

Universidad Nacional de Ingeniería

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA



Ecuaciones y Variables de Estado

en el Análisis de Máquinas

Eléctricas

TITULACION POR EXAMEN

PROFESIONAL

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE
INGENIERO ELECTRICISTA**

Luis Alberto Liacua Zarate

Promoción 1987 - II

LIMA - PERU

A MIS PADRES

SUMARIO

El estudio y tratado de las máquinas eléctricas constituye una de las áreas más antiguas de la ingeniería eléctrica, reside su importancia en el hecho de que estos aparatos electromecánicos proporcionan potencia para distintos y variados tipos de aplicaciones.

Así, para un análisis riguroso de la máquina eléctrica, es necesario formular sus ecuaciones diferenciales, las cuales son de orden superior, y su solución ha constituido siempre una gran dificultad para el investigador.

El trabajo realizado, propone y desarrolla rutas que permitan abordar éste análisis con relativa facilidad; para lo que se emplea el concepto de ecuaciones y variables de estado.

Para arribar a la ecuación de estado que gobierna el comportamiento de la máquina, se formula un proceso metodológico teniendo en cuenta los modelos circuitales que la representan.

Se presenta los resultados obtenidos en computador para el caso de transitorios en un motor de inducción trifásico.

**ECUACIONES Y VARIABLES DE ESTADO
EN EL ANALISIS DE MAQUINAS
ELECTRICAS**

EXTRACTO

TITULO : **ECUACIONES Y VARIABLES DE ESTADO
EN EL ANALISIS DE MAQUINAS
ELECTRICAS.**

AUTOR : **LUIS ALBERTO LLACUA ZARATE**

GRADO QUE OPTA : **INGENIERO ELECTRICISTA**

FACULTAD : **FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y
ELECTRONICA**

UNIVERSIDAD : **UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

AÑO : **1,996**

El trabajo consta de 4 capítulos en los que se aborda el modelo matemático que constituye las ecuaciones de estado, la metodología en el análisis de una máquina eléctrica en este caso generador síncrono y seguidamente una aplicación directa mediante simulación digital para un motor de inducción trifásico.

En el capítulo I, se desarrolla el concepto de las ecuaciones de estado, el criterio para definir las variables de estado y los métodos para la solución de éstas ecuaciones, tanto analíticamente como en forma digital.

El modelamiento de la máquina síncrona se desarrolla en el capítulo II; se ha incluido los pasos llevados a cabo para determinar las matrices inductancia y resistencia de la máquina con el propósito de establecer con claridad las

relaciones tensión-corriente que se presentan. Acotando que éste tratado se ha efectuado finalmente en el modelo D-Q en que se representa la máquina eléctrica.

En el capítulo III, se formula y desarrolla las ecuaciones de estado que resultan del modelamiento de la máquina síncrona. Adicionalmente se incluyen las ecuaciones de estado que se derivan de los reguladores de excitación y de velocidad.

Una aplicación concreta, lo constituye el análisis y posterior simulación de operación de un motor de inducción trifásico; que se desarrolla en el capítulo IV. En éste caso se arriba a la ecuación de estado particular, se estructura el programa utilizado en MATLAB y se obtiene resultados para determinadas condiciones de operación de la máquina.

INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	1
CAPITULO I	3
ECUACION DE ESTADO	3
1.1 Concepto de estado	3
1.2 Ecuaciones y variables de estado	4
1.3 Método de obtención de las ecuaciones de estado	5
1.4 Solución analítica de las ecuaciones de estado	8
1.5 Solución de las ecuaciones de estado en forma matricial	10
1.6 Matriz autovalores y autovectores	11
1.7 Las ecuaciones de estado y la trans- formada de Laplace	15
1.8 Solución digital	17
CAPITULO II	19
MODELAMIENTO DE LA MAQUINA SINCRONA	19
2.1 Conceptos básicos de la máquina síncrona	19
2.2 Modelo de fases de la máquina síncrona	20
2.2.1 Inductancias en el estator	20
2.2.2 Inductancias en el rotor	23
2.2.3 Inductancias mutuas rotor-estator	26
2.3 Matriz inductancias de la máquina síncrona	

	trifásica	27
2.4	Transformación abc \rightarrow dqo para los devanados rotóricos	28
2.4.1	Matriz inductancia transformada	31
2.4.2	Transformación de las resistencias abc \rightarrow dqo	33
2.5	Inductancias rotacionales	35
2.6	Ecuaciones V - I en la máquina síncrona transformada	35
2.7	Ecuación mecánica de la máquina síncrona	39
CAPITULO III		38
FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA LA MAQUINA SINCRONA		38
3.1	Selección de las variables de estado	40
3.2	Ecuaciones de estado en los ejes D y Q	42
3.3	Ecuaciones de la línea de transmisión	42
3.4	Ecuación de estado del regulador de excitación	42
3.5	Ecuación de estado del regulador de velocidad	44
CAPITULO IV		47
FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO DE LA MAQUINA ASINCRONA Y APLICACIONES		47
4.1	Conceptos básicos de la máquina asíncrona	47
4.2	Modelo d-q de la máquina asíncrona o de inducción	48
4.3	Circuito equivalente del motor de inducción	49
4.4	Potencia y par en el motor de inducción	50
4.4.1	Par electromagnético	52
4.5	Relación entre los parámetros R y X	52

4.6	Par máximo	54
4.7	Ecuación mecánica	55
4.8	Formulación de las ecuaciones y variables de estado	60
4.9	Solución de la ecuación de estado	61
4.9.1	Programas en MATLAB	62
4.10	Análisis de los resultados de las simulaciones	65
4.10.1	Casos simulados	66
4.10.2	Intensidad de corriente en el motor de inducción durante el transitorio produ- cido por una caída en la tensión aplicada	71
CONCLUSIONES		74
ANEXOS		77
BIBLIOGRAFIA		107

INTRODUCCION

El interés por pronosticar el comportamiento de una máquina eléctrica bajo determinadas condiciones de operación ha creado la necesidad de disponer de herramientas para determinar esa performance, los cuales generalmente son complicados.

En este propósito las ecuaciones de estado permiten establecer un marco teórico para un estudio efectivo de la máquina eléctrica, sin embargo ellos al mismo tiempo, constituyen un prerequisite para producir programas computacionales que finalmente permitan explorar resultados para una gran variedad de casos.

En consecuencia el objetivo del presente trabajo es probar la eficacia del método en el análisis particular de máquinas eléctricas, así entonces se proponen modelos circuitales clásicos que representan a la máquina eléctrica, se formulan las ecuaciones que la gobiernan; a continuación se definen las variables de estado y finalmente se culmina con la obtención de las ecuaciones de estado correspondientes.

Luego que en la primera parte se aclara el panorama teórico de las ecuaciones de estado, se continúa con lo que constituye en sí el objetivo del trabajo, la aplicación en el análisis de máquinas eléctricas.

En el tratado de la máquina síncrona trifásica, a partir del modelo de fases, se resume un análisis de los flujos magnéticos que permite la obtención de la matriz inductancia y resistencia de la máquina, utilizando luego la técnica de transformación abc \rightarrow dqo, se arriba a las ecuaciones de la máquina síncrona transformada; seguidamente se formulan las ecuaciones de espacio estado y se agrega las ecuaciones de los controladores del generador.

Como aplicación directa que resume el trabajo, se presenta el análisis durante el transitorio de un motor trifásico asíncrono; en este caso se utiliza como indicador de la estabilidad al ángulo de carga δ , fijándose como variables de entrada al voltaje y al torque de carga. La falla considerada es una perturbación en la tensión aplicada al motor. Se acompaña el programa implementado en MATLAB para la solución de la ecuación de estado obtenida, asimismo se adjunta los gráficos que resultaron de correr el programa.

Finalmente, deseo expresar mi profunda gratitud a esta Casa de Estudios que me formó, a todos quienes tuve la suerte de tener como profesores y en particular al MSc. Ing. Victor Cáceres Cárdenas por su gran apoyo.

CAPITULO I ECUACION DE ESTADO

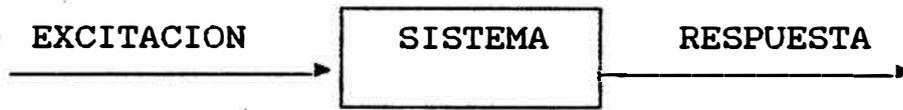
En el presente capítulo se aborda el modelo matemático que permite analizar sistemas en general, utilizando las variables y ecuaciones de estado. Asimismo, se indica además los métodos de solución que plantean para estas ecuaciones.

1.1 Concepto de estado

El estado es un concepto abstracto y en general puede describirse por un conjunto de cifras, una curva, una ecuación o algo que sea de naturaleza más abstracta, al igual que un número natural. Así el estado puede representarse de diversas maneras, como también por un conjunto de variables que determinan el comportamiento de un sistema.

Se entiende por sistema a un modo de organización, clasificación, gobierno, etc., que tiene por característica fundamental el de actuar conjuntamente cumpliendo determinado objetivo; pudiendo constituir un sistema objetos físicos o abstractos, por ejemplo: sistema mecánico, sistema económico, el primero constituido por partes mecánicas conectados entre sí y el segundo constituido por partes abstractas que interaccionan.

Se debe señalar que para representar los sistemas se emplean los diagramas de bloque.



Ecuaciones y variables de estado

Las ecuaciones de estado son ecuaciones diferenciales utilizados para la caracterización de sistemas en general. En éste caso las características de un sistema físico son tan complejas y diversas, que para analizarlo es necesario describirlo como un modelo idealizado.

Considerando, así entonces al estado como un vector, los componentes de éste vector se llaman variables de estado.

VECTOR ESTADO

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

▲
└ Variables de estado

VECTOR EXCITACION

$$f(t) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

▲
└ excitaciones

La ecuación de estado estará expresada por:

$$\frac{dx}{dt} = [A] x + [B] f \dots \dots \dots (1)$$

Donde:

es un vector de n componentes, representa el estado del sistema.

f es un vector de m componentes que representa las excitaciones.

[A] y [B] son matrices de coeficientes

Representando (1) un conjunto de ecuaciones llamados Ecuación de Estado, involucrando en ésta al propio vector de estado con el de excitación y siendo parte las variables de estado en X , es preciso adoptar por definición: "llámese variable de estado de un sistema al conjunto de aquellas variables $X(t)$, tal que si son conocidas para cualquier instante t_0 , así como la excitación en t , se puede determinar el estado para cualquier instante $t \geq t_0$ ".

1.3 Método de obtención de las ecuaciones de estado

Para obtener este grupo de ecuaciones, se usa un conjunto de n variables de estado, así estas pueden obtenerse:

- a) A partir de una ecuación diferencial de orden n , la que a su vez resulta de representar por ecuaciones cualquier sistema.
- b) Mediante análisis directo del sistema.

Método general de obtención de las ecuaciones de estado.

Sea una ecuación diferencial ordinaria de orden n :

$$\frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} v}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = f(t) \quad (a)$$

tal como se indicó al inicio, para obtener las n ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes, de 1^{er} orden; se necesita n variables de estado: $x_1 \dots x_n$.

Sea entonces:

$$x_1 = v$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = \dot{v}$$

$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = \ddot{v}$$

$$x_n = \frac{dx_{n-1}}{dt} = \frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}}$$

Reemplazando en la expresión (α):

$$\frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \dots + a_1x_2 + a_0x_1 = f(t) \quad \dots \quad (\beta)$$

Ordenando:

$$\frac{d^n v}{dt^n} = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_1x_2 - a_0x_1 + f(t)$$

Representando en forma matricial la ecuación (β),

resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

Por tanto, la "forma normal" de la ecuación de estado será:

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + bf(t)$$

Para sistemas que tienen más de una excitación o

entrada

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + [\mathbf{B}]\mathbf{f}(t)$$

donde:

[A] : matriz $n \times n$ "matriz de planta"

$\mathbf{x}(t)$: vector n "vector de estado"

[B] : matriz $n \times p$ "matriz de control"

$\mathbf{f}(t)$: vector p "vector de control o excitación"

Así por ejemplo, si el sistema tuviera dos entradas [A] sería una matriz $n \times n$; $\mathbf{x}(t)$ una matriz $n \times 1$, $\mathbf{f}(t)$ una matriz $n \times 1$ y [B] una matriz $n \times 2$.

Para sistemas invariantes en el tiempo, las ecuaciones de estado pueden representarse como:

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j(t) + \sum_{k=1}^p b_{ik} f_k(t)$$

donde a_{ij} y b_{ik} son coeficientes constantes.

El hecho de plantear las ecuaciones de un sistema en forma de ecuaciones de estado presenta las siguientes ventajas:

- a) Provee un marco teórico para el estudio de sistemas lineales y no lineales.
- b) Por lo tanto, se puede aplicar en la formulación de las ecuaciones en el análisis de circuitos

eléctricos, máquinas eléctricas, sistemas de potencia, etc.

- c) Por su estructura, la solución de las ecuaciones diferenciales puede efectuarse fácilmente, mediante el uso de programas en ordenadores.

1.4 Solución analítica de las ecuaciones de estado

Establecida la ecuación de estado como:

$$\dot{x}(t) = [A] x(t) + [B] f(t)$$

Para facilitar la comprensión se supone inicialmente $[B] = 0$, es decir sin excitación.

Luego:

$$\dot{x}(t) = [A] x(t) \quad \dots \dots \dots (I)$$

La solución está dada por:

$$x(t) = e^{[A](t-t_0)} x_0 \quad \dots \dots \dots (\alpha)$$

Derivando:

$$\dot{x}(t) = [A] e^{[A](t-t_0)} x_0$$

Resulta:

$$\dot{x}(t) = [A] x(t)$$

Por lo tanto, se confirma que (α) es la solución del sistema (I).

De la misma manera, para la ecuación de estado, modo

general:

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]f(t)$$

Al igual que el caso anterior, se postula una solución de la forma:

$$x(t) = e^{[A]t} z(t) \quad \quad (\beta)$$

Derivando:

$$\dot{x}(t) = [A]e^{[A]t} z(t) + e^{[A]t} \dot{z}(t)$$

Resulta:

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + e^{[A]t} \dot{z}(t)$$

Comparando con la Ecuación de Estado:

$$e^{[A]t} \dot{z}(t) = [B] f(t)$$

Luego:

$$\dot{z}(t) = e^{-[A]t} [B] f(t)$$

Integrando:

$$z(t) - z_0 = \int_{t_0}^t e^{-[A]t} [B] f(t) dt$$

Despejando:

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t e^{-[A]t} [B] f(t) dt$$

De (β) para $t = t_0$ (condición inicial)

$$x_0 = e^{[A]t_0} z_0$$

$$z_0 = e^{-[A]t_0} x_0$$

Por lo que:

$$z(t) = e^{-[A]t_0} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-[A]\tau} [B] f(\tau) d(\tau)$$

Finalmente, reemplazando en β :

$$x(t) = e^{[A]t} e^{-[A]t_0} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-[A]\tau} [B] f(\tau) d(\tau) e^{[A]t}$$

$$x(t) = e^{[A](t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{[A](t-\tau)} [B] f(\tau) d(\tau)$$

Que representa la solución general de la ecuación de estado.

1.5 Solución de las ecuaciones de estado en forma matricial

Dado la ecuación de estado.

$$\dot{x}(t) = [A] x(t) + [B] f(t)$$

Definiremos primeramente como matriz transición de estado a:

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + \frac{1}{2!} [A]^2 t^2 + \dots + \frac{1}{n!} [A]^n t^n + \dots$$

Derivando:

$$[A] e^{[A]t} = [O] + [A] + [A]^2 t + \dots + \frac{1}{(n-1)!} [A]^n t^{n-1}$$

Luego, se postula una solución:

$$x(t) = e^{[A](t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{[A](t-\tau)} [B] f(\tau) d(\tau)$$

que será la solución siempre que cumpla:

- a) $x(t)$ satisface las condiciones iniciales.
- b) $x(t)$ satisface la ecuación de estado.

Reemplazando las condiciones iniciales $t = t_0$ y luego derivando se comprueba, con lo que queda demostrado que es solución.

1.6 Matriz autovalores y autovectores

Como se ha detallado, la ecuación de estado para un sistema general de entradas múltiples, está representado por:

$$\dot{x}(t) = [A] x(t) + [B] f(t)$$

y su solución es:

$$x(t) = e^{[A](t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{[A](t-\tau)} [B] f(\tau) d(\tau)$$

para obtener la solución analítica, debe determinarse la matriz $e^{[A]t}$, para luego determinar la integral de un producto de matrices.

Para un sistema no acoplado y no forzado.

$$x_1^*(t) = \lambda_1 x_1^*(t)$$

$$x_2^*(t) = \lambda_2 x_2^*(t)$$

.....

.....

$$x(t) = \lambda_2 x_2^*(t)$$

Matricialmente, se tendrá:

$$\dot{x}^*(t) = [\lambda] x^*(t)$$

Según las relaciones de $\dot{x}^*(t)$ la matriz $[\lambda]$ estará dado por:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Definiéndose:

$$e^{[\lambda]t} = [I] + [\lambda]t + \frac{1}{2!} [\lambda]^2 t^2 + \dots + \frac{1}{n!} [\lambda]^n t^n + \dots$$

$$e^{[\lambda]t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\dot{x}^*(t) = [\lambda] x^*(t)$$

tienen soluciones de la forma:

$$x^*(t) = e^{[\lambda]t} x^*(0)$$

Los coeficientes de los exponentes λ_j , se llaman autovectores o valores característicos del sistema.

Para sistemas acoplados y no forzados la solución será:

$$\dot{x}(t) = [A]x(t)$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

La relación de $x(t)$ y $x^*(t)$ estará dado por una matriz $[T]$, denominada matriz de transformación, resultando:

$$x(t) = [T]x^*(t)$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^* \end{bmatrix}$$

Pero según:

$$x^*(t) = e^{[\lambda](t)} x^*(0)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(0) \\ x_2^*(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^*(0) \end{bmatrix}$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} x_1^*(0) \\ e^{\lambda_2 t} x_2^*(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{\lambda_n t} x_n^*(0) \end{bmatrix}$$

En donde, los valores iniciales, con $x(0)$ dado son:

$$x^*(0) = [T]^{-1} x(0)$$

$[T]$ es una matriz cuadrada $n \times n$ que también puede representarse como:

$$[T] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

Los vectores v_i que conforman la matriz $[T]$ se denominan autovectores del sistema, así como los coeficientes λ_i de la matriz $e^{[A]t}$ se denominan autovalores del sistema.

Así cada autovector es determinado según los autovalores obtenidos, mediante:

$$[[A] - \lambda_i [I]] [V_i] = [0] \quad i=1, 2, 3, \dots, n$$

La correspondencia de cada autovector a un autovalor, da como resultado n ecuaciones lineales algebraicas homogéneas.

Los autovalores o valores característicos, necesarios para estructurar la matriz correspondientes, se hallan a partir de:

$$\det [[A] - \lambda [I]] = 0$$

1.7 Las ecuaciones de estado y la transformada de Laplace

En los acápites anteriores se ha visto como resolver las ecuaciones de estado utilizando métodos analíticos y matriciales. Concluyendo asimismo, que gran parte de la solución radica en la obtención de la matriz transición de estado, definida por $e^{[A]t}$.

Así, para el caso de sistemas lineales invariantes (*), la determinación de la matriz transición de estado se facilita utilizando la Transformada de Laplace.

Mediante el uso de la Transformada de Laplace, las operaciones de derivación e integración pueden ser reemplazados por operaciones algebraicas, con lo que la solución de ecuaciones integro-diferenciales se reduciría a una solución algebraica equivalente. Conociendo los teoremas fundamentales:

$$\mathcal{L} \{ f(t) + g(t) \} = \mathcal{L} \{ f(t) \} + \mathcal{L} \{ g(t) \}$$

$$\mathcal{L} \{ cf(t) \} = c \mathcal{L} \{ f(t) \}$$

$$\mathcal{L} \{ f'(t) \} = s \mathcal{L} \{ f(t) \} - f(0)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \int_a^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L} \{f(t)\} + \frac{1}{s} \int_a^{\cdot} f(t) dt$$

(*) No se puede aplicar a sistemas lineales variantes.

Aplicando estas propiedades a las ecuaciones de estado, que en forma general se representa por:

$$\dot{x}(t) = [A] x(t) + [B] f(t)$$

Aplicando Teorema de Laplace se obtiene:

$$\mathcal{L} \{\dot{x}(t)\} = \mathcal{L} \{[A] x(t) + [B] f(t)\}$$

$$s X(s) - X(\bar{0}) = \mathcal{L} \{[A] x(t)\} + \mathcal{L} \{[B] f(t)\}$$

$$s X(s) - X(\bar{0}) = [A] \mathcal{L} \{x(t)\} + [B] \mathcal{L} \{f(t)\}$$

$$s X(s) - X(\bar{0}) = [A] X(s) + [B] F(s)$$

Agrupando:

$$sX(s) - [A] X(s) = X(\bar{0}) + [B] F(s)$$

$$X(s)[s[I] - [A]] = X(\bar{0}) + [B] F(s)$$

Resulta:

$$X(s) = [S[I] - [A]]^{-1} X(\bar{0}) + [S[I] - [A]]^{-1} [B] F(s)$$

Para obtener la solución en el dominio del tiempo t , se aplica transformada inversa de la expresión anterior obteniéndose:

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ [S[I] - [A]] \} X(0) + \mathcal{L}^{-1} \{ [S[I] - [A]]^{-1} [B] F(s) \}$$

La respuesta obtenida anteriormente para $t_0 = 0$, estaba dada por la expresión:

$$x(t) = e^{[A]t} x_0 + \int_0^t e^{-[A](t-\tau)} [B] f(\tau) d\tau$$

Comparando, se tendrá que:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ [S[I] - [A]] \} = e^{[A]t}$$

Con lo que se concluye que se puede obtener la matriz de transformación de estado empleando la Transformada de Laplace.

1.8 Solución digital

La complejidad de realizar procesos iterativos de cálculo ha sido resuelto con la ayuda de ordenadores. Así el cálculo numérico aplicado a la solución de las ecuaciones de estado ha recaído en el computador digital.

En este marco, para la solución de la ecuación de estado, deben implementarse los programas necesarios para este propósito, utilizando el Lenguaje C, Fortran

ú otro. Asimismo, el programa debe ser desarrollado con el criterio de simplicidad para el análisis numérico.

Con el impacto de la era del ordenador personal se han plasmado los métodos y algoritmos del análisis numérico en programas como el MATLAB; siendo este un sistema iterativo basado en matrices para cálculos científicos y de ingeniería, con capacidad para generar múltiples gráficos.

CAPITULO II MODELAMIENTO DE LA MAQUINA SINCRONA

En este capítulo se desarrolla el modelamiento de la máquina síncrona trifásica, tomándose como punto de partida para el análisis a la máquina invertida; es decir con el devado de campo en el estator y el devanado inducido en el rotor. Luego de obtenerse la matriz inductancia y resistencia de la máquina síncrona se utiliza la técnica de transformación abc-dq, para así establecer las ecuaciones eléctricas en los ejes d-q en que se modela a la máquina. Además se incluye la ecuación mecánica que gobierna a la máquina síncrona.

2.1 Conceptos básicos de la máquina síncrona

Las máquinas síncronas son motores o generadores cuya corriente de campo es suministrada desde el exterior por una fuente de potencia DC.

La diferencia fundamental entre la máquina síncrona y la máquina asíncrona (de inducción) radica en que el campo magnético de la máquina síncrona se crea suministrando corriente de excitación al rotor desde una fuente exterior a la máquina, mientras que la máquina de inducción obtiene el campo magnético en el rotor por inducción electromagnética.

La máquina síncrona opera a velocidad y frecuencia constante en condiciones de operación estacionarias.

La estructura de la máquina síncrona está formada por una parte exterior fija denominado estator y una parte interior giratoria llamada rotor, ambas son masas de hierro separadas por espacio denominado entrehierro.

Los elementos básicos de una máquina síncrona lo constituyen el devanado de armadura ubicado en el estator, el devanado de campo y el devanado amortiguador, ámbos dispuestos en el rotor.

La superficie interna del estator y rotor pueden ser lisas o con salientes. El flujo magnético principal a través del estrehierro circula por el estator y rotor.

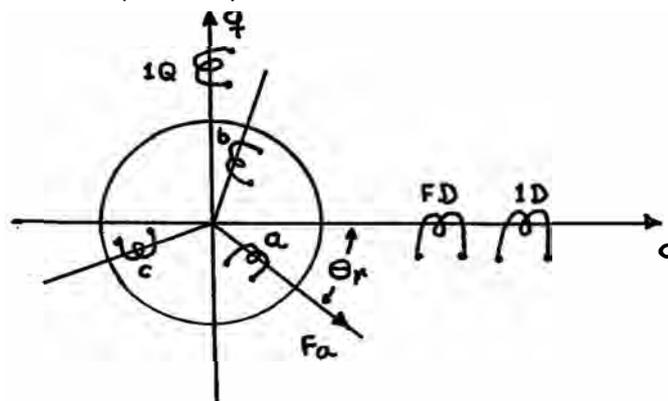
2.2 Modelo de fases de la máquina síncrona

Se representa la máquina primitiva trifásica, con el campo en el estator y el inducido en el rotor.

Bobinados Estator 1D, FD, 1Q: Estacionarios

Bobinados Rotor (a, b, c): Giratorios

Inductancias Propias y Mutuas conocidas.



A continuación se evalúa las inductancias de la máquina síncrona trifásica.

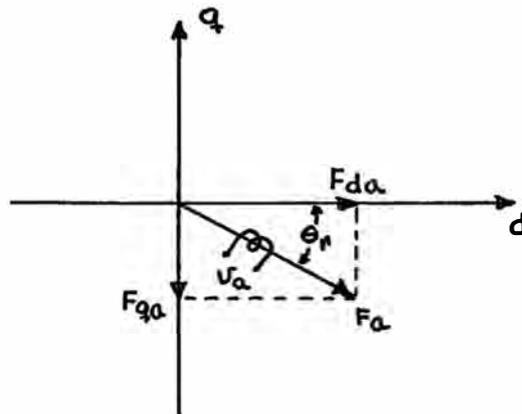
2.2.1 Inductancias en el estator

Inductancias Propias, Mutuas del estator:

Las inductancias propias L_{1D} , L_{FD} , L_{1Q} y la inductancia

mutua M_{12FD} son valores constantes e independientes de θ_r .

Fuerzas magnetomotrices del Rotor:



La fuerza magnetomotriz en la fase será:

$$F_a = N_1 i_a$$

Proyectando a los ejes d y q:

$$F_{da} = F_a \cos \theta_r = N_1 i_a \cos \theta_r$$

$$F_{qa} = F_a \sin \theta_r = N_1 i_a \sin \theta_r$$

Flujo concatenado por fase:

$$\phi = NPF$$

Luego:

$$\phi_{da} = N_1 P_d F_{da}$$

$$\phi_{da} = N_1 P_d N_1 i_a \cos \theta_r$$

$$\phi_{da} = N_1^2 P_d i_a \cos \theta_r$$

$$\phi_{qa} = N_1 P_q F_{qa}$$

$$\phi_{qa} = N_1 P_q N_1 i_a \sin \theta_r$$

$$\phi_{qa} = N_1^2 P_q i_a \sin \theta_r$$

El flujo concatenado: Fase a

$$\phi_{ga} = \phi_{da} \cos\theta_r + \phi_{qa} \sin\theta_r$$

$$\phi_{ga} = N_1^2 P_d i_a \cos^2\theta_r + N_1^2 P_q i_a \sin^2\theta_r$$

$$\phi_{ga} = N_1^2 i_a [P_d \cos^2\theta_r + P_q \sin^2\theta_r]$$

$$\cos^2\theta_r = \frac{1 + \cos 2\theta_r}{2}$$

$$\sin^2\theta_r = \frac{1 - \cos 2\theta_r}{2}$$

Reemplazando en la expresión del flujo concatenado:

$$\phi_{ga} = N_1^2 i_a \left[P_d \left(\frac{1 + \cos 2\theta_r}{2} \right) + P_q \left(\frac{1 - \cos 2\theta_r}{2} \right) \right]$$

$$\phi_{ga} = N_1^2 i_a \left[\frac{P_d}{2} + \frac{P_d \cos 2\theta_r}{2} + \frac{P_q}{2} - \frac{P_q \cos 2\theta_r}{2} \right]$$

$$\phi_{ga} = N_1^2 i_a \left[\left(\frac{P_d + P_q}{2} \right) + \left(\frac{P_d - P_q}{2} \right) \cos 2\theta_r \right]$$

Flujo de dispersión:

$$\phi_{La} = N_1 P_L F_a$$

$$\phi_{La} = N_1 P_L N_1 i_a$$

$$\phi_{La} = N_1^2 P_L i_a$$

El flujo concatenado total en la fase a está dado por:

$$\phi_a = \phi_{La} + \phi_{ga}$$

$$\phi_a = N_1^2 i_a \left[P_L + \frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta_r \right]$$

2.2.2 Inductancias en el rotor

Inductancias propias

$$L = \frac{\phi}{i} \quad \rightarrow \quad \frac{\phi_a}{i_a} = L_{aa}$$

Reemplazando:

$$L_{aa} = N_1^2 \left[P_L + \frac{P_d + P_g}{2} + \frac{P_d - P_g}{2} \cos 2\theta_r \right]$$

$$L_{aa} = N_1^2 P_L + N_1^2 \left(\frac{P_d + P_g}{2} \right) + N_1^2 \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right) \cos 2\theta_r$$

Definimos:

$$L_L = N_1^2 P_L$$

$$L_1 = N_1^2 \left(\frac{P_d + P_g}{2} \right)$$

$$L_2 = N_1^2 \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right)$$

Con lo que resulta:

$$L_{aa} = L_L + L_1 + L_2 \cos 2\theta_r$$

Haciendo el mismo análisis, se obtiene para las fases b y c.

$$L_{bb} = L_L + L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r - 120^\circ)$$

$$L_{cc} = L_L + L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r + 120^\circ)$$

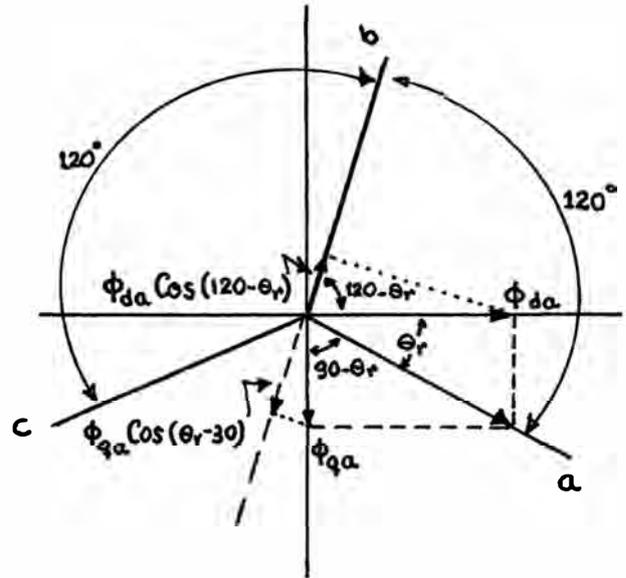
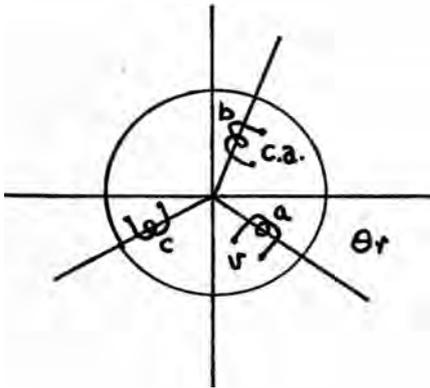
Inductancias mutuas en el rotor

La inductancia mutua entre cualquier par de bobinas del rotor está determinado por el flujo concatenado mutuo de una bobina excitada y la otra en circuito

abierto.

Inductancia mutua entre la fase a y b.

Para bobina fase a excitada y para bobina fase b en circuito abierto.



$$\phi_{ba} = \phi_{da} \cos(120 - \theta_r) + \phi_{ca} \cos(\theta_r - 30)$$

$$\phi_{ba} = \phi_{da} \cos(120 - \theta_r) + \phi_{ca} \sin(\theta_r - 30 + 90)$$

$$\phi_{ba} = \phi_{da} \cos(120 - \theta_r) + \phi_{ca} \sin(\theta_r + 60)$$

$$\phi_{ba} = \phi_{da} \cos(\theta_r - 120) - \phi_{ca} \sin(\theta_r - 120)$$

$$\phi_{ba} = N_1^2 P_d i_a \cos \theta_r \cos(\theta_r - 120) + N_1^2 P_q i_a \sin \theta_r \sin(\theta_r - 120)$$

$$\phi_{ba} = N_1^2 i_a [P_d \cos \theta_r \cos(\theta_r - 120) + P_q \sin \theta_r \sin(\theta_r - 120)]$$

$$\begin{aligned} \phi_{ba} = N_1^2 i_a [& P_d \cos \theta_r (\cos \theta_r \cos 120 + \sin \theta_r \sin 120) \\ & + P_q \sin \theta_r (\sin \theta_r \cos 120 - \sin 120 \cos \theta_r)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{ba} = N_1^2 i_a [& P_d \cos^2 \theta_r \cos 120 + P_d \sin \theta_r \cos \theta_r \sin 120 \\ & + P_q \sin^2 \theta_r \cos 120 - P_q \sin \theta_r \cos \theta_r \sin 120] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{ba} = N_1^2 i_a [& P_d \left(\frac{1 + \cos 2\theta_r}{2} \right) \cos 120 + \frac{P_d}{2} \sin 2\theta_r \sin 120 \\ & + P_q \left(\frac{1 - \cos 2\theta_r}{2} \right) \cos 120 - \frac{P_q}{2} \sin 2\theta_r \sin 120] \end{aligned}$$

$$\phi_{ba} = N_1^2 i_a \left[\frac{P_d}{2} \cos 120 + \frac{P_d}{2} \cos 2\theta_r \cos 120 + \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right) \text{sen} 2\theta_r \text{sen} 120 \right. \\ \left. + \frac{P_g}{2} \cos 120 - \frac{P_g}{2} \cos 2\theta_r \cos 120 \right]$$

$$\phi_{ba} = N_1^2 i_a \left[-\frac{P_d}{4} - \frac{P_g}{4} + \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right) \cos 2\theta_r \cos 120 + \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right) \text{sen} 2\theta_r \text{sen} 120 \right]$$

$$\phi_{ba} = N_1^2 i_a \left[-\left(\frac{P_d + P_g}{4} \right) + \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right) [\cos 2\theta_r \cos 120 + \text{sen} 2\theta_r \text{sen} 120] \right]$$

$$\phi_{ba} = N_1^2 i_a \left[-\left(\frac{P_d + P_g}{4} \right) + \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right) \cos (2\theta_r - 120) \right]$$

$$\phi_{ba} = N_1^2 i_a \left[-\left(\frac{P_d + P_g}{4} \right) + \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right) \cos 2(\theta_r - 60) \right]$$

Como: $L = \frac{\phi}{i}$

La inductancia mutua entre la fase a y b será:

$$L_{ba} = \frac{\phi_{ba}}{i_a} = N_1^2 \left[-\left(\frac{P_d + P_g}{4} \right) + \left(\frac{P_d - P_g}{2} \right) \cos 2(\theta_r - 60) \right]$$

Luego, reemplazando en función de L_1 y L_2

$$L_{ba} = -\frac{L_1}{2} + L_2 \cos 2(\theta_r - 60)$$

Procediendo de igual forma en los demás casos:

$$L_{cb} = -\frac{L_1}{2} + L_2 \cos 2\theta_r$$

$$L_{bc} = -\frac{L_1}{2} + L_2 \cos 2(\theta_r + 60)$$

Además:

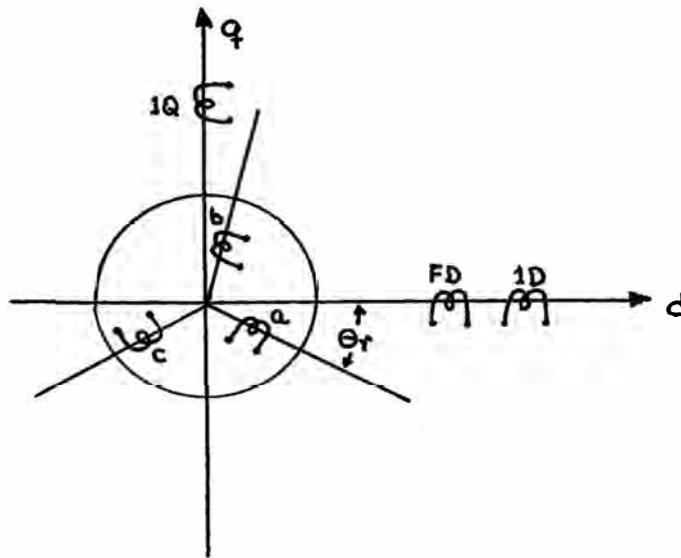
$$L_{ba} = L_{ab}$$

$$L_{cb} = L_{bc}$$

$$L_{ac} = L_{ca}$$

2.2.3 Inductancias mutuas rotor-estator

Inductancias mutuas entre los devanados rotóricos y estatóricos.



$$L_{aFD} = L_{FDa} = M_{rFD} \cos \theta_r$$

$$L_{bFD} = L_{FDb} = M_{rFD} \cos(\theta_r - 120)$$

$$L_{cFD} = L_{FDc} = M_{rFD} \cos(\theta_r + 120)$$

M_{rFD} : Inductancia mutua, valor máximo entre una fase del rotor y el devanado de campo FD.

M_{r1D} : Inductancia mutua, valor máximo entre una fase del rotor y el devanado 1D

cortocircuitado.

M_{r1Q} : Inductancia mutua, valor máximo entre una fase del rotor y el devanado 1Q cortocircuitado.

$$L_{a1D} = L_{1Da} = M_{r1D} \cos \theta_r$$

$$L_{b1D} = L_{1Db} = M_{r1D} \cos (\theta_r - 120)$$

$$L_{c1D} = L_{1Dc} = M_{r1D} \cos (\theta_r + 120)$$

$$L_{a1Q} = L_{1Qa} = M_{r1Q} \cos (\theta_r + 90)$$

$$L_{b1Q} = L_{1Qb} = M_{r1Q} \cos (\theta_r + 90 - 120)$$

$$L_{c1Q} = L_{1Qc} = M_{r1Q} \cos (\theta_r + 90 + 120)$$

$$L_{a1Q} = L_{1Qa} = - M_{r1Q} \operatorname{Sen} \theta_r$$

$$L_{b1Q} = L_{1Qb} = - M_{r1Q} \operatorname{Sen} (\theta_r - 120)$$

$$L_{c1Q} = L_{1Qc} = - M_{r1Q} \operatorname{Sen} (\theta_r + 120)$$

2.3 Matriz de inductancias de la máquina síncrona trifásica

$$[\phi] = [L] [i]$$

donde:

$[\phi]$: vector de flujo concatenado, dado por

$$\phi_k = \phi_{kk} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \phi_{ki} .$$

$[L]$: matriz de inductancias.

$[i]$: vector de corrientes.

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \\ \Phi_{FD} \\ \Phi_{1D} \\ \Phi_{1Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aFD} & L_{a1D} & L_{a1Q} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bFD} & L_{b1D} & L_{b1Q} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cFD} & L_{c1D} & L_{c1Q} \\ L_{FDa} & L_{FDb} & L_{FDC} & L_{FDFD} & L_{FD1D} & L_{FD1Q} \\ L_{1Da} & L_{1Db} & L_{1DC} & L_{1DFD} & L_{1D1D} & L_{1D1Q} \\ L_{1Qa} & L_{1Qb} & L_{1QC} & L_{1QFD} & L_{1Q1D} & L_{1Q1Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_{FD} \\ i_{1D} \\ i_{1Q} \end{bmatrix}$$

Lo que puede escribirse como:

$$[\Phi_{abc \ FD \ 1D \ 1Q}] = [L_{abc \ FD \ 1D \ 1Q}] [i_{abc \ FD \ 1D \ 1Q}]$$

Ahora, particionando la matriz principal:

$$[L_w] = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \quad [L_x] = \begin{bmatrix} L_{aFD} & L_{a1D} & L_{a1Q} \\ L_{bFD} & L_{b1D} & L_{b1Q} \\ L_{cFD} & L_{c1D} & L_{c1Q} \end{bmatrix}$$

$$[L_w]^t = \begin{bmatrix} L_{FDa} & L_{FDb} & L_{FDC} \\ L_{1Da} & L_{1Db} & L_{1DC} \\ L_{1Qa} & L_{1Qb} & L_{1QC} \end{bmatrix} \quad [L_x] = \begin{bmatrix} L_{FDFD} & L_{FD1D} & L_{FD1Q} \\ L_{1DFD} & L_{1D1D} & L_{1D1Q} \\ L_{1QFD} & L_{1Q1D} & L_{1Q1Q} \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la matriz principal:

$$[L_{abc \ FD \ 1D \ 1Q}] = \begin{bmatrix} [L_w] & [L_x] \\ [L_x]^t & [L_x] \end{bmatrix}$$

$$[\Phi_{abc \ FD \ 1D \ 1Q}] = \begin{bmatrix} [\Phi_{abc}] \\ [\Phi_{FD \ 1D \ 1Q}] \end{bmatrix}$$

Con lo que resulta:

$$\begin{bmatrix} [\Phi_{abc}] \\ [\Phi_{FD \ 1D \ 1Q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_w] & [L_x] \\ [L_x]^t & [L_x] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{abc}] \\ [i_{FD \ 1D \ 1Q}] \end{bmatrix} \dots \dots \dots \quad (\alpha)$$

2.4 Transformación abc → dqo para los devanados rotóricos

Con la finalidad de establecer las ecuaciones

eléctricas de la máquina síncrona según el modelo d-q, se aplica la transformación abc-dqo, a continuación se resumirá el procedimiento de las referencias bibliográficas 7 y 8.

$$[\Psi_{abc}] = [C]^t [\Psi_{dqo}]$$

$$[i_{abc}] = [C]^t [i_{dqo}]$$

Reemplazando en (a)

$$\begin{bmatrix} [C]^t [\Psi_{dqo}] \\ [\Psi_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_w] & [L_x] \\ [L_x]^t & [L_s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C]^t [i_{dqo}] \\ [i_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [C]^t [\Psi_{dqo}] \\ [\Psi_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_w] [C]^t & [L_x] \\ [L_x]^t [C]^t & [L_s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{dqo}] \\ [i_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$\begin{bmatrix} [\Psi_{dqo}] \\ [\Psi_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C]^t [\Psi_{dqo}] \\ [\Psi_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix}$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} [\Psi_{dqo}] \\ [\Psi_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L_w] [C]^t & [L_x] \\ [L_x]^t [C]^t & [L_s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{dqo}] \\ [i_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [\Psi_{dqo}] \\ [\Psi_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] [L_w] [C]^t & [C] [L_x] \\ [L_x]^t [C]^t & [L_s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{dqo}] \\ [i_{FD 1D 1Q}] \end{bmatrix}$$

Se tendrá ahora una expresión matricial de la forma:

$$[\Psi_{dqo FD 1D 1Q}] = [L_{dqo FD 1D 1Q}] [i_{dqo FD 1D 1Q}]$$

Reemplazando valores en:

$$[L_w] = \begin{bmatrix} L_L + L_1 + L_2 \cos 2\theta_r & -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r - 60) & -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r + 60) \\ -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r - 60) & L_L + L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r - 120) & -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos 2\theta_r \\ -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r + 60) & -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos 2\theta_r & L_L + L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r + 120) \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación [C] está dada por:

$$[C] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120) & \cos(\theta_r + 120) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120) & -\sin(\theta_r + 120) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$[L_x] = \begin{bmatrix} M_{rFD} \cos \theta_r & M_{r1D} \cos \theta_r & -M_{r1Q} \sin \theta_r \\ M_{rFD} \cos(\theta_r - 120) & M_{r1D} \cos(\theta_r - 120) & -M_{r1Q} \sin(\theta_r - 120) \\ M_{rFD} \cos(\theta_r + 120) & M_{r1D} \cos(\theta_r + 120) & -M_{r1Q} \sin(\theta_r + 120) \end{bmatrix}$$

$$[L_z] = \begin{bmatrix} L_{FD} & M_{FD1D} & M_{FD1Q} \\ M_{1DFD} & L_{1D} & M_{1D1Q} \\ M_{1QFD} & M_{1Q1D} & L_{1Q} \end{bmatrix}$$

donde:

$$M_{FD1Q} = 0 = M_{1QFD}$$

$$M_{1D1Q} = 0 = M_{1Q1D}$$

Con lo que resulta:

$$[L_z] = \begin{bmatrix} L_{FD} & M_{FD1D} & 0 \\ M_{1DFD} & L_{1D} & 0 \\ 0 & 0 & L_{1Q} \end{bmatrix}$$

Operando parcialmente:

$$[C] [L_w] [C]^t = \begin{bmatrix} L_L + \frac{3}{2} (L_1 + L_2) & 0 & 0 \\ 0 & L_L + \frac{3}{2} (L_1 - L_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_L \end{bmatrix}$$

$$[C] [L_x] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2} M_{rFD}} & \sqrt{\frac{3}{2} M_{r1D}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2} M_{r10}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L_x]^t [C]^t = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2} M_{rFD}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2} M_{rFD}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2} M_{r10}} & 0 \end{bmatrix}$$

2.4.1 Matriz de inductancia transformada

Reemplazando en la matriz principal transformada:

$$[L_{d_{90} FD 1D 10}] = \begin{bmatrix} L_L + \frac{3}{2} (L_1 + L_2) & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2} M_{rFD}} & \sqrt{\frac{3}{2} M_{r1D}} & 0 \\ 0 & L_L + \frac{3}{2} (L_1 - L_2) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2} M_{r10}} \\ 0 & 0 & L_L & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2} M_{rFD}} & 0 & 0 & L_{FD} & M_{FD1D} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2} M_{rFD}} & 0 & 0 & M_{FD1D} & L_{1D} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2} M_{r10}} & 0 & 0 & 0 & L_{10} \end{bmatrix}$$

Las inductancias propias:

$$L_L + \frac{3}{2}(L_1 + L_2) = L_d$$

$$L_L + \frac{3}{2}(L_1 - L_2) = L_q$$

Las inductancias mutuas:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}M_{rFD} = M_{dFD} = M_{FDd}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}M_{r1D} = M_{d1D} = M_{1Dd}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}M_{r1Q} = M_{q1Q} = M_{1Qd}$$

Con lo que la matriz principal transformada será:

$$[L_{dq0 \ FD \ 1D \ 1Q}] = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{dFD} & M_{d1D} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & M_{q1Q} \\ 0 & 0 & L_L & 0 & 0 & 0 \\ M_{dFD} & 0 & 0 & L_{FD} & M_{FD1D} & 0 \\ M_{d1D} & 0 & 0 & M_{FD1D} & L_{1D} & 0 \\ 0 & M_{q1Q} & 0 & 0 & 0 & L_{1Q} \end{bmatrix}$$

$$[\Psi_{dq0 \ FD \ 1D \ 1Q}] = [L_{dq0 \ FD \ 1D \ 1Q}] [i_{dq0 \ FD \ 1D \ 1Q}]$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_q \\ \varphi_o \\ \varphi_{FD} \\ \varphi_{1D} \\ \varphi_{1Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{dFD} & M_{d1D} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & M_{q1Q} \\ 0 & 0 & L_L & 0 & 0 & 0 \\ M_{dFD} & 0 & 0 & L_{FD} & M_{FD1D} & 0 \\ M_{d1D} & 0 & 0 & M_{FD1D} & L_{1D} & 0 \\ 0 & M_{q1Q} & 0 & 0 & 0 & L_{1Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_{FD} \\ i_{1D} \\ i_{1Q} \end{bmatrix}$$

Despejando φ de la expresión matricial:

$$\varphi_d = L_d i_d + O i_q + O i_o + M_{dFD} i_{FD} + M_{d1D} i_{1D} + O i_{1Q}$$

$$\varphi_q = O i_d + L_q i_q + O i_o + O i_{FD} + O i_{1D} + M_{q1Q} i_{1Q}$$

$$\varphi_o = O i_d + O i_q + L_L i_o + O i_{FD} + O i_{1D} + O i_{1Q}$$

$$\varphi_{FD} = M_{dFD} i_d + O i_q + O i_o + L_{FD} i_{FD} + M_{FD1D} i_{1D} + O i_{1Q}$$

$$\varphi_{1D} = M_{d1D} i_d + O i_q + O i_o + M_{FD1D} i_{FD} + L_{1D} i_{1D} + O i_{1Q}$$

$$\varphi_{1Q} = O i_d + M_{q1Q} i_q + O i_o + O i_{FD} + O i_{1D} + L_{1Q} i_{1Q}$$

Resulta:

$$\varphi_d = L_d i_d + M_{dFD} i_{FD} + M_{d1D} i_{1D}$$

$$\varphi_q = L_q i_q + M_{q1Q} i_{1Q}$$

$$\varphi_o = L_L i_o$$

$$\varphi_{FD} = M_{dFD} i_d + L_{FD} i_{FD} + M_{FD1D} i_{1D}$$

$$\varphi_{1D} = M_{d1D} i_d + M_{FD1D} i_{FD} + L_{1D} i_{1D}$$

$$\varphi_{1Q} = M_{q1Q} i_q + L_{1Q} i_{1Q} \quad // \quad \dots \dots \dots \quad (\gamma)$$

2.4.2 Transformación de las resistencias del sistema

abc a dqo

La matriz de resistencias del devanado trifásico abc

es:

$$[R_{abc}] = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_b & 0 \\ 0 & 0 & R_c \end{bmatrix}$$

Como : $R_a = R_b = R_c = R$

$$[R_{abc}] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

$$[R_{abc}] = R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{abc}] = R [I]$$

Para transformar esta matriz a dqo se usa:

$$[R_{dqo}] = [C] [R_{abc}] [C]^t$$

$$[R_{dqo}] = [C] R [I] [C]^t$$

$$[R_{dqo}] = [C] R [C]^t$$

$$[R_{dqo}] = R [C] [C]^t$$

$$[R_{dqo}] = R [I]$$

De los devanados FD, 1D y 1Q

$$[R_{FD\ 1D\ 1Q}] = \begin{bmatrix} R_{FD} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1D} & 0 \\ 0 & 0 & R_{1Q} \end{bmatrix}$$

La matriz Resistencia de la Máquina Síncrona:

$$[R_{dqo\ FD\ 1D\ 1Q}] = \begin{bmatrix} [R_{dqo}] & [0] \\ [0] & [R_{FD\ 1D\ 1Q}] \end{bmatrix}$$

2.5 Inductancias rotacionales

$$G_{dq} = -M_{qd} \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -L_q$$

$$G_{d10} = -M_{q10} \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -M_{q10}$$

$$G_{qd} = -M_{dq} \operatorname{Sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = L_d$$

$$G_{q10} = -M_{d10} \operatorname{Sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = M_{d10}$$

$$G_{10d} = -M_{10q} \operatorname{Sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = M_{10q}$$

Matriz Inductancia Rotacional:

$$[G_{dqo \text{ PD } 1D \text{ } 1Q}] = \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 & 0 & 0 & -M_{q10} \\ L_d & 0 & 0 & M_{d10} & M_{d1D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.6 Ecuaciones V-I en la máquina síncrona transformada

$$V = Ri + Lp i + \omega_r G i$$

$$V = [R + Lp + \omega_r G] i$$

$$[V_{dqo \text{ PD } 1D \text{ } 1Q}] = \{ [R_{dqo \text{ PD } 1D \text{ } 1Q}] + [L_{dqo \text{ PD } 1D \text{ } 1Q}] P + \omega_r [G_{dqo \text{ PD } 1D \text{ } 1Q}] \}$$

$$[i_{dqo \text{ PD } 1D \text{ } 1Q}]$$

Reemplazando en la expresión los valores hallados:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_o \\ V_{FD} \\ V_{1D} \\ V_{1Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{FD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{dFD} & M_{d1D} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & M_{q1Q} \\ 0 & 0 & L_L & 0 & 0 & 0 \\ M_{dFD} & 0 & 0 & L_{FD} & M_{FD1D} & 0 \\ M_{q1D} & 0 & 0 & M_{FD1D} & L_{1D} & 0 \\ 0 & M_{q1Q} & 0 & 0 & 0 & L_{1Q} \end{bmatrix} p + \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 & 0 & 0 & -M_{q1Q} \\ L_d & 0 & 0 & M_{dFD} & M_{d1D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_{FD} \\ i_{1D} \\ i_{1Q} \end{bmatrix}$$

Operando, resulta:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_o \\ V_{FD} \\ V_{1D} \\ V_{1Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R+L_d p) & -\omega_r L_q & 0 & M_{dFD} p & M_{d1D} p & -\omega_r M_{q1Q} \\ \omega_r L_d & (R+L_q p) & 0 & \omega_r M_{dFD} & \omega_r M_{d1D} & M_{q1Q} p \\ 0 & 0 & (R+L_L p) & 0 & 0 & 0 \\ M_{dFD} p & 0 & 0 & (R_{FD}+L_{FD} p) & M_{FD1D} p & 0 \\ M_{q1D} p & 0 & 0 & M_{FD1D} p & (R_{1D}+L_{1D} p) & 0 \\ 0 & M_{q1Q} p & 0 & 0 & 0 & (R_{1Q}+L_{1Q} p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_{FD} \\ i_{1D} \\ i_{1Q} \end{bmatrix}$$

Desarrollando la expresión matricial:

$$V_d = (R+L_d p) i_d + (-\omega_r L_q) i_q + M_{dFD} p i_{FD} + M_{d1D} p i_{1D} - \omega_r M_{q1Q} i_{1Q}$$

$$V_q = \omega_r L_d i_d + (R+L_q p) i_q + \omega_r M_{dFD} i_{FD} + \omega_r M_{d1D} i_{1D} + M_{q1Q} p i_{1Q}$$

$$V_o = (R+L_L p) i_o$$

$$V_{FD} = M_{dFD} p i_d + (R_{FD}+L_{FD} p) i_{FD} + M_{FD1D} p i_{1D}$$

$$V_{1D} = M_{d1D} p i_d + M_{FD1D} p i_{FD} + (R_{1D}+L_{1D} p) i_{1D}$$

$$V_{1Q} = M_{q1Q} p i_q + (R_{1Q}+L_{1Q} p) i_{1Q}$$

Resultará:

$$V_d = R i_d + p(L_d i_d + M_{dFD} i_{FD} + M_{d1D} i_{1D}) - \omega_r (L_q i_q + M_{q1Q} i_{1Q})$$

$$V_q = R i_q + p(L_q i_q + M_{q1Q} i_{1Q}) + \omega_r (L_d i_d + M_{dFD} i_{FD} + M_{d1D} i_{1D})$$

$$V_o = R i_o + p(L_L i_o)$$

$$V_{FD} = R_{FD} i_{FD} + p(M_{dFD} i_d + L_{FD} i_{FD} + M_{FD1D} i_{1D})$$

$$V_{1D} = R_{1D} i_{1D} + p(L_{1D} i_{1D} + M_{d1D} i_d + M_{FD1D} i_{FD})$$

$$V_{1Q} = R_{1Q} i_{1Q} + p(L_{1Q} i_{1Q} + M_{q1Q} i_q)$$

Estas ecuaciones eléctricas de la máquina síncrona con el devanado trifásico abc reemplazado por los devanados d y q, constituye el denominado modelo d-q de la máquina síncrona.

Si en estas ecuaciones se reemplaza:

$$\Psi_d = L_d i_d + M_{dFD} i_{FD} + M_{d1D} i_{1D}$$

$$\Psi_q = L_q i_q + M_{q1Q} i_{1Q}$$

$$\Psi_o = L_L i_o$$

$$\Psi_{FD} = M_{dFD} i_d + L_{FD} i_{FD} + M_{FD1D} i_{1D}$$

$$\Psi_{1D} = M_{s1D} i_d + L_{FD1D} i_{FD} + L_{1D} i_{1D}$$

$$\Psi_{1Q} = M_{s1Q} i_q + L_{1Q} i_{1Q}$$

Se obtiene:

$$V_d = R i_d + P \Psi_d - \omega_r \Psi_q$$

$$V_q = R i_q + P \Psi_q + \omega_r \Psi_d$$

$$V_o = R i_o + P \Psi_o$$

$$V_{FD} = R_{FD} i_{FD} + P \Psi_{FD}$$

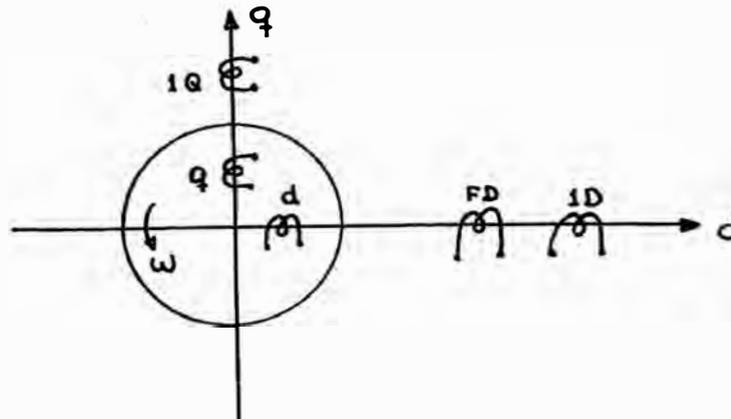
$$V_{1D} = R_{1D} i_{1D} + P \Psi_{1D}$$

$$V_{1Q} = R_{1Q} i_{1Q} + P \Psi_{1Q}$$

Expresando estas últimas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_o \\ V_{FD} \\ V_{1D} \\ V_{1Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{FD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_{FD} \\ i_{1D} \\ i_{1Q} \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_o \\ \Psi_{FD} \\ \Psi_{1D} \\ \Psi_{1Q} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\Psi_q \\ \Psi_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La máquina síncrona ha sido representada en los ejes ortogonales D y Q lo que constituye un modelo matemático de gran ventaja en el análisis de su comportamiento transitorio.



2.7 Ecuación mecánica de la máquina síncrona

La ecuación que gobierna el movimiento del rotor de la máquina con la inercia y la resultante de los torques eléctricos y mecánicos es:

$$J\ddot{\theta} = T_a (N-m)$$

donde:

J : Momento de inercia de la masa rotativa (Kg-m^2).

θ : Angulo mecánico del eje (radianes).

T_a : Torque acelerante ($N - m$).

Escribiendo en forma más útil, se tendrá:

$$\frac{2H}{\omega R} \dot{\omega} = T_a \quad (\text{p.u})$$

$$H = \frac{W_k}{S_B \omega}$$

Donde:

W_k : Energía cinética (MJ)

S_B : Potencia nominal (MVA)

ω : velocidad angular del campo magnético

El torque acelerante T_a está dado por:

$$T_a = T_e + T_{ext}$$

donde:

T_{ext} : torque exterior aplicado al eje de la máquina.

T_e : torque electromagnético desarrollado por la máquina.

El torque electromagnético se calcula utilizando:

$$T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d$$

CAPITULO III
FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA LA
MAQUINA SINCRONA

En el presente capítulo se formularán las ecuaciones de la máquina síncrona utilizando la técnica del espacio de estado. Asimismo con la idea de modelar un sistema formado por: generador síncrono y sistema de transmisión, también se incluyen las ecuaciones de los controladores del generador como son: regulador de velocidad y de tensión.

3.1 Selección de las variables de estado

Se desarrollaron en el capítulo II las ecuaciones del modelo d-q de la máquina síncrona. Si se consideran que las inductancias mutuas en d y q son L_{ad} y L_{aq} se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v_d &= R_s i_d + P \psi_d - \omega_o \psi_q & \psi_d &= L_d i_d + L_{ad} i_{FD} + L_{ad} i_{1D} \\
 v_{FD} &= R_{FD} i_{FD} + P \psi_{FD} & \psi_{FD} &= L_{Fd} i_{FD} + L_{ad} i_d + L_{ad} i_{1D} \\
 v_{1D} &= R_{1D} i_{1D} + P \psi_{1D} & \psi_{1D} &= L_{1D} i_{1D} + L_{ad} i_{FD} + L_{ad} i_d \\
 v_q &= R_s i_q + P \psi_q + \omega_o \psi_d & \psi_q &= L_q i_q + L_{aq} i_{1Q} \\
 v_{1Q} &= R_{1Q} i_{1Q} + P \psi_{1Q} & \psi_{1Q} &= L_{1Q} i_{1Q} + L_{aq} i_q
 \end{aligned}$$

Estableciendo como variables de estado al flujo

concatenado, se tendrá:

$$P\Phi_d = v_d - R_a i_d + \omega_o \Phi_q$$

$$P\Phi_{FD} = v_{FD} - R_{FD} i_{FD}$$

$$P\Phi_{1D} = v_{1D} - R_{1D} i_{1D}$$

$$P\Phi_q = v_q - R_a i_q - \omega_o \Phi_d$$

$$P\Phi_{1q} = v_{1q} - R_{1q} i_{1q}$$

De las expresiones de los flujos concatenados se despejan las corrientes (Ver Anexo 1); se obtiene:

$$i_d = -\omega_o [Y_{1d}\Phi_d + Y_{4d}\Phi_{FD} + Y_{5d}\Phi_{1D}]$$

$$i_{FD} = \omega_o [Y_{4d}\Phi_d + Y_{2d}\Phi_{FD} + Y_{6d}\Phi_{1D}]$$

$$i_{1D} = \omega_o [Y_{5d}\Phi_d + Y_{6d}\Phi_{FD} + Y_{3d}\Phi_{1D}]$$

$$i_q = -\omega_o [Y_{1q}\Phi_q + Y_{3q}\Phi_{1q}]$$

$$i_{1q} = \omega_o [Y_{3q}\Phi_q + Y_{2q}\Phi_{1q}]$$

Reemplazando y teniendo en cuenta que: $v_{1D}=0$.

$v_{1q}=0$.

$$P\Phi_d = v_d - R_a \omega_o [Y_{1d}\Phi_d + Y_{4d}\Phi_{FD} + Y_{5d}\Phi_{1D}] + \omega_o \Phi_q$$

$$P\Phi_{FD} = v_{FD} - R_{FD} \omega_o [Y_{4d}\Phi_d + Y_{2d}\Phi_{FD} + Y_{6d}\Phi_{1D}]$$

$$P\Phi_{1D} = 0 - R_{1D} \omega_o [Y_{5d}\Phi_d + Y_{6d}\Phi_{FD} + Y_{3d}\Phi_{1D}]$$

$$P\Phi_q = v_q - R_a \omega_o [Y_{1q}\Phi_q + Y_{3q}\Phi_{1q}] - \omega_o \Phi_d$$

$$P\Phi_{1q} = 0 - R_{1q} \omega_o [Y_{3q}\Phi_q + Y_{2q}\Phi_{1q}]$$

Ordenado en la forma:

$$[\Phi] = [A] [\Phi] + B[u]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_{FD} \\ \dot{\phi}_{1D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_d \\ \phi_{FD} \\ \phi_{1D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_d \\ v_{FD} \\ 0 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \phi_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_q \\ \dot{\phi}_{1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q \\ \phi_{1q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_q \\ v_{1q} \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} \phi_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2 Ecuaciones de estado en el eje D y Q

En el eje D:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_{FD} \\ \dot{\phi}_{1D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_s \omega_o Y_{1d} & -R_s \omega_o Y_{4d} & -R_s \omega_o Y_{5d} \\ -R_{FD} \omega_o Y_{4d} & -R_{FD} \omega_o Y_{2d} & -R_{FD} \omega_o Y_{6d} \\ -R_{1D} \omega_o Y_{5d} & -R_{1D} \omega_o Y_{6d} & -R_{1D} \omega_o Y_{3d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_d \\ \phi_{FD} \\ \phi_{1D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_d \\ v_{FD} \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_o \begin{bmatrix} \phi_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el eje Q:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_q \\ \dot{\phi}_{1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_s \omega_o Y_{1q} & -R_s \omega_o Y_{3q} \\ -R_{1q} \omega_o Y_{3q} & -R_{1q} \omega_o Y_{2q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q \\ \phi_{1q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_q \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_o \begin{bmatrix} \phi_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3 Ecuaciones de la línea de transmisión

Se considera línea de transmisión corta, despreciando los efectos transitorios, se tiene:

$$V_d = V_{od} + R_{th} i_d - X_{th} p i_q$$

$$V_q = V_{oq} + X_{th} p i_d + R_{th} i_q$$

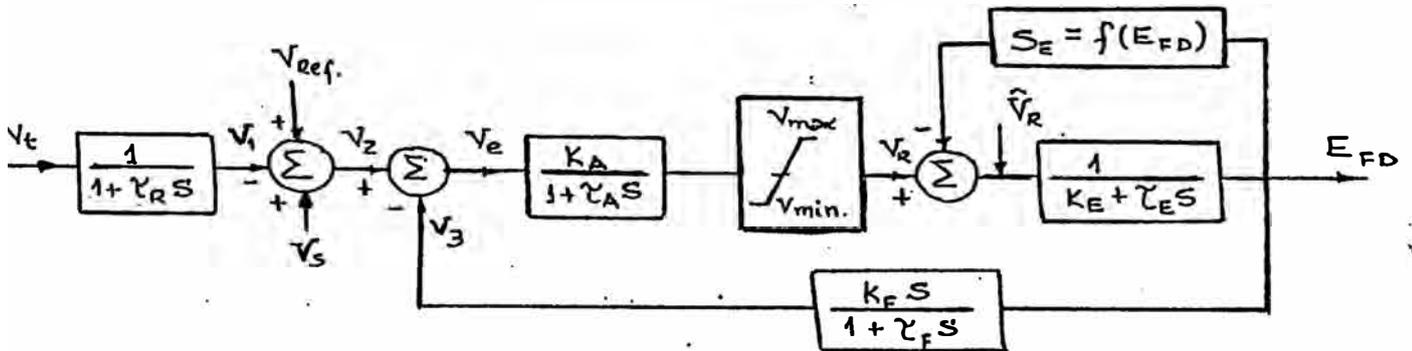
V_{od} : componente de la tensión en el eje directo.

V_{oq} : componente de la tensión en el eje de cuadratura.

3.4 Ecuación de estado del regulador de excitación

Un esquema de regulador de estándar (Referencia 6)

utilizado para modular este controlador es:



τ_R : Constante de tiempo filtro regulador

τ_A : Constante de tiempo amplificador del regulador

τ_E : Constante de tiempo del excitador

τ_F : Constante de tiempo estabilizador

K_A : Ganancia del regulador

K_E : Constante de excitador

K_F : Ganancia del circuito estabilizador

SE : Función de saturación del excitador

E_{FD} : Voltaje de salida del excitado

V_t : Voltaje de en los terminales del generador

V_p : Señal de entrada auxiliar

V_{ref} : Voltaje de referencia del regulador

τ_R es muy pequeño ≈ 0

Si no tiene filtro y el rate de realimentación es cero, el voltaje de error es:

$$V_e = V_{ref} - V_t$$

El excitador incluye el efecto de saturación:

$$SE = (A-B)/B$$

Luego:

$$\hat{V}_R = VR - SE \cdot E_{FD}$$

Las variables de estado para el regulador:

$$\dot{V}_1 = (1/\tau_R) V_t - (1/\tau_R) V_1$$

$$\dot{V}_3 = (K_F/\tau_F) E_{FD} - (1/\tau_{FD}) V_3$$

$$\dot{V}_R = (K_A/\tau_A) V_o - (1/\tau_A) V_R; V_{R_{min}} < V_R < V_{R_{max}}$$

$$\dot{E}_{FD} = (1/\tau_E) V_R - [(SE+K_F)/\tau_E] E_{FD}$$

$$V_o = V_{REF} + V_s - V_1 - V_3$$

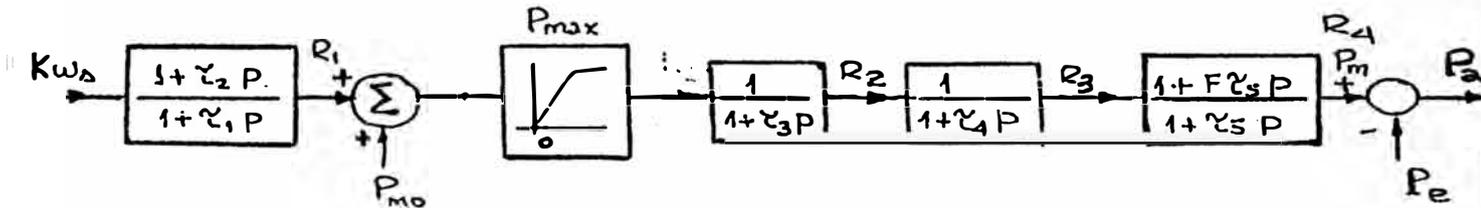
La ecuación de estado resultará:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_R \\ \dot{E}_{FD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau_F & K_F/\tau_E\tau_F & \frac{-K_f(S_E+K_B)}{\tau_F\tau_E} \\ -K_A/\tau_A & -K_A/\tau_A & -1/\tau_A & 0 \\ 0 & 0 & -1/\tau_E & -\frac{(S_E+K_B)}{\tau_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ V_R \\ E_{FD} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_R} \cdot V_t \\ 0 \\ \frac{K_A}{\tau_A} (V_{REF} + V_s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.5 Ecuación de estado del regulador de velocidad

Para modelar el regulador de velocidad se utilizará

el siguiente modelo (Referencia 6):



Donde:

τ_1 : Constante de tiempo de control

τ_2 : Constante de tiempo hidro-regulador

τ_3 : Constante de tiempo compuerta de turbina

τ_4 : Constante de tiempo válvula de vapor

τ_5 : Constante de tiempo arranque de agua

F : Ganancia de salida

P_{max} : Potencia máxima de salida de la turbina

$$P_m = \frac{(1+F\tau_5 P)}{(1+\tau_5 P)} \left(\frac{1}{1+\tau_4 P} \right) \left(\frac{1}{1+\tau_3 P} \right) \left(\frac{1+\tau_2 P}{1+\tau_1 P} \Delta\omega + P_{m0} \right)$$

Las variables de estado serán:

$$R_1 = \frac{(1+\tau_2 P)}{(1+\tau_1 P)} \Delta\omega$$

$$R_2 = \frac{1}{(1+\tau_3 P)} (R_1 + P_{m0})$$

$$R_3 = \frac{1}{(1+\tau_4 P)} R_2$$

$$R_4 = P_m = \frac{(1 + F\tau_5 P)}{(1 + \tau_5 P)} R_3$$

$$\dot{R}_1 = \frac{(\Delta\omega + \tau_2 P \Delta\omega - R_1)}{\tau_1}$$

$$\dot{R}_2 = \frac{(R_1 + P_{m0} - R_2)}{\tau_2}$$

$$\dot{R}_3 = \frac{(R_2 - R_3)}{\tau_3}$$

$$\dot{R}_4 = \frac{(R_3 + F\tau_5 \dot{R}_3 - R_4)}{\tau_4}$$

CAPITULO IV FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO DE LA MAQUINA ASINCRONA Y APLICACIONES

En el presente capítulo, luego de establecer las ecuaciones de la máquina asíncrona en el modelo d-q, se pasa a desarrollar el análisis para el caso de un motor asíncrono (de inducción) trifásico, utilizando el circuito equivalente clásico; se formulan las ecuaciones de estado y a continuación se presenta los resultados de la simulación digital efectuada, utilizando para este propósito un programa desarrollado en MATLAB que también se muestra.

4.1 Conceptos básicos de la máquina asíncrona

La máquina asíncrona como el común de las máquinas eléctricas consta de un estator y un rotor, con la particularidad que el rotor puede ser del tipo: Jaula de Ardilla y Rotor Devanado.

La máquina asíncrona tiene su principio en la interacción entre el campo del entrehierro y las corrientes inducidas en el rotor.

Si se aplica una corriente 3ϕ a los devanados del estator del motor de inducción, se origina un campo magnético giratorio, que gira a la velocidad síncrona.

El campo magnético giratorio induce en los conductores del rotor una "fuerza electromotriz" inducida de acuerdo a las leyes de inducción electromagnética.

El rotor jaula de ardilla consta de una serie de barras conductoras colocadas dentro de ranuras en la superficie del rotor, con sus extremos en cortocircuito por medio de anillos.

A la diferencia entre la velocidad síncrona ω_s y la velocidad efectiva de rotación del rotor ω_r se define como deslizamiento.

$$S = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \text{ R.P.M.} \quad S\% = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} 100$$

Donde: $\omega_s = \frac{120f}{p}$

f: Frecuencia de la fuente de alimentación

p: Número de polos en el estator

El eje de las máquinas de inducción puede girar a velocidades cercanas a la síncrona pero nunca alcanzará exactamente la velocidad síncrona.

4.2 Modelo d-q de la máquina asíncrona o de inducción

Si se elimina la saliencia y se prescinde del devanado de excitación de la máquina síncrona se obtiene el modelo d-q de la máquina asíncrona.

Al eliminar la saliencia se tendrá:

$$(a) \quad L_{dq} = L_{qd} = M ; \quad L_d = L_q = L_1$$

$$(b) \quad L_{10} = L_{1D} = L_2' ; \quad R_{10} = R_{1D} = R_2'$$

Luego; haciendo $R = R_1$ se obtiene:

$$V_d = R_1 i_d + p \phi_d - \omega_r \phi_q$$

$$V_q = R_1 i_q + p \phi_q - \omega_r \phi_d$$

$$0 = R_2' i_{1D} + p \psi_{1D}$$

$$0 = R_2' i_{1Q} + p \psi_{1Q}$$

Donde:

$$\psi_d = L_1 i_d + M i_{1D} \quad ; \quad \psi_q = L_1 i_q + M i_{1Q}$$

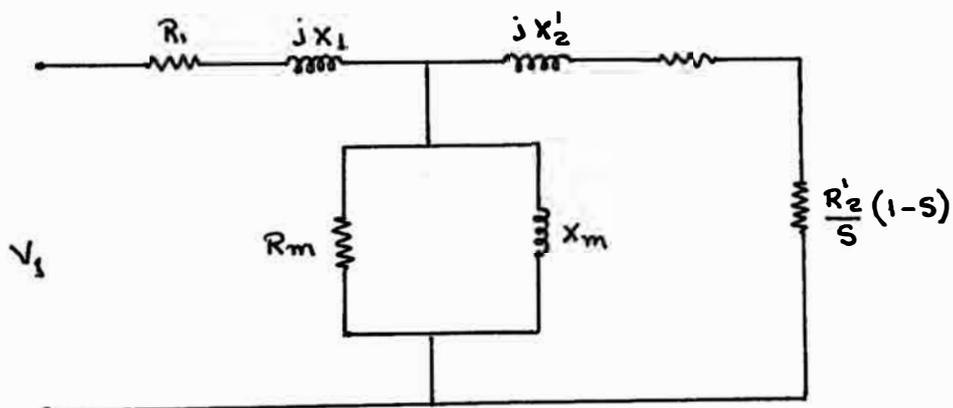
$$\psi_{1D} = L_2' i_{1D} + M i_d \quad ; \quad \psi_{1Q} = L_2' i_{1Q} + M i_q$$

La ecuación mecánica será exactamente igual a la de la máquina síncrona.

Estas ecuaciones constituyen el modelo matemático de la máquina de inducción y para expresarlas mediante la técnica de espacio de estado se sigue un procedimiento análogo, pero menos engorroso, que en la máquina síncrona.

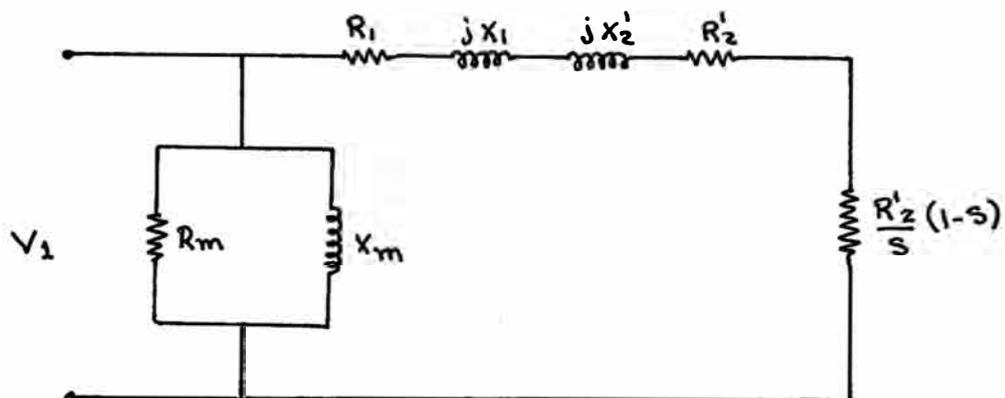
En este capítulo se mostrará el procedimiento utilizado en la Referencia 4. En esta metodología se desprecian los transitorios eléctricos en la máquina y se considera el transitorio mecánico. En otras palabras se utiliza el circuito equivalente clásico de estado estacionario y la ecuación de movimiento del rotor.

4.3 Circuito equivalente del motor de inducción



El circuito mostrado es un equivalente por fase del motor de inducción, donde $\frac{R_2'}{s}(1-s)$ es entendida como la resistencia dinámica por fase y representará la potencia convertida.

Algunas veces el circuito equivalente del motor de inducción se representa de manera aproximada por:



La frecuencia de la tensión inducida en el rotor es igual al de la tensión de alimentación del estator al momento de la conexión (rotor parado).

4.4 Potencia y par en el motor de inducción

La diferencia entre la potencia de entrada al motor y la potencia de pérdidas en el cobre del estator, en el núcleo y en el cobre del rotor, resulta la potencia que se convertirá en mecánica (potencia convertida). En el circuito 3ϕ .

$$P_o = 3 \left[\frac{R_2'}{s} (1-s) \right] (I_2')^2$$

Así también la potencia en función de la velocidad

y el número de polos p está dado por:

$$P_o = T_o \frac{\omega_r}{p}$$

Luego:

$$T_o \frac{\omega_r}{p} = 3 \frac{R'_2}{s} (1-s) I_2'^2 \quad \dots \dots \dots (a)$$

Se sabe que:

$$\omega_s = \dot{\delta} + \omega_r + s\omega_s$$

para $\dot{\delta} = \text{cte}$

$$\omega_r = (1-s)\omega_s$$

Reemplazando en (a)

$$T_o \frac{(1-s)\omega_s}{p} = 3 \frac{R'_2}{s} (1-s) I_2'^2$$

$$T_o = \frac{3R'_2}{s} \frac{p}{\omega_s} I_2'^2 \quad \dots \dots \dots (B)$$

Según el circuito equivalente aproximado del motor de inducción.

$$I_2' = \frac{V_1}{\left[\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + (X_1 + X'_2)^2 \right]^{1/2}}$$

4.4.1 Par electromagnético

Reemplazando en (β) el par T_{θ} resultará:

$$T_{\theta} = \frac{3R_2'}{s} \frac{P}{\omega_s} \frac{V_1^2}{(R_1 + \frac{R_2'}{s})^2 + (X_1 + X_2')^2} \dots \dots \dots I$$

4.5 Relación entre los parámetros R y X

Del circuito equivalente aproximado.

$$Tg\theta = \frac{X_1 + X_2'}{R_1 + \frac{R_2'}{s}} \dots \dots \dots (\phi)$$

haciendo: $\delta = \frac{\pi}{2} + \theta$

$$Tg\delta = Tg(\frac{\pi}{2} + \theta)$$

$$Tg\delta = -Ctg \theta$$

Reemplazando en (ϕ):

$$Tg\delta = -\frac{R_1 + R_2'/s}{X_1 + X_2'} \dots \dots \dots (\tau)$$

$$R_1 + \frac{R_2'}{s} = -(X_1 + X_2') Tg\delta$$

Reemplazando en I:

$$T_{\theta} = 3 \frac{R_2'}{s} \frac{P}{\omega_s} \frac{V_1^2}{(X_1 + X_2')^2 [1 + Tg^2\delta]}$$

donde:

$$\frac{1}{1+\text{Tg}^2\delta} = \text{Cos}^2\delta$$

$$T_e = 3 \frac{R_2'}{S} \frac{P}{\omega_s} \frac{V_1^2 \text{Cos}^2\delta}{(X_1+X_2')^2} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

Buscando relacionar $\frac{R_2'}{S}$ con δ , despejando de (I):

$$R_1 + \frac{R_2'}{S} = -(x_1+x_2') \text{Tg}\delta$$

$$\frac{R_2'}{S} = -R_1 - (x_1+x_2') \text{Tg}\delta$$

$$\frac{R_2'}{S} = -(x_1+x_2') \left[\frac{R_1}{(x_1+x_2')} + \text{Tg}\delta \right]$$

Reemplazando en II

$$T_e = -3 (x_1+x_2') \left[\frac{R_1}{(x_1+x_2')} + \text{Tg}\delta \right] \frac{P}{\omega_s} \frac{V_1^2 \text{Cos}^2\delta}{(x_1+x_2')^2}$$

$$T_e = -3 \frac{P}{\omega_s} \frac{V_1^2 \text{Cos}^2\delta}{(x_1+x_2')} \left[\frac{R_1}{(x_1+x_2')} + \text{Tg}\delta \right]$$

$$T_e = -3 \frac{P}{\omega_s} \frac{V_1^2}{(x_1+x_2')} \left[\frac{R_1}{(x_1+x_2')} \text{Cos}^2\delta + \text{Sen}\delta \text{Cos}\delta \right]$$

Resulta:

$$T_e = -\frac{3}{2} \frac{P}{\omega_s} \frac{V_1^2}{(x_1+x_2')} \left[\frac{2R_1}{(x_1+x_2')} \text{Cos}^2\delta + \text{Sen}2\delta \right] \dots \dots \text{III}$$

4.6 Par máximo

De la ecuación I:

$$T_e = \frac{3R_2'}{s} \frac{P}{\omega_s} \frac{v_1^2}{\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + (x_1 + x_2')^2}$$

Evaluamos el torque máximo, haciendo $\frac{dT_e}{ds} = 0$

$$\frac{dT_e}{ds} = 0 = \frac{3R_2' P v_1^2}{\omega_s} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + (x_1 + x_2')^2 \right]} \right]$$

$$\frac{dT_e}{ds} = 0 = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + (x_1 + x_2')^2 \right]} \right\}$$

$$0 = (-1) \frac{\left[s^2 \left(-\frac{R_2'}{s^2}\right) \left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right) + \left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + (x_1 + x_2')^2 \right]}{\left\{ s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + (x_1 + x_2')^2 \right] \right\}^2}$$

$$0 = -1 \left[-2 \frac{R_2'}{s} R_1 - 2 \frac{R_2'^2}{s^2} + R_1^2 + 2R_1 \frac{R_2'}{s} + \frac{R_2'^2}{s^2} + (x_1 + x_2')^2 \right]$$

$$0 = R_1^2 - \frac{R_2'^2}{s^2} + (x_1 + x_2')^2$$

Lo que resulta:

$$s_o = \frac{R_2'}{\left[R_1^2 + (x_1 + x_2')^2 \right]^{1/2}} \dots \dots \dots \text{IV}$$

R_1 : Resistencia del devanado estatórico.

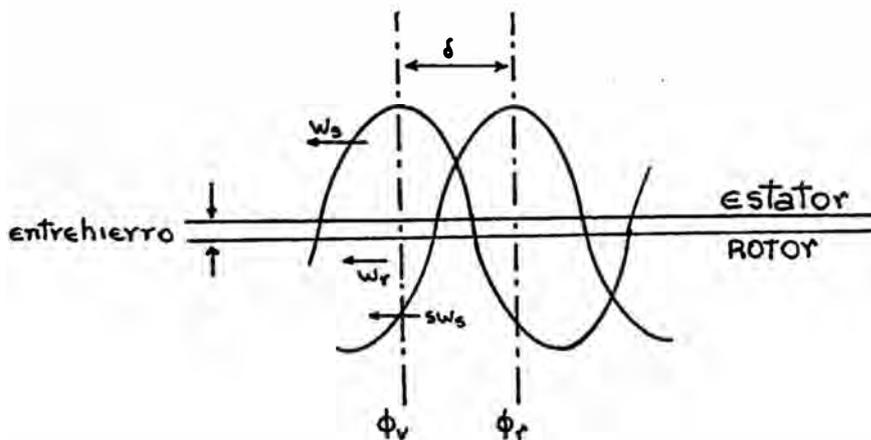
R_2' : Resistencia del devanado rotórico referido al estator.

X_1 : Reactancia de dispersión del estator.

X_2' : Reactancia de dispersión del rotor referido al estator.

4.7 Ecuación mecánica

Considerando como ángulo de carga al desfase entre los flujos magnéticos en el entrehierro y rotor como se muestra:



Así, según referencia bibliográfica (4), en cualquier instante de tiempo, la relación entre ω_r y deslizamiento s pueden ser dados por:

$$\omega_r = \dot{\delta} + \omega_s + s\omega_s$$

derivando:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{d\dot{\delta}}{dt} + \frac{d\omega_s}{dt} + \omega_s \frac{ds}{dt}$$

$$0 = \ddot{\delta} + \frac{d\omega_r}{dt} + \omega_r \frac{ds}{dt}$$

haciendo:

$$0 = \ddot{\delta} + \frac{d\omega_r}{dt} + \omega_r \frac{ds}{dt} \frac{d\delta}{d\delta}$$

$$0 = \ddot{\delta} + \dot{\delta} \omega_r \frac{ds}{d\delta} + \frac{d\omega_r}{dt} \dots \dots \dots (\sigma)$$

De la expresión (\gamma)

$$\text{Tg}\delta = - \frac{R_1 + R_2'/S}{X_1 + X_2'}$$

$$R_1 + \frac{R_2'}{S} = - (X_1 + X_2') \text{Tg}\delta$$

despejando S:

$$S = - \frac{R_2'}{R_1 + (X_1 + X_2') \text{Tg}\delta} \dots \dots \dots \vee$$

De las expresiones IV y V:

$$\frac{S}{S_0} = - \frac{R_2' / [R_1 + (X_1 + X_2') \text{Tg}\delta]}{R_2' / [R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]^{1/2}}$$

$$S = -S_0 \frac{[R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]^{1/2}}{R_1 + (X_1 + X_2') \text{Tg}\delta}$$

derivando:

$$\frac{ds}{d\delta} = \frac{S_0 [R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]^{1/2} (X_1 + X_2') \text{Sec}^2\delta}{[R_1 + (X_1 + X_2') \text{Tg}\delta]^2}$$

$$\frac{ds}{d\delta} = \frac{S_o [R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]^{1/2} (X_1 + X_2')}{[R_1 \cos\delta + (X_1 + X_2') \text{Sen}\delta]^2} \dots \dots \dots \text{VI}$$

Reemplazando en (σ):

$$0 = \ddot{\delta} + \dot{\delta} \omega_s \frac{S_o [R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]^{1/2} (X_1 + X_2')}{[R_1 \cos\delta + (X_1 + X_2') \text{Sen}\delta]^2} + \frac{d\omega_r}{dt} \dots \dots \dots \text{VII}$$

Para evaluar $d\omega_r/dt$, recurrimos al par desarrollado por el motor:

$$T_o = \frac{J}{P} \frac{d\omega_r}{dt} + T_L$$

despejando:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{P}{J} T_o - \frac{P}{J} T_L$$

Reemplazando en VII:

$$0 = \ddot{\delta} + \dot{\delta} \omega_s \frac{S_o [R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]^{1/2} (X_1 + X_2')}{[R_1 \cos\delta + (X_1 + X_2') \text{Sen}\delta]^2} + \frac{P}{J} (T_o - T_L)$$

De la expresión III, reemplazando resulta:

$$\ddot{\delta} + \dot{\delta} \omega_s S_o \frac{[R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]^{1/2} (X_1 + X_2')}{[R_1 \cos\delta + (X_1 + X_2') \text{Sen}\delta]^2} - \frac{3}{2} \frac{P^2}{J \omega_s} \frac{V_1^2}{(X_1 + X_2')}$$

$$\left[\frac{2R_1}{(X_1 + X_2')} \cos^2\delta + \text{Sen}2\delta \right] - \frac{P}{J} T_L = 0$$

Haciendo:

$$A = \omega_s S_o [R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]^{1/2} (X_1 + X_2')$$

$$B = \frac{3}{2} \frac{P^2}{J\omega_s} \frac{V_1^2}{(X_1 + X_2')}$$

$$C = [R_1 \cos\delta + (X_1 + X_2') \sin\delta]^2$$

$$D = \left[\frac{2R_1}{(X_1 + X_2')} \cos^2\delta + \sin 2\delta \right]$$

Resulta:

$$\ddot{\delta} + \dot{\delta} \frac{A}{C(\delta)} - B D(\delta) - \frac{P}{J} T_L = 0 \dots\dots\dots \text{VIII}$$

Con la finalidad de estructurar mejor y simplificar la expresión anterior, hacemos un artificio de cambio de variables; así:

Haciendo:

$$Q = \frac{X_1 + X_2'}{R_1}$$

$$\text{Tg}\varphi = \frac{R_1}{X_1 + X_2'} = \frac{1}{Q}$$

Reemplazando en A, C y D

$$A = \omega_s S_o [R_1^2 + R_1^2 Q^2]^{1/2} R_1 Q$$

$$A = \omega_s S_o R_1^2 [1 + Q^2]^{1/2} Q$$

$$C = [R_1 \cos\delta + R_1 Q \sin\delta]^2$$

$$C = R_1^2 [\cos\delta + Q \sin\delta]^2$$

$$C = R_1^2 \left[\cos\delta + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \sin\delta \right]^2$$

$$C = \frac{R_1^2 \sin^2(\delta + \varphi)}{\sin^2\varphi} = \frac{R_1^2 \sin^2(\delta + \varphi)}{R_1^2 / [R_1^2 + (X_1 + X_2')^2]}$$

$$C = \sin^2(\delta + \varphi) R_1^2 [1 + Q^2]$$

$$C = R_1^2 [1 + Q^2] \sin^2(\delta + \varphi)$$

$$D = \frac{2}{(X_1 + X_2') / R_1} \cos^2\delta + \sin 2\delta$$

$$D = \frac{2}{Q} \cos^2\delta + \sin 2\delta$$

Reemplazando en VIII:

$$\ddot{\delta} + \dot{\delta} \frac{\omega_s S_o R_1^2 + [1 + Q^2]^{1/2} Q}{R_1^2 [1 + Q^2] \sin(\delta + \varphi)} - \frac{3}{2} \frac{P^2}{J \omega_s} \frac{V_1^2}{(X_1 + X_2')}$$

$$\left[\frac{2}{Q} \cos^2\delta + \sin 2\delta \right] - \frac{P}{J} T_L = 0$$

Resulta:

$$\ddot{\delta} + \dot{\delta} \frac{\omega_s S_o Q}{[1 + Q^2]^{1/2} \sin^2(\delta + \varphi)} - \frac{3}{2} \frac{P^2}{J \omega_s} \frac{V_1^2}{(X_1 + X_2')}$$

$$\left[\frac{2}{Q} \cos^2\delta + \sin 2\delta \right] - \frac{P}{J} T_L = 0$$

La Expresión deducida es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, que describe el comportamiento transitorio del motor de inducción.

Para el análisis de este comportamiento sólo resta plantear la solución de la expresión deducida.

4.8 Formulación de las ecuaciones y variables de estado

Con la finalidad de establecer la ecuación de estado, debe llevarse la expresión hallada a la forma:

$$[X] = [A] X + [B] u$$

Entonces formulando las variables de estado:

$$X_1 = \delta$$

$$X_2 = \dot{\delta}$$

Luego:

$$\dot{X}_1 = X_2$$

$$\dot{X}_2 = \ddot{\delta}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\dot{X}_2 + X_2 \frac{\omega_s S_o Q}{[1+Q^2]^{1/2} \text{Sen}^2(X_1+\varphi)} - \frac{3}{2} \frac{P^2}{J\omega_s} \frac{V_1^2}{(X_1+X_2)} \left[\frac{2}{Q} \text{Cos}^2 X_1 + \text{Sen} 2X_1 \right] - \frac{P}{J} T_L = 0$$

Luego:

$$\dot{X}_2 = -X_2 \frac{\omega_s S_o Q}{[1+Q^2]^{1/2} \text{Sen}^2(X_1+\varphi)} + \frac{3}{2} \frac{P^2}{J\omega_s} \frac{V_1^2}{(X_1+X_2)} \left[\frac{2}{Q} \text{Cos}^2 X_1 + \text{Sen} 2X_1 \right] + \frac{P}{J} T_L$$

y

$$\dot{X}_1 = X_2$$

Llevándolo a la forma matricial, a tendrá la

ecuación de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\omega_s S_o Q}{[1+Q^2]^{1/2} \text{Sen}^2(X_1 + \varphi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{P}{J} & \frac{3}{2} \frac{P^2}{J\omega_s} \frac{1}{(X_1+X_2')} \left[\frac{2}{Q} \text{Cos}^2 X_1 + \text{Sen} 2X_1 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ V_1^2 \end{bmatrix}$$

Con la finalidad de no provocar confusión entre las variables de estado X_1 , X_2 y los parámetros reactancia de dispersión del estator (X_1) y del rotor (X_2) se hace finalmente: $X_1 = \delta$

$$\frac{\omega_s S_o Q}{[1+Q^2]^{1/2} \text{Sen}^2(X_1 + \varphi)} = \frac{K_o}{\text{Sen}^2(\delta + \varphi)}$$

$$T_m = \frac{3}{2} \frac{P^2}{J\omega_s} \frac{1}{(X_1+X_2')}$$

La matriz de estado resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_o}{\text{Sen}^2(\delta + \varphi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{P}{J} & T_m \left[\frac{2}{Q} \text{Cos}^2 \delta + \text{Sen} 2\delta \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ V_1^2 \end{bmatrix}$$

4.9 Solución de la ecuación de estado

Para este paso deben establecerse las condiciones iniciales y los valores de los parámetros que involucra la ecuación de estado.

Las condiciones iniciales:

$$\begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(0) \\ \dot{\delta}(0) \end{bmatrix}$$

Para efectuar las simulaciones se usará los siguientes parámetros:

$$R_1 = 0.05\Omega$$

$$R_2' = 0.172\Omega$$

$$X_1 = 0.25\Omega$$

$$X_2' = 0.32\Omega$$

$$J = 9.45 \text{ Kgr-m}^2$$

$$P = 3 \text{ pares de polos}$$

$$V_1 = 400 \text{ v}$$

$$T_L = 720$$

Para los valores asumidos y condiciones dadas debe desarrollarse el programa.

4.9.1 Programas en MATLAB

PROGRAMA # 1

```
% Transitorios en un motor de inducción trifásico sometido
% a variaciones bruscas de la tensión
% Influencia de los parámetros r1, r2p, x1,x2p en el
% transitorio
% Listado de parámetros
% x1 : Reactancia de dispersión del estator
% x2p: Reactancia de dispersión del rotor referido al
% estator
% r1 : Resistencia del devanado estatórico
% r2p: Resistencia de rotor referido al estator
% J : Momento de inercia
```

```

% p : Número de par de polos
% volt: Tensión aplicada al motor
% Vp : Relación de caída de tensión
% Torquen: Torque aplicado en el eje (TL)
% ws : Velocidad síncrona
% X1 : Angulo de carga
% Condiciones de operación
t0=0; tf = 9 % Tiempo inicial y final
tol=0.001; % Tolerancia del método de
integración
x0=[1.7082 125.66]'; %Condiciones iniciales
% Ingreso de datos
x1= 0.25;
x2p=0.32;
r1=0.05;
r2p=0.172;
J=9.45;
p=3;
volt=400;
torquen=720;
tOf=1;
tff=6.9;
ttor=1.5;
Vp=0.5;
%Definición de las expresiones ws,q,so,val
ws=2*pi*60;
q=(x1+x2p)/r1;
so=r2p/sqrt(r1^2+(x1+x2p)^2);

```

```

val=atan(1/q);
tole=tol;
global p volt x1 x2p r1 r2p J ws val Vp torquen tOf tff ttor
%Integración 4th 5th orden Kutta Fehlberg
file = 'PROGRAMA 2';
[t,x]=ode45(file,t0,tf,x0,to1,0);
v=ones(max(size(t)),1)*volt;
for loz=1:max(size(t))
    if t(loz)=tOf
        v(loz,1)=volt;
    end
    if (t(loz)>=tOf)&(t(loz)<tff)
        v(loz,1)=volt*Vp;
    end
    if t(loz)=tff
        v(loz,1)=volt;
        v(loz,1)=volt;
    end
end

```

PROGRAMA # 2

```

% Transitorios en un motor trifásico de inducción
% Evaluación de la Ecuación de Estado
function trabajo=prog2(t,x)
global P volt x1 x2p r1 r2p J ws q so val tole Vp torquen
    tOf tff ttor
% tensión aplicado al motor de inducción:
% caracterización de la falla
if (t<tOf);(t>=tff),
vn=volt;

```

```

tln=torquen;
end
if (t>=tOf)&(t<tff),
vn=volt*Vp;
tln=torquen;
end
%Definición de las variables de estado
deltap=x(2);
Wr=x(2);
delta=x(1);
%Definición de las expresiones propuestas
Ko=ws*so*Q/(sqrt(1+q^2));
M=Ko/(sin(delta+val)^2);
tmax=3*p^2*vn^2/(2*(x1+x2p)*J*ws);
deltapp=tmax*(sin(2*delta)+(2/q)*(cos(delta))^2)+(p/J)*tln-Wr*M
% Solución
trabajo=[deltap;deltapp];
%Fin de los cálculos
% Gráficos de los resultados

```

4.10 Análisis de los resultados de las simulaciones

Los resultados de las simulaciones, obtenidos por computadora, se incluyen en el anexo B. Haciendo uso de las bondades del programa MATLAB, se han considerado 17 casos; en cada uno de éstos se ha optado por modificar uno de los parámetros de la máquina, con el objeto de pronosticar su comportamiento durante el transitorio producido por la caída de la tensión aplicada al motor.

Los resultados mostrados, para los casos de valores distintos de parámetros de la máquina tienen sólo el propósito de ampliar la cobertura de ilustración; será sin embargo la confrontación de estas gráficas el material que permitirá comparar en que medida influyen los parámetros de la máquina durante el transitorio.

De la ecuación que describe el comportamiento del motor de inducción, se desprende, que el ángulo de carga depende de los parámetros de la máquina; así, un análisis rápido en el circuito equivalente del motor de inducción, al variar por ejemplo la resistencia del devanado estatórico, cambiará entonces el valor de la corriente; consecuentemente varía el par electromagnético producido, si aún más consideramos la dependencia del deslizamiento de los parámetros de la máquina, entonces claro está la influencia de éstos en el ángulo de carga. Por esta razón en adelante se obviará repetir la explicación en cada uno de los casos asumidos.

4.10.1 Casos simulados

Caso 1: Angulo de carga VS tiempo para un valor determinado de los parámetros de la máquina.

Para los valores asumidos, se observa (GRAF.#1), que luego de iniciada la falla en $t=1$ seg., el ángulo de carga se incrementará con gran rapidez, provocando la pérdida de estabilidad de la máquina y que a su vez culminada la falla en $t=6,85$ seg., la máquina en un tiempo muy corto volverá a recuperar estabilidad. Cabe anotar que se está tomando al ángulo de carga como

indicador de la estabilidad del motor.

Caso 2: Angulo de carga VS tiempo para un nuevo valor de r_1 .

Según el gráfico obtenido, (GRAF.#2), para $r_1=0,15\Omega$; durante el transitorio, el ángulo de carga se incrementa describiendo una curva con gran pendiente, pasada la falla (caída de la tensión aplicada) la restitución al valor estable se realiza en un tiempo de aproximadamente 1 seg.

Caso 3: Angulo de carga VS tiempo para un nuevo valor de x_1 .

En este caso, considerando un valor $x_1=0,19\Omega$ de reactancia de dispersión del estator, se observa (GRAF.#3), que durante el transitorio la variación del ángulo de carga se amortigua luego de aproximadamente 1 seg. de iniciada la falla.

Caso 4: Angulo de carga VS tiempo para un nuevo valor de r_{2p} .

El resultado obtenido (GRAF.#4), considerando $r_{2p}=0,25\Omega$ como valor de resistencia del devanado rotórico de la máquina, la característica del ángulo de carga, durante el transitorio, será de un incremento sostenido hasta la restitución de la tensión nominal en bornes de la máquina.

Caso 5: Angulo de carga VS tiempo para un nuevo valor de x_{2p} .

Según la gráfica (GRAF.#5), un valor de $x_{2p}=0,4\Omega$ para la reactancia de dispersión del rotor, da lugar

a que durante el transitorio el ángulo de carga se incrementa permanentemente hasta la restitución de la tensión nominal en bornes de la máquina.

Caso 6: Ángulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor de J.

El gráfico obtenido (GRAF.#4), para un valor de $J=5,5 \text{ Kg-m}^2$, se observa que el incremento del ángulo de carga, durante el transitorio, es sostenido, estabilizándose en un valor luego de aproximadamente 2,5 seg. de iniciada la falla.

Caso 7: Ángulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor de J.

Según la gráfica (GRAF.#7), se observa que para un nuevo valor de $J=3,5 \text{ Kg-m}^2$, no se altera significativamente la característica del ángulo de carga durante el transitorio.

Caso 8: Ángulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de r_1 .

En la gráfica (GRAF.#1 y GRAF.#2), se muestra comparativamente cómo el ángulo de carga varía durante el transitorio si la máquina tuviese valores distintos de resistencia del devanado estático.

Caso 9. Ángulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de x_1 .

En este caso, los resultados se muestran comparativamente en (GRAF.#1 y GRAF.#2), aquí se observa que durante el transitorio, el ángulo de carga no variará significativamente para valores distintos

de la reactancia de dispersión del estator.

Caso 10. Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de r_2p .

Los resultados mostrados comparativamente en (GRAF.#1 y GRAF.#4), permiten concluir que la performance de la máquina, durante el transitorio, sufre una ligera variación si se modifica el valor de la resistencia del devanado rotórico.

Caso 11. Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de x_2p .

Según el gráfico comparativo (GRAF.#1 y GRAF.#5), en este caso, el ángulo de carga estaría notablemente afectado si se modifica el valor de la reactancia de dispersión del rotor referido al estator.

Caso 12. Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de J .

Según los resultados (GRAF.#1, GRAF.#6 y GRAF.#7), el momento de inercia J , prácticamente no influye sobre el ángulo de carga durante el transitorio; así los valores de J fuesen marcadamente distintos.

Caso 13. Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de caída de tensión.

En este caso, se ha simulado la respuesta de la máquina (GRAF.#8), cuando la tensión aplicada al motor sea del 50%, 75% y 90% de la tensión nominal.

Caso 14. Angulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor del torque aplicado.

El resultado obtenido (GRAF.#9), muestra que para

el torque indicado, el incremento del ángulo de carga cesa sólo cuando se pone fin a la falla, asimismo la recuperación de estabilidad de la máquina se logra en mayor tiempo que los casos anteriores.

Caso 15. Angulo de Carga VS Tiempo para otro valor del torque aplicado.

Una disminución del torque aplicado, como es el caso (FIG.#10), permite advertir la influencia de éste en el ángulo de carga, que variará sostenidamente estabilizándose en un valor 1 seg. después de iniciada la falla.

Caso 16. Angulo de Carga VS Tiempo para distintos valores del torque aplicado.

Según los resultados obtenidos (GRAF.#1, GRAF.#9 y GRAF.#10), se puede concluir que a menor torque aplicado el incremento del ángulo de carga se hace más sostenido, asimismo el tiempo de recuperación luego de terminada la falla es más corto cuanto menor es el torque aplicado.

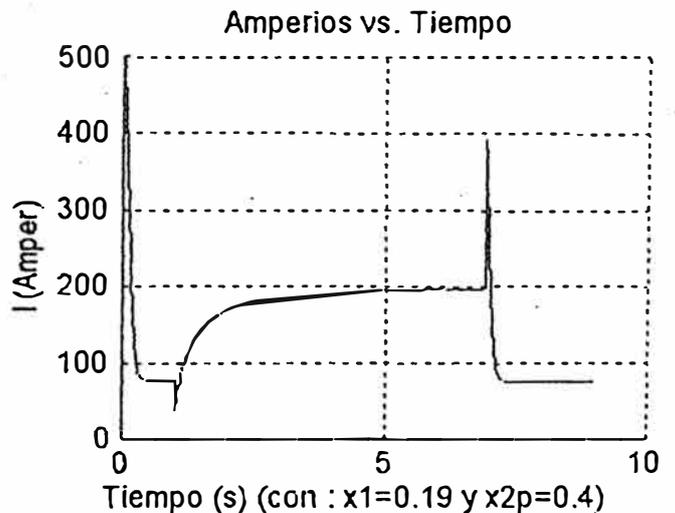
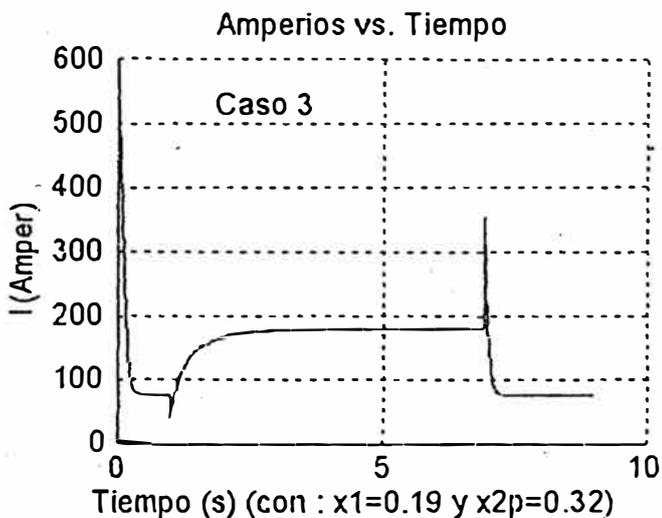
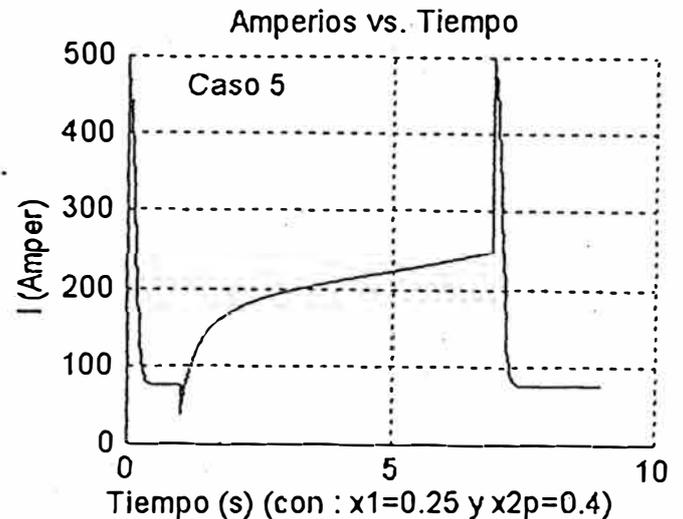
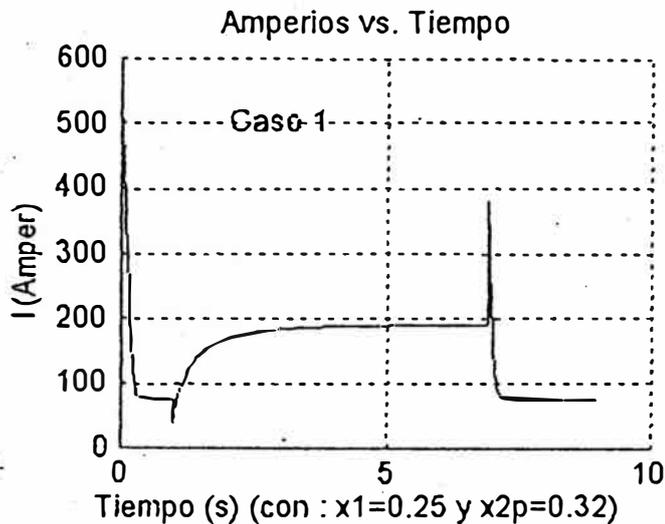
Caso 17. Angulo de Carga VS Tiempo para distintos valores del número de polos de la máquina.

Según resultado (GRAF.#11), un mayor número de polos de la máquina trae consigo que el ángulo de carga varíe durante un tiempo corto se estabilize también en un menor valor hasta el fin de la falla.

4.10.2 Intensidad de corriente en el motor de inducción durante el transitorio producido por una caída en la tensión aplicada

La performance del motor de inducción a sido simulado para el caso de falla sostenida, utilizando al ángulo de carga como variable de interés. Se consideró como falla una caída del 50% en la tensión aplicada al motor. Los resultados obtenidos se han mostrado mediante gráficas en los que además se observan la influencia de los parámetros de la máquina en operación.

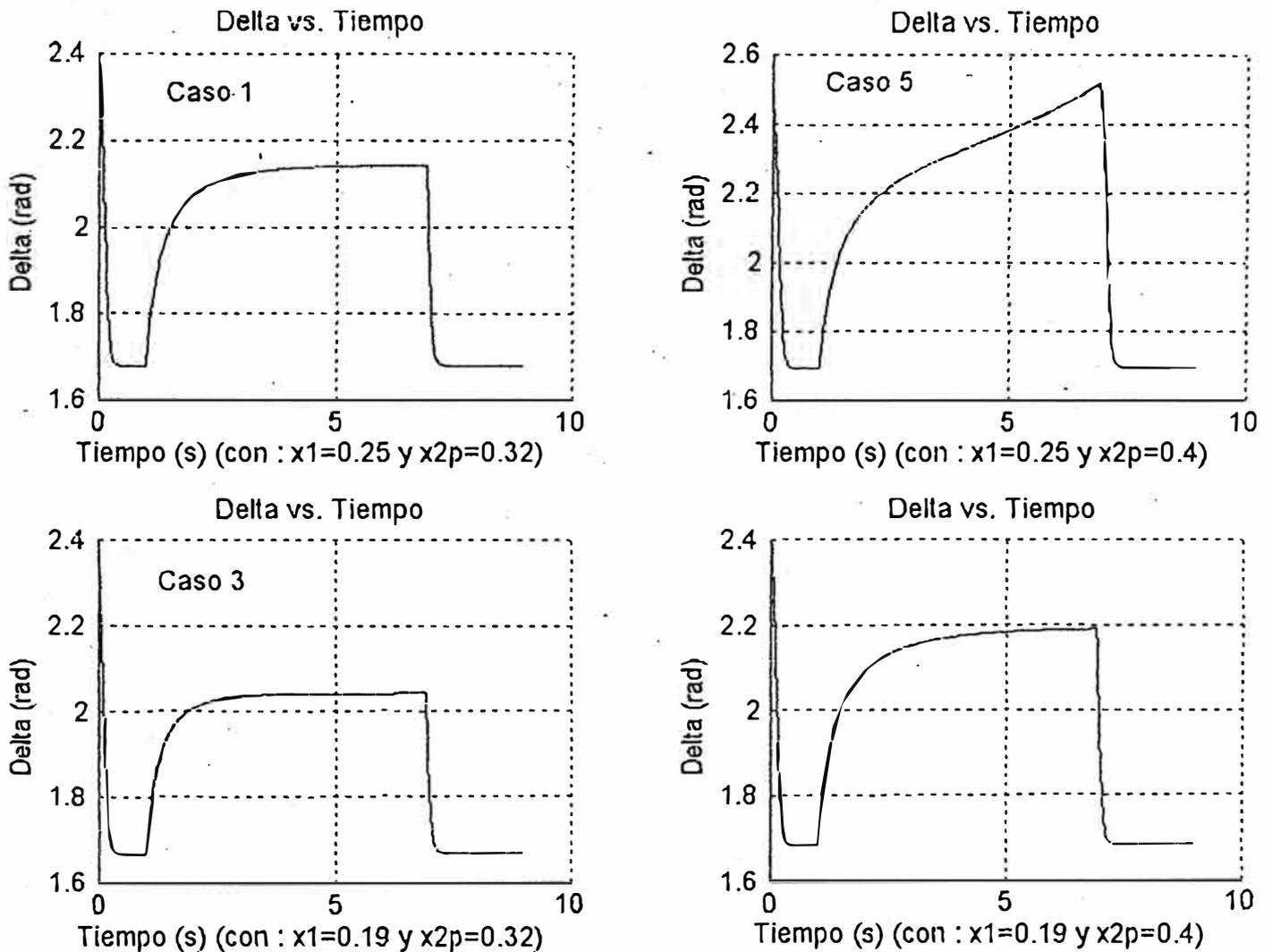
GRAFICA 1



Resulta también de interés pronosticar la característica de la corriente en el motor de inducción en operación, antes, durante y después de la falla. Con este propósito,

utilizando el programa MATLAB, se han simulado nuevamente 3 de los casos anteriores más uno adicional: para lo que ha sido necesario previamente desarrollar la expresión de la corriente rotórica I_2' como una función del ángulo de carga: $I_2' = [v1 / (x_1 + x_2')] \cos \delta$. Así entonces la expresión deducida, utilizando los valores de la variable ángulo de carga que resultan de la solución de la ecuación de estado, permite obtener la corriente I_2' .

GRAFICA 2



Los resultados de la simulación mostrados en la GRAF.1, permiten con claridad establecer la característica de la corriente durante la operación del motor. Así la elevada

corriente presentada durante el arranque se estabilizará rápidamente, operando el motor con carga constante. Al presentarse la falla en $t=1$ seg, la corriente se incrementará luego de haber decaído un pico justamente en el instante de la falla. El rápido incremento de la corriente tenderá nuevamente a estabilizarse dependiendo de los parámetros de la máquina, como se observa en los casos 1, 3, 5 y el adicional. Terminada la falla en $t=6,85$ seg, osea, restituida la tensión nominal, se presentará un pico de corriente cuya duración también dependerá de los parámetros de la máquina, y finalmente la corriente se estabilizará en el mismo valor que tuvo antes de la falla.

Se complementa esta parte con la GRAF.2, con el propósito de visualizar comparativamente para los casos indicados al ángulo de carga y a la corriente rotórica como funciones del tiempo durante la operación del motor de inducción.

1. El análisis de la máquina eléctrica mediante ecuaciones y variables de estado, ha demostrado ser una técnica eficaz y que además que permite una facilidad en la posterior simulación digital de operación de la máquina.
2. Un sistema eléctrico en el que se involucra al generador síncrono, sus sistemas de control y las ecuaciones de la línea de transmisión, también puede ser modelado mediante la técnica de espacio estado, luego de establecerse sus ecuaciones en forma matricial.
3. En la formulación de las ecuaciones de la máquina síncrona, se distingue que las variables de estado elegidos son los flujos magnéticos, pudiendo también haberse elegido para el análisis a las corrientes; así la selección de la variable de estado no debe constituir un problema y que dependerá del enfoque que se quiera dar en el análisis.
4. Las ecuaciones de estado obtenidas, han sido acondicionadas con el propósito de utilizar los parámetros de la máquina a partir de los datos proporcionado por el fabricante; lo que a su vez brinda la oportunidad de explorar el comportamiento de la máquina al modificarse algunos de estos parámetros, así

como ante las fallas que pudieran presentarse.

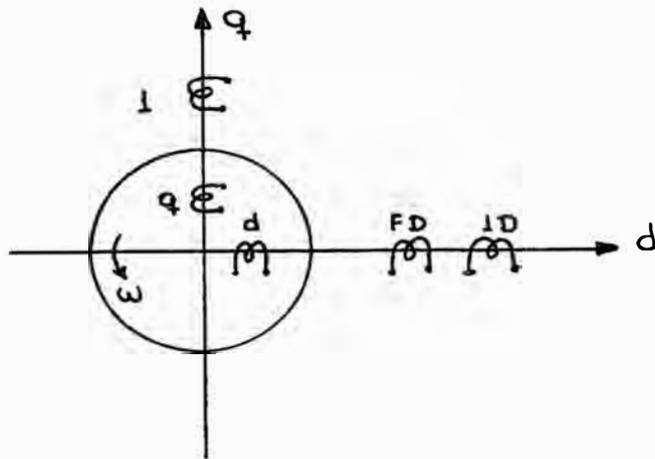
5. En el tratado desarrollado para la máquina asíncrona trifásica, se demuestra directamente la aplicabilidad del método, así en su primera parte se formulan las ecuaciones de estado que resultan del análisis de la máquina, seguidamente se acompaña los resultados del programa implementado en MATLAB; en donde se muestra las características de las respuestas obtenidas.
6. El comportamiento del motor asíncrono (de inducción) trifásico, durante el transitorio ocurrido por perturbaciones de la tensión aplicada, puede ser evaluada tomando como indicador al ángulo de carga; asimismo utilizando el circuito equivalente clásico del motor en estado estacionario y la ecuación de movimiento del rotor.
7. Los distintos gráficos obtenidos, denotan la magnitud de la influencia de los parámetros de la máquina en el ángulo de carga, durante el transitorio producido por la caída de tensión en bornes del motor asíncrono.
8. De los resultados de la simulación se concluye que para mayores valores de la resistencia del devanado estatórico (R_1), de la reactancia de dispersión del estator (X_1) y de la reactancia de dispersión del rotor referido al estator (X_2'); el transitorio se hace más crítico, es decir la falla se amortiguará con mayor dificultad.
9. Así también, para mayores valores de la resistencia del

rotor referido al estator (R_2') y del momento de inercia (J); la falla se hará menos crítica durante el transitorio.

10. Es notorio en los resultados obtenidos la versatilidad de análisis para diferentes casos y propósitos, tales como posibilitar al investigador un mejor diseño de la máquina eléctrica.

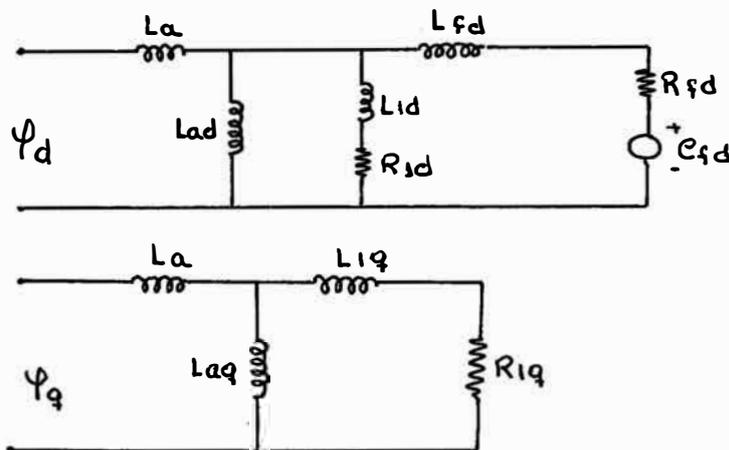
A N E X O S

ANEXO A: RELACIONES Y CIRCUITOS EQUIVALENTES DEL MODELO d-q

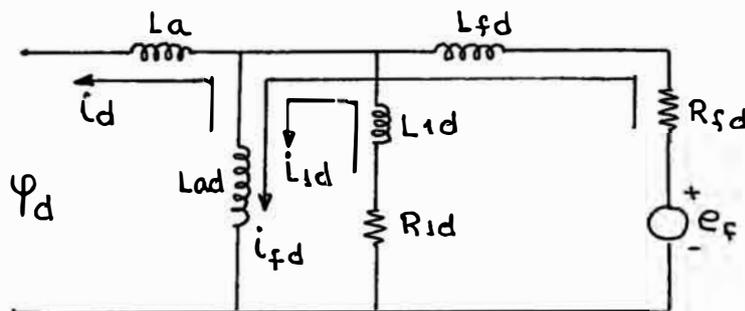


A.1 Circuitos equivalentes

Estableciendo en forma de circuitos equivalentes el modelo propuesto, según referencia bibliográfica 6 será:



Efectuando el análisis respecto a los flujos originados:



A.2 Flujo magnético en los ejes D y Q

$$\Phi_{fd} = L_{fd}(i_{fd}) + L_{ad}(i_{fd} + i_{1d} - i_d)$$

$$\Phi_{fd} = L_{ad}(-i_d) + L_{ad} + L_{fd}(i_{fd}) + L_{ad}(i_{fd}) \dots \dots \dots a$$

$$\Phi_{1d} = L_{1d}(i_{1d}) + L_{ad}(i_{fd} + i_{1d} - i_d)$$

$$\Phi_{1d} = L_{ad}(-i_d) + L_{ad}(i_{fd}) + (L_{ad} + L_{1d})(i_{1d}) \dots \dots \dots B$$

$$\Phi_d = L_{ad}(i_{1d} + i_{fd} - i_d) - L_a(i_d)$$

$$\Phi_d = (L_a + L_{ad})(-i_d) + L_{ad}(i_{fd}) + L_{ad}(i_{1d}) \dots \dots \dots \gamma$$

Simplificando :

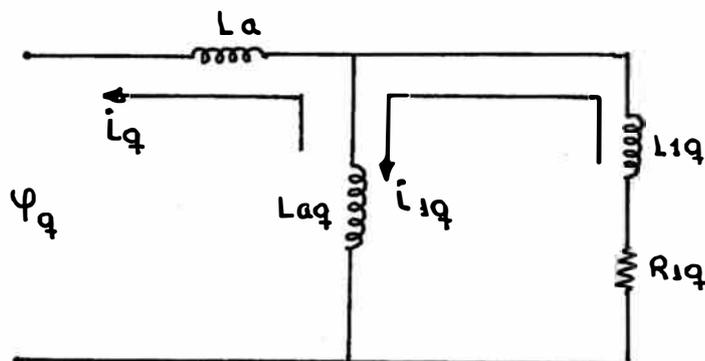
$$\Phi_d = (L_{ad} + L_a)(-i_d) + L_{ad}(i_{fd}) + L_{ad}(i_{1d})$$

$$\Phi_{fd} = L_{ad}(-i_d) + (L_{ad} + L_{fd})(i_{fd}) + L_{ad}(i_{1d})$$

$$\Phi_{1d} = L_{ad}(-i_d) + L_{ad}(i_{fd}) + (L_{ad} + L_{1d})(i_{1d})$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_{fd} \\ \Phi_{1d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ad} + L_a & L_{ad} & L_{ad} \\ L_{ad} & L_{ad} + L_{fd} & L_{ad} \\ L_{ad} & L_{ad} & L_{ad} + L_{1d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_d \\ i_{fd} \\ i_{1d} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (I)$$



$$\Phi_{1q} = L_{1q}(i_{1q}) + (i_{1q} - i_q)L_{2q}$$

$$\varphi_{1q} = (L_{2q} + L_{1q}) i_{1q} - L_{2q} i_q$$

$$\varphi_q = L_{2q} (i_{1q} - i_q) - L_a (i_q)$$

$$\varphi_q = (L_{2q} + L_a) (-i_q) + L_{2q} (i_{1q})$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} \varphi_q \\ \varphi_{1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{2q} + L_a & L_{2q} \\ L_{2q} & L_{2q} + L_{1q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_q \\ i_{1q} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (II)$$

De las expresiones (I) y (II)

$$\begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_{FD} \\ \varphi_{1D} \\ \varphi_q \\ \varphi_{1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{2d} + L_a & L_{2d} & L_{2d} & 0 & 0 \\ L_{2d} & L_{2d} + L_{FD} & L_{2d} & 0 & 0 \\ L_{2d} & L_{2d} & L_{2d} + L_{1D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{2q} + L_a & L_{2q} \\ 0 & 0 & 0 & L_{2q} & L_{2q} + L_{1q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_d \\ i_{FD} \\ i_{1D} \\ -i_q \\ i_{1q} \end{bmatrix}$$

De la matriz anterior, volviendo a:

$$\begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_{FD} \\ \varphi_{1D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{2d} + L_a & L_{2d} & L_{2d} \\ L_{2d} & L_{2d} + L_{FD} & L_{2d} \\ L_{2d} & L_{2d} & L_{2d} + L_{1D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_d \\ i_{FD} \\ i_{1D} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (a)$$

haciendo:

$$L_{2d} + L_a = L_1$$

$$L_{2d} + L_{FD} = L_2$$

$$L_{2d} + L_{1D} = L_3$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_{FD} \\ \varphi_{1D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 & L_{ad} & L_{ad} \\ L_{ad} & L_2 & L_{ad} \\ L_{ad} & L_{ad} & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_d \\ i_{FD} \\ i_{1D} \end{bmatrix}$$

A.3 Matriz corriente [L]

A.3.1 En el eje directo

Observamos que:

$$[\varphi_{d \text{ FD } 1D}] = [L] [i_{d \text{ FD } 1D}]$$

Despejando [i]

$$\begin{bmatrix} -i_d \\ i_{FD} \\ i_{1D} \end{bmatrix} = [L_d]^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_{FD} \\ \varphi_{1D} \end{bmatrix}$$

Para determinar la inversa de [L]:

$$[L]^{-1} = \frac{\text{Adj}[L]}{\det[L]}$$

$$[L]^{-1} = \frac{1}{\det[L]} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} L_2 & L_{ad} \\ L_{ad} & L_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} L_{ad} & L_{ad} \\ L_{ad} & L_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L_{ad} & L_{ad} \\ L_2 & L_{ad} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} L_{ad} & L_{ad} \\ L_{ad} & L_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L_1 & L_{ad} \\ L_{ad} & L_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} L_1 & L_{ad} \\ L_{ad} & L_{ad} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} L_{ad} & L_2 \\ L_{ad} & L_{ad} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} L_1 & L_{ad} \\ L_{ad} & L_{ad} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L_1 & L_{ad} \\ L_{ad} & L_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[L]^{-1} = \frac{1}{\det[L]} \begin{bmatrix} L_2 L_3 - L_{ad}^2 & -(L_{ad} L_3 - L_{ad}^2) & L_{ad}^2 - L_{ad} L_2 \\ -(L_{ad} L_3 - L_{ad}^2) & (L_1 L_3 - L_{ad}^2) & -(L_{ad} L_1 - L_{ad}^2) \\ (L_{ad}^2 - L_{ad} L_2) & -(L_{ad} L_1 - L_{ad}^2) & (L_1 L_2 - L_{ad}^2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

De la matriz (α) evaluamos el $\det[L]$

$$\det [L] = (L_{ad}+L_a) [(L_{ad}+L_{FD}) (L_{ad}+L_{1D}) - L_{ad}^2] - L_{ad} [L_{ad} (L_{ad}+L_{1D}) - L_{ad}^2] + L_{ad} [L_{ad}^2 - L_{ad} (L_{ad}+L_{FD})]$$

$$\det [L] = L_1 [L_2 L_3 - L_{ad}^2] - L_{ad} [L_{ad} L_3 - L_{ad}^2] + L_{ad} [L_{ad}^2 - L_{ad} L_2]$$

$$\det [L] = L_1 L_2 L_3 - L_1 L_{ad}^2 - L_3 L_{ad}^2 + L_{ad}^3 + L_{ad}^3 - L_2 L_{ad}^2$$

$$\det [L] = L_1 L_2 L_3 - L_{ad}^2 [L_1 + L_3 + L_2 - 2L_{ad}]$$

Reemplazando L_1 , L_2 y L_3 , en la expresión anterior:

$$\det [L] = (L_{ad}+L_a) (L_{ad}+L_{FD}) (L_{ad}+L_{1D}) - L_{ad}^2 [L_{ad}+L_a+L_{ad}+L_{1D}+L_{ad}+L_{FD} - 2L_{ad}]$$

$$\det [L] = (L_{ad}^2 + L_{ad} L_{FD} + L_a L_{ad} + L_a L_{FD}) (L_{ad}+L_{1D}) - L_{ad}^2 [L_a + L_{1D} + L_{FD} + L_{ad}]$$

$$\det [L] = L_{ad}^3 + L_{ad}^2 L_{FD} + L_{ad}^2 L_a + L_a L_{FD} L_{ad} + L_{ad}^2 L_{1D} + L_{ad} L_{FD} L_{1D} + L_a L_{ad} L_{1D}$$

$$+ L_a L_{FD} L_{1D} - L_{ad}^2 L_a - L_{ad}^2 L_{1D} - L_{ad}^2 L_{FD} - L_{ad}^3$$

Lo que resulta:

$$\det [L] = L_a L_{FD} L_{ad} + L_{ad} L_{FD} L_{1D} + L_a L_{ad} L_{1D} + L_a L_{FD} L_{1D}$$

Factorizando L_{1D} :

$$\det [L] = L_{1D} \left[\frac{L_a L_{FD} L_{ad}}{L_{1D}} + L_a L_{ad} + L_a L_{FD} + L_{FD} L_{ad} \right]$$

Reemplazando en (8) L_1 , L_2 y L_3

$$[L]^{-1} = \frac{1}{\det [L]} \begin{bmatrix} (L_{ad} L_{FD}) (L_{ad}+L_{1D}) - L_{ad}^2 & L_{ad}^2 - L_{ad} (L_{ad}+L_{1D}) & L_{ad}^2 - L_{ad} (L_{ad}+L_{FD}) \\ L_{ad}^2 - L_{ad} (L_{ad}+L_{1D}) & (L_{ad}+L_a) (L_{ad}+L_{1D}) - L_{ad}^2 & L_{ad}^2 - L_{ad} (L_{ad}+L_a) \\ L_{ad}^2 - L_{ad} (L_{ad}+L_{FD}) & L_{ad}^2 - L_{ad} (L_{ad}+L_a) & (L_{ad}+L_a) (L_{ad}+L_{FD}) - L_{ad}^2 \end{bmatrix}$$

$$[L]^{-1} = \frac{1}{\det[L]} \begin{bmatrix} L_{ad}L_{1D} + L_{ad}L_{FD} + L_{FD}L_{1D} & -L_{ad}L_{1D} & -L_{ad}L_{FD} \\ -L_{ad}L_{1D} & L_{ad}L_{1D} + L_{ad}L_a + L_aL_{1D} & -L_{ad}L_a \\ -L_{ad}L_{FD} & -L_{ad}L_a & L_{ad}L_{FD} + L_{ad}L_a + L_aL_{FD} \end{bmatrix}$$

Factorizando L_{1D} de la matriz:

$$[L]^{-1} = \frac{L_{1D}}{\det[L]} \begin{bmatrix} \frac{L_{FD}L_{ad} + L_{ad} + L_{FD}}{L_{1D}} & -L_{ad} & -\frac{L_{FD}L_{ad}}{L_{1D}} \\ -L_{ad} & \frac{L_aL_{ad} + L_{ad} + L_a}{L_{1D}} & -\frac{L_aL_{ad}}{L_{1D}} \\ -\frac{L_{ad}L_{FD}}{L_{1D}} & -\frac{L_{ad}L_a}{L_{1D}} & \frac{L_aL_{ad} + L_aL_{FD} + L_{ad}L_{FD}}{L_{1D}} \end{bmatrix}$$

Haciendo por conveniencia:

$$\det[L] = L_{1D} \det(L)$$

Entonces:

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{L_{FD}L_{ad} + L_{ad} + L_{FD}}{L_{1D}} \right) / \det(L) & (-L_{ad}) / \det(L) & \left(-\frac{L_{FD}L_{ad}}{L_{1D}} \right) / \det(L) \\ (-L_{ad}) / \det(L) & \left(\frac{L_aL_{ad} + L_{ad} + L_a}{L_{1D}} \right) / \det(L) & \left(-\frac{L_aL_{ad}}{L_{1D}} \right) / \det(L) \\ \left(-\frac{L_{ad}L_{FD}}{L_{1D}} \right) / \det(L) & \left(-\frac{L_{ad}L_a}{L_{1D}} \right) / \det(L) & \left(\frac{L_aL_{ad} + L_aL_{FD} + L_{ad}L_{FD}}{L_{1D}} \right) / \det(L) \end{bmatrix}$$

proponiendo:

$$[Y] = \frac{\omega_o [L]^{-1}}{\omega_o}$$

$$[Y] = \omega_o \left[\frac{1}{\omega_o L} \right]$$

$$[Y] = \omega_o [Y]$$

se obtendrá:

$$[Y] = \omega_o \begin{bmatrix} Y_{1d} & Y_{4d} & Y_{5d} \\ Y_{4d} & Y_{2d} & Y_{6d} \\ Y_{5d} & Y_{6d} & Y_{3d} \end{bmatrix}$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_{2D} \\ i_{1D} \end{bmatrix} = \omega_o \begin{bmatrix} Y_{1d} & Y_{4d} & Y_{5d} \\ Y_{4d} & Y_{2d} & Y_{6d} \\ Y_{5d} & Y_{6d} & Y_{3d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_{2D} \\ \varphi_{1D} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

Parámetros Y_d

donde:

$$Y_{1d} = \frac{\frac{X_{FD}X_{2d}}{X_{1d}} + X_{2d} + X_{FD}}{\det(Y_d)}$$

$$Y_{2d} = \frac{\frac{X_s X_{2d}}{X_{1d}} + X_{2d} + X_s}{\det(Y_d)}$$

$$Y_{3d} = \frac{\frac{X_s X_{2d} + X_s X_{FD} + X_{2d} X_{FD}}{X_{1d}}}{\det(Y_d)}$$

$$Y_{4d} = \frac{(-X_{2d})}{\det(Y_d)}$$

$$Y_{5d} = \frac{\frac{-X_{1d}X_{2d}}{X_{1d}}}{\det(Y_d)}$$

$$Y_{6d} = \frac{\frac{-X_{2d}X_a}{X_{1d}}}{\det(Y_d)}$$

Habiéndose obtenido:

$$\begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_{1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{2q}+L_a & L_{2q} \\ L_{2q} & L_{2q}+L_{1q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_{1q} \end{bmatrix}$$

A.3.2 En el eje de cuadratura

Efectuando una inversión de matriz:

$$\begin{bmatrix} -i_a \\ i_{1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ L_q & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_{1q} \end{bmatrix}$$

Análogamente el caso anterior

$$[L_q]^{-1} = \frac{1}{(L_{2q}+L_a)(L_{2q}+L_{1q})-L_{2q}^2} \begin{bmatrix} L_{2q}+L_{1q} & -L_{2q} \\ -L_{2q} & L_{2q}+L_a \end{bmatrix}$$

$$[L_q]^{-1} = \frac{1}{L_{2q}L_{1q}+L_{2q}L_a+L_aL_{1q}} \begin{bmatrix} L_{2q}+L_{1q} & -L_{2q} \\ -L_{2q} & L_{2q}+L_a \end{bmatrix}$$

$$[L_q]^{-1} = \frac{1}{L_{1q} \left(\frac{L_{2q} L_a}{L_{1q}} + L_{2q} + L_a \right)} \begin{bmatrix} L_{1q} \left(\frac{L_{2q}}{L_{1q}} + 1 \right) & - \left(\frac{L_{2q}}{L_{1q}} \right) L_{1q} \\ \left(- \frac{L_{2q}}{L_{1q}} \right) L_{1q} & \left(\frac{L_{2q} + L_a}{L_{1q}} \right) L_{1q} \end{bmatrix}$$

$$[L_q]^{-1} = \frac{1}{\frac{L_{2q} L_a}{L_{1q}} + L_{2q} + L_a} \begin{bmatrix} \frac{L_{2q}}{L_{1q}} + 1 & - \frac{L_{2q}}{L_{1q}} \\ - \frac{L_{2q}}{L_{1q}} & \frac{L_{2q} + L_a}{L_{1q}} \end{bmatrix}$$

Asi para la expresi3n deducida hacemos:

$$[Y_q] = \omega_c \begin{bmatrix} Y_{1q} & Y_{3q} \\ Y_{3q} & Y_{2q} \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$\begin{bmatrix} -i_q \\ i_{1q} \end{bmatrix} = \omega_c \begin{bmatrix} Y_{1q} & Y_{3q} \\ Y_{3q} & Y_{2q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_q \\ \varphi_{1q} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

Par3metros Y_q

donde:

$$Y_{1q} = \frac{\frac{X_{2q}}{X_{1q}} + 1}{\det(Y_q)}$$

$$Y_{2q} = \frac{\frac{X_{2q} + X_a}{X_{1q}}}{\det(Y_q)}$$

$$Y_{3q} = \frac{- \frac{X_{2q}}{X_{1q}}}{\det(Y_q)}$$

En las expresiones hallados:

$$X_{FD} = \frac{X'_d - X_s}{X_d - X'_d} X_{sd}$$

$$X_{sd} = X_d - X_s$$

$$X_{1d} = \frac{(X'_d - X_s)(X''_d - X_s)}{(X'_d - X''_d)}$$

$$X_{dq} = X_q - X_s$$

$$X_{1q} = \frac{X''_q - X_s}{X_q - X''_q} X_{dq}$$

ANEXO B: RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES

En todos los casos simulados, se ha considerado una perturbación en la tensión aplicada al motor del 50% de la tensión nominal y las gráficas obtenidas muestran la influencia de los parámetros de la máquina durante el transitorio.

Los casos tenidos en cuenta en la simulación fueron:

- Caso 1:** Angulo de Carga VS Tiempo para un valor determinado de los parámetros de la máquina. GRAF. #1 (Gráfica que muestra la variación del ángulo de carga durante el transitorio).
- Caso 2:** Angulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor de r_1 . GRAF. #2 (Angulo de carga durante el transitorio para un nuevo valor de $r_1 = 0,15\Omega$).
- Caso 3:** Angulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor de x_1 . GRAF. #3 (Angulo de carga durante el transitorio para un nuevo valor de $x_1 = 0,19\Omega$).
- Caso 4:** Angulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor de r_{2p} . GRAF. #4 (Angulo de carga durante el transitorio para un nuevo valor de $r_{2p} = 0,25\Omega$).
- Caso 5:** Angulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor de x_{2p} . GRAF. #5 (Angulo de carga durante el transitorio para un nuevo valor de $x_{2p} = 0,4\Omega$).
- Caso 6:** Angulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor de J . GRAF. #6 (Angulo de carga durante el transitorio para un nuevo valor de $J = 5,5\text{Kg-m}^2$).
- Caso 7:** Angulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor de J . GRAF. #7 (Angulo de carga durante el

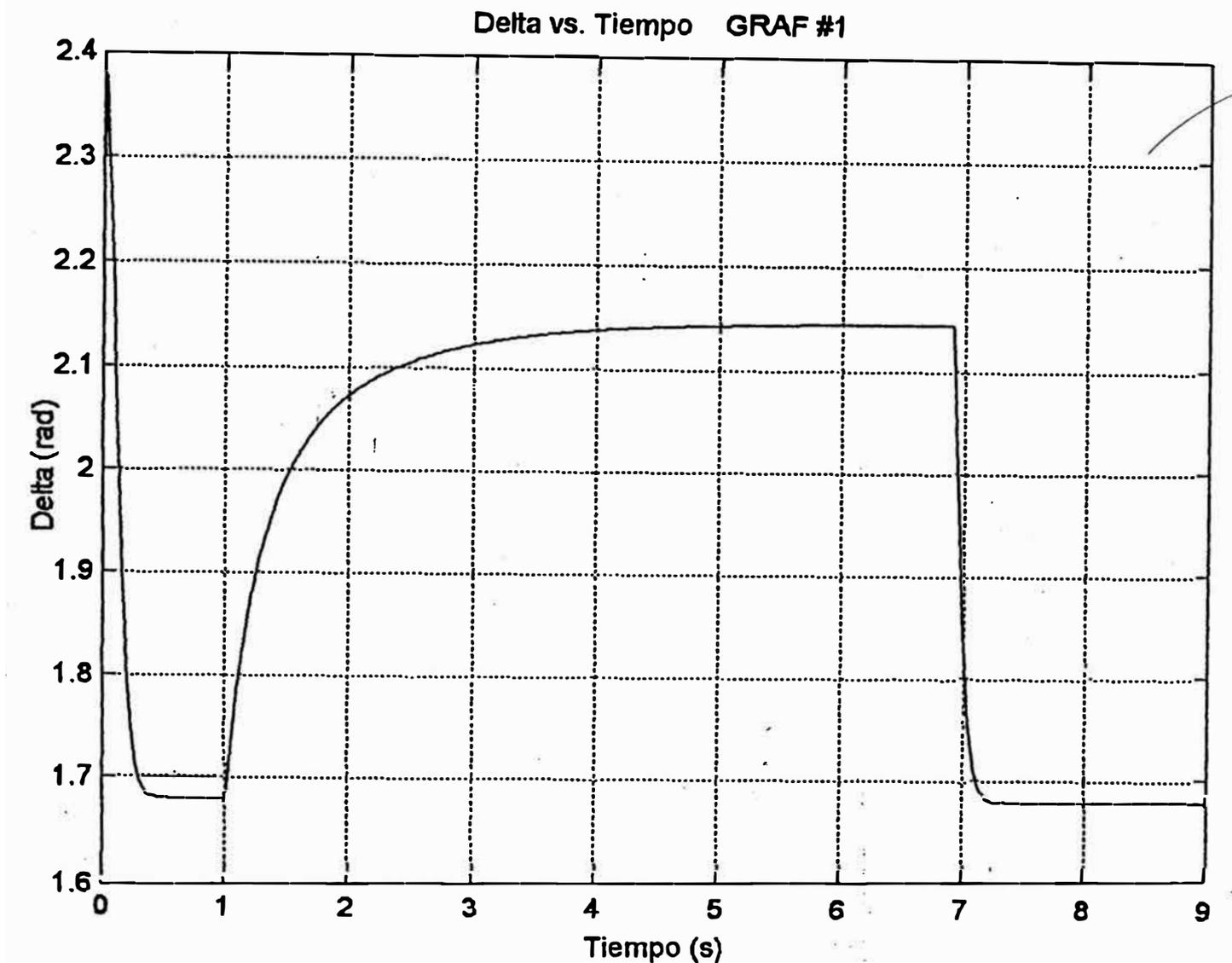
transitorio para un nuevo valor de $J = 3,5\text{Kg}\cdot\text{m}^2$).

- Caso 8:** Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de r_1 . GRAF. #1 y GRAF. #2 (Gráfico comparativo del ángulo de carga durante el transitorio para dos valores distintos de r_1).
- Caso 9:** Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de x_1 . GRAF. #1 y GRAF. #3 (Gráfico comparativo del ángulo de carga durante el transitorio para dos valores distintos de x_1).
- Caso 10:** Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de r_{2p} . GRAF. #1 y GRAF. #4 (Gráfico comparativo del ángulo de carga durante el transitorio para dos valores distintos de r_{2p}).
- Caso 11:** Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de x_{2p} . GRAF. #1 y GRAF. #5 (Gráfico comparativo del ángulo de carga durante el transitorio para dos valores distintos de x_{2p}).
- Caso 12:** Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de J . GRAF. #1, GRAF. #6 y GRAF. #7 (Gráfico comparativo del ángulo de carga durante el transitorio para tres valores distintos de J).
- Caso 13:** Angulo de Carga VS Tiempo para diferentes valores de caída de tensión. GRAF. #8 (Gráfico comparativo del ángulo de carga durante el transitorio para tres valores distintos de caída de tensión).
- Caso 14:** Angulo de Carga VS Tiempo para un nuevo valor del torque. GRAF. #9 (Angulo de carga durante el transitorio para un nuevo valor del torque aplicado).

- Caso 15:** Angulo de Carga VS Tiempo para otro valor del torque. GRAF. #10 (Angulo de carga durante el transitorio para otro valor del torque aplicado).
- Caso 16:** Angulo de Carga VS Tiempo para distintos valores de torque. GRAF. #1, GRAF. #9 y GRAF. #10 (Gráfico comparativo del ángulo de carga durante el transitorio para tres valores distintos del torque aplicado).
- Caso 17:** Angulo de Carga VS Tiempo para distintos valores del número de polos de la máquina. GRAF. #11 (Gráfico comparativo del ángulo de carga durante el transitorio para dos valores distintos del número de polos de la máquina).

GRAFICA QUE MUESTRA LA VARIACION DEL ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO

CASO 1



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r1 0,05 Ω

J: 9.45 Kgr-m²

r2p: 0,172 Ω

p: 3 pares de polos

x1 0,25 Ω

V₁: 400 V

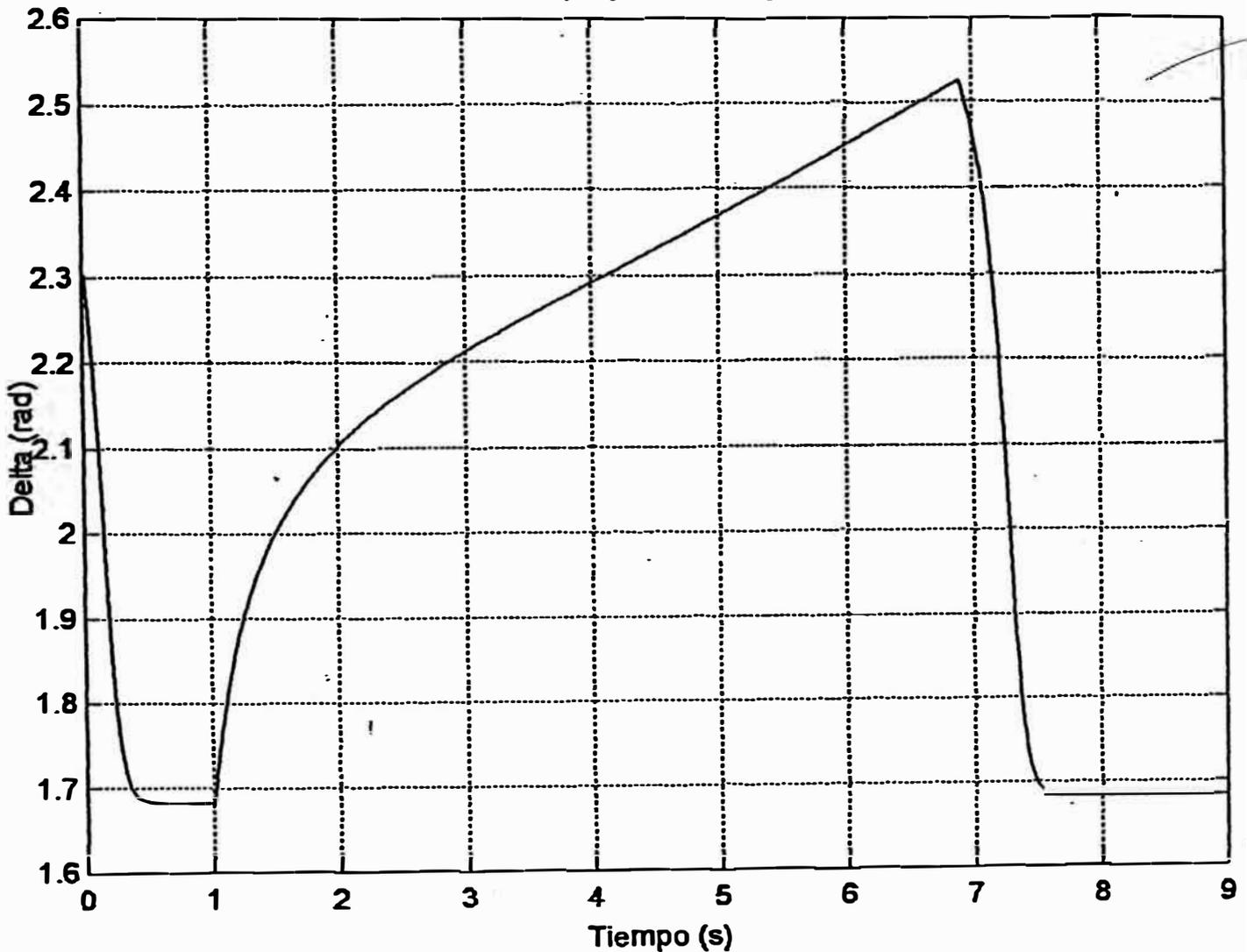
x2p: 0,32 Ω

T_L: 720

ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO PARA UN
NUEVO VALOR DE r_1 $0,15\Omega$

CASO 2

Delta vs. Tiempo (variando r_1) GRAF #2



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 $0,15\Omega$

J : 9.45 Kgr-m^2

r_{2p} : $0,172\Omega$

p : 3 pares de polos

x_1 $0,25\Omega$

V_1 : 400 V

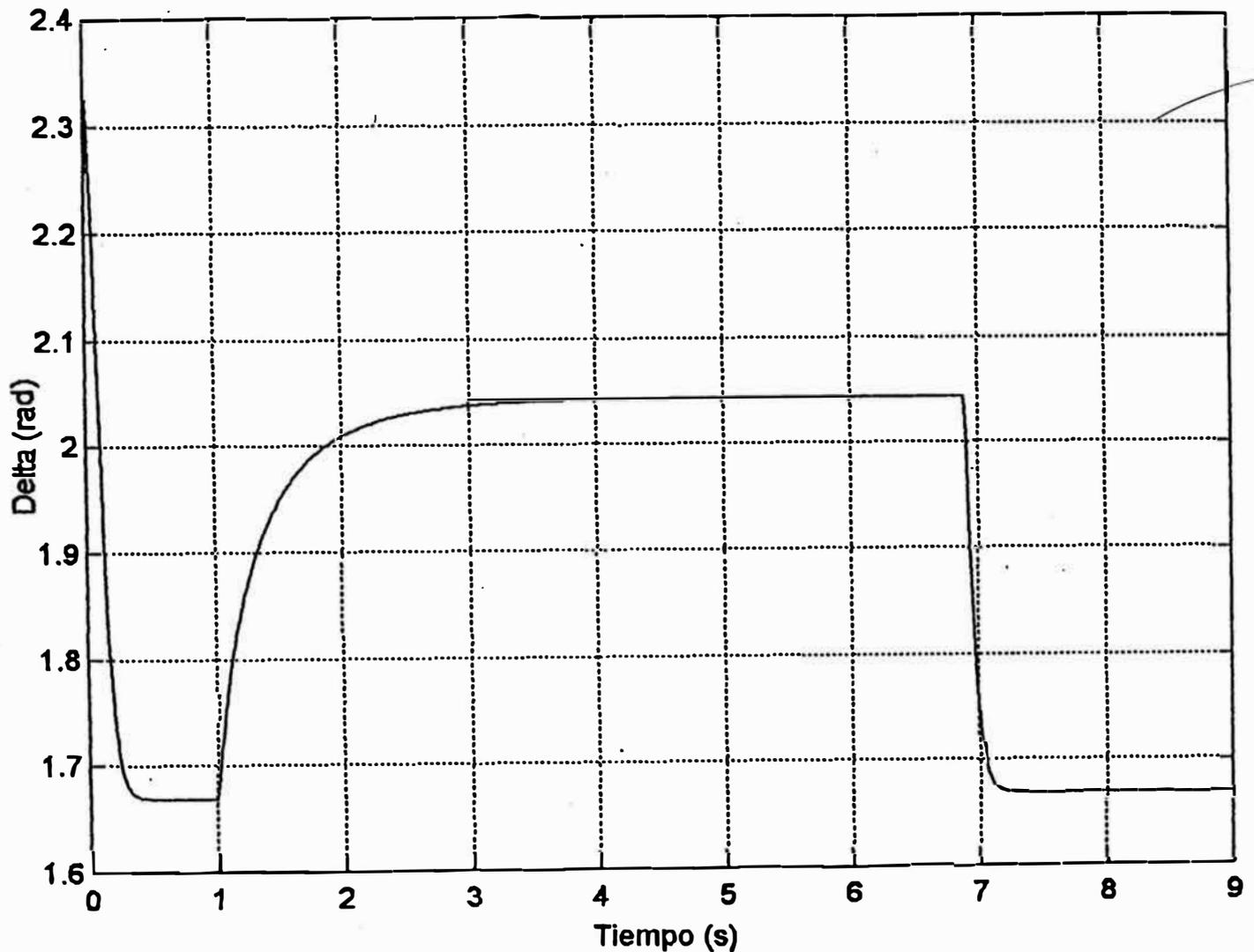
x_{2p} : $0,32\Omega$

T_L : 720

ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO PARA UN
NUEVO VALOR DE $x_1 = 0,19\Omega$

CASO 3

Delta vs. Tiempo (variando x_1) GRAF #3



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 0,05 Ω

J : 9.45 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p : 3 pares de polos

x_1 0,19 Ω

V_1 : 400 V

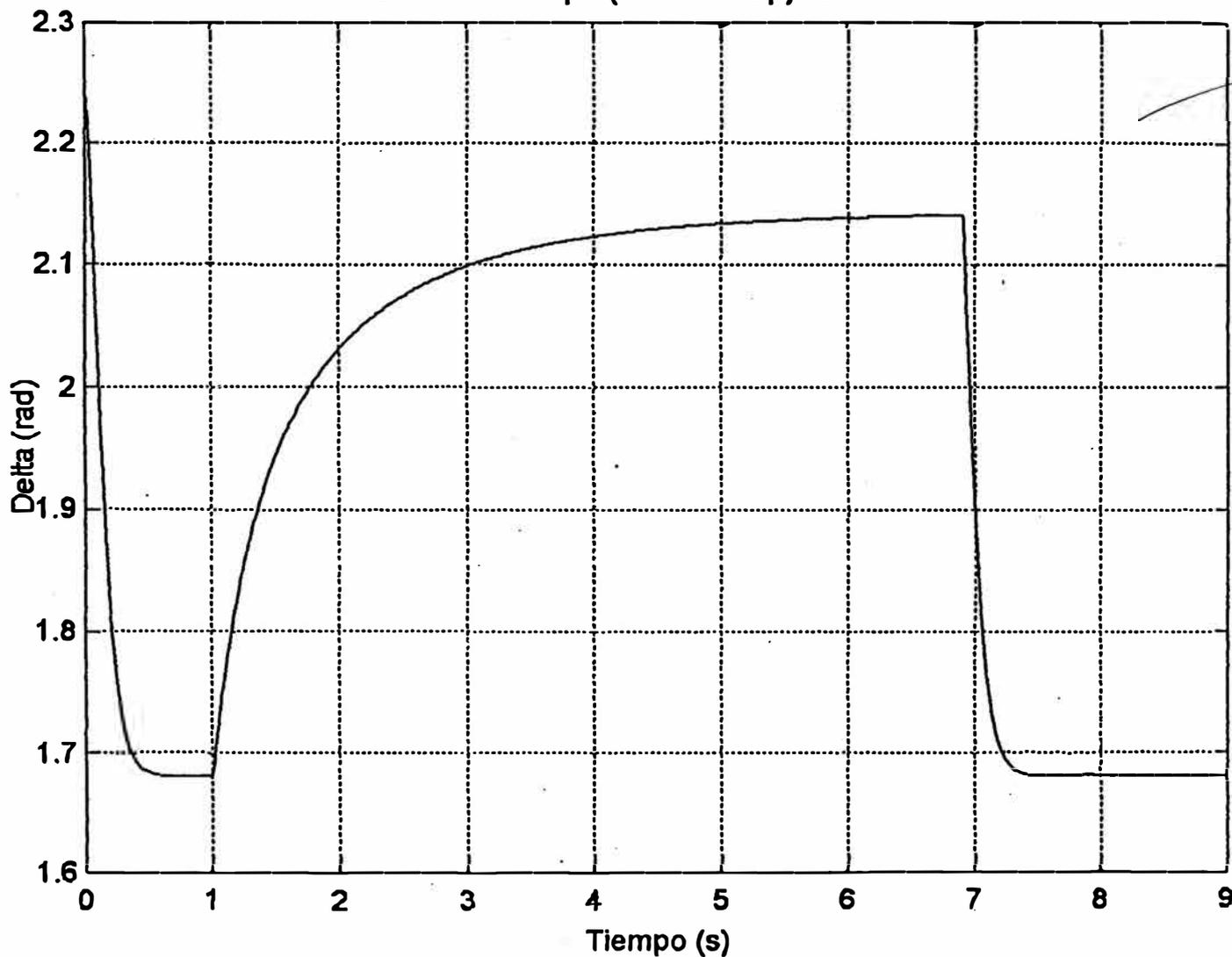
x_{2p} : 0,32 Ω

T_L : 720

ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO PARA UN
NUEVO VALOR DE r_{2p} $0,25\Omega$

CASO 4

Delta vs. Tiempo (variando r_{2p}) GRAF #4



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 $0,05\Omega$

J : 9.45 Kgr-m^2

r_{2p} : $0,25\Omega$

p : 3 pares de polos

x_1 $0,25\Omega$

V_1 : 400 V

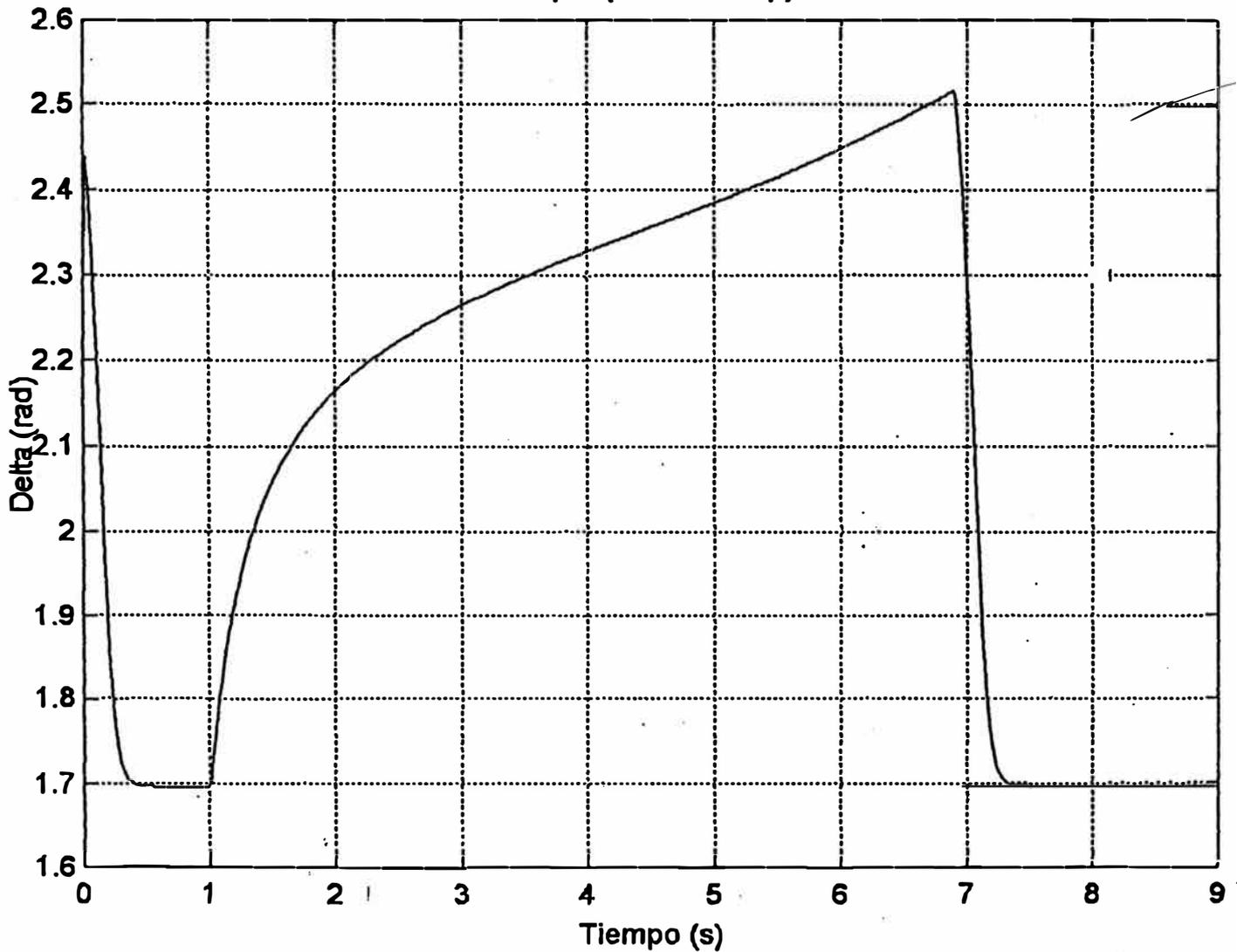
x_{2p} : $0,32\Omega$

T_L : 720

ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO PARA UN
NUEVO VALOR DE x_{2p} $0,4\Omega$

CASO 5

Delta vs. Tiempo (variando x_{2p}) GRAF #5



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 $0,05\Omega$

J : 9.45 Kgr-m^2

r_{2p} : $0,172\Omega$

p : 3 pares de polos

x_1 $0,25\Omega$

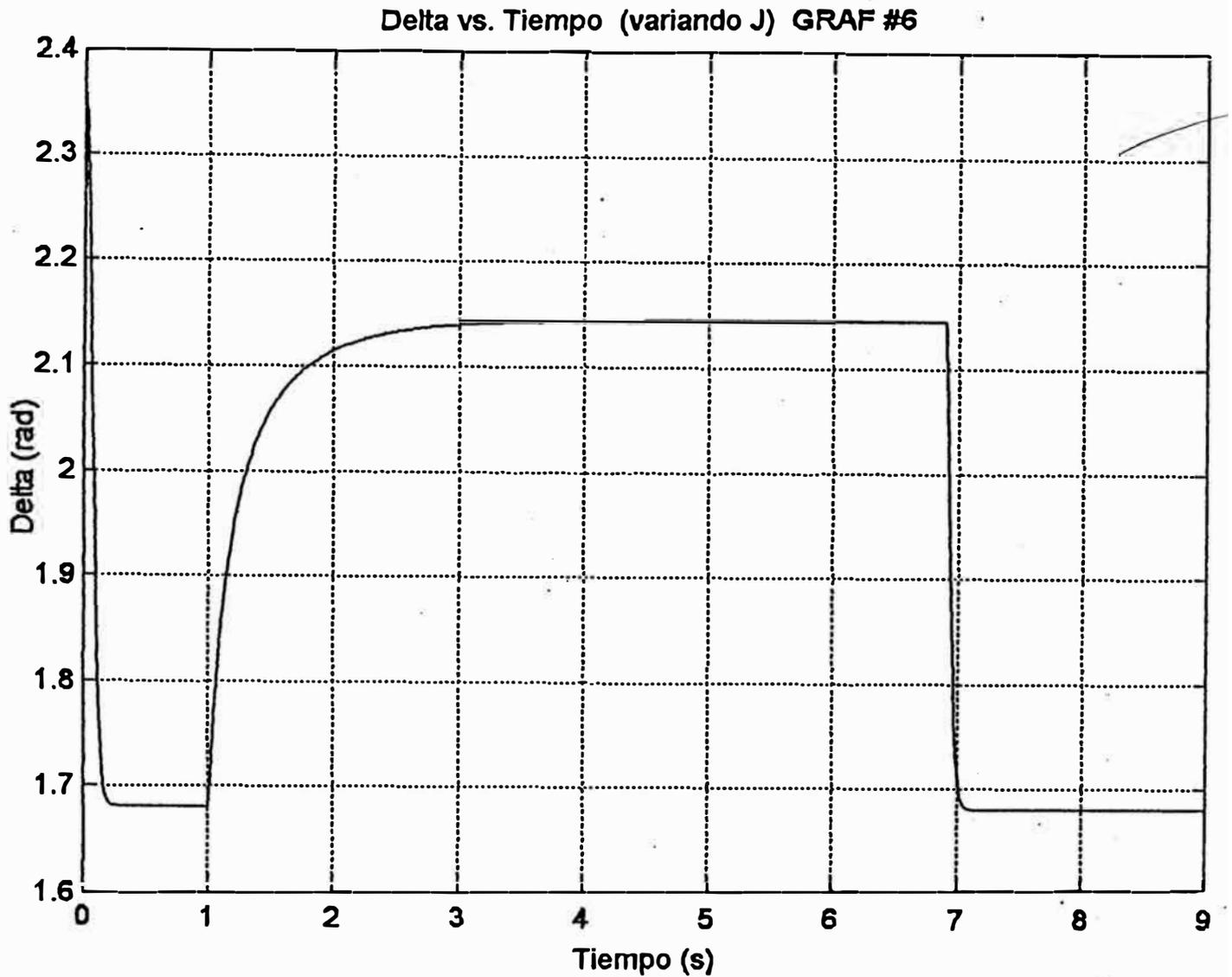
V_1 : 400 V

x_{2p} : $0,4\Omega$

T_L : 720

ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO PARA UN
NUEVO VALOR DE $J = 5,5 \text{ Kgr-m}^2$

CASO 6



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 0,05 Ω

J : 5,5 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p : 3 pares de polos

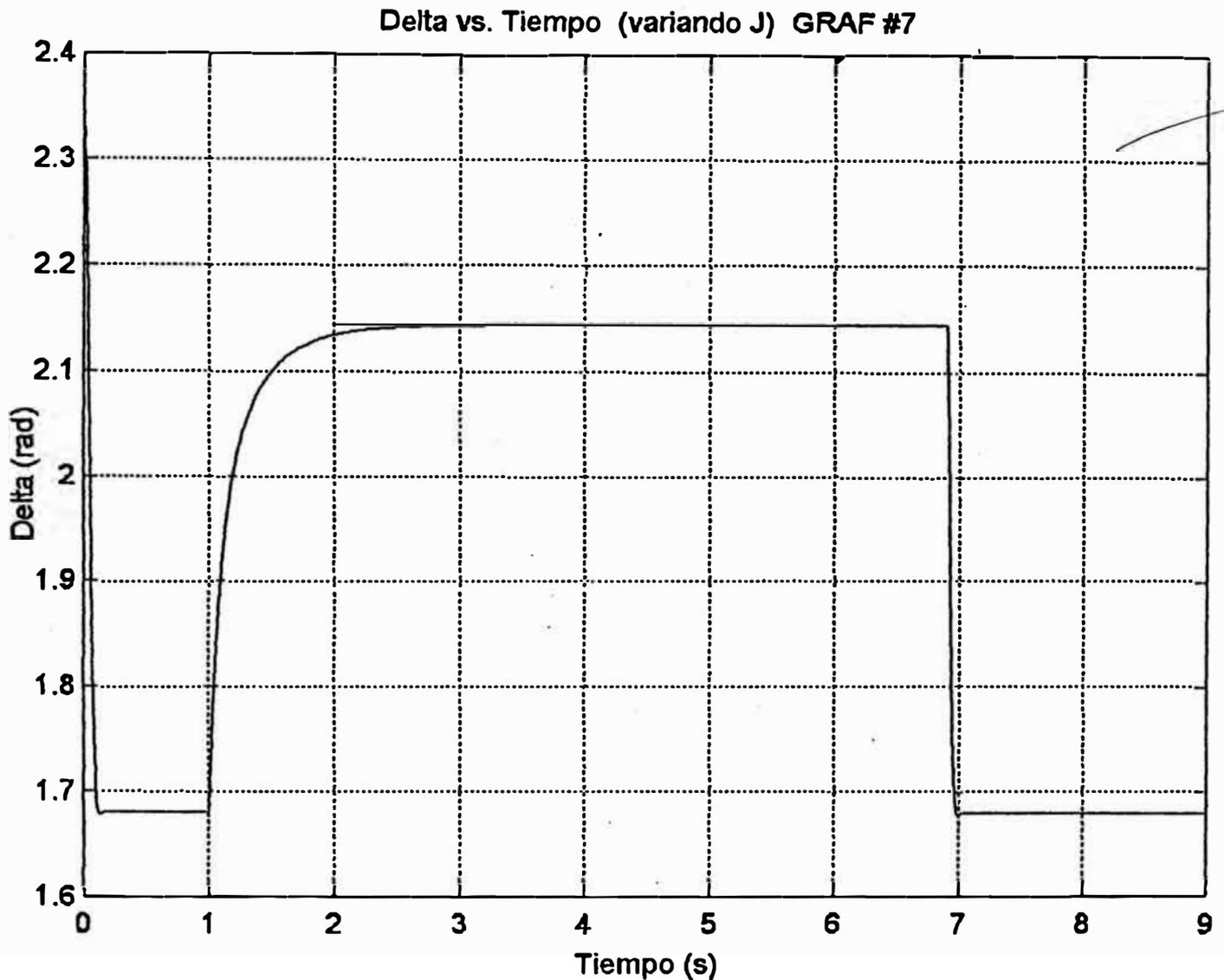
x_1 0,25 Ω

V_1 : 400 V

x_{2p} : 0,32 Ω

ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO PARA UN
NUEVO VALOR DE J 3,5 Kgr-m²

CASO 7



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 0,05 Ω

J : 3,5 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p : 3 pares de polos

x_1 · 0,25 Ω

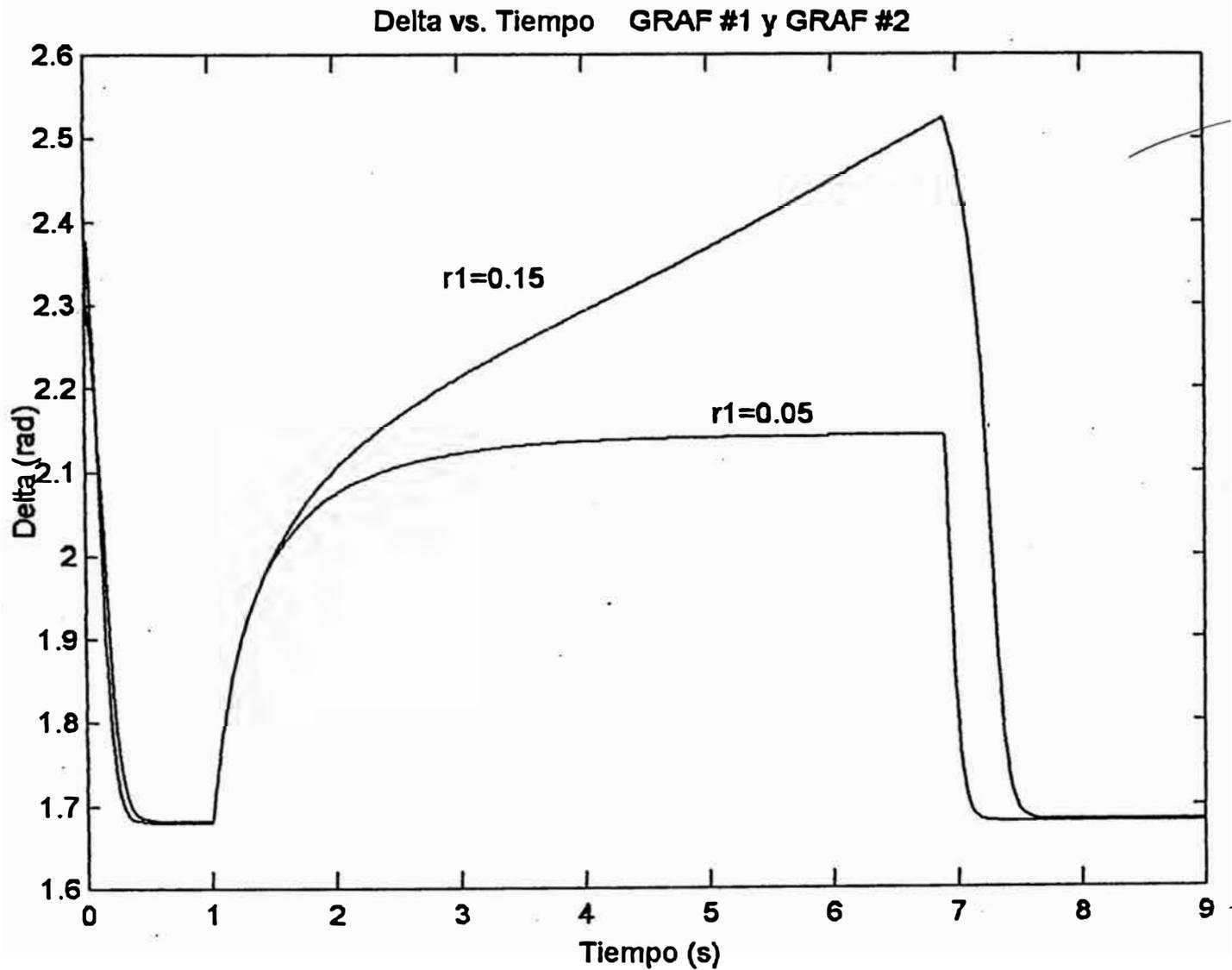
V_1 : 400 V

x_{2p} : 0,32 Ω

T_L : 720

GRAFICO COMPARATIVO DEL ANGULO DE CARGA
DURANTE EL TRANSITORIO PARA DOS
VALORES DISTINTOS DE r_1

CASO 8



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 : 0,05 Ω ; 0,15 Ω

J: 9,45 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p: 3 pares de polos

x_1 : 0,25 Ω

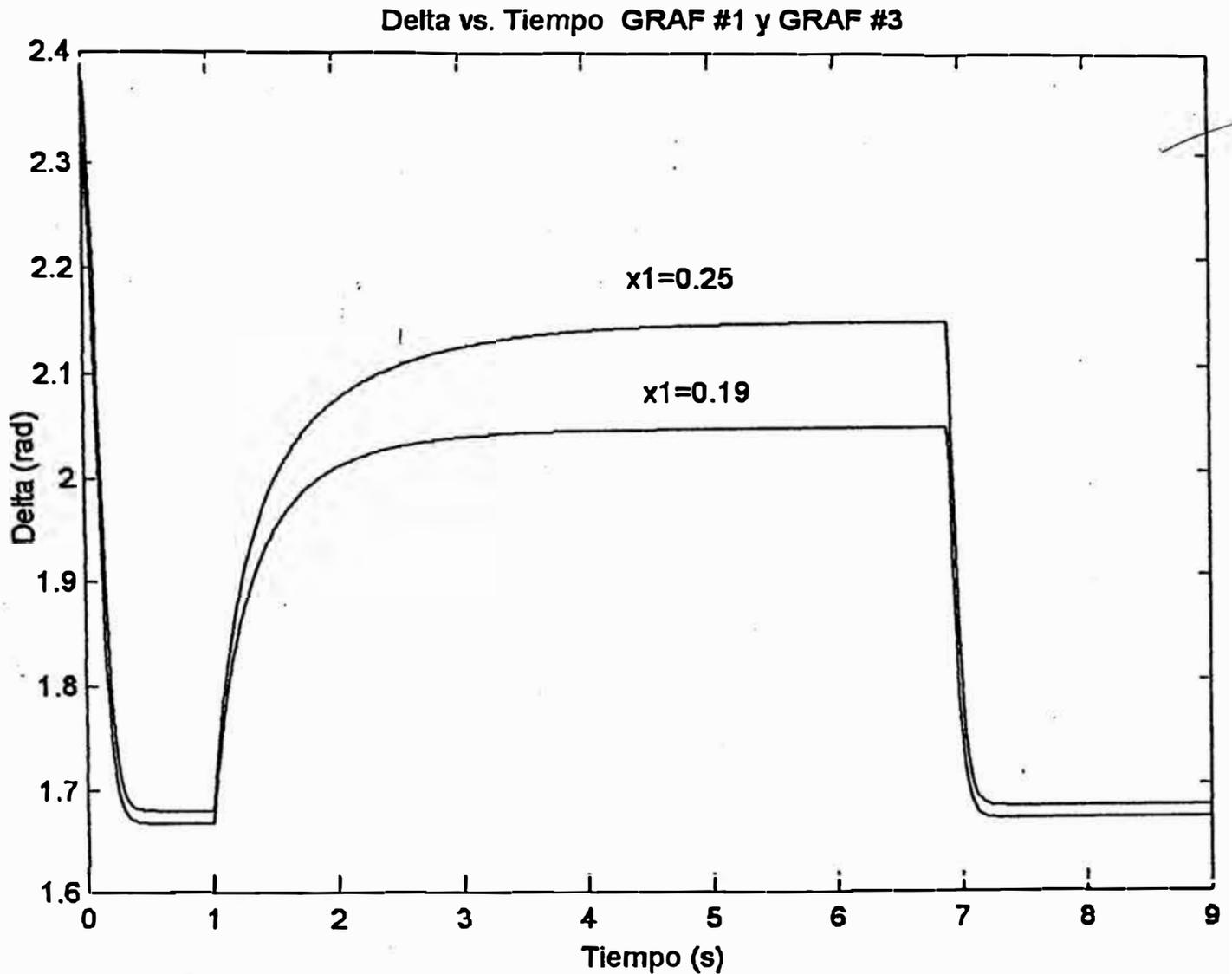
V_1 : 400 V

x_{2p} : 0,32 Ω

T_L : 720

GRAFICO COMPARATIVO DEL ANGULO DE CARGA
DURANTE EL TRANSITORIO PARA DOS
VALORES DISTINTOS DE x_1

CASO 9



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 : 0,05 Ω

J : 9,45 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p : 3 pares de polos

x_1 : 0,25 Ω ; 0,19 Ω

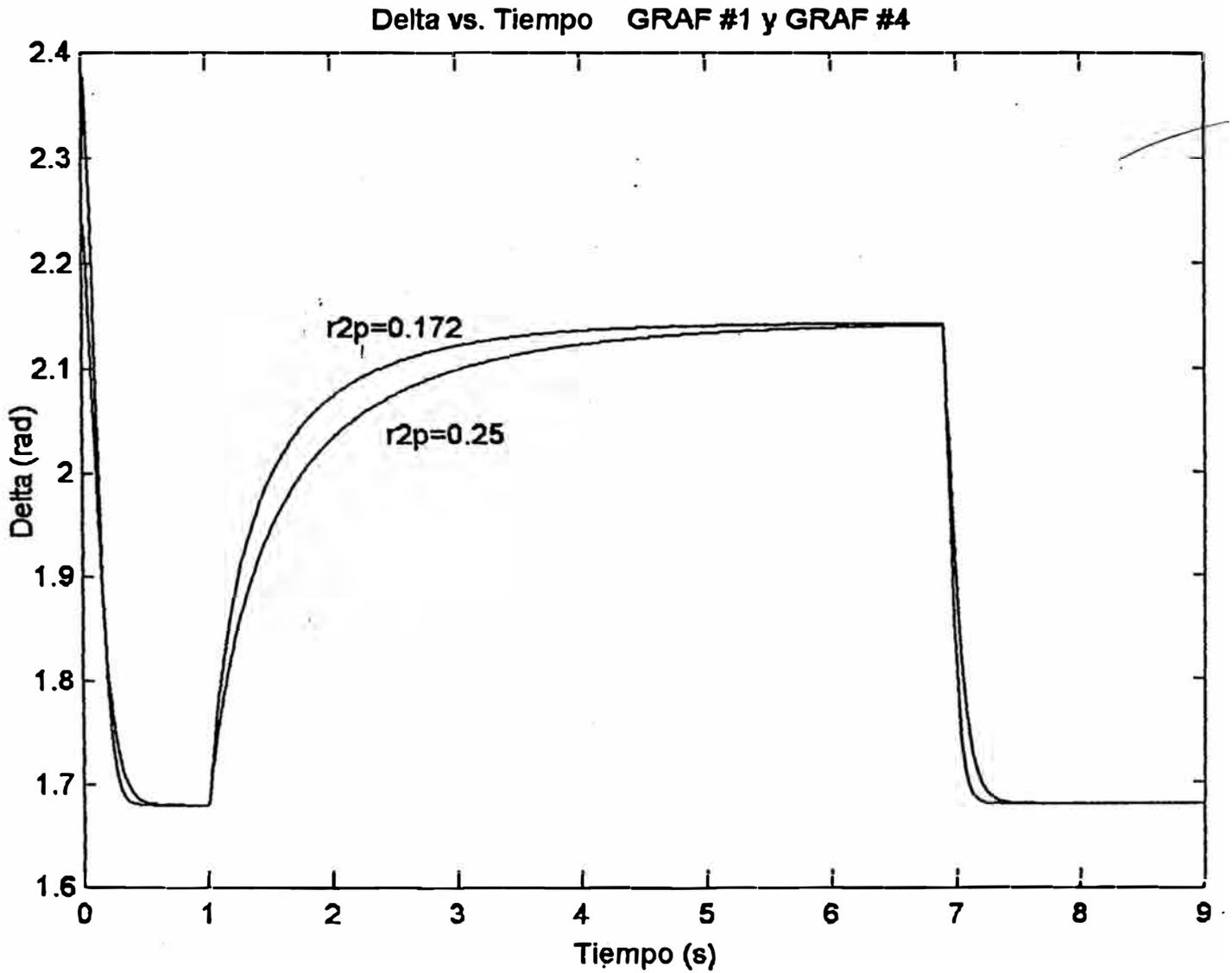
V_1 : 400 V

x_{2p} : 0,32 Ω

T_L : 720

GRAFICO COMPARATIVO DEL ANGULO DE CARGA
DURANTE EL TRANSITORIO PARA DOS
VALORES DISTINTOS DE r_{2p}

CASO 10



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 : 0,05 Ω

J: 9,45 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω ; 0,25 Ω

p: 3 pares de polos

x_1 : 0,25 Ω

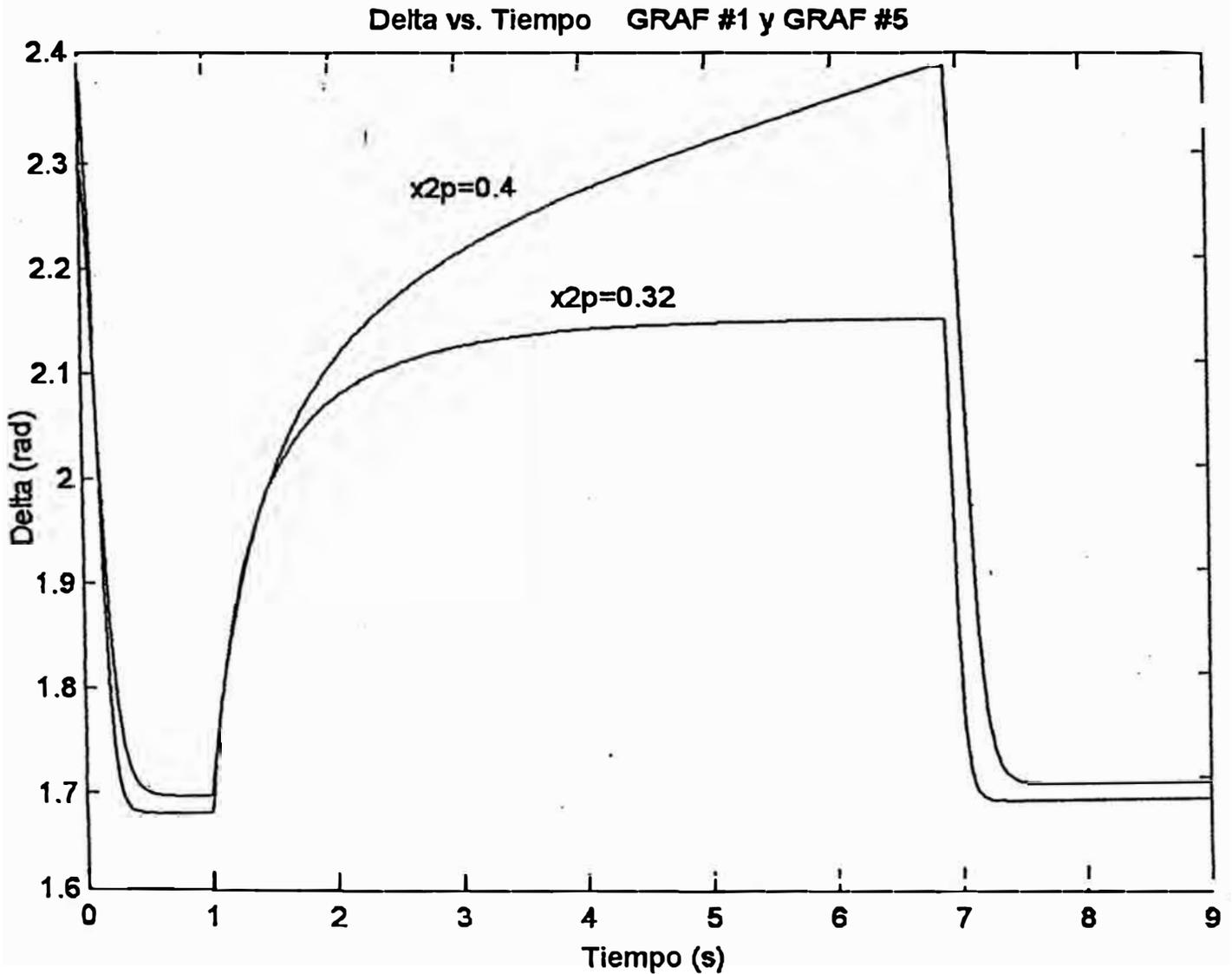
V_1 : 400 V

x_{2p} : 0,32 Ω

T_L : 720

GRAFICO COMPARATIVO DEL ANGULO DE CARGA
DURANTE EL TRANSITORIO PARA DOS
VALORES DISTINTOS DE x_{2p}

CASO 11



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 : 0,05 Ω

J: 9,45 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p: 3 pares de polos

x_1 : 0,25 Ω

V_1 : 400 V

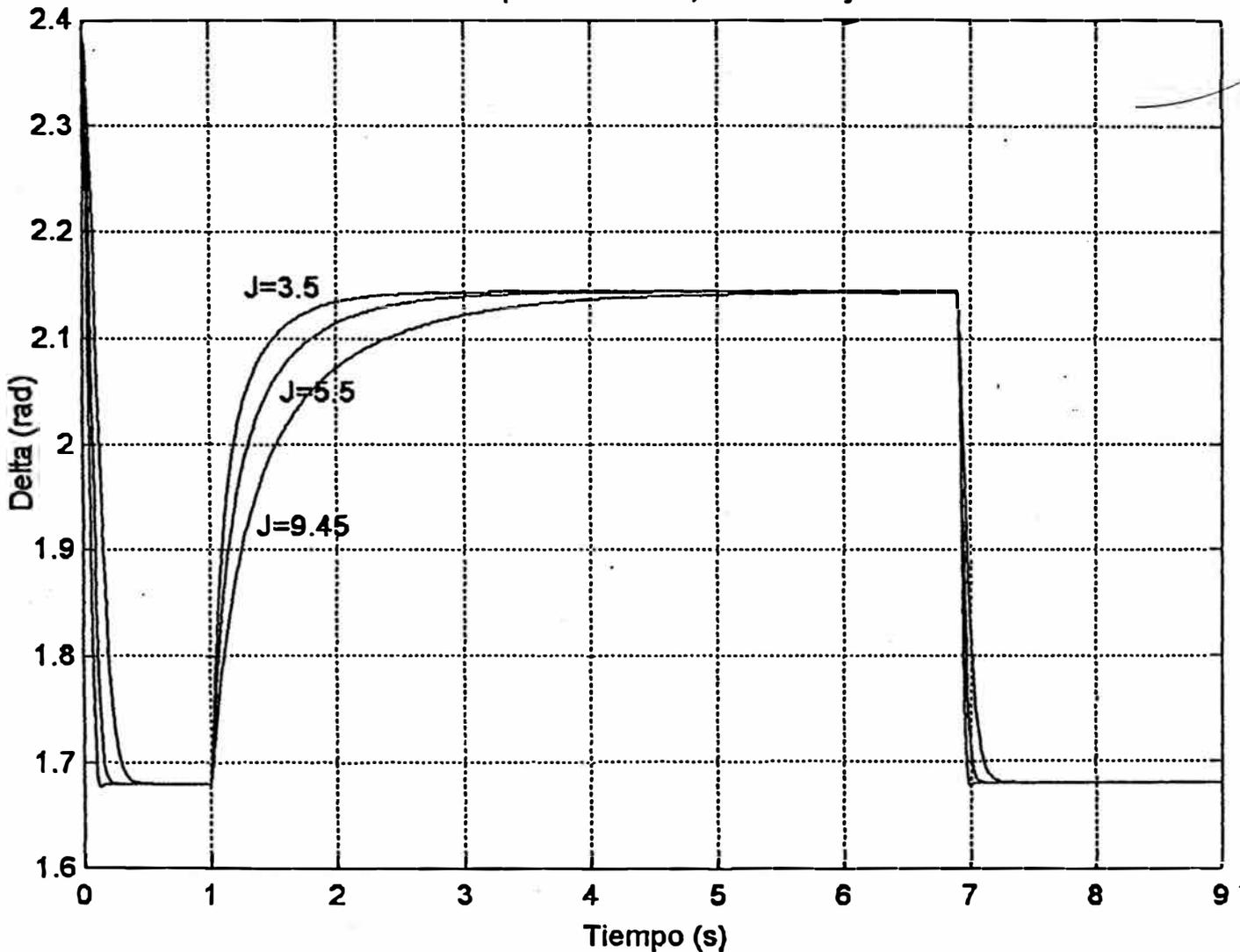
x_{2p} : 0,32 Ω ; 0,4 Ω

T_L : 720

GRAFICO COMPARATIVO DEL ANGULO DE CARGA
DURANTE EL TRANSITORIO PARA TRES
VALORES DISTINTOS DE J

CASO 12

Delta vs. Tiempo GRAF #1 , GRAF #6 y GRAF #7



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 0,05 Ω

J: 9,45 Kgr-m²; 5,5 Kgr-m²;
3,5 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p: 3 pares de polos

x_1 0,25 Ω

V_1 : 400 V

x_{2p} : 0,32 Ω

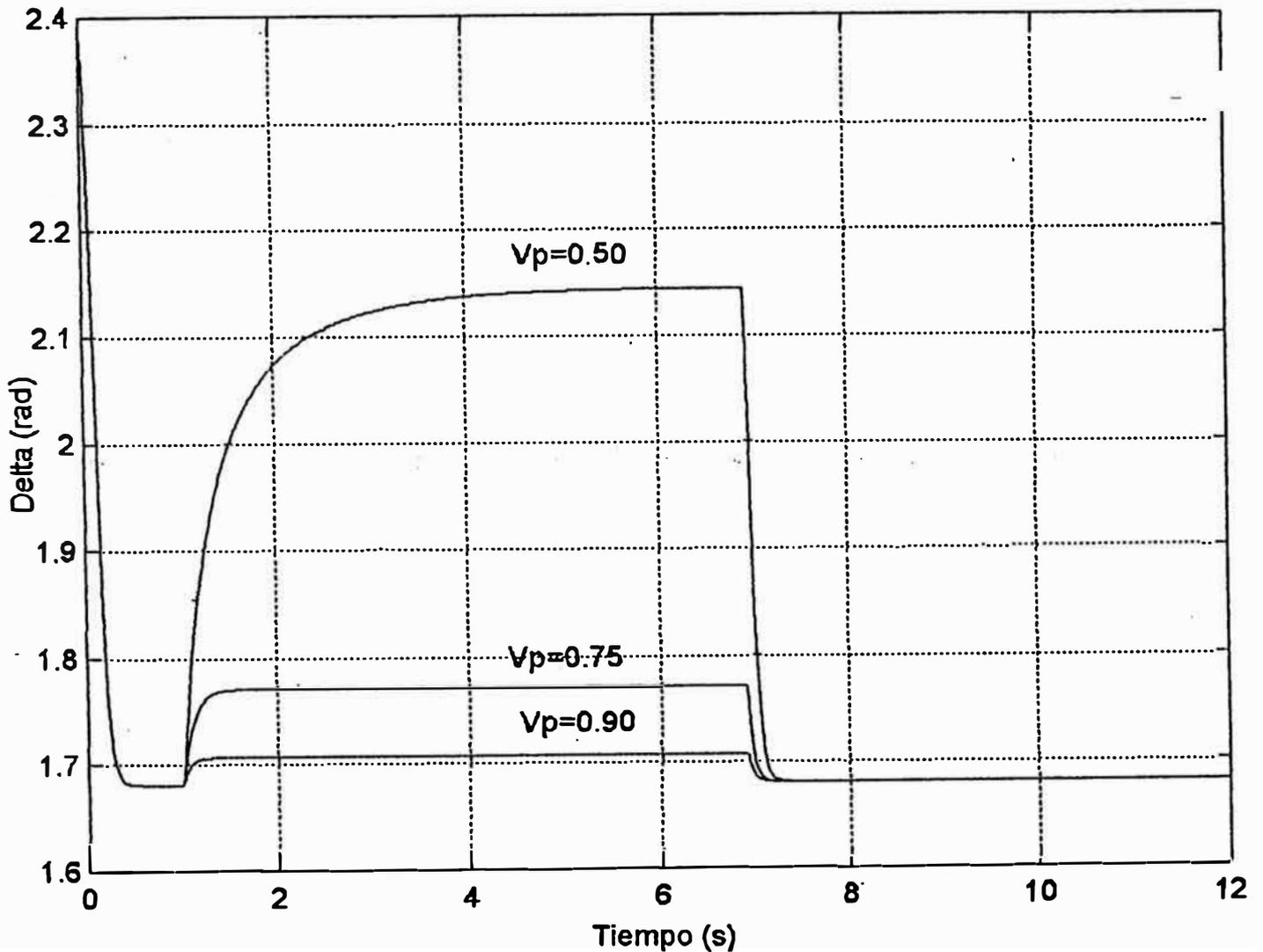
T_L : 720

GRAFICO COMPARATIVO DEL ANGULO DE CARGA DURANTE
EL TRANSITORIO PARA TRES VALORES DISTINTOS
DE CAIDA DE TENSION

($V_p = \% V_n$)

CASO 13

Delta vs. Tiempo (variando V_p) GRAF #8



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

$r_1 : 0,05\Omega$

$J: 9,45 \text{ Kgr-m}^2$

$r_{2p}: 0,172\Omega$

$p: 3 \text{ pares de polos}$

$x_1 : 0,25\Omega$

$V_1: 400 \text{ V}$

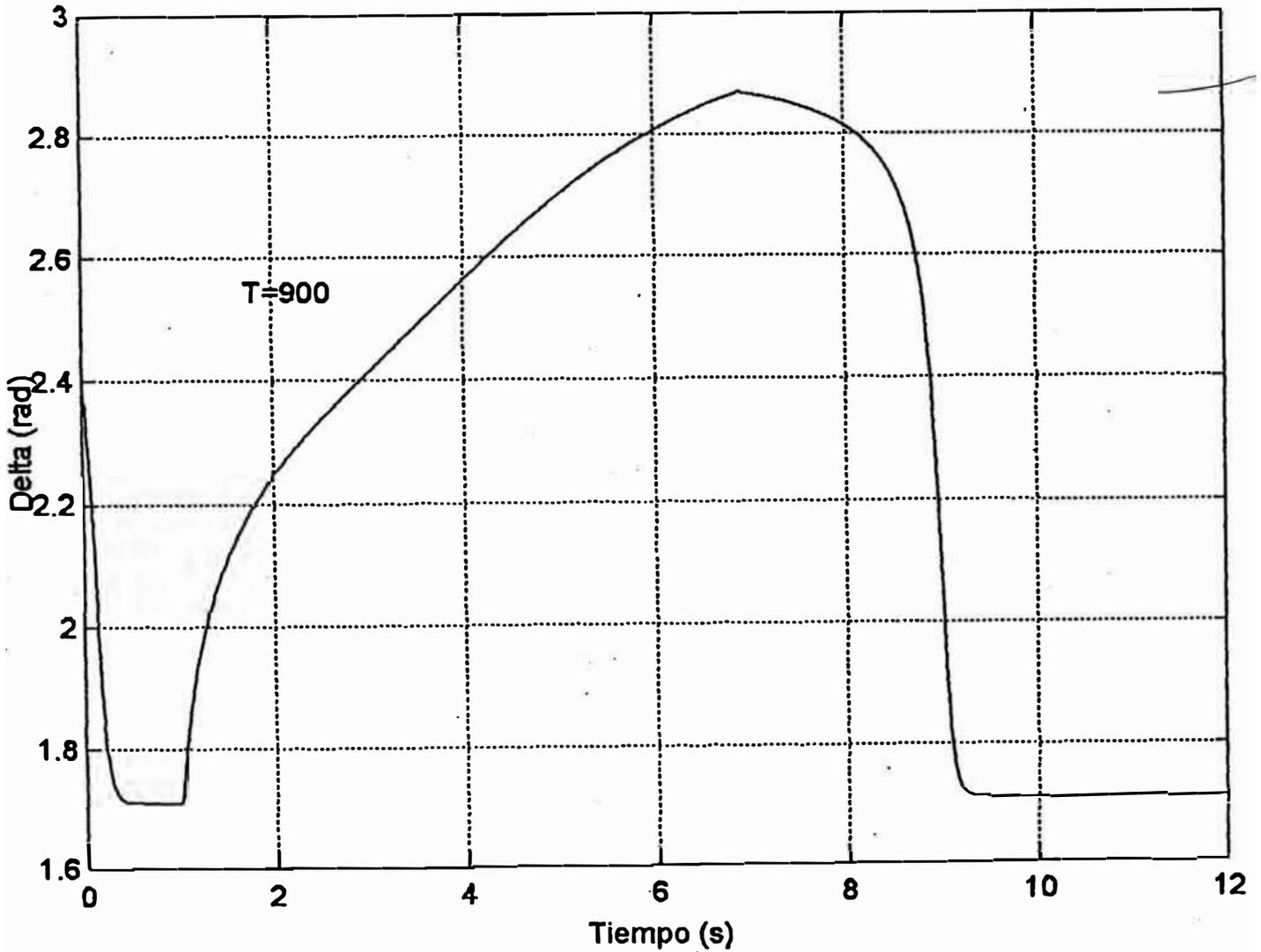
$x_{2p}: 0,32\Omega$

$T_L: 720$

ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO PARA UN
NUEVO VALOR DEL TORQUE APLICADO

CASO 14

Delta vs. Tiempo (variando el torque) GRAF #9



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

$r_1 : 0,05\Omega$

$J: 9,45 \text{ Kgr-m}^2$

$r_{2p}: 0,172\Omega$

$p: 3$ pares de polos

$x_1 : 0,25\Omega$

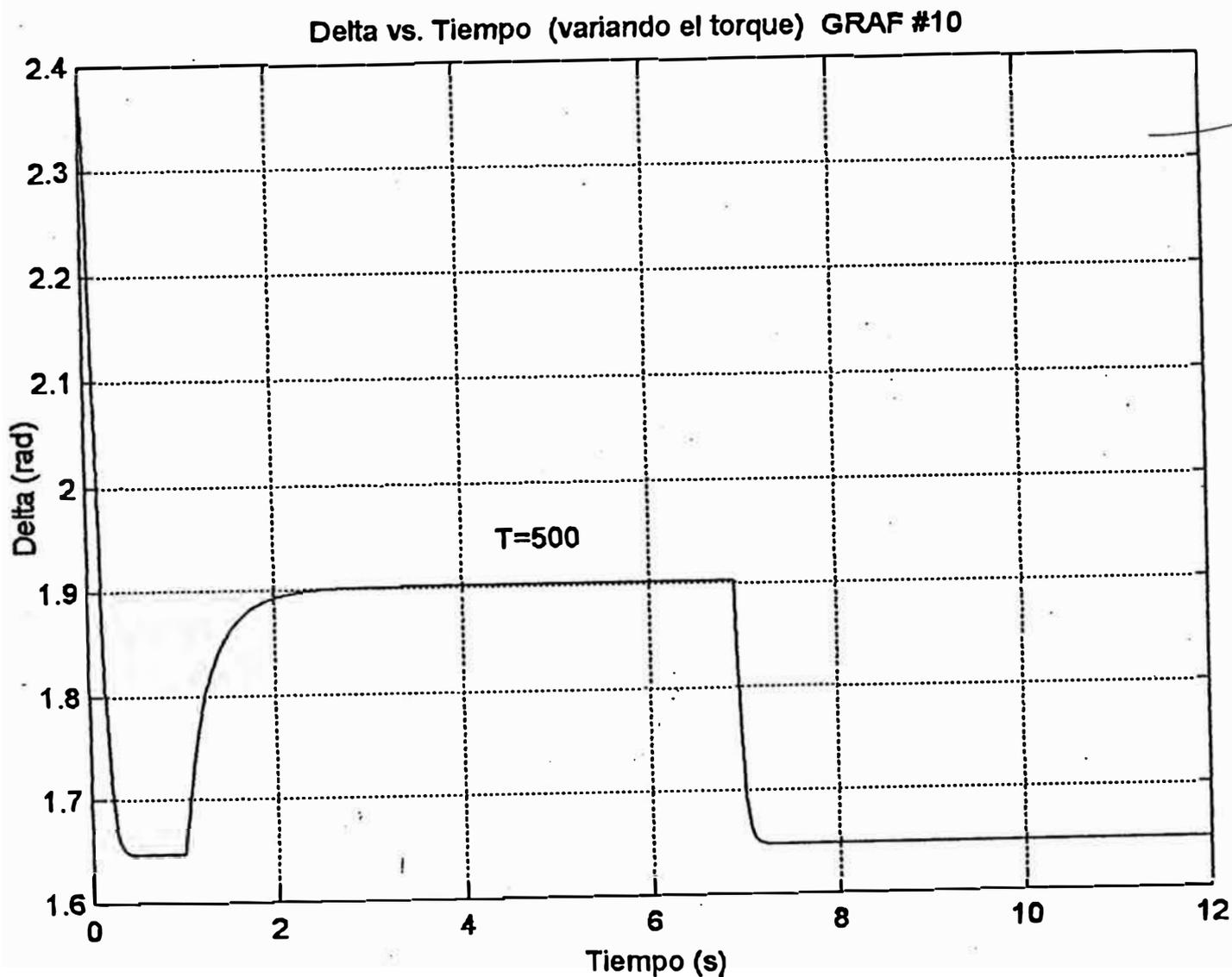
$V_1: 400 \text{ V}$

$x_{2p}: 0,32\Omega$

$T_L: 900$

ANGULO DE CARGA DURANTE EL TRANSITORIO PARA
OTRO VALOR DEL TORQUE APLICADO

CASO 15



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 : 0,05 Ω

J: 9,45 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p: 3 pares de polos

x_1 : 0,25 Ω

V_1 : 400 V

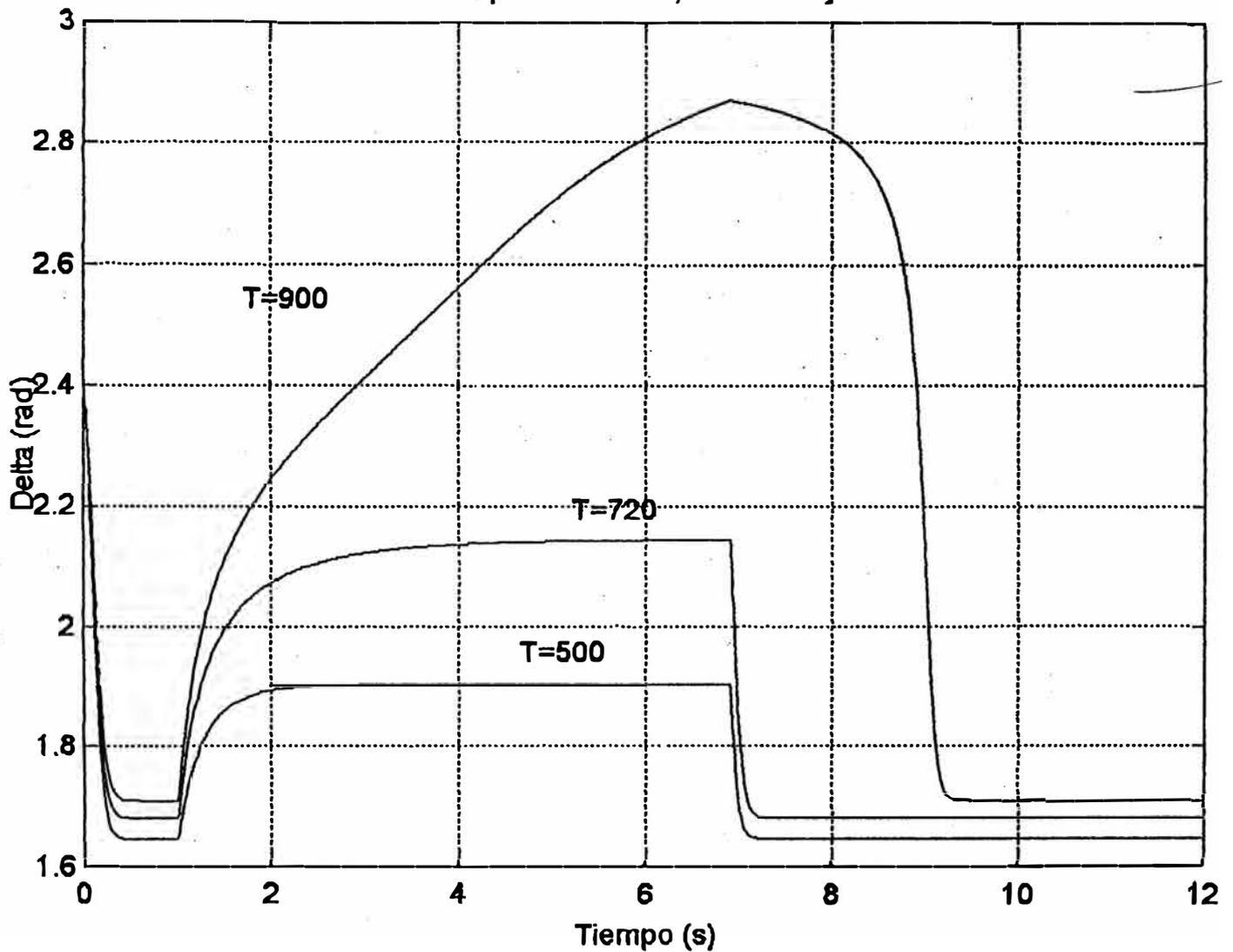
x_{2p} : 0,32 Ω

T_L : 500

GRAFICO COMPARATIVO DEL ANGULO DE CARGA DURANTE
EL TRANSITORIO PARA TRES VALORES DISTINTOS
DE TORQUE APLICADO

CASO 16

Delta vs. Tiempo GRAF #1 , GRAF #9 y GRAF #10



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 : 0,05 Ω

J : 9,45 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p : 3 pares de polos

x_1 : 0,25 Ω

V_1 : 400 V

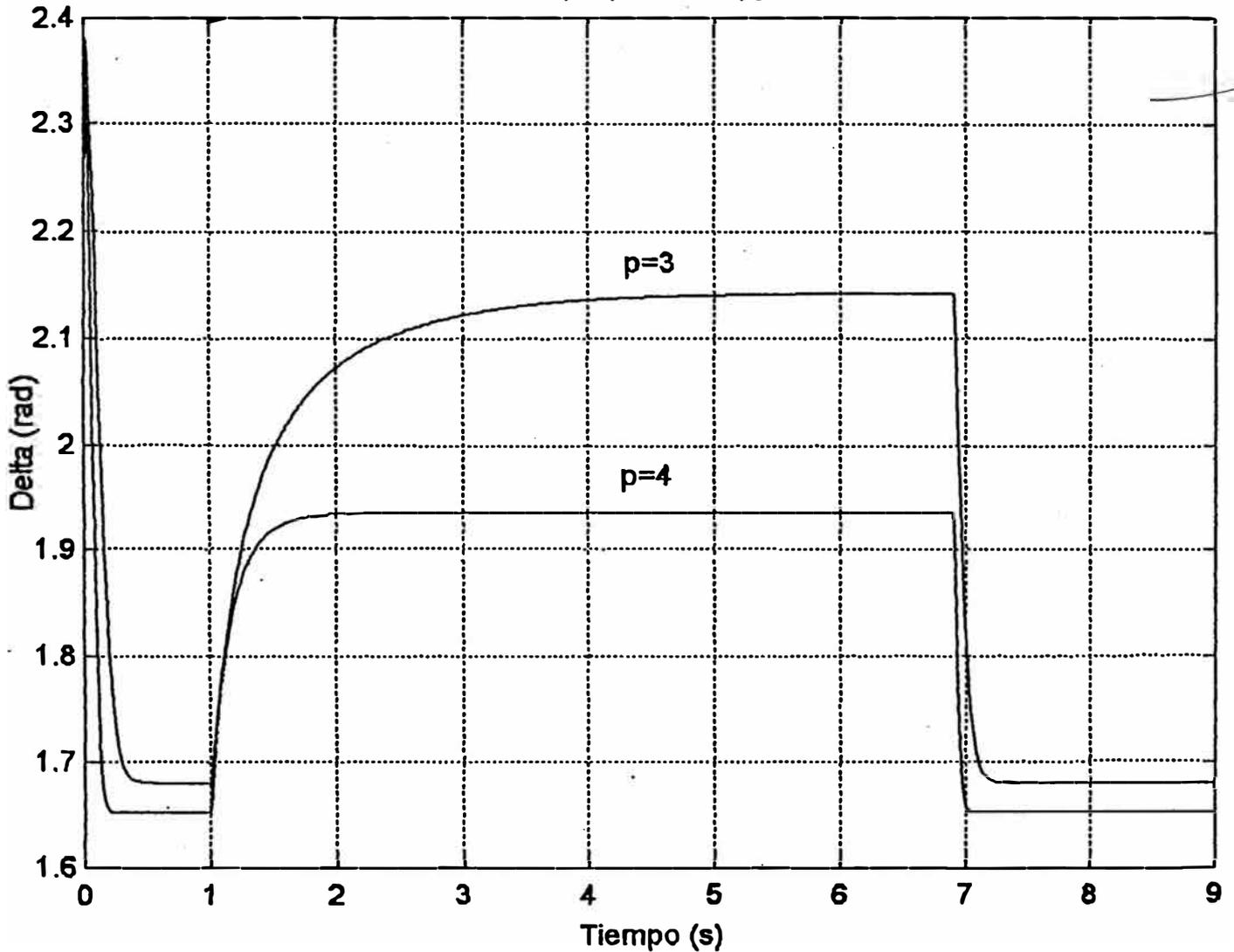
x_{2p} : 0,32 Ω

T_L : 500; 720; 900

GRAFICO COMPARATIVO DEL ANGULO DE CARGA DURANTE
EL TRANSITORIO PARA DOS VALORES DISTINTOS
DEL NUMERO DE POLOS DE LA MAQUINA

CASO 17

Delta vs. Tiempo (variando p) GRAF #11



Los valores asumidos para los parámetros de la máquina:

r_1 0,05 Ω

J: 9,45 Kgr-m²

r_{2p} : 0,172 Ω

p: 3 y 4 pares de polos

x_1 0,25 Ω

V_1 : 400 V

x_{2p} : 0,32 Ω

T_L : 500; 720; 900

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1.- JEROME MEISEL, Principios de conversión de energía electromecánica (Ed. Mc Graw Hill, 1969).
2. ROBERT NELSON, THOMAS; Stability Analysis of a symmetrical induction machine, IEEE transaction on power, (Vol. pág. 88 Nov. 1969).
3. F.L. ALVARADO; C.A. CAÑIZARES; IEEE Transaction on power systems, (Vol. 6 Nº1, Feb. 1991).
4. A.L. MOHAMADEIN; Generalised chart, load angle, and stability limit in induction motors; Electrical Engineering Departament Faculty of Engineering University of Alexandria, Egypt.
5. MICHAEL LIWSCHITZ - GARIK CLYDE; máquinas de corriente alterna (Ed. C.E.C.S.A., 1976).
6. J. ERNERTO TELLEZ F.; Modelos de máquina síncrona en estudios de estabilidad, VIII - CONIMERA, Lima Agosto 1986.
7. CHARLES V. JONES; The unified theory of electrical machines, (London Butterworths, 1967)
8. DAVID C. WHITE; Electromechanical energy conversion, (London Chapman, 1959).
9. BENJAMIN C. KUO; Sistemas automáticos de control, (Ed. C.E.C.S.A., 1983).
10. KATSUHIKO OGATA, Ingeniería de control moderna, (Ed. Prentice Hall, 1980).

11. CELESTINO MONTES; MATLAB y algunas aplicaciones:
Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de
Sevilla, España.
12. IVANOV-SMOLENSKY; Máquinas eléctricas, Tomo I y III,
(Editorial MIR - Moscú).