

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

**Tesis de Competencia Profesional para optar el Título de
Ingeniero Electricista**

Título

**DISEÑO DE MAGNETO Y BOBINAS DE GRADIENTE Y RADIO-
FRECUENCIA PARA SISTEMAS DE RESONANCIA MAGNETICA**

Autor

José Antonio Cáceres Loli

Asesor

Ing. Antonio Olivera Polo

LIMA, Octubre de 1996

**A mi madre quien en vida fué,
porque me transmitió espiritualmente
su amor, sabiduría y confianza,
que siempre agradeceré.**

Sumario

El problema consiste en determinar las distribuciones de corriente solenoidal que producen el campo magnético principal de un sistema de Resonancia Magnética Nuclear (NMR) de homogeneidad prescrita, con mínima disipación de potencia.

La técnica propuesta por Engelsberg hace uso de los multiplicadores de Lagrange para hallar la distribución de corriente, en la que uno busca minimizar una funcional de la potencia introduciendo las condiciones requeridas. Estas son que las derivadas axiales del campo magnético en el centro del magneto sean cero hasta un orden par dado, mientras que todas las derivadas de orden impar desaparecen por simetría. La solución es la densidad superficial de corriente.

Con fines comparativos, la técnica de Aproximación al Campo Objetivo para el Diseño de Bobinas propuesta por Turner, determina los multiplicadores especificando valores del campo magnético en varios puntos sobre una región espacial, en vez de sus derivadas en un solo punto. Sin embargo, aunque satisface las condiciones prescritas entre los puntos fijados, exhibe oscilaciones espaciales de tal magnitud, que echan a perder la homogeneidad sobre todo el volumen. Por lo tanto se demuestra que el método que aquí se propone puede ser complementado y usado como modelo comparativo para evaluar la eficiencia en potencia de otras configuraciones que pueden ser juzgadas en la base de otras consideraciones.

**DISEÑO DE MAGNETO Y BOBINAS DE
GRADIENTE Y RADIOFRECUENCIA PARA
SISTEMAS DE RESONANCIA MAGNETICA**

DISEÑO DE MAGNETO Y BOBINAS DE GRADIENTE Y RADIO-FRECUENCIA PARA SISTEMAS DE RESONANCIA MAGNETICA

José Antonio Cáceres Loli

Tesis de Competencia Profesional para optar el Título de Ingeniero Electricista

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Lima, Octubre de 1996

Extracto

Desde el descubrimiento del fenómeno de Resonancia Magnética Nuclear (NMR) han pasado 60 años. El entendimiento que ahora se tiene de NMR, parte del núcleo de ciertos elementos cuyo momento magnético precesa al interactuar con un campo magnético estático externo y cambia de orientación debido a un campo oscilatorio, desde el punto de vista dinámico.

Esto significa en términos mecano-cuánticos, que la pequeña diferencia de poblaciones de núcleos establecida por el campo magnético estático, al ser perturbada por un campo oscilatorio cuya frecuencia es la de precesión natural o de resonancia, sufre transiciones de un estado cuántico a otro alterando la condición de equilibrio, resultando en emisión de energía cuyo espectro corresponde al de NMR y cuyo rango está en la zona de radiofrecuencia del espectro electromagnético.

En la actualidad se conocen dos áreas de aplicación bien definidas que son de Imágenes por Resonancia Magnética (MRI) y Espectroscopía por Resonancia Magnética (MRS). El rango de campos magnéticos disponible para imágenes y espectroscopía se ha incrementado con el desarrollo de la tecnología de magnetos. Ahora existen sistemas con campos mayores que los 2T que utilizan magnetos superconductivos. La elección del nivel de campo depende de los diferentes requerimientos para imágenes y espectroscopía.

La Homogeneidad es de suma importancia para un experimento NMR. Un magneto para imágenes requiere una homogeneidad moderada sobre un gran volumen. Así, campos no uniformes pueden limitar la resolución espacial de un experimento de imágenes. Mientras que para un magneto de espectroscopía, el campo magnético debe ser mucho más uniforme para asegurar que las líneas espectrales estén bien definidas.

La naturaleza de un experimento de imágenes requiere ciclos repetidos de adquisición de datos para una calidad de imagen mejorada. Por lo tanto, la estabilidad de campo del magneto es muy importante porque las fluctuaciones del campo resultan en cambios de la frecuencia de resonancia, que aparecen como desfases y resultan en un deterioro de la imagen.

El principio de diseño de un magneto NMR de imágenes es presentar un juego de bobinas para las cuales la variación en el perfil axial del campo es pequeña con respecto a un centro en particular. En la práctica, esto significa diseñar un magneto tal que las contribuciones de fuentes individuales con respecto al eje z , sean cero hasta un orden específico, que sólo dependen de las dimensiones de la bobina, de la ubicación axial y son proporcionales a la corriente o densidad de corriente.

La inhomogeneidad del campo se puede reducir usando bobinas de corrección adicionales distribuidas alrededor o dentro del magneto. Estas bobinas pueden ser de dos tipos: bobinas movibles conectadas en serie con el magneto principal o bobinas energizadas independientemente. Estas bobinas son útiles para producir correcciones de campos axiales y transversales de primer, segundo y tercer orden que provienen de irregularidades en el devanado.

La señal NMR se codifica en el espacio (fase y frecuencia) mediante gradientes de campo para las técnicas de imágenes. El diseño de las bobinas de gradiente y los circuitos electrónicos que las manejan dependerán de varios aspectos del sistema de imágenes, incluyendo: a) la geometría del magneto principal (acceso axial o transversal del paciente con respecto al campo estático); b) El tipo de investigación y protocolos de pulsos empleados y c) la inhomogeneidad intrínseca del campo magnético estático.

Las bobinas de radiofrecuencia sirven para excitar los spines nucleares y detectar la precesión nuclear resultante. Una buena herramienta para un buen diseño de bobina de radiofrecuencia, es verla como un dispositivo de almacenaje de energía. Un eficiente almacenaje de energía optimiza la performance de transmisión y recepción de un ensamblaje de bobina. Se tratarán los fundamentos de circuitos RLC y su performance Señal-Ruido. Luego se enumerarán algunos principios de diseño de bobinas y se aplicarán a la discusión de varias geometrías de bobinas específicas. Luego, cómo las bobinas son interfaseadas al amplificador de potencia RF y el pre-amplificador. Finalmente se describen bobinas superficiales y cómo difieren los requerimientos de su diseño para cuerpo completo o bobinas para la cabeza.

TABLA DE CONTENIDOS

DISEÑO DE MAGNETO Y BOBINAS DE GRADIENTE Y DE RADIO-FRECUENCIA, PARA SISTEMAS DE RESONANCIA MAGNETICA

PRÓLOGO	1
I. INTRODUCCIÓN	2
1.1. <i>Espectroscopia en general e introducción al fenómeno NMR en particular</i>	2
1.2. <i>Fenómeno de magnetismo nuclear</i>	3
1.3. <i>Descripción mecano-cuántica de NMR</i>	6
1.4. <i>Descripción clásica de NMR</i>	7
1.4.1. Marco de referencia rotativo	10
1.5. <i>Imágenes por resonancia magnética (MRI)</i>	13
1.5.1. Aplicación de gradiente de campo	13
1.6. <i>Espectroscopia por resonancia magnética (MRS)</i>	15
1.6.1. Corrimiento químico	15
1.6.2. Requerimientos de la muestra: sensibilidad y resolución	16
1.6.3. Modos de detección	17
II. FÍSICA DE IMÁGENES POR RESONANCIA MAGNÉTICA	20
2.1. <i>Relajación</i>	20
2.1.1. Relajación spin-red	22
2.1.2. Relajación spin-spin	22
2.2. <i>Secuencia de Transformada de Fourier bidimensional (2DFT)</i>	24
2.3. <i>Componentes de una secuencia típica de MRI</i>	25
2.3.1. Pulsos de radiofrecuencia (RF)	25
2.3.2. Gradientes de Campo	26
2.3.3. Período de colección de datos	26
2.4. <i>Secuencia de Spin-combado (spin-warp)</i>	28
2.4.1. Diagrama de Pulsos para la Secuencia de Spin Combado (2DFT)	28
III. MAGNETOS DE CAMPO PRINCIPAL	32
3.1. <i>Requerimientos de Magnetos para Imágenes y Espectroscopia</i>	32
3.1.1. Intensidad de Campo	33
3.1.2. Homogeneidad de Campo	33
3.1.3. Estabilidad de Campo	34
3.1.4. Acceso a la Región de Homogeneidad	34
3.1.5. Campo de Dispersión	35
3.2. <i>Procedimiento Elemental para Diseñar un Magneto con Región de Homogeneidad Esférica</i>	36
3.2.1. Representación Esquemática de los Perfiles de Campo Axial	37
3.2.2. Magnetos de dos, cuatro y seis bobinas	38
3.2.3. Magnetos sin simetría axial - Gradientes axiales y transversales	40

IV. BOBINAS DE GRADIENTE DE CAMPO	44
4.1. <i>Descripción matemática de los gradientes de campos</i>	44
4.2. <i>Bobinas axiales de gradiente Z</i>	47
4.3. <i>Bobinas transversales de gradientes X e Y</i>	49
4.4. <i>Circuitos electrónicos para manejar gradientes de campos estáticos, oscilatorios y pulsados</i>	53
4.4.1. Gradientes estáticos	53
4.4.2. Gradientes oscilatorios	54
4.4.3. Gradientes pulsados	55
V. BOBINAS DE RADIOFRECUENCIA	57
5.1. <i>Principios fundamentales de circuitos resonantes</i>	57
5.2. <i>Consideraciones señal-ruido</i>	59
5.3. <i>Consideraciones de diseño de bobinas RF</i>	61
5.3.1. Volúmen de la bobina y su frecuencia de resonancia	61
5.3.2. Diseño de resonadores de alta frecuencia	61
5.3.3. Circuitos tanque y sus impedancias de resonancia	62
5.3.4. Reducción de la inductancia	64
5.3.5. Excitación y recepción en cuadratura	65
5.3.6. Homogeneidad de Campo RF axial y transversal B_1	65
5.4. <i>Ejemplos de diseño de bobinas de radiofrecuencia</i>	66
5.4.1. El solenoide de múltiples vueltas	66
5.4.2. El solenoide de una sola vuelta	66
5.4.3. La bobina de elipses cruzadas	74
5.4.4. Bobinas RF de superficie	75
VI. INSTRUMENTACION	76
6.1. <i>Diseño de Espectrómetros (Transceptores)</i>	77
6.1.1. Interfase de bobina a espectrómetro	77
6.2. <i>Procesamiento de la señal</i>	82
6.2.1. Transceptor digital de banda ancha	82
6.3. <i>El Sistema de adquisición de datos</i>	83
6.3.1. El programador de pulsos	83
6.3.2. El procesador de arreglos de datos (array processor)	84
6.3.3. La interfase de operador	84
6.3.4. El despliegue de imágenes	84
6.3.5. Archivo de datos	85
VII. SECUENCIAS NMR	86
7.1. <i>Secuencias para medir los tiempos de relajación</i>	86
7.1.1. Spin-eco	86
7.1.2. Eco de gradiente	87
7.1.3. Saturación parcial	87
7.1.4. Recuperación de la inversión	88

VIII. FORMALISMO MATEMÁTICO PARA EL DISEÑO DE MAGNETO NMR	90
<i>8.1. Ley de Biot-Savart</i>	90
<i>8.2. Aproximación al Campo Objetivo para el diseño de magnetos solenoidales eficientes en el consumo de potencia</i>	98
8.2.1. Variación del método de aproximación al campo objetivo	107
CONCLUSIONES Y RESULTADOS	117
BIBLIOGRAFÍA	121

PROLOGO

El diagnóstico por medio de imágenes de Resonancia Magnética Nuclear es en la actualidad un método estándar y en algunos casos es el único método disponible. Por otro lado, la espectroscopía y su incipiente uso en diagnóstico médico predicen que, en un futuro cercano, ésta técnica se convertirá en una herramienta de diagnóstico de rutina.

Los objetivos de éste trabajo son describir los parámetros de diseño y dar las pautas para la realización práctica de un magneto apropiado para estudio de imágenes o espectroscopía. Se da una descripción matemática del campo magnético y un alcance práctico de una homogeneidad de campo favorable.

La calidad de las imágenes está ligada muy de cerca con la calidad de los tres tipos de campos magnéticos, es decir, del campo generado por el magneto principal, y el generado por las bobinas de radiofrecuencia y de gradientes de campo.

Gracias al doctor Lino Becerra del Instituto Tecnológico de Massachusetts, EE.UU, quien es principal colaborador y conocedor de la Técnica de Aproximación al Campo Objetivo para el Diseño del Magneto Solenoidal Eficiente en Potencia cuya autoría pertenece al doctor Mario Engelsberg de la Universidad Federal de Pernambuco, Brasil, quien ha desarrollado en su laboratorio un magneto de una sola capa delgada de conductor de lámina, basado en ésta aproximación y está siendo usado con campos ultra-bajos para Imágenes de Resonancia Magnética.

CAPITULO I INTRODUCCION

El propósito de este capítulo es el de presentar los conceptos básicos necesarios para entender el fenómeno NMR y su extensión en diferentes áreas tales como las de espectroscopía y formación de imágenes.

1.1. Espectroscopía en general e introducción al fenómeno NMR en particular

La espectroscopía es la técnica que estudia la interacción de la radiación electromagnética con la materia. La cantidad de radiación absorbida o emitida por la muestra es medida y representada como una función de la frecuencia o longitud de onda de la radiación. A esta representación se le llama espectro. La frecuencia de oscilación y la longitud de onda de la radiación están relacionadas por la relación: $c = \nu\lambda$, donde c es la velocidad de radiación (velocidad de la luz), ν es la frecuencia, y λ es la longitud de onda.

Las regiones espectrales de la radiación electromagnética se muestran en la Fig. 1.1,

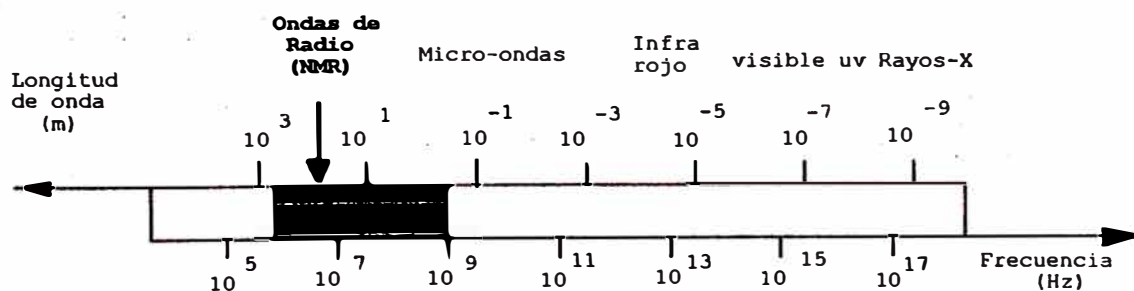


Fig. 1.1. Regiones del espectro electromagnético. La región de radiofrecuencia (NMR) ocupa una banda en el rango de 1 a 1,600 MHz, mostrada por el area sombreada.

La interpretación mecano-cuántica conceptualizada por Edward Purcell (1) postula que la radiación electromagnética consiste de paquetes discretos de energía conocidos como "cuantos o fotones" que se propagan a la velocidad de la luz. La relación fundamental que enlaza la naturaleza corpuscular y de onda de radiación está dada por la relación: $\varepsilon = h\nu$, donde ε es la energía de los fotones, ν es la frecuencia de la radiación asociada, y h es la constante de Planck. La interacción de una molécula con la radiación involucra la absorción o emisión de un cuanto, el cual es acompañado por una transición de un nivel de energía de la molécula a otro. Por el principio de conservación de energía, la diferencia de energía ΔE entre los dos niveles es igual a la energía del cuanto: $\Delta E = h\nu$

Debido a que NMR está en la región de RF, las transiciones de energía asociadas son bajas (ΔE de la luz es de 2 a 3 eV y ΔE de NMR del orden de los μeV).

1.2. Fenómeno de magnetismo nuclear

NMR es posible gracias a que muchos núcleos poseen momento angular J y momento magnético μ . Los dos vectores se pueden considerar paralelos:

$$\mu = \gamma J \quad (1.1)$$

donde la constante de proporcionalidad γ se conoce como "razón giromagnética".

El momento angular J en mecánica cuántica se trata como un operador medido en unidades de la constante de Planck h . Se define un operador adimensional I del momento angular por la ecuación (1.2):

$$J = hI \quad (1.2)$$

Para especificar la dirección del momento angular, es necesario introducir un número cuántico m , el cual varía en incrementos (o decrementos) de 1. Esta discretización de m resulta en que el vector del momento angular sólo puede tener ciertas orientaciones específicas con respecto a una dirección dada.

Tomando la dirección de discretización como el eje z , la componente J_z del momento angular a lo largo del eje z esta dada por

$$J_z = mh \quad (1.3)$$

m puede tener cualquiera de los $2I + 1$ valores $I, I - 1, \dots, -I$

I tiene las siguientes propiedades:

- (i) I es entero para núcleos con números de masa pares.
- (ii) I es cero para núcleos con números pares de neutrones y protones.
- (iii) I es semi-entero para núcleos con números de masa impares.

Por ejemplo, el núcleo de hidrógeno, esto es el protón, tiene spin $I=1/2$, m puede tomar los valores $+1/2$ ó $-1/2$ y de la ecuación (1.3) $J_z = (\pm 1/2)h$. Estos dos estados de spin se muestran en la Fig. 1.2.

La magnitud del momento angular en función del spin I toma como valor:

$$J = h\sqrt{I(I+1)} \quad (1.4)$$

El momento magnético μ es una propiedad importante de las cargas eléctricas que poseen momento angular (se comportan como magnetos). La magnitud del momento magnético m esta dada por:

$$\mu = \gamma h I \quad (1.5)$$

Así, la componente del momento magnético dipolar a lo largo del eje z es

$$\mu_z = \gamma \hbar m \quad (1.6)$$

Si un campo magnético estático B_0 es aplicado a lo largo del eje z , el núcleo adquiere energía E como resultado de la interacción entre el campo B_0 y el momento magnético nuclear, cuya magnitud se obtiene por la ecuación:

$$E = -\mu \cdot B \quad (1.7)$$

considerando sólo las componentes en el eje z , es decir $B = B_0 \mathbf{k}$. Se obtiene, reemplazando (1.6) en (1.7):

$$E = -\gamma \hbar m B_0 \quad (1.8)$$

Si se considera sólo sistemas spin-1/2, para lo cual m tiene los valores $\pm 1/2$, los dos estados permitidos de energía son: $E_- = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0$ y $E_+ = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0$

La relación entre las transiciones entre estos dos estados permitidos, y la frecuencia de transición está dada por la relación de Bohr: $E_- - E_+ = \hbar \omega_0$:

$$\Delta E = \gamma \hbar B_0 = \hbar \omega_0 \quad (1.9)$$

La frecuencia de transición ω_0 está dada por

$$\omega_0 = \gamma B_0 \quad (1.10)$$

El hecho que la constante de Planck ha desaparecido de la expresión de frecuencia de transición sugiere una relación cercana entre la descripción mecano-cuántica y la teoría clásica. Esta última fue conceptualizada por el grupo de Félix Bloch (2) en Stanford a finales de 1945, al mismo tiempo que el grupo de Purcell en Cambridge. Aunque ambos estuvieran separados no sólo geográficamente sino conceptualmente, Purcell y Bloch eran conocedores del experimento de resonancia magnética descubierto por Rabi (3) y sus estudiantes en 1937. Véase figura 1.2.

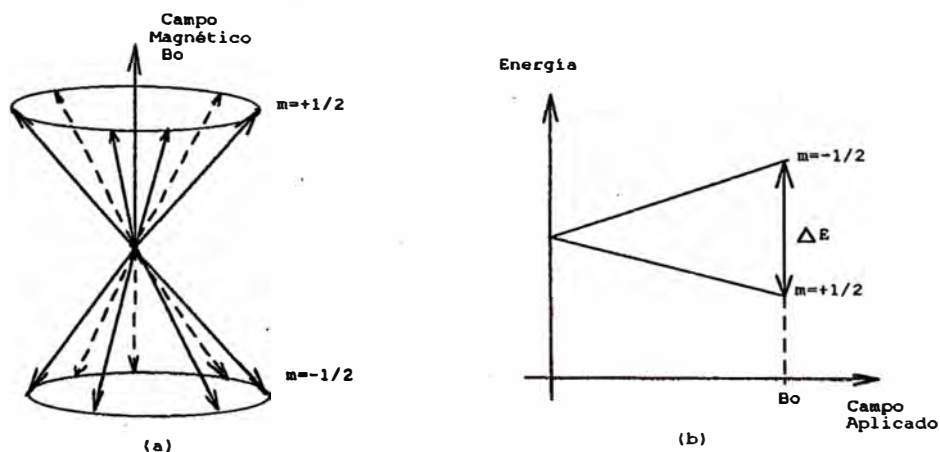


Fig. 1.2. (a) Un rayo de partículas puede ser visto como precesando alrededor de la dirección definida por un campo magnético externo cuyas orientaciones permitidas del vector momento angular del núcleo de spin- $1/2$ se observan previamente a la aplicación de un campo oscilatorio y consecuente cambio de orientación espacial. Las orientaciones son especificadas por el número cuántico m , y describe dos conos. Tal es la visión dinámica de Bloch. (b) Las mismas partículas que absorben energía de un campo oscilatorio y que sufren una transición de un estado cuántico a otro. Tal es la visión espectroscópica de Purcell, y aquí se muestran las energías de las dos orientaciones graficadas como una función del campo

1.3. Descripción mecano-cuántica de NMR

Si se considera una muestra macroscópica de NMR, como por ejemplo: 1 g. de agua conteniendo, aproximadamente, 10^{23} protones. Todos los protones tienen idénticos momentos positivos y todos ellos se alinearían en un campo magnético, es decir, estarían en el nivel de energía más bajo, si no fuera por el movimiento térmico de las moléculas y átomos contrayendo el efecto del campo (véase figura 1.3).

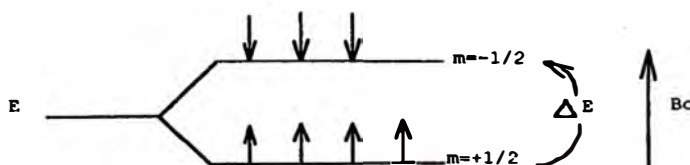


Fig. 1.3. Núcleos de spin $I = 1/2$ en sus dos posibles estados spin de energía. Los núcleos de spin $m = +1/2$ (flechas apuntando hacia arriba) tienen energía más baja que aquellos de spin $m = -1/2$ (flechas apuntando hacia abajo); por lo tanto el estado $m = +1/2$ es ligeramente más poblado de los dos estados. Una transición desde el estado más bajo al más alto es indicado por la línea curva; transiciones como esta tienden a equalizar las poblaciones y así conducir a saturación.

La relación de las poblaciones de núcleos entre los dos estados de energía, depende de la temperatura absoluta T de la muestra y de la intensidad del campo magnético B dadas en la distribución de Boltzmann, donde $n^- / n^+ = \exp(-\Delta E / KT)$

$$\frac{n^-}{n^+} = e^{(-\hbar\gamma B_0/k)/T} \quad (1.11)$$

donde k es la constante de Boltzmann. El factor $\exp(-\Delta E / KT)$ a la temperatura ambiente, esta muy cerca a la unidad: $1-10^{-6}$ (ΔE de NMR del orden de los μeV y $kT \approx 0.025\text{eV}$). Las poblaciones difieren por muy poco y esto es responsable de la baja sensibilidad de NMR

Si el sistema es irradiado con cuantos que corresponden a la diferencia de energía, se producen transiciones y resulta en emisión de fotones cuyo espectro es el de NMR.

1.4. Descripción clásica de NMR

Clásicamente, el comportamiento de un dipolo en un campo magnético se deduce de la ecuación de Torque. El campo magnético B_0 ejerce un torque en un momento magnético μ . Este torque está relacionado a la razón de cambio del momento angular,

$$\text{Torque} = \frac{dJ}{dt} = \mu \times B_0 \quad (1.12)$$

Se multiplica ambos miembros de la ecuación por γ y se sustituye $\mu = \gamma J$.

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \times \gamma B_0 = \mu \times \omega \quad (1.13)$$

Así, el cambio en μ es una precesión alrededor del campo B_0 . La frecuencia angular asociada a esta precesión es colineal con B_0 . De la fig. 1.4(b), entonces la magnitud y dirección de $d\mu$ están dadas por la ecuación (1.13).

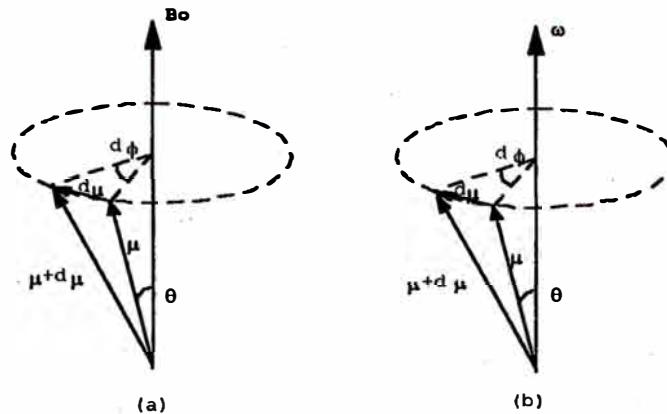


Fig. 1.4. Un momento magnético μ en un campo magnético B_0 , precesa alrededor de la dirección del campo. La magnitud de la frecuencia precesional es ω , donde $d\phi = \omega dt$. De (b) es claro que $d\mu = \mu \text{Sen } \theta \omega dt$. La ecuación clásica (1.13) da $d\mu = \mu \gamma B_0 \text{Sen } \theta dt$. Comparando estas dos ecuaciones da la frecuencia de precesión $\omega = \gamma B_0$

Para que haya consistencia con la ecuación de Torque se requiere que el momento magnético μ precese con una frecuencia dada por $\omega = \gamma B_0$. Esta frecuencia es llamada frecuencia de precesión de Larmor ω_L .

La frecuencia de transición mecano-cuántica ω_0 y la frecuencia de precesión de Larmor de la física clásica ω , son iguales: $\omega_0 = \omega = \gamma B_0$.

Para detectar la magnetización establecida por el campo B_0 dentro una muestra, se verá que es necesario nutar la magnetización hacia el plano x-y. Esto se logra por medio de un campo de radiofrecuencia B_1 aplicado en el plano x-y.

Primero se definen las componentes del campo magnético B .

$$B = B_0 + B_1 \quad (1.14)$$

donde B_0 y B_1 son las componentes estática y oscilatoria respectivamente.

La ec. (1.13) se puede expresar en función de la magnetización macroscópica M :

$$\frac{dM}{dt} = M \times \gamma B \quad (1.15)$$

Si se expande matricialmente la ecuación (1.15), y se muestra la dependencia para cada componente de M con respecto al tiempo. Sabiendo que $M = iM_x + jM_y + kM_z$ y lo mismo para B .

$$\frac{dM}{dt} = \gamma [i(M_y B_z - M_z B_y) + j(M_z B_x - M_x B_z) + k(M_x B_y - M_y B_x)] \quad (1.16)$$

Visto de una manera más conveniente

$$\frac{dM}{dt} = i \frac{dM_x}{dt} + j \frac{dM_y}{dt} + k \frac{dM_z}{dt} \quad (1.17)$$

se puede establecer un campo B_1 rotando en el plano x - y a la frecuencia ω . Luego:

$$B_x = B_1 \cos(\omega t) \quad (1.18)$$

$$B_y = -B_1 \sin(\omega t) \quad (1.19)$$

$$B_z = B_0 \quad (1.20)$$

Al sustituir estas en las componentes de $\frac{dM}{dt}$ dadas en la ecuación (1.16), se observa:

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma (M_y B_0 + M_z B_1 \sin(\omega t)) \quad (1.21)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma (M_z B_1 \cos(\omega t) - M_x B_0) \quad (1.22)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\gamma (M_x B_1 \sin(\omega t) + M_y B_1 \cos(\omega t)) \quad (1.23)$$

A estas ecuaciones se les puede agregar términos que representan la dinámica de la magnetización, esto es, M_z tiende a tomar el valor M_0 así como M_x y M_y tienden a cero. Estas ecuaciones son conocidas formalmente como **ecuaciones de Bloch**.

1.4.1. Marco de referencia rotativo

Es más fácil trabajar en un marco de referencia rotativo con respecto al eje del campo magnético estático B_0 (eje z) rotando a la frecuencia de Larmor, llamado sistema x - y . Así, se pueden sumar las componentes de los momentos magnéticos y ver que las componentes x e y se cancelan, mientras que las z se suman. (fig. 1.5).

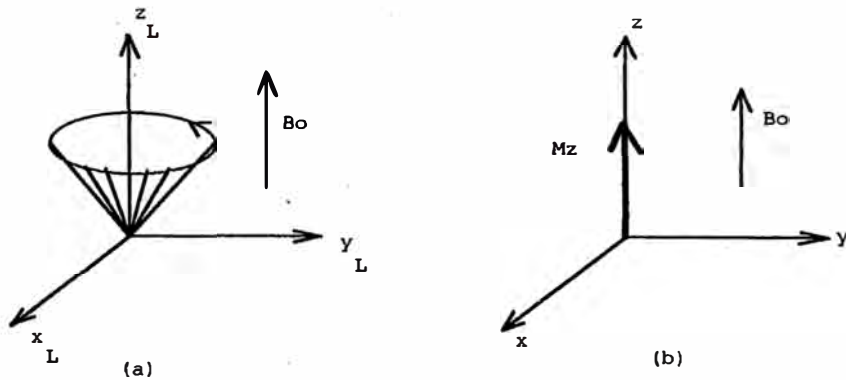


Fig. 1.5. Marcos de referencia (a) de Laboratorio o $x_L y_L z_L$. (b) Rotativo o xyz . Los ejes z son equivalentes

Ahora se deben derivar las ecuaciones de movimiento para las componentes de M en el marco rotativo. La derivada total con respecto al tiempo de M esta dada por

$$\frac{dM}{dt} = i \frac{\partial M_x}{\partial t} + j \frac{\partial M_y}{\partial t} + k \frac{\partial M_z}{\partial t} + M_x \frac{\partial i}{\partial t} + M_y \frac{\partial j}{\partial t} + M_z \frac{\partial k}{\partial t} \quad (1.24)$$

Los vectores unitarios i, j, k , rotan en el marco rotativo, pero no cambian de longitud. Así, una rotación en el campo de la física es un producto cruz en matemáticas:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \omega_r \times i \quad \frac{\partial j}{\partial t} = \omega_r \times j \quad \frac{\partial k}{\partial t} = \omega_r \times k$$

Si se sustituyen estas derivadas parciales en la derivada total con respecto al tiempo:

$$\left[\frac{dM}{dt} \right]_{fijo} = \frac{\partial M}{\partial t} + \omega_r \times (M_x i + M_y j + M_z k)$$

$$\left[\frac{dM}{dt} \right]_{fijo} = \left[\frac{\partial M}{\partial t} \right]_{rotativo} + \omega_r \times M$$

Se observa que el miembro de la mano izquierda es igual a $\gamma M \times B$. Sustituyendo

$$\left[\frac{\partial M}{\partial t} \right]_{rotativo} = \gamma M \times \left(B + \frac{\omega_r}{\gamma} \right) \quad (1.25)$$

$B + \omega_r/\gamma$ se le llama campo magnético efectivo o B_{ef} . Luego, la magnetización precesa alrededor del campo efectivo en el marco rotativo exactamente igual como el momento magnético precesa alrededor del campo del laboratorio.

Si la frecuencia del marco rotativo iguala la frecuencia de precesión $= -\gamma B_0$:

$$\left[\frac{\partial M}{\partial t} \right]_{rotativo} = 0 \quad (1.26)$$

Así, si el marco de referencia rota a la frecuencia de Larmor, la magnetización es estática en el marco rotativo, lo cual corresponde a lo que se ve en la Fig. 1.5(b).

Si se quiere información sobre las características de cualquier sistema físico, debemos perturbar el sistema del equilibrio y luego medir la energía que es emitida desde el sistema cuando este retorna al equilibrio.

La manera de perturbar la magnetización neta de equilibrio, es usando otro campo magnético, B_1 oscilatorio que en el sistema de laboratorio como en el rotativo:

$$\begin{aligned} B_{lab} &= B_0 k + B_1 \cos(\omega t) i - B_1 \sin(\omega t) j \\ B_{rot} &= B_0 + B_1 i \end{aligned} \quad (1.27)$$

Donde el eje de referencia está a lo largo del eje x:

$$\left[\frac{\partial M}{\partial t} \right]_{rotativo} = \gamma M \times \left(B_0 - \frac{\omega_r}{\gamma} + B_1 \right) \quad (1.28)$$

Si B_1 está rotando a la frecuencia de Larmor o $-\gamma B_0$ (en la dirección opuesta), dá:

$$\left[\frac{dM}{dt} \right]_{\text{rotativo}} = \gamma M \times B_1 \quad (1.29)$$

Esto demuestra que si se aplica un campo oscilatorio B_1 , a la frecuencia de Larmor, la magnetización rotará alrededor de B_1 a $\omega = \gamma B_1$. Esta acción neta la magnetización fuera del equilibrio (Fig. 1.6).

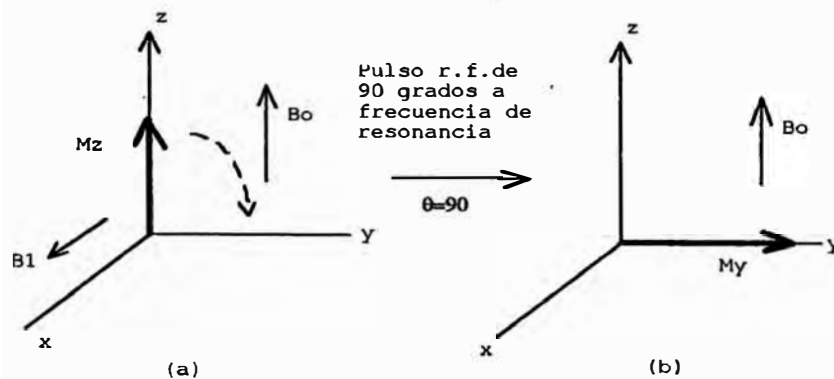


Fig. 1.6 (a) Instante previo a la aplicación de un pulso de radiofrecuencia, la componente neta de magnetización, esta orientada a lo largo del eje z. (b) El efecto de un pulso de 90° aplicado a lo largo del eje x' inclina la magnetización sobre el eje y'

El ángulo de precesión, θ , de la magnetización respecto a B_1 depende de la magnitud (potencia) del campo aplicado y de la duración del pulso, t .

$$\theta = \gamma B_1 t \quad (1.30)$$

Las constantes de tiempo que caracterizan los procesos de **relajación longitudinal y transversal** son T_1 y T_2 respectivamente. La relajación longitudinal es el retorno de la componente z a su valor de magnetización de equilibrio, M_0 . La relajación transversal involucra el desfaseamiento de la magnetización en el plano x-y.

Con el ejemplo citado, luego de aplicado un pulso de B_1 , los spins nucleares precesan en el plano x-y a la frecuencia de Larmor. La precesión genera una señal eléctrica que es llamada transitoria ó **FID** (de Free Induction Decay).

1.5. Imágenes por resonancia magnética (MRI)

Suponiendo inicialmente un "corte o tajada" de tejido para analizar, como se muestra en la fig. (1.7) (luego se explicará cómo se puede seleccionar un corte de un cuerpo intacto) y se aplica un pulso de 90° a la muestra entera, todos los spines en el corte empezarán a precesar libremente en el plano x - y .

1.5.1. Aplicación de gradiente de campo

Si después del pulso de radiofrecuencia, se aplica al corte un gradiente de campo magnético a lo largo del eje- y , superpuesto sobre el campo principal B_0 a lo largo del eje z , tal que la componente- z del campo externo varía como $B_z(y) = B_0 + G_y y$; los protones empezarán a precesar a diferentes frecuencias dependiendo de su ubicación a lo largo del eje- y .

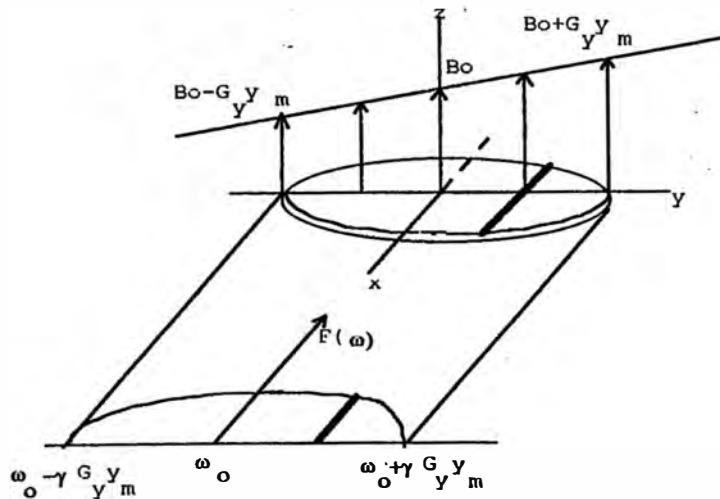


Figura 1.7. Proyección spin de una tajada sobre una línea paralela al gradiente de campo magnético

La frecuencia de precesión variará con y a través del corte como

$$\omega(y) = \omega_0 + \gamma G_y y \quad (1.31)$$

donde $\omega_0 = \gamma B_0$, tal que aquellos protones en la franja oscura paralela al eje-x, tendrán todos la misma frecuencia de precesión; y existe una relación de uno a uno entre la frecuencia de precesión y la variable y .

La señal FID del corte entero será compleja, ya que consistirá de una superposición de muchas frecuencias; sin embargo, un análisis de la señal por *Fourier* provee un espectro cuyo eje de frecuencia tendrá relación directa con la posición, como lo establece la ecuación (1.31). El espectro representa una proyección espacial de la densidad de protones sobre una línea paralela a la dirección del gradiente, es decir, $F(\omega)$ se puede escribir como $F(y)$.

Rotando el vector gradiente de campo en el plano x - y y repitiendo la secuencia en cada ángulo (pulso de 90° , aplicación del gradiente y grabación de la señal FID), se pueden generar proyecciones para diferentes orientaciones del gradiente.

Luego, con técnicas de imágenes se puede reconstruir la imagen bi-dimensional de estas proyecciones. El corte se divide en volúmenes elementales (llamados *voxels*), que se traducen en secciones elementales en la imagen final llamadas *pixels*, y la densidad de protones en cada pixel es computada.

La técnica usada por Lauterbur (4) consiste en una combinación de gradientes x e y :

$$\dot{G} = (\dot{G}_x \cos \theta + \dot{G}_y \sin \theta) \quad (1.32)$$

que equivale a rotar el gradiente eléctricamente (un par de bobinas de gradientes son ubicadas a lo largo del eje x e y respectivamente) como lo establece la ecuación (1.32), para producir una serie de proyecciones en función de θ y reconstruir una imagen por métodos de proyección posterior filtrada usada en Rayos-X.

1.6. Espectroscopía por resonancia magnética (MRS)

La frecuencia de resonancia de un núcleo es directamente proporcional al campo magnético *local*. En la sección anterior se consideró este campo local como el campo aplicado B_0 . Sin embargo, el campo aplicado B_0 también induce corrientes electrónicas en átomos y moléculas, y estas producen un campo aún más pequeño $B_{0\sigma}$ en el núcleo, el cual es proporcional a B_0 . Usando la ec. (1.10) se obtiene:

$$\omega_0 = \gamma B_{0\sigma} = \gamma B_0(1 - \sigma) \quad (1.33)$$

donde σ que representa la contribución del pequeño campo secundario generado por los electrones, es una constante adimensional, conocida como la *constante de apantallamiento ó corrimiento químico*, tiene valores típicos en la región entre 10^{-6} a 10^{-3} y depende del entorno electrónico del núcleo, por lo tanto núcleos con diferente entorno químico dan señales a distintas frecuencias.

1.6.1. Corrimiento químico

La separación de las frecuencias de resonancia desde una referencia escogida arbitrariamente se denomina *corrimiento químico*, y está expresado en unidades adimensionales de *partes por millón* (p.p.m.). Una ilustración simple del corrimiento químico esta dada por el espectro NMR del ^1H en el ácido acético CH_3COOH .

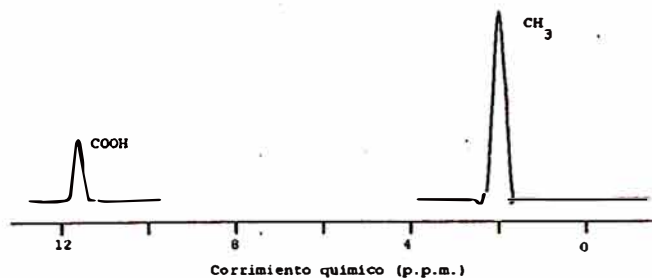


Fig. 1.8. Los protones del CH_3 y COOH experimentan entornos químicos distintos y por lo tanto presentan dos señales separadas.

La intensidad de las señales de NMR, medidas por sus áreas, son proporcionales al número de núcleos. Las señales de moléculas en solución tienen una curva característica $g(\omega)$:

$$g(\omega) \propto \frac{T_2}{1 + T_2^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (1.34)$$

donde ω_0 es la frecuencia de resonancia, y T_2 es el *tiempo de relajación spin-spin*. Esta curva es conocida como una línea de forma Lorentziana (fig. 1.8). La intensidad está dada por el área. El *ancho de línea* natural $\Delta\omega$ a la mitad de la altura es

$$\frac{1}{T_2} = \Delta\omega \quad (1.35)$$

En general, a mayor inmovilidad señales más anchas, y así, los anchos de línea pueden proveer información acerca de la estructura y movimiento molecular, entorno químico, concentración y grados de reacción de las moléculas. Sin embargo, los anchos de línea y las formas de línea pueden ser afectadas también por otros factores como el *intercambio químico* y la inhomogeneidad del campo magnético.

1.6.2. Requerimientos de la muestra: sensibilidad y resolución

Es esencial que las muestras produzcan señales intensas para ser diferenciadas del ruido (sensibilidad) y angostas para ser distinguidas unas de otras (resolución).

$$\text{señal} / \text{ruido} = \frac{2.5 \times h_{\text{señal}}}{\text{ruido}_{\text{pico}}} \quad (1.36)$$

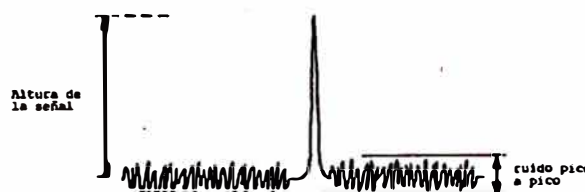


Fig. 1.9. Señal y ruido en un espectro NMR cuya razón está dada por la ecuación (1.41)

1.6.2.1. Núcleos típicos de NMR

Sólo aquellos núcleos que tienen propiedades magnéticas, dan señal de NMR. Algunos de estos núcleos, junto con sus propiedades de NMR, se muestran en la Tabla 1.1. Los núcleos de spin-1/2 tales como ^1H , ^{13}C , y ^{31}P han probado ser los más informativos en NMR aplicada a biología. Los abundantes isótopos de carbón y oxígeno, ^{12}C y ^{16}O tienen spin cero y por lo tanto no producen señal de NMR.

<i>Núcleos</i>	<i>Número cuántico de spin</i>	<i>Frecuencia de resonancia a 5T, en MHz</i>	<i>Abundancia natural (%)</i>	<i>Sensitividad relativa a campo cte (1)</i>
^1H	1/2	213.0	99.98	100
^2D	1	32.7	0.0156	1.5×10^{-4}
^{13}C	1/2	53.5	1.1	1.6×10^{-2}
^{14}N	1	15.4	99.6	1.0×10^{-1}
^{15}N	1/2	21.6	0.36	3.7×10^{-4}
^{19}F	1/2	200.0	100.0	83.0
^{23}Na	3/2	56.3	100.0	9.3
^{31}P	1/2	86.2	100.0	6.6
^{35}Cl	3/2	20.9	75.4	3.5×10^{-1}
^{39}K	3/2	9.9	9.1	4.6×10^{-2}

Tabla 1.1 Propiedades NMR de los núcleos comunmente usados en biología

¹ Sensitividad relativa es la sensibilidad NMR de los núcleos relativa a la de un número igual de protones, multiplicada por el porcentaje de abundancia natural

1.6.3. Modos de detección

En el modo de *onda-continua*, se aplica la potencia de radiofrecuencia a la muestra y se varía la intensidad del campo magnético para obtener un espectro en el cual la amplitud de la señal es una función de la intensidad del campo.

En el modo de *Transformada de Fourier* para detectar la señal de NMR, el campo de radiofrecuencia es aplicado en forma de pulsos muy fuertes, cuyo ancho de banda es suficientemente amplio para excitar *todas* las resonancias.

Habiendo colectado la señal FID, la cual está en el dominio del tiempo, para obtener la señal en el dominio de la frecuencia se usan las siguientes expresiones

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.37)$$

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.38)$$

donde $a(t)$ es la función de la señal y $A(\omega)$ es su transformada de Fourier. Inversamente, $a(t)$ es la transformada inversa de Fourier (ó FT^{-1} de $A(\omega)$). La fig. 1.10 muestra la FT de una FID obtenida de una muestra de agua pura. La FT de una exponencial es una línea Lorentziana. Notar que un pico es el resultado de que todos los protones en el agua son esencialmente iguales. También, el pico está corrido ligeramente ($\Delta\omega$) ya que la frecuencia del transmisor está fuera de resonancia (dando así las oscilaciones en la FID). El ancho del pico a media altura se aproxima a $1/T_2^*$.

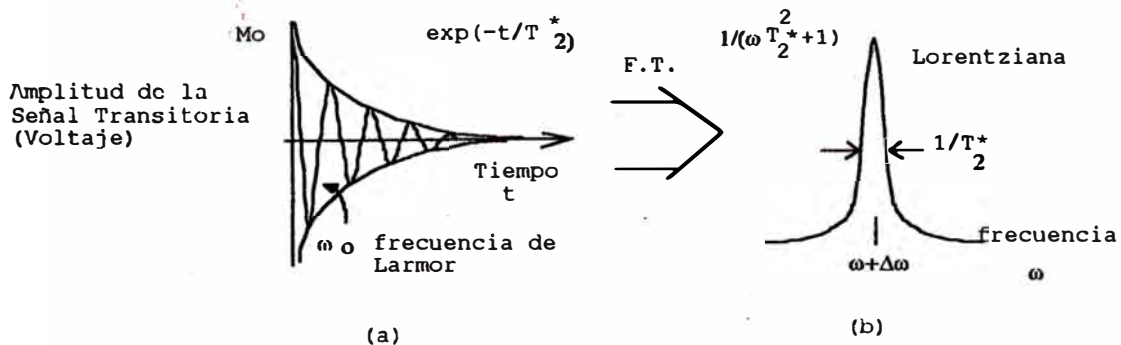


Figura 1.10. La magnetización precesando en el plano x - y genera una FEM en la bobina y el voltaje detectado corresponde a una FID o “transitoria”. La FID se detecta con un osciloscopio como un voltaje fluctuante (fig. 1.9(a)). Esto significa que después del pulso de rf, M_x y M_y tendrán la misma amplitud que M_0 y luego decaen exponencialmente a cero con la constante de tiempo T_2^* .

Su principal ventaja con respecto al modo de detección de onda-continua es la de proveer una mejora sustancial en sensibilidad, es decir en la relación señal-ruido (S/N) de las líneas espectrales, porque todas las resonancias son detectadas simultáneamente en vez de una por una como es en NMR por onda-continua.

La acumulación de la señal no es aleatoria y es proporcional al número de experimentos "n". Por otro lado, el ruido se acumula aleatoriamente con una razón proporcional a \sqrt{n} . Por lo tanto, la relación S/N incrementa con el número de experimentos como $n/\sqrt{n} = \sqrt{n}$. En vista que el número de experimentos es proporcional al tiempo requerido para tomar datos, la relación S/N incrementa como \sqrt{t} . Esto significa que la duración del experimento debe ser cuadruplicada para duplicar la S/N.

Este proceso es conocido también como "CATeo", que proviene del acrónimo de Computer Average Transients. En la fig. 1.11 se muestra la detección de una señal por FT de NMR.

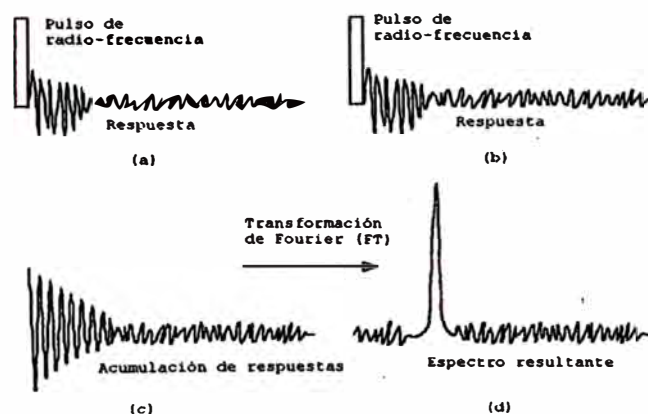


Fig. 1.11. Este diagrama ilustra la acumulación de un espectro conteniendo una sola resonancia. (a) y (b) son dos respuestas consecutivas a pulsos de radiofrecuencia. (c) es la acumulación de 64 respuestas o scaneos (cuya escala es 16 veces menor que la de (a) y (b)) y (d) es el espectro obtenido con Transformada de Fourier de la acumulación.

CAPITULO II FISICA DE IMAGENES POR RESONANCIA MAGNETICA

MRI hace uso extensivo de las propiedades dinámicas nucleares. Muchas técnicas de contraste se basan en los diferentes tiempos característicos de relajación que son una medida del tiempo requerido por la muestra para retornar a su condición de equilibrio luego de haber sido perturbados por irradiación de radiofrecuencia (rf).

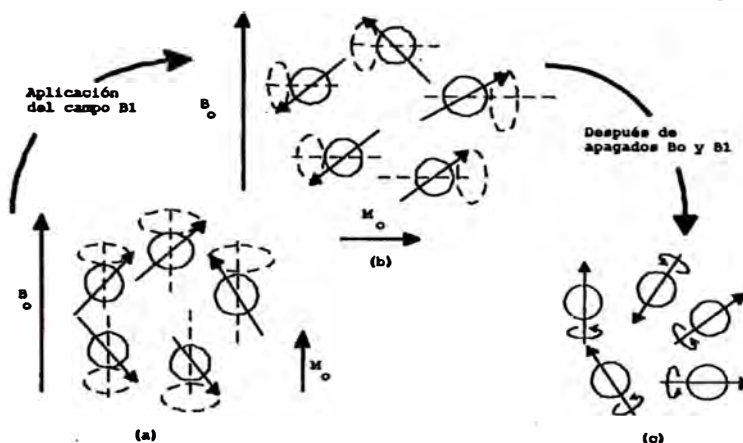


Figura 2.1.(a) Al situar los protones en un campo magnético B_0 se orientan en la dirección del campo (paralelos o antiparalelos) con una resultante M_0 en la dirección del campo. (b) Tras aplicar la energía de radiofrecuencia B_1 correcta, los protones nutan al 90° y precesan en fase. (c) Luego de apagados los campos, los protones vuelven a su estado inicial..

2.1. Relajación

Como se ha visto, la irradiación RF produce la absorción de esta energía y el desplazamiento de los spines de su distribución de equilibrio. Luego de suspender la irradiación, el retorno de los spines a su condición de equilibrio es caracterizado por los tiempos de relajación que fueron introducidos fenomenológicamente por Bloch.

Estos distintos tipos de relajación nuclear que son considerados como de primer orden son procesos exponenciales simples que pueden ser descritos como: $M \propto \exp(-t / TC)$ donde TC es una constante de tiempo.

Las constantes de tiempo que caracterizan los procesos de **relajación longitudinal** y **transversal** son $T1$ y $T2$ respectivamente.

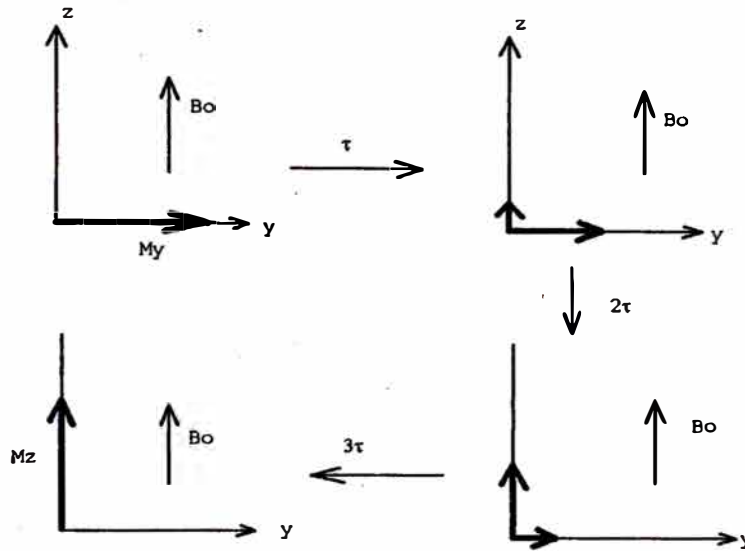


Figura 2.2. La relajación longitudinal es el retorno de la componente-z a su valor de magnetización de equilibrio, M_0 . Siguiendo el pulso de radio frecuencia, la componente-z de M es cero. Con el transcurrir del tiempo, M_z crece exponencialmente hasta que se restablece el valor de equilibrio.

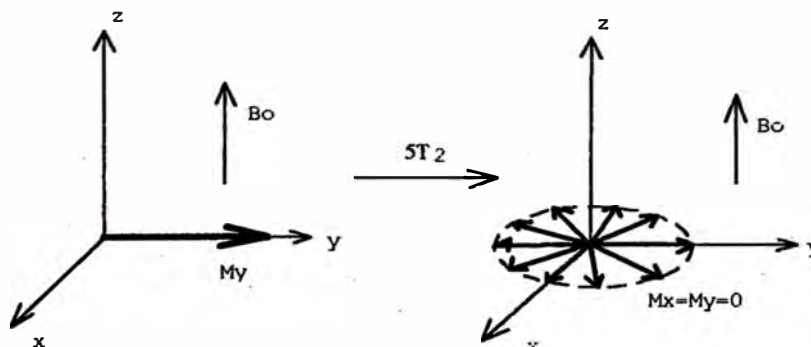


Figura 2.3. La relajación transversal involucra el desfase de la magnetización en el plano x - y . La constante de tiempo $T2$ se usa cuando se describe la relajación transversal debido a procesos intrínsecos de la muestra, por ejemplo, la interacción dipolar entre momentos magnéticos. Sin embargo, se usa la constante de tiempo $T2^*$ debido a las inhomogeneidades del campo.

2.1.1. Relajación spin-red

Este proceso de relajación después de la aplicación del pulso B_1 , es la pérdida de energía hacia los alrededores en forma de energía térmica. T1 describe la razón de retorno de la magnetización M_z desde su valor siguiente a la excitación, por ejemplo desde 0 si se usa un pulso de 90° , a su valor de equilibrio M_0 , y es de segundos.

Si se aplica una serie de pulsos cada TR ó tiempo de repetición, se establecerá un estado estable (fig. 2.4). La señal en este estado es:

$$M_z = M_0(1 - \exp(-TR / T1)) \quad (2.1)$$

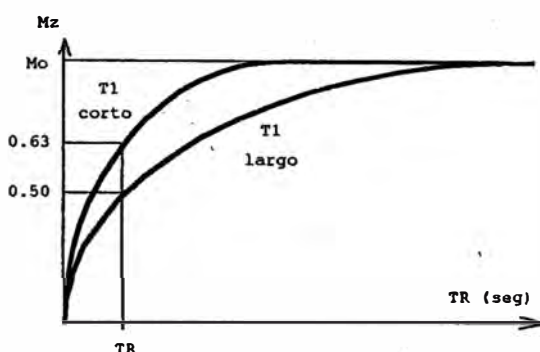


Fig. 2.4. Recuperación de la magnetización longitudinal T1 spin-red. Para un valor dado de TR, la señal (M_z) será mayor cuanto menor sea T1.

2.1.2. Relajación spin-spin

A la relajación de la magnetización transversal se le denomina $T2^*$, que simboliza la pérdida de coherencia que conlleva a un desfase y atenuación de la señal. $T2^*$ es producto de procesos reversibles e irreversibles.

Aplicando un pulso de RF de 180° hace que los spines con una frecuencia de precesión rápida, tanto como los lentos, vuelvan juntos a la situación original (fig. 2.5).y se obtiene un “eco” de la señal tras el pulso de 180° (secuencia: $\pi/2$ -TE/2- π -TE/2-eco). A esta técnica se le denomina de *spin-eco*.

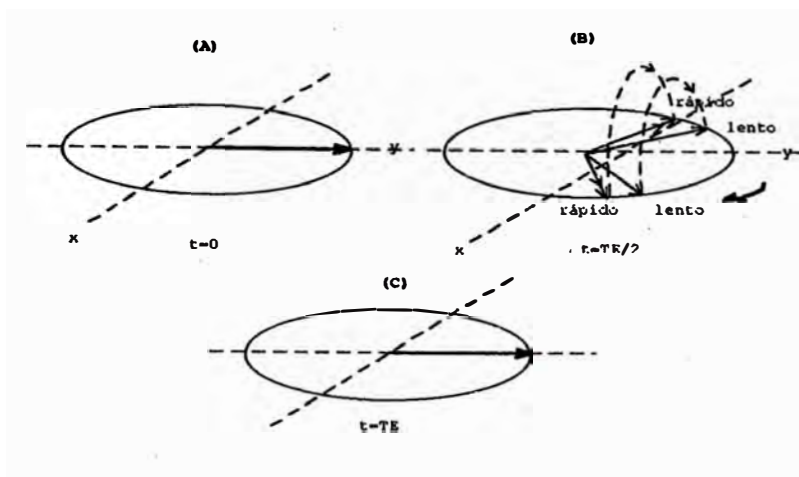


Fig. 2.5. Formación del spin-eco (SE). Siguiendo a un pulso de 90° , la magnetización está a lo largo del eje y (A). En un campo magnético inhomogéneo, algunos isocromatos estarán en un campo mayor que el principal y precesarán más rápido que el principal. Otros precesarán más lento (B). Un pulso de 180° aplicado $TE/2$ segundos después a lo largo del eje y , rota los núcleos como se muestra. Un tiempo $TE/2$ después, los isocromatos rápidos alcanzarán a los lentos y se formará un spin eco, es decir, cómo la señal se recupera cuando los vectores individuales vuelven a precesar en fase en el plano transverso tras el pulso de 180° (C).

Tras el eco y subsiguiente deterioro de la señal puede aplicarse otro pulso de 180° , produciendo un segundo eco. La razón de pérdida de la intensidad del eco (amplitud de señal) se caracteriza por el tiempo de relajación transversal T_2 (que corresponde a los procesos intrínecos). Un T_2 corto (largo) corresponde a una atenuación rápida (lenta) (véase fig. 2.6). La señal en este estado es:

$$M_{x,y}(t) = M_0 \exp(-TE / T_2) \quad (2.2)$$

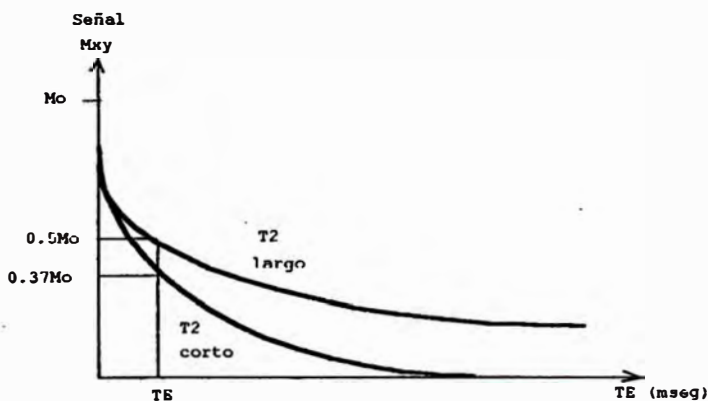


Fig. 2.6. Disminución T_2 de la magnetización transversal o spin-spin. Para un TE dado, los valores mayores de T_2 producen una mayor señal.

2.2. Secuencia de Transformada de Fourier bidimensional (2DFT)

Colectando una serie de n puntos de datos en la presencia de un gradiente en x (G_x), la frecuencia codifica la señal y produce, después de cierta transformación, una serie de n puntos de datos espacialmente codificados. Para definir una imagen planar, también se debe codificar información con respecto al eje y en la señal.

Para codificar el segundo eje se usa la propiedad llamada fase, la cual está dada por:

$$\phi = \gamma y \int_0^t G_y(t) dt \quad (2.3)$$

Considerar dos ondas coseno de igual amplitud pero de frecuencias diferentes; $\cos \omega_1 t$ y $\cos \omega_2 t$, donde $\omega_1 = \gamma G_y y_1$, $\omega_2 = \gamma G_y y_2$. Para $t=0$ el desfase relativo es $\Delta \phi = 0$. Para $t=\tau$, la señal de mayor frecuencia habrá acumulado más fase que la de menor frecuencia, y se dice estarán desfasadas en:

$$\Delta \phi = (\omega_1 - \omega_2) \tau = \gamma G_y \Delta y \tau \quad (2.4)$$

y ahora se tiene otra variable, la cual es una función de la posición. (véase figura 2.7).

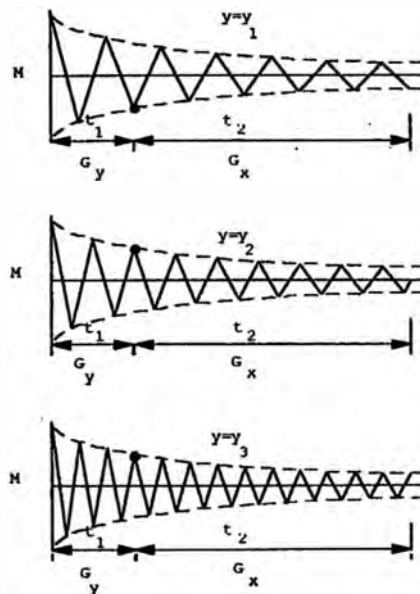


Fig. 2.7. El valor del gradiente codificador de fase G_y es incrementado en secuencias sucesivas de pulso y cambia la fase de la señal al comienzo del periodo de lectura.

Si se repite el procedimiento m veces con un valor diferente de G_y , se consigue un nuevo conjunto de n puntos en el dominio del tiempo, los cuales difieren del primer conjunto en sus fases iniciales. Los datos consisten en m filas y n columnas. La variable a lo largo de las filas es para un mismo tiempo y las variables bajo las columnas son para la misma fase. Aplicando la Transformada de Fourier bidimensional (2DFT), se produce un mapa de intensidad dentro de los dos ejes definidos por los dos gradientes usados. La colección de un mayor número de puntos resulta en una separación más pequeña entre puntos y una imagen más precisa.

2.3. Componentes de una secuencia típica de MRI

Una secuencia típica de pulsos se construye de una serie de bloques, los cuales se combinan entre sí para producir una señal en el momento deseado y son ponderados por las propiedades de spin apropiadas, es decir T_1 , T_2 , etc.

Para representar un protocolo de imágenes se utiliza un "diagrama de secuencia de pulsos" conformado por la parte de RF, Gradiente de codificación de fase, Gradiente de codificación de frecuencia (lectura) y la señal FID, en función del tiempo.

2.3.1. Pulsos de radiofrecuencia (RF)

Las propiedades de las dos clases de pulsos RF, las cuales son ejemplos de los pares de Fourier usados en MRI, son resumidos en la figura 2.8.

TIPOS DE PULSOS DE RF EN MRI

Un pulso no-selectivo es:

- Corto (useg)
- Rectangular
- Amplio ancho de banda (aprox. $1/\text{duración}$)

Un pulso selectivo es:

- Relativamente largo (mseg)
- De forma Sinc/t (Sinc t)
- Angosto en ancho de banda

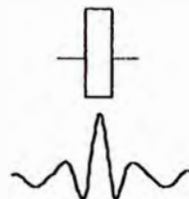


Figura 2.8. Las propiedades de los pulsos RF usados en MRI

2.3.2. Gradientes de Campo

Los gradientes de campo tienen dos efectos en una señal NMR, el deseado, que hace la codificación de fase y frecuencia, características de la posición en el espacio; y el no deseado, de desfazar la señal.. Las propiedades se resumen en la fig.2.9.

GRADIENTES DE CAMPO
 Hacer que los campos magnéticos dependa de la posición

- Deben exceder las inhomogeneidades del campo
- Deben tener alta linealidad
- Necesitan un tiempo corto de subida (aprox. 1 mseg.)

$$B(x, y, z) = \begin{vmatrix} xG_x \\ yG_y \\ zG_z \end{vmatrix} B_0$$

donde $G_x = \frac{\partial B_z}{\partial x}$

Figura 2.9. Las propiedades de los gradientes de campo usados en MRI

Se puede invertir el desfaseamiento indeseable por un "eco de gradiente" (EG), es decir, un gradiente de igual magnitud pero de signo contrario al que se tiene que aplicar para lograr el efecto deseado. Bajo la influencia de un eco de gradiente, el desfaseamiento causado por el primer gradiente es invertido y la señal crece nuevamente. La fase neta es cero (véase ecuación (2.3)): $\phi = \gamma \int_0^t G_y y(t) dt = 0$

Este efecto es similar al del spin-eco, donde los vectores son intercambiados por un pulso de 180°. Este eco de gradiente también se llama inversión de tiempo.

2.3.3. Período de colección de datos

En presencia del gradiente de lectura (G_x) la señal contendrá una mezcla de frecuencias, cuyo rango dependerá del tamaño del objeto y de la amplitud del gradiente usado.

Un teorema fundamental de procesamiento de datos con Transformadas de Fourier es el **Teorema de Nyquist**, que dice que se debe muestrear por lo menos al doble de la máxima frecuencia presente en la señal para evitar ambigüedades en el espectro. Para el caso de MRI, esto se puede expresar en 2 reglas:

1. El tiempo de muestreo necesario SI (Sampling Interval) y la razón de adquisición de datos $\Delta\omega = 1 / SI$ se pueden hallar de: $\Delta\omega = \gamma G_x \Delta x$

donde $\Delta x = FOV$ / $FOV = Field\ of\ view\ (cm)$

$$\therefore SI = \frac{1}{2\gamma G_x FOV} \quad \text{para obedecer Nyquist}$$

Por ejemplo, si se ubica un objeto de 20 cm de diámetro en el centro del campo, usando gradientes de 0.5 G/cm (Nota: γ del 1H (protón) $\approx 42\text{ MHz/T} \approx 4200\text{ Hz/G}$), el tiempo de muestreo es:

$SI = (2 \times 4200\text{ Hz/G} \times 0.5\text{ G/cm} \times 20\text{ cm})^{-1} = (4800\text{ Hz/cm} \times 10\text{ cm})^{-1} = 11.9\ \mu\text{seg}$
(por Nyquist se debe muestrear a 84 kHz) resultando una señal que contiene frecuencias de $\pm 42\text{ kHz}$ alrededor de la frecuencia básica del pulso.

2. La duración total de la adquisición de la señal $TDCT$ (Total Data Collection time) será igual al Tiempo de muestreo SI multiplicado por el número de muestreos.

$$\text{Resolución (Tamaño del Pixel)} = FOV / \# \text{ Muestreos}$$

$$= \frac{1}{\gamma G_x SI \# \text{ Muestreos}}$$

donde: $SI \# \text{ Muestreos} = TDCT$ / $TDCT = \text{Total Data Collection Time}$

$$R = \frac{1}{\gamma G_x TDCT}$$

Para el ejemplo dado ($\# \text{ Muestras} = 256$), $TDCT \approx 5 \text{ mseg}$ y $R \approx 0.1 \text{ cm}$

En la práctica, el tiempo de adquisición de datos, usualmente se mantiene constante, mientras que los gradientes son ajustados para encajar el campo de vista (FOV).

2.4. Secuencia de Spin-combado (spin-warp)

El procedimiento para generar una imagen es el siguiente:

1. Excitar el sistema spin,
2. Aplicar un gradiente de codificación de fase G_ϕ para un tiempo fijado,
3. Aplicar un gradiente de lectura G_ω y coleccionar n puntos de datos,
4. Incrementar el valor de G_ϕ y repetir los pasos 1, 2 y 3 m veces
5. Aplicar una Transformada de Fourier 2D para producir una imagen $m \times n$.

Los pasos 1, 2 y 3 toman sólo unas decenas de ms. Sin embargo, la física de spin demanda que la excitación usando pulsos de 90° sólo pueden ser repetidos en la escala de tiempo de los segundos (T_1), para evitar la saturación completa. El tiempo entre excitaciones sucesivas, llamado TR, por lo tanto, debe ser de ese orden.

Ya que los pasos 1, 2 y 3 se repiten m veces, el tiempo total requerido para un procedimiento de imágenes es $m \times TR$. Para tomar varios cortes se “saltan” los cortes para evitar saturación. Si se usa la promediación, este tiempo es obviamente incrementado por el número de promedios tomados.

2.4.1. Diagramas de Pulos para la Secuencia de Spin Combado (2DFT)

La secuencia se puede dividir en cinco etapas, como se muestran en las figuras 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 y 2.14. Para el caso de una secuencia planar son:

Etapa 1: La selección de corte se logra por la aplicación de un gradiente de campo en el eje z y un pulso selectivo de 90° . Esto resulta en la excitación de todos los núcleos en el plano xy apropiado. Si se requiere un corte delgado, se requerirán un alto gradiente y pulso de larga duración. Durante este período de selección, ocurre una gran cantidad de desfase indeseable y sólo resultará una pequeña señal.

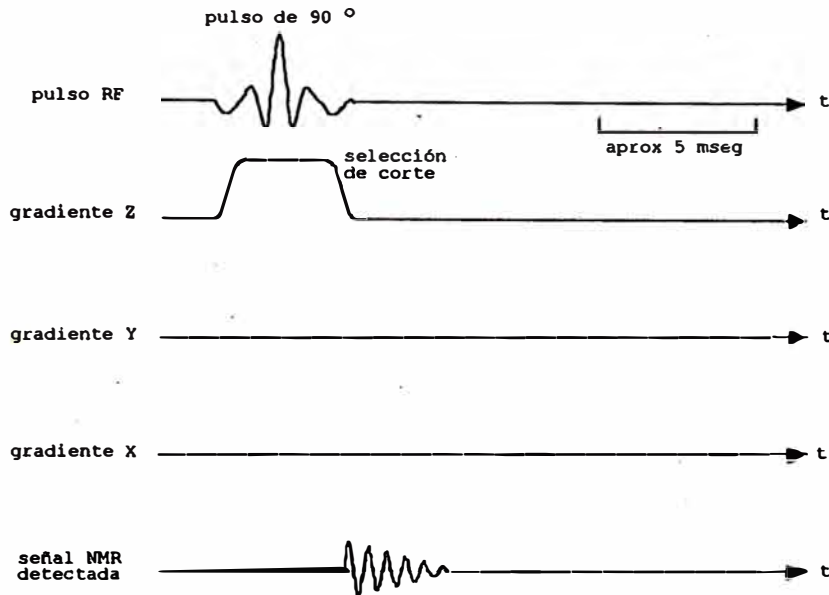


Fig.2.10 Selección de corte por la aplicación de un gradiente de campo en el eje z y un pulso selectivo de 90°

Etapa 2. En vista que el desfase en la Etapa 1 es indeseable, después que se alcanza la selección del corte, este es removido como se discutió anteriormente, con un gradiente de inversión de tiempo. Al final de este periodo de inversión de tiempo, se obtiene una señal mucho más grande que la lograda sin el gradiente de inversión. La señal ha decaído sólo por T_2 durante el tiempo transcurrido.

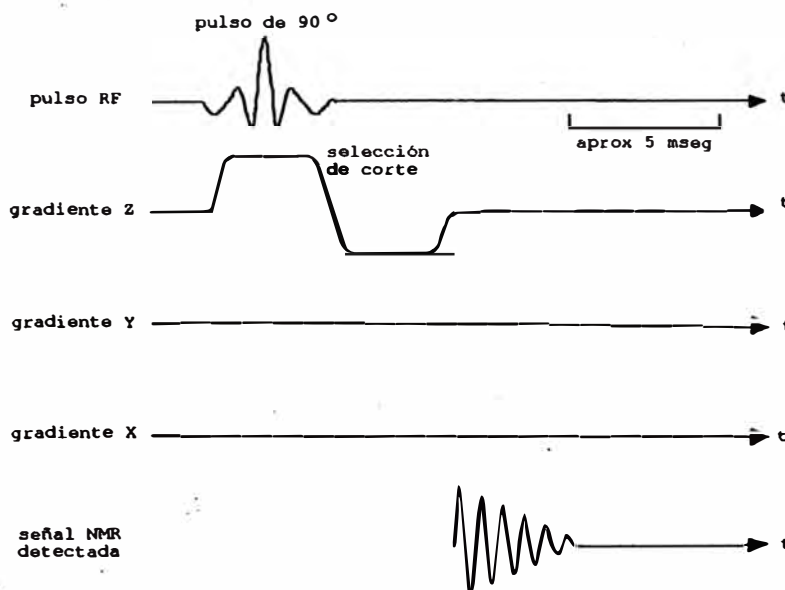


Figura 2.11. Aplicación de un gradiente de inversión de tiempo

Etapa 3. Una vez es seleccionado el corte, la información espacial debe ser codificada en él. Esto se logra por medio de la aplicación de un gradiente de codificación de fase en un eje después de la excitación y luego un gradiente de lectura durante la colección de la señal FID. La señal detectada ahora decae mucho más rápido que previamente, ya que esta es colectada en presencia de un gradiente, pero contiene la información espacial requerida. Después de la transformación, corresponde a la proyección de la señal del plano seleccionado sobre el eje de frecuencia.

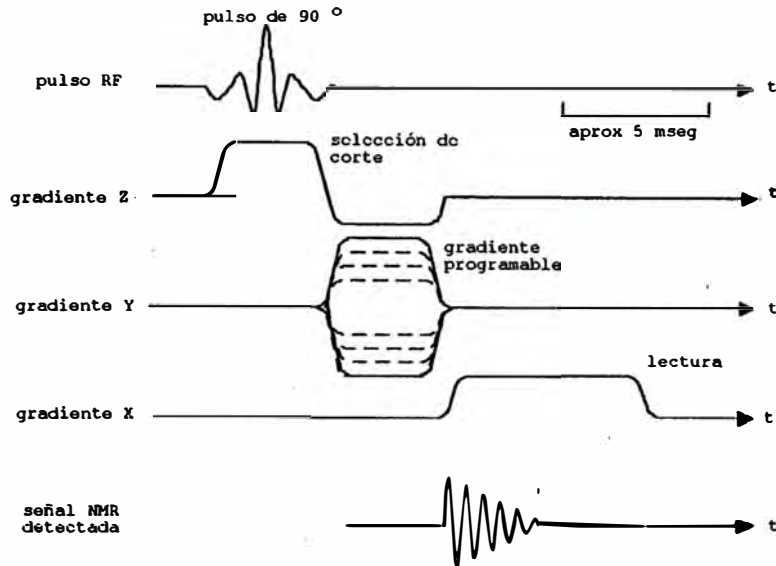


Figura 2.12. Aplicación de un gradiente de codificación de fase después de la excitación y luego un gradiente de lectura durante la colección de la señal

Etapa 4. Se pueden coleccionar datos exactos aplicando un gradiente de inversión de tiempo antes del gradiente de lectura, al mismo tiempo que las consecuencias no deseadas de G_z son corregidas. Aparece luego una "recuperación" de la señal y así como una señal de eco, llamada "eco de gradiente" considerado como dos FIDs espalda-con-espalda.

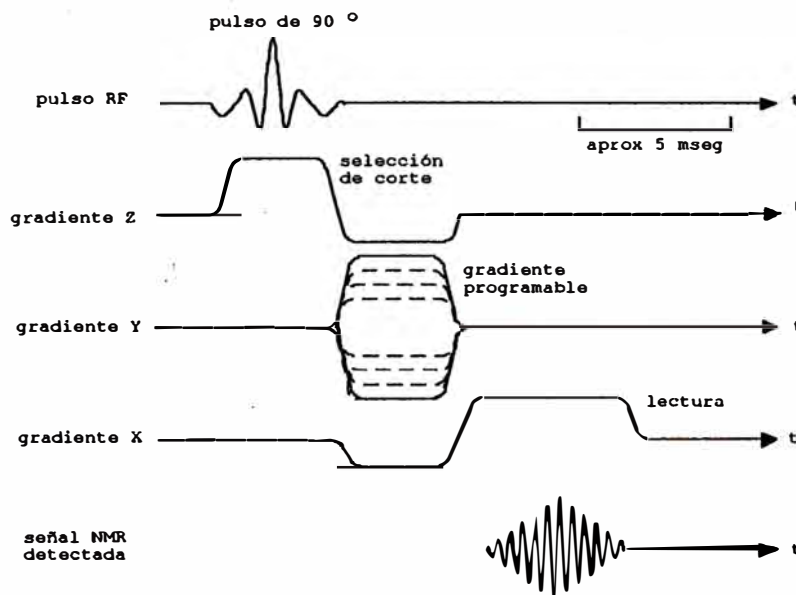


Figura 2.13. Aplicación de un gradiente de inversión de tiempo y aparición del "eco de gradiente".

Etapa 5. El nivel final de sofisticación es usar un pulso de 180° , para producir un spin-eco. El uso del spin-eco reenfoca la parte desenfocada causada por la inhomogeneidad del magneto antes del tiempo de adquisición de datos. Si los ecos de spin y de gradiente no coinciden, se introducen efectos de corrimiento químico. Notar que el signo del gradiente de inversión de tiempo es invertido para permitir el efecto del pulso de 180° .

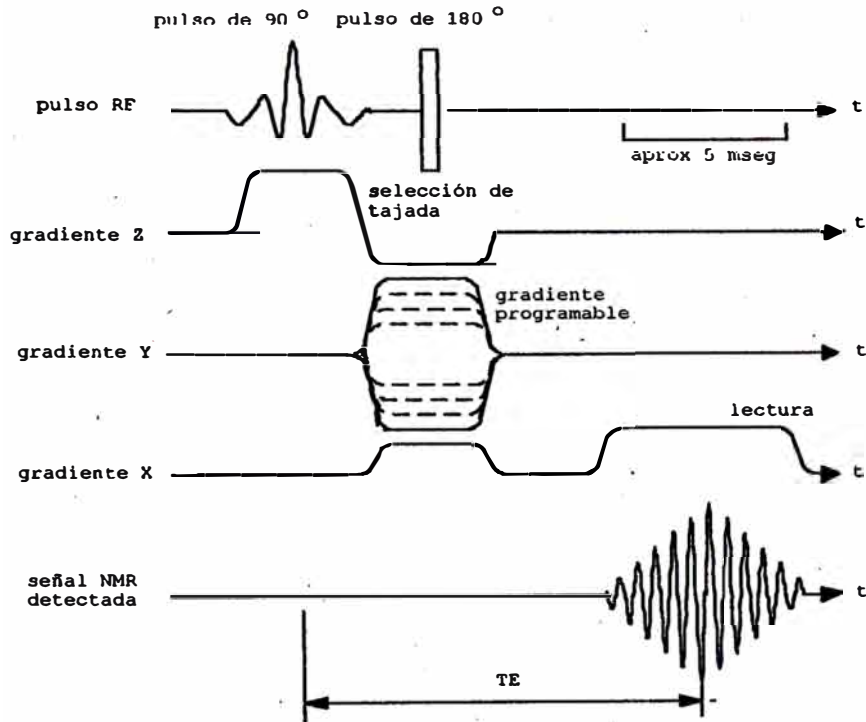


Figura 2.14. Aplicación de un pulso de 180° , el cual requiere producir magnetización transversal cero o reenfocamiento, para producir un spin-eco

CAPITULO III MAGNETOS DE CAMPO PRINCIPAL

3.1. Requerimientos de Magnetos para Imágenes y Espectroscopía

Los parámetros más importantes en el diseño de un magneto para imágenes (MRI) y espectroscopía (MRS) son:

- (i) Intensidad de Campo
- (ii) Homogeneidad de campo
- (iii) Estabilidad de campo
- (iv) Acceso a la región de homogeneidad
- (v) Campo magnético de dispersión.

Todos estos parámetros están inter-relacionados y gobiernan el costo y diseño de un sistema específico. Los requerimientos de magnetos se dan en la Tabla 3.1:

	<i>Imágenes</i>	<i>Espectroscopía</i>
<u>Intensidad de Campo (T)</u>	0.1-1.3	> 5
<u>Diám. de Volúmen Esférico de Homogeneidad (mm)</u>		
Sistema de cuerpo completo	500	100
Sistema de investigación	80-140	40-70
<u>Diámetro de Acceso (mm)</u>		
Sistema de cuerpo completo	1000	1000
Sistema de Investigación	200-500	200-500

Tabla 3.1. Requerimientos del Magneto

3.1.1. Intensidad de Campo

La abundancia natural de protones y su alto factor giromagnético significa que se pueden producir imágenes con campos moderadamente bajos de 0.1 a 0.5 Tesla . Para trabajar a campos mayores a 0.35 T, es casi siempre necesario emplear sistemas de magnetos superconductivos.

Los sistemas de espectroscopía, que requieren de campos altos para su operación óptima; trabajando con el mayor campo magnético posible producirán mejor resolución de las líneas espectrales.

3.1.2. Homogeneidad de Campo

Homogeneidad de un Campo magnético se define como la máxima desviación del campo en un volumen dado. La homogeneidad se mide evaluando el campo en un número de puntos a través del volumen, para encontrar los valores máximo y mínimo.

$$\text{Homogeneidad} = \frac{B_{max} - B_{min}}{B_{central}} \quad (3.1)$$

La homogeneidad de campo para un magneto de imágenes de todo el cuerpo sería de 40 partes por millón sobre un volumen esférico con un diámetro (d.s.v.) de 50 cm.

Mediciones de espectrometría son críticamente más dependientes de la resolución de la señal NMR. En este caso, el parámetro importante es el ancho de la señal NMR a la mitad de la altura total, que es *H.H.L.W.* (half-height line width), especificado sobre un volumen dado (ver figura 1.13).

$$H.H.L.W. = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (3.2)$$

Un requerimiento típico sería de 0.1 p.p.m. *H.H.L.W.* sobre un d.s.v. de 10 cm. en un sistema de cuerpo completo de 100 cm de calibre.

3.1.3. Estabilidad de Campo

Los rigurosos requerimientos de estabilidad pueden ser un problema en magnetos resistivos donde la potencia es disipada continuamente o también en un imán permanente donde las fluctuaciones de temperatura conducen a alteraciones de campo. En los sistemas superconductivos que operan en "modo persistente", la estabilidad de campo puede ser de menos de 0.1 p.p.m. por hora.

3.1.4. Acceso a la Región de Homogeneidad

Con el objeto de proveer suficiente acceso para un paciente, el alma del magneto deberá ser de por lo menos 750 mm. Bobinas adicionales de gradiente para el experimento de imágenes y bobinas correctoras para optimizar la homogeneidad del campo se colocan también dentro del alma del sistema, mostrado esquemáticamente en la Figura 3.1. Ya que estas bobinas restringen el acceso, el calibre del alojamiento del magneto debe ser por lo menos 1000 mm.

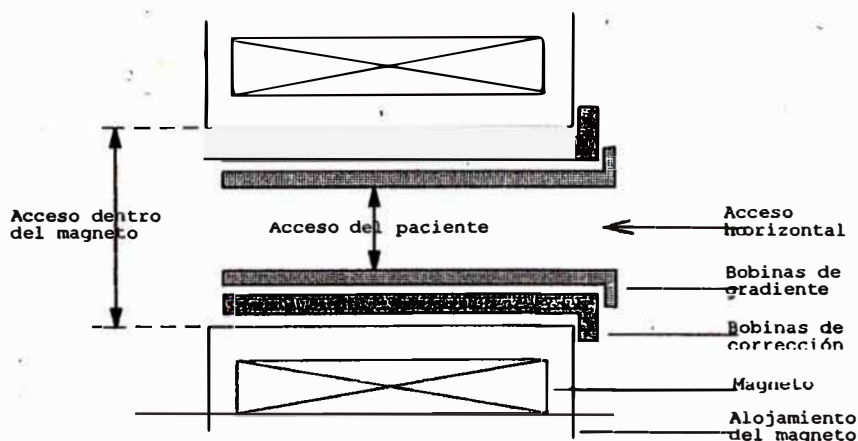


Figura 3.1. Esquema de un Sistema de Magnetos NMR

Inversamente, el acceso debería ser minimizado para reducir el diámetro del sistema del magneto y así se reduce el costo.

Requerimientos típicos de acceso para sistemas NMR están dados en la tabla 3.2.

<i>Tipo de Magneto</i>	<i>Acceso Libre (mm)</i>	<i>Acceso dentro del Alojamiento del Magneto (mm)</i>
Cuerpo Entero	750	1000
Pediátrico	390	500
Aplic. Investigación	310	400
	135	200

Tabla 3.2: Requerimientos de Acceso de Sistemas de Imágenes NMR

3.1.5. Campo de Dispersión

Cualquier sistema de magneto tendrá un campo de dispersión asociado que se extiende desde el alojamiento del magneto al medio ambiente. La extensión del campo de dispersión depende del campo central en el alma.

La Tabla 3.3 indica las distancias de ubicación de objetos para evitar cualquier detrimento en la performance del sistema desde el punto de vista de atracción de objetos. El campo de dispersión se puede reducir usando coraza de hierro como una pantalla remota o como una pantalla de flujo cerrado.

<i>Límite de Campo (Gauss)</i>	<i>Dispositivo</i>
5	Tubos de rayos catódicos Marca-pasos
10	Computadoras Relojes Tarjetas de crédito
20	Material magnético
50	Fuentes de potencia Espectrómetros

Tabla 3.3: Límites de campo para dispositivos cercanos a magnetos NMR de imágenes

3.2. Procedimiento Elemental para Diseñar un Magneto con Región de Homogeneidad Esférica

El procedimiento consiste en describir el campo central en términos de series. El sistema de coordenadas para tal sistema se muestra en la Figura 3.2, donde z representa el eje del magneto.

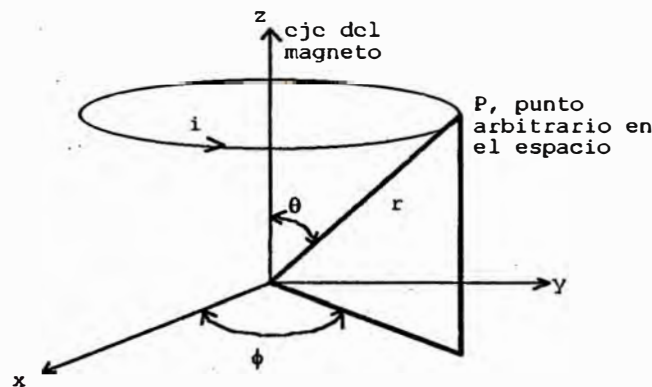


Figura 3.2. Sistema de coordenadas para la descripción matemática del campo magnético mostrando el lazo de corriente co-axial.

El campo en el eje de simetría $B(z)$, se puede expandir como una serie de potencias de z , medida desde el origen, el cual también se toma como el centro de la región de homogeneidad. El campo se expresa como:

$$B_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\frac{z}{r_0} \right]^n \quad (3.3)$$

donde r_0 se considera como la mitad de la longitud de la región de interés. Los coeficientes B_n son proporcionales a las corrientes o densidades de corriente. Como el sistema tiene simetría axial también es posible extender el análisis fuera del eje como:

$$B_z(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{r}{r_0} \right]^n B_n P_n(\cos \theta) \quad (3.4)$$

donde $P_n(\cos \theta)$ son polinomios de Legendre standard de grado n .

El principio de diseño de un magneto NMR de imágenes es presentar un juego de bobinas para las cuales la variación en el perfil axial del campo es pequeña con respecto a un centro en particular. En la práctica, esto significa diseñar un magneto tal que los B_n sean cero hasta un orden específico.

Los coeficientes B_n son evaluados usando el siguiente procedimiento: 1. Se obtiene una expresión elemental del campo en el eje z producido por un lazo ó aproximación de filamento, una aproximación de lámina delgada, o una computación exacta de bobina de sección rectangular portadores de corriente, para sus respectivas ubicaciones axial y radial. 2. La expresión se expande en serie de potencias como en la ecuación (3.3), para obtener los coeficientes B_n .

3.2.1. Representación Esquemática de los Perfiles de Campo Axial

Los detalles de este análisis no se extenderán en la presente discusión, ya que existen programas de computadora disponibles para el diseño de magnetos y la evaluación de los coeficientes B_n hasta de cuarto orden mostrados esquemáticamente en la figura 3.3 (donde $B_1 \propto z$, $B_2 \propto z^2$, $B_3 \propto z^3$ y $B_4 \propto z^4$).

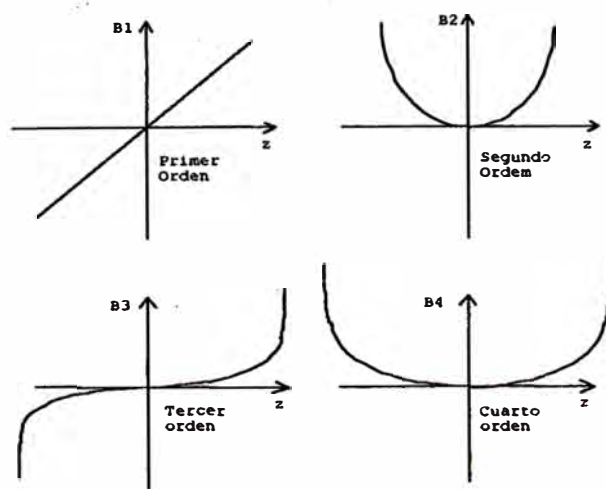


Fig. 3.3. Representación esquemática de los Perfiles de Campo Axial

3.2.2. Magnetos de dos, cuatro y seis bobinas

Como un ejemplo de un diseño simple de magneto, considerar el sistema mostrado en la figura 3.4. Este consiste de dos bobinas ubicadas a cada lado del plano medio a una posición axial, b , igual a la mitad del radio a de la bobina principal. De acuerdo al análisis descrito anteriormente se muestra que el coeficiente $B_2=0$, indicando que el campo magnético axial no varía con respecto a z^2 , lo que significa que no hay segundo orden axial. Ya que las bobinas son colocadas simétricamente con respecto al centro, variaciones de orden impar son cero. Sin embargo, la primera impureza dominante de dicho arreglo será B_4 , el cual da un perfil de campo mostrado en la figura 3.3. Los gradientes de orden alto, de orden mayor que 4, pueden producir un campo que no sería homogéneo sobre un gran volumen. Tal perfil sería desfavorable para un magneto de imágenes.

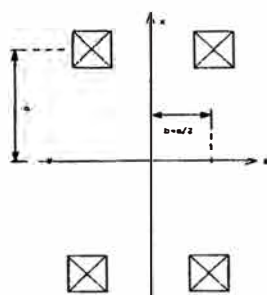


Figura 3.4. Magneto simple de dos bobinas

Por lo tanto, es necesario incluir más de dos bobinas como se muestra en la fig. 3.5.

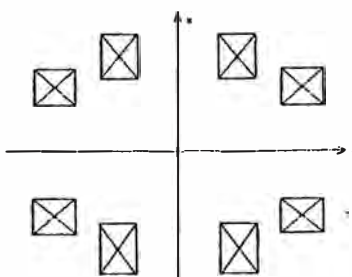


Figura 3.5. Diseño de Magneto simple de cuatro bobinas

De esta manera las bobinas exteriores pueden ser colocadas axialmente y radialmente para producir B_4 de signo opuesto al de las bobinas interiores. De ahí que, el cuarto orden del magneto combinado sería cero y el primer gradiente distinto de cero sería B_6 , de sexto orden. Es posible usar cuatro, seis, ocho o más sistemas de bobinas para eliminar gradientes de campo de cualquier orden. Un magneto para imágenes debe ser diseñado de manera tal que el primer orden distinto de cero sea ocho; tal magneto podría consistir de seis bobinas como se muestra en la figura 3.6.

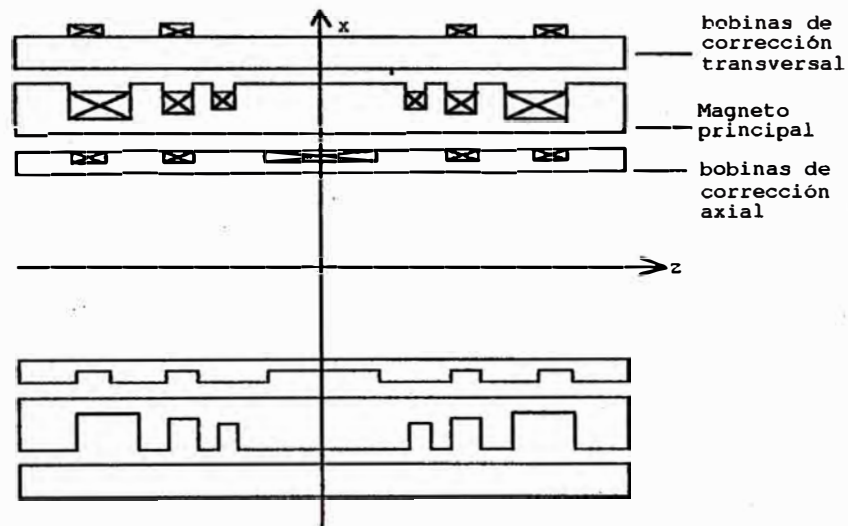


Figura 3.6. Magneto típico de seis bobinas para estudio de Imágenes

La discusión anterior ha asumido simetría axial y ha sido restringida a inhomogeneidades axiales. En la práctica el magneto no tendrá simetría axial y ello conducirá a gradientes transversales fuera de eje. La ecuación (3.4) puede ser extendida para describir el campo magnético en cualquier punto del espacio como:

$$B_z(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{r}{r_0} \right]^n \left\{ B_n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^m(\cos \theta) \left[C_n^m \cos(m\varphi) + S_n^m \sin(m\varphi) \right] \right\} \quad (3.5)$$

donde $P_n^m(\cos\theta)$ son Polinomios de Legendre asociados de grado n y orden m C_n^m y S_n^m son magnitudes de una distorsión de campo en particular para un radio r_0 . Esta expresión es una solución general de la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

Para el caso de $m=0$, la expresión se reduciría a la ecuación (3.4) dá alcance a soluciones de simetría axial. En el caso de $m \neq 0$, ó de simetría no-axial, se produce un gradiente de campo el cual tiene una variación con respecto a φ . La notación de gradientes transversales para algunas combinaciones de n y m estan en la Tabla 3.4.

3.2.3. Magnetos sin simetría axial - Gradientes axiales y transversales

C_n^m	$m=0$	1	2	3
n=0	Z ₀	-	-	-
1	Z ₁	X	-	-
2	Z ₂	ZX	X ² -Y ²	-
3	Z ₃	Z ² X	Z(X ² -Y ²)	X ³ -3XY ²
4	Z ₄	Z ³ X	Z ² (X ² -Y ²)	Z(X ³ -3XY ²)
S_n^m		$m=1$	2	3
n=0		-	-	-
1		Y	-	-
2		ZY	XY	-
3		Z ² Y	ZXY	Y ³ -3X ² Y
4		Z ³ Y	Z ² XY	Z(Y ³ -3X ² Y)

Tabla 3.4: Notación de gradientes axiales y transversales

En general, estas notaciones son etiquetas y, para la variación espacial de un gradiente específico es necesario referirse a la ecuación (3.3) descrita en coordenadas esféricas. Por ejemplo, un gradiente X tendría una variación $\cos \varphi$ y un gradiente Y tendría una variación $\sin \varphi$. En la práctica, sólo es necesario considerar gradientes fuera del eje hasta de tercer orden inclusive, para alcanzar la homogeneidad requerida.

La inhomogeneidad de campo puede ser generada por distintas fuentes; esto incluye devanados imperfectos y posicionamiento incorrecto (no-simétrico) de las bobinas debido a tolerancias mecánicas. Esta última, produce gradientes de orden impar tales como B_1 y B_3 como se muestra en la figura 3.3. Irregularidades de los devanados y bobinas no circulares producen gradientes transversales, que en algunos casos pueden ser minimizados por una conveniente colocación axial de las bobinas. En suma, el entorno o medio ambiente del magneto puede también generar distorsiones del campo central debido a la presencia de material magnético.

Bobinas energizadas independientemente son una aproximación más flexible. Las bobinas pueden clasificarse en dos tipos: axiales y transversales. Un gradiente axial produce gradientes como el descrito por la ecuación (3.3), y consiste de lazos co-axiales de corriente. Una bobina transversal producirá un gradiente de campo descrito por la ecuación (3.5), y consiste de una serie de bobinas tipo montura. Un sistema de bobinas de corrección se muestra esquemáticamente en la figura 3.7.

(a) bobinas de corrección axiales

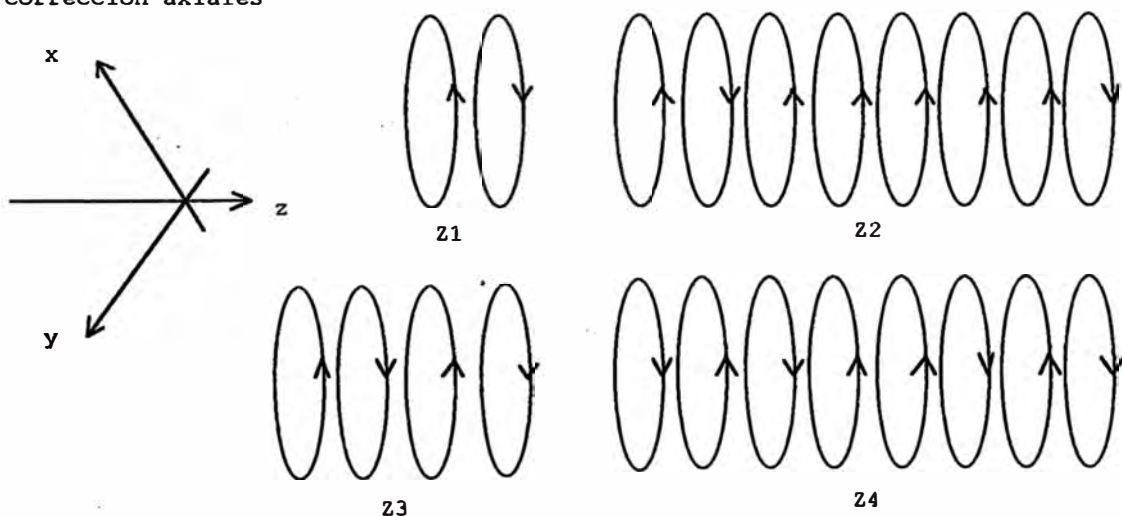


Figura 3.7 (a). Sistema de corrección axial típico donde se muestran las bobinas de gradiente de corrección de inhomogeneidades axiales de campo Z_1 , Z_2 , Z_3 , y Z_4 ;

(b) Bobinas correctoras transversales

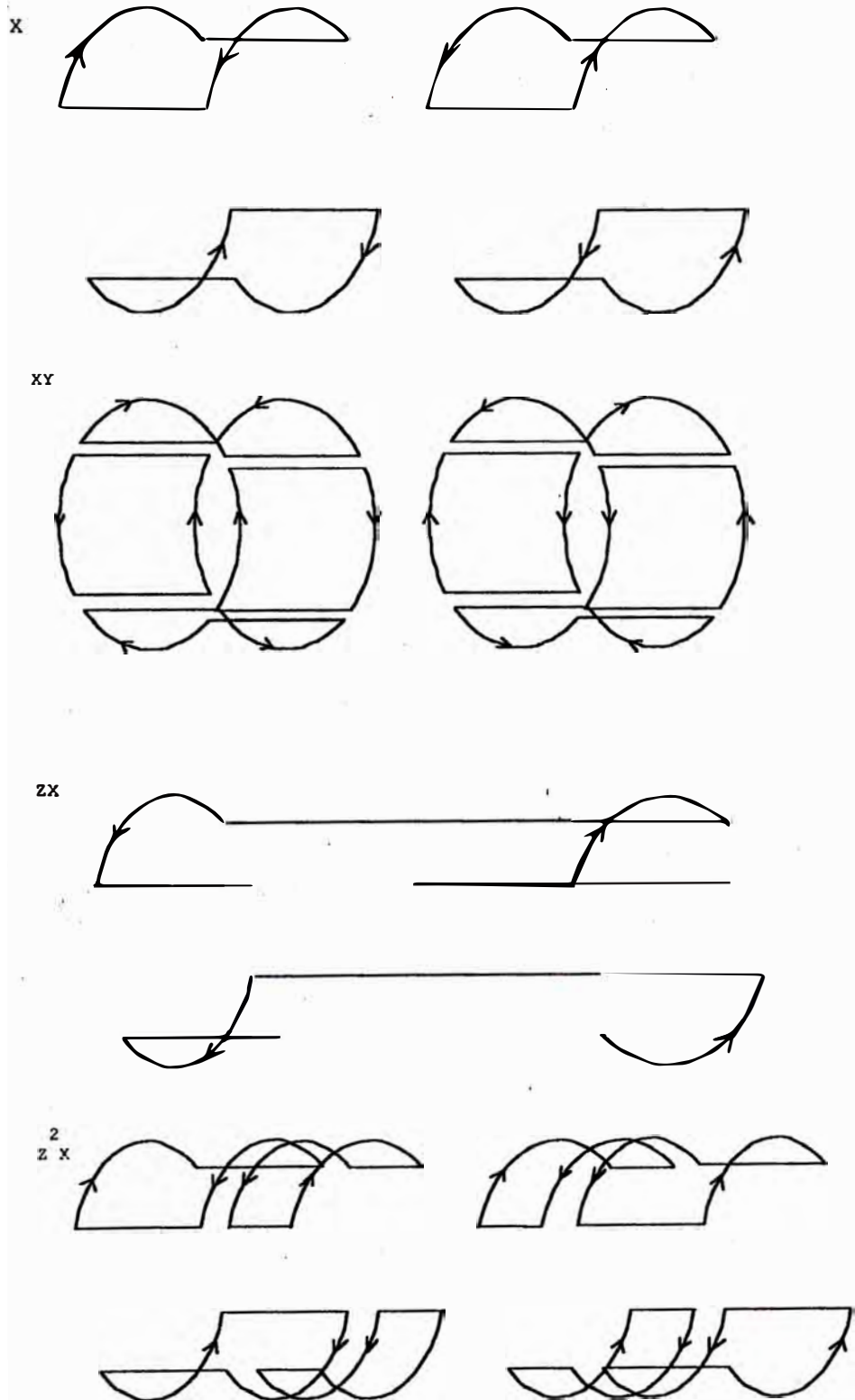


Figura 3.7 (b). Sistema de corrección transversal típico donde se muestra bobinas gradientes de corrección de inhomogeneidades transversales de campo X, XY, ZX y Z²X.

El objetivo en el diseño de un sistema de corrección es producir un juego de bobinas con el perfil de campo correcto e intensidad necesaria con la mínima impureza. Como ejemplo, considerar el diseño de una bobina de corrección para producir un gradiente Z_1 de primer orden. Esto se puede lograr usando el ejemplo discutido en la figura 3.4, pero con las bobinas en cada lado del plano medio portando corrientes opuestas. Este sistema produce el gradiente Z_1 más eficiente pero produce un gran contaminante Z_3 de tercer orden. Es posible diseñar un par de bobinas para producir Z_1 , sin Z_3 pero esta es una manera ineficiente de producir Z_1 . Para mejorar la eficiencia, se debe usar un sistema de bobinas mostrado en la figura 3.8.

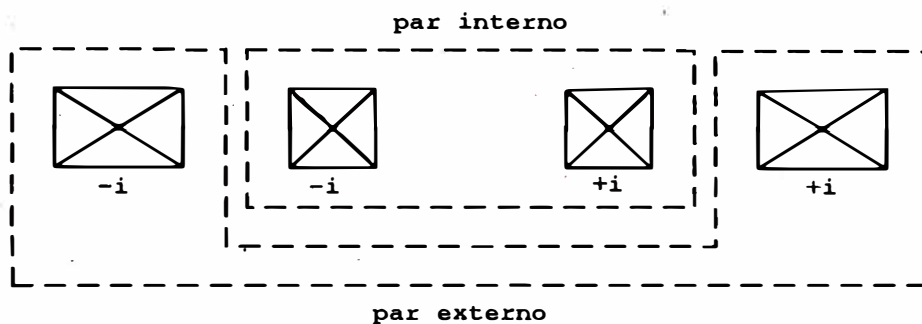


Figura 3.8. Sistema de corrección simple Z_1

En el diseño de bobinas axiales de corrección para magnetos de imágenes se deben minimizar los contaminantes de orden alto. Estas restricciones limitan usualmente las bobinas de corrección axial disponibles de cuarto y quinto orden.

En las bobinas transversales, los contaminantes son de gradientes transversales de mayor orden. Mediante una separación apropiada de los arcos portadores de corrientes opuestas, se minimizan dichos contaminantes. En un magneto de imágenes, bobinas de corrección transversales son disponibles hasta de tercer orden.

CAPITULO IV BOBINAS DE GRADIENTE DE CAMPO

La función que desarrollan las bobinas de gradientes es que proveen la codificación espacial de frecuencia requerida para las técnicas de estudio de Imágenes por NMR. Generalmente, los tres gradientes ortogonales son lineales, de manera que el espectro de frecuencia corresponde directamente a la posición espacial específica en una manera directa a través de la ecuación de Larmor: $\omega_i = \gamma B_i$.

4.1. Descripción matemática de los gradientes de campos

La interacción de campo del sistema gradiente spin se puede expresar en términos del vector G , el cual tiene tres componentes ortogonales independientes

$$G_x = \partial B_z / \partial x \qquad G_y = \partial B_z / \partial y, \qquad G_z = \partial B_z / \partial z.$$

Así, una combinación lineal de estas componentes permitirá un vector gradiente a ser establecido en cualquier dirección arbitraria de acuerdo a los requerimientos de orientación del plano de imágenes. Esta habilidad de seleccionar un plano electrónicamente y adquirir datos en cualquier dirección de lectura representa un aspecto característico del estudio de imágenes por NMR.

El campo magnético $B(\mathbf{r})$ en un punto \mathbf{r} de un cable desplazado \mathbf{r}_1 desde el origen, el cual porta una corriente I , está dado por la Ley de Biot-Savart (ec (4.1) y Figura 4.1):

$$B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \times d\mathbf{l} \quad (4.1)$$

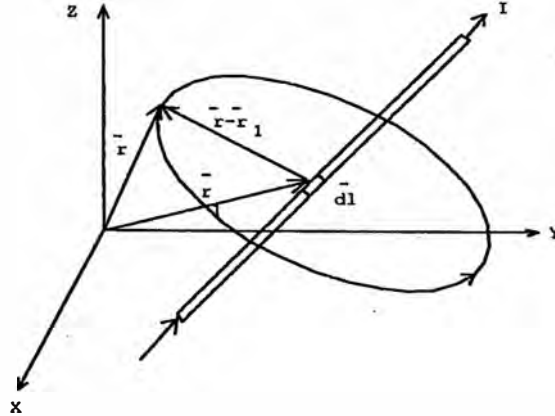


Fig. 4.1. Un esquema ilustrando el uso de la Ley de Biot-Savart para calcular el campo magnético en cualquier punto del espacio alrededor de un conductor portador de corriente.

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del espacio libre y $d\mathbf{l}$ es un elemento del cable. Las componentes de \mathbf{B} se pueden obtener por expansión del vector producto dado en ec.(4.2):

$$B_z(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int \frac{(x - x_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} dy - \int \frac{(y - y_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} dx \right] \quad (4.2)$$

El reto de diseñar bobinas de gradientes lineales es determinar la distribución espacial de los conductores asociados (cables) los cuales permiten el patrón del gradiente deseado a través del volumen de imágenes.

En general, es posible expandir cualquier función $f(x, y, z)$ la cual satisfaga la ecuación de Laplace $\nabla^2 f = 0$ en términos de un juego infinito de armónicos esféricos sólidos. Ya que $\nabla^2 B_z = 0$ en todos los puntos dentro del volumen de interés, uno puede escribir:

$$B_z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_{nm}^c r^n P_n^m(\cos\theta) \cos(m\varphi) + A_{nm}^s r^n P_n^m(\cos\theta) \sin(m\varphi) \right] \quad (4.3)$$

donde $P_n^m(\cos\theta)$ son los polinomios asociados de Legendre y A_{nm}^c y A_{nm}^s son constantes apropiadas determinadas por la forma de las bobinas y la intensidad de las corrientes en ellas. En el caso más importante en la consideración del diseño de bobinas de gradientes, los conductores portando corriente serán ubicados en un cilindro rodeando la región de imágenes. Bajo estas condiciones, los coeficientes generales se pueden dar por las expresiones simplificadas:

$$A_{nm}^c = \frac{\mu_0}{4\pi r_0^{n+2}} \iint \lambda_\varphi(\varphi_0, z_0) f_{nm}(z_0) \cos m\varphi_0 dA \quad (4.4)$$

$$A_{nm}^s = \frac{\mu_0}{4\pi r_0^{n+2}} \iint \lambda_\varphi(\varphi_0, z_0) f_{nm}(z_0) \sin m\varphi_0 dA \quad (4.5)$$

donde la ubicación normalizada del devanado a lo largo de la superficie del cilindro, es decir, su posición axial normalizada, es $Z_0 = z_0/r_0$ con el radio del cilindro r_0 y el elemento de área de superficie dado por $dA = r_0^2 d\varphi_0 dz_0$. En la mayoría de los casos, la densidad superficial de corriente, $\lambda_\varphi(\varphi_0, z_0)$ se puede expresar como el producto de dos funciones, una dependiendo sólo de φ_0 y otra dependiendo sólo de z_0 tal que:

$$\lambda_\varphi(\varphi_0, z_0) = c f_\varphi(\varphi_0) \sigma_\varphi(z_0) \quad (4.6)$$

donde c es una constante de proporcionalidad, $f_\varphi(\varphi_0)$ expresa la variación angular de la densidad superficial de corriente y $\sigma_\varphi(z_0)$ expresa la variación a lo largo del eje-z. La tarea del diseñador de bobinas es determinar las funciones de forma $f_\varphi(\varphi_0)$ y $\sigma_\varphi(z_0)$.

4.2. Bobinas axiales de gradiente Z

En general, un gradiente lineal z en una región definida se puede establecer mediante bobinas cilíndricamente simétricas devanadas en la superficie de un cilindro (con el eje del cilindro orientado a lo largo de la dirección- z del campo magnético) bajo la condición que la densidad de corriente es anti-simétrica. En este caso, la densidad de corriente superficial, la cual está en la dirección φ , está dada por la expresión simplificada:

$$\lambda_{\varphi} = c \sigma_{\varphi}(z_0) \quad (4.7)$$

con la condición de anti-simetría que $\sigma_{\varphi}(-z_0) = -\sigma_{\varphi}(z_0)$ y $c = Nd / r_0 w_{r_0}$ donde N es el número total de vueltas sin considerar el signo y r_0 es el radio del cilindro. El parámetro adimensional w_{r_0} involucra la función de forma a través de la relación:

$$w_{r_0} = \int_{-z_m}^{z_m} |\sigma_{\varphi}(z_0)| dz_0 \quad (4.8)$$

donde z_m está definida con respecto a la longitud total de la bobina, es decir, extensión en la dirección- z , $l_t = 2r_0 z_m$. Así, cuando la función de forma $\sigma_{\varphi}(z_0)$ (la cual especifica la densidad del devanado como una función de posición) y el radio son fijados, c es proporcional al número total de ampere-vueltas en la bobina. Para esta configuración el campo magnético producido por la bobina puede ser expresado como una expansión en armónicos esféricos sólidos con respecto al centro de la bobina involucrando sólo términos impares (los términos pares se cancelan por la geometría anti-simétrica).

$$B_z = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (4.9)$$

con los coeficientes de expansión dados por:

$$A_n = \frac{\mu_0 c}{2r_0^n} \int_{-z_m}^{z_m} \sigma_\varphi(z_0) f_n(z_0) dz_0 \quad (4.10)$$

$$= \frac{\mu_0 c \gamma_n}{2r_0^n} = \mu_0 N d \gamma_n (2r_0^{n+1} w_{r_0})^{-1}$$

donde $\gamma_n = \int_{-z_m}^{z_m} \sigma_\varphi(z_0) f_n(z_0) dz_0$ (4.11)

con $f_n(z_0) = P_{n+1}^1(\cos \theta_0) / (1 + z_0^2)^{(2n+3)/2}$ (4.12)

El objetivo es determinar la distribución de corriente $\sigma_\varphi(z_0)$ para un orden dado de homogeneidad, bajo la condición que la energía almacenada en la bobina es mínima.

La configuración de diseño más común para las bobinas de gradiente-z en aquellos sistemas donde el acceso del paciente es paralelo a la dirección del campo magnético principal involucra un par de bobinas de Maxwell. Estas consisten de dos bobinas achatadas circulares de cable, cada una de radio r_0 orientada paralela y coaxial a la otra con una separación de $\sqrt{3}r_0$. Cada una porta una corriente de igual magnitud pero opuesta en dirección como se muestra esquemáticamente en la Figura 4.2.

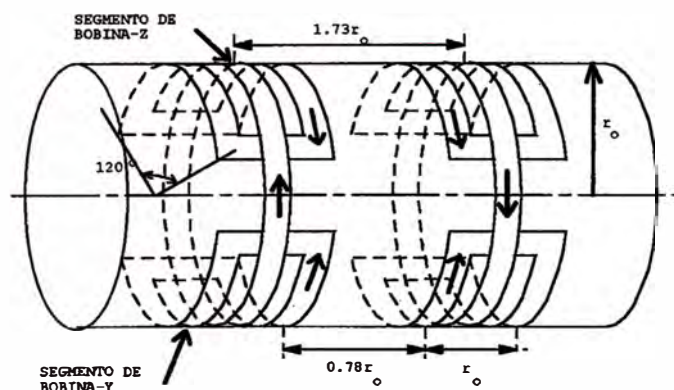


Fig.4.2. Una representación esquemática del par de bobinas de Maxwell (segmento de bobina-z indicado) y el juego de bobinas-y forma de montura (un segmento indicado) usadas para establecer el gradiente-z y gradiente-y respectivamente. El juego de bobinas-x forma de montura no se muestra; sin embargo, este estaría comprendido de 4 unidades idénticas a las bobinas-y pero orientadas a 90° con respecto a ellas. La dirección de las corrientes en cada bobina está indicada por las flechas

La configuración del par de Maxwell cancela los términos de tercer orden en la expansión tal que el término inicial contribuyente a la no-linealidad es A_5 . Para proveer un mayor grado de linealidad, es necesario cancelar los términos de mayor orden. Esto se puede lograr a través del uso de lazos de bobina adicionales. Varios diseños de dos pares de bobinas de Maxwell incrementan la eficiencia total permitiendo linealidad equivalente del campo con bobinas más pequeñas utilizando menos potencia eléctrica.

4.3. Bobinas transversales de gradientes X e Y

Para la producción de imágenes se requieren también los gradientes de campo independientes, ortogonales y lineales G_x y G_y en las direcciones x e y respectivamente. De las consideraciones de simetría, es claro que cualquier juego de bobinas diseñadas para proveer G_y puede ser rotada físicamente 90° para producir G_x . Por lo tanto, el siguiente análisis será con respecto a las bobinas de gradiente- y .

Un método para producir un gradiente transversal es a través del uso de cuatro conductores rectos y paralelos ubicados en las esquinas de un rectángulo portando cada uno una corriente de igual magnitud fluyendo en la misma dirección (ver fig 4.3).

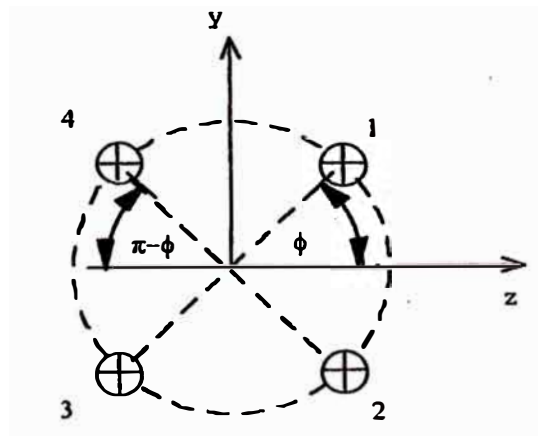


Fig.4.3. Configuración para producir un gradiente- y , G_y , involucrando cuatro conductores rectos.

Para la configuración de 4-conductores de la figura 4.3 en la cual todas las corrientes están en la misma dirección, las contribuciones por cada cable en el punto (y,z) se combinan tal que los términos de orden par se cancelan. El gradiente- y está dado como: $G_y = \partial B_z(y, z) / \partial y$ evaluado en $z=0$. El término de tercer orden, el cual representaría el primer término contaminante dominante y restringiría la región de linealidad, puede ser cero bajo la condición que $\phi = \pi(1/2 + m) / 4$ $m=0,1,2,3\dots$

Los dos ángulos de interés que cumplen este criterio son: $\phi = 22.5^\circ$ y $\phi = 67.5^\circ$. Si los cuatro conductores descansan sobre un círculo de radio r_0 con $\phi = 22.5^\circ$, el gradiente hasta de cuarto orden en el coeficiente de expansión sería;

$$G_y = \partial B(y, z) / \partial y = 1.414 \mu_0 I / \pi r_0^2$$

mientras que para $\phi = 67.5^\circ$ el gradiente sería;

$$G_y = \partial B(y, z) / \partial y = -1.414 \mu_0 I / \pi r_0^2$$

Estos resultados sugieren métodos de direccionar el requerimiento para proveer una ruta de retorno de corriente (lazo cerrado) para cualquier configuración real de bobina. En las figuras 4.4 y 4.5 se indican esquemáticamente dos arreglos posibles. De hecho, la ruta de retorno está supeditada a un radio mayor y contribuiría una componente de G_y con una magnitud menor. En la figura 4.4, esta contribución es negativa y la intensidad del gradiente neto se reduciría, mientras que en la figura 4.5, esta contribución es aditiva. En cualquier caso, las características de linealidad no se verían comprometidas porque, manteniendo las condiciones para los valores

específicos de ϕ , los conductores de retorno generan un gradiente de campo con términos contaminantes del mismo orden que aquellos producidos por los primeros cables. En suma, para la última opción, con los cuatro pares de conductores descansando en planos paralelos como se muestra en la figura 4.5, el campo producido por los cables que conectan los terminales (los cuales están orientados paralelos al eje-z) no contribuiría a G_y . Sin embargo, las dimensiones de la bobina requerida para sistemas de imágenes de cuerpo entero son muy grandes para ser prácticas para la última opción.

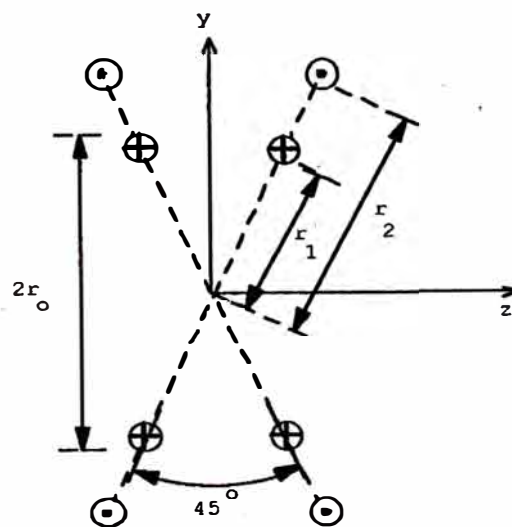


Fig. 4.4. Ruta de retorno la cual mantiene la pureza del gradiente de campo

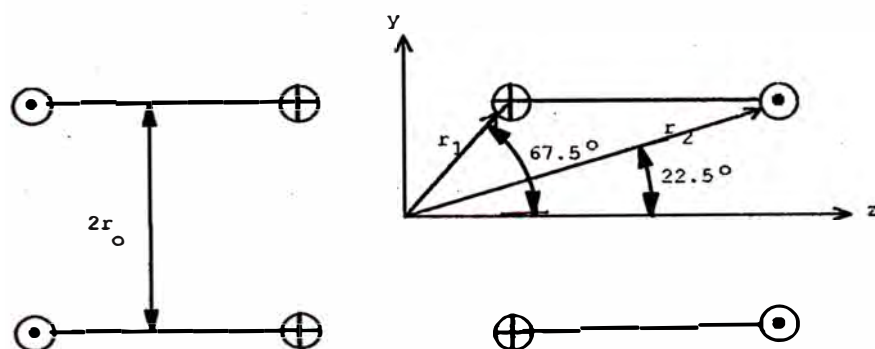


Fig. 4.5. Configuración alternativa para la ruta de retorno, la cual mantiene la pureza del gradiente del campo.

Para producir un campo transversal, las bobinas deben ser diseñadas tal que A_{11}^s sea el coeficiente predominante para el juego gradiente-y, así como A_{11}^c para el gradiente-x. La figura 4.6 muestra la configuración para una bobina simple hecha de dos arcos circulares opuestos uno que corre desde ϕ_0 a $\pi - \phi_0$ y el otro desde $\pi + \phi_0$ hasta $2\pi - \phi_0$

Con la corriente dirigida opuestamente en cada arco, la variación de la densidad superficial de corriente $f_\phi(\phi_0)$ es igual a 1 para ϕ_0 a $\pi - \phi_0$, -1 para $\pi + \phi_0$ hasta $2\pi - \phi_0$, y 0 en cualquier otro sitio.

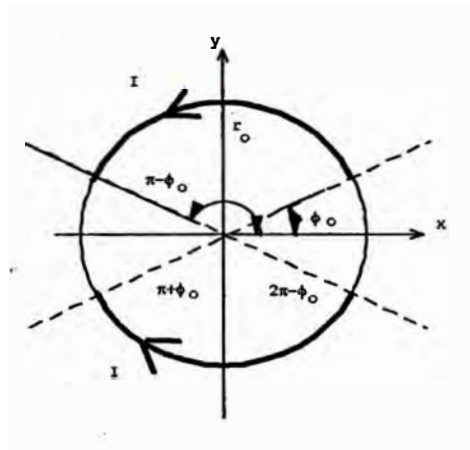


Fig.4.6. Dos arcos opuestos con corrientes en las direcciones mostradas. Esta configuración producirá un gradiente-y, G_y .

Un diseño común para bobinas de gradientes transversales utiliza arreglos de arcos circulares en la configuración de bobina forma de montura (figura 4.2). Se requieren cuatro arcos para proveer la simetría necesaria para establecer el gradiente transversal con cuatro arcos adicionales requeridos para las rutas de retorno de corriente. En suma, se requiere un total de ocho rutas interconectadas paralelas a la dirección-z, las cuales no contribuyen al campo B_z pero sí, incrementan sustancialmente la inductancia y resistencia de la bobina.

4.4. Circuitos electrónicos para manejar gradientes de campos estáticos, oscilatorios y pulsados

La electrónica requerida para energizar las bobinas de gradientes de un sistema NMR de imágenes depende de ciertos factores: protocolo de pulsos, tipo de reconstrucción de las imágenes (proyección o 2DFT), características eléctricas de las bobinas de gradiente, etc. En esta sección se hará una revisión breve a la evolución de la electrónica de bobinas de gradientes estáticos, oscilatorios y pulsados.

4.4.1. Gradientes estáticos

Los experimentos de imágenes en sus inicios se desarrollaban usando una secuencia de pulsos de saturación parcial, reconstrucción de la proyección y no se hacía selección de corte. Los gradientes necesarios para producir la proyección de un objeto en el plano x - y eran provistos por una corriente en estado estacionario en cada una de las bobinas de gradiente x e y . La magnitud de estas corrientes está simplemente relacionada con el ángulo de la proyección ϕ , por

$$\begin{aligned}
 I_x &= G \text{Sen} \phi \\
 e \quad I_y &= G \text{Cos} \phi
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

donde G es la intensidad del gradiente. Estas corrientes son independientes del tiempo y no necesitan ser cambiadas hasta que se requieran los datos de un nuevo ángulo de proyección. Los circuitos usados para proveer estas corrientes pueden ser tan simples como una fuente de potencia variable DC; sin embargo, el circuito mostrado en la figura 4.7 provee control de los gradientes de campos.

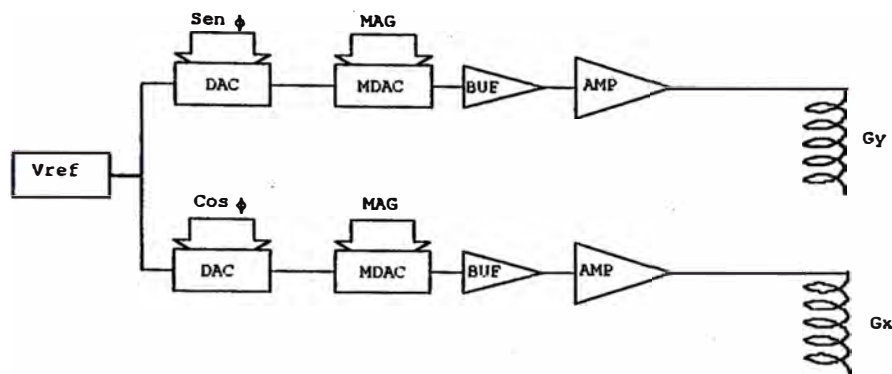


Fig. 4.7 Diagrama de bloque de un sistema utilizado para controlar gradientes estáticos de campo usados en reconstrucción de proyección. Los datos digitales que controlan los DACs determinan la dirección de la proyección y los datos que controlan los MDACs determinan la intensidad del gradiente.

Los dos convertidores digital-análogo (DAC) son requeridos con un voltaje de referencia estable y tablas que representan el Seno y Coseno del ángulo de proyección ϕ . La computadora u otra fuente lógica, es decir PROMs se usan para suministrar la información digital. Los DACs son seguidos por los Multiplicadores Convertidores Digital-Análogo (MDAC), los cuales proveen control directo de la magnitud del gradiente G. Las salidas de los MDACs son amortiguadas y ruteadas a través de amplificadores capaces de proveer de 2 a 10 amperios para un juego típico de bobinas forma de montura.

4.4.2. Gradientes oscilatorios

El primer método para localizar la señal NMR observada de un corte delgado dentro de un objeto tri-dimensional esta basado en el uso de gradientes oscilatorios.

Un ejemplo de la electrónica requerida para proveer tales gradientes oscilatorios de campo se muestra en la figura 4.8. Un circuito lógico, es decir, PROM ó RAM, es cargado con una forma de onda oscilatoria Seno (ó arbitraria). Estos datos son

alimentados a un único DAC, el cual provee la señal de audio frecuencia. Cambiando el rango al cual los datos son introducidos al reloj del DAC, se ajusta la frecuencia de la señal oscilatoria. La salida del DAC es ruteada a los MDACs bajo control separado de computadora. Las salidas son amortiguadas y amplificadas con la corriente de cada mitad de la bobina gradiente-z. Este arreglo permite seleccionar la magnitud de los gradientes así como la ubicación del plano de gradiente nulo ($z=z_0$).

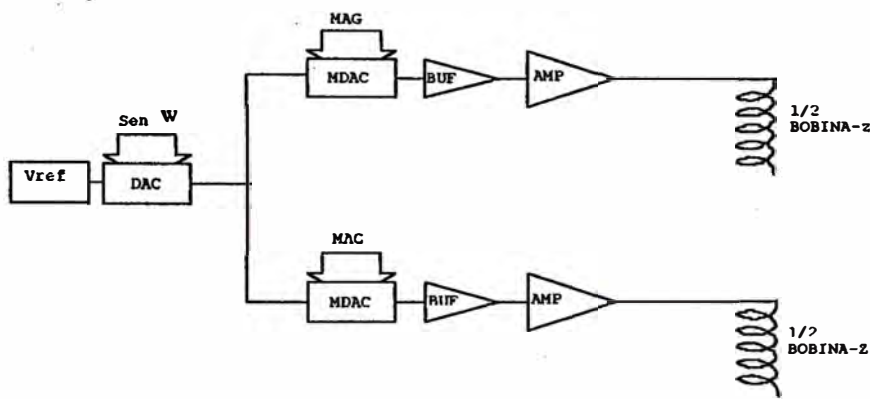


Fig. 4.8. Diagrama de bloque de un sistema usado para control de gradientes oscilatorios de campo los cuales pueden ser usados para selección de tajada. Los datos digitales y rango del reloj del DAC controla la forma y frecuencia de la oscilación temporal. Los datos que controla los MDACs determinan la intensidad (Magnitud) y la posición del plano de gradiente nulo.

4.4.3. Gradientes pulsados

Las formas más recientes de imágenes NMR hacen uso del fenómeno de spin-eco y dependen de gradientes pulsados de campos. Los gradientes pulsados de campos proveen la capacidad de selección de tajada y son necesarios también para preparar el sistema spin para la formación del eco.

Los primeros circuitos de gradientes pulsados de campos hacían uso de diseños de circuitos "sintonizados". Para manejar las bobinas de gradientes se usaba almacenaje de carga, componentes de pulsado y redes de formado del pulso. Esta aproximación

se usaba para evitar el costo de potencia alta y sistemas de amplificación lineal de amplio ancho de banda. Los sistemas modernos de imágenes NMR usan circuitos electrónicos de manejo de gradientes, los cuales completan el control digital de cada aspecto de la forma de onda de la corriente para las bobinas de gradiente. En la figura 4.9 se muestra un diagrama de bloque de un circuit típico.

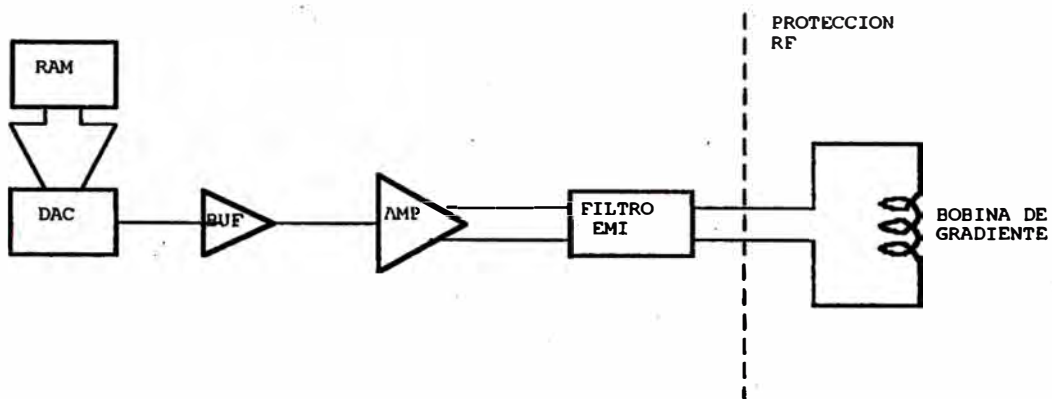


Fig. 4.12. Diagrama de bloque de un sistema usado para generar una forma de onda de corriente formada arbitrariamente en la bobina de gradiente. La información digital en el RAM junto con las características del pasa-bandas del AMP y filtros EMI determinan la respuesta temporal del gradiente de campo.

Un DAC se usa para generar el voltaje análogo correspondiente a una forma de onda arbitraria de corriente almacenada en RAM. Esta señal es amortiguada, amplificada y suministrada a la bobina de gradiente. Normalmente, se usan filtros de interferencia electro-magnética en el circuito tal que las señales de radio-frecuencia no son alimentadas a la vecindad inmediata del magneto.

CAPITULO V BOBINAS DE RADIOFRECUENCIA

Una bobina de Radiofrecuencia tiene dos funciones: la excitación de los spines nucleares y detección de la precesión nuclear resultante. Durante la excitación, la bobina de radiofrecuencia convierte la potencia RF en un campo magnético rotativo transversal B_1 , en el volúmen de imágenes. Para este modo de transmisión se necesita alta eficiencia que corresponde a B_1 máximo en el volúmen de la muestra para mínima potencia RF. Durante la recepción, la bobina de radiofrecuencia (y su pre-amplificador asociado) convierte la energía de precesión de la magnetización nuclear en una señal eléctrica para su posterior procesamiento. Alta eficiencia para este modo de operación de recepción corresponde a mínima degradación de la relación señal-ruido inherente al volúmen de la muestra. Una bobina bien diseñada puede ser altamente eficiente en ambos modos: transmisión y recepción.

5.1. Principios fundamentales de circuitos resonantes

El circuito serie RLC simple de la figura 5.1 puede servir como un circuito equivalente para la mayoría de las bobinas NMR de radiofrecuencia.

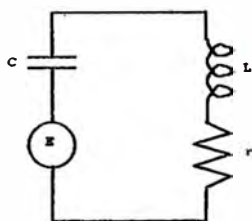


Figura 5.1. Circuito simple LCR

si se varía la frecuencia de la fuente de voltaje $E = E_0 e^{i\omega t}$, el pico máximo de corriente ocurre para

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.1)$$

previsto que $r \ll \omega L$. En resonancia, la energía es almacenada alternadamente como energía magnética en el inductor L y luego como energía electrostática en el capacitor C . Durante la transferencia de esta energía almacenada, alguna es disipada en el resistor r . El factor de calidad del circuito resonante es una medida de eficiencia de almacenaje de energía del circuito. Q se define como

$$Q = \text{Energía almacenada} / \text{Energía promedio disipada en un ciclo} \quad (5.2)$$

Q puede ser determinado midiendo la frecuencia resonante ω y el ancho de banda $\Delta\omega$:

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} \quad (5.3)$$

$$Q = \frac{1}{r\omega C} = \frac{\omega L}{r} \quad (5.4)$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (5.3) y (5.4) conduce a

$$r = \Delta\omega L \quad (5.5)$$

Si L es conocido, se puede sustituir la medición del ancho de banda por una medida más difícil de la pequeña resistencia r , dependiente de la frecuencia. Si L no es conocido, se puede deducir incrementando r por un incremento conocido δr y observando el cambio incremental en el ancho de banda $\delta\omega$:

$$L = \frac{\delta r}{\delta\omega} \quad (5.6)$$

5.2. Consideraciones señal-ruido

Un grupo de spines nucleares inducirá un voltaje en una bobina RF, el cual es proporcional a la frecuencia de precesión, al número de spines, al grado de polarización del sistema spin, a la intensidad de acoplamiento entre los núcleos y la bobina. El número de spines será proporcional al volumen de la muestra V_s . La polarización del sistema spin es proporcional al campo magnético estático B_0 , el cual también determina la frecuencia de precesión ω . El grado de acoplamiento entre los spines y la bobina es una función de la geometría, la cual es delineada por el Principio de Reciprocidad. Este establece que un dipolo magnético variando, induce un voltaje

$$\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot B_1) \quad (5.7)$$

donde B_1 es el campo magnético en la posición de m debido a una corriente unitaria en la bobina. Notar que sólo importa la componente de B_1 que es paralela a la componente de m precesando. La sensibilidad de la bobina es proporcional a $(B_1)_{xy}$, la componente de B_1 que es perpendicular a B_0 , el cual se toma usualmente a lo largo del eje-z. De ahí que la señal inducida en la bobina está dada por:

$$\text{Señal} \propto V_s \omega^2 (B_1)_{xy} \quad (5.8)$$

Esta señal se puede representar como una fuente de voltaje serie en el circuito de la fig.5.1.

El teorema de fluctuación-disipación indica que hay una relación directa entre la resistencia eléctrica y el ruido. Los movimientos de los portadores de carga activados térmicamente en medios disipativos producen campos eléctricos y magnéticos

aleatorios los cuales pueden ser detectados como ruido. Una resistencia r produce un voltaje eficaz de ruido V_n dado por:

$$V_n = \sqrt{4KTr\Delta f} \quad (5.9)$$

donde K es la constante de Boltzman, T es la temperatura absoluta de la resistencia, y Δf es el ancho de banda establecido por el sistema de adquisición de datos. Para cada circuito LCR, se debería incluir en el circuito de la fig. 5.1 otra fuente de voltaje en serie con magnitud dada por la ecuación (5.9) para explicar el voltaje de ruido generado por r .

Las ecuaciones (5.8) y (5.9) se pueden combinar para obtener una expresión para la relación señal ruido (SNR).

$$SNR \propto \frac{V_s \omega^2 (B_1)_{xy}}{\sqrt{r}} \quad (5.10)$$

Para el caso especial de pequeñas bobinas solenoidales usadas en los primeros espectrómetros NMR, la ecuación (5.10) se convierte:

$$SNR = n\omega^{3/2} Q^{1/2} V_c^{1/2} \quad (5.11)$$

donde V_c es el volumen del solenoide y n es el *factor de llenado* definido como la relación de energía magnética de RF almacenada en el volumen de la muestra con la energía magnética total almacenada por la bobina. Para espectroscopía convencional, uno desea una bobina de alto Q con un buen factor de llenado para un volumen de muestra tan grande como para encajar lo mejor posible en la región de homogeneidad del magneto.

5.3. Consideraciones de diseño de bobinas RF

Los requerimientos de diseño de bobinas RF en un sistema NMR de imágenes son:

1. La bobina RF debe resonar a la frecuencia de operación deseada,
2. Ser lo suficientemente grande como para acomodar el volumen de imágenes,
3. Producir un campo B_1 homogéneo,
4. Tener un buen factor de llenado,
5. Tener pérdidas mínimas,
6. Ser capaz de soportar los voltajes aplicados,
7. Producir campos eléctricos mínimos,
8. Tener mínima interacción con el resto del sistema,
9. Permitir una excitación y recepción en cuadratura.

5.3.1. Volumen de la bobina y su frecuencia de resonancia

Si una bobina solenoidal simple de múltiples vueltas es aumentada en su tamaño, su inductancia se incrementará proporcionalmente a su dimensión lineal como el cuadrado de su número de vueltas.

Desafortunadamente, a medida que se disminuye el número de vueltas, también sufre la homogeneidad del campo B_1 . Así, a altas frecuencias es conceptualmente útil pensar en términos de resonadores de RF en vez de bobinas de RF.

5.3.2. Diseño de resonadores de alta frecuencia

El diseño de resonadores de alta frecuencia requiere reducción de la inductancia y de la capacitancia de pérdida. El usar un conductor grueso en lugar de múltiples vueltas de un conductor discreto, permite una densidad de corriente más baja la cual corresponde a una inductancia menor. Esto se verá en detalle en la sección 5.4.2.

5.3.3. Circuitos tanque y sus impedancias de resonancia

La mayoría de experimentos de resonancia usan una bobina para la muestra usualmente hecha de manera que forma parte de un circuito resonante (tanque). El circuito tanque es necesario para emparejar o igualar la impedancia de la bobina a la de los dispositivos electrónicos (generalmente estandarizados a 50 ohmios). En esta sección se verán algunos circuitos tanque básicos y transformaciones de impedancia.

5.3.3.1. Circuito resonante paralelo : como se ilustra en la figura 5.2.

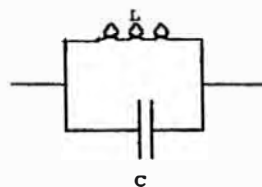


Figura 5.2. Circuito tanque paralelo

La bobina con inductancia L tiene reactancia compleja $i\omega L$ mientras que el capacitor sintonizador con capacitancia C tiene reactancia compleja $-i/\omega C$, cuando ellas están sujetas a la frecuencia angular de RF ω (la cual es 2π veces la frecuencia). La reactancia total de L y C en paralelo esta dada por

$$\left(\frac{1}{i\omega L} + i\omega C \right)^{-1} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (5.12)$$

la cual se convierte en infinito cuando $\omega^2 LC$ es igual a 1 (condición de resonancia).

Si la bobina tiene una pequeña resistencia r asociada con ella, la impedancia (la cual es el efecto de la reactancia y la resistencia real) será

$$\left(\frac{1}{i\omega L + r} + i\omega C \right)^{-1} = \frac{r - i\omega L(1 - \omega^2 CL - r^2 C / L)^{-1}}{r^2 - \omega^2 L^2} \quad (5.13)$$

luego la condición de resonancia (definida como la condición requerida para hacer real la impedancia) es

$$1 - \omega^2 CL - r^2 C / L = 0 \quad (5.14)$$

y la impedancia a resonancia es $(r^2 - \omega^2 L^2) / r$. Para bobinas ordinarias $\omega L \gg r$ (por ejemplo a $f=15 \text{ MHz}$ y $L=1 \mu\text{H}$, $\omega L=2\pi fL \cong 100 \Omega$, mientras que $r \approx 1 \Omega$) tal que la impedancia es aproximadamente $(\omega L)^2 / r$ la cual todavía es muy grande, aunque no infinita. Es conveniente re-escribir esta impedancia en términos de la ec. (5.4) $Q = \omega L / r$, el cual se conoce como el factor de calidad.

Luego, la impedancia es $Q\omega L$ y el efecto de hacer la bobina parte del circuito tanque es multiplicar la magnitud de su impedancia por $Q \gg 1$. Así, un circuito resonante paralelo es un circuito tanque de alta impedancia.

La impedancia a resonancia se puede cambiar cambiando la combinación de L-C mientras satisfagan la condición de resonancia. Por lo tanto, un circuito resonante tanque paralelo puede igualar la impedancia de la bobina con la del resto del circuito con sólo un elemento adicional, llámese capacitor de “encaje”.

5.3.3.2. Circuito resonante serie: Una bobina en un circuito tanque resonante serie (fig. 5.3) tiene la ventaja que se puede acomodar en una ubicación remota.

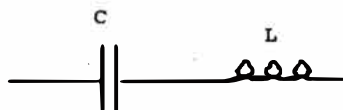


Fig.3. Circuito tanque resonante serie

A diferencia del circuito resonante paralelo discutido arriba, el circuito tanque serie presenta una baja impedancia al mundo exterior.

La baja impedancia de un circuito tanque serie sigue del hecho que las reactancias inductivas y capacitivas $i\omega L$ y $-i/\omega C$ tienen signos opuestos, lo cual significa que una corriente a través de L y C dá alcance a caídas de voltaje opuestos por la Ley de Ohm. Los voltajes son iguales y opuestos en resonancia en un circuito tanque ideal resultando en impedancia cero. Para un circuito tanque de resonancia real las pérdidas se pueden representar por una resistencia serie la cual debe ser la impedancia del circuito tanque en resonancia. Esta conclusión intuitiva se puede confirmar por las reglas de impedancias en serie, tal que la impedancia es $i\omega L + (1/i\omega C) + r$ (5.15)

La condición de resonancia es $i\omega L + (1/i\omega C) = 0$ ó $\omega^2 LC = 1$, una expresión familiar, la impedancia a resonancia es r .

El circuito tanque serie requiere circuitería adicional para alcanzar la impedancia “encajada” para un pre-amplificador con una entrada de 50 ohmios.

5.3.4. Reducción de la inductancia

Minimizar la inductancia tiene otra ventaja: la de permitir frecuencias de resonancia mayores. A frecuencias altas, los campos eléctricos se pueden reducir usando simetría de bobina para introducir planos de tierra virtual (figura 5.4)

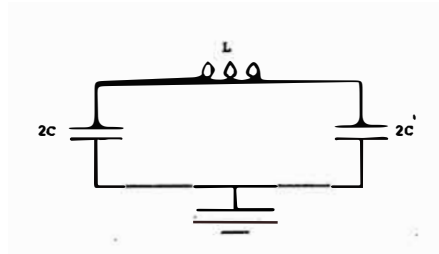


Figura 5.4. Circuito balanceado

tiene una tierra virtual en el centro de la bobina. El voltaje en la bobina con respecto a tierra es la mitad de lo que sería si un terminal de la bobina estuviera a tierra.

Al bajar la inductancia disminuye el voltaje desarrollado durante el pulso de transmisión, las inductancias mayores producen voltajes mayores los cuales pueden conducir a descargas de corona. Por otro lado, también se reducen los campos eléctricos de dispersión.

5.3.5. Excitación y recepción en cuadratura

El resonador debe tener dos modos de operación geoméricamente y eléctricamente ortogonales sintonizados a la misma frecuencia resonante. Al excitar los dos modos con igual magnitudes pero con las fases que difieran por 90° , desarrolla una magnitud constante B_1 rotando en la misma dirección como la precesión spín. Esto requiere como mucho la mitad de potencia de RF para generar tal campo B_1 rotativo comparado al más convencional campo oscilatorio lineal B_1 . La señal recibida en cada uno de los dos modos resonantes se puede sumar después del corrimiento de 90° en la fase de un canal.

5.3.6. Homogeneidad de Campo axial y transversal B_1

El campo B_1 puede ser paralelo o transversal al eje del cilindro. El campo axial de RF es útil en magnetos de núcleo de hierro ó algunos magnetos de núcleo de aire, los cuales producen un campo B_0 transversal. El campo transversal B_1 es aplicable a los magnetos comunes de solenoide.

Se puede generar un campo axial perfectamente homogéneo en un cilindro infinitamente largo, con una densidad superficial de corriente uniforme dirigida alrededor del cilindro. Esto corresponde a un solenoide infinito.

Se puede generar un campo transversal perfectamente homogéneo en un cilindro infinitamente largo por una densidad superficial de corriente paralela al eje del cilindro.

5.4. Ejemplos de diseño de bobinas de radiofrecuencia

En esta sección se describe un número de diseños de bobinas, las cuales son usadas corrientemente para imágenes de cuerpo completo o de la cabeza.

5.4.1. El solenoide de múltiples vueltas

Una buena aproximación a la distribución de corriente ideal requerida para un campo de RF axial es un solenoide largo. Hoult (5) ha sugerido que la longitud del solenoide óptimo para imágenes debería ser de alrededor del 80% del diámetro de la bobina. El también encontró que el espacio entre vueltas adyacentes debe ser igual a aproximadamente la mitad del diámetro del alambre de cobre usado para devanarla. La frecuencia de operación del solenoide de múltiples vueltas es limitada por su alta inductancia y capacitancia de pérdida. Cook y Lowe (6) sugieren una modificación, la cual permite que el solenoide opere a mucho más altas frecuencias. Ellos insertan un capacitor en serie entre cada vuelta de un solenoide de múltiples vueltas. Cada capacitor cancela la reactancia inductiva de una vuelta del solenoide. Por ejemplo, un solenoide de N vueltas con inductancia L puede requerir un capacitor muy pequeño para resonar a alta frecuencia $\omega = 1 / \sqrt{LC}$. En vez de un único capacitor pequeño, se usan N capacitores de magnitud NC ; $N-1$ de ellos se insertan entre las vueltas de un solenoide y el último se conecta entre los terminales del inductor. La inductancia neta de la bobina compuesta parece ser L/N ya que esta resuena con un capacitor externo igual a NC .

5.4.2. El solenoide de una sola vuelta

Un modo alternativo de reducir la inductancia de un solenoide es devanar una sola vuelta de una ancha lámina de conductor. La homogeneidad es mantenida haciendo el

ancho de la lámina conductora igual a la longitud deseada del solenoide. Esta forma un "tubo de flujo" el cual canaliza el flujo magnético en un final del cilindro y fuera del otro, porque la lámina es opaca al flujo de RF. Para mantener la distribución de corriente y la correspondiente homogeneidad de campo y baja inductancia, el capacitor de sintonizado debe estar distribuído balanceadamente a lo largo del ancho de la lámina.

La figura 5.5 muestra cómo la lámina conductora puede ser extendida para formar el capacitor.

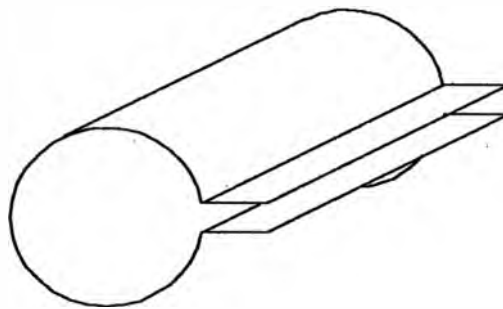


Figura 5.5. Solenoide de una sola vuelta

Existe un número de dispositivos resonantes para producir campos RF transversales en un cilindro. Se considerarán varios en términos de cuan bien ellos se aproximan a la distribución superficial de corriente promediada sinusoidalmente. Se tratará el caso donde la densidad de corriente es proporcional a $\text{Sen } \phi$. Si $\phi = 0$ corresponde al eje-x, luego el campo transversal generado es paralelo al eje-x. La aproximación más simple a $\text{Sen } \phi$ es un par de cables corriendo en la superficie paralela al eje-z a $\phi = 90^\circ$ y a $\phi = 270^\circ$ (arreglo de dos puntos vistos desde arriba). La figura 5.6 muestra esta distribución superficial de corriente y la correspondiente bobina.

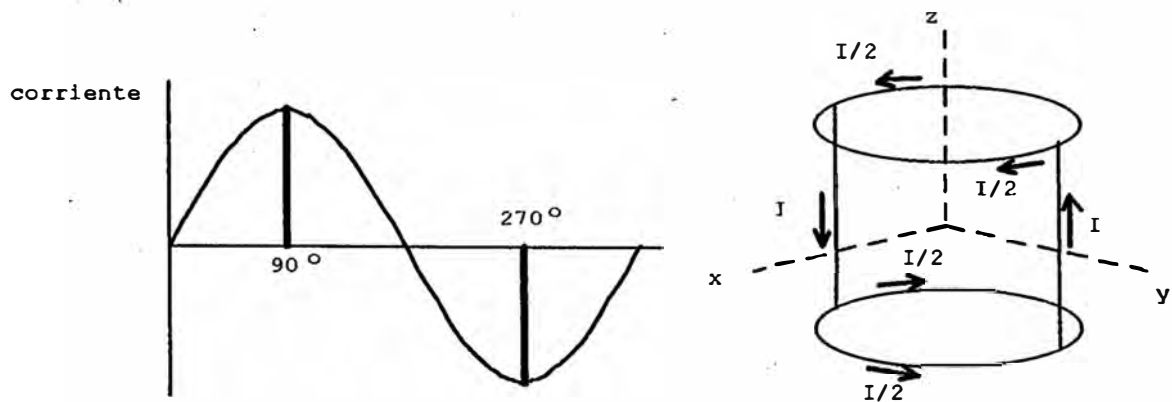


Fig. 5.6. Cuatro puntos encajados a una distribución de corriente sinusoidal

Los dos anillos terminales completan la ruta de corriente en una manera simétrica, la cual permite acceder a lo largo del eje cilíndrico. Esto también podría considerarse un *arreglo de cuatro puntos* encajados a $\text{Sen } \phi$ donde las corrientes cero a $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 180^\circ$, no requieren cables. La siguiente aproximación más simple a $\text{Sen } \phi$ es un *arreglo de seis puntos* mostrados en la figura 5.7.

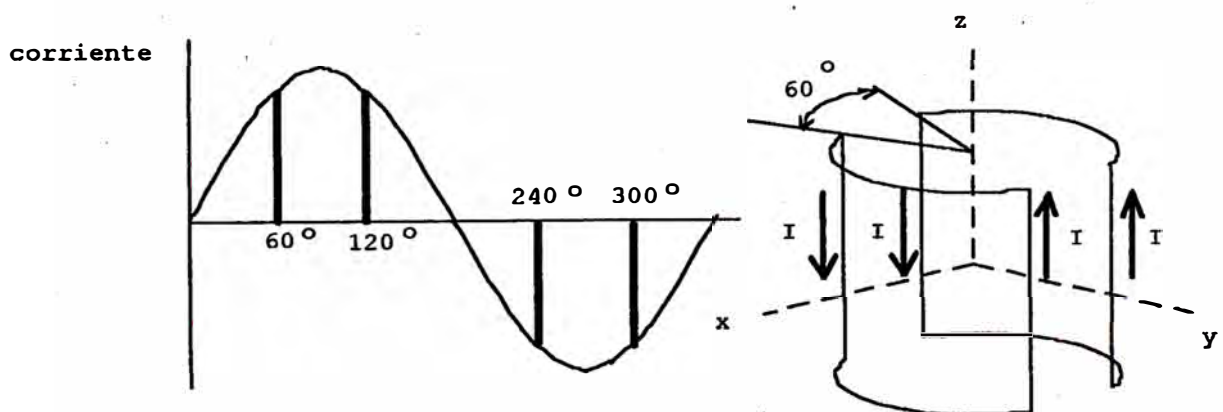


Figura 5.7. Distribución de corriente de una bobina forma de montura

Esta es una configuración de *bobina forma de montura* a $\phi = 60^\circ$ y $\phi = 120^\circ$ así como dos corrientes iguales negativas a $\phi = 240^\circ$ y $\phi = 300^\circ$. Los cables a $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 180^\circ$ y las partes del anillo terminal pueden ser omitidos porque ellos no portan corriente. La inductancia de la bobina forma de montura se puede reducir conectando ambas vueltas en paralelo y ensanchando ambos conductores hasta que se confundan a lo largo de $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 180^\circ$. En el límite de conductores muy gruesos, la bobina forma de montura se reduce topológicamente a la bobina equivalente de una sola vuelta de la figura 5.6. *La bobina de Alderman y Grant* (7) determina las ubicaciones preferidas para la capacitancia en la bobina de una sola vuelta de la figura 5.6. Asumiendo que un capacitor C sintoniza la bobina cuando está ubicado en el lado recto a $\phi = 90^\circ$, ellos encontraron que podían reemplazarlo con capacitores iguales a C a $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 180^\circ$ en cada uno de los dos anillos terminales (ver figura 5.8).

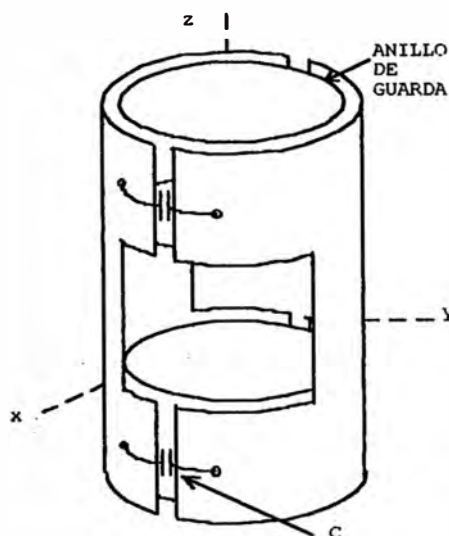


Figura 5.8. Bobina de Alderman y Grant

Los centros de estos cuatro capacitores definen el plano de tierra virtual, el plano x-z. Para proteger la muestra de los campos eléctricos desarrollados en la vecindad de los capacitores, ellos agregaron un anillo de guarda dentro de cada uno de los dos anillos terminales. Los anillos de guarda flotan con un potencial de tierra a $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 180^\circ$ y desarrollan potenciales mucho más pequeños que la caída de voltaje a través de los capacitores. El plano medio transversal ($z=0$) es un plano espejo de simetría, el cual implica que esté también a una tierra virtual. De esta manera, el volúmen de la muestra es expuesto a un campo magnético de dispersión reducido. Esta estructura, intentada originalmente para espectroscopía a alta frecuencia, ha sido extendida para estudio de imágenes de la cabeza a 64 MHz por *Bottomley* (8).

El diseño de *Alderman y Grant* está cercanamente relacionado al tubo resonador ranurado de *Schneider y Dullenkopf* (9). Se considera una línea de transmisión hecha de dos conductores paralelos de longitud l separados por un espacio de aire. Esta línea tiene una onda resonante siempre que l sea igual a un número entero de veces la mitad de la longitud de onda. Para la resonancia de la mitad de longitud de onda, hay altos voltajes a cada final donde se almacena la energía electrostática en la capacitancia entre los conductores y en el medio se producen corrientes altas donde se almacena la energía magnética entre las líneas. *Schneider y Dullenkopf* hicieron su línea de transmisión cortando una ranura a lo largo de ambos lados de un tubo conductor. Ellos encerraron la línea de transmisión del tubo ranurado en un escudo cilíndrico. Ellos ajustaron la apertura del ángulo de las ranuras ϕ y la relación entre el

radio del escudo y el radio de la línea de transmisión b/a para optimizar la homogeneidad RF de campo magnético (figura 5.9).

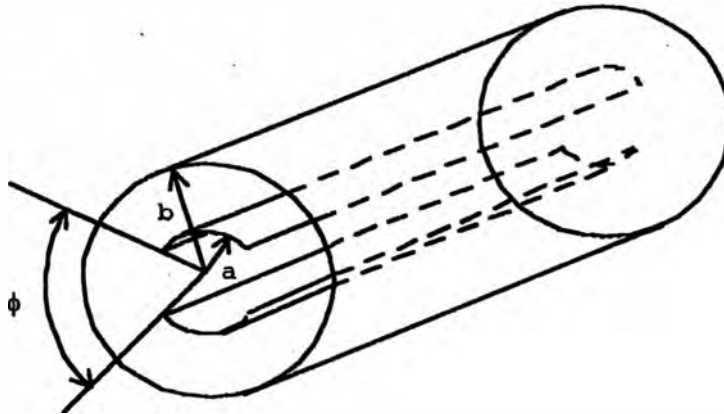


Figura 5.9. Tubo resonador ranurado

El resonador de tubo ranurado desarrolla una distribución de corriente, la cual se dispara cerca a los bordes de los conductores adyacentes a las ranuras. Esto reproduce la distribución de corriente de los cuatro cables de la bobina forma de montura de la figura 5.7. Pero existe una importante diferencia. Las hojas conductoras del resonador de tubo ranurado son opacas al campo de RF y divergen todo el flujo a través de las dos ranuras. De ahí que, el ángulo ϕ de apertura ideal de ranura es significativamente diferente del ángulo de 120° encontrado en la bobina de montura. Una densidad superficial de corriente ponderada sinusoidalmente produce una óptima homogeneidad de campo sólo si la superficie del cilindro no sólo conduce corriente sino que también es transparente al flujo magnético de RF. Tal superficie puede ser aproximada por un número grande de conductores paralelos separados aparte para permitir que el flujo pase entre ellos. Para mejorar la aproximación de bobina de montura a la distribución ideal de corriente con más conductores, requiere un medio

de desarrollar corrientes desiguales, ponderadas sinusoidalmente en conductores adyacentes (figura 5.10).

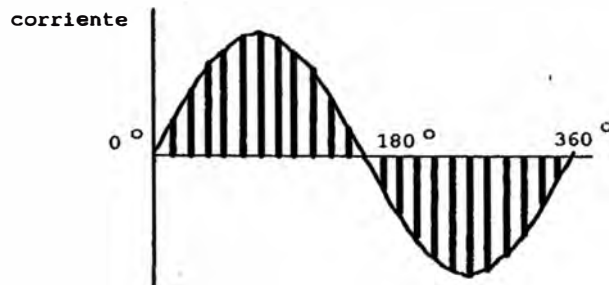


Figura 5.10. Arreglo de múltiples puntos encajados a una distribución de corriente sinusoidal

Se ha aplicado la línea de transmisión resonante en una manera diferente para generar una corriente superficial sinusoidal. Considerar una línea de transmisión hecha de dos cables paralelos, cada uno de los cuales formado en un círculo cerrado (fig 5.11).

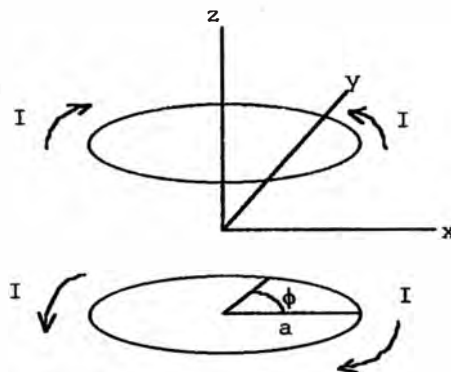


Figura 5.11. Línea de transmisión de lazo cerrado

Tal línea de transmisión cerrada en sí misma puede soportar ondas de resonancia permanente, consistente de un número entero de longitudes de onda. Para la resonancia de una sola longitud de onda, si el voltaje es proporcional a $\text{Sen } \phi$, luego

la corriente es proporcional a $\cos\phi$ en el círculo superior y a $-\cos\phi$ en el círculo inferior. Esta corriente tiende a producir un campo transversal a lo largo del eje-x. A 64 MHz (1.5 T), el diámetro del círculo sería alrededor 1.5 m, el cual es demasiado largo para una bobina para cuerpo completo y la cabeza. Si acortamos la longitud de onda resonante agregando muchos capacitores espaciados equidistantes e iguales entre las dos líneas de la línea de transmisión. Este resonador se conoce con el nombre de "jaula" (figura 5.12.)



Figura 5.12. Resonador pasa-bajos tipo "jaula"

La línea de transmisión forma los dos anillos terminales con un diferencia de voltaje a través de los capacitores, proporcional a $\sin\phi$. De ahí que, la corriente en los capacitores también es proporcional a $\sin\phi$. Los terminales largos de los capacitores portan la densidad superficial de corriente deseada. Este circuito puede ser considerado como un **filtro pasa-bajos** de N segmentos. Cada segmento produce un corrimiento de fase de $2\pi N$ en resonancia.

Existe también la versión de **filtro pasa-altos** del resonador tipo "jaula", en el cual los capacitores están espaciados de manera pareja alrededor de ambos anillos terminales y los segmentos rectos entre los anillos terminales son puramente inductivos (figura 5.13)

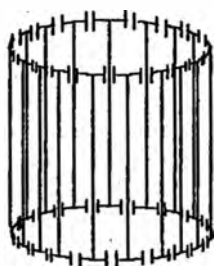


Figura 5.13. Resonador pasa-altos tipo "jaula"

5.4.3. La bobina de elipses cruzadas

Las dos elipses son generadas en la intersección de dos cilindros ortogonales de igual radio. Si cada elipse porta una corriente igual a la otra, el campo generado es paralelo al eje del otro cilindro. Estos dos modos son ortogonales y permiten operación en cuadratura si el campo magnético es perpendicular a los ejes de ambos cilindros. Redpath (10), estableció que las dos elipses pueden ser cableadas en paralelo con ambos modos sintonizados y manejados independientemente (fig. 5.14).

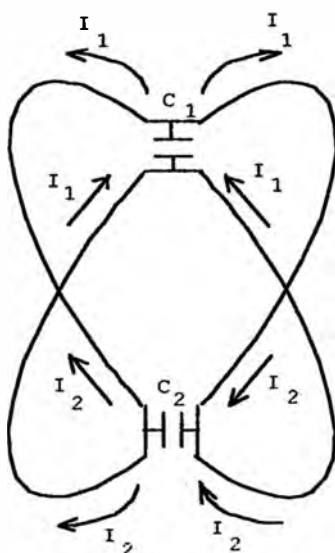


Figura 5.14. Bobina de elipses cruzadas

5.4.4. Bobinas RF de superficie

La forma más simple tiene de bobina de superficie es un simple lazo de cable de radio a como se muestra en la figura 5.15, la cual ha sido sintonizada para la frecuencia de operación deseada.

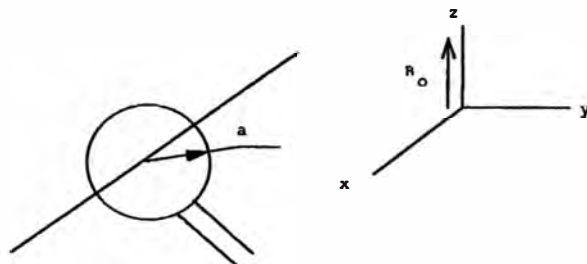


Figura 5.15. Diagrama ilustrando una bobina de superficie orientada dentro del plano y-z.

A esta bobina se le puede considerar como un solenoide muy corto, el cual almacena alrededor de la mitad de su energía magnética en la muestra. De ahí que tiene un factor de llenado moderadamente alto y se acopla fuertemente a la muestra. Alargando el solenoide decrecería el factor de llenado porque la energía adicional del campo estaría concentrada fuera de la muestra.

Las bobinas de superficie tienen tres propiedades útiles:

- i) La relación señal-ruido que se puede obtener es similar a aquella obtenida usando bobinas más convencionales.
- ii) Las bobinas de superficie pueden ser usadas para obtener información acerca de la distribución espacial de compuestos cerca a la superficie de la muestra.
- iii) Ellas pueden ser hechas tan grandes o pequeñas como se desee sin considerar el tamaño total de la muestra.

CAPITULO VI INSTRUMENTACION

En las secciones previas a este capítulo se describió los principios básicos de MRI y MRS; en este capítulo se describe el hardware necesario para hacer realidad esas ideas. Un sistema MRI se puede dividir en:

Magneto de campo principal B_0 y sus bobinas de homogeneización de campo

Bobinas de gradiente de campo G_x , G_y y G_z

Bobinas de campo de radiofrecuencia B_1 y transceptor

Instrumentación-Computadora (equipos de procesamiento de datos y señal).

La interrelación de las cuatro partes del sistema se muestra en la figura 6.1. Las tres primeras han sido desarrolladas en los capítulos III, IV y V respectivamente, mientras que la última se desarrollará a continuación:

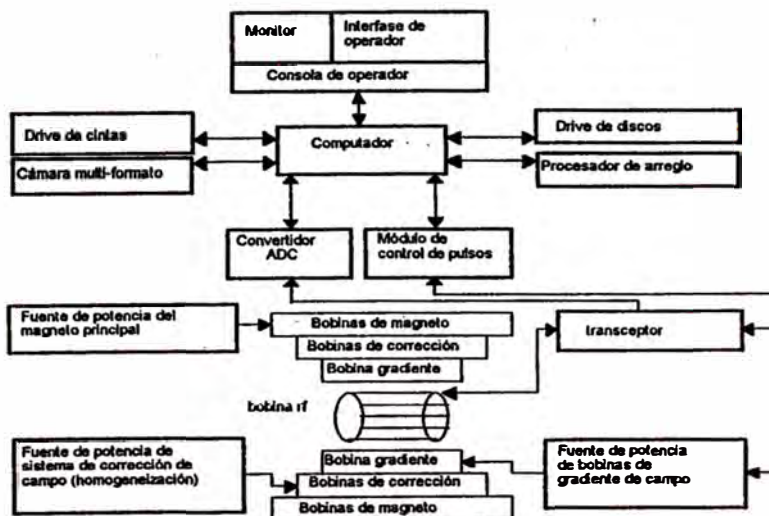


Figura 6.1. Diagrama de bloques de un sistema típico de MRI

6.1. Diseño de Espectrómetros (Transceptores)

Los requerimientos de diseño para conectar la bobina RF al transmisor difieren de aquellos para conectar la bobina al receptor. La bobina sirve como una carga para el transmisor y como una fuente de señal para el pre-amplificador. En el modo de transmisión, uno desea mandar potencia del transmisor a la bobina RF de una manera lo más eficiente posible. En el modo de recepción, uno desea extraer la señal de la bobina, mientras que a su vez se minimice la contribución de ruido desde el pre-amplificador. Otros requerimientos adicionales son, la protección del pre-amplificador durante los pulsos de potencia de RF y la eliminación de cualquier contribución de ruido desde el transmisor durante la adquisición de la señal.

6.1.1. Interfase de bobina a espectrómetro

En general, el transmisor está ubicado a cierta distancia (algunos metros) de la bobina de RF y se conecta a ella por una línea de transmisión. La línea de transmisión cumple más eficientemente su función de transmisión de potencia cuando la impedancia de la fuente y la impedancia de la carga coinciden con la impedancia característica Z_0 de la línea de transmisión. Típicamente, Z_0 es de 50 ohmios. Los circuitos de transmisor usualmente incorporan redes de impedancia de salida para generar la que coincida con Z_0 . Se necesita otra red de encaje de impedancia en la interconexión de la línea de transmisión y la bobina de RF. La resistencia r en el circuito LCR de la figura 6.2, es pequeña comparada a Z_0 . La caída de voltaje es equivalente a desarrollar una transformación de impedancia de r hasta Z_0 . La red de encaje de impedancia será lo más eficiente si ésta introduce un mínimo número de componentes adicionales y se ubica en proximidad cercana a la bobina.

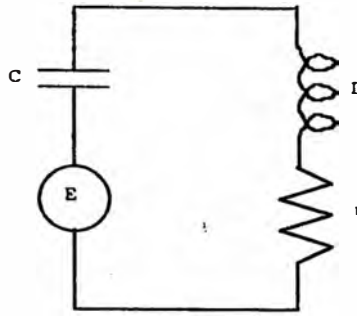


Figura 6.2. Circuito simple LCR

En las figuras 6.3(a y b) se muestran dos esquemas de encaje capacitivos para acoplar una fuente de impedancia Z_0 a la resistencia r de la bobina. Se puede analizar ambos circuitos convirtiendo la red consistente de E_{fuente} , Z_0 , C_1 y C_2 en una red equivalente en serie consistente de un voltaje equivalente e' , un resistor equivalente r' , y una capacitancia equivalente C'_{12} como se muestra en la figura 6.3 (c). La resonancia ocurre cuando $\omega^2 LC'_{12} = 1$ y el encaje de potencia ocurre cuando $r' = r$. Notar que la última condición implica que el encaje apropiado de la impedancia de la fuente duplica la resistencia serie efectiva del circuito LC y, por lo tanto, divide Q a la mitad. El proceso de encaje también puede ser considerado como convertir el circuito completo LCR en una resistencia $R_L = Z_0$ única de carga, la cual reemplaza el ensamblaje de la bobina (Fig. 6.3 (d)). La condición de encaje de impedancia y frecuencia resonante están dados aproximadamente por

$$Z_0 \cong \frac{1}{r(\omega C_2)^2} \quad \omega^2 \cong \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (6.1)$$

para la red en la fig. 6.3(a) y

$$Z_0 \cong r \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \quad \omega^2 \cong \frac{1}{L(C_1 + C_2)} \quad (6.2)$$

para la red en la fig. 6.3(b).

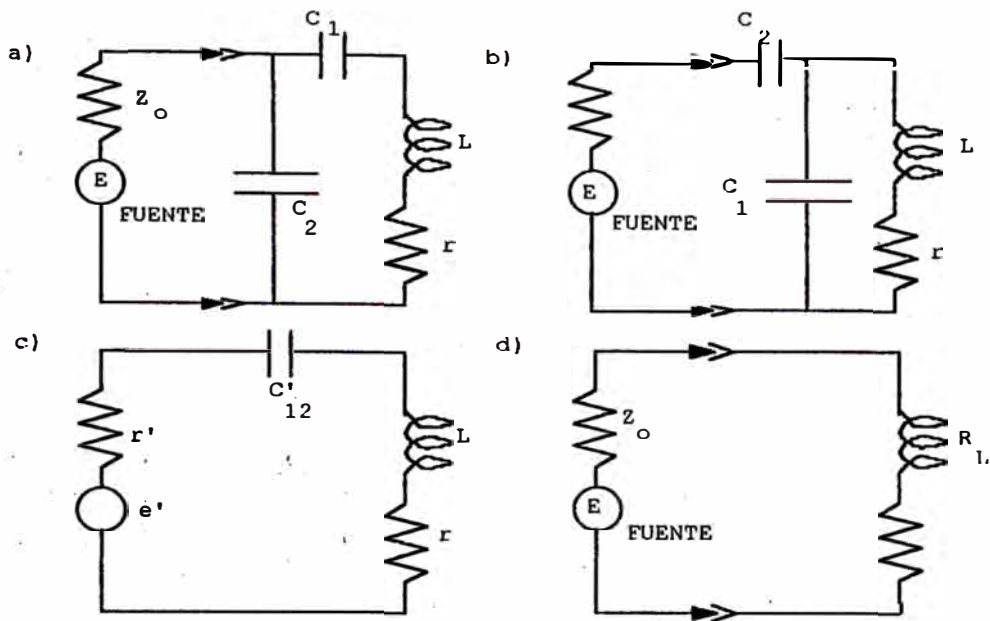


Figura 6.3. Redes de encaje capacitivo

Como se estableció antes, el objetivo principal de la interfase entre la bobina RF y el pre-amplificador, no es la transferencia óptima de potencia sino la performance óptima de ruido. El pre-amplificador ideal amplificaría ambos, la señal y la fuente de ruido pero no agregaría ruido extra de él mismo. Un pre-amplificador se caracteriza por su figura de ruido NF (Noise Figure), la cual especifica cuanto ruido de exceso agrega al ruido generado por una impedancia de fuente específica. Un NF de un amplificador, expresado en decibels, está definido por

$$NF = 10 \log (\text{potencia de ruido total a la salida} / \text{potencia de ruido a la salida debido a la fuente})$$

Si N_I es el voltaje de ruido irrumpiendo en el dispositivo y N_D es aquella generada por el dispositivo, entonces:

$$NF (dB) = 10 \log_{10} [(N_I^2 + N_D^2) / N_I^2] \quad (6.3)$$

Un interruptor simple de diodos D_1 se puede agregar dentro de la línea de transmisión donde se conecta a la entrada de la bobina (figura 6.4).

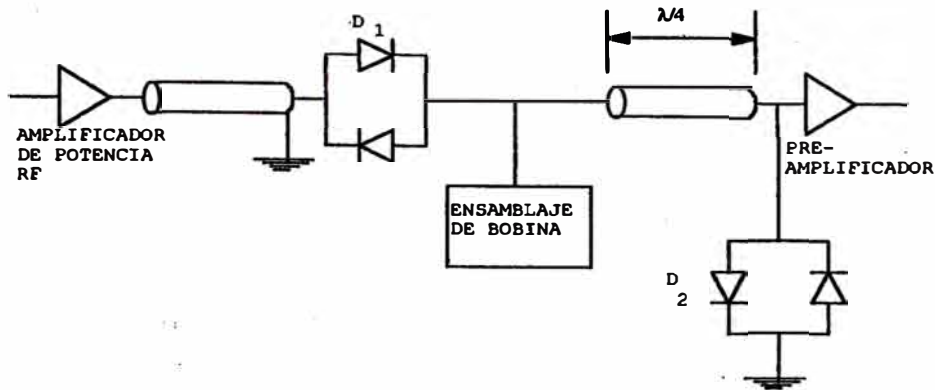


Figura 6.4. Interfase de la bobina con el amplificador de potencia RF y el pre-amplificador

El switch de diodos esta hecho de uno o más pares de diodos interruptores cruzados de baja capacitancia. Durante el pulso RF de alta potencia, los diodos conducen con una pequeña resistencia de encendido. Durante la adquisición de la señal de bajo nivel, los diodos estan apagados y exhiben una alta resistencia. La operación no lineal de diodos pasivos distorsiona la forma de onda del transmisor a nivel bajo.

La protección del pre-amplificador durante el pulso de transmisión se logra usando las propiedades especiales de una línea de transmisión de un cuarto de longitud de onda ($\lambda/4$). La impedancia de entrada Z_{in} de una línea de estas características que acaba con una impedancia Z_L , está dada en términos de su impedancia característica Z_0 por: $Z_{in} = Z_0^2 / Z_L$. Durante el pulso de transmisión, los diodos cruzados D_2 tienen una resistencia pequeña (on) comparada a Z_0 , de tal manera que la impedancia del cable de entrada a la bobina parece alta. Los diodos D_2 , limitan el voltaje al pre-amplificador durante la adquisición de señal de bajo nivel.

Entre el modo de transmisión y recepción tiene que haber, obviamente, un circuito de encendido y apagado rápido (duplexor) para asegurar que cualquier señal desde el pulso de excitación no se filtre dentro del pre-amplificador. Un duplexor en un transceptor de radio es un circuito el cual sirve de compuerta de conexión y desconexión de la antena entre los modos de transmisión y recepción como se ilustra en la figura 6.5.

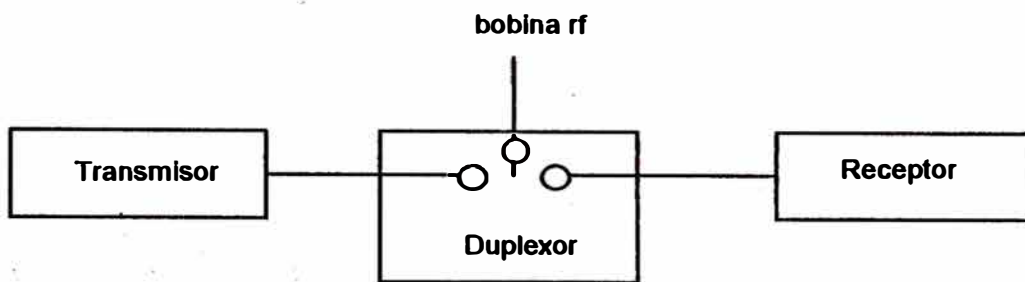


Figura 6.5. Un método de separar las funciones de transmisión y recepción por medio de un duplexor

Posteriormente a la amplificación, la señal es demodulada con respecto a la frecuencia básica del transmisor para producir una señal en el rango de audio-frecuencia, la equivalencia directa de pasar al marco de referencia rotativo descrito en el capítulo I. El siguiente paso es la digitalización de la señal antes de pasar a la computadora para su procesamiento. La digitalización se lleva a cabo usando convertidores análogo-digital (ADC) a un rango determinado por el teorema de Nyquist, el cual está en el rango de las decenas de kilohertz, con una longitud de palabra de por lo menos 16-bit.

6.2. Procesamiento de la señal

Los componentes electrónicos y tecnologías de procesamiento de señal están cambiando la arquitectura y performances de los espectrómetros NMR. Este apartado se enfoca en el diseño de las unidades que forman la excitación de radiofrecuencia (transmisor/decoplador) y producen una señal digital en tiempo real (receptor) para su procesamiento; ellas conforman un transceptor y, junto con la bobina de radiofrecuencia y el magneto constituyen el corazón de un espectrómetro.

6.2.1. Transceptor digital de banda ancha

Un diseño similar al de la figura ha sido propuesto recientemente para sistemas de campos bajos. Un sintetizador digital directo (DDS) desarrolla la generación de frecuencia, y la modulación de fase y amplitud; en el receptor, un filtro pasa-bandas selecciona la región de la señal nuclear más ancha, desde ν_1 a ν_2 , mientras que el convertidor análogo-digital ADC muestrea a la frecuencia ν_s , mayor que el límite dado por Nyquist $2(\nu_1 - \nu_2) = 4\Delta$. En el procesador de tiempo real (RTP) se desarrolla detección en cuadratura libre de error. Luego,

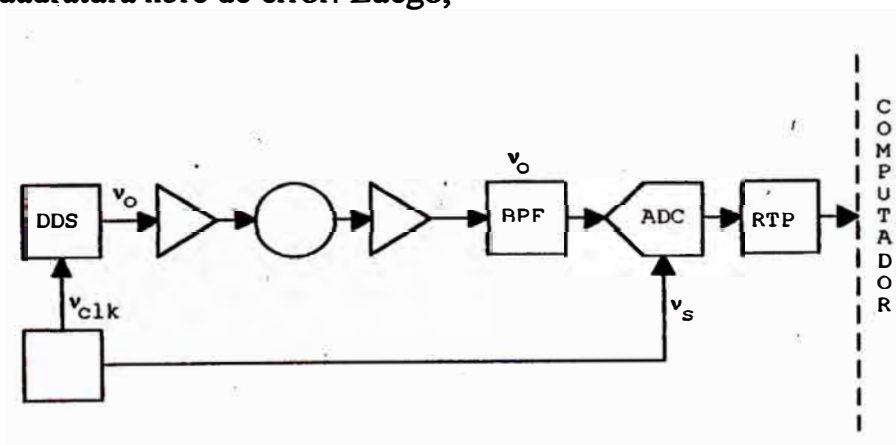


Figura 6.5. Diagrama de bloques de un transceptor digital de banda ancha

6.3. El sistema de adquisición de datos

El sistema de adquisición de datos para un sistema MRI es responsable de la coordinación y performance de muchas tareas. El sistema se puede dividir en dos segmentos mayores.

- El primero es el computador principal, cuyo rol consiste en manejo de recursos, es decir, controlar el flujo de los datos hacia y desde el sistema de discos, displays, etc.; así como el monitoreo de la performance del sistema y consideraciones de seguridad, etc. El computador, usualmente es una estación de trabajo, por ejemplo una Pentium de 32-bit, 200 Mhz, con 16 Mbytes de memoria RAM y una capacidad de 1Gigabyte en el disco duro.

- El segundo segmento del sistema de adquisición de datos es el grupo de sub-sistemas responsable, bajo la dirección del computador principal, de un gran número de funciones dentro del procesador de imágenes NMR. Muchos de los sub-sistemas son computadoras separadas. Los más importantes son los mencionados a continuación:

6.3.1. El programador de pulsos

El programador de pulsos es la parte del sistema responsable de controlar en tiempo las distintas etapas que conforman una secuencia de pulsos MRI. El programador de pulsos puede ser parte del sistema del computador principal mismo, pero es más frecuente un sistema de micro-computadora significativa autónoma. La exactitud, velocidad, y sobre todo, la flexibilidad y facilidad de programación de este dispositivo son los factores críticos que probablemente determinarán la expectativa de vida del sistema.

6.3.2. El procesador de arreglos de datos (array processor)

Los grandes volúmenes de datos producidos en cortos períodos de tiempo, requieren del uso de un procesador de arreglos de datos (AP) para hacer el tiempo de desarrollo y reconstrucción operativamente aceptable para el sistema (20 μ s por punto para una Transformada de Fourier de alta resolución). Por lo tanto, todos los sistemas MRI usan APs para llevar a cabo las Transformadas de Fourier requeridas.

6.3.3. La interfase de operador

El operador MRI debe introducir un gran volumen de datos previamente al “scaneo” y tomar muchas decisiones importantes. La interfase del operador es, por lo tanto, crítica para la operación rápida y eficiente del sistema. La naturaleza exacta de esta interfase refleja los conceptos de diseño del sistema.

6.3.4. El despliegue de imágenes

Las Imágenes por NMR, como todas las imágenes digitales, son desplegadas vía un procesador de imágenes en un tubo de rayos catódicos (cathode-ray tube ó CRT). La matriz, comúnmente es de 512x512, con los datos siendo interpolados hasta este tamaño.

El procesador de imágenes también tiene la capacidad de proveer cursores para definir regiones de interés, y desarrollar muchas funciones matemáticas, como adición, sustracción y magnificación de imágenes. Corrientemente, muchas imágenes NMR son desplegadas en forma monocromática. Sin embargo, en vista que éstas son multiparamétricas, se puede anticipar que el color se irá usando de forma creciente en el futuro.

6.3.5. Archivo de datos

MRI produce grandes volúmenes de datos. Estos son inicialmente alojados en el sistema de discos, pero estos sólo pueden soportar unos cuantos miles de imágenes y se tienen que hacer archivos back-ups frecuentemente. Es por ello que el uso de discos ópticos, en la actualidad se ha convertido en la práctica común de archivo de imágenes.

Una conveniencia adicional del sistema mini-computador desarrollado específicamente para NMR es el gran número de programas disponible, los cuales son escritos para aplicaciones específicas de MRI o MRS.

CAPITULO VII SECUENCIAS NMR

7.1. Secuencias para medir los tiempos de relajación

Cabe mencionar que para medir los tiempos de relajación existen la secuencia de pulso *spin-eco* (SE), *Eco de Gradiente* (EG), de *recuperación parcial* (SR) y la de *recuperación de la inversión* (IR).

7.1.1. Spin-eco

El SE es una secuencia que consiste en un pulso de RF de 90° seguido de otro de 180° en un tiempo TE/2 (expresada como una sucesión de pulsos RF de $\pi/2$ -TE/2- π -TE/2-señal). Esto produce una señal en un tiempo TE tras el primer pulso de 90°; la señal se denomina eco porque parece reflejar el pulso de 180°. El proceso de spin-eco puede repetirse constituyendo una secuencia multieco (en la figura 7.1 se ilustra un tren de ecos). Por supuesto, la magnitud del eco se reduce por la relajación T2 a $\exp(-TE/T2)$, pero los efectos no deseados de las inhomogeneidades magnéticas han sido removidas.

Si graficamos los valores absolutos de las amplitudes de eco, podemos extraer T2 por la ecuación (2)

$$M_{xy}(t) = M_0 e^{-t/T2} \quad (7.2)$$



Figura 7.1. Tren spin-eco

En la figura 7.1 la gráfica representa, en el eje horizontal, el tiempo tras el pulso de 90° (TE) y, en el vertical, la fracción de la amplitud del eco en función del TE; para TE cortos (<30 msec) domina el contraste de Densidad Protónica (DP) y T1, y para TE largos (>100 msec) la contribución T2 es mayor. De esta forma, secuencias SE con TR corto (<750 msec) y TE corto estarán potenciadas en T1; secuencias con TR largo (>1500 msec) y TE largo estarán potenciadas en T2; secuencias con TR largo y TE corto están potenciadas en DP al no tener influencias T1 ni T2.

7.1.2. Eco de gradiente

La secuencia de pulso EG es aquella en la que los ecos se generan, no por un pulso de rf de 180° , sino por la inversión del gradiente de lectura (secuencia: ángulo-inversión gradiente-síñal). Puesto que no existe el pulso de 180° y la excitación de rf usa un ángulo menor de 90° , puede utilizarse un TR muy pequeño sin saturar totalmente la magnetización.

7.1.3. Saturación parcial

La técnica de *saturación parcial* es el pulso más sencillo. Consiste en un único pulso de radiofrecuencia (RF) de 90° repetido a intervalos constantes (tiempo de

repetición o TR) (secuencia: $\pi/2$ -TR-señal). El término saturación expresa que tras el pulso de 90° no permanece ningún componente de la magnetización en el eje longitudinal (fig. 7.2). Esta secuencia está actualmente en desuso. La ec. (7.3) de relajación, como se ha visto antes es:

$$M_z(t) = M_0(1 - e^{-t/T_1}) \quad (7.3)$$

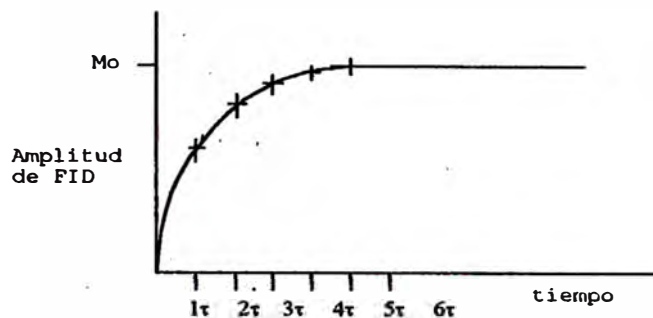


Figura 7.2. Saturación parcial o recuperación de saturación

7.1.4. Recuperación de la inversión

La *recuperación de la inversión* es una secuencia de pulso que consiste en un pulso de inversión de 180° seguido, tras un tiempo de recuperación TI, de un pulso de 90° y otro posterior de 180° (secuencia π -TI- $\pi/2$ -TE/2- π -TE/2-señal). Tras el pulso de 90° (que sitúa la M en xy), la magnetización longitudinal (M_z) se recupera en un tiempo TR-TI. El TE es el tiempo entre el pulso de 90° y su eco (obtenido tras el pulso de 180°). Respecto a la potenciación de la imagen, el factor TI está determinado por el TR y el T1, mientras que el TE determina el T2

La fase del pulso de RF no es importante en este experimento, ya que comenzamos con una inversión de la magnetización. Se mide la recuperación desde $-M_0$ a $+M_0$,

doblando así el rango dinámico el cual reduce error experimental (figura 7.3). La ec.

(7.4) de relajación es

$$M_z(t) = M_0(1 - 2e^{-t/T1}) \quad (7.4)$$

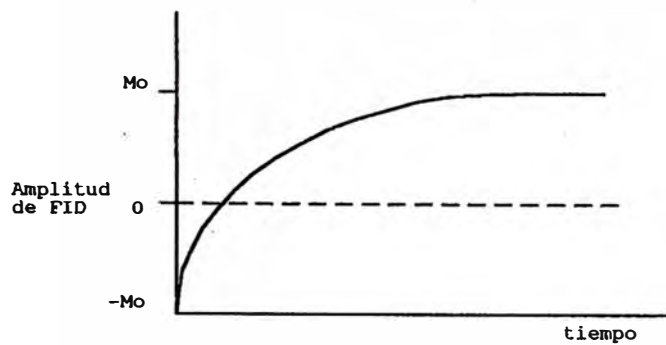


Figura 7.3. Recuperación de la inversión

En función del TI, las secuencias IR se dividen en:

- 1) TI corto o STIR (short time inversion recovery) con valores 0-250 msec;
- 2) TI medio (250-750 msec), y
- 3) TI largo (TI > 750 msec).

En la secuencia de TI medio, el contraste es T1 (el alargamiento de T1 y el incremento de la densidad protónica son aditivos). En secuencias STIR, el contraste DP, T1 y T2 es aditivo; el contraste T2 aumenta al aumentar el TE (con TE relativamente cortos, aproximadamente 45 msec).

CAPITULO VIII FORMALISMO MATEMATICO PARA EL DISEÑO DE MAGNETO NMR

8.1. Ley de Biot Savart

Se usan las expresiones fundamentales del Potencial Vectorial A , para describir el campo magnético. Este tiene componentes A_ρ , A_φ y A_z :

$$A_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_\varphi' dv' \text{Sen}(\varphi - \varphi')}{|r - r'|} \quad (8.1)$$

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_\rho' dv' \text{Cos}(\varphi - \varphi')}{|r - r'|} \quad (8.2)$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_z(r') dv'}{|r - r'|} \quad (8.3)$$

donde J es la densidad de corriente. No existe flujo de corriente en la dirección radial, luego J sólo tiene componentes z y φ .

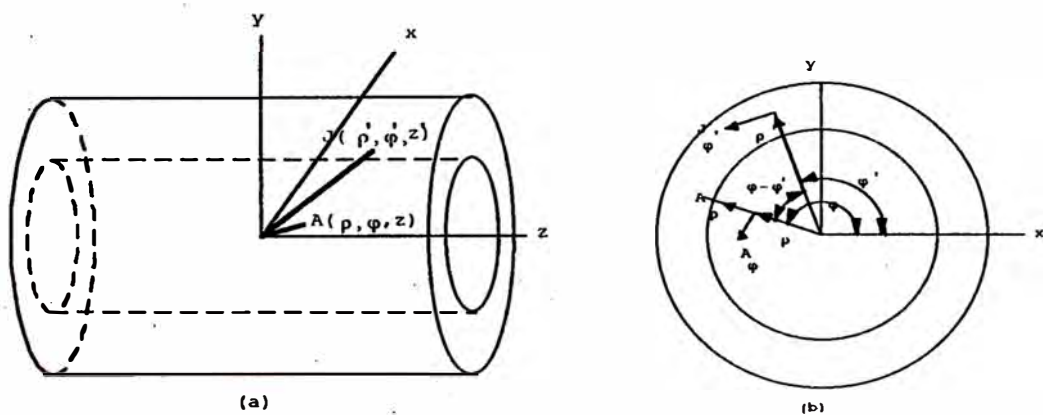


Figura 8.1. Magneto de geometría cilíndrica donde se observan los vectores de Potencial vectorial $A(\rho, \varphi, z)$ en el punto de campo y el vector Densidad de Corriente $J(\rho', \varphi', z')$ en el punto de fuente.

Con la finalidad de visualizar el origen de las expresiones (8.1), (8.2) y (8.3), en la figura 8.2 se observan las componentes de los vectores de Potencial y Densidad de Corriente en las direcciones radial y azimutal expresadas en función del $\text{Sen}(\varphi-\varphi')$ y $\text{Cos}(\varphi-\varphi')$ para las componentes A_ρ y A_φ respectivamente:

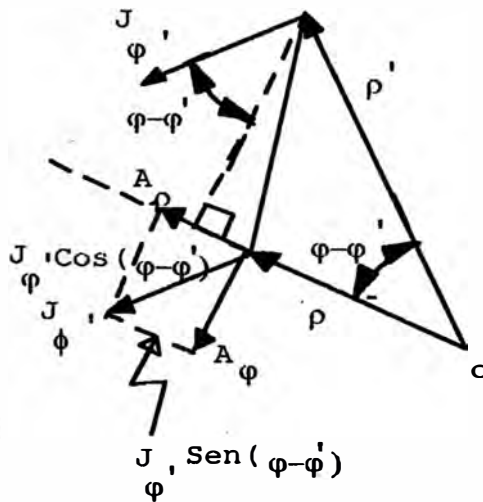


Figura 8.2. Descomposición de los vectores de Potencial y Densidad de Corriente en sus componentes de coordenadas cilíndricas

Las corrientes se pueden expresar como una función $F(z, \varphi)$ distribuida superficialmente sobre el formador cilíndrico de radio a donde va devanado el magneto, y usando la función de Dirac para el siguiente análisis, se tiene:

$$J_\varphi = F_\varphi(z, \varphi) \delta(\rho - a) \quad (8.4)$$

donde F describe la corriente en la superficie del cilindro. Las condiciones de frontera que se usan son que la componente radial del campo magnético es cero en la superficie y la otra es la ecuación de continuidad, la cual, en ausencia de acumulación de carga, es:

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (8.5)$$

El paso vital en el tratamiento analítico de éste sistema es el uso de la función de expansión de Green (Classical Electrodynamics de Jackson 1962)

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \times \exp[im(\varphi - \varphi')] \exp[ik(z - z')] I_m(k\rho^s) K_m(k\rho^z) \quad (8.6)$$

Reemplazando (8.6) en (8.1) se obtiene la componente radial del Vector Potencial

A_ρ :

$$A_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty dv' J_{\varphi'}(r') \text{Sen}(\varphi - \varphi') \left[\frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \times \exp[im(\varphi - \varphi')] \exp[ik(z - z')] I_m(k\rho^s) K_m(k\rho^z) \right]$$

donde: $\int_0^\infty dv' = \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{\infty} dz'$

$$A_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \text{Sen}(\varphi - \varphi') e^{im(\varphi - \varphi')} e^{ik(z - z')} I_m(k\rho^s) K_m(k\rho^z) F_\varphi(z', \varphi') \delta(\rho' - a)$$

Aplicando las propiedades de la función de Dirac:

$$\int f(\rho') \delta(\rho' - a) d\rho' = f(a)$$

$$f(\rho') = I_m(k\rho^s) K_m(k\rho^z)$$

Como $\rho' \Rightarrow a$, entonces ρ menor que a y ρ' ,

luego, ρ^s menor que ρ y ρ' , y por lo tanto: $\rho^s \Rightarrow \rho$

y por otro lado, ρ^z mayor que ρ y ρ' , y por lo tanto: $\rho^z \Rightarrow a$

$$\int \rho' d\rho' I_m(k\rho^s) K_m(k\rho^z) \delta(\rho' - a) = a I_m(k\rho) K_m(ka)$$

Por consiguiente, reemplazando en la expresión anterior del Potencial Vectorial, se tiene:

$$A_\rho = \frac{\mu_0 a}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \text{Sen}(\varphi - \varphi') e^{im(\varphi - \varphi')} e^{ik(z - z')} I_m(k\rho) K_m(ka) F_\varphi(z', \varphi')$$

Haciendo uso de la identidad: $\text{Sen}x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, se tiene que

$$A_\rho = \frac{\mu_0 a}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \left[\frac{e^{i(\varphi-\varphi')} - e^{-i(\varphi-\varphi')}}{2i} \right] e^{im(\varphi-\varphi')} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ik(z-z')} F_\varphi(z', \varphi') I_m(k\rho) K_m(ka)$$

$$= \frac{\mu_0 a}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \left[e^{i(m+1)(\varphi-\varphi')} - e^{i(m-1)(\varphi-\varphi')} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ik(z-z')} F_\varphi(z', \varphi') I_m(k\rho) K_m(ka)$$

Sean: $m' = m + 1$
 $m'' = m - 1$

Entonces $m = m' - 1$
 $m = m'' + 1$

y expresando por simplicidad: $F_\varphi(z', \varphi') = F_\varphi$

$$A_\rho = \frac{\mu_0 a}{8\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z-z')} dz \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \left\{ \sum_{m'=-\infty}^{\infty} [e^{im'(\varphi-\varphi')}] F_\varphi I_{m'-1}(k\rho) K_{m'-1}(ka) - \sum_{m''=-\infty}^{\infty} [e^{im''(\varphi-\varphi')}] F_\varphi I_{m''+1}(k\rho) K_{m''+1}(ka) \right\}$$

$$A_\rho = \frac{\mu_0 a}{8\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' [e^{-im'\varphi'} e^{-ikz'}] \int_{-\infty}^{\infty} dz F_\varphi e^{im'\varphi} e^{ikz} I_{m'-1}(k\rho) K_{m'-1}(ka) - \dots \right.$$

$$\left. \sum_{m''=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' [e^{-im''\varphi'} e^{-ikz'}] \int_{-\infty}^{\infty} dz F_\varphi e^{im''\varphi} e^{ikz} I_{m''+1}(k\rho) K_{m''+1}(ka) \right\}$$

Haciendo

$$\sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' [e^{-im'\varphi'} e^{-ikz'}] \int_{-\infty}^{\infty} dz F_\varphi = F_\varphi^{m'}(k)$$

$$\sum_{m''=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' [e^{-im''\varphi'} e^{-ikz'}] \int_{-\infty}^{\infty} dz F_\varphi = F_\varphi^{m''}(k)$$

Se tiene

$$A_\rho = -\frac{i\mu_0 a}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{m'=-\infty}^{\infty} F_\varphi^{m'}(k) e^{im'\varphi} e^{ikz} I_{m'-1}(k\rho) K_{m'-1}(ka) - \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{m''=-\infty}^{\infty} F_\varphi^{m''}(k) e^{im''\varphi} e^{ikz} I_{m''+1}(k\rho) K_{m''+1}(ka) \right]$$

$$= -\frac{i\mu_0 a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_\varphi^m(k) e^{im\varphi} e^{ikz} \{ I_{m-1}(k\rho) K_{m-1}(ka) - I_{m+1}(k\rho) K_{m+1}(ka) \} \quad (8.7)$$

Análogamente se obtiene A_φ y A_z :

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_\varphi^m(k) e^{im\varphi} e^{ikz} \{I_{m-1}(k\rho)K_{m-1}(ka) + I_{m+1}(k\rho)K_{m+1}(ka)\} \quad (8.8)$$

$$A_z = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_z^m(k) e^{im\varphi} e^{ikz} I_m(k\rho)K_m(ka) \quad (8.9)$$

Para obtener el Campo B , se hace uso del rotacional de A :

$$B = \nabla \times A \quad (8.10)$$

la expresión del rotacional de A en coordenadas cilíndricas, está dada por

$$B_z = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \quad (8.11)$$

donde se han obviado las componentes B_ρ y B_φ ya que sólo nos interesa la componente axial del campo y, por condición de simetría traslacional $m=0$. Luego se obtiene B_z del desarrollo de las ecuaciones (8.8) y (8.7) para reemplazarlas en (8.11).

El primer término dentro del paréntesis de la ecuación (8.11) será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\mu_0 a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk F_\varphi^0(k) e^{ikz} (I_{-1}(k\rho)K_{-1}(ka) + I_1(k\rho)K_1(ka)) \right) \\ &= \frac{\mu_0 a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk F_\varphi^0(k) e^{ikz} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho (I_{-1}(k\rho)K_{-1}(ka) + I_1(k\rho)K_1(ka)) \} \\ &= \frac{\mu_0 a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk F_\varphi^0(k) e^{ikz} [I_{-1}K_{-1} + I_1K_1 + \rho(I'_{-1}K_{-1} + I'_1K_1)] \quad (8.12) \end{aligned}$$

El segundo término dentro del paréntesis de la ecuación (8.11) será cero por condición de frontera, es decir, la componente radial del campo es nula

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} &= -\frac{i\mu_0 a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk F_\varphi^0(k) e^{ikz} \{I_{-1}(k\rho)K_{-1}(ka) - I_1(k\rho)K_1(ka)\} \right] \\ &= 0 \quad (8.13) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$B_z = \frac{\mu_0 \alpha}{4\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dk F_{\varphi}^0(k) e^{ikz} [I_{-1}K_{-1} + I_1K_1 + \rho(I'_1K_{-1} + I'_1K_1)] \quad (8.14)$$

Y recurriendo al Manual de Funciones Matemáticas de Abramowitz (ecuación 9.6.6)

$$\begin{aligned} I_{-n}(z) &= I_n(z) \\ K_{-v}(z) &= K_v(z) \end{aligned}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \alpha}{4\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dk F_{\varphi}^0(k) e^{ikz} [2I_1K_1 + 2\rho(I'_1K_1)] \quad (8.15)$$

Además, de las fórmulas para derivadas de funciones modificadas de Bessel de orden entero, dadas por la ecuación 9.6.28 del Manual de Abramowitz,

$$\left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}\right)^k \{z^{\nu} I_{\nu}(z)\} = z^{\nu-k} I_{\nu-k}(z)$$

Para $k=\nu=1$:

$$\left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \{z I_1\} = I_0$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (I_1 + z I'_1) = I_0$$

$$\frac{I_1}{z} + I'_1 = I_0$$

$$I'_1 = I_0 - \frac{I_1}{z}$$

Pero I'_1 en B_z se refiere a : $\frac{\partial}{\partial \rho} I_1(k\rho)$

Entonces hay que convertir I'_1 de B_z a I'_1 de Abramowitz:

Partiendo de I'_1 de B_z :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} I_1(k\rho) = k \frac{\partial}{\partial (k\rho)} I_1(k\rho)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable: $z = k\rho$

Entonces $dz = k d\rho$

Reemplazando en (8.15):

$$B_z = \frac{\mu_0 a}{4\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dk F_{\varphi}^0(k) e^{ikz} \left[2I_1 K_1 + 2\rho k (I_1' K_1) \right] \quad (8.16)$$

donde $I_1' = I_0 - \frac{I_1}{k\rho}$

luego

$$B_z = \frac{\mu_0 a}{4\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dk F_{\varphi}^0(k) e^{ikz} \left[2I_1 K_1 + 2\rho k \left(I_0 - \frac{I_1}{\rho k} \right) K_1 \right]$$

$$= \frac{\mu_0 a}{4\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dk F_{\varphi}^0(k) e^{ikz} \left[2\rho k I_0 K_1 \right]$$

Por último $B_z = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk j_{\varphi}(k) e^{ikz} k I_0(k\rho) K_1(ka) \quad (8.17)$

La técnica de Aproximación al Campo Objetivo para el diseño óptimo de bobinas propuesta por R. Turner, Expresa el campo en función de las tres coordenadas cilíndricas, ya que usa una distribución de corriente en la superficie del cilindro que, a diferencia de la técnica de Engelsberg, es usada también para el diseño de bobinas de gradientes de campo en que existe condición de anti-simetría azimutal, por lo tanto el campo depende de la variable φ :

$$B_z(\rho, \varphi, z) = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{im\varphi} e^{ikz} k j_{\varphi}^m(k) I_m(k\rho) K_m'(ka) \quad (8.18)$$

Volviendo a la condición de simetría azimutal, es decir, para $m=0$:

$$B_z(\rho, z) = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikz} k j_{\varphi}(k) I_0(k\rho) K_0'(ka)$$

Como se sabe que el eje z es el eje de la bobina: $B_z(\rho, z) = B_z(\rho, -z)$

Entonces $j_\varphi(k) = j_\varphi(-k)$

Se puede aplicar la siguiente identidad: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} dz = 2 \int_0^{\infty} \text{Cos}(kz)$

Y aplicando la relación de recurrencia dada por la fórmula 9.6.27 de Abramowitz,

$$I_0'(z) = I_1(z)$$

$$K_0'(z) = -K_1(z)$$

$$B_z(\rho, z) = -\frac{2\mu_0 a}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \text{Cos}(kz) k j_\varphi(k) (-K_1'(ka) I_0(k\rho))$$

$$= \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^{\infty} dk \text{Cos}(kz) k j_\varphi(k) K_1(ka) I_0(k\rho) \quad (8.19)$$

Esta última ecuación representa la componente longitudinal a lo largo del eje z del campo magnético dada una distribución de corriente solenoidal en un cascarón conductoro cilíndrico de radio a y grosor t mucho menor que a .

Donde I_0 y K_1 son funciones modificadas de Bessel de primera y segunda clase respectivamente, y $j_\varphi(k)$ denota la Transformada de Fourier de la densidad de corriente superficial solenoidal de $J_\varphi(z)$ (Am^{-1}).

Sea P la potencia total disipada por la densidad de corriente $J_\varphi(z)$ en el medio resistivo. Esta se obtiene de la ley de Ohm expresada como la corriente J proporcional al campo eléctrico E y cuya constante de proporcionalidad es la conductividad σ .

$$J = \sigma E \quad (8.20)$$

8.2. Aproximación al Campo Objetivo para el diseño de magnetos solenoidales eficientes en el consumo de potencia

El diseño de magnetos resistivos para Imágenes por Resonancia Magnética requiere la consideración de varios aspectos. Estos incluyen entre otros: la intensidad de campo, homogeneidad espacial, consumo de potencia, condiciones geométricas, robusticidad etc.; contra pequeñas imperfecciones de construcción, peso y costo.

Una densidad de corriente solenoidal apropiada sobre una superficie cilíndrica puede satisfacer adecuadamente la mayoría de los requerimientos, especialmente a campos ultra pequeños (de 20 a 40 mT), donde se puede emplear un delgado solenoide de sólo unas cuantas capas de cable, manteniendo al mínimo los errores de devanado y permitiendo buena exactitud en la implementación de las distribuciones de corriente ideales.

Utilizando la simple relación de Potencia:

$$P = IV \quad (8.21)$$

donde, para un lazo circular de corriente se tiene un potencial V , en función de la longitud del lazo d , es decir, $2\pi a$.

$$\begin{aligned} V &= Ed \\ &= 2\pi a E \\ &= 2\pi a \frac{J}{\sigma} \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en (8.21), se tiene:

$$P = \frac{2\pi a}{\sigma} \int J^2(r = a, z) dS$$

para un diferencial de área $dS = dr \cdot dz$, donde $\int dr = t$ (espesor del magneto):

$$P = \frac{4\pi a}{\sigma l} \int_0^\infty J_\varphi^2(z) dz \quad (8.22)$$

Aplicando la condición de Transformada de Fourier que dice: $\int JJ^* = \frac{1}{2\pi} \int jj^*$

$$P = \frac{2a}{\sigma l} \int_0^\infty j_\varphi^2(k) dk \quad (8.23)$$

Ya que la potencia total P dada por la ecuación (8.23) es una funcional de la densidad de corriente $j_\varphi(k)$, la cual determina el campo magnético de la ecuación (8.19), uno busca minimizar P con condiciones apropiadas de homogeneidad de campo deseada. Sin embargo, en vez de imponer una condición en el punto objetivo $B_z(c, z)$ en la superficie cilíndrica de radio $r=c$ (para c menor que a), como en el método convencional de aproximación al campo objetivo, se mostrará que es más provechoso usar una condición en las derivadas del campo magnético.

Se requerirá que las primeras derivadas axiales del campo magnético de orden “ p ” par en el centro del magneto sean cero mientras que todas las derivadas de orden impar desaparecen por simetría. Esto nos conduce a pensar en el problema de diseñar un magneto de orden $(2p+2)$ de error, el cual, cuando se obtiene por el método tradicional, se requieren $p+1$ bobinas coaxiales diferentes.

Por ejemplo un par de Helmholtz es un magneto de cuarto orden de error que corresponde a $p=1$, donde la primera derivada de orden par distinta de cero es la cuarta. Distribuciones de corriente en la superficie de un cilindro, en magnetos de orden $(2p+2)$ de error que consumen mínima potencia, se pueden calcular usando el método de multiplicadores de Lagrange.

Ya que la simetría con respecto al plano medio a través de $z=0$, ya está implícita en las ecuaciones (8.19) y (8.23), las condiciones adicionales requeridas serán:

$$B_z(0,0) = B_0 \quad (8.24)$$

$$\left(\frac{d^{(2n)} B_z(0,z)}{dz^{(2n)}} \right)_{z=0} = 0 \quad (n=1,2,3,\dots,p) \quad (8.25)$$

Introduciendo los multiplicadores de Lagrange λ_n ($n=0,1,2,\dots,p$), ahora uno busca la minimización de la funcional $\Gamma[j_\varphi(k)]$ dada por:

$$\Gamma = \frac{2a}{\sigma l} \int_0^\infty j_\varphi^2(k) dk + \lambda_0 [B_z(0,0) - B_0] + \sum_{n=1}^p \lambda_n \frac{d^{(2n)}}{dz^{(2n)}} B_z(0,z) \quad (8.26)$$

donde por simplicidad de simbología se hace: $\left(\frac{d^{(2n)} B_z(0,z)}{dz^{(2n)}} \right)_{z=0} = B_z^{(2n)}(0,0) = 0$

$$\Gamma = \frac{2a}{\sigma l} \int_0^\infty j_\varphi^2(k) dk + \sum_{n=1}^p \lambda_n B_z^{(2n)}(0,0) + \lambda_0 (B_z(0,0) - B_0) \quad (8.27)$$

es decir, $\Gamma = \Gamma(j)$

Recurriendo al Abramowitz para evaluar la función modificada de Bessel $I_0(0)$ vemos

que toma el valor de la unidad, luego en $B_z(\rho,z) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty dk \cos(kz) k j_\varphi(k) K_1(ka) I_0(k\rho)$

$$B_z(0,0) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) j_\varphi(k) dk = B_0 \quad (8.28)$$

Y por otro lado derivando (8.19) se puede deducir que:

$$\frac{\partial}{\partial z} B_z(\rho,z) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) j_\varphi(k) (-k \text{Sen}(kz)) dk$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} B_z(\rho,z) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) j_\varphi(k) ((-1)^2 k^2 \text{Cos}(kz)) dk$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) j_\varphi(k) (-1)^3 k^3 \text{Sen}(kz) dk$$

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) j_\varphi(k) (-1)^4 k^4 \text{Cos}(kz) dk$$

En forma general

$$\left[\frac{\partial^{(2n)}}{\partial z^{(2n)}} B_z(0, z) \right]_{z=0} = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) j_\varphi(k) dk \quad (8.29)$$

Luego

$$\Gamma = \frac{2a}{\sigma t} \int_0^\infty j_\varphi^2(k) dk - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) j_\varphi(k) dk - \lambda_0 \left(\frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) j_\varphi(k) dk - B_0 \right)$$

Para minimizar la funcional dada por la expresión anterior se debe derivar con respecto a j e igualar a cero:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta j_\varphi(k)} = \frac{2a}{\sigma t} \int_0^\infty 2 j_\varphi(k) dk - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) dk - \lambda_0 \left(\frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) dk - B_0 \right) = 0$$

$$j_\varphi(k) = \frac{\sigma t \mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) \quad (8.30)$$

reemplazando la ecuación (8.30) en (8.29), derivando e igualando a cero se obtiene:

$$\left[\frac{\partial^{(2l)}}{\partial z^{(2l)}} B_z(0, z) \right]_{z=0} = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty (-1)^l k^{2l+1} K_1(ka) \frac{\sigma t \mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) dk = 0$$

$$0 = \frac{\mu_0^2 a \sigma t}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{l+n} \lambda_n \int_0^\infty k^{2l+2n+2} K_1^2(ka) dk \quad (8.31)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$x = ka$$

entonces $k = \frac{x}{a}$ y por lo tanto: $dk = \frac{dx}{a}$

$$\left[\frac{\partial^{(2l)}}{\partial z^{(2l)}} B_z(0, z) \right]_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right)^2 a \sigma (-1)^{l+n} \lambda_n \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{a} \right)^{2l+2n+2} K_1^2(x) \frac{dx}{a} = 0$$

Con la finalidad de aproximarnos a una forma más fácil de manipular

matemáticamente, se multiplican ambos miembros por el factor $\frac{a^{2l}}{(-1)^l B_0}$

$$\left[\frac{\partial^{(2l)}}{\partial z^{(2l)}} B_z(0, z) \right]_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_0}{2\pi a^{n+1}} \right)^2 \frac{a}{(-1)^l B_0} \sigma (-1)^{l+n} \lambda_n \int_0^{\infty} x^{2l+2n+2} K_1^2(x) dx = 0$$

Haciendo
$$\int_0^{\infty} x^{2l+2n+2} K_1^2(x) dx = F_{l,n}$$

y a su vez
$$\left(\frac{\mu_0}{2\pi a^{n+1}} \right)^2 \frac{\sigma}{B_0} (-1)^n = \theta_n$$

Se define
$$\sum_{n=0}^p \theta_n F_{l,n} = 0 \quad (8.32)$$

Por otro lado, reemplazando (8.30) en (8.28) e igualando a B_0 se obtiene:

$$B_z(0,0) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^{\infty} k K_1(ka) \frac{\sigma \mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) dk = B_0$$

$$\frac{\mu_0^2 a \sigma}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-1)^n \int_0^{\infty} k^{2n+2} K_1^2(ka) dk = B_0 \quad (8.33)$$

Haciendo el mismo cambio de variable:

$$x = ka$$

entonces $k = \frac{x}{a}$ y por lo tanto: $dk = \frac{dx}{a}$

$$\frac{\mu_0^2 a \sigma}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-1)^n \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{a} \right)^{2n+2} K_1^2(x) \frac{dx}{a} = B_0$$

$$\frac{\mu_0^2 \sigma}{4\pi^2 B_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n (-1)^n}{a^{2n+2}} \int_0^{\infty} x^{2n+2} K_1^2(x) dx = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_0}{2\pi a^{n+1}} \right)^2 \frac{\sigma}{B_0} \lambda_n (-1)^n \int_0^{\infty} x^{2n+2} K_1^2(x) dx = 1$$

Haciendo
$$\left(\frac{\mu_0}{2\pi a^{n+1}} \right)^2 \frac{\sigma}{B_0} \lambda_n (-1)^n = \theta_n$$

y
$$\int_0^{\infty} x^{2n+2} K_1^2(x) dx = F_{0,n}$$

Se define
$$\sum_{n=0}^p \theta_n F_{0,n} = 1 \quad (8.34)$$

De (8.32) y (8.34) para $p=3$ se forma un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los $F_{n,i}$:

$$l=0: \quad \theta_0 F_{0,0} + \theta_1 F_{0,1} + \theta_2 F_{0,2} + \theta_3 F_{0,3} = 1$$

$$l=1: \quad \theta_0 F_{1,0} + \theta_1 F_{1,1} + \theta_2 F_{1,2} + \theta_3 F_{1,3} = 0$$

$$l=2: \quad \theta_0 F_{2,0} + \theta_1 F_{2,1} + \theta_2 F_{2,2} + \theta_3 F_{2,3} = 0$$

$$l=3: \quad \theta_0 F_{3,0} + \theta_1 F_{3,1} + \theta_2 F_{3,2} + \theta_3 F_{3,3} = 0$$

de
$$\theta_l = \left(\frac{\mu_0}{2\pi a^{l+1}} \right)^2 \frac{\sigma}{B_0} \lambda_l (-1)^l$$

se define
$$\lambda_l = (-1)^l \left(\frac{2\pi a^{l+1}}{\mu_0} \right)^2 \frac{B_0}{\sigma} \theta_l \quad (8.35)$$

Reemplazando (8.35) en (8.30):

$$j_{\varphi}(k) = \frac{\sigma \mu_0}{4\pi} \sum_{l=0}^p \left\{ (-1)^l \left(\frac{2\pi a^{l+1}}{\mu_0} \right)^2 \frac{B_0}{\sigma} \theta_l \right\} (-1)^l k^{2l+1} K_1(ka)$$

$$j_{\varphi}(k) = \frac{B_0 \pi}{\mu_0} \sum_{l=0}^p a^{2l+2} k^{2l+1} K_1(ka) \theta_l \quad (8.36)$$

Para llegar a obtener la densidad de corriente $J_\varphi(z)$ se debe aplicar la Transformada de Fourier, es decir:

$$J_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} j_\varphi(k) dk \quad (8.37)$$

Y reemplazando (8.36) en (8.37):

$$J_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{B_0 \pi}{\mu_0} \sum_{l=0}^p a^{2l+2} k^{2l+1} K_1(ka) \theta_l dk$$

Asumiendo Transformada Coseno de Fourier:

$$J_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{B_0 \pi}{\mu_0} \sum_{l=0}^p \int_0^{\infty} \text{Cos}(kz) k^{2l+1} K_1(ka) a^{2l+2} dk$$

Haciendo cambio de variable: $x = ka$ y por lo tanto: $dk = \frac{dx}{a}$

$$\frac{\mu_0 J_\varphi(z)}{B_0} = \sum_{l=0}^p \int_0^{\infty} \text{Cos}(xz/a) \frac{x^{2l+1}}{a^{2l+1}} K_1(x) a^{2l+2} \theta_l \frac{dx}{a}$$

$$\frac{\mu_0 J_\varphi(z)}{B_0} = \int_0^{\infty} \text{Cos}(xz/a) K_1(x) \sum_{l=0}^p (x^{2l+1} \theta_l) dx \quad (8.38)$$

Haciendo
$$\sum_{l=0}^p (x^{2l+1} \theta_l) = \theta_p(x) \quad (8.39)$$

Luego, reemplazando (8.39) en (8.38), se tiene:

$$\frac{\mu_0 J_\varphi(z)}{B_0} = \int_0^{\infty} \text{Cos}(xz/a) K_1(x) \theta_p(x) dx \quad (8.40)$$

Para graficar la densidad de corriente normalizada $\mu_0 J_\varphi(z) / B_0$, para el caso de $p=3$, primero se hallan los $F_{l,n}$ mediante un programa que desarrolla dicho procedimiento, para calcular finalmente los coeficientes θ_l . En vista que el manual de Abramowitz define la función K_l en dos intervalos, hubo necesidad de particionar dicha función y

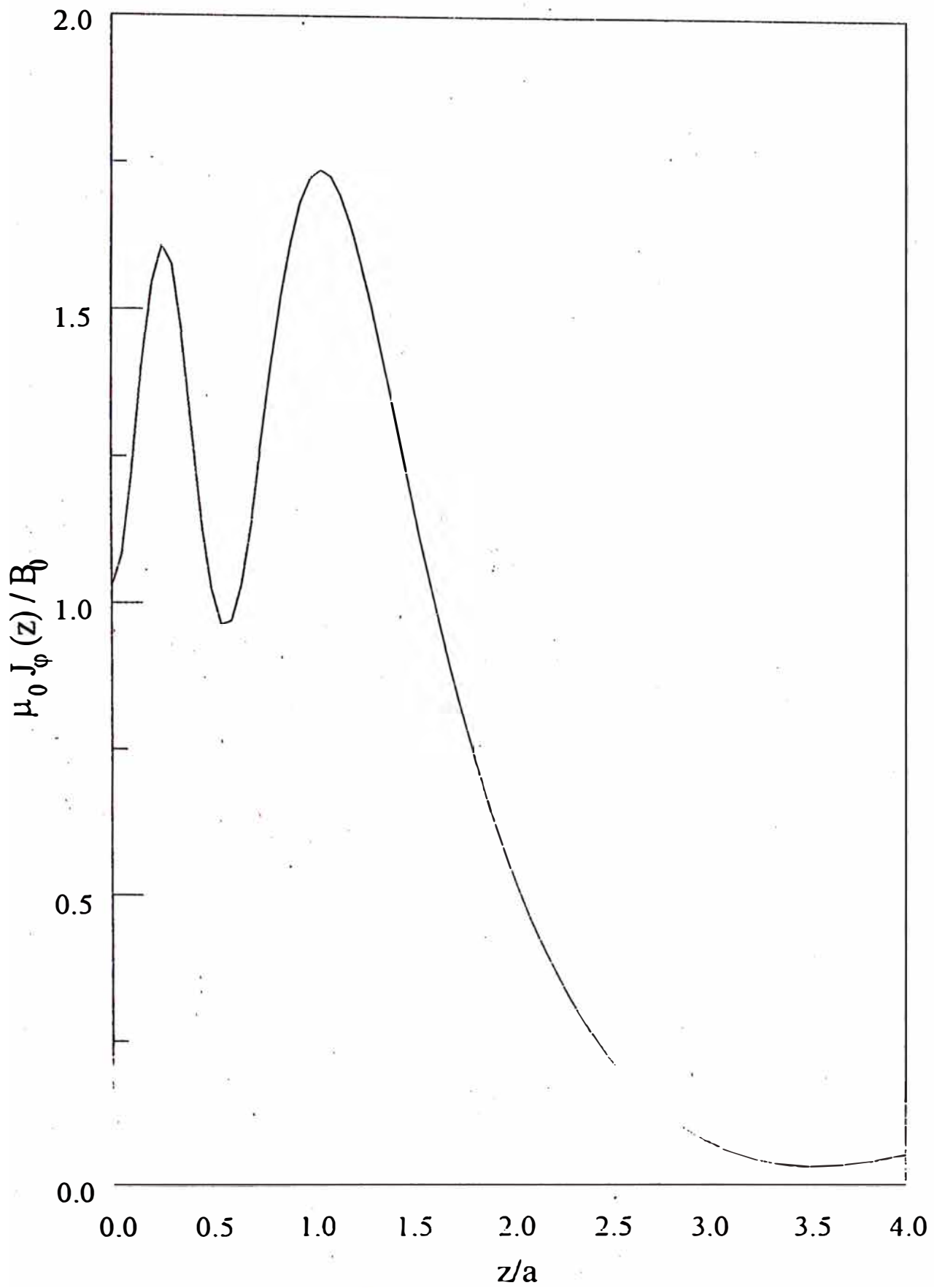
luego sumar sus resultados para armar la matriz $F_{l,n}$, cuyos valores al reemplazarlos en el sistema de ecuaciones, nos conducen a θ_l que difieren en algo a los obtenidos por Engelsberg, pero que reflejan prácticamente la misma variación. Otro programa desarrolla el cálculo de los $\theta_p(x)$, que se usan para obtener la distribución de corriente en la superficie del cilindro que se grafica a continuación.

La densidad de corriente de la gráfica muestra que de alguna manera se aproxima a la prescripción convencional que a su vez, corresponde a mínima disipación de potencia. Los dos picos de corriente que corresponden a un magneto de 8avo. orden de error, es decir $p=3$, nos dan una idea clara de la necesidad de cuatro $(p+1)$ bobinas distintas, distribuidas de manera simétrica.

El diseño de dichas bobinas consiste en un desarrollar un problema inverso, es decir, calcular la geometría y características físicas del devanado, partiendo del campo impuesto en el volumen de interés cuya variación espacial debe ser mínima en la dirección del eje z para alcanzar la homogeneidad requerida.

El método de los Elementos Finitos formula el problema partiendo de una expresión variacional mediante un funcional relacionado con la energía. Mallando la región donde se quiere evaluar la incógnita, se minimiza el funcional en cada nodo y se resuelve el sistema de ecuaciones establecido.

Corriente



8.2.1. Variación del método de aproximación al campo objetivo

Con la finalidad de mejorar la homogeneidad de campo en una región más amplia del volumen de interés, se establecen condiciones más severas en el sentido que, como en el análisis previo se requiere un campo B_0 en el centro, se añade que la derivada de orden p en el centro sea cero, y que la derivada de orden $p-2$ en un punto dado a una distancia a del eje también sea cero. Escrito de manera matemática:

$$B_z(0,0) = B_0 \quad (8.41)$$

$$\left[\frac{\partial^p B_z(0,z)}{\partial z^p} \right]_{z=0} = 0 \quad (8.42)$$

$$\left[\frac{\partial^{p-2} B_z(0,z)}{\partial z^{p-2}} \right]_{z=a} = 0 \quad (8.43)$$

Análogamente al caso anterior se procede a emplear el método de los multiplicadores de Lagrange λ_n , donde ahora aparece un segundo término llamado ν_n , debido a la condición adicional dada por la ecuación (8.43).

$$\Gamma = \frac{2a}{\sigma^2} \int_0^\infty j_\varphi^2(k) dk - \lambda_0 [B_z(0,0) - B_0] - \sum_{n=1}^p \lambda_n \frac{d^{(2n)}}{dz^{(2n)}} B_z^{(2n)}(0,0) - \sum_{m=1}^{p-2} \nu_m B^{2m}(0,a) \quad (8.44)$$

Se observa que la expresión anterior es una funcional de j_φ . Para la cual se evalúan las siguientes expresiones, haciendo uso de la ecuación (8.19) y sus derivadas:

$$B_z(0,0) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) j_\varphi(k) dk = B_0 \quad (8.45)$$

$$B_z^{2n}(0,0) = (-1)^n \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k^{2n+1} K_1(ka) j_\varphi(k) dk = 0 \quad (8.46)$$

$$B_z^{2m}(0,a) = (-1)^m \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k^{2m+1} K_1(ka) \text{Cos}(ka) j_\varphi(k) dk = 0 \quad (8.47)$$

Derivando la expresión $\Gamma(j_\varphi)$ con respecto a j_φ , e igualando a cero para minimizar

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial j_\varphi(k)} = \frac{4a}{\sigma} j_\varphi(k) - \frac{\mu_0 a}{\pi} \lambda_0 k K_1(ka) - \sum_{n=1}^p \lambda_n \frac{\mu_0 a}{\pi} (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) - \sum_{m=1}^{p-2} v_m \frac{\mu_0 a}{\pi} (-1)^m k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) = 0$$

Simplificando

$$j_\varphi(k) = \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \left[\lambda_0 k K_1(ka) + \sum_{n=1}^p \lambda_n (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) + \sum_{m=1}^{p-2} v_m (-1)^m k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) \right] \quad (8.48)$$

Reemplazando la ecuación (8.48) en (8.45)

$$B_0 = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k K_1(ka) \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \left[\lambda_0 k K_1(ka) + \sum_{n=1}^p \lambda_n (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) + \sum_{m=1}^{p-2} v_m (-1)^m k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) \right] dk$$

$$B_0 = \frac{\mu_0^2 a \sigma}{4\pi^2} \left[\sum_{n=0}^p (-1)^n \int_0^\infty \lambda_n k^{2n+2} K_1^2(ka) dk + \sum_{m=1}^{p-2} v_m (-1)^m \int_0^\infty v_m k^{2m+2} K_1^2(ka) \cos(ka) dk \right] \quad (8.49)$$

Análogamente, reemplazando la ecuación (8.48) en (8.46) se obtiene:

$$0 = (-1)^n \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k^{2n+1} K_1(ka) \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \left[\sum_{n=0}^p \lambda_n (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) + \sum_{m=1}^{p-2} v_m (-1)^m k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) \right] dk$$

$$0 = \frac{\mu_0^2 a \sigma}{4\pi^2} \left[\sum_{l=0}^p \lambda_l \int_0^\infty (-1)^{n+l} k^{2n+2l+2} K_1^2(ka) dk + \sum_{m=1}^{p-2} v_m \int_0^\infty (-1)^{n+m} v_m k^{2m+2n+2} K_1^2(ka) \cos(ka) dk \right] \quad (8.50)$$

Por último, reemplazando la ecuación (8.48) en (8.47) se obtiene:

$$0 = (-1)^m \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \left[\sum_{l=0}^p \lambda_l (-1)^l k^{2l+1} K_1(ka) + \sum_{m=1}^{p-2} v_m (-1)^m k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) \right] dk$$

$$0 = \frac{\mu_0^2 a \sigma}{4\pi^2} \left[\sum_{l=0}^p \lambda_l \int_0^\infty (-1)^{m+l} k^{2m+2l+2} K_1^2(ka) \cos(ka) dk + \sum_{m=1}^{p-2} v_m \int_0^\infty (-1)^{m+m} v_m k^{2m+2m+2} K_1^2(ka) \cos^2(ka) dk \right] \quad (8.51)$$

Haciendo el cambio de variable

$$x=ka$$

entonces

$$k=x/a$$

y por lo tanto

$$dk=dx/a$$

en las ecuaciones (8.50) y (8.51), se observa que los términos

$$(-1)^{n+l} k^{2n+2l+2} K_1^2(ka),$$

$$(-1)^{n+m} k^{2n+2m+2} K_1^2(ka) \cos(ka) \text{ y}$$

$$(-1)^{n+l} k^{2n+2l+2} K_1^2(ka) \cos^2(ka)$$

definen un nuevo valor $F_{n,l,q}$ para $q=0,1,2$:

$$\int_0^\infty (-1)^{n+l} k^{2n+2l+2} K_1^2(ka) \cos^2(ka) = \int_0^\infty (-1)^{n+l} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+2l+2} K_1^2(x) \cos^q(x) \frac{dx}{a} = \frac{1}{a^{2n+2l+3}} \int_0^\infty (-1)^{n+l} x^{2n+2l+2} K_1^2(x) \cos^q(x) dx$$

tal que
$$F_{n,l,q} = \int_0^\infty (-1)^{n+l} x^{2n+2l+2} K_1^2(x) \cos^q(x) dx \quad (8.52)$$

Reemplazando (8.52) en (8.49):

$$B_0 = \left(\frac{\mu_0}{2\pi\alpha^{l+1}} \right)^2 \sigma l \left[\sum_{n=0}^p \lambda_l F_{0,l,0} + \sum_{l=1}^{p-2} \nu_l F_{0,l,1} \right] \quad (8.53)$$

Ahora se definen

$$\theta_l = \left(\frac{\mu_0}{2\pi\alpha^{l+1}} \right)^2 \frac{\sigma l}{B_0} \lambda_l \quad (8.54)$$

y

$$\varphi_l = \left(\frac{\mu_0}{2\pi\alpha^{l+1}} \right)^2 \frac{\sigma l}{B_0} \nu_l \quad (8.55)$$

Al reemplazar las ecuaciones (8.54) y (8.55) en (8.53) se obtiene

$$1 = \sum_{l=0}^p \theta_l F_{0,l,0} + \sum_{l=1}^{p-2} \varphi_l F_{0,l,1} \quad (8.56)$$

De la misma manera, se reemplaza (8.52) en (8.50) y (8.51) para n mayor que cero:

$$0 = \sum_{l=0}^p \theta_l F_{n,l,0} + \sum_{l=1}^{p-2} \varphi_l F_{n,l,1} \quad (8.57)$$

de la cual se establecen “p” ecuaciones

$$0 = \sum_{l=0}^p \theta_l F_{n,l,1} + \sum_{l=1}^{p-2} \varphi_l F_{n,l,2} \quad (8.58)$$

de la cual se establecen “(p-2)” ecuaciones.

En resumen, estas tres últimas expresiones son útiles para diseñar un magneto de orden (p-2), es decir cuyas derivadas de orden (p-2) del campo magnético en la dirección axial evaluadas en $z=a$ son cero.

Expandiendo matricialmente las ecuaciones (8.56), (8.57) y (8.58) agregando incluso los términos para las derivadas hasta de orden “p” en $z=a$ son cero:

$$1 = \theta_0 F_{0,0,0} + \theta_1 F_{0,1,0} + \theta_2 F_{0,2,0} + \theta_3 F_{0,3,0} + \varphi_1 F_{0,1,1} + \varphi_2 F_{0,2,1} + \varphi_3 F_{0,3,1}$$

$$0 = \theta_0 F_{1,0,0} + \theta_1 F_{1,1,0} + \theta_2 F_{1,2,0} + \theta_3 F_{1,3,0} + \varphi_1 F_{1,1,1} + \varphi_2 F_{1,2,1} + \varphi_3 F_{1,3,1}$$

$$0 = \theta_0 F_{2,0,0} + \theta_1 F_{2,1,0} + \theta_2 F_{2,2,0} + \theta_3 F_{2,3,0} + \varphi_1 F_{2,1,1} + \varphi_2 F_{2,2,1} + \varphi_3 F_{2,3,1}$$

$$0 = \theta_0 F_{3,0,0} + \theta_1 F_{3,1,0} + \theta_2 F_{3,2,0} + \theta_3 F_{3,3,0} + \varphi_1 F_{3,1,1} + \varphi_2 F_{3,2,1} + \varphi_3 F_{3,3,1}$$

$$0 = \theta_0 F_{1,0,1} + \theta_1 F_{1,1,1} + \theta_2 F_{1,2,1} + \theta_3 F_{1,3,1} + \varphi_1 F_{1,1,2} + \varphi_2 F_{1,2,2} + \varphi_3 F_{1,3,2}$$

$$0 = \theta_0 F_{2,0,1} + \theta_1 F_{2,1,1} + \theta_2 F_{2,2,1} + \theta_3 F_{2,3,1} + \varphi_1 F_{2,1,2} + \varphi_2 F_{2,2,2} + \varphi_3 F_{2,3,2}$$

$$0 = \theta_0 F_{3,0,1} + \theta_1 F_{3,1,1} + \theta_2 F_{3,2,1} + \theta_3 F_{3,3,1} + \varphi_1 F_{3,1,2} + \varphi_2 F_{3,2,2} + \varphi_3 F_{3,3,2}$$

Volviendo a la expresión de densidad de corriente dada por la ecuación (8.48):

$$j_\varphi(k) = \frac{\mu_0 \sigma I}{4\pi} \left[\sum_{n=0}^p \lambda_n (-1)^n k^{2n+1} K_1(ka) + \sum_{m=1}^{p-2} \nu_m (-1)^m k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) \right] \quad (8.59)$$

Y a su vez, de las ecuaciones (8.54) y (8.55) se puede despejar:

$$\lambda_l = \frac{B_0}{\sigma t} \left(\frac{2\pi a^{l+1}}{\mu_0} \right)^2 \theta \quad (8.60)$$

y

$$v_l = \frac{B_0}{\sigma t} \left(\frac{2\pi a^{l+1}}{\mu_0} \right)^2 \varphi_l \quad (8.61)$$

Al desarrollar la expresión (8.59) reemplazando los valores λ_l y v_l dados en (8.60) y (8.61) respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} j_\varphi(k) &= \frac{\mu_0 \sigma t}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{\mu_0} \right)^2 \frac{B_0}{\sigma t} \left[\sum_{n=0}^p (-1)^n a^{2n+2} \theta_n k^{2n+1} K_1(ka) + \sum_{m=1}^{p-2} (-1)^m a^{2m+2} k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) \right] \\ &= \frac{\pi B_0}{\mu_0} \left[\sum_{n=0}^p (-1)^n a^{2n+2} \theta_n k^{2n+1} K_1(ka) + \sum_{m=1}^{p-2} (-1)^m a^{2m+2} k^{2m+1} K_1(ka) \cos(ka) \right] \quad (8.62) \end{aligned}$$

)

Aplicando la identidad de Transformada Coseno de Fourier dada por

$$J_\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty j_\varphi(k) \cos(kz) dk$$

$$J_\varphi(z) = \frac{B_0}{\mu_0} \int_0^\infty \left\{ K_1(ka) \cos(kz) \left[\sum_{n=0}^p (-1)^n a^{2n+2} \theta_n k^{2n+1} + \cos(ka) \sum_{m=1}^{p-2} (-1)^m a^{2m+2} \varphi_m k^{2m+1} \right] \right\} dk$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = ka$$

entonces

$$k = x/a$$

y por lo tanto

$$dk = dx/a$$

$$J_\varphi(z) = \frac{B_0}{\mu_0} \int_0^\infty dx \left\{ K_1(x) \cos\left(\frac{xz}{a}\right) \left[\sum_{n=0}^p (-1)^n x^{2n+1} \theta_n + \cos(x) \sum_{m=1}^{p-2} (-1)^m x^{2m+1} \varphi_m \right] \right\} \quad (8.63)$$

Sea

$$\theta_p(x) = \sum_{n=0}^p (-1)^n x^{2n+1} \theta_n \quad (8.64)$$

$$y \quad \varphi_p(x) = \text{Cos}(x) \sum_{m=1}^{p-2} (-1)^m x^{2m+1} \varphi_m \quad (8.65)$$

Luego, reemplazando (8.64) y (8.65) en (8.63), se obtiene

$$J_\varphi(z) = \frac{B_0}{\mu_0} \int_0^\infty dx K_1(x) \text{Cos}\left(\frac{xz}{a}\right) \{\theta_p(x) + \varphi_p(x)\} \quad (8.66)$$

Con la finalidad de obtener $B_z(\rho, z)$, se reemplaza la ecuación (8.36)

$$j_\varphi(k) = \frac{B_0 \pi}{\mu_0} \sum_{l=0}^p a^{2l+2} k^{2l+1} K_1(ka) \theta_l$$

en la ecuación (8.19) $B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty dk \text{Cos}(kz) k j_\varphi(k) K_1(ka) I_0(k\rho)$

$$\begin{aligned} B_z(\rho, z) &= \frac{\mu_0 a}{\pi} \int_0^\infty k I_0(k\rho) K_1(ka) \text{Cos}(kz) \left(\frac{B_0 \pi}{\mu_0} \sum_{l=0}^p a^{2l+2} k^{2l+1} K_1(ka) \theta_l \right) dk \\ &= a^3 B_0 \int_0^\infty k^2 I_0(k\rho) K_1^2(ka) \text{Cos}(kz) \sum_{l=0}^p a^{2l} k^{2l} \theta_l dk \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$x=ka$$

entonces

$$k=x/a$$

y por lo tanto

$$dk=dx/a$$

$$B_z(\rho, z) = a^3 B_0 \int_0^\infty \frac{x^2}{a^2} I_0\left(x \frac{\rho}{a}\right) K_1^2(x) \text{Cos}\left(x \frac{z}{a}\right) \sum_{l=0}^p x^{2l} \theta_l \frac{dx}{a}$$

simplificando y haciendo,

$$\theta_p(x) = \sum_{l=0}^{2l+2} \theta_l \quad (8.67)$$

$$B_z(\rho, z) = B_0 \int_0^\infty I_0\left(x \frac{\rho}{a}\right) K_1^2(x) \text{Cos}\left(x \frac{z}{a}\right) \theta_p(x) dx \quad (8.68)$$

A continuación se presentan las gráficas de corriente y campo correspondientes a cada una de las variaciones estudiadas, es decir:

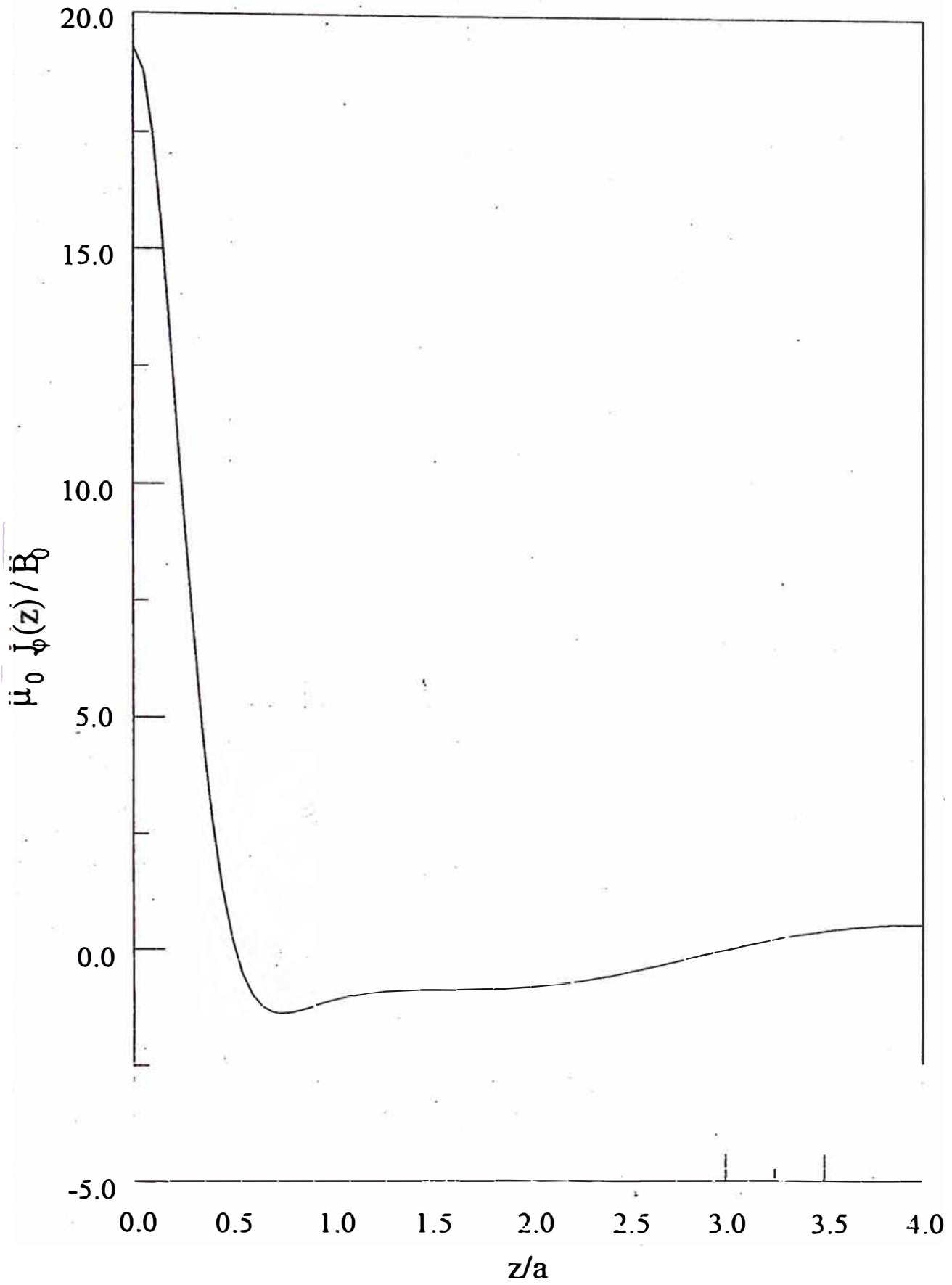
i) $p=3$ en el centro y $p=1$ en $z=a$

ii) $p=3$ en el centro y $p=3$ en $z=a$.

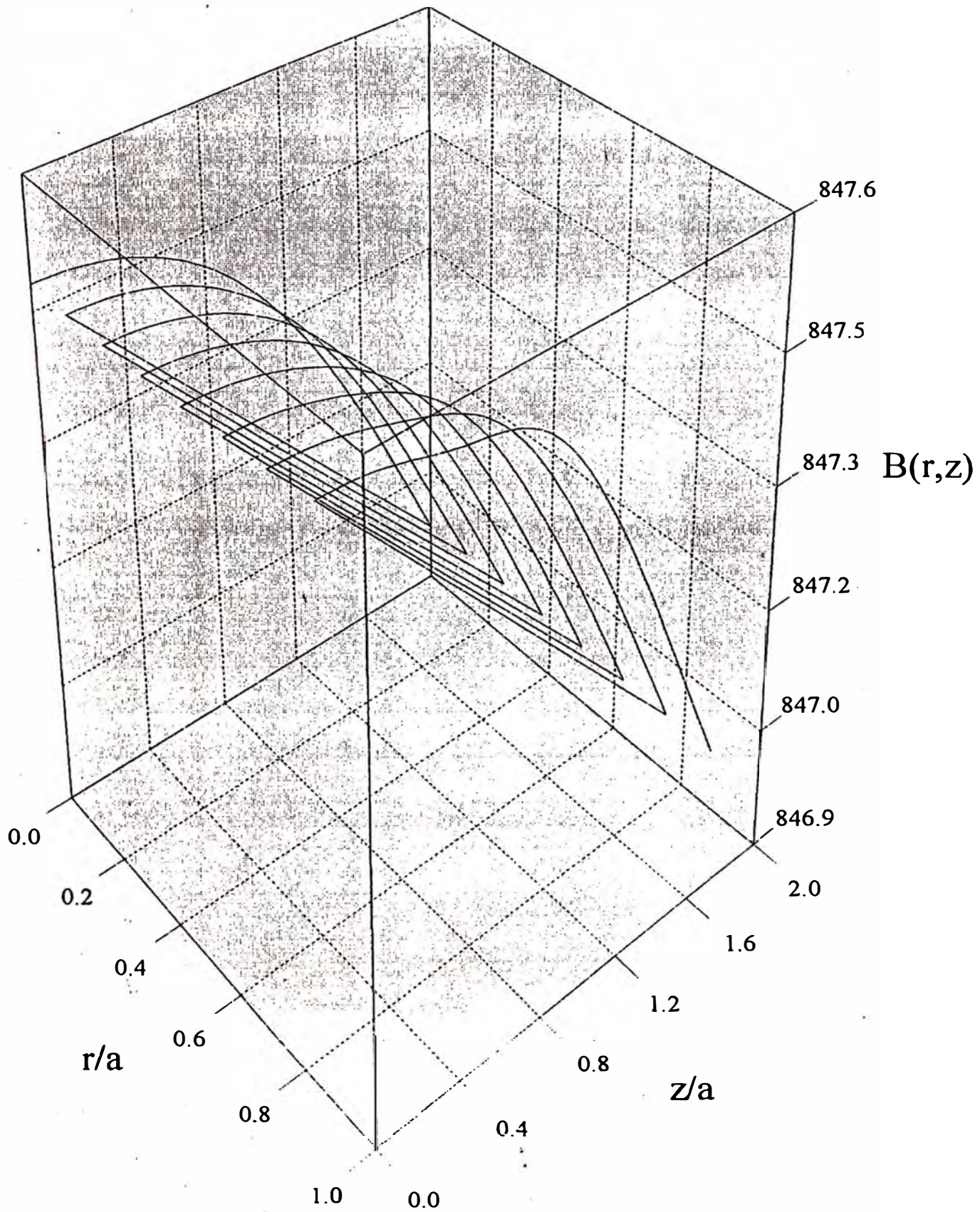
Corriente

p=3 en z=0

p=1 en z=a



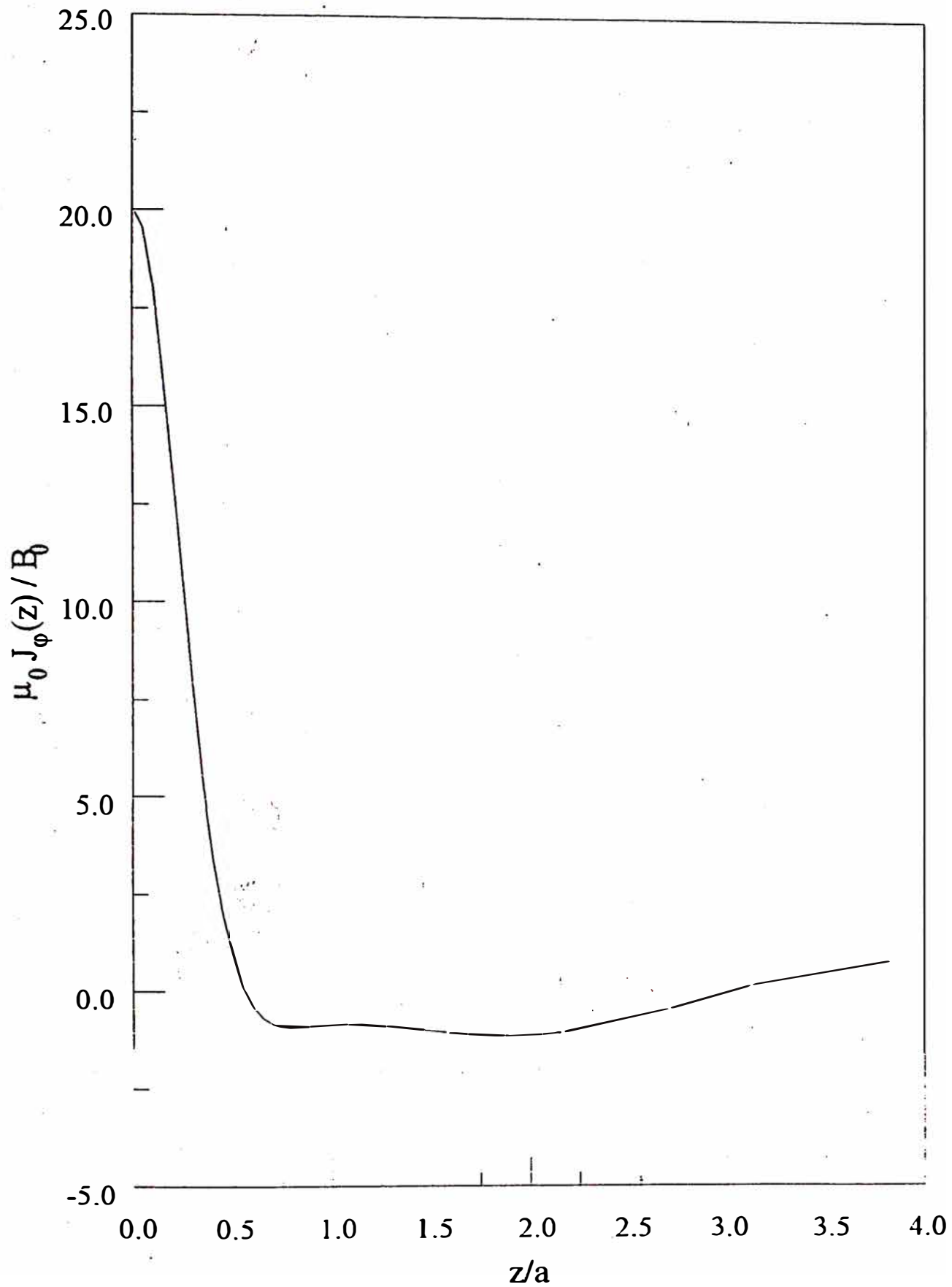
Campo para $p=3$ en $z=0$
y $p=1$ en $z=a$



Corriente para

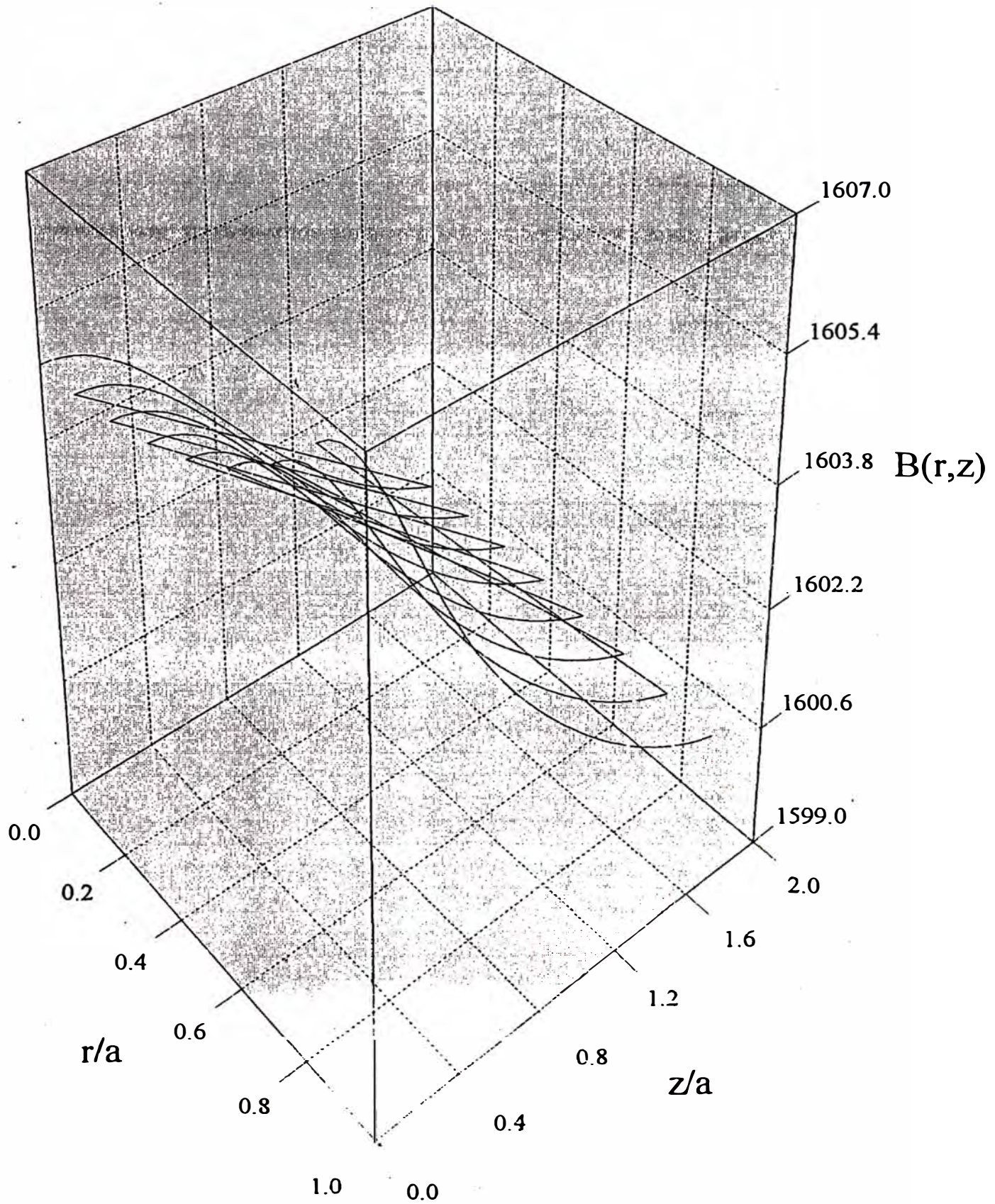
$p=3$ en $z=0$

$p=3$ en $z=a$



Campo para $p=3$ en $z=0$

y $p=3$ en $z=a$



CONCLUSIONES Y RESULTADOS

De los resultados del Capítulo VIII, se pueden deducir conclusiones de interés práctico. Uno primero definiría una homogeneidad favorable dentro de una región espacial específica. Por ejemplo uno puede requerir que el campo magnético a lo largo del eje cilíndrico no se desvíe de su valor en el centro por más de 2×10^{-4} , dentro de $|z| \leq a/2$. De las gráficas mostradas en la sección 8.2 uno concluye que esta homogeneidad sólo puede ser alcanzada con una configuración prevista para $p \geq 3$. Más aún, Los resultados obtenidos permiten averiguar la disipación de potencia de configuraciones familiares de homogeneidad comparable.

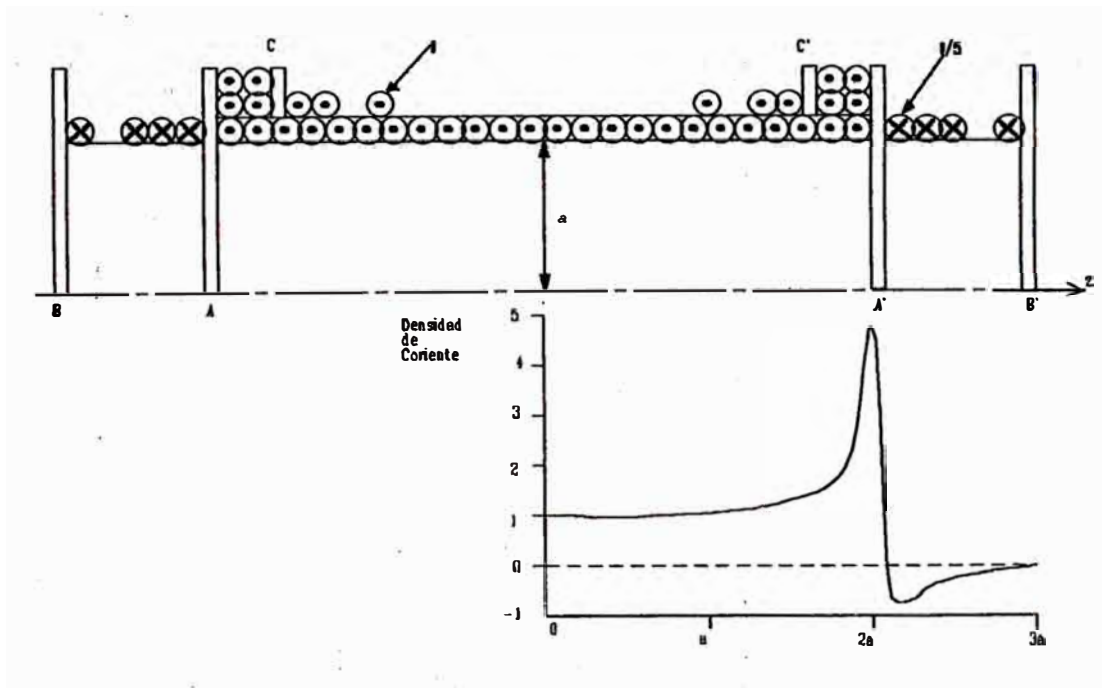
p	θ_n	$\epsilon_p = \mu_0^2 \sigma I P / 2(\pi B_0 a)^2$
1	$\theta_0=1.3742$ $\theta_1=-0.31436$	$\epsilon_1=1.3753$
2	$\theta_0=1.54672$ $\theta_1=-0.61197$ $\theta_2=0.2625$	$\epsilon_2=1.5466$
3	$\theta_0=1.66764$ $\theta_1=-0.88275$ $\theta_2=0.06881$ $\theta_3=-0.00103$	$\epsilon_3=1.6676$

El factor de potencia correspondiente a una densidad uniforme de corriente con una longitud total de $8a$, el cual conduce a una homogeneidad espacial dentro de $|z/a| \leq a/2$, comparable a un magneto de potencia mínima con $p=2$, sería 75% mayor que ϵ_2 .

Para el solenoide diseñado por la técnica convencional $B_z(0,z)/B_0 = 1/(1+(z/d)^6)$ con $d = 2.03a$, dentro de $|z/a| \leq a/2$, que corresponde a una homogeneidad comparable a $p=3$, el factor de potencia es alrededor de 70% mayor que el ϵ_3 . Los valores de ϵ_p se obtienen de las ecuaciones (8.23), (8.30) y (8.32) y se muestran en la Tabla anterior.

La homogeneidad de campo magnético fuera de eje del cilindro representada por $|B_z(r,z) - B_0|/B_0$, como una función de z/a , para varios valores de r/a , fueron calculados de la ecuación (8.19).

Entre los distintos magnetos considerados, el de solenoide corregido en los extremos planteado por Turner, es muy eficiente. La desviación de campo es menor que 2×10^{-4} , dentro de un cilindro de diámetro a y longitud a , y de densidad uniforme de corriente.



La densidad uniforme de corriente puede ser lograda usando cables de diámetros ligeramente distintos (5 AWG para el devanado principal y 4 AWG para los

devanados de corrección) y cables conectados en paralelo a cada lado de los espaciadores A y A', los cuales están ubicados en puntos donde la densidad de corriente debería desaparecer. Las secciones BA y B'A' contienen cinco cables # 5 AWG en paralelo, cada uno portando una corriente $I/5$, donde I es la corriente total.

La sección AA' contiene un devanado uniforme en el fondo de cable # 5 AWG y dos capas correctoras en el tope de cable # 4 AWG los cuales están confinados dentro de las secciones AC y A'C' por los espaciadores CC'.

Ajustando el espaciamiento de los cables en los devanados de corrección de tal manera que la corriente multiplicada por el espaciamiento sea igual al área bajo la curva de corriente de la figura en ese intervalo en particular. Para un magneto de 30 mT de intensidad, de 0.8 m de diámetro y 2,4 m de longitud se consigue una disipación de 11.6 kW de potencia. Sólo el 25% de este total se disipa en los devanados de corrección. Un magneto de una sola capa de conductor laminar ha sido construido y está siendo usado en la Universidad de Pernambuco, Brasil.

A pesar del enorme consumo de potencia de los magnetos resistivos, existen ciertos problemas que sólo pueden ser estudiados a campos altos (ejemplos incluyen: transiciones de metal-aislante en semiconductores y conductores orgánicos) y la única manera de alcanzar estos campos mayores de 21 Tesla es con magnetos resistivos, ya que los magnetos superconductivos de más de 23 Tesla no pueden ser alcanzados hasta que la nueva tecnología de materiales superconductivos este disponible..

Similarmente, el incremento de los niveles de campo de un imán permanente sólo se puede alcanzar con el desarrollo de nuevos materiales con reducido costo y peso. Por lo tanto, cualquier tendencia hacia campos mayores sólo se logrará a través del

desarrollo de sistemas superconductivos. La expansión del mercado de sistemas de alma pequeña para investigación y también para trabajo pediátrico, ha resultado en magnetos con acceso menor de 50 cm, pero campos mayores que 4 T. Desarrollos futuros a campos mayores dependerán de las fuerzas del mercado.

Para la expansión futura de los magnetos NMR, se deben reducir también los campos de dispersión. En muchos casos esto puede ser logrado por medio de una coraza de hierro. Los primeros ambientes para magnetos NMR consideraban un edificio especial. Ya que el número de instalaciones se ha incrementado, esto se ha convertido en una alternativa poco práctica en muchos casos. Diseños futuros deben apuntar a reducir los campos de dispersión, así como a minimizar la cantidad de hierro en la coraza.

Los requerimientos para sistemas móviles también ha presentado al diseñador nuevos retos. Estos involucran desarrollo de magnetos superconductivos, los cuales pueden ser puestos en funcionamiento y alcanzar la estabilidad de campo requerida en un periodo de tiempo lo más corto posible.

BIBLIOGRAFIA

1. Purcell, E. M., H. C. Torrey, and R. V. Pound, 1946, "Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid", Phys. Rev. 69, 37.
2. Bloch, F., W. W. Hansen, and M. Paczkard, 1946a. "The Nuclear Induction Experiment", Phys. Rev. 70, 474.
3. Rabi, I., J. M. B. Kellogg, and J. R. Zacharias, 1936, "The Sign of the Magnetic Moment of the Proton", Phys. Rev. 49, 421.
4. Lauterbur
5. Hoult
6. Cook and Lowe
7. Alderman and Grant
8. Bottomley
9. Schneider and Dullenkopf
10. Redpath
11. Jackson J. D. - Classical Electrodynamics (Second Edition).
12. Thomas S. R. , Dixon R. L. - NMR in Medicine: The instrumentation and Clinical Applications.
13. Abramowitz M. , Stegun I. A. - Handbook of Mathematical Functions.
14. C.R.C. Press - Handbook of Chemistry and Physics (58th. Edition) .
15. Samper J. V. , Bonnati L. M. - Resonancia Magnética: Diagnóstico por la Imágen.
18. Slichter C. P. - Principles of Magnetic Resonance.

19. Fukushima E. , Roeder S. B. - Experimental Pulse NMR: A nuts and bolts approach.
20. Engelsberg M. - Target field approach for the design of power efficient solenoidal magnets - Meas. Sci. Technol. 3 (1992) 1063-1067. Printed in the U.K.
21. Turner R. - A target field approach to optimal coil design - J. Phys. D: Appl. Phys. 19 (1986) L147-L151. Printed in Great Britain.
22. Turner R. and Bowley R. M. - Passive screening of switched magnetic field gradients - The Institute of Physics (1986) 876-879. Printed in U.K.
23. Kasal M. , Halámek J. and Husek V. - Signal processing in transceivers for nuclear magnetic resonance and imaging - Rev. Sci. Instrum. 65 (6), June 1994 (1897-1902). Printed in U.S.A.
24. Shaw D. - The Fundamental Principles of Nuclear Magnetic Resonance.
25. Rosen B. - Curso de Resonancia Magnetica en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (M.I.T.) de Feb. a Jun. de 1996.
26. Gadian D. G. - The Theoretical Basis of NMR Experiment.