)
        For j = 1 To 10
                ActiveCell.Offset(i, j) = BSM_Call(S, K, r, j / 100, i)
        Next j
Next i
End Sub
```

B.6. Simulación del Modelo de B&M para una Opción de Venta

```
Sub Simulación_de_BSM_Put()
Dim año, T, i, j, v, S, K, r
'
' S = Precio Actual del Activo
' K = Precio de Ejercicio
' r = Tasa Libre de Riesgo
'
año = InputBox("Ingrese el Año de Inicio")
T = InputBox("Fecha de Vencimiento en Años (T)")
S = InputBox("Ingrese el Precio Actual del Activo (S)")
r = InputBox("Ingrese la Tasa Libre de Riesgo (r)")
```

B.Visual Basic:Valoración de Opciones Europeas

```
ActiveCell.Value = .^ño"
For v = 1 To 10
        ActiveCell.Offset(0, v) = v / 100 Next v
For i = 1 To T
        ActiveCell.Offset(i, 0) = año + (i - 1)
        K = InputBox("Ingrese el Precio de Ejercicio (K)")
        For j = 1 To 10
                ActiveCell.Offset(i, j) = BSM_Put(S, K, r, j / 100, i)
        Next j
Next i
End Sub
```

Bibliografía

[1] Ayres, H., (1963). **Risk Aversion in the Warrants Market,** Industrial Management Review 4: 497-505.

[2] Baumol, W., Malkiel, B., y Quant, R., (1966). **The Valuation of Convertible Securities,** Quarterly Journal of Economics 80: 48-59.

[3] Barry, J., (2004). **Probabilidad: Un curso de nivel intermedio,** Colección Textos del IMCA Nº 9, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA. Lima-Perú.

[4] Black, F. y Scholes, M., (1973). **The Pricing of Options and Corporate Liabilities,** Journal of Political Economy 81 (3). 637-654.

[5] Blanco, L., Muñoz, M., (2003). **Análisis Estocástico,** Notas de Clase, Facultad de Ciencias, Univerisdad Nacional de Colombia - Bogotá, Colombia.

[6] Boyle, P., (1977). **Options: A Monte Carlo Approach,** Journal of Financial Economics 4 (May), pp. 323-338.

[7] Boness, J., (1964). **Elements of a Theory of Stock Option Values,** Journal of Political Economy 72: 163-175.

[8] Brealey R., S. Myers, (1999). **Principles of Corporate Finance,** McGraw - Hill.

[9] Chen, A., (1970). **A Model of Warrant Pricing in a Dynamic Market,** Journal Finance 25: 1041-1060.

[10] Churchill, V., Brown J. (1993). **Fourier Series and Boundary Value Problems,** 5th ed. New York : McCraw-Hill.

[11] Clewlow L., C. Strickland, (1999) **Implementing Derivatives Models,** Wiley & Son.

[12] Copeland T., J.F. Weston, (1992). **Financial Theory and Corporate Policy,** Addison - Wesley Publishing Company

[13] Cox, J., Ross, S. y M. Rubinstein (1979). **Option Pricing: A Simplified Approach,** Journal of Financial Economics, Vol. 7, September, 229-263.

[14] Cox, J.C., Ross, S., (1976). **The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes,** Journal of Financial Economics 3: 145-166.

[15] Das, S. (1994). **Swap & Derivative Financing: The Global Reference to Products, Pricing, Applications and Markets** (Revised Ed.). Chicago: Probus Publishing.

[16] Durbin, M. (2005). **All about derivatives,** McGraw Hill

[17] Einstein, A., (1956). **Investigations on the Theory of the Brownian Movement,** New York, Dover.

[18] Fabozzi, F., (2000). **Bond Markets, Analysis and Strategies,** Fourth Edition Prentice Hall.

[19] Fernández, P., (1997). **Utilización de la Formula de Black y Scholes para Valorar Opciones,** Nota Técnica de la División de Investigación del IESE, Universidad de Navarra, Barcelona, España.

[20] Gonzáles, M., Trejo, M., (2000). **Estrategias de Cobertura Utilizando Productos Derivados,** Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Univerisdad Nacional Autonoma de México, México.

[21] Hai-Feng, Y., San-Yang, L., (2003). **New Method to Option Pricing for the General Black Scholes Model: An Actuarial Approach,** Applied Mathematics and Mechanics, English Edition, Vol 24, Nº7, July, Shangai University, Shangay, China.

[22] Harrison, M. y Kreps, D., (1979). **Martingales and Arbitraje in Multiperiod Securities Markets,** Journal of Economic Theory, Nº20, Pág. 381-408.

[23] Hinojosa, S., (2008). **Valoración de Pasivos Contingentes y Garantías Financieras: Un Análisis Cuantitativo para el Corredor Amazonas Centro en Perú,** Paper 2 Tesis Doctoral PhD Management Science ESADE Bussiness School.

[24] Hinojosa, S., (2008). **Opciones Reales en Inversiones Públicas: Un eslabón que falta,** parte de documentos para Tesis PhD in Management Science ESADE Business School.

[25] Hinojosa, S., (2001). **Contingent Claims Analysis: Warrants, Convertibles and Lyons Pricing,** The George Washington University. Mimeo.

[26] Hinojosa, S. (2000). **IFC Partial Credit Guarantees Pricing: Contingent Analysis Approach,** International Finance Corporation The World Bank.

[27] Hinojosa, S., (2000). **Contingent Liabilities Analysis and Government Guarantee Programs: An application to a Chilean Infrastructure Project,** The George Washington University Mimeo.

[28] Hirst, K., (2006). **Calculus of One Variable,** Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, London.

[29] Hull, J., (2002). **Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones,** Cuarta Edición, Editorial Pearson Prentice Hall, España.

[30] Ibarrola, P., Pardo, L., Quesada, V., (1997). **Teoria de la Probabilidad,** Matemáticas Universidad, Editorial Síntesis, Madrid, España.

[31] Itô, K., (1944). **Stochastic Integral,** Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, pp. 519-524.

[32] Karatzas, I., Shreve, S., (1998). **Methods of Mathematical Finance,** Volume 39 in the series *Applications of Mathematics*, Springer-Verlag, New York.

[33] Kolb, R. (1997). **Futures, Options, and Swaps** Blackwell Publishers, International Edition.

[34] Korajczyk, R. (1999). **Asset Pricing and Portfolio Performance: Models, Strategy and Performance Metrics**. London: Risk Books.

[35] Korn, E., Korn R., (2006). **Evaluación de Opciones,** Management Mathematics for European Schools (MaMaEuSch), Universidad Técnica de Kaiserslautern, Alemania.
http://www.optimierung.mathematik.unikl.de/mamaeusch
/veroeffentlichungen/

[36] De Lara, A., (2004). **Medición y Control de Riesgos Financieros** Tercera Edición, Limusa Editores.

[37] Lintner, J., (1965). **The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets,** Review Economic and Statistics 47: 768-783.

[38] Laboratorio de Modelación Matemática (LMM), (2004). **Modelos Matemáticos para la Valoración de Opciones Financieras,** Informe FIUBA-LMM RA01-01-2004, Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA), Argentina. http://www.fi.uba.ar/laboratorios/lmm/informes/

[39] London, J., (2005). **Modeling Derivatives in C++,** John Wiley & Sons.

[40] Longstaff, F. y Schwartz, E., (2001). **Valuing american options by simulation: A simple least -squares approach,** The Review of Financial Studies, Vol. 14,Nº 1, pp. 113-147.

[41] Margalef-Roig, J., Miret-Artes, S., (2001). **Cálculo Estocástico Aplicado a las Finanzas: Precio de las Opciones según el Modelo de Black Scholes Merton y Algunas Generalizaciones,** Instituto de Matemática y Física Fundamental (IMAFF), Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), Madrid, España.

[42] Marin, J. y Rubio, G., (2001). **Economía Financiera,** Antoni Bosh, Barcelona, España.

[43] Mascareñas, J., (1998). **Las Decisiones de Inversión como Opciones Reales: Un enfoque conceptual,** Documento de Trabajo Nº 9805. Universidad Complutense. Madrid, España.

[44] Mazo, R., (2002). **Brownian Motion: Fluctuations, Dynamics, and Applications,** Oxford University Press.

[45] McConnell, J. y E. Schwartz (1986). **LYON Taming,** Journal of Finance, vol 41, issue 3, pp 561-576.

[46] Merton, Robert C. y Bodie, Zvi (1992). **On the management of Financial Guarantees,** Financial Management, Winter 1992, 21 (4), pág: 87-109.

[47] Mason, S., Merton, R., (1985). **The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance**. In Recent Advances in Corporate Finance,

edited by E. I. Altman and M. G. Subrahmanyam. Homewood, Ill.: Richard D. Irwin.

[48] Merton, R., (1973). **Theory of Rational Option Pricing,** Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1):141-183.

[49] Merton, R., (1974). **On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,** Journal of Finance, Vol. 29: 449-70.

[50] Miller, M. (1997). **Merton Miller on Derivatives,** New York: John Wiley.

[51] Mossin, J., (1966). **Equilibriun in a Capital Asset Market,** Econometrica 34: 768-783.

[52] Raffo, E., Mejía, M., (2006). **Aplicaciones computacionales de las ecuaciones diferenciales estocásticas,** Ind. data. ene./jun, vol.9, no.1, p.64-75. http://www.scielo.org.pe

[53] Ramón, J. y Blanco, C., (2000). **Valor en Riesgo: Aplicación a la gestión empresarial,** Ediciones Pirámide, Madrid, España.

[54] Ross, S., (2007). **Introducción a la Estadística,** Primera Edición, Editorial Reverte

[55] Ross, S., (1976). **Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing.** Journal of Economic Theory, Nº13, Pág. 341-360.

[56] Rudin, W., (1990). **Principios de Análisis Matemático,** Tercera Edición. McGraw-Hill.

[57] Sharpe, W., (1964). **Capital Asset Prices: A Theory Market Equilibrium Under Conditions of Risk,** Journal Finance 19: 425-442. (1970).**Portfolio Theory and Capital Markets,** McGraw Hill, New York.

[58] Sheldon, N., (1994). **Option, Volatility & Pricing,** McGraw Hill Publishers.

[59] Shimko, D. C., (1992). **Finance in Continuous Time: A Primer,** Kolb Publishing Company, Miami, FL.

[60] Solá, M., (2007). **Riesgo, Incertidumbre y Finanzas,** Notas de Clase, Departamento de Economía, Universidad Torcuato Di Tella, Buenos Aires, Argentina, http://200.32.4.58/ẽconomia/rif/

[61] Sprenkle, C., (1961). **Warrant Prices as Indications of Expectations**, Yale Economic Essays 1: 179-232.

[62] Steele, J. M., (2000). **Stochastic Calculus and Financial Applications**, Volume 45 in the series *Applications of Mathematics*, Springer-Verlag, New York.

[63] Sukhomlin, N., (2004). **Simetría y Nuevas Soluciones de la Ecuación de Black Scholes**, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XI, Nº2. Venezuela.

[64] Treynor, Jack, L., (1961). **Toward a Theory of Market Value of Risky Assets**. Manuscrito no publicado. Posteriormente publicado en el Capítulo 2 de Korajczyk (1999).

[65] Vasallo, J. (2005). **Traffic Risk Mitigation in Highway Concession Projects**, Mimeo

[66] Walmsley , J., (1998). **New Financial Instruments**, Second Edition, Wiley.

[67] Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J., (2002). **The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction**, Cambridge University Press. Cambridge, United Kingdom.

Páginas Web

- http://www.laitman.com
- http://www.behavior-analysis.org/
- http://www.economist.com/
- http://online.wsj.com/public/us
- http://www.ft.com/home/us