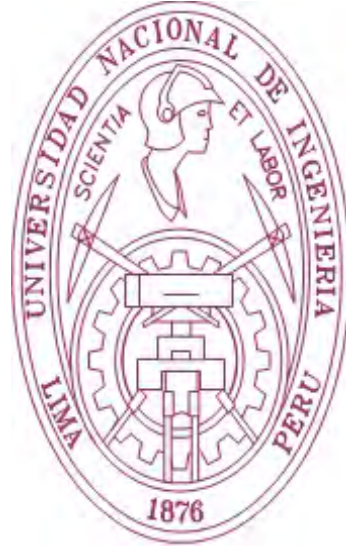


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
SECCIÓN DE POSGRADO



**ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS
USANDO VECTORES DE RITZ**

T E S I S

Para optar el Grado de Maestro en Ciencias
con Mención en Ingeniería Estructural

Elaborado por:

Ing. Duani Edith Mosquera Maguiña

Asesor:

Dr. Hugo Scaletti Farina

LIMA - PERÚ

2012

Dedicatoria:

A mi asesor Dr. Hugo Scaletti por su orientación, paciencia y confianza. A mis colegas profesores del Departamento de Ciencias Básicas que me brindaron su apoyo en la realización de la tesis.

Agradecimientos:

A ti Señor, porque hiciste realidad este sueño de la realización de la Tesis.

A mi Familia, por el apoyo incondicional, comprensión y confianza en los momentos que sentía que sería inalcanzable.

A mi esposo Ricardo y mis queridos hijos Gabriela y César que son la fuerza que me impulsa a seguirme superando.

Índice

Resumen	v
Lista de Figuras	vi
Lista de Tablas	viii
Lista de Siglas y Símbolos	xi
1. Generalidades	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	1
1.3. Formulación de la Hipótesis	2
1.4. Metodología de Trabajo	2
1.5. Organización de la Tesis	2
2. Respuesta Dinámica de una Estructura con MGL	4
2.1. Ecuaciones de Movimiento	5
2.2. Formulación y Solución de la Respuesta Estructural	6
2.2.1. Excitación Armónica sin Amortiguamiento	9
2.2.2. Excitación Armónica con Amortiguamiento	10
3. Generación de Vectores de Ritz	11
3.1. Solución del Sistema Dinámico usando Vectores de Ritz	12
3.1.1. Proceso de ortogonalización con Gram Schmidt	14
3.2. Desarrollo del Algoritmo y Diagrama de Flujo	16
3.3. Método de Diferencia Central	19
3.4. Implementación Numérica del Algoritmo de Respuesta en el Tiempo en Matlab	22
3.4.1. Descripción del modelo de aplicación	27

3.4.2. Registro Sísmico	27
3.4.3. Resultados obtenidos	29
4. Estimación del Error	33
4.1. Factor de Participación Modal para la Función de Carga	33
4.2. Estimación del Error del Vector de Fuerzas	34
4.3. Uso de la Norma del Vector de Fuerzas	35
4.4. Desarrollo del algoritmo del cálculo del Error	36
4.5. Cálculo del Error en el Modelo	38
5. Aplicaciones al Análisis Dinámico Lineal	39
5.1. Descripción de los Modelos	39
5.2. Resultados Obtenidos con el Etabs 9.7	51
5.2.1. Factor de participación de masa	51
5.2.2. Cálculo de cortantes y momentos	55
5.3. Análisis de los resultados obtenidos	73
6. Análisis no Lineal	74
6.1. Solución para Análisis Dinámico No Lineal	75
6.1.1. Solución de la ecuación no-lineal	76
6.1.2. Ecuaciones modales no-lineales	77
6.1.3. Descripción de los modelos para aplicación del método	79
6.1.4. Procesamiento de datos	82
7. Conclusiones y Recomendaciones	87
7.1. Conclusiones	87
7.2. Recomendaciones	88
Apéndice	89
Cortantes y Momentos en la Base	89
Cortantes y Momentos en el nivel superior	93
Bibliografía	97

Resumen

La presente tesis trata del uso de vectores de Ritz como base para resolver las ecuaciones de equilibrio dinámico en el análisis estructural. Se revisan los aspectos teóricos del método de Rayleigh Ritz y algoritmos para determinar eficientemente los vectores de Ritz. Además, se desarrolla un estudio del error basado en la fracción incluida del vector de cargas, que mide la convergencia del método.

Para la verificación de la propuesta se ha codificado un programa en Matlab, comparando en un caso simple los resultados obtenidos usando valores y vectores propios con aquellos producidos empleando vectores de Ritz. También se comprueba la propuesta con modelos de estructuras reales con distintos grados de irregularidad, usando con tal fin el programa Etabs. Se comparan en cada caso desplazamientos máximos, fuerzas cortantes y momentos flectores.

Finalmente, se ha considerado el uso de vectores de Ritz en el contexto del procedimiento de análisis no lineal rápido propuesto por Wilson, comparándose resultados obtenidos en el análisis sísmico de estructuras con aisladores y con disipadores viscosos.

En todos los casos empleando vectores de Ritz se obtienen resultados tan o más precisos que los que se logran con igual número de vectores propios.

Summary

This thesis deals with the use of Ritz vectors for solving dynamic equilibrium equations in structural analysis. Theoretical aspects of the Rayleigh Ritz method are first considered, as well as algorithms for an efficient computation of Ritz vectors. An error analysis of the procedure, based on the load fraction included, is also presented

A Matlab code was set up in order to verify the validity of the procedure when applied to a simple case of dynamic analysis, comparing the results with those obtained using eigenvectors. The procedure was then applied to the seismic analysis of real structures, with different degrees of irregularity, using Etabs. Maximum displacements, shear forces and moments were compared in each case.

In the last chapter, Ritz vectors are used as the basis for Fast Nonlinear Analyses (FNA) as proposed by Wilson, comparing results obtained for structures with seismic isolators and viscous dampers.

For all cases studied it was observed that Ritz vectors provide better or at least as accurate results as those obtained with the same number of eigenvectors.

Lista de Figuras

3.1.	Diagrama de flujo para la obtención de vectores de Ritz	18
3.2.	Diagrama de flujo de la subrutina Diferencia Central	21
3.3.	Diagrama de flujo para solución por valores y vectores propios	23
3.4.	Modelo Estructural con 20 masas	27
3.5.	Registro del Sismo del 3/10/1974 Lima-Perú escalado a 400 gals	28
3.6.	Respuesta Dinámica en la masa del primer nivel a la sollicitación SIS-MO74 resuelta con valores y vectores propios para 20 modos	31
3.7.	Respuesta Dinámica en la masa del primer nivel a la sollicitación SIS-MO74 resuelta con vectores de Ritz para 8 modos	32
4.1.	Diagrama de flujo del cálculo del error por el Vector de Cargas	37
4.2.	Convergencia del error usando vectores de Ritz	38
5.1.	Modelo 1 Colegio Torre Octogonal	40
5.2.	Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A	41
5.3.	Planta Típica del Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A	42
5.4.	Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B	43
5.5.	Planta del Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B	44
5.6.	Modelo 4 Torres Gemelas de 12 Pisos	45
5.7.	Planta Típica de Torres Gemelas de 12 Pisos	46
5.8.	Modelo 5 Edificio de 5 pisos con Muros de Ductilidad Limitada	47
5.9.	Planta Típica del Edificio de 5 pisos con Muros de Ductilidad Limitada	48
5.10.	Modelo 6 Pequeño Auditorio	49
5.11.	Planta del Pequeño Auditorio	50
5.12.	Nº de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 1	52
5.13.	Nº de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 2	52
5.14.	Nº de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 3	53
5.15.	Nº de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 4	53

5.16. N° de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 5 .	54
5.17. N° de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 6 .	54
5.18. Desplazamiento en la dirección X para solicitación S_x en el Modelo 1 .	63
5.19. Desplazamiento en la dirección Y para solicitación S_y en el Modelo 1 .	64
5.20. Desplazamiento en la dirección X para solicitación S_x en el Modelo 2 .	65
5.21. Desplazamiento en la dirección Y para solicitación S_y en el Modelo 2 .	66
5.22. Desplazamiento en la dirección X para solicitación S_x en el Modelo 3 .	67
5.23. Desplazamiento en la dirección Y para solicitación S_y en el Modelo 3 .	68
5.24. Desplazamiento en la dirección X para solicitación S_x en el Modelo 4 .	69
5.25. Desplazamiento en la dirección Y para solicitación S_y en el Modelo 4 .	70
5.26. Desplazamiento en la dirección X para solicitación S_x en el Modelo 5 .	71
5.27. Desplazamiento en la dirección Y para solicitación S_y en el Modelo 5 .	72
6.1. Modelo 1 con Disipadores	80
6.2. Modelo 2 con Aisladores	81
6.3. SISMO74 correspondiente al Sismo en Lima del 3 de Octubre de 1974 .	81
6.4. Deformada en el portico como respuesta a la excitación SISMO 1974 en el modelo 1	82
6.5. Desplazamiento del nivel superior en cm en el tiempo como respuesta a la excitación del registro de SISMO74 (a) con análisis modal y (b) vectores de Ritz en el modelo 1 con Disipadores	83
6.6. Deformada en el portico como respuesta a la excitación del registro SISMO74 en el modelo 2 con aisladores	84
6.7. Desplazamiento del nivel superior en cm en el tiempo como respuesta en el modelo 2 con aisladores a la excitación del registro SISMO74 (a) con análisis modal y (b) vectores de Ritz	85

Lista de Tablas

3.1. Periodo calculado con vectores propios y vectores de Ritz variando el número de modos	29
5.1. N° de modos necesarios para alcanzar una participación de masa del 90 % ó más con vectores propios y vectores de Ritz en los modelos analizados	51
5.2. Cortante en X y Momento en Y para S_x en la base Modelo 1 Colegio Torre Octogonal	55
5.3. Cortante en Y y Momento en X para S_y en la base en Modelo 1 Colegio Torre Octogonal	55
5.4. N° de modos necesarios para el cálculo del cortante y momento en la base con un error menor al 1 %	56
5.5. Cortante y Momento en el nivel superior con solicitación S_x en Colegio Torre Octogonal	57
5.6. Cortante y Momento en el nivel superior con solicitación S_y en Colegio Torre Octogonal	57
5.7. N° de modos necesarios en cada modelo para el cálculo del cortante y momento en el nivel superior con error menor del 1 %	57
5.8. Cortante por piso V_x por solicitación S_x Colegio Torre Octogonal	58
5.9. Cortante por piso V_y por solicitación S_y Colegio Torre Octogonal	58
5.10. Cortante en X por piso por solicitación S_x para el Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A	59
5.11. Cortante en Y por piso por solicitación S_y para el Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A	59
5.12. Cortante por piso V_x por solicitación S_x Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B	59
5.13. Cortante por piso V_y por solicitación S_y Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B	60
5.14. Cortante en X por piso por solicitación S_x Modelo 4 Torres Gemelas de 12 pisos	60
5.15. Cortante en Y por piso por solicitación S_y Modelo 4 Torres Gemelas de 12 pisos	61

5.16. Cortante en X por piso por sollicitación S_x Modelo 5 Edificio de 5 pisos con muros de ductibilidad limitada	61
5.17. Cortante en Y por piso por sollicitación S_y Modelo 5 Edificio de 5 pisos con muros de ductibilidad limitada	61
5.18. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_x en el Modelo 1 .	63
5.19. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 1 Colegio Torre Octogonal	64
5.20. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_x en el Modelo 2 .	65
5.21. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 2 .	66
5.22. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_x en el Modelo 3 .	67
5.23. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 3 .	68
5.24. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_x en el Modelo 4 .	69
5.25. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 4 .	70
5.26. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_x en el Modelo 5 .	71
5.27. Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 5 .	72
6.1. El Cortante en la Base en t en el modelo 1 con disipadores para análisis no lineal con análisis modal y vectores de Ritz	82
6.2. El desplazamiento en cm en el nivel superior para el modelo 1 con disipadores	83
6.3. Cortante en la base en t del modelo 2 con aisladores para análisis no lineal con análisis modal y vectores de Ritz	84
6.4. Desplazamiento en <i>cm</i> en el nivel superior para el modelo 2 con aisladores	85
1. Cortante y Momento en la Base con S_x Modelo 2	89
2. Cortante y Momento en la Base con S_y Modelo 2	89
3. Cortante y Momento en la Base con S_x Modelo 3	90
4. Cortante y Momento en la Base con S_y Modelo 3	90
5. Cortante y Momento en la Base con S_x Modelo 4	91
6. Cortante y Momento en la Base con S_y Modelo 4	91
7. Cortante y Momento en la Base con S_x Modelo 5	92
8. Cortante y Momento en la Base con S_y Modelo 5	92
9. Cortante y Momento en el nivel superior con S_x Modelo 2	93
10. Cortante y Momento en el nivel superior con S_y Modelo 2	93
11. Cortante y Momento en el nivel superior con S_x Modelo 3	94
12. Cortante y Momento en el nivel superior con S_y Modelo 3	94
13. Cortante y Momento en el nivel superior con S_x Modelo 4	95

14.	Cortante y Momento en el nivel superior con S_y Modelo 4	95
15.	Cortante y Momento en el nivel superior con S_x Modelo 5	96
16.	Cortante y Momento en el nivel superior con S_y Modelo 5	96

Lista de Siglas y Símbolos

MEF	Método de Elementos Finitos
K	Matriz de Rigidez de orden n
M	Matriz de Masa de orden n
C	Matriz de Amortiguamiento de orden n
$F(t)$	Vector de cargas externas
GDL	Grados de libertad
UGDL	Un Grado de libertad
MGDL	Múltiples Grados de libertad
\mathbf{u}	Vector de desplazamiento
$\dot{\mathbf{u}}$	Vector de velocidad
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vector de aceleración
$\mathbf{f}(s, t)$	Vector de carga dinámico, función del espacio y tiempo
ϕ_i	Vector propio i -ésimo
λ_i	Valor propio i -ésimo
ω	Frecuencia natural del sistema
Ω	Frecuencia de excitación del sistema
\mathbf{x}_i	Vector de Ritz i -ésimo
0X	Conjunto de vectores de Ritz orthogonalizados
p_j	Factor de participación de carga dinámica
SISMO74	Sismo en Lima del 3 de Octubre de 1974
FNA	Fast Non linear Analysis

1

Generalidades

1.1. Introducción

En el análisis dinámico lineal de estructuras se plantea resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, existiendo mucha información que proponen diferentes métodos de las matemáticas aplicadas para obtener la solución.

Un enfoque común y efectivo para el análisis sísmico de estructuras cuyo comportamiento se supone lineal es el método de superposición modal, que requiere de la obtención de los modos a partir del problema de valores propios, debiendo desarrollar una gran cantidad de operaciones numéricas. El método reduce el gran sistema de equilibrio a un número relativamente pequeño de ecuaciones diferenciales desacopladas de segundo orden. Sin embargo se produce gran cantidad de información que puede exigir un gran esfuerzo computacional para realizar las verificaciones; además debe ser repetido para diferentes movimientos sísmicos que permitan garantizar que se exciten todos los modos significativos. Este método podría justificarse si se tiene la seguridad que los resultados obtenidos son precisos.

En la tesis se revisa el método aproximado de Rayleigh Ritz para obtener frecuencias y algunas formas modales. Este método consiste en reducir artificialmente el número de grados de libertad, seleccionando adecuadamente los vectores de Ritz que representan las posibilidades más significativas de desplazamientos del sistema.

En la tesis se pretende comprobar que los vectores de Ritz usado como método de aproximación de la solución de la ecuación dinámica lineal requieren de un esfuerzo de cómputo mínimo y convergen a la solución exacta para cualquier distribución espacial de la carga, produciendo resultados más precisos que el uso del mismo número de formas modales.

1.2. Objetivos

Los objetivos que se pretende lograr en la tesis son:

- Demostrar la aplicabilidad del método de Rayleigh-Ritz para el análisis dinámico

lineal de estructuras con las irregularidades propias de las edificaciones reales.

- Explorar el uso de vectores de Ritz para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

1.3. Formulación de la Hipótesis

Se postula que mediante apropiados vectores de Ritz pueden analizarse estructuras de mediana y alta complejidad, consiguiéndose mejores resultados que con igual número de modos de vibración, más aún tratándose de estructuras irregulares.

1.4. Metodología de Trabajo

El trabajo está constituido por una parte teórica y una componente computacional.

Se revisa los aspectos básicos del método de Rayleigh Ritz y los algoritmos para determinar los vectores de Ritz en forma eficiente, verificando los resultados con ejemplos sencillos desarrollados en Matlab. Para el estudio del error se analiza la que se considera más factible de acuerdo a la información que se maneja, que mide la fracción del vector de cargas que no es usada en el análisis.

En el análisis estructural se considera modelos con distinto grado de irregularidad, incluyendo edificios, centros educativos y auditorios, empleando los programas comerciales Etabs versión 9.7 y Sap2000 versión 15. La calidad de los resultados es cuantificada en términos de los factores de masa participante que permiten estimar la cantidad de vectores usando vectores propios y vectores de Ritz.

Se considera finalmente la posibilidad de efectuar análisis dinámicos no lineales empleando vectores determinados con un modelo aproximado de comportamiento lineal y tratando las no linealidades como correcciones a las acciones aplicadas.

1.5. Organización de la Tesis

La tesis ha sido desarrollada en siete capítulos donde se demuestra la validez de la aplicación de los vectores de Ritz en la solución del análisis dinámico de estructuras, con modelos que presentan irregularidades propias de estructuras reales.

En el primer capítulo se desarrolla la introducción, objetivos de la tesis, hipótesis, metodología de trabajo.

En el siguiente capítulo se desarrollan las bases teóricas en las que se sustenta el análisis dinámico, desarrollando la formulación y solución de la respuesta estructural.

En el tercer capítulo se presenta el algoritmo para la generación de los vectores de Ritz, el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt; además de la implementación numérica de algoritmo en Matlab, comprobando con un modelo los resultados obtenidos.

En el cuarto capítulo se desarrolla el análisis de la estimación del error al usar los vectores de Ritz, debido al truncamiento del vector base, verificando con el modelo desarrollado en el capítulo anterior su convergencia.

En el siguiente capítulo se aplica en diferentes modelos estructurales con distintos grados de irregularidad elaborados en Etabs la convergencia de los resultados tanto en participación de masa, cortantes, momentos y desplazamientos usando vectores propios y vectores de Ritz , produciendo unas conclusiones del procesamiento de información.

El sexto capítulo se expone el método de análisis no lineal rápido FNA (Fast Non linear Analysis) aplicado a sistemas estructurales no lineales [13], donde se supone que existe un número limitado de elementos no-lineales predefinidos, se aplica a dos modelos propuestos y se verifican la calidad de los resultados.

En el último capítulo se exponen las conclusiones y recomendaciones que se extraen de la elaboración de la presente tesis.

2

Respuesta Dinámica de una Estructura con Múltiples Grados de Libertad (MGL)

Una estructura real tiene un comportamiento dinámico cuando se le aplica cargas o desplazamientos en la base. Sin embargo si éstas se aplican lentamente, las fuerzas de inercia al ser muy pequeñas pueden despreciarse y se puede justificar un análisis estático, siendo el análisis dinámico una extensión del análisis estático.

Una estructura tiene infinitos puntos y por tanto infinitos desplazamientos e infinitos grados de libertad, pero idealizada en un modelo para computadora, constituye una fase crítica asignar un número finito de elementos sin masa y un número finito de desplazamientos en los nodos (pisos) que pretendan simular el comportamiento de la estructura real y así calcular sus fuerzas internas.

La masa en el sistema estructural se supone habitualmente concentrada en los nudos ó incluso concentrada a nivel de los centros de masa de cada piso, según el modelo seleccionado. Además en el análisis típico de origen se considera que el material estructural tiene un comportamiento elástico lineal. Con tales hipótesis puede predecirse los materiales de masa y de rigidez con alto grado de confiabilidad, dado que dependen sólo de las características geométricas de la estructura y de propiedades tales como las densidades y el módulo de elasticidad, que tienen poca variabilidad.

Sin embargo la carga dinámica, disipaciones de energía y condiciones de borde pueden ser difíciles de estimar. Por ejemplo, la mayor parte de la disipación se origina por los ciclos de histéresis en las relaciones esfuerzo- deformación o fuerza- desplazamiento. Al realizar un análisis con un modelo lineal se considera una disipación viscosa (es decir, con fuerzas proporcionales a las velocidades) equivalente, pero ésta debería ajustarse al nivel de deformación que resulta del análisis. Siendo necesario realizar muchos análisis dinámicos utilizando diferentes modelos, condiciones de carga y de borde para el diseño de una estructura, entre otras cosas para optimizar su comportamiento, se requieren métodos precisos y numéricamente eficientes en los programas de cómputo.

2.1. Ecuaciones de Movimiento

El equilibrio de fuerzas de un sistema de múltiples grados de libertad, considerando masas concentradas, puede ser expresado como una función del tiempo de la siguiente forma.

$$\mathbf{F}(t)_I + \mathbf{F}(t)_D + \mathbf{F}(t)_S = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

Donde los vectores de fuerza son:

$\mathbf{F}(t)_I$ es el vector de acciones de inercia en las masas concentradas

$\mathbf{F}(t)_D$ es el vector de fuerzas de amortiguamiento viscoso

$\mathbf{F}(t)_S$ es el vector de fuerzas internas por deformación de la estructura

$\mathbf{F}(t)$ es el vector de cargas aplicadas externamente

Esta ecuación se sustenta en los principios de la física, siendo válida para sistemas lineales como no lineales si se plantea el equilibrio con respecto a la geometría deformada de la estructura [13]. Esta ecuación de equilibrio físico (2.1) para muchos sistemas estructurales que se aproximan a un comportamiento lineal se pueden convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, en términos de los desplazamientos (nodales o de piso) como:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t)_a + C\dot{\mathbf{u}}(t)_a + K \mathbf{u}(t)_a = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

Donde M es la matriz de masa (concentrada), C es la matriz de amortiguamiento viscoso y K es la matriz de rigidez estática para el sistema estructural. Los vectores dependientes del tiempo $\mathbf{u}(t)_a$, $\dot{\mathbf{u}}(t)_a$, $\ddot{\mathbf{u}}(t)_a$ son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas respectivamente.

En el caso de una acción sísmica, la carga externa $\mathbf{F}(t)$ es igual a cero. Los movimientos sísmicos básicos son representados por tres componentes de desplazamiento en la base $u(t)_{ig}$ que se determinan en algún punto debajo de la cimentación de la estructura. Por tanto se acostumbra plantear la ecuación (2.2) en términos de $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$, $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ que son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en términos relativos de la base. En consecuencia los desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas pueden ser eliminadas de la ecuación (2.2) y se reescriben como:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K \mathbf{u}(t) = -M_x\ddot{u}_{xg}(t) - M_y\ddot{u}_{yg}(t) - M_z\ddot{u}_{zg}(t) \quad (2.3)$$

Esta ecuación es válida dado que los desplazamientos y las velocidades del cuerpo rígido asociados con los movimientos de la base no causan fuerzas restauradoras elásticas o de disipación adicionales. Se debe entender que la sollicitación sísmica es debido a los desplazamientos en la base y no a cargas puntuales aplicadas a la estructura.

Sin embargo se considera suficiente el análisis por cargas estáticas equivalentes en casos sencillos de edificios de pocos pisos y con regularidad en la distribución de masas y de rigidez, siendo tales métodos especificados en los códigos de diseño sismorresistente.

Existen diferentes métodos numéricos para la solución de las ecuaciones (2.2) o (2.3), teniendo cada uno ventajas y desventajas que dependen del tipo de estructuras y carga. Resumiendo los usados en el análisis dinámico son:

- Métodos de Integración Directa
- Método de superposición modal
- Análisis modal espectral
- Análisis de dominio de frecuencias

Siendo el método numérico más eficiente para el análisis sísmico de sistemas estructurales lineales el método de superposición modal, que utiliza como vectores de forma a superponer la solución exacta del problema de valores propios. Una de las principales desventajas en este proceso es que no se toma en cuenta la distribución de carga dentro de la estructura, lo cual suele generar múltiples formas modales ortogonales a las cargas aplicadas que no participan en la respuesta dinámica de la estructura y requieren un trabajo computacional adicional sin ninguna utilidad.

2.2. Formulación y Solución de la Respuesta Estructural

La ecuación de equilibrio dinámico para un sistema estructural modelado por elementos discretos y masas concentradas se define en términos de desplazamientos modales como un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(s, t) \quad (2.4)$$

Donde:

- M , C y K son matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, todas matrices cuadradas de orden n .
- $\mathbf{f}(s, t)$ es el vector de carga dinámico que es función del espacio y tiempo. En la mayoría de los casos la variación de la carga con el tiempo es la misma para todas las componentes, es decir:

$$\mathbf{f}(s, t) = \mathbf{f}(s)g(t) = \mathbf{f} g(t)$$

- $\dot{\mathbf{u}}$ y $\ddot{\mathbf{u}}$ representan derivadas respecto del tiempo del vector desplazamiento nodal \mathbf{u}
- En la mayor parte de los análisis se supone que el sistema parte del reposo, por tanto $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$

Resolviendo el problema de valores y vectores propios para matrices simétricas K y M :

$$K \Phi = \omega^2 M \Phi \quad (2.5)$$

Si K y M son de orden n de la ecuación (2.5) se obtienen los valores y vectores propios para desacoplar la ecuación (2.4), siendo la matriz modal:

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$$

Siendo los n vectores propios linealmente independientes, los desplazamientos pueden expresarse como:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i = \Phi \mathbf{y}(t) \quad (2.6)$$

Las componentes y_i son función del tiempo, y por tanto, si se deriva se tiene:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{y}_i = \Phi \dot{\mathbf{y}}(t)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \ddot{y}_i = \Phi \ddot{\mathbf{y}}(t)$$

Además, de las condiciones iniciales: $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{0}$.

Reemplazando (2.6) y sus consecuencias en la ecuación (2.4) y además multiplicando por Φ^T , se obtiene:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\mathbf{y}}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{\mathbf{y}}(t) + \Phi^T K \Phi \mathbf{y}(t) = \Phi^T \mathbf{f} g(t) \quad (2.7)$$

Las funciones que dependen del espacio deben satisfacer las siguientes condiciones de ortogonalidad respecto a la masa y la rigidez:

$$\Phi^T M \Phi = D_1$$

$$\Phi^T K \Phi = D_2$$

Siendo D_1 y D_2 matrices diagonales, además si C se expresa como una combinación lineal de M y K tal como: $C = \alpha M + \beta K$, resulta:

$$\Phi^T C \Phi = \alpha D_1 + \beta D_2 = D_3$$

Reemplazando las matrices diagonales en la ecuación (2.7) se obtiene:

$$D_1 \ddot{\mathbf{y}}(t) + D_3 \dot{\mathbf{y}}(t) + D_2 \mathbf{y}(t) = \Phi^T \mathbf{f} g(t) = \mathbf{h}(t) \quad (2.8)$$

Considerando los términos diagonales de las matrices D_1 , D_2 y D_3 se puede escribir la ecuación diferencial i -ésima del sistema desacoplado como:

$$d_{1i} \ddot{y}_{i(t)} + d_{3i} \dot{y}_{i(t)} + d_{2i} y_{i(t)} = h_{i(t)}$$

Si se divide entre d_{1i} :

$$\frac{d_{1i}}{d_{1i}} \ddot{y} + \frac{d_{3i}}{d_{1i}} \dot{y} + \frac{d_{2i}}{d_{1i}} y = \frac{h_{i(t)}}{d_{1i}}$$

Tomando en cuenta las siguientes consideraciones, para el movimiento vibratorio:

$$\frac{d_{3i}}{d_{1i}} = 2 \xi_i \omega_i \quad \frac{d_{2i}}{d_{1i}} = \omega_i^2 \quad y \quad \xi < 1$$

Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene la ecuación diferencial desacoplada para el i -ésimo modo:

$$\ddot{y}_{i(t)} + 2 \xi_i \omega_i \dot{y}_{i(t)} + \omega_i^2 y_{i(t)} = \frac{h_{i(t)}}{d_{1i}}$$

Si se conoce que $d_{1i} = m_i$, simplificando la expresión para el término i -ésimo:

$$\ddot{y}_{(t)} + 2 \xi \omega \dot{y}_{(t)} + \omega^2 y_{(t)} = \frac{h_{(t)}}{m} \quad (2.9)$$

La ecuación diferencial homogénea es:

$$\ddot{y}_{(t)} + 2 \xi \omega \dot{y}_{(t)} + \omega^2 y_{(t)} = 0$$

Que para condiciones iniciales $\dot{y}_{(0)} = \dot{y}_0$ y $y_{(0)} = y_0$ tiene por solución general:

$$y(t) = C_1 e^{-2 \xi \omega t} \text{Cos}(\rho t) + C_2 e^{-2 \xi \omega t} \text{Sen}(\rho t)$$

Donde: $\rho = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$

Para hallar la solución particular con condiciones iniciales que parten del reposo donde $y_{(0)} = 0$ y $\dot{y}_{(0)} = 0$, se puede utilizar el operador de Green que es planteado para un caso general y se puede obtener un caso particular que es la integral de Duhamel.

Siendo la solución para $y_p(t)$:

$$\frac{1}{m} \int_{t_0}^t \frac{\begin{vmatrix} e^{-2 \xi \omega u} \text{Cos}(\rho u) & e^{-2 \xi \omega u} \text{Sen}(\rho u) \\ e^{-2 \xi \omega t} \text{Cos}(\rho t) & e^{-2 \xi \omega t} \text{Sen}(\rho t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2 \xi \omega u} \text{Cos}(\rho u) & e^{-2 \xi \omega u} \text{Sen}(\rho u) \\ -2 \xi \omega e^{-2 \xi \omega u} \text{Cos}(\rho u) - \rho e^{-2 \xi \omega u} \text{Sen}(\rho u) & -2 \xi \omega e^{-2 \xi \omega u} \text{Sen}(\rho u) - \rho e^{-2 \xi \omega u} \text{Cos}(\rho u) \end{vmatrix}} h(u) du$$

Realizando operaciones y simplificando se obtiene la Integral de Duhamel que sin perder la generalidad del operador de Green se puede considerar para un $t_0 = 0$.

$$y_p(t) = \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\xi \omega (t-u)} \text{Sen} [\rho (t-u)] h(u) du \quad (2.10)$$

Este proceso también se puede aplicar para un $t_o \neq 0$, pudiendo usar el proceso de Green para extender el análisis a otros casos de vibración.

Si se compara la ecuación (2.9) que corresponde a un sistema de múltiples GDL, con la ecuación de excitación sísmica de 1 GDL, presentan una correspondencia directa en todos sus términos. Siendo así, se presentarán dos casos particulares con sus respectivas soluciones en el cálculo estructural.

2.2.1. Excitación Armónica sin Amortiguamiento

En un sistema de múltiples GDL el cambio de frecuencia propia debido a considerar ó no el amortiguamiento no es relevante para estructuras civiles comunes, pudiéndose hacer el análisis con el sistema simplificado sin considerar amortiguamiento. Si se tuviera una excitación armónica:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + K \mathbf{u}(t) = \mathbf{P} \text{Sen}(\Omega t) \quad (2.11)$$

Las condiciones iniciales considerando que parte del reposo sería $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$

Si se desarrolla el proceso anterior, la ecuación diferencial de segundo grado desacoplada i -ésima del sistema dinámico que se propone es:

$$\ddot{y}_{i(t)} + \omega_i^2 y_{i(t)} = \frac{\phi_i^T P}{m_i} \text{Sen}(\Omega t)$$

Donde la solución estacionaria es la siguiente:

$$y_{i(t)} = \frac{\phi_i^T P}{m_i} \left(\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_i}\right)^2\right)} \left(\text{Sen}(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_i} \text{Sen}(\omega_i t) \right) \right) \quad (2.12)$$

Esta solución podría considerarse apropiada solo si la frecuencia de la excitación Ω , fuera muy distinta de la frecuencia natural del sistema, w .

Si $\Omega \ll w$ las fuerzas de inercia pueden despreciarse, teniéndose que:

$$y_{i(t)} = \frac{\phi_i^T P}{w_i^2 m_i} \text{Sen}(\Omega t)$$

Si en cambio $\Omega \gg w$ predominan las fuerzas de inercia.

En caso $\Omega \simeq w$ puede ser de interés en el análisis de cimentaciones de máquinas. En este caso el amortiguamiento tiene un papel muy importante en la respuesta, y no puede ignorarse.

2.2.2. Excitación Armónica con Amortiguamiento

El sistema a resolver es:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{P} \text{Sen}(\Omega t) \quad (2.13)$$

Las condiciones iniciales $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$

En este caso la ecuación diferencial i -ésima del sistema que se recomienda es:

$$\ddot{y}_{i(t)} + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_{i(t)} + \omega_i^2 y_{i(t)} = \frac{\phi_i^T P}{m_i} \text{Sen}(\Omega t)$$

Donde realizando las operaciones matemáticas correspondientes la solución estacionaria es:

$$y_{i(t)} = \frac{\phi_i^T P}{m_i\omega_i^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_i}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_i\frac{\Omega}{\omega_i}\right)^2}} \text{Sen}(\Omega t - \theta) \quad (2.14)$$

Donde:

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\xi_i\omega_i\Omega}{\omega_i^2 - \Omega^2}\right)$$

Al obtenerse los "n" valores de y_i mediante la ecuación (2.6), conocidos los valores propios ϕ_i se tendría la solución estructural, hallando los valores de \mathbf{u} .

En resumen, los vectores propios permiten desacoplar las ecuaciones diferenciales, y las ecuaciones desacopladas son mucho más fáciles de resolver. Por lo general no es necesario determinar todos los vectores propios, en modelos con muchos grados de libertad solo se requiere considerar las componentes según un número relativamente pequeño de vectores propios, los asociados a los valores propios, ω_i^2 , más bajos, o en todo caso aquellos cuyas frecuencias naturales son cercanas a los predominantes en la excitación.

Aún cuando se determine un número relativamente pequeño de vectores propios, el esfuerzo de cómputo para resolver este problema de valores y vectores característicos es grande, en el capítulo siguiente se considera una alternativa más eficiente.

3

Generación de Vectores de Ritz

En los métodos tradicionales de superposición modal directa se usan aproximaciones de los modos más bajos de la estructura; sin embargo el interés se centra alrededor de frecuencias cercanas a un valor específico, que permita analizar posibles condiciones de resonancia para fuerzas oscilatorias. Estas frecuencias de interés deben pertenecer al extremo más bajo del espectro, ya que las aproximaciones debido a la idealización física mediante un modelo discreto provoca que las frecuencias altas sean inexactas.

En lugar de usar los vectores modales resultantes del problema de valores propios se puede usar otro conjunto de vectores ortogonales como base del espacio de soluciones, que facilite la solución de la ecuación dinámica del problema de valores y vectores propios; al utilizar un espacio con una base de menor dimensión, pudiendo lograr una buena aproximación con menos vectores. Se puede representar la respuesta estructural a través de una combinación lineal con un número $L \ll N$ de vectores linealmente independientes, siendo este conjunto de vectores los vectores de Ritz.

Donde el primer bloque de vectores esta constituido por todas las cargas que actúan sobre la estructura, obteniéndose los desplazamientos estáticos causados por la carga, resolviendo la ecuación:

$$K \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}$$

El primer bloque de vectores no necesariamente debe ser el vector de cargas, porque podría ser aproximado por otro vector como se demostrará más adelante mediante un ejemplo.

Para la generación de vectores de Ritz se usa la ecuación recursiva, que es similar a la ecuación de iteración de sub-espacios: destaca su parecido con el método de la potencia.

$$K \mathbf{u}_{i-1} = M \mathbf{u}_i \tag{3.1}$$

Queriendo verificar en esta tesis que los vectores de Ritz producen resultados aceptables con una base de menor dimensión que el problema de valores y vectores propios con dimensión completa.

La propuesta del método es simplificar el problema para la respuesta del sistema dinámico por una respuesta aproximada.

3.1. Solución del Sistema Dinámico usando Vectores de Ritz

En el método de Rayleigh el concepto básico que se usa para encontrar una aproximación de la frecuencia de vibración para un sistema de un grado de libertad (UGDL) es el principio de conservación de energía. La energía en un sistema de vibración libre debe permanecer constante si no actúa algún tipo de amortiguación; entonces la máxima energía de deformación debe ser igual a la máxima energía cinética de la masa. El método puede ser aplicado para sistemas de múltiples grados de libertad (MGDL), que pueden ser representados como UGDL a través del uso de desplazamientos Ritz de la forma X :

$$\bar{w}^2 = \frac{K^*}{M^*}$$

Donde:

$K^* = X^T K X$ es la rigidez generalizada

$M^* = X^T M X$ es la masa generalizada

\bar{w}^2 es la aproximación de la frecuencia de vibración.

La extensión Ritz del método de Rayleigh conocido como análisis de Rayleigh-Ritz ha sido estudiada ampliamente para encontrar la aproximación de los menores valores propios y los correspondientes vectores del problema de vibración libre:

$$K \Phi = \omega^2 M \Phi$$

Donde los vectores propios Φ pueden ser aproximados por un número discreto de funciones de forma globales X del sistema original de coordenadas, llamadas vectores de Ritz y se tiene el conjunto de parámetros conocidos como las coordenadas Ritz, que caracterizan la participación de cada vector de Ritz en la solución.

El vector desplazamiento nodal \mathbf{u} se aproxima por una combinación lineal de r vectores de Ritz independientes, con $r < n$, como:

$$\mathbf{u}(t) \simeq \sum_{i=1}^r \mathbf{x}_i z_i = X \mathbf{z}(t) \quad (3.2)$$

Donde \mathbf{x}_i son los vectores de base linealmente independientes que serán generados por el algoritmo explicado más adelante y $z_i(t)$ son funciones del tiempo desconocidas, que son las coordenadas de Ritz.

Al derivar la ecuación (3.2) dos veces respecto del tiempo, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=1}^r x_i \dot{z}_i = X \dot{\mathbf{z}}(t)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=1}^r x_i \ddot{z}_i = X \ddot{\mathbf{z}}(t)$$

Si se tiene que la ecuación dinámica del sistema estructural es:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(s, t) = \mathbf{f}(s)g(t) = \mathbf{f}g(t) \quad (3.3)$$

Reemplazando las expresiones precedentes se tendría:

$$M X \ddot{\mathbf{z}}(t) + C X \dot{\mathbf{z}}(t) + K X \mathbf{z}(t) = \mathbf{f}g(t)$$

Se conoce que las matrices de masa M y rigidez K son cuadradas de orden n y el vector de carga \mathbf{f} de orden $n \times 1$

Como se mencionó anteriormente, uno de los mejores métodos para resolver el problema de dinámica lineal propuesto es la "técnica de superposición modal". Se escoge r modos de vibración no amortiguados libres, procedentes de la solución de los valores propios como vectores base X .

Si X es de dimensión $n \times r$, el X^T es de orden $r \times n$, multiplicando X^T en la ecuación anterior:

$$X^T M X \ddot{\mathbf{z}}(t) + X^T C X \dot{\mathbf{z}}(t) + X^T K X \mathbf{z}(t) = X^T \mathbf{f}(s) g(t)$$

Representando estas matrices como:

$$X^T M X = M^*$$

$$X^T C X = C^*$$

$$X^T K X = K^*$$

$$X^T \mathbf{f}(s) = \mathbf{f}^*$$

Siendo estas nuevas matrices de rigidez, masa y amortiguamiento (M^* , C^* y K^*) cuadradas de orden $r \ll n$ y el vector \mathbf{f}^* de orden $r \times 1$

$$M^* \ddot{\mathbf{z}}(t) + C^* \dot{\mathbf{z}}(t) + K^* \mathbf{z}(t) = \mathbf{f}^* g(t) \quad (3.4)$$

Con esta particular elección se demuestra la reducción de matrices M^* , C^* y K^* . Si el amortiguamiento es proporcional, estas matrices son diagonales, obteniéndose la ecuación reducida para el i -ésimo modo deducida en el capítulo anterior:

$$\ddot{z}_{(t)} + 2 \xi \omega \dot{z}_{(t)} + \omega^2 z_{(t)} = \frac{\mathbf{f}^* g(t)}{m^*}$$

El sistema reducido se transforma en un grupo de r ecuaciones independientes determinadas que pueden ser integradas una por una. Logrando un sistema de ecuaciones

diferenciales desacopladas de orden r de mucho menor orden que n que es el NGL del sistema.

Si se calcula la matriz X de vectores de Ritz de orden r y los valores propios \mathbf{z} se puede lograr el conjunto de vectores:

$${}^oX = X \mathbf{z}$$

oX son el conjunto de vectores ortogonalizados con respecto a las dos matrices de rigidez y masa del sistema completo, siendo algunos de estos vectores una buena aproximación para las formas de modo exactas de la estructura.

3.1.1. Proceso de ortogonalización con Gram Schmidt

Dada la ecuación dinámica:

$$M \ddot{\mathbf{x}} + C \dot{\mathbf{x}} + K \mathbf{x} = \mathbf{f} \ddot{u}_g(t)$$

Para resolver el problema $K \Phi = \omega^2 M \Phi$, se podría plantear la siguiente ecuación:

$$K \mathbf{y} = \mathbf{f}$$

Donde \mathbf{f} en realidad puede ser otro vector del sub-espacio. Se da \mathbf{f} para imitar la forma producida en la estructura por las fuerzas actuantes en ella.

Desarrollo del Proceso

- Sea la siguiente ecuación para determinar el vector \mathbf{y}_1 :

$$K \mathbf{y}_1 = \mathbf{f}$$

- Normalizando el vector \mathbf{y}_1 respecto a la masa:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{\sqrt{\mathbf{y}_1^T M \mathbf{y}_1}}$$

De manera que:

$$\mathbf{x}_1^T M \mathbf{x}_1 = 1$$

- Para el siguiente vector se resuelve:

$$K \mathbf{y}_2 = M \mathbf{x}_1$$

- Dado el vector \mathbf{y}_2 se procede a calcular:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{y}_2 - c_1 \mathbf{x}_1 \tag{3.5}$$

Donde $c_1 = \mathbf{x}_1^T M \mathbf{y}_2$

- Si se multiplica la ecuación (3.5) por $\mathbf{x}_1^T M$ reemplazando el valor de c_1 , se tiene:

$$\mathbf{x}_1^T M \mathbf{p}_2 = \mathbf{x}_1^T M \mathbf{y}_2 - c_1 \mathbf{x}_1^T M \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{x}_1^T M \mathbf{p}_2 = \mathbf{x}_1^T M \mathbf{y}_2 - (\mathbf{x}_1^T M \mathbf{y}_2) (\mathbf{x}_1^T M \mathbf{x}_1) = 0$$

Lo que indica que \mathbf{x}_1 es M-ortogonal a \mathbf{p}_2

- Ahora se puede normalizar \mathbf{p}_2 respecto a la masa:

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{p}_2}{\sqrt{\mathbf{p}_2^T M \mathbf{p}_2}}$$

de donde se verifica que:

$$\mathbf{x}_2^T M \mathbf{x}_2 = 1$$

Al ser \mathbf{p}_2 múltiplo de \mathbf{x}_2 , entonces: $\mathbf{x}_1^T M \mathbf{x}_2 = 0$

- Suponiendo que se cumple que: $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es un conjunto M ortogonal 2 a 2 es decir:

$$\mathbf{x}_i^T M \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \text{donde } i, j = \{1, 2, \dots, n-1\}$$

- Sea:

$$K \mathbf{y}_n = M \mathbf{x}_{n-1}$$

Se resuelve para \mathbf{y}_n , sea:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{y}_n - c_1 \mathbf{x}_1 - c_2 \mathbf{x}_2 - \dots - c_r \mathbf{x}_r - \dots - c_{n-1} \mathbf{x}_{n-1} \quad (3.6)$$

Donde $c_r = \mathbf{x}_r^T M \mathbf{y}_n$, y se cumple que: $\mathbf{x}_r^T M \mathbf{x}_r = 1$

- Si se multiplica la ecuación (3.6) por $\mathbf{x}_r^T M$, se tiene:

$$\mathbf{x}_r^T M \mathbf{p}_n = \mathbf{x}_r^T M \mathbf{y}_n - c_1 \mathbf{x}_r^T M \mathbf{x}_1 - c_2 \mathbf{x}_r^T M \mathbf{x}_2 - \dots - c_r \mathbf{x}_r^T M \mathbf{x}_r - \dots - c_{n-1} \mathbf{x}_r^T M \mathbf{x}_{n-1}$$

$$\mathbf{x}_r^T M \mathbf{p}_n = \mathbf{x}_r^T M \mathbf{y}_n - c_r = 0$$

- Lo que indica que el vector \mathbf{p}_n es M-ortogonal a \mathbf{x}_r pero como $r = \{1, 2, \dots, n-1\}$ entonces es ortogonal al conjunto generado por Ritz.

- Para ortonormalizar \mathbf{p}_n se debe hacer:

$$\mathbf{x}_n = \frac{\mathbf{p}_n}{\sqrt{\mathbf{p}_n^T M \mathbf{p}_n}}$$

determinando que el vector \mathbf{x}_n resulta ortonormal al conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}\}$

3.2. Desarrollo del Algoritmo y Diagrama de Flujo

Con la explicación de la secuencia del procedimiento para generar los vectores de Ritz, cuyos vectores desacoplan el sistema de ecuaciones diferenciales de un orden $r \ll n$ se puede lograr la solución de la ecuación dinámica, se ha procedido a realizar el algoritmo que se muestra a continuación:

Algoritmo 3.2.1. *Generación de vectores de Ritz*

1. Dadas las matrices de masa M y rigidez K cuadradas de orden n y el vector de carga \mathbf{f} de orden $n \times 1$

2. Resolver para el primer vector:

$$K\mathbf{y}_1 = \mathbf{f}$$

Se obtiene \mathbf{y}_1

3. Normalizar el vector respecto de la masa:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{\sqrt{\mathbf{y}_1^T M \mathbf{y}_1}}$$

4. Resolver para vectores adicionales \mathbf{x} ($i=2,3,\dots,r$) con cálculos iterativos a través del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

a) Calcular para $j=2,3,\dots, i-1$, los coeficientes c

$$c_j = \mathbf{x}_j^T M \mathbf{y}_i$$

b) Calcular para el vector \mathbf{p} adicional

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{y}_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \mathbf{x}_j$$

c) Normalizar el vector respecto de la masa

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{\sqrt{\mathbf{p}_i^T M \mathbf{p}_i}}$$

5. *Proyectar las matrices de masa y de rigidez en el subespacio definido por los vectores de Ritz:*

$$M^* = \mathbf{x}^T M \mathbf{x}$$

$$K^* = \mathbf{x}^T K \mathbf{x}$$

K^* y M^* matrices cuadradas generalizadas de orden r

6. *Se resuelve el problema de valores y vectores propios reducido de $r \times r$*

$$K^* \mathbf{z} = \omega^2 M^* \mathbf{z}$$

$$(K^* - \omega_i^2 M^*) z_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Donde \mathbf{z} es el conjunto de coordenadas nodales, que son usados para calcular finalmente los vectores de Ritz ortogonales de forma

$${}^oX = X\mathbf{z}$$

oX son vectores ortogonalizados con respecto a las dos matrices de rigidez y masa del sistema completo, siendo alguno de estos vectores una buena aproximación para las formas de modo exactas de la estructura.

De esta manera, se obtiene una estimación aproximada de un número reducido de formas nodales de orden r , pero resolviendo un problema de valores característicos de mucho menor orden.

Sin embargo si la matriz de amortiguamiento resulta acoplada, se recomienda emplear métodos de integración directa como Diferencia Central o Newmark, que consiste básicamente en encontrar la solución en una cierta cantidad (discreta) de pasos de tiempo.

Para simplicidad del algoritmo en la tesis se trabajará con Diferencia Central.

En base al desarrollo del algoritmo se muestra el diagrama de flujo en la figura 3.1 para la generación de vectores de Ritz, que luego se ha codificado en Matlab.

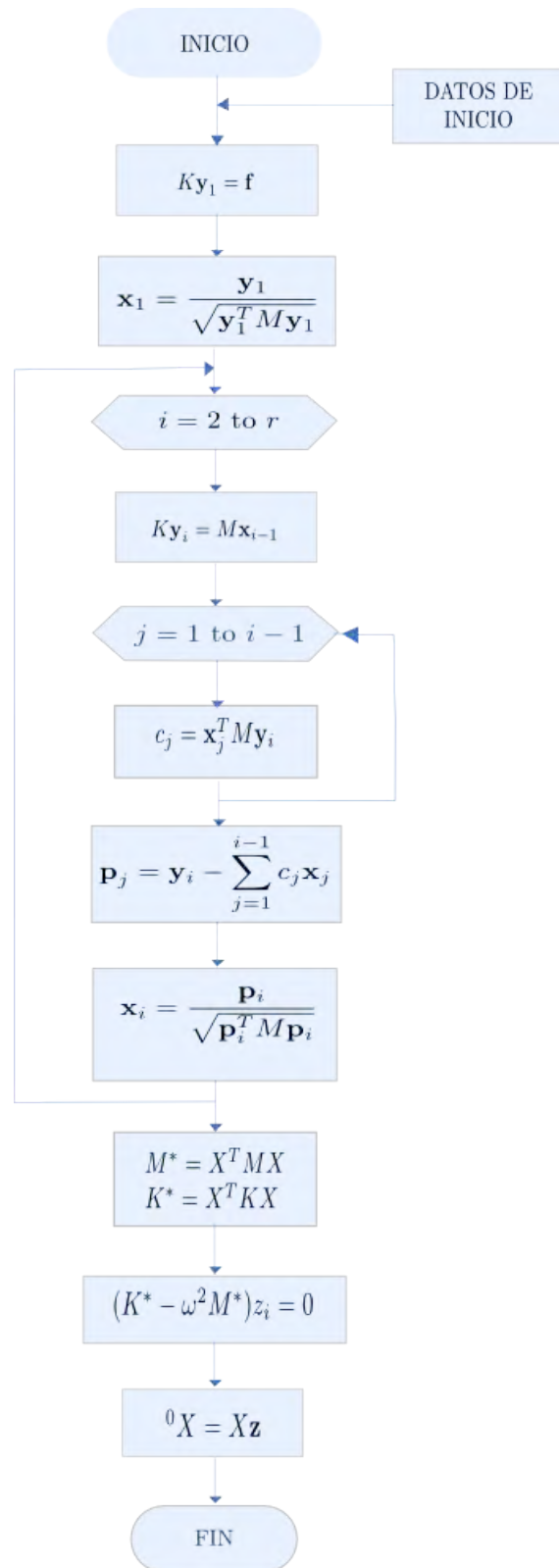


Figura 3.1: Diagrama de flujo para la obtención de vectores de Ritz

3.3. Método de Diferencia Central

La integral de Duhamel desarrollada en el capítulo 2 permite encontrar la solución al problema dinámico de un sistema de un GDL que se puede ampliar al sistema de MGL ya que existe correspondencia directa de sus términos como se demostró anteriormente. Si se aplica el procedimiento de integración directa de diferencias finitas que se demuestra que en el límite se transforma en la integral definida desde 0 hasta un tiempo cualquiera t .

Además se conoce que un acelerograma real no es una función algebraica del tiempo sino una serie de valores numéricos de aceleración medidos para diferentes instantes (valores discretos, usualmente a intervalos constantes Δt del orden de los 0,005 a 0,002 segundos. Luego en un registro normal de un temblor (20 a 60 segundos) se cuenta con una cantidad de valores de aceleración del orden de miles.

El método a desarrollar está basado en una aproximación de diferencia finita de las derivadas respecto del tiempo, del desplazamiento, velocidad y aceleración. Una de las ventajas del método es que se puede aplicar tanto a sistemas lineales como no lineales. Su desventaja es que requiere mucho esfuerzo computacional, si se compara sobre todo con descomposición modal[2].

Tomando intervalos de tiempo constantes Δt_i , las expresiones de diferencia central para velocidad y aceleración para un tiempo i son:

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} + u_{i-1}}{2\Delta t} \quad \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.7)$$

Sustituyendo esta expresión aproximada para la velocidad y aceleración en la ecuación dinámica, especialmente para sistemas elásticos lineales

$$m \ddot{\mathbf{u}}_i + c \dot{\mathbf{u}}_i + k \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i$$

$$m \frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{(\Delta t)^2} + c \frac{\mathbf{u}_{i+1} + \mathbf{u}_{i-1}}{2\Delta t} + k \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i \quad (3.8)$$

En esta ecuación \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_{i-1} son conocidos al plantear el procedimiento para el siguiente tiempo: $i + 1$

Transfiriendo estas cantidades conocidas al extremo derecho de la ecuación (3.8)

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{f}_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] \mathbf{u}_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] \mathbf{u}_i$$

$$\text{si: } \hat{k} \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{f}_i, \quad \text{además: } \hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}$$

También:

$$\hat{\mathbf{f}}_i = \mathbf{f}_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] \mathbf{u}_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] \mathbf{u}_i$$

Este proceso es explícito. La solución \mathbf{u}_{i+1} para un tiempo $i + 1$ es determinada a través de la ecuación de movimiento en un tiempo i . En particular las fuerzas de elasticidad y amortiguamiento pueden ser calculadas explícitamente usando desplazamientos conocidos \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_{i+1} y velocidades $\dot{\mathbf{u}}_i$ y $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$.

Así como \mathbf{u}_0 y \mathbf{u}_{-1} son requeridos para determinar \mathbf{u}_1 , el desplazamiento inicial \mathbf{u}_0 es conocido. Para determinar \mathbf{u}_{-1} se usa la ecuación (3.8) para $i = 0$ obteniendo:

$$\dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{(\Delta t)^2}$$

Resolviendo para u_1 desde la primera ecuación y sustituyendo en la segunda

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t (\dot{u}_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} (\ddot{u}_0)$$

Si el desplazamiento inicial u_0 y la velocidad inicial \dot{u}_0 se conocen, se reemplazan en la ecuación del movimiento en el tiempo $t_0 = 0$

$$m \ddot{\mathbf{u}}_0 + c \dot{\mathbf{u}}_0 + k \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0$$

Entonces la aceleración para un tiempo $t = 0$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{f}_0 - c\dot{\mathbf{u}}_0 - k\mathbf{u}_0}{m}$$

El método de Diferencia Central puede presentar problemas de inestabilidad numérica si el incremento en el tiempo no es lo suficientemente pequeño. Los requerimientos específicos para tener la estabilidad del método es:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi}$$

Para precisión se requiere $\Delta t < \frac{T}{10}$ a $\Delta t < \frac{T}{20}$ esto se puede controlar si se usa un número relativamente pequeño de vectores de Ritz. Sin embargo al integrar el sistema original de ecuaciones diferenciales, con un gran número de GDL la condición $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$ es la que controla, teniéndose un gran número de pasos para los periodos asociados a los modos con contribución significativa en la respuesta [2].

Este procedimiento se desarrolla a través del diagrama de flujo mostrado en la figura 3.2 y se implementará en Matlab.

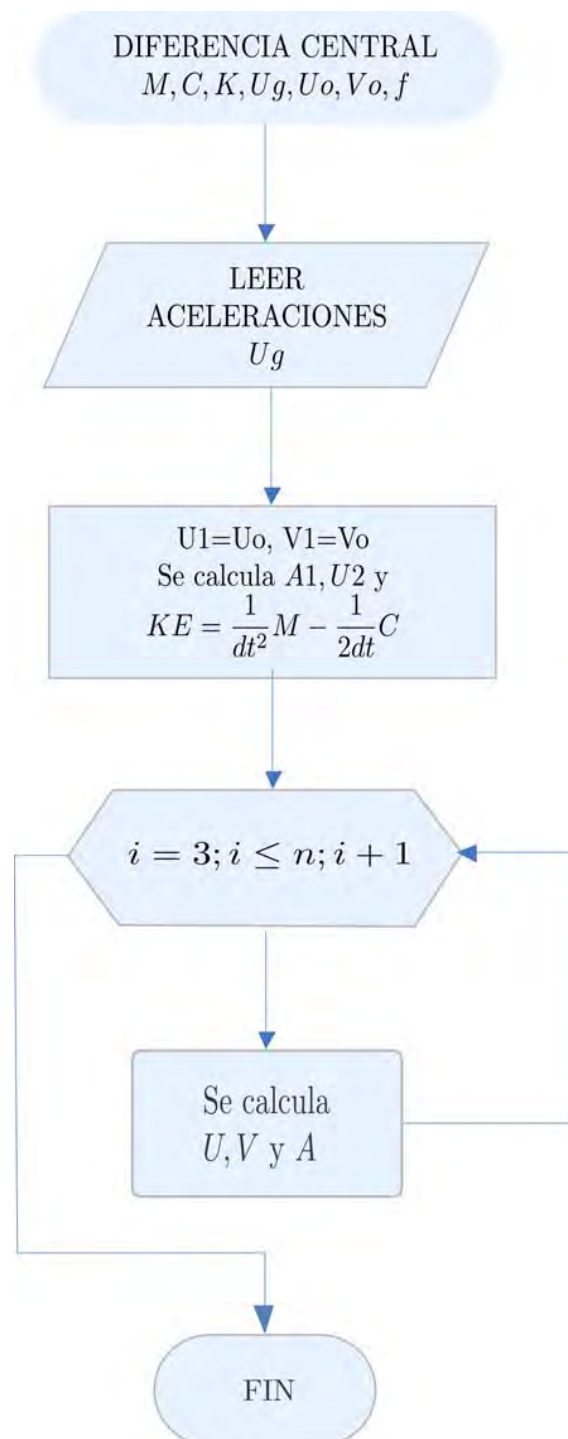


Figura 3.2: Diagrama de flujo de la subrutina Diferencia Central

3.4. Implementación Numérica del Algoritmo de Respuesta en el Tiempo en Matlab

De acuerdo al desarrollo expuesto para la generación de los vectores de Ritz y la solución propuesta de la ecuación reducida del movimiento mediante Diferencia Central se ha codificado los algoritmos en Matlab y será usado con un modelo estructural sencillo para verificar los resultados que se obtienen con esta teoría.

En primer lugar se muestra la codificación del programa para resolver por valores y vectores propios en el *Listing 3.1 : ecuación-completa* en Matlab y a continuación la secuencia de los pasos desarrollados en la figura 3.3.

Este programa lee los datos iniciales en la función *datos_ingreso*, ensambla las matrices M y K y calcula C, luego lee el registro sísmico y llama a la función *Dif_Central*, cuya codificación de la subrutina se muestra en el *Listing 3.2: dif – central*, ésta regresa los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en los nodos que se usaran para desarrollar las gráficas.

Listing 3.1: ecuación-completa.m

```
1
2 % Programa que resuelve el problema
3 % dinámico con Valores y Vectores
4 % Propios por Diferencia Central
5 datos_ingreso;
6 nudos=zeros(nelem,2);
7 for i=1:nelem
8     nudos(i,:)=[i i+1];
9 end
10 [K]=Kglobal(nnudos,nelem,nudos,k);
11 [K]=c_frontera(K,nnudos);
12 [M]=Mglobal(nelem,m);g1=length(M);f=diag(M);
13 [Vec_P,Val_P]=eig(K,M);v_o=sort(diag(Val_P).^0.5);
14 a0=0.05*2*v_o(1)*v_o(2)/(v_o(1)+v_o(2));
15 a1=0.05*2/(v_o(1)+v_o(2));
16 [C]=a0*M+a1*K;
17 Uo=zeros(1,g1);Vo=zeros(1,g1);Ug='SISMO74.TXT';
18 [U,V,A]=dif_central(M,C,K,Ug,Uo,Vo,f);
19 [deltat,acel]=registro('SISMO74.txt');
20 deltat=deltat';acel=acel';
21 H=cell(3,1);
22 H{1,1}=U;H{2,1}=V;H{3,1}=A;
23 figure(1)
24 plot(deltat,acel,'r');grid on;
25 for i=2:4
26     figure(i)
27     plot(deltat,H{i-1,1}(1,:),'r');
28     grid on;
29 end
```

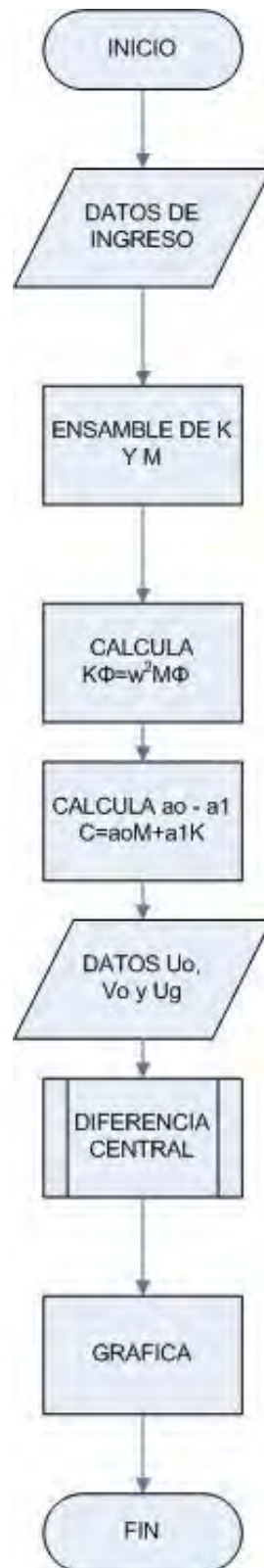


Figura 3.3: Diagrama de flujo para solución por valores y vectores propios

A continuación se muestra la función que desarrolla el cálculo por Diferencia Central.

Listing 3.2: dif-central.m

```
1
2 function [U,V,A]=dif_central(M,C,K,Ug,Uo,Vo,f)
3 [deltat,acel]=registro(Ug);n=length(acel);dt=deltat(2)-deltat(1);
4 U=zeros(length(M),n);V=zeros(length(M),n);A=zeros(length(M),n);
5 U(:,1)=Uo;V(:,1)=Vo;
6 A(:,1)=M\(-f*acel(1)-C*V(:,1)-K*U(:,1));
7 U(:,2)=U(:,1)-dt*V(:,1)+0.5*(dt^2)*A(:,1);
8 KE=1/(dt^2)*M+1/(2*dt)*C; a=1/(dt^2)*M-1/(2*dt)*C;b=K-2*M/(dt^2);
9 for i=3:n
10 P=-f*acel(i-1)-a*U(:,i-2)-b*U(:,i-1);U(:,i)=KE\P;
11 V(:,i-1)=(U(:,i)-U(:,i-2))/(2*dt);
12 A(:,i-1)=(U(:,i)-2*U(:,i-1)+U(:,i-2))/(dt^2);
13 end
```

Para resolver por vectores de Ritz se ha elaborado el programa *ecuación-ritz*, que llama a la función *resuelve* que calcula los vectores de Ritz, con estos datos se reduce las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento; y sigue la secuencia similar al programa de valores y vectores propios: llama a la subrutina *dif - central* y con los valores se plotea los valores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en este caso para el nodo del primer nivel.

A continuación se muestra la codificación en Matlab de *ecuación-ritz* en el *Listing 3.3* :

Listing 3.3: ecuacion-ritz.m

```

1  resuelve
2  K_R=X_ritz'*K*X_ritz;
3  M_R=X_ritz'*M*X_ritz;
4  C_R=X_ritz'*C*X_ritz;
5  ff=X_ritz'*diag(M);n_r=length(M_R);
6  Uo=zeros(1,n_r);Vo=zeros(1,n_r);Ug='SISMO74.txt';
7  [U_R,V_R,A_R]=dif_central(M_R,C_R,K_R,Ug,Uo,Vo,ff);
8  U=X_ritz*U_R;V=X_ritz*V_R;A=X_ritz*A_R;
9  [deltat,acel]=registro('SISMO74.txt');
10 deltat=deltat';acel=acel';
11 H=cell(3,1);
12 H{1,1}=U;H{2,1}=V;H{3,1}=A;
13 subplot(2,2,1);plot(deltat,acel);grid on;
14 for i=2:4
15     subplot(2,2,i);
16     plot(deltat,H{i-1,1}(1,:), 'r');
17     grid on;
18 end
    
```

La función *resuelve* llama a *datos_ingreso*, luego ensambla las matrices de rigidez y masa y calcula la matriz de amortiguamiento (C); es idéntico al caso anterior de valores y vectores propios. Entonces se genera un lazo que controla el valor de tolerancia que se da como dato de entrada (*tol*); en este lazo se llama a la función *ritz* que se explica a continuación y después llama a la función *E-R* que calcula el valor del error que será desarrollado en el siguiente capítulo.

El desarrollo en Matlab de la función *resuelve* es mostrada en el *Listing 3.4*

Listing 3.4: resuelve.m

```

1  % Programa que resuelve el problema dinámico con Vectores de Ritz
2  clc ; clear ;
3  datos_ingreso ;
4  nudos=zeros (nelem , 2);
5  for i=1:nelem
6      nudos(i ,:)= [ i i+1];
7  end
8  [K]=Kglobal (nnudos , nelem , nudos , k);
9  [K]=c_frontera (K, nnudos);
10 [M]=Mglobal (nelem , m);
11 [Vec_P, Val_P]=eig (K,M); v_o=sort (diag (Val_P) . ^ 0.5);
12 a0=0.05*2*v_o(1)*v_o(2)/(v_o(1)+v_o(2));
13 a1=0.05*2/(v_o(1)+v_o(2));
14 [C]=a0*M+a1*K;
15 L=1; EError=tol+1;
16 while (EError>tol & L<=length (f))
17     [w, x0, KK, MM]=ritz (M, K, f, L);
18     [EError]=E_R(x0, M, f, L);
19     L=L+1;
20 end
21 P_vec=Vec_P
22 L_F=L-1
23 X_ritz=x0
    
```

La función *ritz* que genera los vectores de Ritz usando la ortogonalización Gram Schmidt es mostrada a continuación:

Listing 3.5: ritz.m

```

1  function [w, x0, KK, MM]=ritz (M, K, f, L)
2  n=length (M); c=zeros (L, 1);
3  y=zeros (n, L); x=y; P=x;
4  y(:, 1)=K \ f;
5  x(:, 1)=y(:, 1)/(y(:, 1)'*M*y(:, 1))^0.5;
6  % Proceso de Gram-Schmidt
7  for i=2:L
8      y(:, i)=K \ (M*x(:, i-1)); s=zeros (n, 1);
9      for j=1:i-1
10         c(j)=x(:, j)'*M*y(:, i);
11         s=s+c(j)*x(:, j);
12     end
13     P(:, i)=y(:, i)-s;
14     x(:, i)=P(:, i)/(P(:, i)'*M*P(:, i))^0.5;
15 end
16 % Fin del Proceso
17 MM=x'*M*x; KK=x'*K*x;
18 [z, w]=eig (KK, MM); % Resuelve por Valores y Vectores propios
19 x0=x*z;
    
```

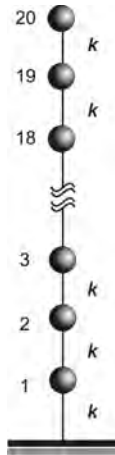


Figura 3.4: Modelo Estructural con 20 masas

3.4.1. Descripción del modelo de aplicación

El modelo es de acoplamiento cercano que consta de 20 masas iguales, con rigideces de entrepiso también iguales, mostrándose en la figura 3.4 sus características.

Las propiedades de sus elementos son:

$$[M]_{diagonal} = \left\{ \underbrace{0,02 \quad 0,02 \quad \dots \quad 0,02 \quad 0,02}_{20 \text{ masas}} \right\} t/s^2$$

$$[K]_{col} = \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} t/cm$$

3.4.2. Registro Sísmico

El registro sísmico usado en este caso es el espectro de diseño correspondiente al sismo Lima-Perú del 3 de Octubre de 1974, componente N82W, aceleración máxima 192.5 gals; tomando un escalamiento simple de 400 gals como aceleración de diseño con un periodo de retorno de 1000 años. [8]

La representación gráfica es mostrada en la figura 3.5 y se mencionará en la tesis como SISMO74.

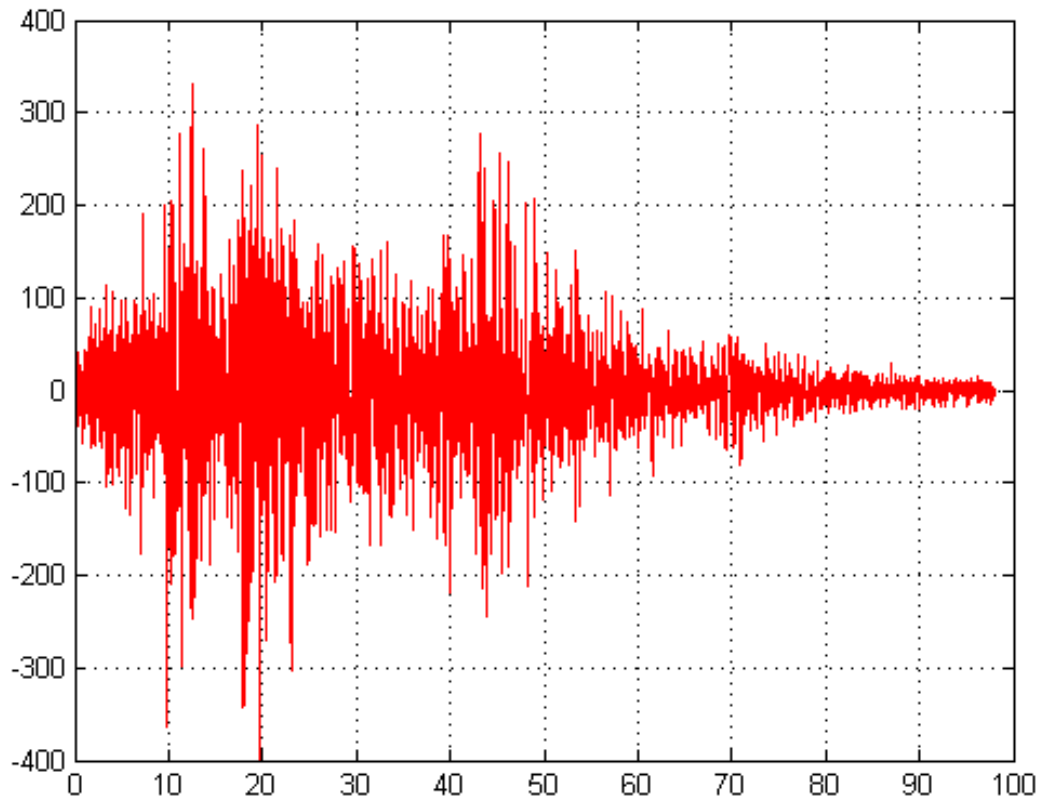


Figura 3.5: Registro del Sismo del 3/10/1974 Lima-Perú escalado a 400 gals

3.4.3. Resultados obtenidos

Para poder comparar los resultados que se obtienen con los métodos de valores y vectores propios y los vectores de Ritz se ejecutan los programas: *ecuacion-completa* que resuelve por valores y vectores propios considerándose todos los vectores modales (20) y *ecuacion-ritz* que calcula con vectores de Ritz para 20, 12, 8 y 4 modos. Siendo los resultados del período para cada caso mostrados en la tabla 3.1

Tabla 3.1: Periodo calculado con vectores propios y vectores de Ritz variando el número de modos

No	V. propios-20	Ritz -20	Ritz -12	Ritz-8	Ritz-4
1	2.5937	2.5937	2.5937	2.5937	2.5937
2	0.8663	0.8663	0.8663	0.8663	0.8662
3	0.5218	0.5218	0.5218	0.5218	0.5148
4	0.3749	0.3749	0.3749	0.3749	0.2887
5	0.2939	0.2939	0.2939	0.2937	
6	0.2429	0.2429	0.2429	0.2375	
7	0.208	0.208	0.208	0.1818	
8	0.1828	0.1828	0.1826	0.1268	
9	0.1639	0.1639	0.1616		
10	0.1493	0.1493	0.1409		
11	0.1379	0.1379	0.1208		
12	0.1288	0.1288	0.1053		
13	0.1215	0.1215			
14	0.1156	0.1156			
15	0.1109	0.1109			
16	0.1071	0.1071			
17	0.1042	0.1042			
18	0.102	0.102			
19	0.1005	0.1005			
20	0.0996	0.0996			

Como se puede observar en la tabla 3.1 en el caso de considerar todos los modos tanto con vectores propios y con vectores de Ritz (20), ambos dan resultados exactamente iguales, en las otras columnas para un número de menores vectores de Ritz: 12, 8 y 4 modos, se verifica que los primeros períodos son alcanzados con pocos vectores.

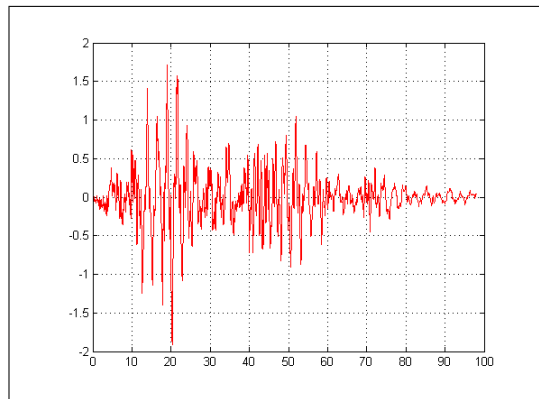
En el siguiente capítulo se realiza un procedimiento para el cálculo del error normalizado del vector de cargas comprobando que requiere un número menor de vectores

de Ritz ya que converge rápidamente a cero.

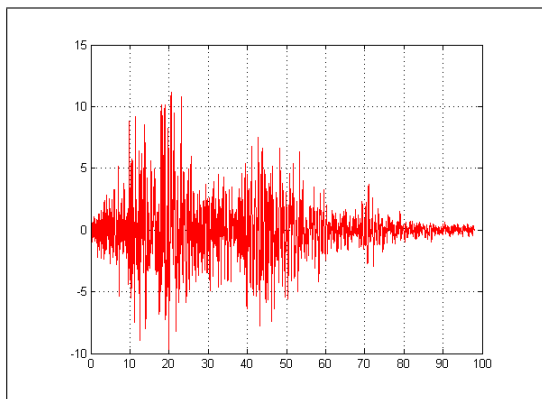
En el análisis dinámico realizado en el modelo estructural para poder comparar los resultados se proceso con vectores propios para todos los modos(20) y con vectores de Ritz para 8 modos, obteniéndose en ambos casos: desplazamientos, velocidades y aceleraciones en los nodos para la sollicitación SISMO74; llevándose a una representación gráfica los resultados obtenidos en la masa del primer nivel versus tiempo.

A continuación se muestra los resultados de vectores propios para 20 modos de los desplazamientos en cm , velocidades en cm/s y aceleraciones en cm/s^2 para la masa del primer nivel versus tiempo en la figura 3.6 y también los resultados con vectores de Ritz para 8 modos de desplazamiento, velocidad y aceleración en la figura 3.7

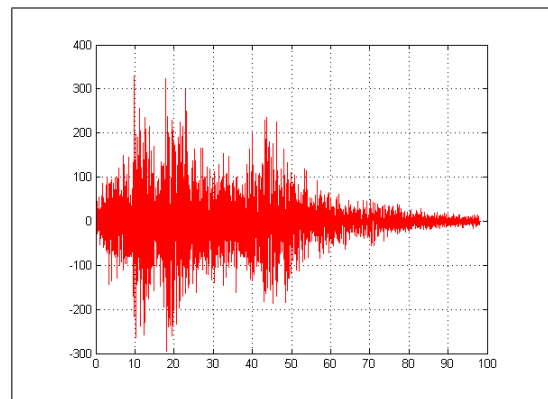
Se puede comprobar los comportamientos bastante similares en respuesta a la sollicitación sísmica y los valores máximos en ambos casos también muy parecidos, verificando que la solución con vectores de Ritz da resultados bastante confiables considerando que requieren menos esfuerzo computacional.



(a) Desplazamientos en cm vs tiempo en s

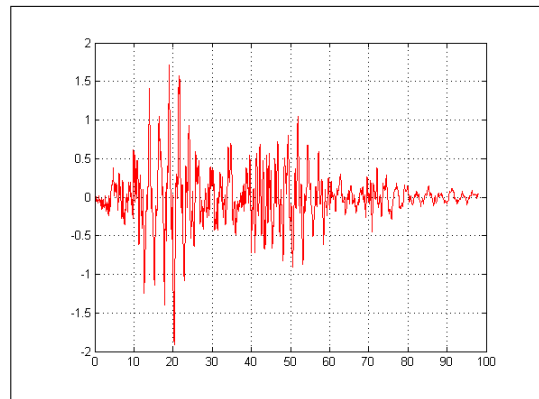


(b) Velocidades en cm/s vs tiempo en s

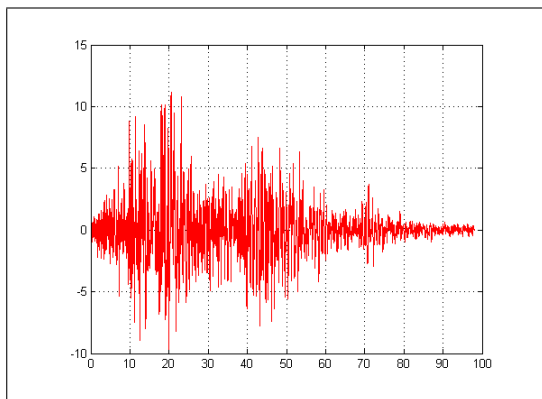


(c) Aceleraciones en cm/s^2 vs tiempo en s

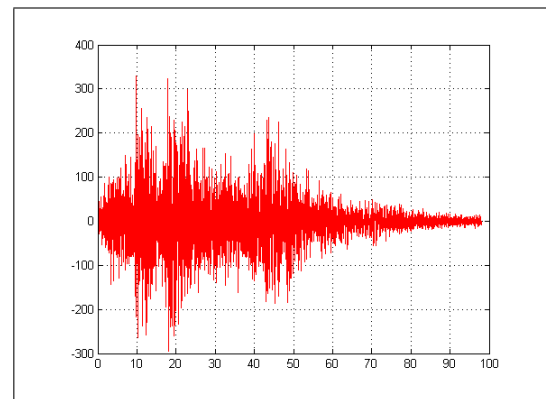
Figura 3.6: Respuesta Dinámica en la masa del primer nivel a la sollicitación SIS-MO74 resuelta con valores y vectores propios para 20 modos



(a) Desplazamientos en cm vs tiempo en s



(b) Velocidades en cm/s vs tiempo en s



(c) Aceleraciones en cm/s^2 vs tiempo en s

Figura 3.7: Respuesta Dinámica en la masa del primer nivel a la sollicitación SIS-MO74 resuelta con vectores de Ritz para 8 modos

4

Estimación del Error

En este capítulo se desarrollará una estimación del error que pueda asegurar que la carga este correctamente representada por los vectores de Ritz y permita medir la relación entre la solución reducida usando vectores de Ritz y los procedimientos tradicionales de corrección estática y aceleración modal usados para mejorar la suma de la superposición modal al tratar con un conjunto de vectores truncados.

La evaluación de frecuencias naturales y formas de modo exactas puede requerir un gran número de operaciones, sin embargo para la ingeniería puede tener una importancia limitada, interesando valores posibles de las condiciones de frecuencia de resonancia y las formas de modos asociadas con bajas frecuencias que puedan indicar regiones de la estructura que son más flexibles, pudiendo valores aproximados producir información similar.

Cuando se usan las técnicas de superposición modal en la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico, es importante determinar el número de vectores que se deben usar para el análisis tal que la solución sea satisfactoria; siendo un procedimiento sencillo adicionar vectores hasta encontrar la convergencia entre dos soluciones consecutivas. Sin embargo esto puede no ser económico debido al esfuerzo computacional, ya que éste crece rápidamente, siendo conveniente desarrollar una norma para el error a nivel de la generación del algoritmo, para conocer el momento cuando debe parar de generar nuevos vectores, siempre que se asegure una satisfactoria convergencia en las respuestas de interés.

4.1. Factor de Participación Modal para la Función de Carga

Hansteen y Bell [4] demostraron que la inexactitud del método de truncación modal es causada por la omisión de componentes de carga que son ortogonales a los modos incluidos en la solución. Siendo necesario cuantificar el porcentaje del vector de cargas externo que no está siendo incluido en el análisis de superposición modal. Una idea básica para medir la fracción del vector de carga externa que no está siendo incluida en la sumatoria de la superposición vectorial, es considerar un parámetro que lo cuantifique en términos de la base de vectores truncados y definir las normas de error que sean

funciones del residuo cuando se usa vectores propios se define el factor de participación modal como el indicador de la contribución del vector ϕ en la respuesta dinámica del sistema, siendo un indicador directo si el vector participa en la solución dinámica.

$$\mathbf{f}(s) = M \phi_1 p_1 + M \phi_2 p_2 + \dots + M \phi_n p_n$$

Se puede considerar la igualdad cuando se converge a la solución exacta con el total de vectores usados.

$$\mathbf{f} = M \Phi \mathbf{p}$$

Multiplicando la ecuación por Φ^T y usando la condición de M ortonormal: $\Phi^T M \Phi = I$, se obtiene:

$$\mathbf{p} = \Phi^T \mathbf{f}$$

Para el caso de Ritz, el factor de participación de la contribución del vector de Ritz ${}^o\mathbf{x}$ en la respuesta dinámica se demuestra en forma similar al de vectores propios resultando:

$$q_j = {}^o\mathbf{x}_j^T \mathbf{f}$$

4.2. Estimación del Error del Vector de Fuerzas

El vector de carga espacial \mathbf{f} , se puede aproximar usando los vectores de Ritz con la serie finita:

$$\mathbf{f}_r = \sum_{j=1}^n q_j M {}^o\mathbf{x}_j$$

Si los vectores ${}^o\mathbf{x}_j$ son normalizados, se puede demostrar que q_j es idéntico a p_j . Por lo tanto el error en la aproximación del vector de carga, \mathbf{f} por el sistema reducido está dado por:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{f} - \mathbf{f}_r = \mathbf{f} - \sum_{j=1}^n p_j M {}^o\mathbf{x}_j$$

Que para poder comparar las aproximaciones al vector de carga, se normaliza, resultando:

$$e_n = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{e}_r}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} \quad (4.1)$$

Siendo e_n la fracción del vector de cargas que no es usada en el análisis. Con la ecuación (4.1) se puede comparar el error que se presenta al calcular con vectores propios y/o con vectores de Ritz, así como también mostrar la convergencia entre los dos métodos, permitiendo comprobar que los vectores de Ritz convergen más rápido que los vectores propios.

4.3. Uso de la Norma del Vector de Fuerzas

Resolviendo la ecuación dinámica:

$$M \ddot{\mathbf{u}} + C \dot{\mathbf{u}} + K \mathbf{u} = \mathbf{f}g(t)$$

Con condiciones iniciales:

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \alpha, \quad \mathbf{u}(0) = \beta$$

Resolviendo con vectores de Ritz para sus condiciones iniciales: .

$$M \ddot{\mathbf{u}}_r + C \dot{\mathbf{u}}_r + K \mathbf{u}_r = \mathbf{f}_r g(t)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{r(0)} = \alpha, \quad \mathbf{u}_{r(0)} = \beta$$

Restando las ecuaciones se tiene:

$$M (\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}}_r) + C (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_r) + K (\mathbf{u} - \mathbf{u}_r) = (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r) g(t) \quad (4.2)$$

De las condiciones iniciales anteriores se puede afirmar que para la nueva ecuación son: $(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_r)_{(0)} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_r)_{(0)} = \mathbf{0}$

Si se considera $\mathbf{u}_E = \mathbf{u} - \mathbf{u}_r = \Phi \mathbf{z}$, como lo desarrollado anteriormente se puede expresar la ecuación diferencial (4.2) diagonalizada:

$$\ddot{\mathbf{z}} + D_2 \dot{\mathbf{z}} + D_3 \mathbf{z} = \Phi^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r) g(t) \quad (4.3)$$

Para el n-ésimo modo se tiene:

$$\ddot{z}_n + D_2 \dot{z}_n + D_3 z_n = (\phi_1^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r) + \phi_2^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r) + \dots + \phi_n^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r)) g(t)$$

$$z_n(0) = 0, \quad \dot{z}_n = 0$$

$$\left\| \phi_1^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r) \int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \phi_2^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r) \int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \dots + \phi_n^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r) \int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right\|_{\infty}$$

$$\leq \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_r\|_{\infty} (\|\phi_1^T\|_{\infty} + \|\phi_2^T\|_{\infty} + \dots + \|\phi_n^T\|_{\infty}) \int_0^t \|g(u)\| du$$

Si se considera que se busca una buena aproximación, se trata de lograr:

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_r\|_\infty \rightarrow 0 \text{ entonces } \mathbf{f} - \mathbf{f}_r \rightarrow \mathbf{0}$$

Entonces en la ecuación diferencial (4.3) se tiene

$$\ddot{z}_n + D_2 \dot{z}_n + D_3 z_n = 0$$

Siendo sus condiciones iniciales: $z_n(0) = 0$ y $\dot{z}_n(0) = 0$

Luego de lo propuesto anteriormente $\mathbf{u}_E = \mathbf{u} - \mathbf{u}_r = \Phi \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$

Por tanto justifica que $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_r\|$ es una medida del error, donde $\mathbf{e}_r = (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r)$ es el vector error.

Con motivo de comparar dos aproximaciones al vector de carga el vector normalizado se define como

$$e_n = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{e}_r}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}^T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_r)}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}}$$

luego se tiene que

$$\frac{\mathbf{f}^T \mathbf{f}}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} - \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{f}_r}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} \rightarrow 0$$

por tanto $e_n \rightarrow 0$

Este e_n mide la fracción de carga que no es usada en el análisis, verificando posteriormente en el modelo que convergen más rápido que los vectores modales.

4.4. Desarrollo del algoritmo del cálculo del Error

La secuencia del cálculo del error ha sido desarrollada en Matlab, llamándose a la subrutina *E-R.m* donde la codificación es mostrada en el *Listing 4.1*.

Listing 4.1: E-R.m

```

1
2 % Cálculo del Error
3 function [EError]=E_R(x0,M,f,L)
4 P=x0'*f; f1=zeros(length(f),1);
5 for j=1:L
6     f1=f1+P(j)*M*x0(:,j);
7 end
8 e1=f-f1;
9 EError=abs(f'*e1)/(f'*f);
10 \label{error}
    
```

El diagrama de flujo es mostrado en la figura 4.1

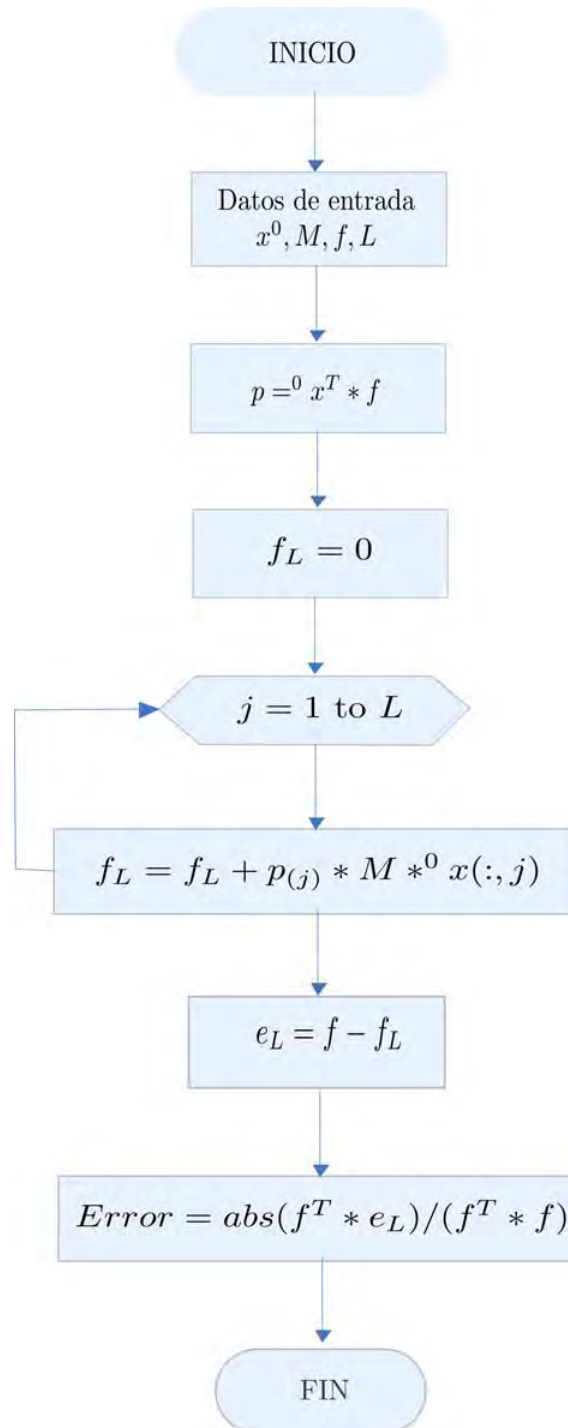


Figura 4.1: Diagrama de flujo del cálculo del error por el Vector de Cargas

4.5. Cálculo del Error en el Modelo

Para poder comprobar la convergencia del método, se dio un valor de tolerancia de 0,01 que controle la generación de vectores de Ritz obteniéndose para el modelo que alcanza un menor valor que la tolerancia de 0,01 solo con tres vectores de Ritz, llevando a un gráfico se muestran los resultados en la figura 4.2 donde se representan número de vectores versus tolerancia del error.

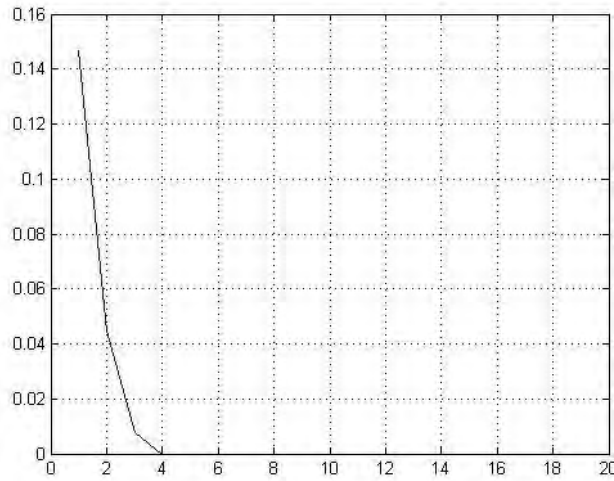


Figura 4.2: Convergencia del error usando vectores de Ritz

5

Aplicaciones al Análisis Dinámico Lineal

En este capítulo se presentan resultados numéricos que han sido obtenidos del análisis dinámico debido a sollicitación sísmica en varios modelos estructurales, para tratar de responder, desde un punto de vista práctico, dos preguntas importantes; (1) ¿Cuántos vectores de Ritz dependientes de carga deberán ser retenidos en el proceso de reducción? y, (2) ¿Que tan exactos pueden ser los resultados?.

Debido a la complejidad de los modelos de múltiples grados de libertad, se usa para el cálculo el programa Etabs Versión 9.7, que permite seleccionar las opciones en el análisis dinámico de los dos métodos que se desea comparar con vectores propios y vectores de Ritz.

Se establecerán comparaciones entre los resultados analíticos obtenidos desde la solución con vectores propios, vectores de Ritz y la solución exacta.

Al final del capítulo se presentan las conclusiones por los resultados obtenidos.

5.1. Descripción de los Modelos

Se presentan seis modelos estructurales reales de mediana complejidad, que pueden presentar cierta asimetría, siendo representativos de aquellos que se tienen en las oficinas dedicadas al diseño estructural.

Los modelos que se analizarán son:

Modelo 1 Colegio Torre Octogonal

Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A

Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B

Modelo 4 Torres Gemelas de 12 pisos

Modelo 5 Edificio de 5 pisos con Muros de Ductibilidad Limitada

Modelo 6 Pequeño Auditorio

1. Colegio Torre Octogonal

La estructura corresponde a una edificación de 3 niveles conformada por dos módulos, rectangular y octogonal. Estos módulos están conectados en los 2 primeros niveles por losas mientras que en el tercer nivel están desconectados entre sí. El acceso a los niveles superiores es a través de una escalera adyacente al módulo octogonal. La estructura está compuesta por pórticos de concreto armado en la dirección X y muros de albañilería confinada en la dirección Y. Se distingue el módulo octogonal y el módulo rectangular que se encuentran unidos formando un sistema único.

La estructura puede ser catalogada como irregular, tanto en planta como en elevación. El modelo en Etabs es mostrado en la figura (5.1)

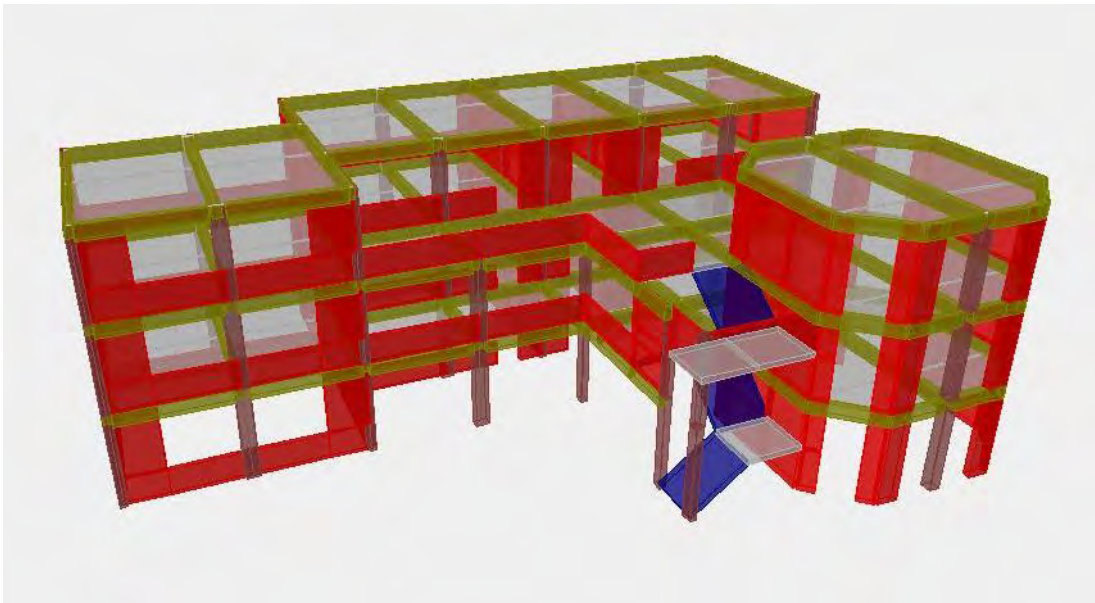


Figura 5.1: Modelo 1 Colegio Torre Octogonal

2. Edificio de 5 pisos con Sótano Bloque A

La estructura corresponde a un edificio de un conjunto de tres en un complejo multifamiliar. Consta de 5 pisos con sótano. El acceso a los niveles superiores es mediante una escalera en la fachada y ascensor interno; además presenta terrazas en la parte externa.

La edificación está compuesta por pórticos de concreto armado conformados por vigas, columnas y placas en dos direcciones ortogonales, tiene muros de albañilería tubular.

Debido al diseño arquitectónico se puede catalogar como irregular en planta.

El modelo en 3D elaborado en Etabs es mostrado en la figura (5.2)

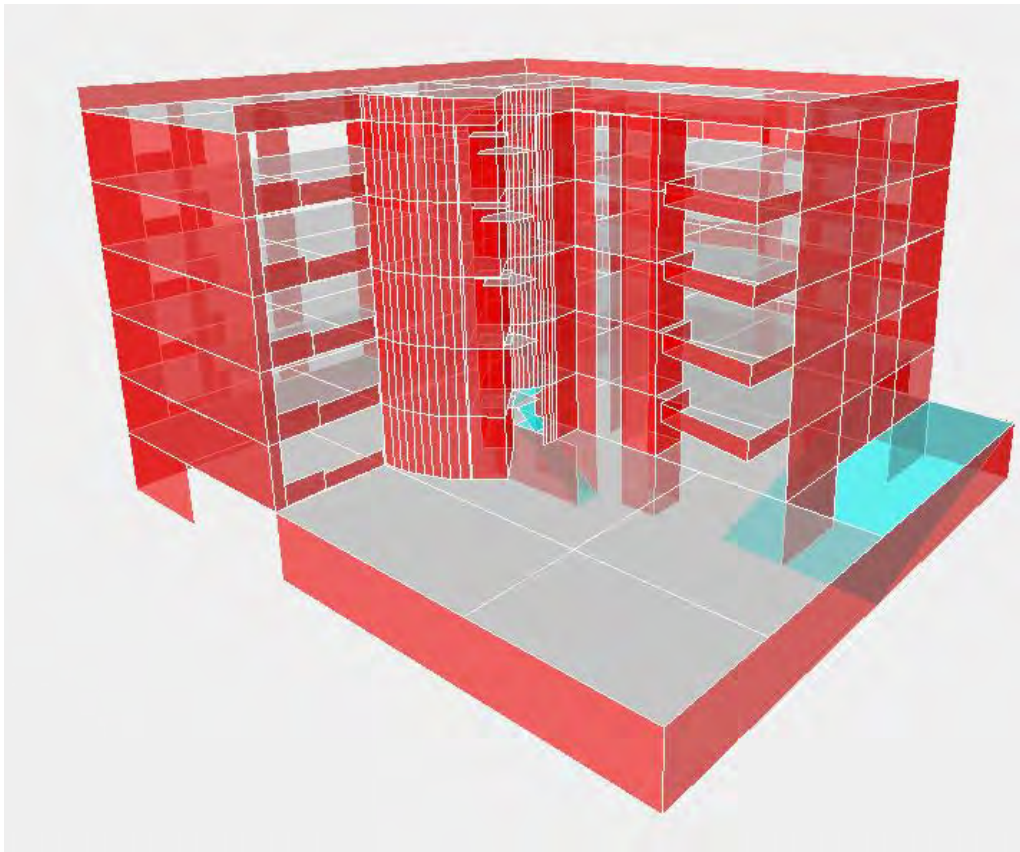


Figura 5.2: Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A

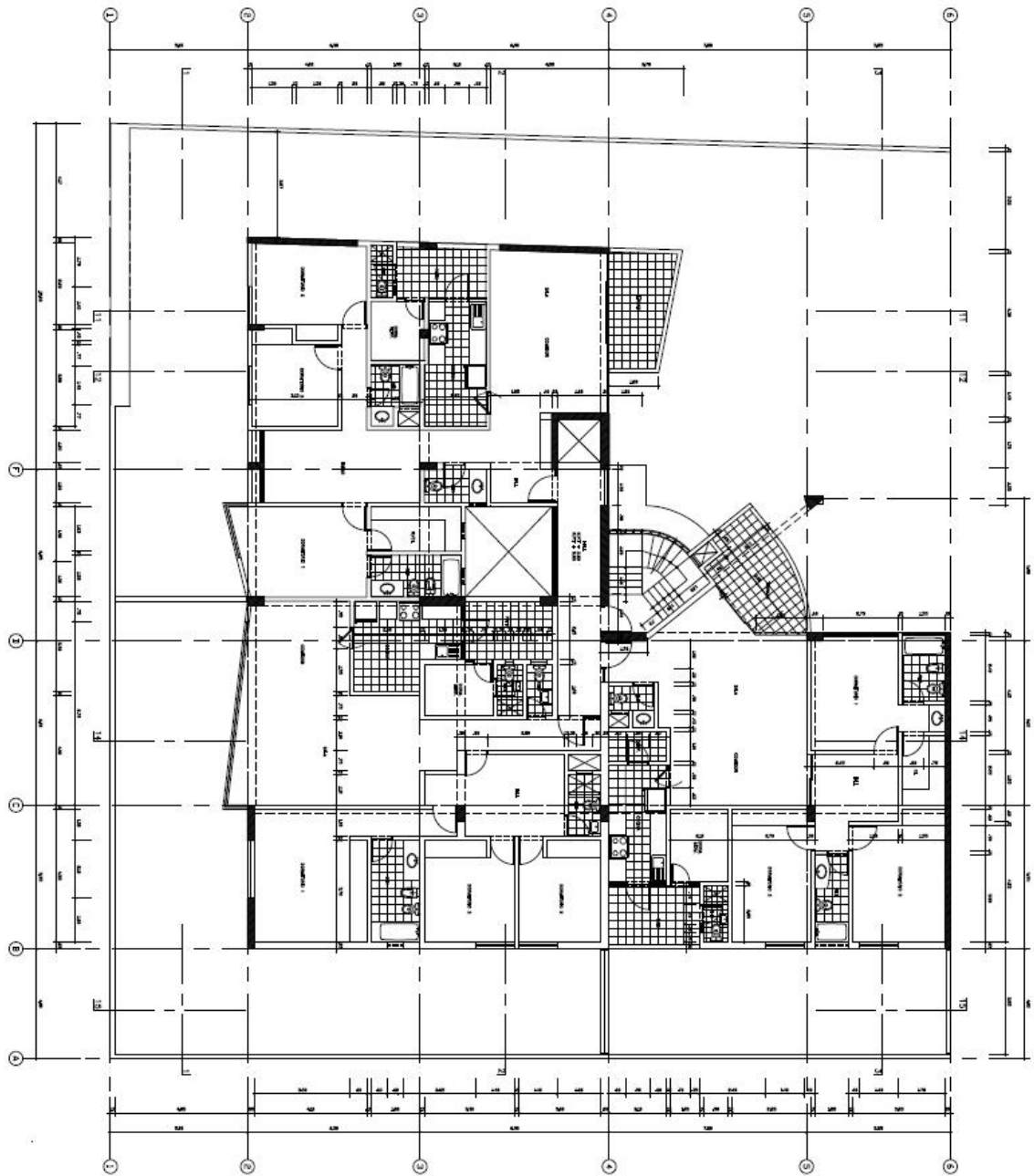


Figura 5.3: Planta Típica del Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A

3. Edificio de 5 pisos con Sótano Bloque B

Esta estructura es otro edificio de los tres que corresponden al complejo multifamiliar mencionado en el ítem anterior; pero esta edificación de 5 pisos con sótano es más regular en la forma, presentando dos departamentos simétricos por piso. Se ubican terrazas en el perímetro, además en la zona central se ubica la escalera y al frente el ascensor.

La edificación está compuesta por pórticos de concreto armado conformados por vigas, columnas y placas delgadas en dos direcciones, los muros son de albañilería de 15 o 25 cm.

El modelo en Etabs se muestra en la figura (5.4) y la planta típica del edificio en la figura (5.5)

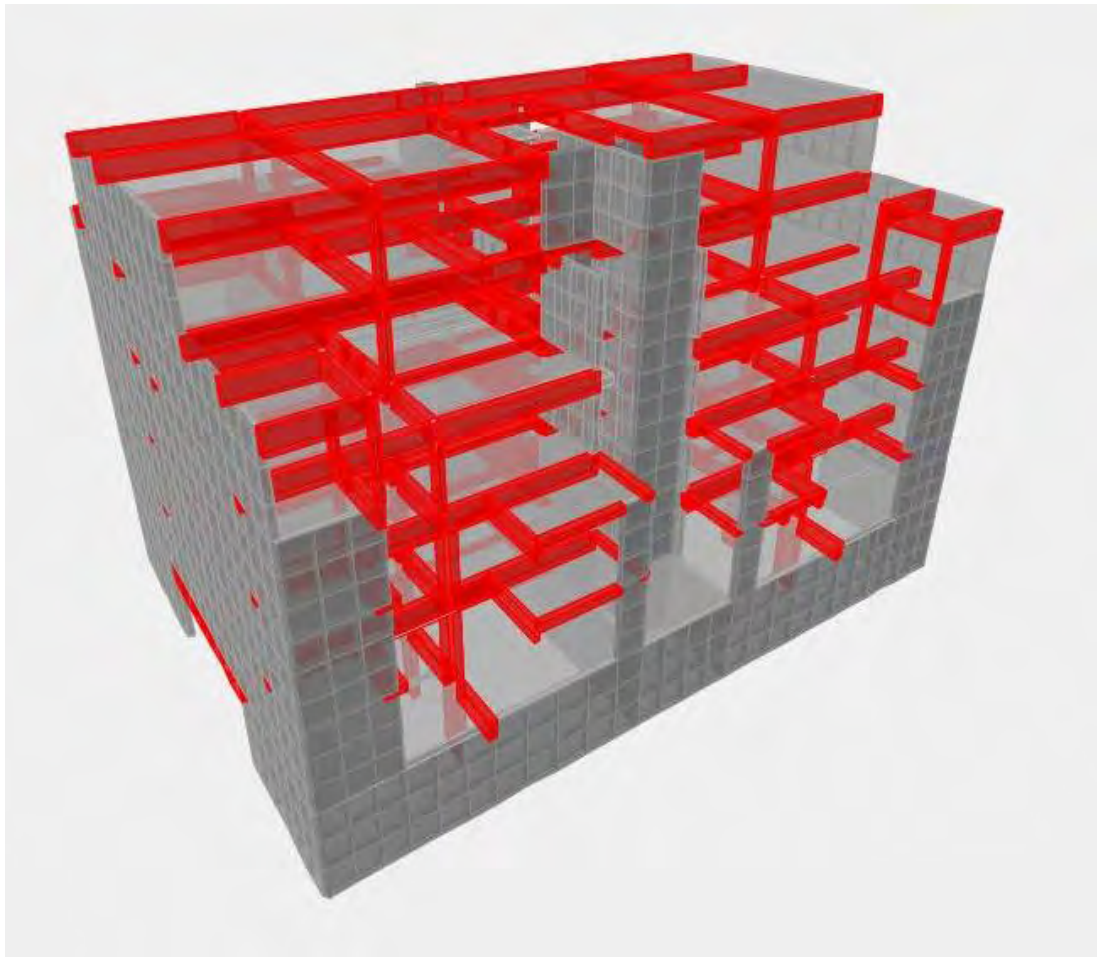


Figura 5.4: Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B

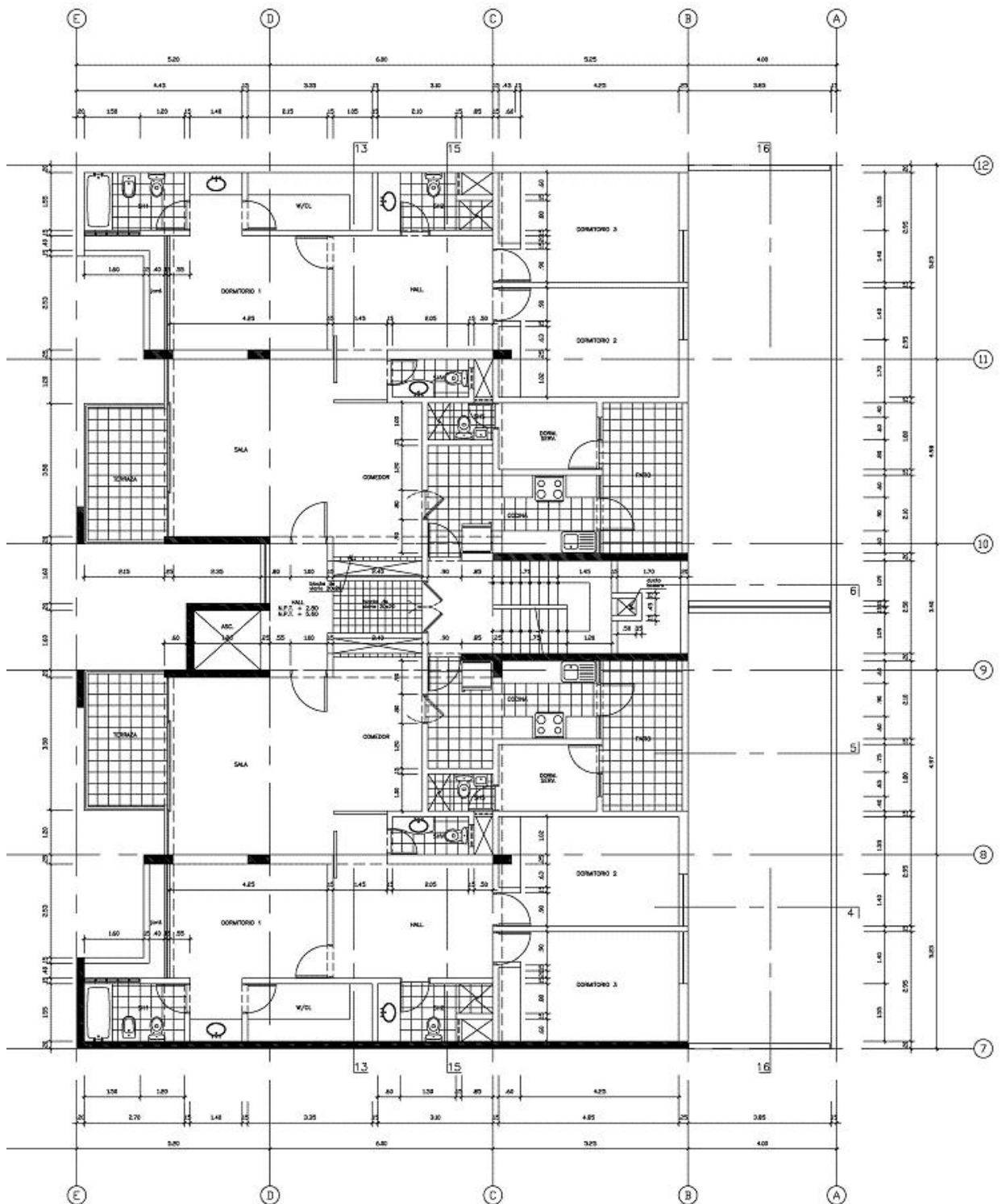


Figura 5.5: Planta del Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B

4. Torres Gemelas de 12 pisos

Edificio multifamiliar de 12 pisos con elevación central de dos niveles más. Es un caso de edificación bastante regular en su forma, con 4 departamentos por piso. El ascensor y escalera se ubican en la zona central del edificio.

Fue seleccionado por su altura, mostrándose el modelo en 3D en la figura (5.6) y la planta típica del edificio en la figura 5.7

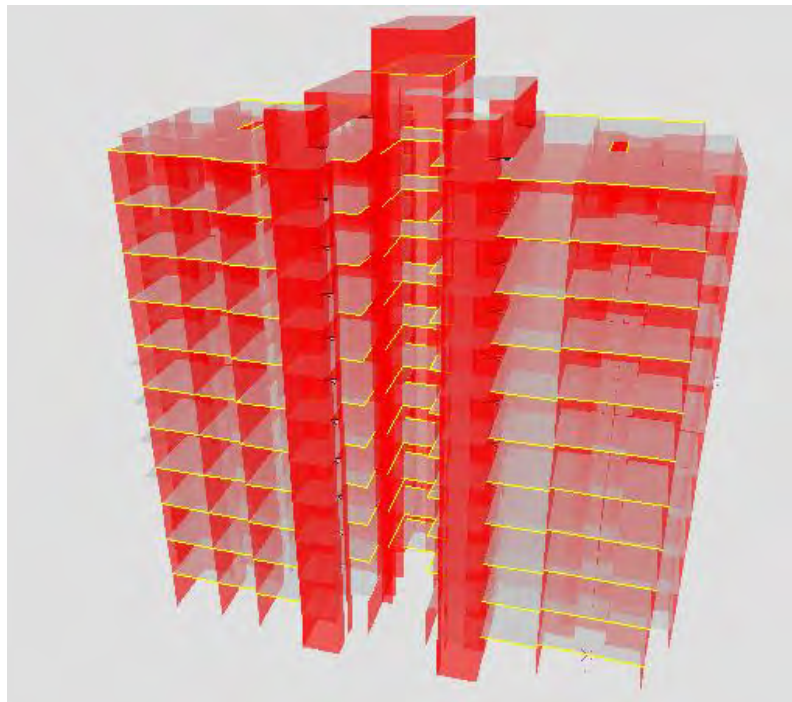


Figura 5.6: Modelo 4 Torres Gemelas de 12 Pisos

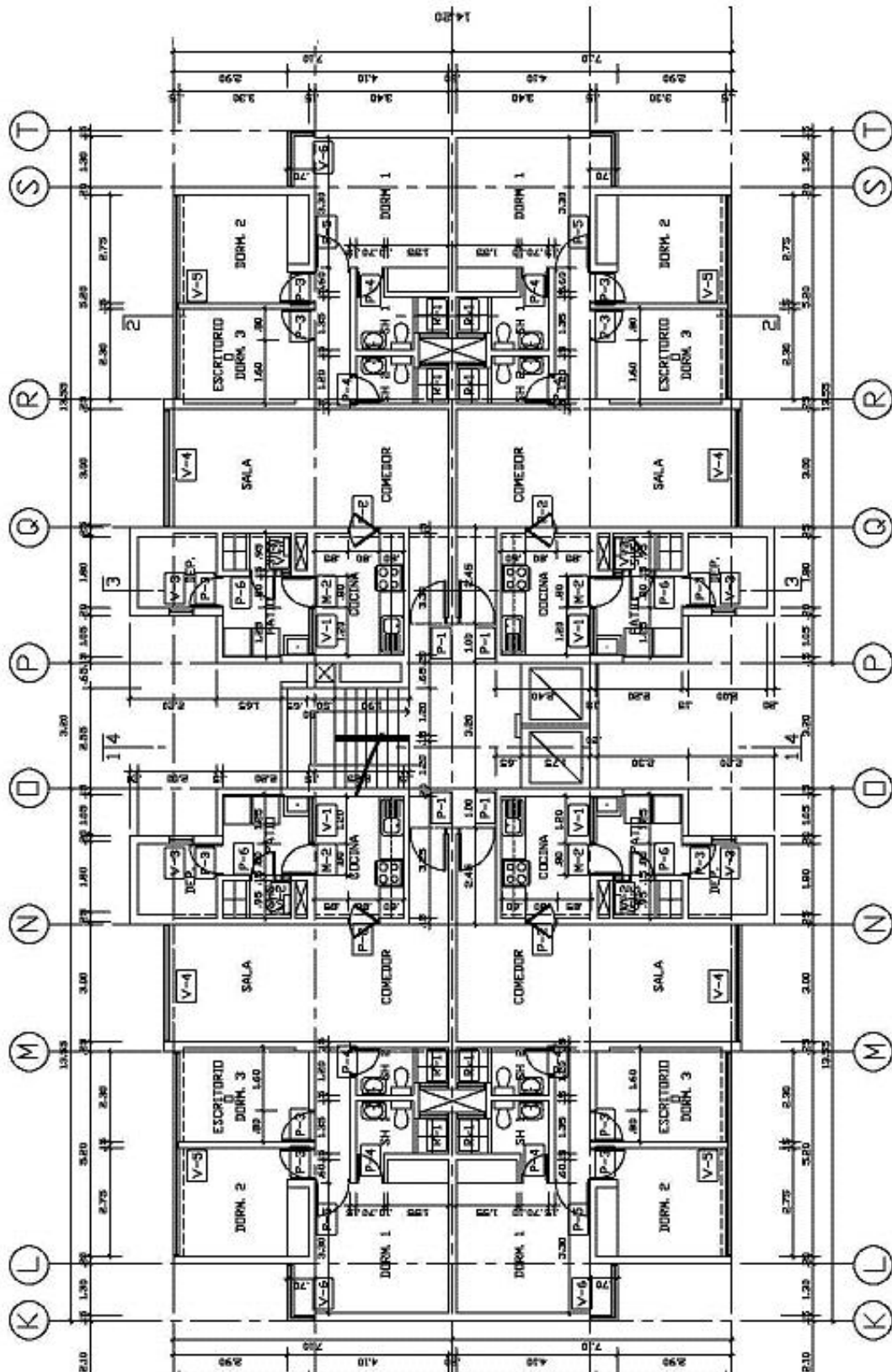


Figura 5.7: Planta Típica de Torres Gemelas de 12 Pisos

5. Edificio de 5 pisos con Muros de Ductilidad Limitada

Es también un edificio multifamiliar de 5 pisos donde se distribuyen 5 departamentos por planta. Por la altura solo cuenta con una escalera en la zona central, presenta muros de concreto de 10, 15 y 20 cm. Es un edificio con una distribución simétrica de sus elementos, fue seleccionado por la característica de contar con muros de ductilidad limitada muy usados actualmente en el sector de la construcción inmobiliaria.

Se muestra el modelo en Etabs en la figura (5.8) y la planta típica en la figura (5.9).

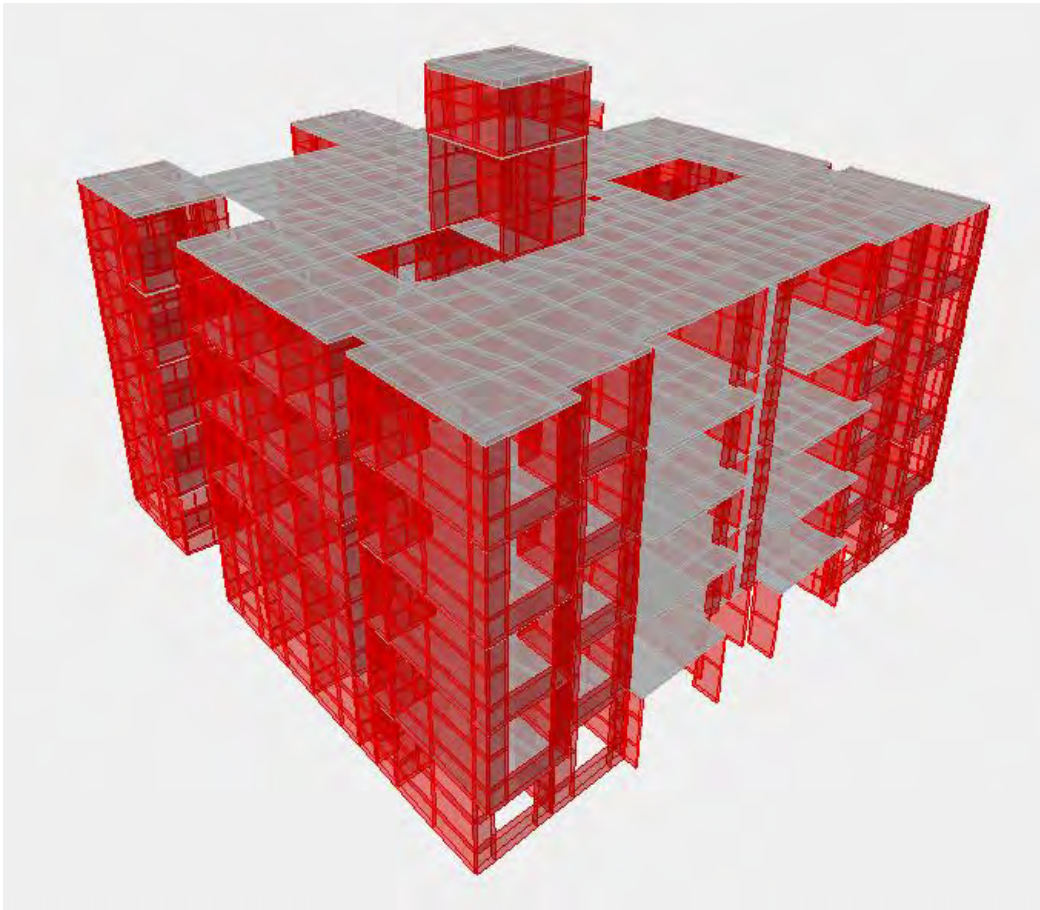


Figura 5.8: Modelo 5 Edificio de 5 pisos con Muros de Ductilidad Limitada

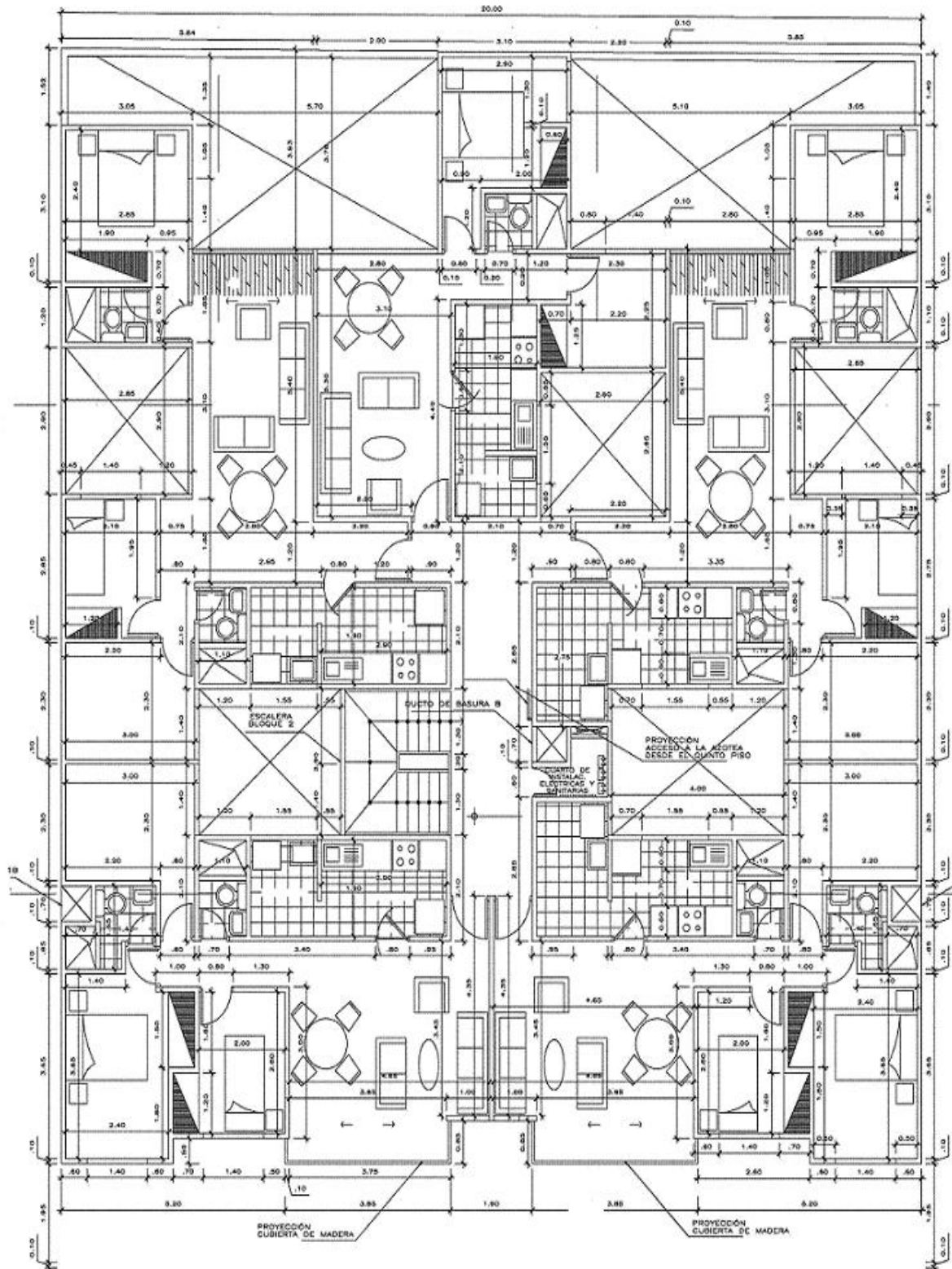


Figura 5.9: Planta Típica del Edificio de 5 pisos con Muros de Ductilidad Limitada

6. Pequeño Auditorio

La estructura corresponde a un auditorio para aproximadamente 100 personas con una altura de 7 m, el nivel de techo se incrementa gradualmente hasta en tres etapas, es simétrica en planta no así en elevación. Diferente a los otros modelos de edificación, la zona central es libre no tiene elementos columna, en la zona de entrada se ubican los servicios higiénicos y las rampas de ingreso se ubican en los laterales.

Se muestra en la figura 5.10 el modelo en Etabs y la figura 5.11 la planta de la estructura.

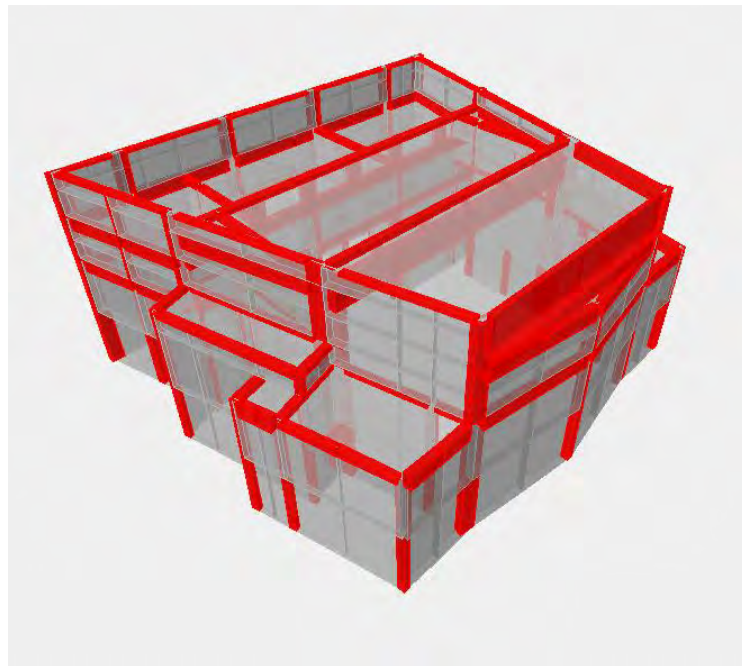


Figura 5.10: Modelo 6 Pequeño Auditorio

5.2. Resultados Obtenidos con el Etabs 9.7

Los modelos seleccionados se han trabajado en Etabs, se hicieron muchos procesamientos para poder llegar a obtener valores comparables entre los métodos de valores y vectores propios y vectores de Ritz que permitan llegar a tener conclusiones respecto a la calidad de los resultados.

5.2.1. Factor de participación de masa

Según la Norma Técnica *E030* de Diseño Sismo Resistente, en su artículo N° 18 respecto al análisis dinámico indica que en cada dirección se considerarán aquellos modos de vibración cuya suma de masas efectivas sea por lo menos el 90 % de la masa de la estructura, pero deberá tomarse en cuenta por lo menos los tres primeros modos predominantes en la dirección de análisis. [16]

Una participación de carga del 100 % indica que se captura la respuesta de alta frecuencia de la estructura, si la carga es proporcional a la masa en las tres direcciones globales, los factores de participación de carga dinámica son idénticos a los factores de participación de masa.

En el caso de los modelos analizados se lograron obtener resultados con participaciones de masa iguales o mayores al 90 %, para un número de modos variable según el modelo mostrándose en la tabla 5.1 los resultados.

Además se hicieron muchos procesamientos con los dos métodos: vectores propios y vectores de Ritz para analizar si crecían en el número de modos como cambiaba el % de participación de masa y cuando alcanzaban el 90 % o más; estos resultados han sido llevados a gráficas que muestran N° de modos versus participación de masa, desarrollando una gráfica para cada modelo mostrándose en las figuras 5.12, 5.13, 5.14, 5.16, 5.15 y 5.17.

Tabla 5.1: N° de modos necesarios para alcanzar una participación de masa del 90 % ó más con vectores propios y vectores de Ritz en los modelos analizados

N°	MODELO	VECTORES PROPIOS	VECTORES RITZ
		N° de modos	N° de modos
1	Colegio Torre octogonal	25	7
2	Edificio de 5 pisos con sótano (Bloque A)	28	25
3	Edificio de 5 pisos con sótano (Bloque B)	17	10
4	Torres gemelas de 12 pisos	10	8
5	Edificio de 5 pisos de ductibilidad limitada	15	8
6	Pequeño Auditorio	60	5

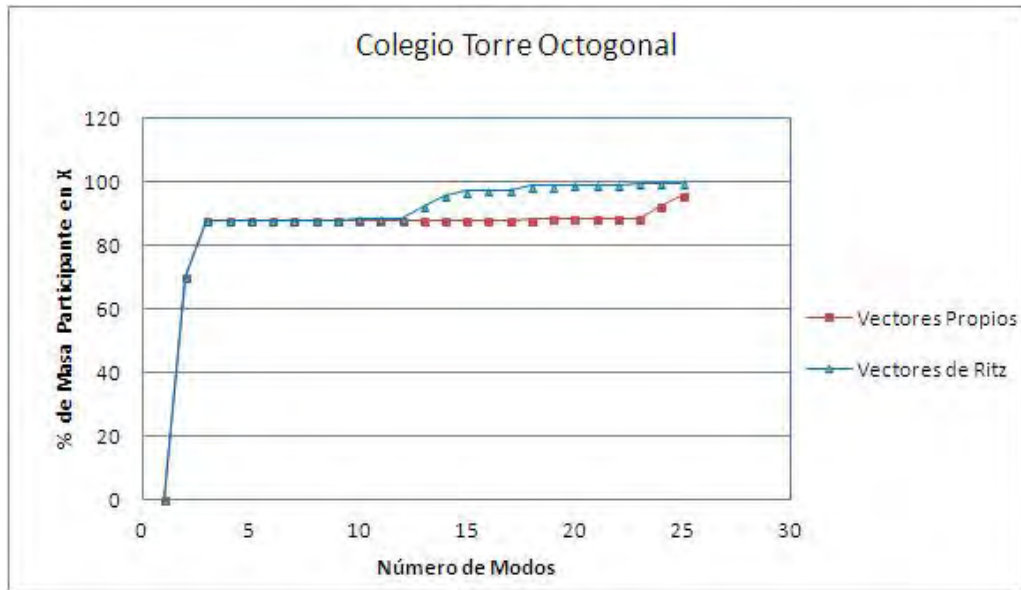


Figura 5.12: N° de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 1

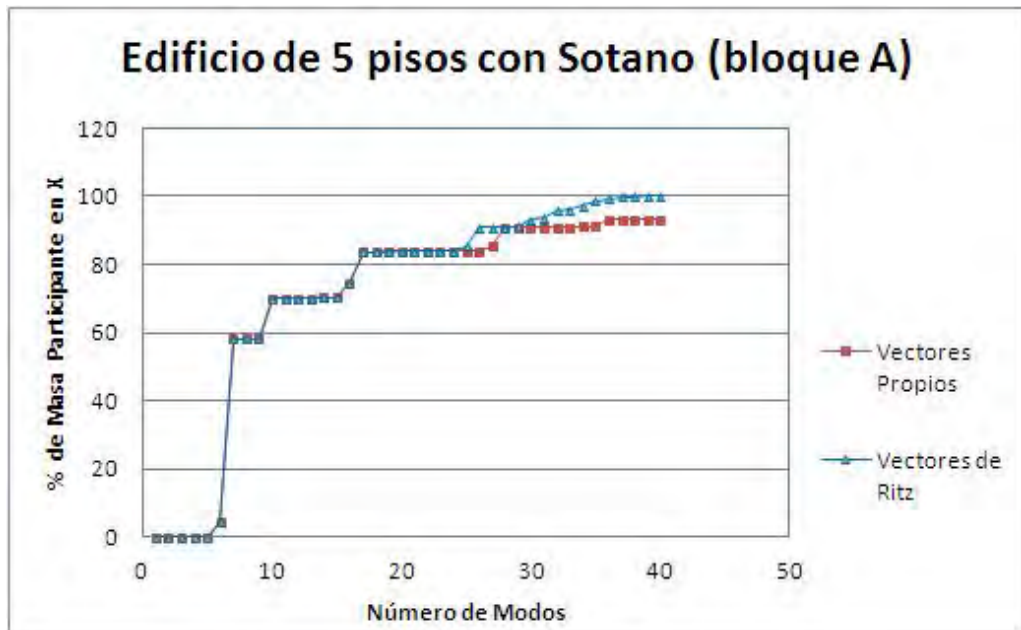


Figura 5.13: N° de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 2

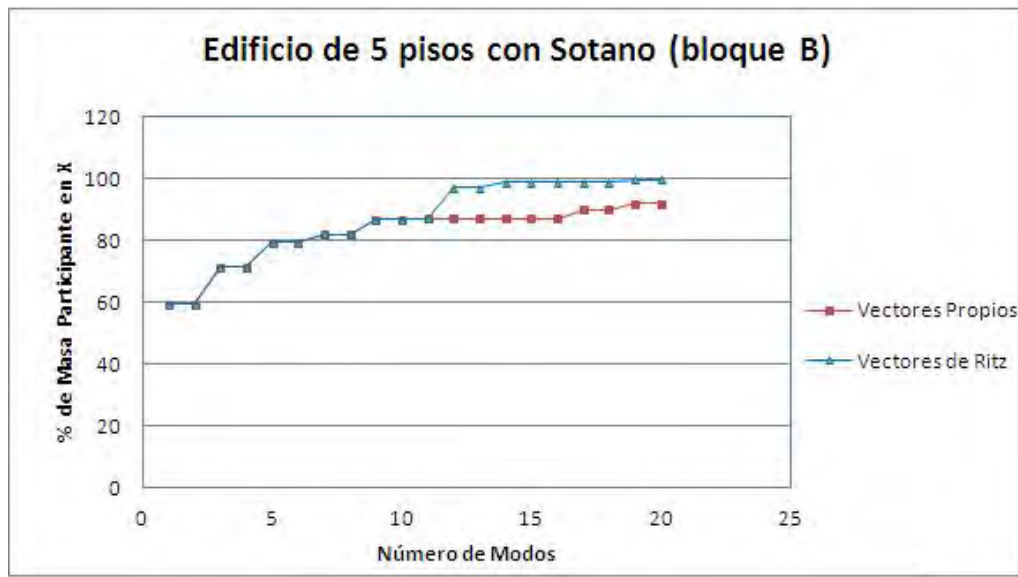


Figura 5.14: N° de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 3

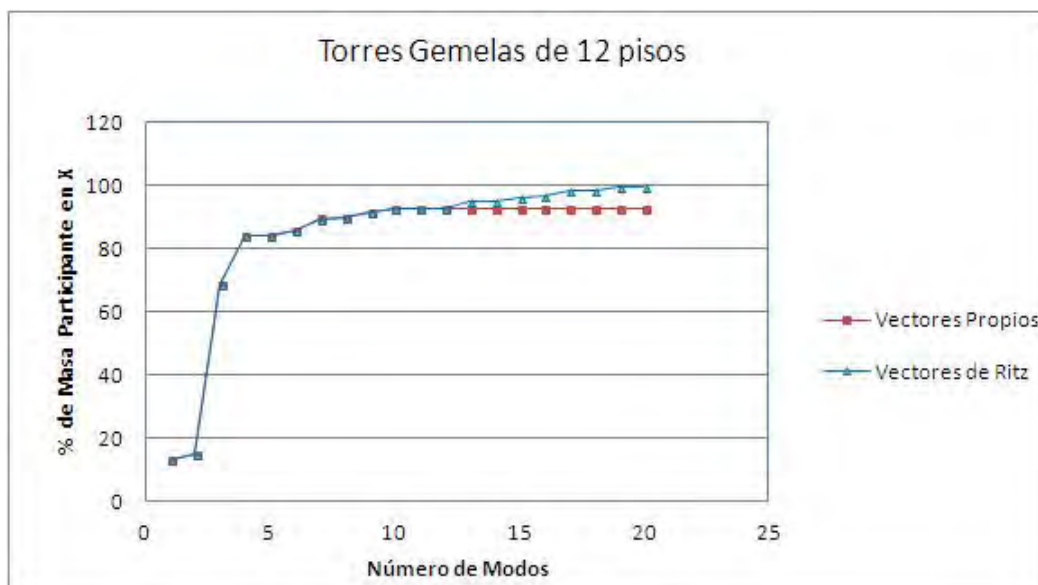


Figura 5.15: N° de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 4

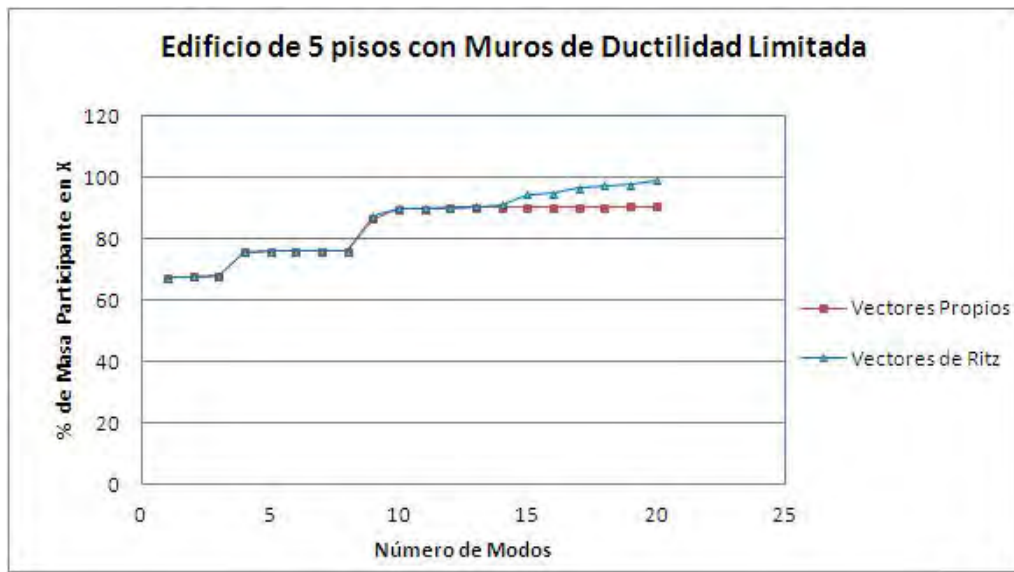


Figura 5.16: N° de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 5

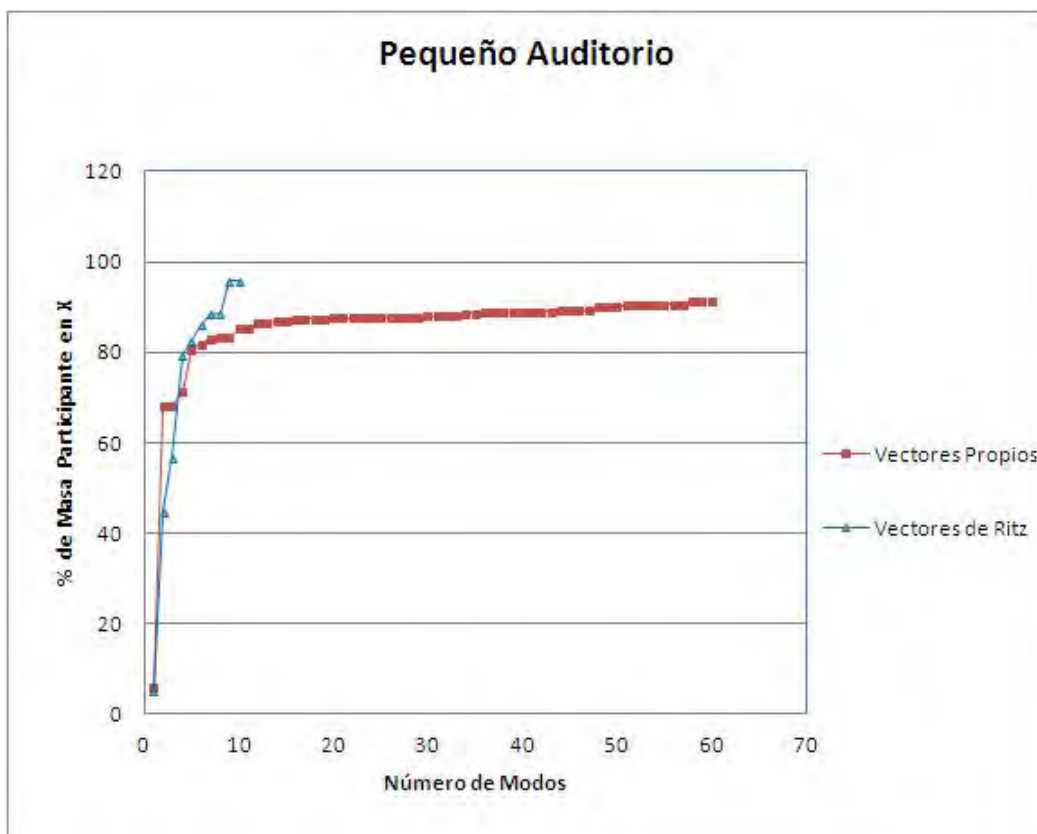


Figura 5.17: N° de modos versus Participación de masa en la dirección X Modelo 6

5.2.2. Cálculo de cortantes y momentos

Se ha procesado los modelos, con los dos métodos: valores y vectores propios y vectores de Ritz, variando la cantidad de modos y comparando los resultados con los valores obtenidos al 100 % de la masa participante. Estos cálculos se han realizado para el cortante y momento en las direcciones x y y en la base para sollicitación S_x y S_y , además se han analizado los resultados del cortante y momento en el nivel superior; calculando en cada caso el error respecto al valor exacto.

Cortantes y Momentos en la Base

En el primer modelo del Colegio Torre Octogonal se muestran los resultados del cortante en la base para sollicitación en S_x en la tabla 5.2 y para sollicitación S_y en la tabla 5.3.

Tabla 5.2: Cortante en X y Momento en Y para S_x en la base Modelo 1 Colegio Torre Octogonal

		Sx							
		Vectores propios				Vectores Ritz			
Modos	Vx (t)	% (error)	My (t - m)	% (error)	Vx (t)	% (error)	My (t - m)	% (error)	
2	398.18	9.47 %	2353.77	22.29 %	566.80	-28.87 %	3421.00	-12.94 %	
5	437.13	0.61 %	3028.92	0.00 %	443.83	-0.91 %	3029.78	-0.03 %	
10	437.14	0.61 %	3028.92	0.00 %	440.08	-0.06 %	3029.17	-0.01 %	
15	437.17	0.60 %	3028.91	0.00 %	439.81	0.00 %	3028.91	0.00 %	
20	437.18	0.60 %	3028.90	0.00 %	439.81	0.00 %	3028.92	0.00 %	
25	439.25	0.13 %	3028.83	0.00 %					
30	439.65	0.04 %	3028.83	0.00 %					
100	439.81		3028.92		439.81		3028.92		

Tabla 5.3: Cortante en Y y Momento en X para S_y en la base en Modelo 1 Colegio Torre Octogonal

		Sy							
		Vectores propios				Vectores Ritz			
Modos	Vx (t)	% (error)	My (t - m)	% (error)	Vx (t)	% (error)	My (t - m)	% (error)	
2	424.54	1.75 %	3000.58	1.05 %	566.80	-31.17 %	3421.00	-12.82 %	
5	430.51	0.37 %	3032.27	0.00 %	436.40	-1.00 %	3029.49	0.10 %	
10	430.51	0.37 %	3032.26	0.00 %	432.45	-0.08 %	3032.44	0.00 %	
15	430.54	0.36 %	3032.26	0.00 %	432.13	-0.01 %	3032.39	0.00 %	
20	431.57	0.12 %	3032.26	0.00 %	432.13	-0.01 %	3032.39	0.00 %	
25	431.73	0.09 %	3032.26	0.00 %					
30	431.98	0.03 %	3032.33	0.00 %					
100	432.10		3032.39		432.10		3032.39		

Como se puede observar en las tablas el cortante y momento en la base convergen con solo 5 modos en ambos métodos, siendo el error menor del 1 % que es una buena aproximación.

De la misma manera se han trabajado los otros modelos mostrándose las tablas de resultados en el Anexo A, observándose los siguientes resultados:

En el Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A se pudo comprobar que muestran errores de menos del 1 % en valores y vectores propios para 15 modos y vectores de Ritz para 10 modos.

En el Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B se puede notar que los errores de menos del 1 % en valores y vectores propios son para 25 modos y vectores de Ritz para 15 modos.

En el modelo 4 Torres Gemelas 12 pisos se han obtenido resultados con errores de menos del 2 % en ambos métodos con 10 modos.

En cuanto al Modelo 5 Edificio de 5 pisos con Muros de Ductilidad Limitada se puede afirmar que se presentan errores de menores del 1 % en valores propios con 15 modos y vectores de Ritz con 10 modos y en el modelo 6 Auditorio Pequeño alcanza errores menores al 1 % con 15 vectores propios y 10 vectores de Ritz.

Todos estos resultados se han llevado a la tabla 5.4, donde se muestra el nivel de convergencia al valor exacto de acuerdo al número de modos procesados con los dos métodos.

Tabla 5.4: N° de modos necesarios para el cálculo del cortante y momento en la base con un error menor al 1 %

N°	MODELO	VECTORES PROPIOS	VECTORES RITZ
		N° de modos	N° de modos
1	Colegio Torre Octogonal	5	5
2	Edificio 5 pisos con sótano Bloque A	15	10
3	Edificio 5 pisos con sótano Bloque B	25	15
4	Torres Gemelas de 12 pisos	10	10
5	Edificio con muros de ductilidad limitada	15	10
6	Auditorio Pequeño	15	10

Cortantes y Momentos en el nivel superior

De la misma manera se han comparado resultados en el cálculo de cortantes y momentos en el nivel superior de las edificaciones con ambos métodos: valores y vectores propios y vectores de Ritz, mostrando los resultados obtenidos para el caso del colegio Torre Octogonal para sollicitación S_x en la tabla 5.5 y para sollicitación S_y en la tabla 5.6. Los resultados obtenidos para los otros modelos se han ubicado en el Anexo A

De igual manera se ha construido la tabla 5.7 donde se muestran con los dos métodos el número de modos que requieren para el cálculo de cortantes y momentos en el nivel superior con errores menores del 1 % en cada modelo analizado.

Tabla 5.5: Cortante y Momento en el nivel superior con sollicitación Sx en Colegio Torre Octogonal

Modos	Sx							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (t)	% (error)	My (t - m)	% (error)	Vx (t)	% (error)	My (t - m)	% (error)
2	128.97	12.62 %	399.29	13.01 %	123.22	16.51 %	381.60	16.86 %
5	142.01	3.78 %	440.65	4.00 %	146.52	0.72 %	454.93	0.89 %
10	142.00	3.79 %	440.64	4.00 %	148.90	-0.89 %	463.37	-0.95 %
15	142.00	3.79 %	440.61	4.01 %	147.56	0.02 %	458.89	0.02 %
20	142.00	3.79 %	440.61	4.01 %	147.61	-0.01 %	459.06	-0.01 %
25	146.66	0.63 %	455.89	0.68 %				
30	147.33	0.18 %	458.08	0.20 %				
100	147.59		459.00		147.59		459.00	

Tabla 5.6: Cortante y Momento en el nivel superior con sollicitación Sy en Colegio Torre Octogonal

Modos	Sy							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (t)	% (error)	My (t - m)	% (error)	Vx (t)	% (error)	My (t - m)	% (error)
2	147.68	3.75 %	460.21	3.98 %	123.22	19.69 %	381.60	20.38 %
5	152.90	0.35 %	477.53	0.36 %	153.36	0.05 %	478.41	0.18 %
10	152.90	0.35 %	477.53	0.36 %	153.50	-0.04 %	479.46	-0.04 %
15	152.90	0.35 %	477.55	0.36 %	153.47	-0.02 %	479.38	-0.02 %
20	153.20	0.16 %	478.49	0.16 %	153.43	0.01 %	479.24	0.01 %
25	153.28	0.10 %	478.72	0.11 %				
30	153.39	0.03 %	479.10	0.04 %				
100	153.44		479.27		153.44		479.27	

Tabla 5.7: N° de modos necesarios en cada modelo para el cálculo del cortante y momento en el nivel superior con error menor del 1 %

N°	MODELO	VECTORES PROPIOS	VECTORES RITZ
		N° de modos	N° de modos
1	Colegio Torre octogonal	25	5
2	Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A	15	10
3	Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B	15	15
4	Torres Gemelas de 12 pisos	25	15
5	Edificio con muros de ductilidad limitada	10	10

Cortantes por piso

También se han comparado los cortantes por piso V_x por sollicitación S_x y V_y por sollicitación S_y con un mismo número de modos con ambos métodos: valores y vectores propios y vectores de Ritz; y estos valores han sido comparados con el valor exacto que ha sido obtenido para un 100 % de masa participante.

En primer lugar se muestran los resultados de los cortantes V_x y V_y del Modelo 1 Colegio Torre Octogonal en las tablas 5.8 y 5.9, se puede observar que ambos métodos aproximan valores de cortante con pocos modos y errores pequeños.

Tabla 5.8: Cortante por piso V_x por sollicitación S_x Colegio Torre Octogonal

Piso	V. Exacto	10 Modos			
		Ritz	Error	Propios	Error
3	147.59	148.9	-0.89 %	142	4.63 %
2	337.83	338.17	-0.10 %	337.2	0.29 %
1	439.81	440.08	-0.06 %	437.14	0.67 %

Tabla 5.9: Cortante por piso V_y por sollicitación S_y Colegio Torre Octogonal

Piso	V. Exacto	10 Modos			
		Ritz	Error	Propios	Error
3	153.44	153.5	-0.04 %	152.9	0.39 %
2	338.76	338.77	0.00 %	338.17	0.18 %
1	432.1	432.45	-0.08 %	430.51	0.45 %

Luego se muestran en las tablas 5.10 y 5.11 los cortantes por piso para el modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A, en este caso se puede afirmar que los dos métodos aproximan valores de cortante con 25 modos con errores pequeños menores del 1 %

Tabla 5.10: Cortante en X por piso por solicitación S_x para el Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A

Piso	V.Exacto	25 Modos			
		Ritz	Error	V.V.Propios	Error
7	15.08	15.08	0.00 %	15.07	0.07 %
6	36.96	36.96	0.00 %	36.96	0.00 %
5	146.23	146.28	-0.03 %	145.95	0.19 %
4	241.6	241.61	0.00 %	241.57	0.01 %
3	306.94	306.98	-0.01 %	306.64	0.10 %
2	348.4	348.43	-0.01 %	348.36	0.01 %
1	366.36	366.64	-0.08 %	365.39	0.26 %

Tabla 5.11: Cortante en Y por piso por solicitación S_y para el Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A

Piso	V.Exacto	25 Modos			
		Ritz	Error	V.V.Propios	Error
7	11.94	11.94	0.00 %	11.92	0.17 %
6	31.52	31.52	0.00 %	31.52	0.00 %
5	142.88	142.95	-0.05 %	142.66	0.15 %
4	239.66	239.67	0.00 %	239.59	0.03 %
3	307.42	307.47	-0.02 %	307.16	0.08 %
2	351.61	351.64	-0.01 %	351.56	0.01 %
1	371.42	371.63	-0.06 %	370.35	0.29 %

En el caso del modelo 3 se aproximan valores de cortante con 10 modos con errores pequeños de 2 % ó menos con ambos métodos.

Tabla 5.12: Cortante por piso V_x por solicitación S_x Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B

Piso	V. Exacto	10 Modos			
		Ritz	Error	Propios	Error
6	78.52	78.47	0.06 %	78.51	0.01 %
5	154.55	154.41	0.09 %	154.54	0.01 %
4	235.86	235.63	0.10 %	235.84	0.01 %
3	287.58	287.42	0.06 %	287.5	0.03 %
2	313.33	313.45	-0.04 %	313.17	0.05 %
1	323.43	329.91	-2.00 %	317.81	1.74 %

Tabla 5.13: Cortante por piso V_y por solicitación S_y Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B

Piso	V. Exacto	10 Modos			
		Ritz	Error	Propios	Error
6	77.76	77.42	0.44 %	76.4	1.75 %
5	160.67	160.71	-0.02 %	160.42	0.16 %
4	256.29	256.19	0.04 %	255.95	0.13 %
3	328.26	328.35	-0.03 %	327.7	0.17 %
2	379.27	379.34	-0.02 %	379.17	0.03 %
1	414.39	414.59	-0.05 %	413.71	0.16 %

Los resultados de los otros modelos tanto en cortante V_x para solicitación S_x y cortante V_y para solicitación S_y han sido ubicados a continuación.

Tabla 5.14: Cortante en X por piso por solicitación S_x Modelo 4 Torres Gemelas de 12 pisos

Piso	V. Exacto	14 Modos			
		Ritz	Error	Propios	Error
P13	26.59	26.63	-0.15 %	26.38	0.79 %
P12	37.42	37.52	-0.27 %	37.29	0.35 %
P11-1	44.99	45.09	-0.22 %	44.91	0.18 %
P11	121.24	120.99	0.21 %	120.75	0.40 %
P10	193.59	193.57	0.01 %	193.22	0.19 %
P9	252.92	253.97	-0.42 %	252.78	0.06 %
P8	302.39	302.28	0.04 %	302.02	0.12 %
P7	344.44	344.51	-0.02 %	344.13	0.09 %
P6	381.15	381.25	-0.03 %	380.98	0.04 %
P5	412.98	413.03	-0.01 %	412.67	0.08 %
P4	439.49	439.73	-0.05 %	439.1	0.09 %
P3	459.78	459.78	0.00 %	459.52	0.06 %
P2	473.2	479.97	-1.43 %	472.31	0.19 %
P1	479.97	485.41	-1.13 %	476.85	0.65 %

Tabla 5.15: Cortante en Y por piso por solicitación S_y Modelo 4 Torres Gemelas de 12 pisos

Piso	V. Exacto	14 Modos			
		Ritz	Error	Propios	Error
P14	11.18	10.76	3.76 %	9.9	11.45 %
P13	23.67	23.08	2.49 %	21.57	8.87 %
P12	34.32	33.81	1.49 %	32.15	6.32 %
P11-1	42.52	42.19	0.78 %	40.67	4.35 %
P11	129.86	129.71	0.12 %	129.44	0.32 %
P10	207.17	207.04	0.06 %	206.86	0.15 %
P7	268.41	268.41	0.00 %	268.08	0.12 %
P6	318.69	318.61	0.03 %	318.29	0.13 %
P5	361.26	361.23	0.01 %	360.95	0.09 %
P4	398.21	398.31	-0.03 %	397.96	0.06 %
P3	430.33	430.31	0.00 %	429.88	0.10 %
P2	457.33	457.54	-0.05 %	456.94	0.09 %
P1	478.06	478.2	-0.03 %	477.88	0.04 %
P0	491.16	491.59	-0.09 %	490.55	0.12 %
P1	496.57	497.96	-0.28 %	494.76	0.36 %

Tabla 5.16: Cortante en X por piso por solicitación S_x Modelo 5 Edificio de 5 pisos con muros de ductibilidad limitada

Piso	V. Exacto	10 Modos			
		Ritz	Error	Propios	Error
7	15.08	15.03	0.33 %	15.07	0.07 %
6	36.96	36.95	0.03 %	36.96	0.00 %
5	146.28	145.14	0.78 %	145.8	0.33 %
4	241.61	242.03	-0.17 %	241.5	0.05 %
3	306.98	306.98	0.00 %	306.64	0.11 %
2	348.43	349.67	-0.36 %	348.23	0.06 %
1	366.64	367.35	-0.19 %	365.12	0.41 %

Tabla 5.17: Cortante en Y por piso por solicitación S_y Modelo 5 Edificio de 5 pisos con muros de ductibilidad limitada

Piso	V. Exacto	10 Modos			
		Ritz	Error	Propios	Error
7	11.94	11.91	0.25 %	11.86	0.67 %
6	31.52	31.52	0.00 %	31.51	0.03 %
5	142.95	142.53	0.29 %	141.1	1.29 %
4	239.67	239.95	-0.12 %	236.38	1.37 %
3	307.47	307.48	0.00 %	307.16	0.10 %
2	351.64	352.57	-0.26 %	347.78	1.10 %
1	371.63	373.09	-0.39 %	361.92	2.61 %

En general si se compara cortantes por piso, el método de Ritz da valores más cercanos a los valores exactos para un mismo número de modos, también se ha podido notar que el error crece a medida que se calculan los cortantes para pisos superiores.

Resultados de Desplazamientos

En cuanto al tema de desplazamientos se han seleccionado puntos de las zonas más alejadas de su centro en cada modelo, se han comparado los resultados para un mismo número de modos con ambos métodos valores y vectores propios y vectores de Ritz; y éstos a la vez son comparados con el valor exacto.

Los resultados se han llevado a la gráfica desplazamiento en unidades E-02 cm versus N° de piso para sollicitación S_x como S_y , mostrándose los resultados de valores del desplazamiento en cada piso de los modelos analizados en las tablas desde la 5,10 hasta la 5,19 y las gráficas se muestran en las figuras desde la 5,18 hasta la 5,27.

Modelo 1 Colegio Torre Octogonal

Tabla 5.18: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_x en el Modelo 1

S _x			
pisos	exacto(100)	ritz(10)	propios(10)
0	0	0	0
1	15,22	15,22	15,10
2	29,55	29,55	29,44
3	35,28	35,28	35,14

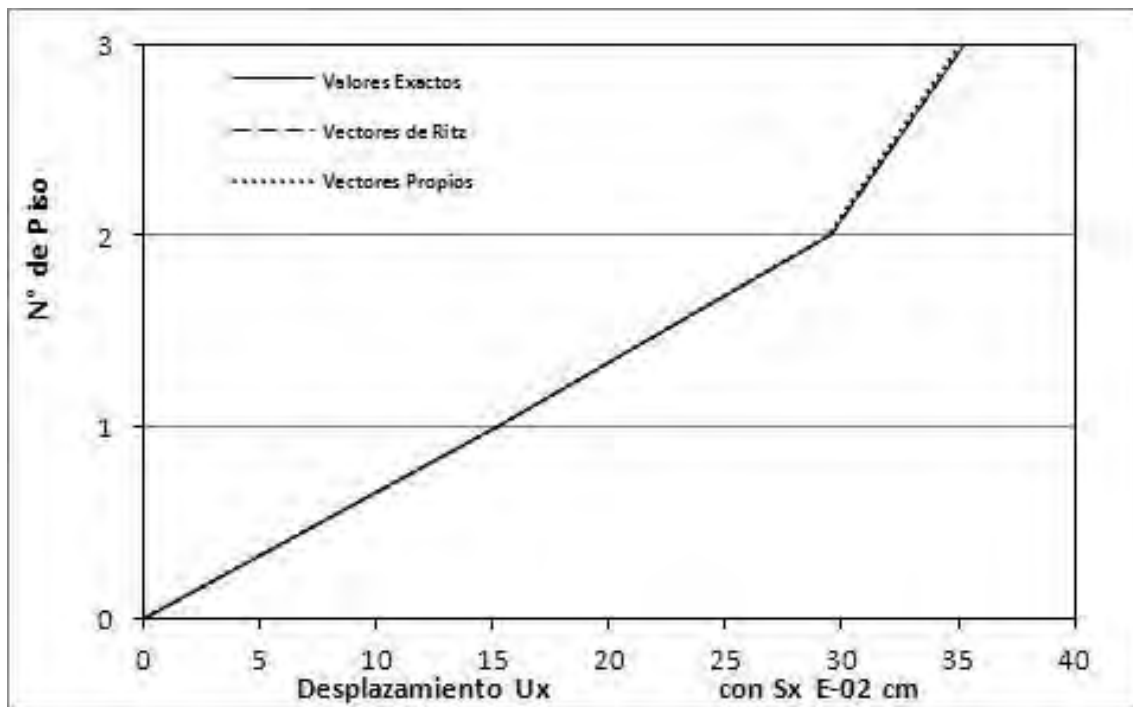


Figura 5.18: Desplazamiento en la dirección X para sollicitación S_x en el Modelo 1

Tabla 5.19: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 1 Colegio Torre Octogonal

Sy			
pisos	exacto(100)	ritz(10)	propios(10)
0	0	0	0
1	17,78	17,78	17,75
2	40,70	40,70	40,68
3	54,07	54,07	54,05

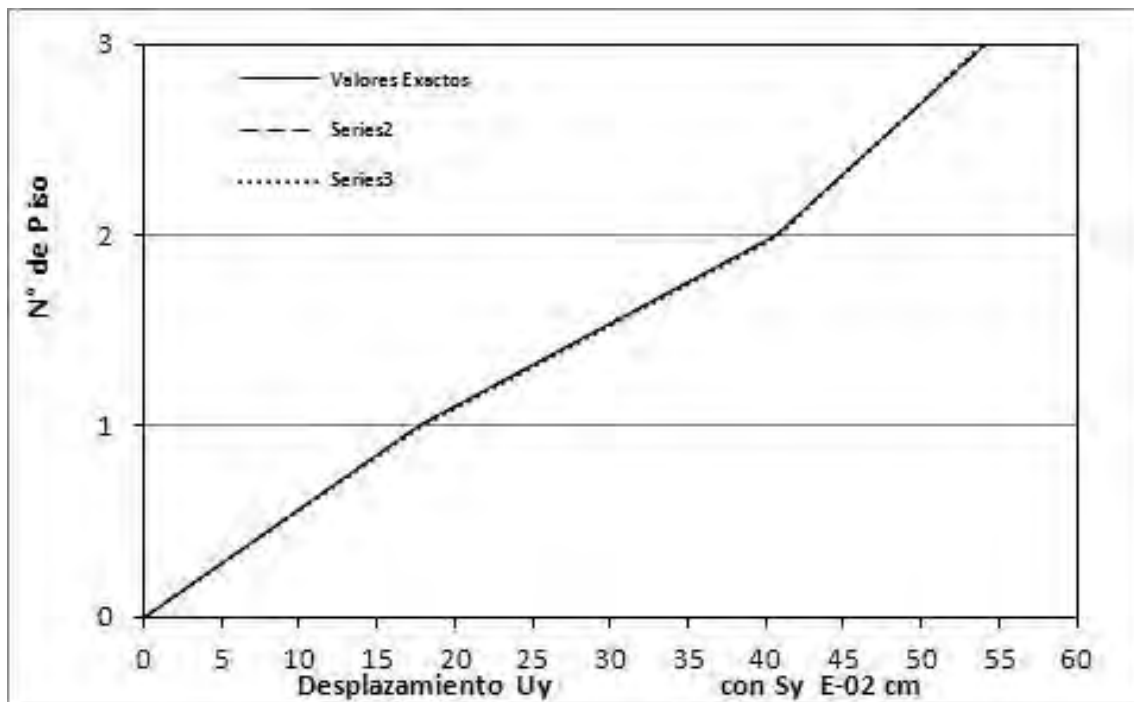


Figura 5.19: Desplazamiento en la dirección Y para sollicitación S_y en el Modelo 1

Modelo 2 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A

Tabla 5.20: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_x en el Modelo 2

pisos	S _x		
	exacto(20)	PROPIOS(15)	RITZ(15)
-1	0	0	0
0	11,52	11,42	11,65
1	22,11	22,06	22,17
2	33,75	33,73	33,76
3	45,55	45,55	45,55
4	57,14	57,13	57,14
5	68,14	68,13	68,13
5,5	104,78	82,99	83,38

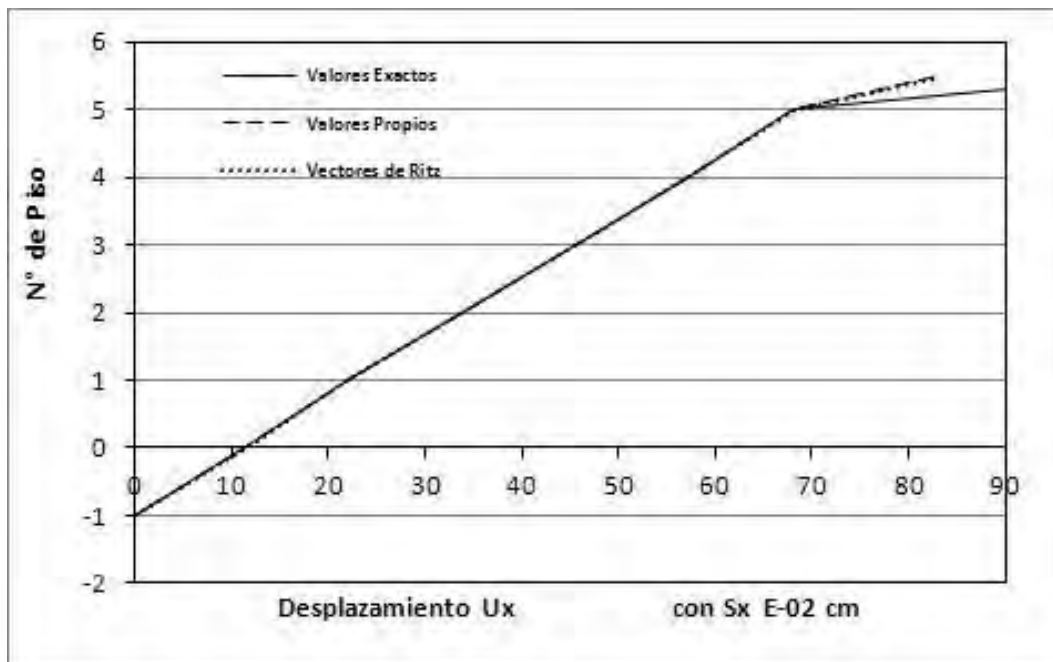


Figura 5.20: Desplazamiento en la dirección X para sollicitación S_x en el Modelo 2

Tabla 5.21: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 2

SY			
pisos	exacto(20)	PROPIOS(15)	RITZ(15)
-1	0	0	0
0	18,45	18,45	18,45
1	47,57	47,56	47,5
2	83,58	83,58	83,56
3	117,17	117,17	117,17
4	145,43	145,43	145,42
5	167,21	167,21	167,19
5,5	166,77	166,77	166,75

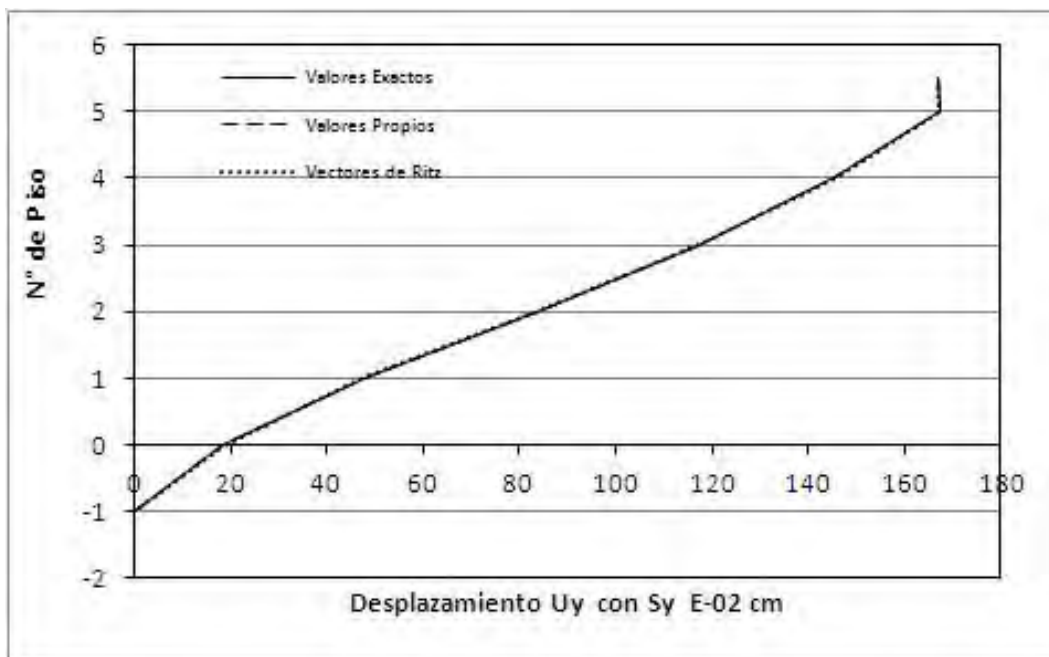


Figura 5.21: Desplazamiento en la dirección Y para sollicitación S_y en el Modelo 2

Modelo 3 Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B

Tabla 5.22: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a Sx en el Modelo 3

Sx			
pisos	exacto(20)	PROPIOS(15)	RITZ(15)
-1	0	0	0
0	1,09	1,09	1,09
1	14,72	14,72	14,72
2	35,03	35,03	35,03
3	56,89	56,89	56,89
4	76,85	76,85	76,85

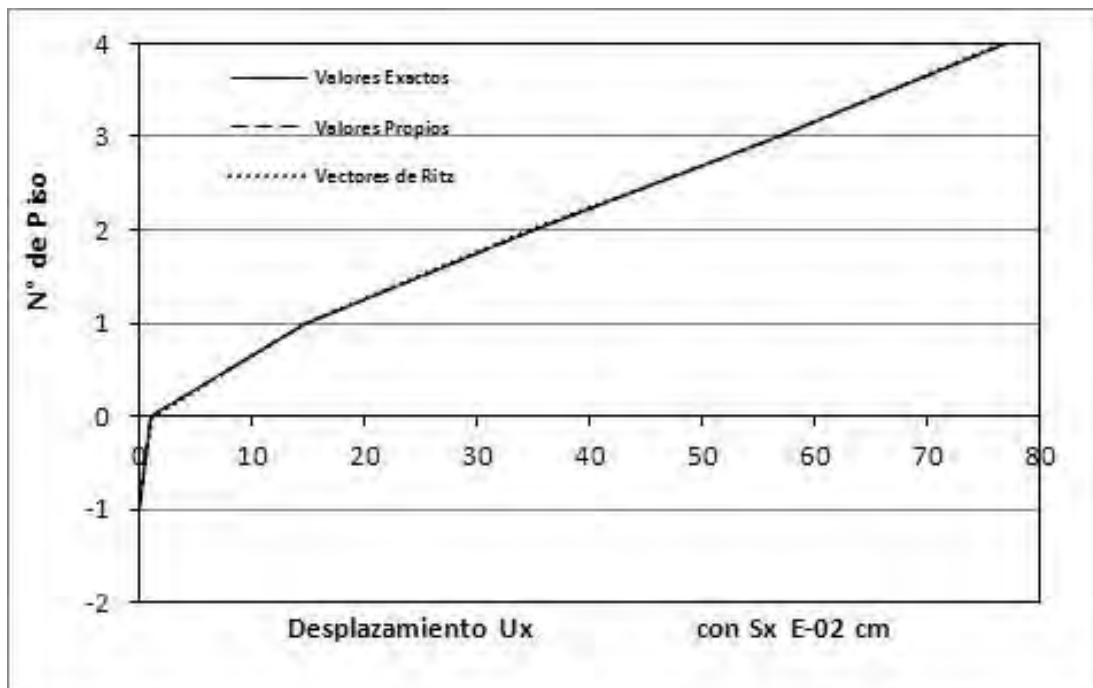


Figura 5.22: Desplazamiento en la dirección X para sollicitación Sx en el Modelo 3

Tabla 5.23: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 3

S_y			
pisos	exacto(20)	PROPIOS(15)	RITZ(15)
-1	0	0	0
0	1,86	1,86	1,86
1	3,56	3,56	3,56
2	5,33	5,33	5,33
3	6,99	6,99	6,99
4	8,44	8,44	8,44

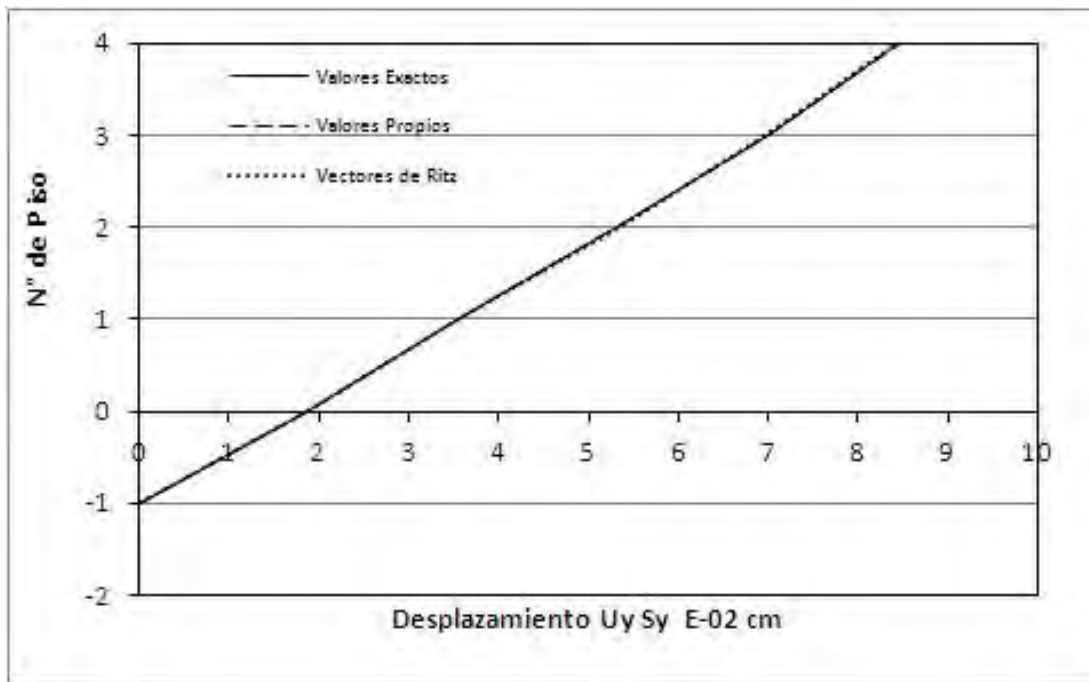


Figura 5.23: Desplazamiento en la dirección Y para sollicitación S_y en el Modelo 3

Modelo 4 Torres Gemelas de 12 pisos

Tabla 5.24: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_x en el Modelo 4

S_x			
pisos	exacto(30)	PROPIOS(10)	RITZ(10)
0	0	0	0
1	4,43	4,42	4,44
2	13,7	13,69	13,7
3	26,37	26,37	26,37
4	41,48	41,48	41,48
5	58,19	58,19	58,19
6	75,78	75,78	75,78
7	93,57	93,57	93,57
8	110,97	110,97	110,97
9	127,47	127,47	127,47
10	142,68	142,68	142,68
11	156,45	156,45	156,45

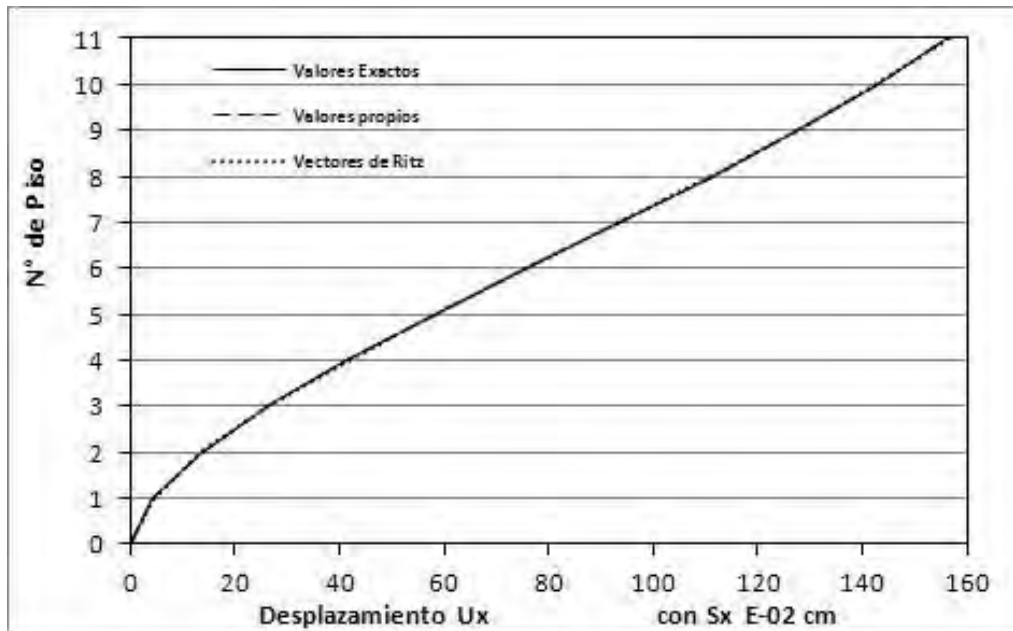


Figura 5.24: Desplazamiento en la dirección X para sollicitación S_x en el Modelo 4

Tabla 5.25: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 4

S_y			
pisos	exacto(30)	PROPIOS(10)	RITZ(10)
0	0	1	2
1	3,71	3,71	3,72
2	13,14	13,14	13,14
3	26,78	26,78	26,78
4	43,59	43,59	43,59
5	62,7	62,7	62,7
6	83,28	83,28	83,28
7	104,61	104,61	104,61
8	126	126	126
9	146,89	146,89	146,89
10	166,91	166,91	166,91
11	185,49	185,49	185,49

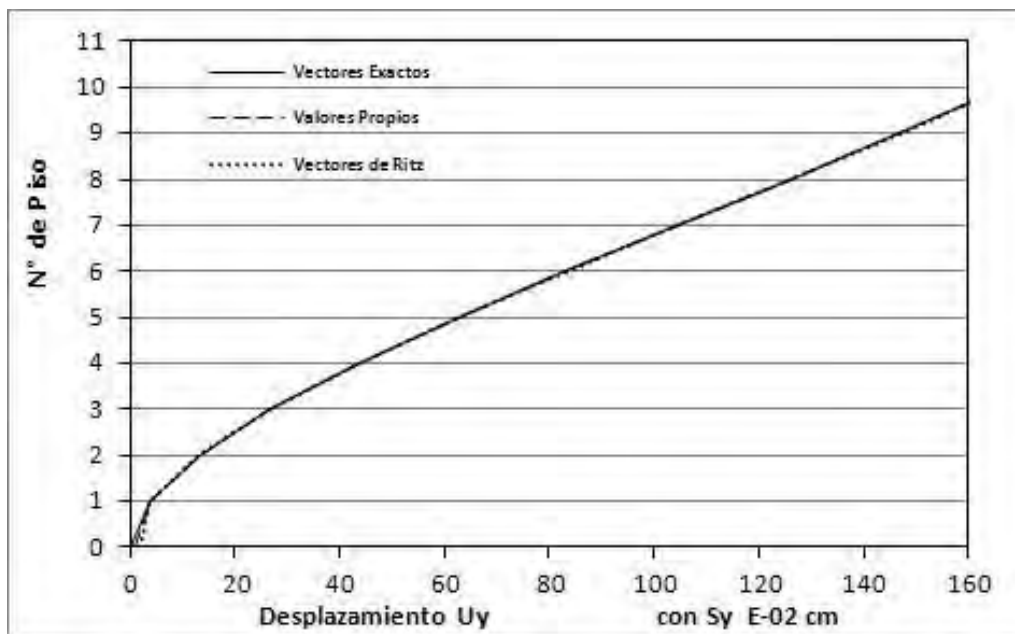


Figura 5.25: Desplazamiento en la dirección Y para sollicitación S_y en el Modelo 4

Modelo 5 Edificio de 5 pisos con muros de Ductilidad Limitada

Tabla 5.26: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a Sx en el Modelo 5

Sx			
pisos	exacto(30)	ritz(10)	propios(10)
0	0	0	0
1	2,41	2,42	2,41
2	6,70	6,70	6,70
3	11,50	11,50	11,50
4	16,24	16,24	16,24
5	21,57	21,57	21,57
6	36,77	36,77	36,77
7	47,10	47,10	47,10

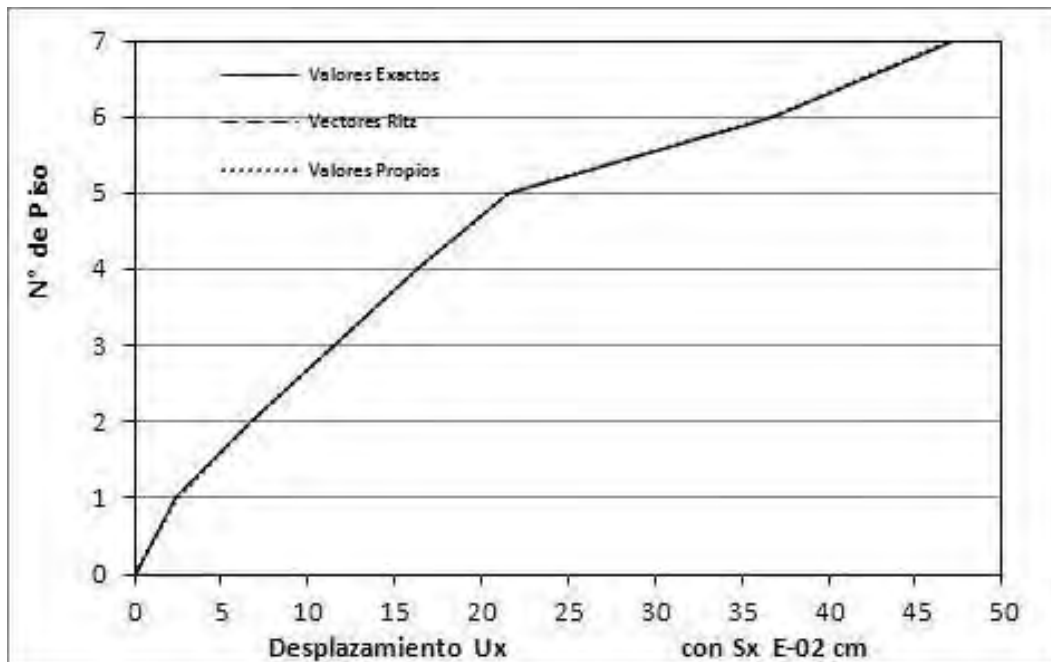


Figura 5.26: Desplazamiento en la dirección X para sollicitación Sx en el Modelo 5

Tabla 5.27: Desplazamiento en E-02 cm en cada nivel debido a S_y en el Modelo 5

Sy			
pisos	exacto(30)	ritz(10)	propios(10)
0	0	0	0
1	1,86	1,86	1,82
2	4,73	4,73	4,69
3	7,90	7,90	7,89
4	10,94	10,94	10,94
5	13,59	13,59	13,58
6	20,12	20,12	20,12
7	23,64	23,65	23,64

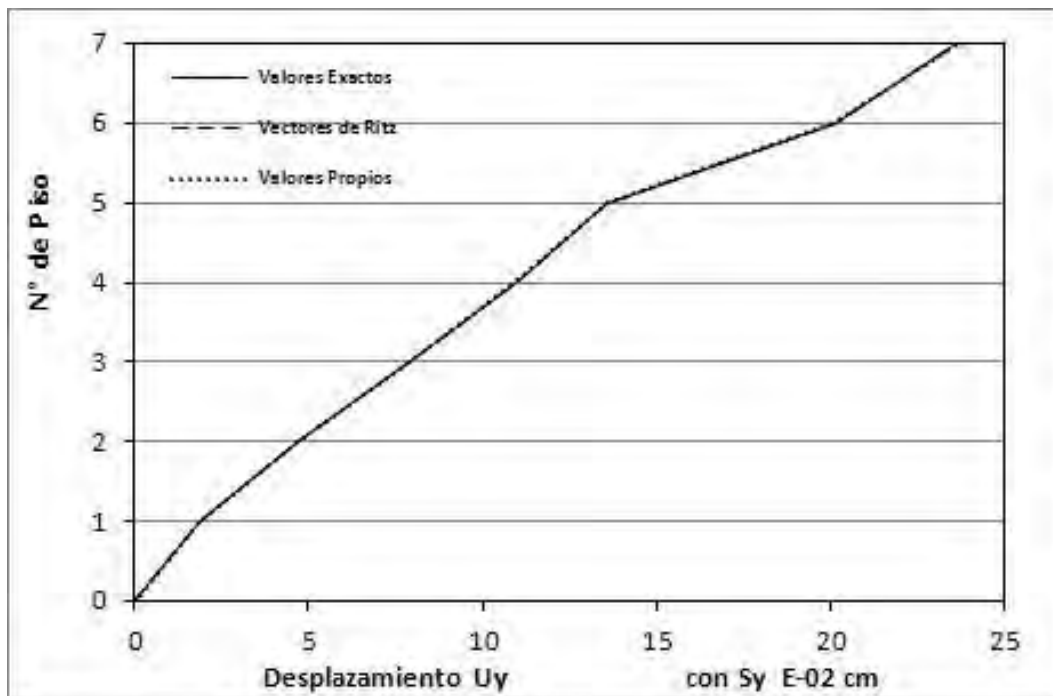


Figura 5.27: Desplazamiento en la dirección Y para sollicitación S_y en el Modelo 5

5.3. Análisis de los resultados obtenidos

En cuanto a los resultados que se han logrado para las diferentes modelos comparando los métodos de valores y vectores propios con los vectores de Ritz y en algunos casos con los valores exactos se puede afirmar lo siguiente:

1. En los modelos analizados se han requerido menos modos con vectores de Ritz para alcanzar una participación de masa mayor al 90 por ciento que con vectores propios.
2. Se trabajaron los modelos para el cálculo del cortante y momento en la base para las solicitaciones de sismo S_x y S_y incrementando el número de modos y se concluye también que con los vectores de Ritz convergen con menos modos a la solución exacta, en realidad con los dos métodos convergen con pocos modos a los valores exactos.
3. En el cálculo de cortante y momento en el nivel superior se requiere un mayor número de modos que para el cálculo del cortante en la base, pero de igual manera se observa que convergen los valores con menos modos con vectores de Ritz que con vectores propios.
4. En los cuadros de los cortantes por piso para solicitación sísmica S_x y S_y comparando los dos métodos con los valores exactos para un mismo número de modos, resultaron los valores bastante cercanos al exacto, siendo los errores poco significativos (menores al 1 % a pesar de usarse un número da modos bastante pequeño).
5. Se seleccionaron puntos de la estructura distantes de su centro y alineados verticalmente por piso para calcular los desplazamientos en las direcciones X y Y debido a la solicitación sísmica, comparando los resultados obtenidos con los dos métodos para un mismo número de modos especificado y comparando con los valores exactos se encontró que los desplazamientos en cm eran bastante pequeños y los resultados fueron prácticamente iguales.
6. Se puede notar que los factores de participación de masa no están directamente asociados a la precisión del cálculo de los cortantes, momentos y desplazamientos, porque a pesar de procesarse los modelos con un número de modos en algunos casos menor al que alcanzan el 90 % de participación de masa estos resultados fueron bastante buenos con márgenes de error muy pequeños (menores del 1 %).
7. En general los cálculos de cortantes, momentos y desplazamientos en los modelos analizados con vectores de Ritz requieren un menor ó igual número de modos que con los vectores propios, resultando eficiente el uso del método para el análisis dinámico en estructuras de mediana complejidad y se ve mayor eficiencia para estructuras con ciertas irregularidades.

6

Análisis no Lineal

En el capítulo 2 se estudió el comportamiento dinámico de sistemas con un grado de libertad, con el supuesto que el modelo representa una estructura en la que la fuerza elástica es proporcional al desplazamiento. Además se supuso que se disipa energía a través de un mecanismo viscoso, en el cual la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, y que la masa es constante en el tiempo. Como consecuencia de estas hipótesis, la ecuación del movimiento resulta la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes:

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K \mathbf{u} = \mathbf{f}(s, t) \quad (6.1)$$

También se mostró que para ciertas funciones de excitación, como por ejemplo las fuerzas armónicas, es sencillo encontrar la solución planteándolas en función de la integral de Duhamel. Por tanto el modelo puede representar el comportamiento de muchas estructuras representadas como sistemas de un solo grado de libertad. Sin embargo existen casos físicos en los cuales este modelo no representa adecuadamente las características dinámicas de la estructura. Siendo necesaria la introducción de un modelo en el cual la fuerza del resorte no es proporcional al desplazamiento, o la fuerza en el elemento de amortiguamiento no es proporcional a la velocidad. Como consecuencia, la ecuación de movimiento ya no es lineal y la solución matemática, en general, es de una complejidad mayor, requiriendo un procedimiento numérico para su integración, ya que el análisis clásico modal no es estrictamente aplicable para sistemas no lineales.

En el caso del comportamiento no-lineal en una estructura sometida a acciones sísmicas se debe principalmente al comportamiento inelástico y no lineal de los materiales que la constituyen, y en situaciones extremas podrían tenerse alteraciones de la masa y rigideces como consecuencia de un colapso parcial.

Lo más común del comportamiento no lineal ocurre cuando la relación del material esfuerzo-deformación ó fuerza-desplazamiento es no-lineal. Indicando la filosofía moderna de diseño que " una estructura bien diseñada debe concentrar las no linealidades en un número de elementos que requieren ductilidad, y que el mecanismo de falla sea claramente definido". Dicho enfoque minimiza el costo de reparación después de un sismo de cierta magnitud. Así para cargas dinámicas sería conveniente agregar amortiguamiento concentrado, aislamiento de base o elementos disipadores de energía.

El uso directo de la superposición de los vectores de Ritz para el análisis dinámico no lineal puede también presentar una estrategia de solución ventajosa en comparación con la clásica integración paso a paso de un sistema plenamente acoplado de ecuaciones no lineales.

En este capítulo se expondrá el método de análisis no lineal rápido FNA (Fast Non linear Analysis) aplicado a sistemas estructurales no lineales [13], donde se supone que existe un número limitado de elementos no-lineales predefinidos. Se usan los vectores de Ritz del sistema estructural elástico para reducir el tamaño del sistema no-lineal a resolver. Se calculan las fuerzas en los elementos no lineales mediante iteración al final de cada paso de tiempo o paso de carga, resolviendo las ecuaciones modales desacopladas para cada incremento de tiempo.

Se verificará la eficacia del método en un modelo, usando el programa Sap2000

6.1. Solución para Análisis Dinámico No Lineal

El método FNA presenta un enfoque sencillo donde se satisfacen las ecuaciones fundamentales de la mecánica: equilibrio, fuerza-desplazamiento y compatibilidad. El equilibrio de fuerzas para un modelo estructural en el tiempo t se puede expresar como:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}(t)_{NL} = \mathbf{R}(t) \quad (6.2)$$

Donde M , C y K son las matrices de masa, amortiguamiento proporcional y rigidez elástica respectivamente, siendo las matrices cuadradas de tamaño igual al número de desplazamientos desconocidos N_d . La matriz de rigidez elástica K no considera la rigidez de los elementos no-lineales. Los vectores dependientes del tiempo: $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$, \mathbf{u} y $\mathbf{R}(t)$ son las aceleraciones, velocidades, desplazamientos y cargas aplicadas externas respectivamente. $\mathbf{R}(t)_{NL}$ es el vector de fuerzas nodales globales obtenidas y usando las fuerzas no-lineales en los elementos, calculándose por iteración en cada punto en el tiempo.

Si el modelo computarizado es inestable sin los elementos no-lineales, se pueden agregar "elementos elásticos efectivos" (en lugar de los elementos no-lineales) de rigidez arbitraria. Si estas fuerzas efectivas, $K_e\mathbf{u}(t)$ se agregan a ambos lados de la ecuación (6.2), se puede escribir las ecuaciones exactas de equilibrio:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + (K + K_e)\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t)_{NL} + K_e\mathbf{u}(t)$$

Donde K_e es la rigidez efectiva, de valor arbitrario. Por tanto la ecuación para el análisis no-lineal dinámico podría escribirse como:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + \bar{K}\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{R}}(t) \quad (6.3)$$

La matriz de rigidez elástica \bar{K} es conocida y es igual a $K + K_e$. La carga efectiva $\bar{\mathbf{R}}(t)$ es igual a $\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t)_{NL} + K_e\mathbf{u}(t)$ y debe ser evaluada mediante iteración. Si se puede lograr una buena estimación de la rigidez elástica efectiva, se puede acelerar

la convergencia, porque el término de la carga desconocida $-\mathbf{R}(t)_{NL} + K_e \mathbf{u}(t)$ será pequeño.

Si se considera que en los elementos no-lineales las deformaciones no-lineales $\mathbf{d}(t)$, se calculan mediante la siguiente ecuación de transformación del desplazamiento:

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{b}\mathbf{u}(t)$$

Al derivar respecto del tiempo, se tiene:

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{b}\dot{\mathbf{u}}(t)$$

Si los desplazamientos son pequeños, la matriz de transformación deformación-desplazamiento, \mathbf{b} , es función de la geometría de la estructura y no es función del tiempo.

Al conocer las deformaciones y las velocidades de deformación en todos los elementos no-lineales, las fuerzas $\mathbf{f}(t)$ en los elementos no lineales pueden ser calculadas de manera exacta en cualquier momento en base a las propiedades de cada elemento no-lineal. Siendo evidente que se debe realizar iteración en cada punto en el tiempo.

6.1.1. Solución de la ecuación no-lineal

Para resolver la ecuación (6.3) se calcula un grupo de N vectores ortogonales de Ritz, X , que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$X^T M X = M^* \quad X^T \bar{K} X = \bar{K}^* \quad X^T C X = C^*$$

Donde M^* , \bar{K}^* y C^* son matrices diagonales.

Expresando el vector desplazamiento $\mathbf{u}(t)$ en términos de los vectores y coordenadas de Ritz y derivando se tiene:

$$\mathbf{u}(t) = X \mathbf{z}(t) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = X \dot{\mathbf{z}}(t) \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = X \ddot{\mathbf{z}}(t)$$

La sustitución de estas ecuaciones en la ecuación (6.3) y la multiplicación de ambos lados de la ecuación por X^T producen un grupo de N ecuaciones desacopladas expresadas por la siguiente ecuación:

$$M^* \ddot{\mathbf{z}}(t) + C^* \dot{\mathbf{z}}(t) + \bar{K}^* \mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (6.4)$$

Donde las fuerzas modales lineales y no lineales se dan como:

$$\mathbf{F}(t) = X^T \bar{\mathbf{R}}(t) = X^T \mathbf{R}(t) - X^T \mathbf{R}(t)_{NL} + X^T K_e \mathbf{u}(t)$$

M^* y K^* son diagonales, en lo que sigue se supone que C^* es también diagonal, obteniéndose la ecuación desacoplada para el i -ésimo modo:

$$\ddot{z}_{i(t)} + 2 \xi_i \omega_i \dot{z}_{i(t)} + \omega_i^2 z_{i(t)} = \bar{\mathbf{f}}_{i(t)} \quad (6.5)$$

ξ_i es la razón de amortiguamiento para el modo i , teniendo en cuenta que las fuerzas asociadas con amortiguadores concentrados en cualquier punto dentro de la estructura pueden incluirse como parte del vector fuerza no-lineal.

Si el número de vectores de Ritz usados es igual al número total de grados de libertad N_d la ecuación (6.3) es exacta en el tiempo t . Por lo tanto, si se usan intervalos muy reducidos, y si se usa iteración con cada paso del tiempo, el método converge a la solución exacta. Pero el uso de vectores de Ritz reduce significativamente el número de modos que se requieren.

Si se tiene $\mathbf{u}(t) = X\mathbf{z}(t)$, las deformaciones en los elementos no-lineales pueden ser expresadas en términos de las coordenadas modales como:

$\mathbf{d}(t) = B\mathbf{z}(t)$, donde la matriz de transformación *deformación de coordenadas del elemento coordenada modal* es:

$$B = \mathbf{b}X$$

Se debe precisar que la matriz B ($N \times N_d$), de tamaño relativamente pequeño, no es función del tiempo, siendo calculada una sola vez antes de la integración de las ecuaciones modales.

$\mathbf{f}(t)$ puede ser evaluada en base a las propiedades no-lineales básicas y la historia de la deformación del elemento.

Luego en base al principio del trabajo virtual se calculan las fuerzas nodales no-lineales, teniendo: $\mathbf{F}(t)_{NL} = B^T \mathbf{f}(t)$.

Las fuerzas elásticas efectivas también pueden escribirse como:

$$\mathbf{F}(t)_e = X^T K_e \mathbf{u}(t) = X^T \mathbf{b}^T \mathbf{k}_e \mathbf{b} \mathbf{u}(t) = B^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}(t)$$

Donde \mathbf{k}_e es la matriz de rigidez lineal efectiva en el sistema local de referencia del elemento no-lineal.

6.1.2. Ecuaciones modales no-lineales

En primer lugar se calculan los vectores de Ritz sin incluir los elementos no-lineales. Luego se calcula la matriz B (coordenadas modales-deformación). Se calcula una sola vez al inicio de la solución paso a paso. La ecuación (6.5) para el i -ésimo modo, tiene como $\bar{\mathbf{f}}_{i(t)}$ la carga modal y para los elementos no-lineales es una función de todas las respuestas modales en el mismo punto en el tiempo. Por lo tanto, las ecuaciones modales deben ser integradas de manera simultánea y es necesaria la iteración para obtener la solución de todas las ecuaciones modales para una variación lineal de carga dentro de un paso de tiempo, siendo la solución expresada en términos de funciones exponenciales, de raíz cuadrada, seno y coseno; que son pre-calculadas para todos los modos y usadas como constantes para la integración dentro de cada paso. El uso del método exacto de integración permite el uso de intervalos de tiempo mayores.

Algoritmo de Solución para Análisis No-Lineal

La solución completa para sistemas no-lineales se puede dividir en dos fases:

- Reducción de los grados de libertad de la parte lineal de la estructura
- Solución no lineal paso a paso del sistema desacoplado de las ecuaciones, teniendo en cuenta los cambios de los elementos no-lineales.

Una característica importante de este proceso FNA es que los cambios en la rigidez de los elementos no-lineales no afectan la representación de la parte lineal de la estructura.

El resumen del procedimiento se desarrolla en el algoritmo que se muestra a continuación:

Algoritmo 6.1.1. Solución Análisis No-Lineal Rápido FNA

1. Cálculo inicial antes de la solución paso a paso

- a) Calcular N vectores de carga Ritz X para la estructura sin los elementos no-lineales, teniendo cada uno de los vectores N_d componentes
- b) Calcular la matriz B de L por N . Donde L es el número de grados de libertad de todos los elementos no-lineales
- c) Calcular las constantes de integración para la integración exacta de las ecuaciones modales para cada modo.

2. Solución no-lineal para cada intervalo: $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

- a) Usar la serie de Taylor truncada para estimar la solución en un tiempo t

$$\mathbf{z}_{(t)} = \mathbf{z}_{(t-\Delta t)} + \Delta t \dot{\mathbf{z}}_{(t-\Delta t)} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{z}}_{(t-\Delta t)}$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \dot{\mathbf{z}}_{(t-\Delta t)} + \Delta t \ddot{\mathbf{z}}_{(t-\Delta t)}$$

- b) Para la iteración i , calcular L deformaciones no-lineales y velocidades:

$$\mathbf{d}_{(t)}^i = B \mathbf{z}_{(t)}^i$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{(t)}^i = B \dot{\mathbf{z}}_{(t)}^i$$

- c) Calcular L fuerzas no lineales en base a las historias de deformación y velocidad en los elementos no-lineales

d) *Calcular el nuevo vector de fuerza modal*

$$\mathbf{F}_{(t)}^i = \mathbf{F}_{(t)} - B^T[\mathbf{f}_{(t)}^i - \mathbf{k}_{e(t)}\mathbf{d}_{(t)}]$$

e) *Usar el método exacto para resolver las ecuaciones modales para la siguiente iteración*

$$\mathbf{z}_{(t)}^i, \dot{\mathbf{z}}_{(t)}^i, \ddot{\mathbf{z}}_{(t)}^i$$

f) *Se calcula la norma de error*

g) *Se verifica la convergencia comparando Error con Tol*

Si Error > Tol se regresa al paso 2 con $i = i + 1$

Si Error < Tol pasa al paso 1 con $t = t + \Delta t$

6.1.3. Descripción de los modelos para aplicación del método

Se selecciona un pórtico sencillo para verificar la eficacia del método FNA [13].

Se trata de un pórtico de tres niveles propuesto en la documentación del Sap2000, cuyas unidades y dimensiones han sido adecuadas al sistema métrico.

El pórtico tiene un espaciamiento entre ejes de columnas de 7,30 m y la altura de entrepiso es de 3,60 m, considerado una carga adicional en la viga de 3 t/m .

Dimensiones de las vigas 30 cm × 60 cm

Dimensiones de las columnas: 30 cm × 60 cm

Concreto: E = 2 000 000 t/m² , Razón de Poisson = 0,2

Se han desarrollado dos versiones del modelo no lineal, descritos a continuación.

Modelo 1 con Disipadores

El pórtico descrito ubicando disipadores en cada nivel se muestra en la figura 6.1.

Las características propuestas para el modelo son:

Amortiguador:

Propiedades lineales:

Rigidez efectiva = 0 t/cm

Amortiguamiento efectivo = 0 t – seg/cm

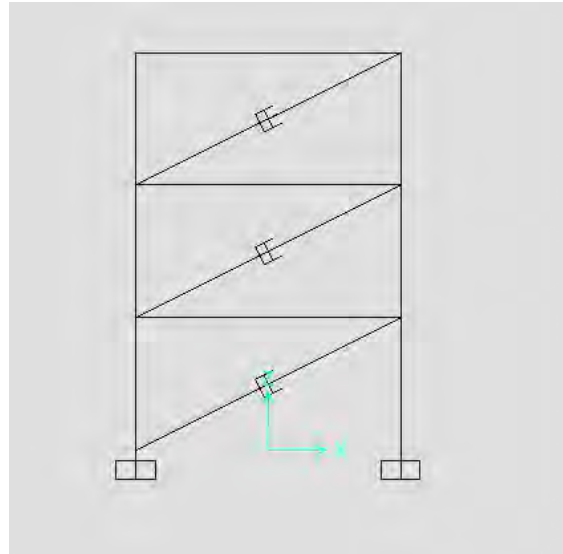


Figura 6.1: Modelo 1 con Disipadores

Propiedades no lineales:

Rigidez = 180,00 t/cm

Amortiguamiento = 5,4 t – seg/cm

exponente del amortiguamiento = 0,5

Modelo 2 con Aisladores

Modelo con aisladores en la base, mostrándose en la figura 6.2.

Propiedades del Aislador:

Rigidez vertical axial = 1 800 t/cm (lineal)

Rigidez inicial de corte = 18,00 t/cm

Fuerza de fluencia = 18,00 t

Relación entre la rigidez post-fluencia el corte y rigidez inicial = 0,1

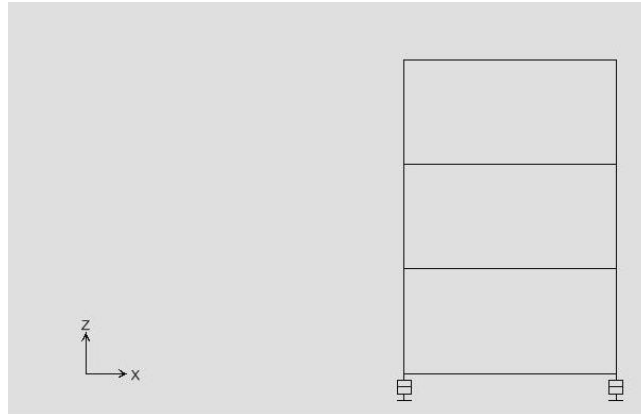


Figura 6.2: Modelo 2 con Aisladores

Registro Tiempo Historia

Se aplicará el registro descrito en el capítulo 3 SISMO74 dado en gal (cm/s^2). La longitud del registro es de 97 s (con un valor máximo de 192,5 gal), mostrándose en la figura 6.3 los valores de la aceleración en cm/s^2 versus tiempo en s.

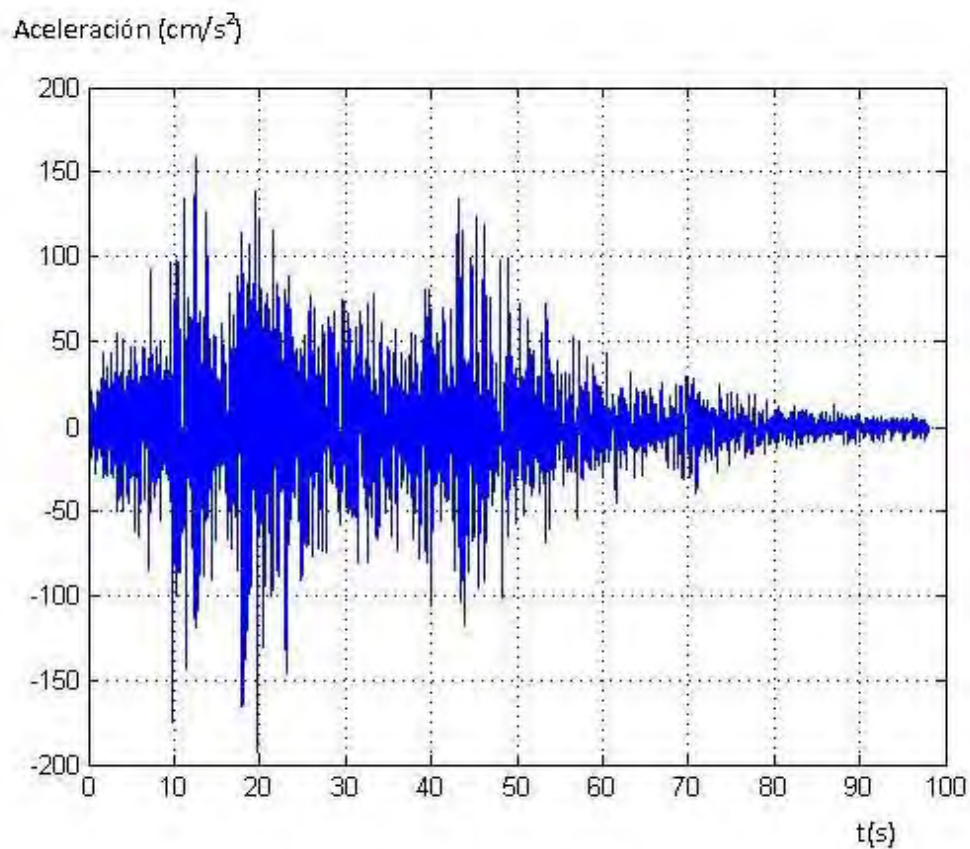


Figura 6.3: SISMO74 correspondiente al Sismo en Lima del 3 de Octubre de 1974

6.1.4. Procesamiento de datos

Modelo 1 con Disipadores

Este primer modelo se ha procesado en modo no lineal con el registro SISMO74 con FNA (Análisis no lineal Rápido) en análisis modal y vectores de Ritz, variando el número de modos de 1, 2, 5, 10, 15 y con todos los GDL (18).

Como respuesta a la sollicitación el pórtico presenta la deformada que se muestra en la figura 6.4.

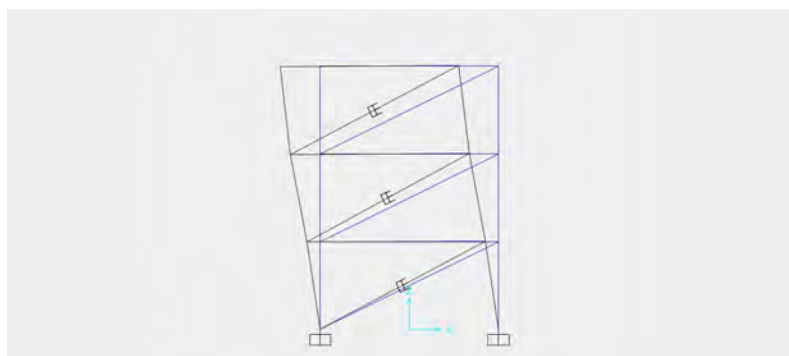


Figura 6.4: Deformada en el portico como respuesta a la excitación SISMO 1974 en el modelo 1

Se analizó el corte en la base con los dos métodos: análisis modal y vectores de Ritz, mostrando los resultados en la tabla 6.1. Además se calculó el error que resulta de comparar el valor obtenido con un número determinado de modos y el valor al procesar con todos los grados de libertad. Se puede observar que con vectores de Ritz tiene una convergencia más rápida a la solución, con 5 modos la fuerza cortante en la base con un error de 0,1 %, siendo el valor del cortante en la base de 17,109 t.

Tabla 6.1: El Cortante en la Base en t en el modelo 1 con disipadores para análisis no lineal con análisis modal y vectores de Ritz

N° Modos	Modal	Error	Con Ritz	Error
1	12.586	26.4 %	15.877	7.2 %
2	16.000	6.5 %	18.295	-6.9 %
5	16.840	1.6 %	17.125	-0.1 %
10	17.110	0.0 %	17.109	0.0 %
15	17.109	0.0 %	17.109	0.0 %
18	17.109		17.109	

En cuanto a los desplazamientos se ha seleccionado el nivel superior para analizar el comportamiento ante la solicitación sísmica, comparando los resultados máximos obtenidos en la tabla 6.2 con los dos métodos variando la cantidad de modos en el análisis. Se puede observar que con el método de Ritz los valores convergen con menos modos (5) que con el análisis modal (10), obteniendo un desplazamiento máximo de 2,136 *cm*.

Tabla 6.2: El desplazamiento en cm en el nivel superior para el modelo 1 con disipadores

N° Modos	Modal	Error	Con Ritz	Error
1	1.953	8.6 %	2.015	5.7 %
2	1.991	6.8 %	2.05	4.0 %
5	2.067	3.2 %	2.135	0.0 %
10	2.136	0.0 %	2.136	0.0 %
15	2.136	0.0 %	2.136	0.0 %
18	2.136		2.136	

Además se ha preparado la gráfica del comportamiento del desplazamiento en el tiempo para el nivel superior para ambos métodos considerando todos los modos. Comparando los resultados con cada método se puede afirmar que el comportamiento es muy similar, no se observan diferencias notorias.

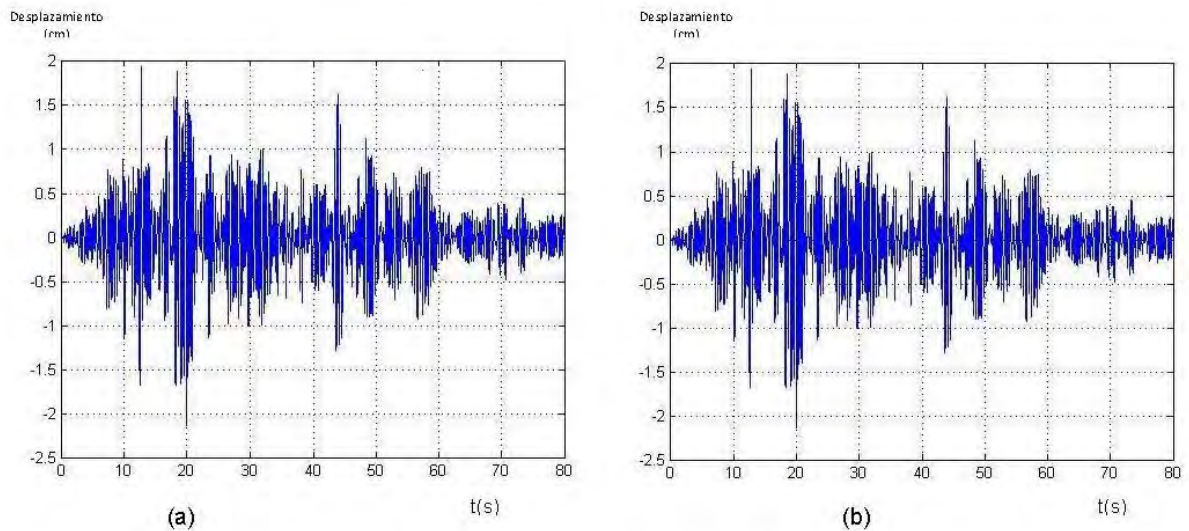


Figura 6.5: Desplazamiento del nivel superior en cm en el tiempo como respuesta a la excitación del registro de SISMO74 (a) con análisis modal y (b) vectores de Ritz en el modelo 1 con Disipadores

Modelo 2 con Aisladores

Este modelo también ha sido procesado en modo no lineal con registro SISMO74 con FNA en análisis modal y vectores de Ritz, variando el número de modos de 1, 2, 5, 10, 15 y con todos los GDL (20).

El pórtico presenta la deformada que se muestra en la figura 6.6. Comparado con el modelo 1 se observa que la mayor parte del desplazamiento horizontal se produce en los aisladores.

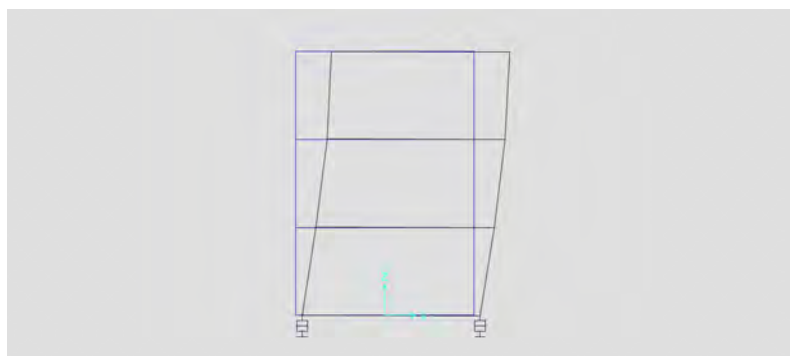


Figura 6.6: Deformada en el portico como respuesta a la excitación del registro SISMO74 en el modelo 2 con aisladores

Se determinó el corte en la base con los dos métodos mostrando los resultados en la tabla 6.3. Se puede notar que con pocos modos (5) los vectores de Ritz convergen rápidamente a la respuesta con un error mínimo del 1,3%; el análisis modal converge con un mayor número de modos 15, siendo el cortante en la base de 23,884 t.

Tabla 6.3: Cortante en la base en t del modelo 2 con aisladores para análisis no lineal con análisis modal y vectores de Ritz

N° Modos	Modal	Error	Con Ritz	Error
1	27.434	-14.9 %	32.454	-35.9 %
2	27.747	-16.2 %	30.956	-29.6 %
5	27.476	-15.0 %	23.566	1.3 %
10	27.476	-15.0 %	23.884	0.0 %
15	23.903	-0.1 %	23.884	0.0 %
20	23.884		23.884	

Los resultados para desplazamientos en el nivel superior se han comparado en la tabla 6.4 los resultados con vectores de Ritz convergen rápidamente a la solución basando 5 modos los resultados se podrían afirmar que son bastante buenos, en cambio para el análisis modal el número que requiere es de 15 modos, que implica un mayor esfuerzo computacional. Considerando todos los modos, se obtienen los mismos valores de desplazamiento en el nivel superior de 4,813 cm.

Tabla 6.4: Desplazamiento en *cm* en el nivel superior para el modelo 2 con aisladores

N° Modos	Modal	Error	Con Ritz	Error
1	5.076	-5.5 %	5.22	-8.5 %
2	5.066	-5.3 %	5.011	-4.1 %
5	5.063	-5.2 %	4.817	-0.1 %
10	5.063	-5.2 %	4.813	0.0 %
15	4.811	0.0 %	4.813	0.0 %
20	4.813		4.813	

También se ha preparado la gráfica del desplazamiento en el nivel superior en el tiempo para ambos casos con todos los modos y se comprueba que tanto con análisis modal como con vectores de Ritz tiene un máximo desplazamiento de 4,813cm, mostrándose los resultados en la figura 6.7; ambos comportamientos presentan una forma similar.

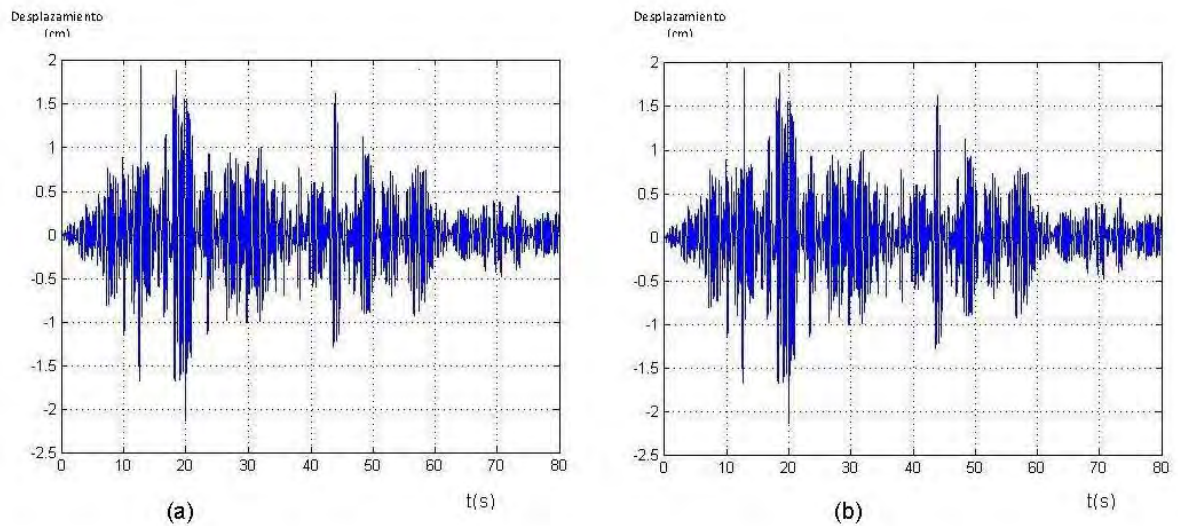


Figura 6.7: Desplazamiento del nivel superior en cm en el tiempo como respuesta en el modelo 2 con aisladores a la excitación del registro SISMO74 (a) con análisis modal y (b) vectores de Ritz

Según los resultados obtenidos en ambos modelos se puede afirmar que hay una convergencia más inmediata con los desplazamientos, que con los cortantes en ambos métodos.

Se puede comprobar que con el método de vectores de Ritz se requieren un menor número de modos, comparado con el análisis modal, para obtener buenos resultados tanto en los cortantes como en los desplazamientos. Sería conveniente analizar que pasa si se presentan irregularidades en la estructura.

7

Conclusiones y Recomendaciones

7.1. Conclusiones

Del desarrollo de la tesis se puede concluir:

1. En la tesis se ha podido comprobar que el método de vectores de Ritz para el análisis dinámico lineal tanto en el modelo procesado en Matlab, como en los modelos analizados con el Etabs y Sap tiene una buena convergencia con un menor número de modos que el método de valores y vectores propios.
2. La base Ritz que desacopla las ecuaciones de movimiento permiten un ahorro importante del esfuerzo computacional, sobre todo para sistemas estructurales de muchos grados de libertad.
3. El algoritmo de generación de vectores de Ritz tiene un esquema sencillo, pero resulta eficiente en términos del cálculo numérico.
4. En el análisis del error normalizado en base al vector de cargas se pudo comprobar para el modelo analizado que el error converge rápidamente a cero con solo tres vectores de Ritz, demostrando la eficacia del método.
5. En los modelos analizados se ha podido comprobar que se han requerido menos modos con vectores de Ritz que con valores y vectores propios para alcanzar una participación de masa mayor al 90 %, siendo la diferencia más notoria en los modelos que presentan irregularidades como el modelo 5 Pequeño Auditorio.
6. De los resultados obtenidos en los modelos analizados se puede afirmar que los desplazamientos convergen más rápido que los cortantes, por tanto se requiere un menor número de modos para su cálculo.
7. Se concluye que los cortantes en la base en los modelos analizados no presentan mucha variación con cualquiera de los dos métodos analizados valores y vectores propios y vectores de Ritz, dando una buena aproximación con pocos modos en el análisis.

8. Del análisis con respecto a los modelos no lineales con disipadores y aisladores se puede concluir que tanto cortantes como desplazamientos son obtenidos con menor número de modos con vectores de Ritz que con análisis convencional, comprobando que tiene más rápida convergencia para desplazamientos que para fuerzas cortantes.

7.2. Recomendaciones

1. Se recomienda evaluar otras alternativas respecto al vector inicial para la generación de vectores de Ritz; si es factible otro tipo de vectores de inicio que permitan una convergencia similar ó mejor.
2. Se recomienda el uso del método sobre todo en estructuras con cierto grado de complejidad y múltiples grados de libertad, ya que permiten un ahorro sustancial en el tiempo de ejecución.
3. En el caso del análisis no lineal, se debería investigar para modelos con irregularidades y mayor complejidad y poder comparar con métodos de integración directa paso a paso.

Apéndice

Cuadros

Cortantes y Momentos en la Base

Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A

Tabla 1: Cortante y Momento en la Base con Sx Modelo 2

Modos	Sx							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
5	357.71	2.36 %	3446.75	0.04 %	382.7	-4.46 %	3450.27	-0.06 %
10	357.71	2.36 %	3446.75	0.04 %	367.35	-0.27 %	3448.26	-0.01 %
15	365.37	0.27 %	3447.86	0.01 %	366.96	-0.16 %	3448.10	0.00 %
20	365.38	0.27 %	3447.86	0.01 %	367.06	-0.19 %	3448.10	0.00 %
25	365.39	0.26 %	3447.87	0.01 %	366.64	-0.08 %	3448.07	0.00 %
70	366.36		3448.06		366.36		3448.06	

Tabla 2: Cortante y Momento en la Base con Sy Modelo 2

Modos	Sy							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)
5	361.92	2.56 %	3442.90	0.04 %	389.81	-4.95 %	3537.22	-2.70 %
10	361.92	2.56 %	3442.91	0.04 %	373.09	-0.45 %	3444.45	-0.01 %
15	370.32	0.30 %	3444.06	0.01 %	372	-0.16 %	3444.27	0.00 %
20	370.35	0.29 %	3444.06	0.01 %	372.18	-0.20 %	3444.28	0.00 %
25	370.35	0.29 %	3444.06	0.01 %	371.63	-0.06 %	3444.26	0.00 %
70	371.42		3444.25		371.42		3444.25	

Muestran ambos métodos resultados buenos :vectores propios 15 modos y vectores de Ritz 10 modos error <de 1 %

Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B

Tabla 3: Cortante y Momento en la Base con Sx Modelo 3

Modos	Sx							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
5	316.15	2.25 %	3652.05	0.12 %	349.48	-8.05 %	3675.20	-0.51 %
10	317.81	1.74 %	3653.42	0.08 %	329.91	-2.00 %	3658.93	-0.07 %
15	317.86	1.72 %	3653.46	0.08 %	323.45	-0.01 %	3656.59	0.00 %
20	319.22	1.30 %	3654.19	0.06 %	323.45	-0.01 %	3656.48	0.00 %
25	322.02	0.44 %	3655.67	0.02 %				
50	323.43		3656.45		323.43		3656.45	

Tabla 4: Cortante y Momento en la Base con Sy Modelo 3

Modos	Sy							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)
5	405.68	2.10 %	4286.28	0.00 %	418.57	-1.01 %	4284.35	0.04 %
10	413.71	0.16 %	4286.18	0.00 %	414.59	-0.05 %	4286.26	0.00 %
15	414.26	0.03 %	4286.26	0.00 %	414.41	0.00 %	4286.26	0.00 %
20	414.26	0.03 %	4286.26	0.00 %	414.41	0.00 %	4286.26	0.00 %
25	414.27	0.03 %	4286.26	0.00 %				
50	414.39		4286.26		414.39		4286.26	

Cortantes y momentos en la base con error de menos de 1% con 25 modos con vectores propios y 15 modos con vectores de Ritz

Torres Gemelas de 12 pisos

Tabla 5: Cortante y Momento en la Base con Sx Modelo 4

Modos	Sx							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
2	95.94	79.94 %	1994.39	78.51 %	726.75	-51.93 %	10962.22	-18.09 %
4	471.77	1.37 %	9279.18	0.04 %	722.65	-51.07 %	8947.51	3.61 %
10	476.85	0.31 %	9282.48	0.00 %	485.41	-1.48 %	9283.59	-0.01 %
50	478.34		9282.71		478.34		9282.71	

Tabla 6: Cortante y Momento en la Base con Sy Modelo 4

Modos	Sy							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)
2	458.45	7.68 %	9588.97	0.72 %	703.06	-41.58 %	10604.93	-9.80 %
4	460.23	7.32 %	9626.27	0.33 %	537.7	-8.28 %	9614.56	0.45 %
10	494.76	0.36 %	9658.07	0.00 %	502.89	-1.27 %	9658.67	0.00 %
50	496.57		9658.35		496.57		9658.35	

Con 10 modos ambos métodos dan valores con errores menores del 2 %

Edificio de 5 pisos con Muros de Ductibilidad Limitada

Tabla 7: Cortante y Momento en la Base con Sx Modelo 5

Modos	Sx							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
5	357.71	2.37 %	3446.75	0.04 %	382.7	-4.45 %	3450.27	-0.06 %
10	365.12	0.35 %	3447.79	0.01 %	367.35	-0.26 %	3448.26	-0.01 %
15	365.37	0.28 %	3447.86	0.01 %	367.35	-0.26 %	3448.10	0.00 %
20	365.38	0.28 %	3447.86	0.01 %	367.06	-0.18 %	3448.10	0.00 %
25	365.39	0.28 %	3447.27	0.02 %	366.64	-0.06 %	3448.07	0.00 %
30	366.41		3448.06		366.41		3448.06	

Tabla 8: Cortante y Momento en la Base con Sy Modelo 5

Modos	Sy							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)
5	361.92	2.57 %	3442.90	0.04 %	389.81	-4.93 %	3827.42	-11.12 %
10	361.92	2.57 %	3442.93	0.04 %	373.09	-0.43 %	3444.45	-0.01 %
15	370.32	0.31 %	3444.06	0.01 %	372	-0.14 %	3444.27	0.00 %
20	370.35	0.30 %	3444.06	0.01 %	372.18	-0.19 %	3444.28	0.00 %
25	370.35	0.30 %	3444.06	0.01 %	371.63	-0.04 %	3444.26	0.00 %
30	371.48		3444.25		371.48		3444.25	

Cortantes y momentos en la base con error de menos de 1% con 15 modos con vectores propios y 10 modos con vectores de Ritz

Cortantes y Momentos en el nivel superior

Edificio de 5 pisos con sótano Bloque A

Tabla 9: Cortante y Momento en el nivel superior con Sx Modelo 2

Sx								
Vectores propios					Vectores Ritz			
Modos	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
5	14.89	1.19 %	22.41	1.28 %	14.9	1.13 %	22.41	1.28 %
10	14.89	1.19 %	22.41	1.28 %	15.08	-0.07 %	22.63	0.31 %
15	15.07	0.00 %	22.69	0.04 %	15.07	0.00 %	22.70	0.00 %
20	15.07	0.00 %	22.69	0.04 %	15.07	0.00 %	22.70	0.00 %
25	15.07	0.00 %	22.69	0.04 %	15.07	0.00 %	22.70	0.00 %
70	15.07		22.70		15.07		22.70	

Tabla 10: Cortante y Momento en el nivel superior con Sy Modelo 2

Sy								
Vectores propios					Vectores Ritz			
Modos	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
5	11.86	0.67 %	17.73	0.84 %	9.12	23.62 %	13.55	24.22 %
10	11.86	0.67 %	17.73	0.84 %	11.91	0.25 %	17.83	0.28 %
15	11.93	0.08 %	17.85	0.17 %	11.93	0.08 %	17.86	0.11 %
20	11.92	0.17 %	17.85	0.17 %	11.93	0.08 %	17.87	0.06 %
25	11.92	0.17 %	17.85	0.17 %	11.93	0.08 %	17.87	0.06 %
100	11.94		17.88		11.94		17.88	

Con vectores propios convergen a menos del 1 % con 15 modos y con vectores de Ritz con 10 modos

Edificio de 5 pisos con sótano Bloque B

Tabla 11: Cortante y Momento en el nivel superior con Sx Modelo 3

Modos	Sx							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
5	78.24	0.36 %	190.16	0.53 %	76.23	2.92 %	184.43	3.53 %
10	78.51	0.01 %	191.17	0.00 %	78.47	0.06 %	190.90	0.14 %
15	78.52	0.00 %	191.17	0.00 %	78.52	0.00 %	191.15	0.01 %
20	78.52	0.00 %	191.17	0.00 %	78.52	0.00 %	191.17	0.00 %
25	78.52	0.00 %	191.17	0.00 %				
exactos(50)	78.52		191.17		78.52		191.17	

Tabla 12: Cortante y Momento en el nivel superior con Sy Modelo 3

Modos	Sy							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
5	69.11	11.12 %	165.99	11.75 %	70.99	8.71 %	170.62	9.28 %
10	76.4	1.75 %	184.37	1.97 %	77.42	0.44 %	187.09	0.53 %
15	77.68	0.10 %	187.84	0.13 %	77.65	0.14 %	187.77	0.16 %
20	77.68	0.10 %	187.84	0.13 %	77.76	0.00 %	188.09	-0.01 %
25	77.67	0.12 %	187.81	0.14 %				
exactos(50)	77.76		188.08		77.76		188.08	

Cortantes y momentos en el nivel superior con error de menos de 1 % con 15 modos con vectores propios y con 10 modos con vectores de Ritz

Torres Gemelas de 12 pisos

Tabla 13: Cortante y Momento en el nivel superior con Sx Modelo 4

Modos	Sx							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
2	1.47	88.45 %	2.26	88.55 %	4.86	61.82 %	7.47	62.14 %
4	9.44	25.84 %	14.57	26.15 %	10.26	19.40 %	15.81	19.87 %
10	12.56	1.34 %	19.45	1.42 %	10.7	15.95 %	16.52	16.27 %
15	12.56	1.34 %	19.47	1.32 %	12.71	0.16 %	19.71	0.10 %
exactos(50)	12.73		19.73		12.73		19.73	

Tabla 14: Cortante y Momento en el nivel superior con Sy Modelo 4

Modos	Sy							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)
2	6.74	39.71 %	10.37	40.23 %	4.7	57.96 %	7.22	58.39 %
4	6.77	39.45 %	10.41	40.00 %	7.27	34.97 %	11.19	35.50 %
10	9.9	11.45 %	15.30	11.82 %	9.24	17.35 %	14.26	17.81 %
15	9.9	11.45 %	15.30	11.82 %	10.76	3.76 %	16.67	3.92 %
exactos(50)	11.18		17.35		11.18		17.35	

Con 15 modos los vectores de Ritz dan valores con errores menores del 4 % el modelo toma bastante tiempo para procesar la información.

Edificio de 5 pisos con Muros de Ductibilidad Limitada

Tabla 15: Cortante y Momento en el nivel superior con Sx Modelo 5

Modos	Sx							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)	Vx (Ton)	% (error)	My (Ton - m)	% (error)
5	14.89	1.19 %	22.41	1.23 %	14.9	1.13 %	22.41	1.23 %
10	15.07	0.00 %	22.70	-0.04 %	15.03	0.27 %	22.63	0.26 %
15	15.07	0.00 %	22.69	0.00 %	15.07	0.00 %	22.70	-0.04 %
exactos(30)	15.07		22.69		15.07		22.69	

Tabla 16: Cortante y Momento en el nivel superior con Sy Modelo 5

Modos	Sy							
	Vectores propios				Vectores Ritz			
	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)	Vy (Ton)	% (error)	Mx (Ton - m)	% (error)
5	11.86	0.50 %	17.73	0.67 %	9.12	23.49 %	13.55	24.09 %
10	11.86	0.50 %	17.73	0.67 %	11.91	0.08 %	17.83	0.11 %
15	11.93	-0.08 %	17.85	0.00 %	11.93	-0.08 %	17.86	-0.06 %
exactos(30)	11.92		17.85		11.92		17.85	

Cortantes y momentos en el nivel superior con error de menos de 1 % con 10 modos con vectores propios y con 10 modos con vectores de Ritz En Sy con vectores de Ritz para 5 modos presenta un error alto pero para 10 modos rápidamente converge a los valores exactos

Bibliografía

- [1] Bathe K., Finite Element Procedures. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1996
- [2] Chopra A., Dynamics of Structures Theory and Applications to earthquake engineering. Prentice Hall. USA. 1995
- [3] Clough R., Penzien J., Dynamics of Structures. Computers and Structures. McGraw, Hill Book Company, N.Y., 1975. Copyright 2003
- [4] Crempien J., Aravena E., Análisis Dinámico de Estructuras con equipos livianos. Universidad de Concepción. Chile. 1992
- [5] Crempien J., Análisis Sísmico de Estructuras con apéndices ligeros usando Vectores de Ritz. Universidad de los Andes. Chile. 2002
- [6] De Miguel A., Análisis Dinámico de Estructuras en el Dominio de la Frecuencia. España. 2011.
- [7] Flores L., Métodos Numéricos aplicados a la Ingeniería Civil. Editorial universitaria UNI, 2010
- [8] Flores L., Respuesta Dinámica de pórticos planos bajo solicitación sísmica. Tesis, UNI, 2004
- [9] Hutton D., Fundamental of Finite Element Analysis. Mc Graw Hill. USA. 2004
- [10] Leger P, Wilson E. y Clough R., The Use of Load Dependent Vectors for Dynamic and Earthquake Analyses, Report N° UCB/EERC-86/04, Department of Civil Engineering. University of California, Berkeley. 1986
- [11] Scaletti H., Métodos de Análisis para determinar la Resistencia Sísmica. Organización Panamericana de la Salud. Perú.
- [12] Wilson E., Yuan M., Dickens J., Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.10, pp. 813-821.
- [13] Wilson E., Static and Dynamic Analysis of Structures. Computers and Structures Inc. USA. 2009
- [14] Wilson E., Leger P., New Approaches for Dynamic Analysis of Large Structural Systems. Report N° UCB/EERC-82/04, Department of Civil Engineering. University of California, Berkeley. 1982

- [15] Zienkiewics O. Taylor R., The Finite Element Method, Mc Graw Hill, 2000
- [16] Sencico , E-030 Norma Técnica de Diseño Sismo Resistente. Perú. 2003