

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE ENSAYOS DE UNIONES
VIGA - COLUMNA EN ESTRUCTURAS DE ACERO**

TESIS

**PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

ELABORADO POR

CARLOS NILTON VALDIVIA BARTURÉN

ASESOR

Dr. Ing. HUGO SCALLETTI FARINA

LIMA-PERÚ

2012

AGRADECIMIENTO

A Dios primeramente quien es el dador de todas las cosas porque todas las cosas por medio de Él subsisten.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Ing. Hugo Scaletti Farina, por su asesoramiento, apoyo e interés brindado en todo momento para la realización del presente trabajo.

Y la mayor de mis gratitudes a mi esposa, por su preocupación y aliento, y a mi hija, ellas son la principal fuente que me impulsa siempre a superarme personal y profesionalmente.

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE ENSAYOS DE UNIONES VIGA - COLUMNA EN ESTRUCTURAS DE ACERO

RESUMEN EJECUTIVO

Es intención de la presente tesis el contribuir en la aplicación de modelos matemáticos no-lineales de elementos estructurales, como una herramienta de investigación que se pueda utilizar previo a los ensayos de laboratorio, optimizando el planeamiento y reduciendo las variables a considerar alrededor de estos.

El objetivo de este trabajo es evaluar la posibilidad de, mediante modelos de elementos finitos y con el uso de programas de cómputo disponibles, predecir correctamente los aspectos básicos del comportamiento no lineal de uniones soldadas viga columna resistentes a momento.

El análisis estructural no lineal empleando elementos finitos se basa en principios y en técnicas bien documentadas en la literatura especializada que se presentan en resumen en el Capítulo 1.

Por otro lado, el desarrollo de las computadoras y de programas de cómputo para el análisis estructural ha permitido hacer modelos cada vez más realistas, para estudiar el comportamiento de estructuras con esfuerzos y deformaciones pequeñas, en las que el comportamiento del material puede aproximarse con un modelo lineal. Esto sólo requiere una correcta representación de la geometría y la estimación del módulo de elasticidad, que en el caso del acero tiene poca variabilidad.

En cambio, la predicción del comportamiento en el rango no lineal presenta mayores dificultades. Aunque el comportamiento esfuerzo – deformación del acero puede aproximarse bastante bien con modelos elastoplásticos, las propiedades del material que deben considerarse son muy variables para un mismo tipo de acero debido, por ejemplo al proceso de fabricación de los perfiles.

Para el presente estudio se requirió de una data completa de especímenes ensayados a cargas monotónicas o a acciones cíclicas realizados en laboratorio de la Universidad de California, Berkeley, y que se presenta en el Capítulo 2 del presente trabajo.

Con la data obtenida se procedió a reproducir las características geométricas, físicas, las propiedades de los materiales y la historia de carga de los especímenes utilizando el programa ADINA, versión 8.1, comparando los resultados obtenidos con los experimentales. Los modelos numéricos y sus comparaciones se presentan en el Capítulo 3.

Si bien es cierto es imposible reproducir exactamente los resultados de comportamiento obtenidos en los ensayos de laboratorio, mediante los modelos numéricos no lineales con elementos finitos se obtiene, por lo menos, una descripción cualitativamente correcta del comportamiento, lo que permitiría identificar los parámetros y detalles más importantes de los especímenes antes de los ensayos.

NUMERICAL SIMULATION OF JOINT BEAM - COLUMN TESTS IN STEEL STRUCTURES

EXECUTIVE SUMMARY

It is the intention of this thesis to contribute to the application of non-linear mathematical models of structural elements, as a research tool that can be used prior to laboratory testing, optimizing the planning and reducing the variables to be considered during these tests.

The aim of this study is to evaluate the possibility of correctly predicting the basic aspects of the non-linear behavior of welded joint beam column instantaneous resistance. This prediction will be performed through finite element models and the use of available computer programs.

Non-linear structural finite element analysis is based on principles and techniques well documented in the specialized literature and are summarized in Chapter 1.

Furthermore, the development of computers and computer programs for structural analysis has allowed the recreation of more realistic models to study the behavior of structures with small stress and strain, in which the material behavior can be approximated with a linear model. This requires only a correct representation of the geometry and estimating the elasticity module, which in the case of steel has little variability.

However, the prediction of behavior in the non-linear range presents greater difficulties. Although the behavior stress - strain of the steel can be approximated fairly well with elastoplastic models, the material properties that should be considered are highly variable for the same type of steel, for example due to the manufacturing process of the profiles.

For the present study a complete data of specimens tested at monotonic or cyclic actions performed in the laboratory of the University of California, Berkeley was required. This data is presented in Chapter 2.

Using the data obtained and ADINA program, version 8.1, the geometric and physical characteristics, materials properties and charge history of the specimens was reproduced, comparing the results obtained with the experimental ones. Numerical models and comparisons are presented in Chapter 3.

Although it is impossible to exactly reproduce the results of the behavior obtained in laboratory tests; through non-linear finite element numerical models, a qualitatively correct description of the behavior is at least obtained. This would allow the identification of the most important parameters and details of the specimens prior to laboratory tests.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS	9
1.1 GENERALIDADES.....	9
1.2 NO LINEALIDAD DE LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS.....	9
1.2.1 Plasticidad Isotrópica	9
1.2.2 Deformación Elasto-Plástica Uniaxial.....	9
1.2.3 Condiciones de Fluencias para Deformaciones Tridimensionales Generales	13
1.2.4 Relación de Esfuerzo – Deformación Plástica Tridimensional.....	16
1.2.5 Endurecimiento en 3 – D.....	18
1.2.6 Modelo Von Mises con endurecimiento mixto.	23
1.3 PROCEDIMIENTO PARA LA INTEGRACIÓN DE ESFUERZOS	27
1.3.1 Condiciones generales tridimensionales, deformación en el plano y axisimétricas	27
1.4 NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA	37
1.5 ANÁLISIS NO LINEAL CON ELEMENTOS FINITOS.....	47
1.5.1 Elementos bidimensionales axisimétricos, planos de esfuerzos y plano de deformaciones	51
1.5.2 Elementos de Cáscara.....	55
CAPITULO 2: RESULTADOS EXPERIMENTALES	61
2.1 RELACIONES ESFUERZO DEFORMACIÓN DEL ACERO	61
2.1.1 Idealización de la curva esfuerzo-deformación.....	62
2.2 ENSAYOS DE VIGAS EN VOLADIZO	65
2.2.1 Descripción de los tipos de conexiones.....	66
2.2.2 Datos de los ensayos de los especímenes.....	67
2.3 ENSAYOS DE COMPONENTES VIGA-COLUMNA.....	80
2.3.1 Diseño de especímenes.....	80
2.3.2 Ensayo de los especímenes	81
2.3.3 Resultados experimentales	82
CAPITULO 3: SIMULACIÓN NUMÉRICA	109
3.1 ESTUDIO DE LOS MODELOS	109
3.1.1 Especímen F1-S	112

3.1.2	Espécimen F1-C2.....	116
3.1.3	Espécimen W1-C1.....	118
3.1.4	Espécimen W1-C7.....	120
3.1.5	Espécimen A1	122
3.1.6	Espécimen A2	124
3.1.7	Espécimen B1	126
3.1.8	Espécimen B2	130
3.1.9	Espécimen B3	134
3.1.10	Espécimen B4	137
3.2	RESULTADOS PARA MODELOS A ESCALA REAL.....	140
3.2.1	Prototipo A1.....	140
3.2.2	Prototipo A2.....	142
3.2.3	Prototipo B1.....	144
3.2.4	Prototipo B2.....	146
3.3	REFORZAMIENTO DE LAS UNIONES	147
3.3.1	Espécimen A3	147
3.3.2	Espécimen A4	149
3.4	INFLUENCIA DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL ACERO	152
3.4.1	Modelo tipo viga en voladizo.....	152
3.4.2	Modelo tipo Viga-Columna.....	155
	CONCLUSIONES.....	159
	RECOMENDACIONES	163
	BIBLIOGRAFIA.....	165

Lista de Figuras

Figura 1.2.1:	Resultados de ensayos para un metal sometido a carga uniaxial.....	10
Figura 1.2.2:	Idealización de la curva esfuerzo – deformación uniaxial para una carga cíclica. Kojic y Bathe (2005).	13
Figura 1.2.3:	Deformación plástica debido a la carga uniaxial de un metal.....	16
Figura 1.2.4:	Deformación plástica del metal en corte	17
Figura 1.2.5:	Condición de fluencia von Mises.	20
Figura 1.2.6	Estado de esfuerzos en la curva de fluencia para materiales con endurecimiento.....	23
Figura 1.2.7	Modelo von Mises de endurecimiento mixto	24
Figura 1.3. 1	Estado de esfuerzo en el tiempo t tiempo $t + \Delta t$ (endurecimiento mixto) Kojic y Bathe (2005).	28

Figura 1.3. 2 Carácter monótonico de la función que gobierna la plasticidad del endurecimiento mixto de un metal isotrópico	34
Figura 1.4. 1 Movimiento de un cuerpo en el marco de coordenadas cartesianas. K.-Jurgen Bathe (1996).....	37
Figura 1.4. 2 Desplazamiento, elongación y rotación de un diferencial del material	40
Figura 1.5. 1 Elemento bidimensional mostrado en el plano global ${}^t x_1, {}^t x_2$	51
Figura 1.5. 2 Funciones de interpolación de cuatro a nueve números de nodos de un elemento bidimensional K.-Jurgen Bathe (1996).....	52
Figura 1.5. 3 Elemento cáscara de nueve nodos, definición de ejes ortogonales \bar{r}, \bar{s}, t para las relaciones constitutivas. K.-Jurgen Bathe (1996).....	55
Figura 2. 1 Diagramas de esfuerzo-deformación tomadas de alma de las columnas de los especímenes (EERC-71-07)	63
Figura 2. 2: Curva esfuerzo-deformación del material ASTM A36 (SESM 67)	63
Figura 2. 3: Curva esfuerzo-deformación del material ASTM A441 (SESM 67).....	64
Figura 2. 4: Modelo von Mises (ADINA 5.1)	64
Figura 2. 5: Endurecimiento isotrópico y cinemático (ADINA 5.1)	65
Figura 2. 6: Espécimen tipo F1 (SESM 67-30).....	75
Figura 2. 7: Conexión Tipo F2 (SESM 67-30)	75
Figura 2. 8: Conexión Tipo F3 (SESM 67-30)	76
Figura 2. 9: Conexión Tipo W1	76
Figura 2. 10: Conexión Tipo W2A (SESM 67-30).....	77
Figura 2. 11: Gráfica Carga-Deflexión Espécimen F1-S (SESM 67-30)	77
Figura 2. 12: Gráfica Carga-Deflexión Espécimen F1-C2 (SESM 67-30)	78
Figura 2. 13: Gráfica Carga-Deflexión Espécimen W1-C1 (SESM 67-30).....	78
Figura 2. 14: Gráfica Carga-Deflexión Espécimen W1-C7 (SESM 67-30).....	79
Figura 2. 15: Prototipo (EERC-71-07).....	91
Figura 2. 16: Secciones de vigas y columnas de los prototipos (EERC-71-07)	91
Figura 2. 17: Especímenes A1, A2, B1 y B2 (EERC-71-07).....	92
Figura 2. 18: Especímen A3 (EERC-73-27)	93
Figura 2. 19: Especímen A4 (EERC-73-27)	93
Figura 2. 20: Especímenes B3 y B4 (EERC-73-27)	94
Figura 2. 21: Configuración del ensayo (EERC-73-27)	94
Figura 2. 22: Modelo idealizado (EERC-71-07).....	95
Figura 2. 23: Programas de carga para los especímenes A1 y A2 (EERC-71-07)	96
Figura 2. 24: Programas de carga para los especímenes A3 y A4 (EERC-73-27)	97

Figura 2. 25: Programas de carga para los especímenes B1 y B2 (EERC-71-07).....	98
Figura 2. 26: Programas de carga para los especímenes B3 y B4 (EERC-73-27).....	99
Figura 2. 27: Espécimen A1- Diagrama H vs. δ (EERC-71-07).....	100
Figura 2. 28: Espécimen A2- Diagrama H vs. δ (EERC-71-07).....	101
Figura 2. 29: Espécimen A3- Diagrama H vs. δ (EERC-73-27).....	102
Figura 2. 30: Espécimen A4- Diagrama H vs. δ (EERC-73-27).....	103
Figura 2. 31: Espécimen B1- Diagrama H vs. δ (EERC-71-07).....	104
Figura 2. 32: Espécimen B2- Diagrama H vs. δ (EERC-71-07).....	105
Figura 2. 33: Espécimen B3- Diagrama H vs. δ (EERC-73-27).....	106
Figura 2. 34: Espécimen B4- Diagrama H vs. δ (EERC-73-27).....	107
Figura 3. 1: Viga en voladizo para análisis de discretización	109
Figura 3. 2: Mallas de elementos finitos comparadas	109
Figura 3. 3: Reacciones en el apoyo de viga en voladizo (kg)	110
Figura 3. 4: Esfuerzos normales en la dirección X (kg/cm ²)	110
Figura 3. 5: Esfuerzos de von Mises (kg/cm ²)	111
Figura 3. 6: Esfuerzos de Corte (kg/cm ²)	111
Figura 3. 7: Diagrama de Esfuerzos de Corte en la sección contigua al apoyo (kg/cm ²).....	112
Figura 3. 8: Espécimen F1-S-Modelo 1	114
Figura 3. 9: Espécimen F1-S-Modelo 2	114
Figura 3. 10: Carga vs. Deflexión-Espécimen F1-S	114
Figura 3. 11: Carga vs. Deflexión-Espécimen F1-S	115
Figura 3. 12: Espécimen F1-S al final del ensayo.....	115
Figura 3. 13: Carga vs. Deflexión-modelos de Espécimen F1-C2.....	117
Figura 3. 14: Carga vs. Deflexión- Espécimen F1-C2.....	117
Figura 3. 15: Espécimen F1-C2 al final del ensayo (SEMM-67-31)	118
Figura 3. 16: Carga vs. Deflexión-modelos Espécimen W1-C1	119
Figura 3. 17: Carga vs. Deflexión- Espécimen W1-C1.....	119
Figura 3. 18: Espécimen F1-C2 al final del ensayo.....	120
Figura 3. 19: Carga vs. Deflexión- Espécimen W1-C7.....	121
Figura 3. 20: Espécimen F1-C2 al final del ensayo.....	121
Figura 3. 21: Modelo Espécimen A1.....	122
Figura 3. 22: Diagramas de esfuerzo-deformación del material.....	123
Figura 3. 23: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen A1	123
Figura 3. 24: Modelo Espécimen A2.....	124
Figura 3. 25: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen A2	125
Figura 3. 26: Modelo Espécimen A2 en los últimos ciclos de carga.....	125

Figura 3. 27: Modelo Espécimen B1	127
Figura 3. 28: Diagramas de esfuerzo-deformación del material	127
Figura 3. 29: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen B1	128
Figura 3. 30: Comparación de lazos de histéresis -Espécimen B1	129
Figura 3. 31: Modelo Espécimen B1 al final de los ciclos de cara	129
Figura 3. 32: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen B2	131
Figura 3. 33: Modelo Espécimen B2 al final de los ciclos de carga	131
Figura 3. 34: Ensayo de Espécimen B2 durante los ciclos de carga	132
Figura 3. 35: Modelo B2. Deformación ϵ_{xx} para un desplazamiento de 4.5"	133
Figura 3. 36: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen B3	135
Figura 3. 37: Espécimen B3 después del ensayo	135
Figura 3. 38: Modelo B3, Esfuerzos Y-Y para un desplazamiento de 5"	136
Figura 3. 39: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen B4	138
Figura 3. 40: Espécimen B4 al final del ensayo	138
Figura 3. 41: Modelo Espécimen B4, último ciclo de carga	139
Figura 3. 42: Modelo idealizado a escala real	140
Figura 3. 43: Gráfica Carga-Desplazamiento, Prototipo y Espécimen A1	141
Figura 3. 44: Modelo Prototipo A1, último ciclo de carga	142
Figura 3. 45: Gráfica Carga-Desplazamiento, Prototipo y Espécimen A2	143
Figura 3. 46: Modelo Prototipo A2, último ciclo de carga, desplazamiento 9"	143
Figura 3. 47: Gráfica Carga-Desplazamiento, Prototipo y Espécimen B1	145
Figura 3. 48: Modelo Prototipo B1, último ciclo de carga	145
Figura 3. 49: Gráfica Carga-Desplazamiento, Prototipo y Espécimen B2	146
Figura 3. 50: Modelo Espécimen A3	148
Figura 3. 51: Gráfica Carga-Desplazamiento, Espécimen A3	148
Figura 3. 52: Gráfica Carga-Desplazamiento, Especímenes A3 y A2	149
Figura 3. 53: Diagrama Carga-Desplazamiento, Espécimen A4	150
Figura 3. 54: Modelo Espécimen A4 al final de los ciclos de carga	150
Figura 3. 55: Espécimen A4 (Reporte EERC 73-27)	151
Figura 3. 56: Gráfica Esfuerzo-Deformación ASTM A-36 Manual	153
Figura 3. 57: Gráfica Carga-Deflexión, Espécimen F1S Vs. Modelo F1-M	154
Figura 3. 58: Carga-Deflexión, Espécimen y Modelo F1-C2 Vs. F1-M	154
Figura 3. 59: Gráfica Carga-Deflexión-Espécimen F1-C2 Vs. Modelo F1-M	155
Figura 3. 60: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Modelo AM	156
Figura 3. 61: Diagrama de deformación plástica acumulada (in/in)- Modelo AM	156
Figura 3. 62: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Modelo BM	157

Lista de Tablas

Tabla 1.3. 1: Pasos Computacionales para la integración de esfuerzos, endurecimiento plástico mixto de un metal isotrópico	36
Tabla 1.4. 1: Formulación de total Lagrange	44
Tabla 1.4. 2: Formulación de Lagrange Actualizado	46
Tabla 1.5. 1: Matrices de elementos finitos.....	50
Tabla 1.5. 2: Matrices usadas en la formulación de elementos bi dimensionales	54
Tabla 2. 1: Grupos de Especímenes	70
Tabla 2. 2: Modificación de las conexiones F2 y F3	71
Tabla 2. 3: Dimensiones y Propiedades del espécimen F1-S	71
Tabla 2. 4: Dimensiones y Propiedades del espécimen F1-C2.....	72
Tabla 2. 5: Dimensiones y Propiedades del espécimen W1-C1.....	73
Tabla 2. 6: Dimensiones y Propiedades del espécimen W1-C7.....	74
Tabla 2. 7: Propiedades de las secciones de Prototipos y Especímenes A1 y A2 (EERC-71-07)	83
Tabla 2. 8: Propiedades de las secciones de Prototipos y Especímenes B1 y B2 (EERC-71-07)	84
Tabla 2. 9: Propiedades de las secciones de Prototipos y Especímenes A3 y A4 (EERC-73-27)	85
Tabla 2. 10: Propiedades de las secciones de Prototipos y Especímenes B3 y B4 (EERC-73-27)	86
Tabla 2. 11: Resultados de prueba para espécimen A1	87
Tabla 2. 12: Resultados de prueba para espécimen A2	87
Tabla 2. 13: Resultados de prueba para espécimen A3	88
Tabla 2. 14: Resultados de prueba para espécimen A4	88
Tabla 2. 15: Resultados de prueba para espécimen B1	89
Tabla 2. 16: Resultados de prueba para espécimen B2	89
Tabla 2. 17: Resultados de prueba para espécimen B3	90
Tabla 2. 18: Resultados de prueba para espécimen B4	90

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es evaluar la posibilidad de, mediante modelos de elementos finitos y con el uso de programas de cómputo disponibles, predecir correctamente los aspectos básicos del comportamiento no lineal de uniones soldadas viga columna resistentes a momento. Con tal fin se comparan los resultados obtenidos empleando un programa de análisis no lineal con elementos finitos (ADINA, 2003) con los de ensayos experimentales realizados en la década del 60 y 70, que sirvieron para estudiar el comportamiento de los especímenes a escala natural y a escala reducida de uniones viga columna de acero sometidas a cargas monotónicas o a acciones cíclicas.

En la parte inicial de la tesis se hace una revisión de las hipótesis fundamentales en la teoría de plasticidad, con particular referencia al criterio de fluencia de von Mises, con endurecimiento isotrópico, cinemático o mixto. Véase Malvern [1969]. Se presentan también detalles del procedimiento numérico para determinar, a partir de los incrementos de deformaciones en un punto, las correspondientes componentes elásticas y plásticas, los esfuerzos, y las modificaciones en la deformación plástica efectiva y los otros parámetros que definen la condición de fluencia. El procedimiento empleado es el de “parámetro de control”, descrito en Kojic et al. [2005]. Además de considerar las relaciones esfuerzo – deformación en un punto, se resumen en el mismo capítulo los procedimientos para el análisis no lineal, incremental e iterativo, con elementos finitos. Se tratan no solamente las no linealidades en las relaciones constitutivas, sino también las no linealidades geométricas, que fueron evidentes en la mayoría de los ensayos estudiados. Véase Bathe [1996].

Los resultados experimentales considerados corresponden a tres estudios realizados en la Universidad de California, Berkeley. El primero patrocinado por American Iron and Steel Institute (AISI), se refirió a vigas en voladizo con diferentes conexiones. En los otros programas, patrocinados por el Centro de Investigaciones de Ingeniería Sísmica de la

misma Universidad de California en Berkeley (reportes EERC-71-07 y EERC-73-27), se ensayaron componentes de pórticos planos con uniones viga columna.

En el capítulo III de la tesis se comparan los resultados de los modelos numéricos y de los ensayos. En general se observa que los modelos predicen siempre correctamente la rigidez inicial y la que se tiene en la descarga, lo que era de esperarse, puesto que ésta depende sobre todo del módulo de elasticidad, que tiene poca variabilidad, y de las características geométricas de los elementos. También se observa que se predicen correctamente la resistencia máxima y su eventual degradación, aunque se subestima ligeramente la energía disipada en cada ciclo. Es posible que la fluencia prematura observada en los ensayos se deba a la presencia de esfuerzos residuales significativos, difíciles de reproducir con los programas de cómputo disponibles. Por otro lado, la predicción de la resistencia requiere información correcta del esfuerzo de fluencia, que no necesariamente coincide con su valor nominal. En los ensayos realizados se observó que el material no es homogéneo como usualmente se supone en el análisis.

En la mayoría de los casos los modelos matemáticos reprodujeron el tipo de falla que se presentó al final del ensayo. Se concluye que el análisis no lineal puede ser una herramienta útil para el investigador, permitiendo identificar los aspectos más importantes en el comportamiento y establecer los rangos para cada una de las cantidades a ser medidas. Sin embargo, dado que requiere mucho esfuerzo de cómputo, aún no puede ser una herramienta apropiada para el trabajo de diseño en oficina.

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1.1 GENERALIDADES

Este capítulo presenta fundamentos de la teoría de plasticidad, orientada hacia el desarrollo de un procedimiento numérico general para el cálculo de los esfuerzos. En lo que sigue se hace particular referencia al modelo Von Mises, que es apropiado para describir el comportamiento de metales.

1.2 NO LINEALIDAD DE LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS

1.2.1 Plasticidad Isotrópica

La teoría macro - mecánica clásica de plasticidad está basada en las nociones de una superficie de fluencia (definida por una condición de fluencia), una regla de endurecimiento (gobernando el cambio de la superficie de fluencia durante la deformación) y en la relación esfuerzo – deformación del material.

1.2.2 Deformación Elasto-Plástica Uniaxial

La figura 1.2.1a muestra un diagrama esfuerzo deformación típico para una barra de acero sometida a carga monotónica uniaxial, en tensión o compresión. El esfuerzo es la razón entre la fuerza aplicada y el área de la sección transversal en la condición final deformada (esfuerzo de Cauchy). Sin embargo, si las deformaciones son pequeñas (4% o menos), el esfuerzo puede referirse a la geometría inicial (esfuerzo de Piola-Kirchhoff). Igualmente, pueden considerarse las deformaciones infinitesimales, en lugar de las deformaciones reales (las deformaciones logarítmicas). Algunas consideraciones adicionales para el caso de grandes deformaciones se tratan en la sección 1.3.

Un punto importante, indicado como A en el diagrama, es el límite elástico o punto de fluencia. La parte OA del diagrama representa el dominio elástico del material. Si el esfuerzo es menor que el esfuerzo de fluencia, el material retoma su configuración inicial, no deformada, después de la descarga. En el caso de carga por encima del esfuerzo de

fluencia, como en el punto B del diagrama, pero sin alcanzar el punto de fractura F, queda una deformación permanente e^p después de la descarga. La deformación total e correspondiente a un esfuerzo σ es:

$$e = e^E + e^p \quad (1.2.1)$$

donde

$$e^E = \frac{\sigma}{E} \quad (1.2.2)$$

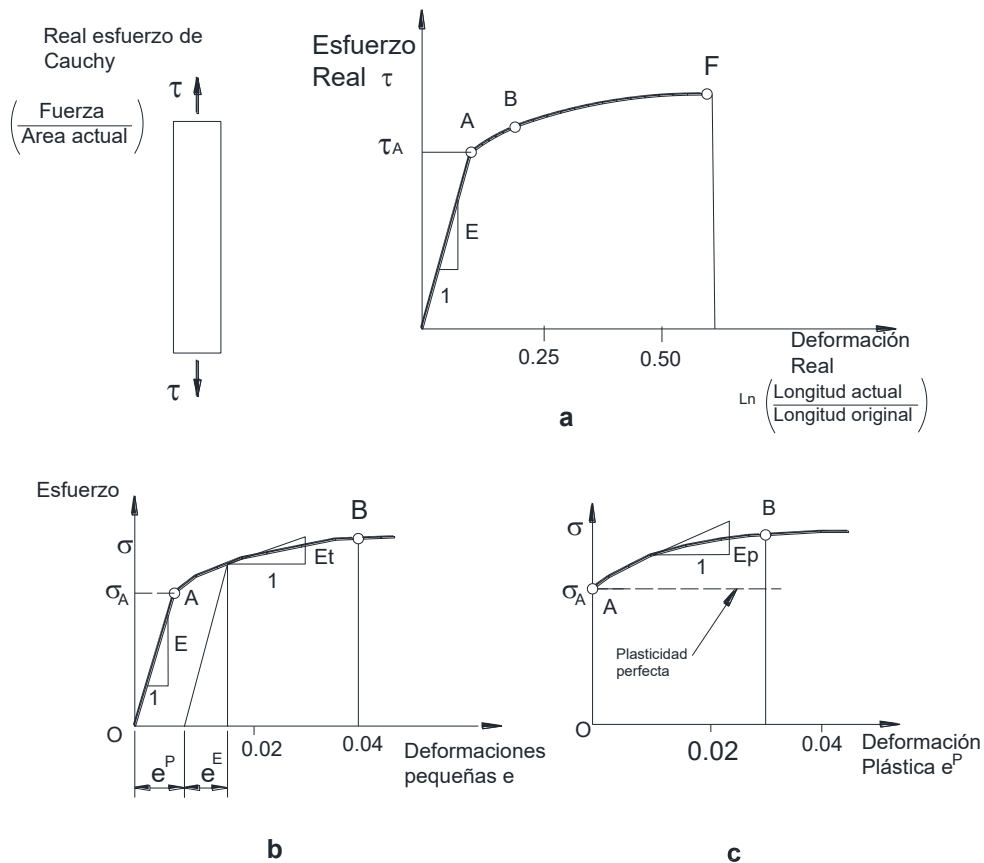


Figura 1.2.1: Resultados de ensayos para un metal sometido a carga uniaxial. a) Diagrama esfuerzo de Cauchy - deformación logarítmica; b) Simplificación para deformaciones pequeñas; c) Curva de fluencia. Kojic y Bathe (2005)

La deformación plástica comienza en el esfuerzo de fluencia, σ_A . La parte de la curva entre los puntos A y B caracteriza el comportamiento del material en el dominio plástico. La figura 1.2.1b también muestra la tangente de la curva entre los puntos A y B, denominada módulo tangente, E_T , que se supone positiva.

Del modelo uniaxial de esfuerzo – deformación se puede determinar la dependencia fundamental, que se muestra en la Fig. 2.1.1c:

$$\sigma = \sigma(e^p) \quad (1.2.3a)$$

Esta dependencia también puede ser escrita en la forma

$$f_y(\sigma, e^p) = 0 \quad (1.2.3b)$$

Lo que representa la condición de fluencia en una carga uniaxial. La relación (1.2.3a) es llamada la curva de fluencia del material.

La figura 1.2.1c muestra como el esfuerzo σ se incrementa con la deformación plástica e^p . Esta característica del material es conocida como endurecimiento por deformación y es un aspecto importante en la descripción del comportamiento del material en el rango plástico. El endurecimiento instantáneo en un punto dado en la curva de fluencia se define por el módulo plástico E_p :

$$E_p = \frac{d\sigma}{de^p} \quad (1.2.4)$$

Que puede ser expresado en términos del módulo tangente E_T y del módulo de Young E como:

$$E_p = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (1.2.5)$$

Las siguientes relaciones se obtienen de la definición del módulo tangente y de las expresiones precedentes:

$$d\sigma = E_T de = E_T (de^E + de^p)$$

$$d\sigma = E_T \left(\frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{E_p} \right)$$

Resolviendo para E_p se obtiene (1.2.5).

Para algunos materiales dúctiles, el endurecimiento puede ser despreciable (esto es, $\sigma = \sigma_A$, $E_p = 0$ para cualquier e^p) como se indica en líneas segmentadas en la figura 1.2.1c.

La curva de fluencia mostrada en la Fig. 1.2.1c representa el comportamiento básico del material. Esta curva, obtenida en un experimento unidimensional, es utilizada como relación fundamental del material para describir las deformaciones elasto-plásticas en dos y tres dimensiones.

Para la curva de fluencia pueden emplearse expresiones analíticas, como la fórmula de Ramberg – Osgood:

$$e = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma_R}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_R} \right)^{m_R} \quad (1.2.6)$$

Donde σ_R es un esfuerzo referencial (usualmente el esfuerzo de fluencia $\sigma_{yv} = \sigma_A$), y α y m_R son constantes del material obtenidas experimentalmente.

Alternativamente la fórmula de Ramberg Osgood puede describirse en las formas:

$$\sigma = \sigma_{yv} + C_y (e^p)^n \quad (1.2.7)$$

$$e^p = A_y (\sigma - \sigma_{yv})^{1/n} \quad (1.2.8)$$

Donde $A_y = C_y^{-1/n}$ los valores de C_y y n son constantes del material.

Supóngase que un espécimen se ha cargado monotónicamente y deformado plásticamente en tensión. Luego se invierte el sentido de la carga y se deforma plásticamente en compresión. Para algunos materiales el nuevo punto de fluencia en compresión después de la descarga es (en magnitud) el esfuerzo en que ocurrió la descarga, sin embargo en general, el nuevo punto de fluencia es menor que el punto de fluencia alcanzado en tensión. Similar comportamiento se observa cuando el material es primero comprimido y después sujeto a tensión. Este fenómeno es conocido como el efecto de Bauschinger y puede ser explicado por cambios en la microestructura del metal causados por la deformación plástica. Este efecto es importante en la solución de problemas con carga cíclica.

Para aplicaciones prácticas se han desarrollado algunos modelos simplificados para el comportamiento del material. Los dos modelos comúnmente usados son los modelos de endurecimiento Isotrópico y de endurecimiento Cinemático, ver Figura 1.2.2.

En la hipótesis de endurecimiento Isotrópico, se ignora el efecto Bauschinger y se usa la misma curva de fluencia en tensión y en compresión durante la carga cíclica (curva O A B F F₁. F₂ en la figura 1.2.2). En la hipótesis de endurecimiento cinemático el esfuerzo de fluencia en la carga de reversa es igual a dos veces el esfuerzo inicial de fluencia. Por ejemplo, el esfuerzo de fluencia en el punto C es $\sigma_c = \sigma_B - 2\sigma_A$ y la trayectoria de la curva esfuerzo-deformación es OABCC₁C₂. También pueden postularse modelos que representan un comportamiento intermedio entre los dos antes mencionados; estos son llamados modelos de endurecimiento mixto (trayectoria OABDD₁D₂). Puede notarse que todos estos modelos simplificados tienen la misma forma de las curvas de endurecimiento, pero éstas empiezan desde diferentes puntos de fluencia.

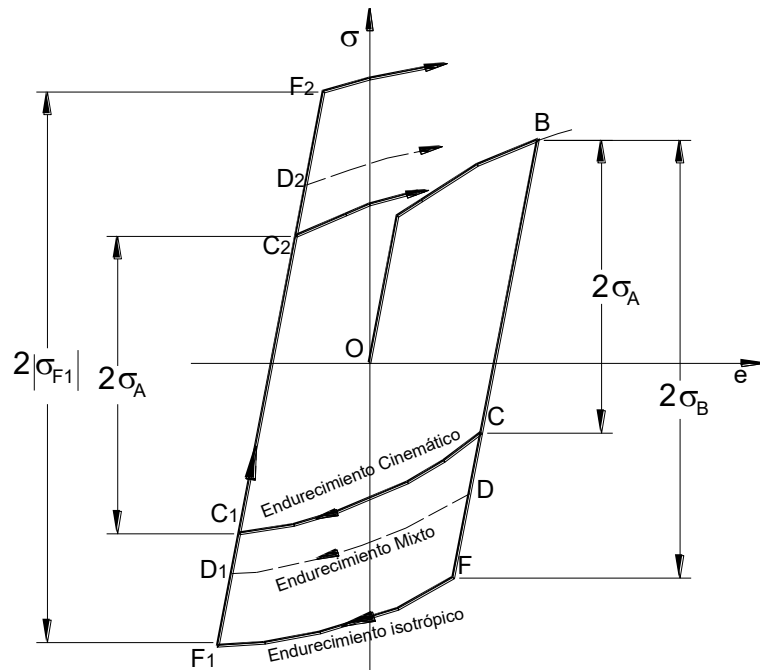


Figura 1.2.2: Idealización de la curva esfuerzo – deformación uniaxial para una carga cíclica. Kojic y Bathe (2005).

1.2.3 Condiciones de Fluencias para Deformaciones Tridimensionales Generales

En un estado de esfuerzo multiaxial, puede establecerse una condición para la fluencia inicial en la forma:

$$f_y(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.2.9)$$

Donde f_y es llamada la función de fluencia.

Consideraciones Generales. Para determinar una forma apropiada de la función de fluencia se supone que el material alcanza la fluencia inicial en una manera isotrópica. La expresión numérica de las componentes de esfuerzo cambia con el sistema de coordenadas usado. Por lo tanto, si el comportamiento del material es igual en cualquier dirección, para satisfacer esta condición de isotropía la función de fluencia puede solo ser una función de las invariantes de esfuerzo, I_1, I_2, I_3 (que son independientes del sistema de coordenadas usado), es decir:

$$f_y(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (1.2.10)$$

Donde:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - (\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{23}\sigma_{32} + \sigma_{13}\sigma_{31}) \\ I_3 &= \det \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Esta función de fluencia es aplicable para cualquier material inicialmente isotrópico. Sin embargo, se requiere especificar los detalles de la función que reflejen lo que se observa experimentalmente.

Para los metales, se observa experimentalmente que la fluencia no depende de la primera invariante, I_1 , o el esfuerzo normal promedio

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_1 \quad (1.2.12)$$

E igualmente puede desprejarse la influencia de la tercera invariante I_3 . Por lo tanto, se puede suponer que la función de fluencia es solo función de I_2 o alternativamente de la segunda variante del esfuerzo deviatorio J_{2D} , definida como:

$$J_{2D} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (1.2.13)$$

Donde los esfuerzos deviatorios son:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (1.2.14)$$

En este caso δ_{ij} denota el delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ para $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$). En consecuencia, en lugar de (1.2.10) puede plantearse:

$$f_y(J_{2D}) = 0 \quad (1.2.15)$$

Esta forma de la condición de fluencia se basa en la contribución de von Mises (1913).

Hipótesis de Energía de Distorsión Elástica. Una aproximación fundamental para determinar la función de fluencia (1.2.15) se basa en la hipótesis que el metal alcanza el límite elástico y empieza la deformación plástica cuando para cualquier estado de esfuerzo la energía de distorsión elástica alcanza un cierto valor crítico, W'_E , Mendelson (1968). La energía de distorsión elástica en el caso de un estado general de esfuerzo-deformación puede ser expresada en términos de los esfuerzos deviatorios:

$$W'_E = \frac{1}{2} S_{ij} e'_{ij} = \frac{1}{4G} S_{ij} S_{ij} \quad (1.2.16)$$

Como caso particular, en la condición de carga uniaxial inicial (tensión o compresión) los esfuerzos deviatorios en el inicio de la fluencia son:

$$S_{11} = \frac{2}{3} \sigma_{yv} \quad S_{22} = S_{33} = -\frac{1}{3} \sigma_{yv} \quad (1.2.17)$$

Y por lo tanto en el caso uniaxial, el inicio de la fluencia corresponde a

$$W'_E = \frac{1}{6G} \sigma_{yv}^2 \quad (1.2.18)$$

Según la hipótesis de máxima energía de distorsión elástica, al inicio de la fluencia este valor debe ser el mismo para cualquier condición de carga. Por lo tanto, de las ecuaciones (1.2.16) y (1.2.18) se tiene:

$$f_y(S_{ij}) = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{yv}^2 = 0 \quad (1.2.19)$$

o, en términos de la segunda invariante J_{2D} ,

$$f_y(J_{2D}) = J_{2D} - \frac{1}{3}\sigma_{yv}^2 = 0 \quad (1.2.20)$$

Esta condición de fluencia satisface la condición Isotrópica y se basa en el principio de equivalencia de energía de distorsión elástica. La forma (1.2.19) de f_y es conocida como la función de fluencia de Von Mises; es la condición de fluencia más comúnmente usada para metales.

1.2.4 Relación de Esfuerzo – Deformación Plástica Tridimensional

Considérese nuevamente un espécimen de metal sometido a una condición de tensión uniaxial, con pequeñas deformaciones, como se muestra esquemáticamente en la figura 1.2.3. Si el esfuerzo σ excede el esfuerzo de fluencia σ_{yv} , el material se deforma plásticamente.

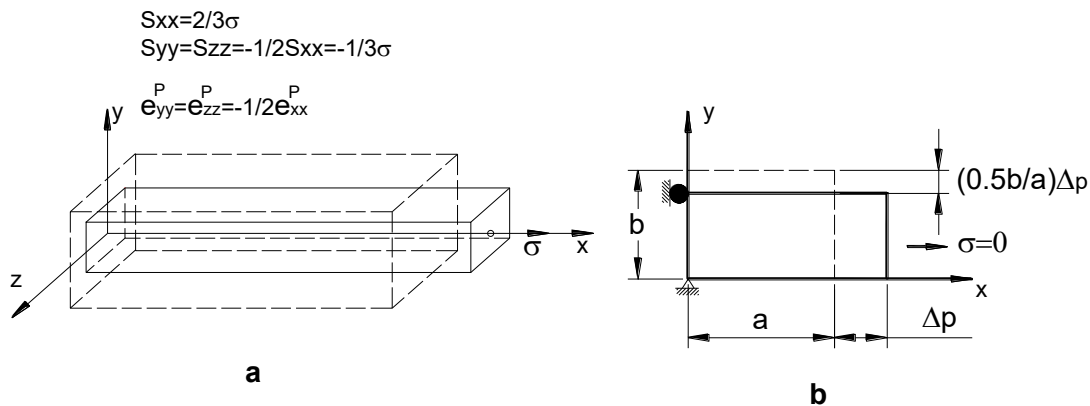


Figura 1.2.3: Deformación plástica debido a la carga uniaxial de un metal a. carga uniaxial, b. deformación después de liberado el esfuerzo. Kojic y Bathe (2005)

Al retirar el esfuerzo y medir los desplazamientos, se observa que también hay deformaciones laterales de contracción permanentes, prácticamente iguales a la mitad de la deformación plástica e_{xx}^p medida en la dirección longitudinal. Por tanto puede plantearse que:

$$e_{yy}^p = e_{zz}^p = -\frac{1}{2}e_{xx}^p \quad (1.2.21)$$

Y en consecuencia la deformación plástica volumétrica e_v^p es cero:

$$e_v^p = e_{xx}^p + e_{yy}^p + e_{zz}^p = 0 \quad (1.2.22)$$

Es decir, la deformación plástica en metales es “isocórica”, conserva el volumen.

Por otro lado, de (1.2.17) y (1.2.21) se encuentra que:

$$\frac{e_{xx}^p}{S_{xx}} = \frac{e_{yy}^p}{S_{yy}} = \frac{e_{zz}^p}{S_{zz}} = \lambda \quad (1.2.23)$$

Donde λ es un escalar positivo. Es decir, existe una proporcionalidad entre los componentes de deformación plástica y los correspondientes componentes de esfuerzo deviatorio causantes de estas deformaciones. Esta proporcionalidad entre la deformación plástica y los correspondientes esfuerzos es también observada en un experimento de corte puro, esquemáticamente mostrado en la figura 1.2.4.

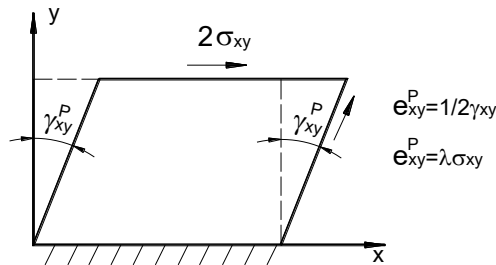


Figura 1.2 4: Deformación plástica del metal en corte

En resumen, basándose en mediciones de pruebas simples con metales, podría postularse la relación esfuerzo – deformación plástica como:

$$e_{ij}^p = \lambda S_{ij} \quad (1.2.24)$$

Sin embargo, las deformaciones plásticas e_{ij}^p acumuladas, dependen de como los esfuerzos cambiaron anteriormente hasta alcanzar los valores S_{ij} actuales. Nótese que se puede alcanzar un mismo estado de esfuerzo con historias de carga y descarga muy distintas. Por lo tanto, resulta más apropiado escribir:

$$de_{ij}^p = d\lambda S_{ij} \quad (1.2.25)$$

Es decir, los incrementos en las deformaciones plásticas de_{ij}^p son proporcionales al actual esfuerzo deviatorio total S_{ij} . Experimentalmente se encuentra que las relaciones (1.2.25) son válidas en general, mientras que las (1.2.24) solo serían aplicables si todos los

esfuerzos aumentan proporcionalmente $\sigma_{ij} = \kappa \sigma_{ij}^R$, donde κ es una variable que se incrementa en el tiempo y σ_{ij}^R son esfuerzos referenciales para un estado elástico inicial.

La relación 1.2.25 es conocida como la ecuación de Prandtl-Reuss. La forma original de esta ecuación esta dada por:

$$\frac{de_{11}^P}{S_{11}} = \frac{de_{22}^P}{S_{22}} = \frac{de_{33}^P}{S_{33}} = d\lambda \quad (1.2.26)$$

1.2.5 Endurecimiento en 3 – D

Para definir el endurecimiento de un metal en el proceso de flujo plástico, después de alcanzar la condición inicial de fluencia, se usa la hipótesis de equivalencia de trabajo plástico. Esta hipótesis establece que el incremento del trabajo plástico dW_{gen}^P realizado durante la deformación plástica en condiciones generales de carga es igual al trabajo plástico dW_{uniax}^P realizado en condiciones de carga uniaxial:

$$dW_{gen}^P = dW_{uniax}^P = dW^P \quad (1.2.27)$$

Usando la ecuación (1.2.25) tenemos para la condición general de carga.

$$dW_{gen}^P = S_{ij} de_{ij}^P = d\lambda S_{ij} S_{ij} \quad (1.2.28)$$

Nótese que este trabajo dW^P corresponde a las distorsiones permanentes del material y es irreversible. Por otra parte, para el caso uniaxial se tiene

$$dW^P = \frac{2}{3} d\lambda \sigma_y^2 \quad (1.2.29)$$

Donde se ha usado (1.2.23) y la condición que el material está continuamente fluyendo. Sin embargo, en condiciones de carga uniaxial se tiene continuamente durante el proceso de carga que $\sigma = \sigma_y$. Por tanto de las ecuaciones (1.2.28) y (1.2.29) se tiene que

$$S_{ij} S_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_y^2 \quad (1.2.30)$$

La cual puede ser escrita en la forma (1.2.19).

$$f_y = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 = 0 \quad (1.2.31)$$

En esencia, durante la deformación plástica el criterio de la fluencia de Von Mises (1.2.31) es continuamente satisfecho, y σ_y cambia de acuerdo con la curva de fluencia uniaxial.

La hipótesis de equivalencia del trabajo plástico está de acuerdo con la hipótesis en la distorsión de energía tratada en la sección 1.2.2. Es decir, considerando la distorsión de energía W' como una medida de la resistencia del material para cambiar de forma, y suponiendo que la hipótesis es también válida durante el flujo plástico, se puede escribir la siguiente ecuación:

$$S_{ij} de_{ij}^E + S_{ij} de_{ij}^P = \frac{1}{6G} d(\sigma_y^2) + \frac{2}{3} d\lambda \sigma_y^2 \quad (1.2.32)$$

Donde el lado izquierdo representa dW' en condiciones de carga general, y el lado derecho corresponde al caso de carga uniaxial. El primer término en ambos miembros corresponde a la deformación elástica, por tanto se obtiene (1.2.30). En la ecuación (1.2.32) se ha usado la condición que la deformación total de_{ij} es la suma de las deformaciones elásticas de_{ij}^E y de las deformaciones plásticas de_{ij}^P , en concordancia con (1.2.1) para las condiciones de carga uniaxial.

$$de_{ij} = de_{ij}^E + de_{ij}^P \quad (1.2.33)$$

En la Figura 1.2.5 se presenta una interpretación geométrica de la condición de fluencia de von Mises. La curva de fluencia $\sigma_y(e^P)$ se muestra en la figura 1.2.6a, con dos puntos M_1 y M_2 en la curva y esfuerzos de fluencia $^1\sigma_y$ y $^2\sigma_y$. La superficie de fluencia $f_y = 0$, definida por (1.2.31), es representada en el espacio de esfuerzos principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ por el cilindro de eje $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ y de radio $R = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y$, como se muestra en la Figura 1.2.5b. En el plano deviatorio, normal al eje del cilindro, la superficie

de fluencia es representada por un círculo radio R . En la Figura 1.2.5.c se muestran dos superficies de fluencia $^1f_y = 0$ y $^2f_y = 0$. Nótese que todos los puntos que en el plano deviatorio están sobre la superficie de fluencia con radio R corresponden a un único punto con $\sigma_y = \sqrt{\frac{2}{3}} R$ en la curva de fluencia. Por ejemplo, todos los esfuerzos en el plano deviatorio sobre en el círculo $^1f_y = 0$ corresponden al punto M_1 en la curva de fluencia.

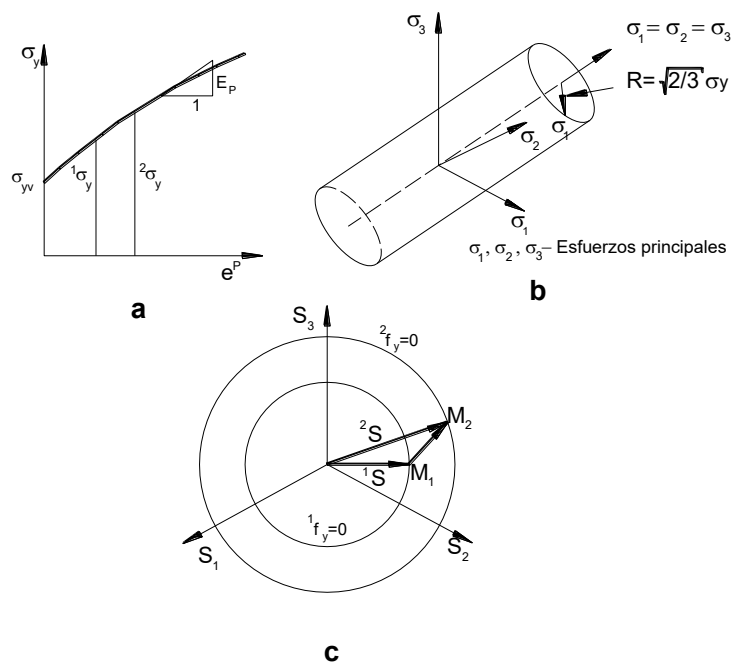


Figura 1.2.5: Condición de fluencia von Mises.

a) Curva de fluencia uniaxial; **b)** superficie de fluencia en el espacio de esfuerzos; **c)** Superficie de fluencia en el plano deviatorico con S_1, S_2 y S_3 siendo los valores principales. Kojic y Bathe (2005).

En la literatura la condición de fluencia del Von Mises se presenta a veces en términos de

un *esfuerzo efectivo* o esfuerzo von Mises, $\bar{\sigma}$, definido por:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|S\| \quad (1.2.34)$$

Y la condición de fluencia se reduce a

$$\bar{\sigma} - \sigma_y = 0 \quad (1.2.35)$$

En (1.2.34) $\|S\|$ representa la intensidad o norma Euclidiana de S , definida como

$$\|S\| = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (1.2.36)$$

Para obtener la ley o regla de modificación de la superficie de fluencia, primero se impondrá la condición que para los materiales aquí considerados el trabajo plástico debe ser positivo

$$dW^P > 0 \quad (1.2.37)$$

El siguiente paso en el desarrollo de una regla de endurecimiento, está en introducir el incremento de la deformación plástica efectiva $d\bar{e}^{-P}$ que corresponde al esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$, tal que el incremento del trabajo dW^P esta dado por

$$dW^P = \bar{\sigma} d\bar{e}^{-P} \quad (1.2.38)$$

Es decir el trabajo plástico dW^P , expresado por (1.2.38) para las condiciones de carga generales, es igual a dW^P para el caso de carga uniaxial dado por (1.2.29) y por tanto, considerando $\sigma_y = \bar{\sigma}$:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{e}^{-P}}{\sigma_y} \quad (1.2.39)$$

y finalmente:

$$\frac{1}{d\lambda} de_{ij}^P de_{ij}^P = \bar{\sigma} d\bar{e}^{-P} \quad (1.2.40)$$

Es decir, con (1.2.39) se obtiene la expresión:

$$d\bar{e}^{-P} = \sqrt{\frac{2}{3}} de_{ij}^P de_{ij}^P \quad (1.2.41)$$

para el incremento de la deformación plástica efectiva en términos de las componentes de deformación plástica. Nótese que en el caso de la carga uniaxial se tiene:

$$d\bar{e}^{-P} = |de^P| \quad (1.2.42)$$

Mientras en el corte puro en dos dimensiones

$$d\bar{e}^{-P} = |d\gamma^P| / \sqrt{3} \quad (1.2.43)$$

donde $d\gamma^P$ es el incremento en la deformación de corte plástico.

La condición de fluencia (1.2.35) y (1.2.3) muestra que la curva de fluencia en tensión simple representa en el mismo instante la curva general de fluencia

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{e}^P) \quad (1.2.44)$$

donde:

$$\bar{e}^P = \int d\bar{e}^P \quad (1.2.45)$$

es la deformación plástica efectiva acumulada.

De lo presentado anteriormente se puede concluir lo siguiente:

1) La condición de fluencia (1.1.31) puede ser escrita en la forma :

$$f_y = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_y^2(\bar{e}^P) = 0 \quad (1.2.46)$$

Y entonces (1.1.35) será

$$\bar{\sigma} - \sigma_y(\bar{e}^P) = 0 \quad (1.2.47)$$

2) El factor de proporcionalidad $d\lambda$ en la ecuación de Prandtl-Reuss (1.2.28) se define por (1.2.39) y puede ser calculado de la curva de fluencia.

El endurecimiento se ilustra en la Figura 1.2.6, la cual muestra que en caso de carga uniaxial tensión-compresión (Figura 1.2.6a) la deformación plástica e^P primero aumenta y luego disminuye, mientras que la deformación plástica efectiva \bar{e}^P y el esfuerzo de fluencia σ_y continuamente se incrementan durante el flujo plástico (Figura 1.2.6c). En condiciones de carga general, ver Figura 1.2.6b, la superficie de fluencia aumenta en tamaño durante el flujo plástico. Dos estados de esfuerzo sucesivos en el caso de la carga uniaxial del tensión-compresión, y en el caso de carga general, se representan por puntos iguales M1 Y M2 en la curva de fluencia $\sigma_y(\bar{e}^P)$. Es decir, debido al endurecimiento cada esfuerzo de fluencia es más grande en el anterior; esto significa que la superficie de fluencia actual limita el dominio elástico que aumenta durante el flujo plástico.

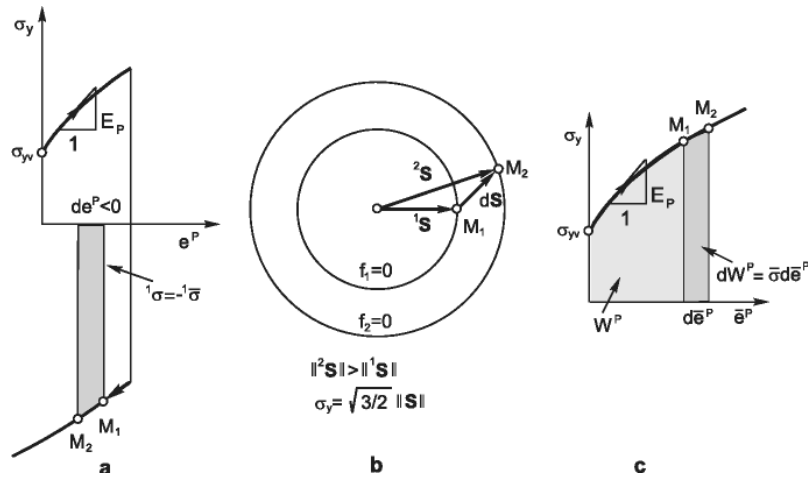


Figura 1.2.6 Estado de esfuerzos en la curva de fluencia para materiales con endurecimiento. **a)** carga uniaxial tensión – compresión; **b)** Condición de carga general; curva de fluencia $\sigma_y(\bar{e}^P)$. Kojic y Bathe (2005).

1.2.6 Modelo Von Mises con endurecimiento mixto.

Un mejor modelo del tipo von Mises en metales plásticos isotrópicos es el modelo del von Mises con la hipótesis de endurecimiento mixto.

En la sección 1.2.2 se introdujo la condición de fluencia von Mises. La superficie de fluencia cambia de tamaño acorde con (1.2.46). Para generalizar la curva de fluencia uniaxial dada en la Figura 1.2.2 se introduce la condición de fluencia en la forma:

$$f_y = \frac{1}{2}(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{1}{3}\hat{\sigma}_y^2 = 0 \quad (1.2.51)$$

Donde α_{ij} son los componentes del tensor que define la posición de la superficie de fluencia, y $\hat{\sigma}_y$ es el esfuerzo de fluencia, como se muestra en la Figura 1.2.7.

Nótese que el cambio de tamaño en la superficie de fluencia y su posición en el espacio de esfuerzos son tomados en cuenta en una forma simplificada, y se deprecia cualquier cambio de forma. La condición de fluencia (1.2.51) también puede escribirse como:

$$f_y = \frac{1}{2}\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij} - \frac{1}{3}\hat{\sigma}_y^2 = 0 \quad (1.2.52)$$

Donde:

$$\hat{S}_{ij} = S_{ij} - \alpha_{ij} \quad (1.2.53)$$

Son las componentes de los radios de la superficie de fluencia. De (1.2.52) se obtiene una relación análoga a (1.2.35):

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_y \quad (1.2.54)$$

donde

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} \|\hat{S}\|} \quad (1.2.55)$$

es el esfuerzo efectivo reducido y $\|\hat{S}\|$ la norma Euclidiana de \hat{S} (ver 1.2.36).

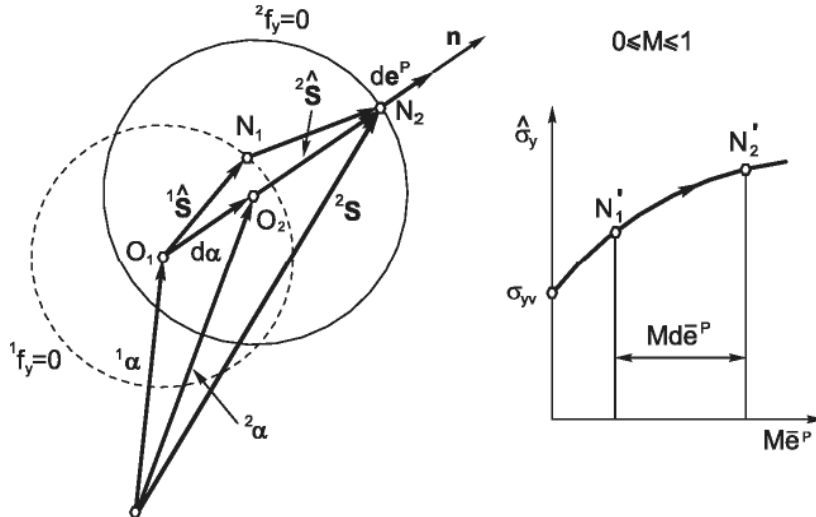


Figura 1.2.7 Modelo von Mises de endurecimiento mixto

representado en el plano deviatorio y por la curva de fluencia $\hat{\sigma}_y(Me^{-P})$. En el caso de endurecimiento cinemático $M=0$, no se usa la curva de fluencia $\hat{\sigma}_y(Me^{-P})$. Kojic y Bathe (2005).

Acorde con la hipótesis de endurecimiento mixto, mencionamos que el incremento de la deformación plástica puede ser dividida en una parte isotrópica y una parte cinemática,

de^{ip} y de^{kp}

$$de^P = de^{ip} + de^{kp} \quad (1.2.56)$$

Una forma simple de relacionar de^{ip} y de^{kp} es mediante una constante $0 \leq M \leq 1$ tal que

$$de^{ip} = Mde^P \quad (1.2.57)$$

y

$$de^{kp} = (1-M)de^P \quad (1.2.58)$$

La constante M es llamada el parámetro de endurecimiento mixto y es una característica del material. Esto representa una medida del efecto de Bauschinger, medido en deformaciones de esfuerzo uniaxial. Note que $M=1$ y $M=0$ corresponden a endurecimiento isotrópico y cinemático, respectivamente.

El incremento del trabajo plástico dW^P se divide en partes isotrópica y cinemática, dW^{iP} y dW^{kP} . Con la hipótesis de endurecimiento mixto, solo la parte de endurecimiento isotrópico $d\bar{e}^{iP}$ del incremento $d\bar{e}^P$ de deformación plástica efectiva:

$$d\bar{e}^{iP} = M d\bar{e}^P \quad (1.2.59)$$

afecta la medida de la superficie de fluencia. Por lo tanto el esfuerzo de fluencia $\hat{\sigma}_y$ usado en (1.2.51) o (1.2.52) es una función de \bar{e}^{iP}

$$\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_y(M\bar{e}^{iP}) \quad (1.2.60)$$

El siguiente paso en la definición del modelo del material está en especificar la relación esfuerzo-deformación plástica. Para este propósito se nota que las ecuaciones de Prandtl-Reuss (1.2.23) son ahora:

$$de_{ij}^P = d\lambda \hat{S}_{ij} \quad (1.2.61a)$$

$$de^P = d\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.2.61b)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{ij}} = \hat{S}_{ij} \quad (1.2.62)$$

Para derivar f_y con respecto a los σ_{ij} se usa la definición (1.2.14) de los esfuerzos deviatorios:

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (1.2.63)$$

Donde \mathbf{I}_3 es la matriz de identidad de orden 3, y

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.2.64)$$

Para completar la formulación del modelo, se requiere una ley de endurecimiento para la posición de la superficie de fluencia, α_{ij} . Puede usarse la regla de endurecimiento de Prager en una forma simple:

$$d\alpha = C de^{kp} = (1-M) C de^p \quad (1.2.65)$$

donde C es el módulo de endurecimiento cinemático. Es decir, el desplazamiento de la superficie de fluencia es en la dirección la normal a la superficie, como se muestra geoméricamente en la Figura 1.2.7. En condición de tensión uniaxial la condición de fluencia (1.2.51) se reduce a:

$$\frac{2}{3}\sigma_{xx} - \alpha_{xx} - \frac{2}{3}\hat{\sigma}_y = 0 \quad (1.2.66)$$

donde se ha usado la relación (1.2.23). Como consecuencia:

$$\frac{2}{3}d\sigma_{xx} - d\alpha_{xx} - \frac{2}{3}d\hat{\sigma}_y = 0 \quad (1.2.67)$$

El esfuerzo σ_{xx} sigue la curva de fluencia para cualquier valor de M . También, el esfuerzo de fluencia $\hat{\sigma}_y$ deberá cambiar acorde con la ley de endurecimiento (1.2.60). Sin embargo, con el uso de la relación (1.2.21) y dado que $de_{xx}^p = de^p$, se tiene:

$$\begin{aligned} d\sigma_{xx} &= E_p de^p \\ d\hat{\sigma}_y &= M \hat{E}_p de^p \\ d\alpha_{xx} &= (1-M) C de^p \end{aligned} \quad (1.1.68)$$

donde:

$$E_p = \left. \frac{\partial \sigma_y}{\partial e^p} \right|_{e^p} \quad \text{y} \quad \hat{E}_p = \left. \frac{\partial \sigma_y}{\partial e^p} \right|_{Me^p} \quad (1.1.69)$$

Son los módulos plásticos que corresponden a las deformaciones plásticas e^p y Me^p respectivamente. En el análisis general se usan las pendientes en la curva de fluencia esfuerzo de fluencia – deformación plástica efectiva. $\sigma_y(e^p)$. Sustituyendo (1.2.68) en (1.2.67) se obtiene la ecuación:

$$C = \frac{2}{3}(E_p - M \hat{E}_p)/(1-M) \quad (1.2.70)$$

Nótese que en el caso de una relación de esfuerzo – deformación bilineal E_p es constante, y en el caso de endurecimiento cinemática:

$$C = \frac{2}{3} E_p \quad (1.2.71)$$

1.3 PROCEDIMIENTO PARA LA INTEGRACIÓN DE ESFUERZOS

Aquí se presenta en resumen el procedimiento de cálculo de esfuerzos y la derivación de la matriz tangente constitutiva.

La deformación general elasto-plástica en tres dimensiones y el caso de condiciones de análisis de cáscaras se consideraron para el caso de endurecimiento mixto (Kojic 1993, Bathe y Montans 2004).

1.3.1 Condiciones generales tridimensionales, deformación en el plano y axisimétricas

Consideramos un punto del material en el que en el comienzo del primer paso se conoce su estado de esfuerzo – deformación, ver Fig. 1.3.1. Las deformaciones inelásticas son las deformaciones plásticas e^P y las variables internas (que definen la posición y el tamaño de la superficie de fluencia), son el esfuerzo de retorno α y la intensidad del radio de la superficie de la superficie de fluencia $\|\hat{S}\|$. Por lo tanto conocemos

$${}^t\sigma, {}^t e, {}^t e^P, {}^t \alpha, {}^t \hat{\sigma}_y, {}^{t+\Delta t} e \quad (1.3.1)$$

Donde el esfuerzo de fluencia ${}^t \hat{\sigma}_y$ define el tamaño de la superficie de fluencia.

$${}^t \hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{3}{2} \|\hat{S}\|} \quad (1.3.2)$$

Como se muestra en la figura 1.3.1. Las cantidades desconocidas correspondientes al final del paso (carga) son:

$${}^{t+\Delta t} \sigma, {}^{t+\Delta t} e^P, {}^{t+\Delta t} \alpha, {}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}_y \quad (1.3.3)$$

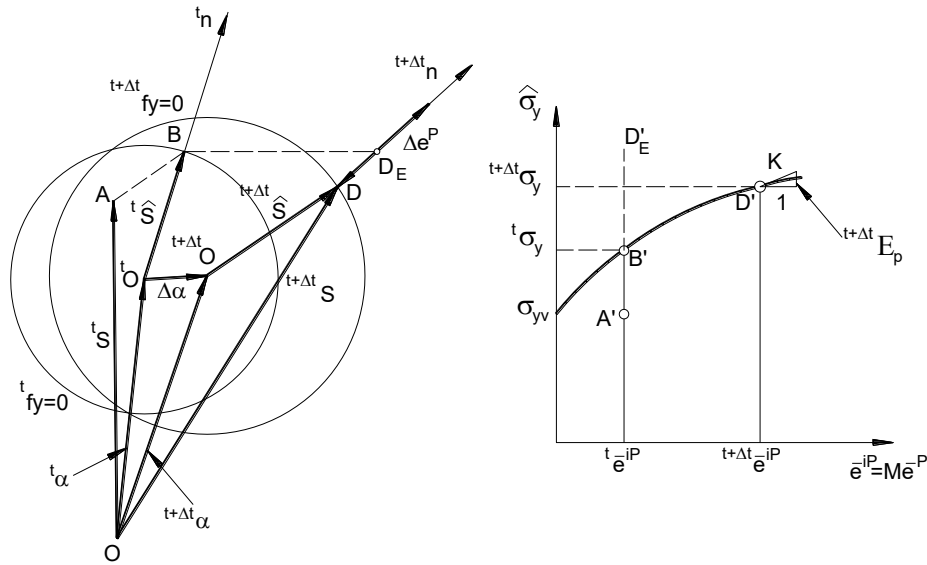


Figura 1.3. 1 Estado de esfuerzo en el tiempo t tiempo $t + \Delta t$ (endurecimiento mixto) Kojic y Bathe (2005).

Usando la notación ${}^t\hat{\sigma}_y$ y ${}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}_y$, un punto fuera que en la curva de fluencia se define como $\hat{\sigma}_y(e^{-ip})$, donde e^{-ip} es la parte isotrópica de la deformación plástica efectiva (ver figura 1.2.8).

La relación elástica constitutiva es.

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}}^E \quad (1.3.4)$$

Donde \mathbf{C}^E es la matriz elástica constitutiva, y ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}}^E$ es el vector de deformación elástica dada por:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}}^E = {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}} - {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}}^P \quad (1.3.5)$$

Aquí ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}}$ y ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}}^P$ son los vectores de deformación total y deformación plástica.

Considerando en primer lugar los esfuerzos principales

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}\sigma_m = K \cdot {}^{t+\Delta t}e_V^E} \quad (1.3.6)$$

Donde K es el modulo de rigidez y ${}^{t+\Delta t}e_V^E$ es la deformación volumétrica elástica.

$${}^{t+\Delta t}e_V^E = {}^{t+\Delta t}e_{11} + {}^{t+\Delta t}e_{22} + {}^{t+\Delta t}e_{33} \quad (1.3.7)$$

Note que:

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}e_V^P = {}^{t+\Delta t}e_{11}^P + {}^{t+\Delta t}e_{22}^P + {}^{t+\Delta t}e_{33}^P = 0} \quad (1.3.8)$$

Para deformaciones dadas ${}^{t+\Delta t}e$, los esfuerzos principales al final del paso no dependen de las deformaciones plásticas. Esto es muy importante para el desarrollo de un procedimiento de integración de esfuerzos. El resultado sugiere que en plasticidad isotrópica solo necesitamos buscar una solución numérica para los esfuerzos deviatoricos ${}^{t+\Delta t}S$, a partir de que los esfuerzos principales ${}^{t+\Delta t}\sigma_m$ ya determinados por (1.3.6).

Los esfuerzos deviatoricos se relacionan con el tensor de deformación deviatorico por:

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}S = 2G{}^{t+\Delta t}e'^E = 2G({}^{t+\Delta t}e' - {}^{t+\Delta t}e^P)} \quad (1.3.9)$$

Donde ${}^{t+\Delta t}e'$ es el tensor deviatorico de deformación con componentes.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}e'_{ij} &= {}^{t+\Delta t}e_{ij} - {}^{t+\Delta t}e_m & i = j \\ {}^{t+\Delta t}e'_{ij} &= \frac{1}{2}{}^{t+\Delta t}\gamma_{ij} & i \neq j \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

y ${}^{t+\Delta t}\gamma_{ij}$ son las deformaciones de corte. También, ${}^{t+\Delta t}e^P$ es el tensor de deformación plástica. La ecuación (1.3.9) puede ser escrita como:

$${}^{t+\Delta t}S = {}^{t+\Delta t}S^E - 2G\Delta e^P \quad (1.3.11)$$

Donde:

$${}^{t+\Delta t}S^E = 2G{}^{t+\Delta t}e'^E \quad (1.3.12)$$

Esta solución elástica, no presenta deformación plástica en el paso actual, por lo tanto:

$${}^{t+\Delta t}e'^E = {}^{t+\Delta t}e' - {}^t e^P \quad (1.3.13)$$

Escrito (1.3.11) hemos usado la relación

$${}^{t+\Delta t}e^P = {}^t e^P + \Delta e^P \quad (1.3.14)$$

Donde Δe^P es el incremento del tensor de deformación plástica.

Flujo plástico en el paso actual. El radio de esfuerzo elástico ${}^{t+\Delta t}\hat{S}^E$ es:

$${}^{t+\Delta t}\hat{S}^E = {}^{t+\Delta t}S^E - {}^t\alpha \quad (1.3.15)$$

Que corresponde al vector desde tO a D_E en la Fig. 1.3.1. Si el esfuerzo de D_E esta

dentro o en la superficie de fluencia ${}^t f_y = 0$, si:

$$\|{}^{t+\Delta t}\hat{S}^E\| \leq \sqrt{\frac{2}{3}} {}^t\hat{\sigma}_y \quad (1.3.16)$$

Entonces no hubo deformación plástica y ${}^{t+\Delta t} S^E$ es la solución para el paso.

En el caso de flujo plástico en el paso, la condición de fluencia (1.2.55) al final del paso dado

$$\boxed{{}^{t+\Delta t} f_y = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t} S - {}^{t+\Delta t} \alpha) \cdot ({}^{t+\Delta t} S - {}^{t+\Delta t} \alpha) - \frac{1}{3} {}^{t+\Delta t} \sigma_y^2 = 0} \quad (1.3.17)$$

Para calcular el incremento de la deformación plástica Δe^P empleamos la regla de flujo al final del paso, adoptamos el esquema de integración de Euler invertido con el parámetro de integración $\alpha = 1$ en la ecuación

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t) dt = [(1-\alpha)^t f + \alpha^{t+\Delta t} f] \Delta t \quad (1.3.18)$$

Donde $0 \leq \alpha \leq 1$ es el parámetro de integración. Los valores de $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, corresponden a los métodos de Euler y Euler invertido, respectivamente, mientras que $\alpha = 0.5$ da la regla trapezoidal.

Integrando las relaciones (1.2.70), usando el método de Euler invertido tenemos la siguiente aproximación para el incremento de las deformaciones plásticas Δe^P in el paso de tiempo

$$\Delta e^P = \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial f_y}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \right) dt = \Delta \lambda \frac{\partial^{t+\Delta t} f_y}{\partial^{t+\Delta t} \sigma} \quad (1.3.19)$$

Donde $\Delta \lambda$ es un positivo escalar correspondiente al paso Δt .

Para las clases de modelos de material considerados aquí, la condición de fluencia al fin del paso de tiempo puede ser escrita en la forma

$${}^{t+\Delta t} f_y({}^{t+\Delta t} \sigma, {}^{t+\Delta t} \beta) = {}^{t+\Delta t} f_y({}^{t+\Delta t} S, {}^{t+\Delta t} \sigma_m, {}^{t+\Delta t} \beta) = 0 \quad (1.3.20)$$

Y se deduce de (1.3.19) que

$$\Delta e_{11}^P = \frac{\Delta \lambda}{3} * \left(2 \frac{\partial f_y}{\partial S_{11}} - \frac{\partial f_y}{\partial S_{22}} - \frac{\partial f_y}{\partial S_{33}} + \frac{\partial f_y}{\partial S_m} \right)$$

$$\Delta e_{22}^P = \frac{\Delta \lambda}{3} * \left(-\frac{\partial f_y}{\partial S_{11}} + 2 \frac{\partial f_y}{\partial S_{22}} - \frac{\partial f_y}{\partial S_{33}} + \frac{\partial f_y}{\partial S_m} \right)$$

$$\Delta e_{33}^P = \frac{\Delta\lambda}{3} * \left(-\frac{\partial f_y}{\partial S_{11}} - \frac{\partial f_y}{\partial S_{22}} + 2\frac{\partial f_y}{\partial S_{33}} + \frac{\partial f_y}{\partial S_m} \right)$$

$$\Delta e^P = \Delta\lambda \frac{\partial^{t+\Delta t} f_y}{\partial^{t+\Delta t} \sigma} \quad i \neq j \quad (1.3.21)$$

De la ecuación (1.3.21) obtenemos:

$$\Delta e^P = \Delta\lambda^{t+\Delta t} \hat{S} \quad (1.3.22)$$

donde hemos usado la condición $\partial f_y / \partial \sigma_m = 0$ y (1.2.58). Las cantidades de las ultimas dos ecuaciones son mostradas en la Fig. 1.3.1. Esto es importante para notar que el incremento de la deformación plástica Δe^P es en la dirección del radio de esfuerzo ${}^{t+\Delta t} \hat{S}$ al final del paso.

Sustituyendo Δe^P desde (1.3.22) en (1.3.11) obtenemos:

$${}^{t+\Delta t} S = {}^{t+\Delta t} S^E - 2G\Delta\lambda^{t+\Delta t} \hat{S} \quad (1.3.23)$$

Luego emplearemos las relaciones constitutivas (1.2.71) para el esfuerzo de retorno,

$$\Delta\alpha = \hat{C}\Delta e^P \quad (1.3.24)$$

Donde:

$$\hat{C} = (1-M)\bar{C} = \frac{2}{3}(E_p - M\hat{E}_p) \quad (1.3.25)$$

Aquí hemos usado (1.2.76), con \bar{E}_p y \hat{E}_p como modulo plástico para el paso Δt . El modulo plástico tiene valores entre ${}^t E_p$ y ${}^{t+\Delta t} E_p$ correspondiente a la deformación plástica acumulada ${}^t \bar{e}^P$ y ${}^{t+\Delta t} \bar{e}^P$; y entre ${}^t \hat{E}_p$ y ${}^{t+\Delta t} \hat{E}_p$ correspondiente a $M^t \bar{e}^P$ y $M^{t+\Delta t} \bar{e}^P$. Usando la relación geométrica mostrada en la Figura 1.3.1 y usando (1.3.24) obtenemos:

$${}^{t+\Delta t} S = {}^t S - \alpha + (1 + \Delta\lambda\hat{C})^{t+\Delta t} \hat{S} \quad (1.3.26)$$

Resolvemos para ${}^{t+\Delta t} \hat{S}$ usando (1.3.23) y (1.3.26)

$${}^{t+\Delta t} \hat{S} = \frac{{}^{t+\Delta t} \hat{S}^E}{1 + (2G + \hat{C})\Delta\lambda} \quad (1.3.27)$$

Donde ${}^{t+\Delta t} \hat{S}^E$ es la solución elástica, ver (1.3.15)

Tomando el producto escalar en ambos lados de (1.3.22), obtenemos

$$\Delta\lambda = \frac{3}{2} \frac{\Delta\bar{e}^P}{{}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}} \quad (1.3.28)$$

Donde (ver 1.2.45)

$$\Delta\bar{e}^P = \left(\frac{2}{3}\Delta e^P \cdot \Delta e^P\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \|\Delta e^P\| \quad (1.3.29)$$

es el incremento de la deformación plástica efectiva; y

$${}^{t+\Delta t}\hat{\sigma} = \left(\frac{3}{2} {}^{t+\Delta t}\hat{S} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{S}\right)^{1/2} \quad (1.3.30)$$

define el tamaño de la superficie de fluencia. Note que (1.3.28) es un caso especial de la expresión general para $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \frac{\|\Delta e^P\|}{\|{}^{t+\Delta t}f_{y,\sigma}\|}$$

Desde la definición de la reducción del esfuerzo efectivo en (1.2.59), la condición de fluencia (1.3.17), y (1.3.30) encontramos que

$${}^{t+\Delta t}\hat{\sigma} - {}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}_y = 0 \quad (1.3.31)$$

es una forma de la condición de fluencia. Por otro lado el endurecimiento se definió por la curva de fluencia (1.2.65), por lo tanto

$${}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_y \left[M({}^t\bar{e}^P + \Delta\bar{e}^P) \right] \quad (1.3.32)$$

Usando las ecuaciones (1.3.22) a (1.2.25), (1.3.27), (1.3.28) y (1.3.32), encontramos que no conocemos ${}^{t+\Delta t}e^P$, ${}^{t+\Delta t}S$ y ${}^{t+\Delta t}\alpha$, son funciones de un solo parámetro, que es $\Delta\bar{e}^P$.

Es decir, por un $\Delta\bar{e}^P$ dado, encontramos $\hat{\sigma}_y$ de la curva de fluencia, $\Delta\lambda$ de (1.3.28), después determinamos \hat{C} de (1.3.25), $\Delta\alpha$ de (1.3.24), ${}^{t+\Delta t}\hat{S}$ de (1.3.27), Δe^P de (1.3.22) y ${}^{t+\Delta t}S$ ya sea de (1.3.23) o (1.3.26).

Tomando el producto escalar de ambos lados de (1.3.27), y usando (1.3.31) y (1.3.32) tenemos que la ecuación que gobierna es

$$f(\Delta \bar{e}^P) = \frac{{}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}^E}{{}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}_y + \frac{3}{2}(2G + \hat{C})\Delta \bar{e}^P} - 1 = 0 \quad (1.3.33)$$

Donde ${}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}^E$ denota el valor de $\hat{\sigma}$ para $\Delta \bar{e}^P = 0$. Esta ecuación es como la condición de fluencia (1.3.31). En la obtención de esta ecuación se asumió que $\hat{\sigma}_y > 0$ ya que el esfuerzo de fluencia no puede ser igual a cero.

El problema de la integración de esfuerzo se reduce a la solución de la ecuación no lineal (1.3.33). Después que $\Delta \bar{e}^P$ y ${}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}_y$ son relacionados a través de la curva de fluencia (1.3.32), el esfuerzo ${}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}$ podría también ser tomado como parámetro que rige la ecuación, donde la función $f(\Delta \bar{e}^P)$ es definida como “la función de esfuerzo efectivo” $f({}^{t+\Delta t} \hat{\sigma})$.

En el caso general, la solución de (1.3.33) puede ser solucionada numéricamente por una iteración de Newton-Raphson o un procedimiento de bisección. Considerando las características del parámetro que rige la función (1.3.33) encontramos que la primera derivada f'

$$f' \frac{df}{d(\Delta \bar{e}^P)} = - \frac{{}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}^E}{\left[{}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}_y + \frac{3}{2}(2G + \hat{C})\Delta \bar{e}^P \right]^2} * \left[\frac{3}{2}(2G + \hat{C}) + M {}^{t+\Delta t} \hat{E}_p + \left(\frac{\partial \bar{E}_p}{\partial \bar{e}^P} - \frac{M \partial \hat{E}_p}{\partial \bar{e}^P} \right) \Delta \bar{e}^P \right] \quad (1.3.34)$$

Donde hemos usado (1.3.25) para $d\hat{C}/d\bar{e}^P$. Si el modulo plástico es tomado como $\bar{E}_p = (1 - \alpha)^t E_p + \alpha {}^{t+\Delta t} E_p$, donde $0 \leq \alpha \leq 1$ es el parámetro, entonces $\partial \bar{E}_p / \partial \bar{e}^P = \alpha \partial {}^{t+\Delta t} E_p / \partial \bar{e}^P$ y $\partial \hat{E}_p / \partial \bar{e}^P = \alpha \partial {}^{t+\Delta t} \hat{E}_p / \partial \bar{e}^P$. En el caso de endurecimiento isotrópico ($M=1$) la derivada f' es negativa para cualquier $\Delta \bar{e}^P$. El valor $(\Delta \bar{e}^P)_0$ puede ser determinado para lo cual la derivada f' es cero en el caso de endurecimiento mixto.

$$(\Delta \bar{e}^P)_0 = \frac{3G + \bar{E}_p + M({}^{t+\Delta t}E_p - \hat{E}_p)}{\left| \frac{\partial \bar{E}_p}{\partial \bar{e}^P} - M \frac{\partial \hat{E}_p}{\partial \bar{e}^P} \right|} \quad (1.3.35)$$

Donde $(\frac{\partial \bar{E}_p}{\partial \bar{e}^P} - M \frac{\partial \hat{E}_p}{\partial \bar{e}^P}) < 0$. Para $\Delta \bar{e}^P > (\Delta \bar{e}^P)_0$, la derivada f' llega a ser positiva. El valor $(\Delta \bar{e}^P)_0$ es mucho mayor que 1, de tal modo que f' es negativo para el significativo rango físico. Desde $E_p > 0$ la función gobernada $f(\Delta \bar{e}^P)$ es una función monotónica, como esquemáticamente se muestra en la figura 1.3.2.

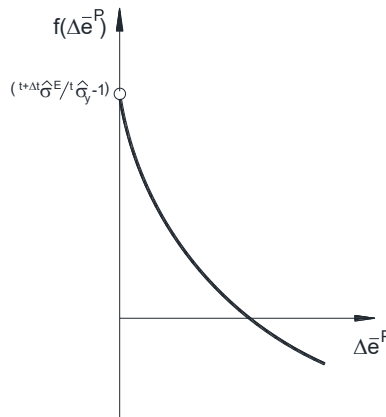


Figura 1.3. 2 Carácter monotónico de la función que gobierna la plasticidad del endurecimiento mixto de un metal isotrópico

La tabla 1.3.1 es un resumen de los pasos computacionales para el cálculo de los esfuerzos. El procedimiento descrito es directamente aplicable para el caso de endurecimiento isotrópico. Luego, usando $M=1$ tenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \hat{\sigma} &= \sigma = \sigma_y(\bar{e}^P) \\ \hat{S} &= S \\ f(\Delta \bar{e}^P) &= \left[{}^{t+\Delta t}\sigma^E / ({}^{t+\Delta t}\sigma_y + 3G\Delta \bar{e}^P) \right] - 1 = 0 \quad | M = 1 \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

En el caso de endurecimiento cinemático, usamos $M=0$ y también que $\hat{\sigma} = \sigma_{yv}$ (ver Figura 1.3.1). La solución para $\Delta \bar{e}^P$ siguiendo desde (1.3.33), y por consiguiente tenemos

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{\sigma} &= \sigma_{ty} \\ \Delta \bar{e}^P &= ({}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}^E - \sigma_{yv}) / (3G + \bar{E}_p) \quad | M = 0 \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

Las características importantes del algoritmo anterior son que la solución puede ser obtenida para incrementos de deformación relativamente grandes y puesto que el gobierno de la función $f(\Delta\bar{e}^P)$ es monotónica, la solución puede ser calculada muy eficientemente (Iteración por Newton).

Con respecto a la exactitud de la solución, la relación elástica constitutiva y la condición de fluencia son satisfechas exactamente al final del paso. El esfuerzo del punto D en el espacio deviatorico (Figura 1.3.1) está en la superficie de fluencia con el tamaño determinado por el valor de ${}^{t+\Delta t}\sigma_y$ (el punto D' se encuentra en la curva de fluencia). La aproximación de la solución corresponde al uso del método de Euler invertido en el cálculo del incremento de deformación plástica (1.3.22), y para el uso de (1.3.24) que contiene los valores de los módulos \bar{E}_p y \hat{E}_p .

En el caso de la carga radial dentro un intervalo de tiempo (carga) $t_1 - t_2$ (la normal \mathbf{n} de la superficie de fluencia no cambia en este intervalo de tiempo) con endurecimiento isotrópico y cualquier curva de fluencia, o si E_p es constante dentro del intervalo en cualquier endurecimiento mixto, la solución en el tiempo t_2 es igual para cualquier número de pasos usados en el intervalo $t_1 - t_2$.

Finalmente, notamos que el procedimiento computacional descrito para el análisis tridimensional elasto-plástico es directamente aplicable para las clases de problemas bidimensionales (en el plano x, y): problemas de deformación plana y axisimétrica. Es decir, podemos usar todas las relaciones para deformaciones en tres dimensiones, con las siguientes deformaciones y esfuerzos de corte iguales a cero.

$$\begin{aligned} S_{.xx} &= S_{.yz} = 0 \\ e_{.xz} &= e_{.yz} = 0 \\ e_{.xz}^P &= e_{.yz}^P = 0 \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

La condición

$$e_{zz} = 0 \quad (1.3.37)$$

Para deformaciones planas no se simplifica el calculo de los esfuerzos porque los componentes deviatoricos son usados en el cálculo de la plasticidad y e'_{zz}, e^P_{zz} y S_{zz} son en general diferentes de cero.

Tabla 1.3. 1: Pasos Computacionales para la integración de esfuerzos, endurecimiento plástico mixto de un metal isotrópico

<p>1. Determinación de la solución elástica</p> ${}^{t+\Delta t} S^E = 2G {}^{t+\Delta t} e''$ ${}^{t+\Delta t} \hat{S}^E = {}^{t+\Delta t} S^E - {}^t \alpha$ <p>2. Chequeo de la fluencia</p> $\ {}^{t+\Delta t} \hat{S}^E\ \leq \sqrt{\frac{2}{3}} {}^t \sigma_y$ <p>Si la deformación es elástica, ir al paso 5</p> <p>3. Deformación plástica en el paso Δt</p> <p>Resolvemos la ecuación que gobierna la función cuando la igualamos a cero $f(\Delta \bar{e}^P) = 0$</p> <p>4. Determinamos las variables dependiente de la plasticidad:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Valor de $\Delta \lambda$ • Radio de esfuerzo ${}^{t+\Delta t} \hat{S}$ • Esfuerzos diviatoricos ${}^{t+\Delta t} S$ • Incremento de la deformación plástica Δe^P • Deformación plástica ${}^{t+\Delta t} e^P = {}^t e^P + \Delta e^P$ • Incremento de los esfuerzos de descarga $\Delta \alpha = \hat{C} \Delta e^P$ • Esfuerzos de descarga ${}^{t+\Delta t} \alpha^P = {}^t \alpha + \Delta \alpha$ • Deformación plástica efectiva ${}^{t+\Delta t} e^{-P} = {}^t e^{-P} + \Delta e^{-P}$ <p>5. Determinando los esfuerzos</p> ${}^{t+\Delta t} \sigma_m = K {}^{t+\Delta t} e^E_V$ <p>y</p> ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^{t+\Delta t} S_{ij} + {}^{t+\Delta t} \sigma_m \delta_{ij}$

1.4 NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA

En el desarrollo siguiente consideraremos un cuerpo general en un estacionario sistema de coordenadas cartesianas como se muestra en la Figura 1.4. 1, y se asume que el cuerpo puede experimentar grandes desplazamientos, grandes deformaciones y una respuesta no lineal constitutiva. El objetivo es evaluar la posición de equilibrio del cuerpo en los puntos de intervalo de tiempo $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$, donde Δt es un incremento del tiempo. Para desarrollar la estrategia de solución asumimos que la solución para las variables estáticas y cinemáticas para todos los pasos de tiempo desde tiempo 0 hasta el tiempo t , inclusive, han sido obtenidos. Entonces el proceso de solución para la siguiente posición de equilibrio correspondiente al tiempo $t + \Delta t$ es típica y es aplicada repetitivamente por la ruta completa de soluciones. Por lo tanto en el análisis seguimos todas las partículas del cuerpo en su movimiento desde el original hasta la configuración final, lo que significa que se adopta una formulación lagrangiana del problema.

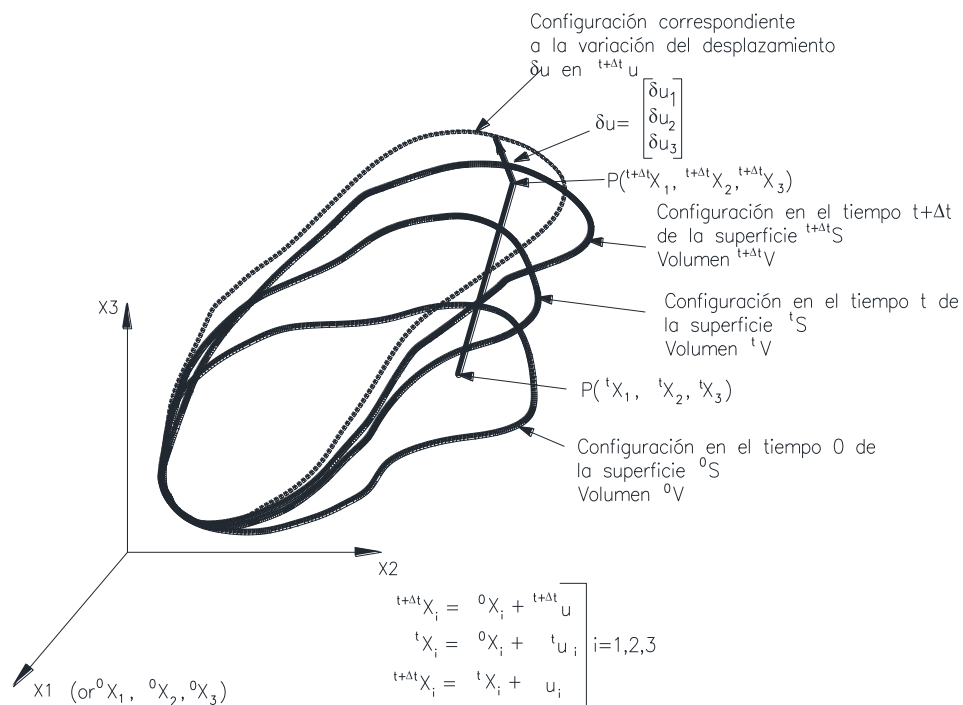


Figura 1.4. 1 Movimiento de un cuerpo en el marco de coordenadas cartesianas. K.-Jurgen Bathe (1996).

En el análisis incremental de Lagrangian expresamos el equilibrio del cuerpo en el tiempo $t + \Delta t$ usando el principio de desplazamientos virtuales.

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta_{t+\Delta t} e_{ij} d {}^{t+\Delta t} V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (1.4.1)$$

Donde

${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$ = Componentes cartesianos del tensor de esfuerzos de Cauchy (fuerza por unidad de área en la geometría deformada)

En forma de matriz el esfuerzo tensor puede ser escrito como

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{t+\Delta t} e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t} x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t} x_i} \right) = \text{Tensor de deformaciones infinitesimales correspondiente}$$

a los desplazamientos virtuales. La forma de la matriz de deformación infinitesimal es

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial {}^{t+\Delta t} x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial {}^{t+\Delta t} x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial {}^{t+\Delta t} x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial {}^{t+\Delta t} x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial {}^{t+\Delta t} x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial {}^{t+\Delta t} x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial {}^{t+\Delta t} x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial {}^{t+\Delta t} x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial {}^{t+\Delta t} x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial {}^{t+\Delta t} x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial {}^{t+\Delta t} x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial {}^{t+\Delta t} x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial {}^{t+\Delta t} x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial {}^{t+\Delta t} x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial {}^{t+\Delta t} x_3} \end{bmatrix}$$

${}^{t+\Delta t} x_j$ = Coordenadas cartesianas de un punto del material en un tiempo $t + \Delta t$

${}^{t+\Delta t} V$ = Volumen en el tiempo $t + \Delta t$

En las ecuaciones anteriores el superíndice $t + \Delta t$ significa que el tensor se aplica a la configuración deformada y están escritas como funciones de las componentes de los vectores de posición de los puntos. La integración es sobre el volumen deformado. Por estas razones, aunque la ecuación (1.4.1) es una declaración válida del principio de desplazamientos virtuales, esta no puede ser usada directamente para determinar los esfuerzos físicos en la configuración $t + \Delta t$ puesto que la configuración es todavía

desconocida. Por lo tanto, recurrimos a una expresión alternativa del trabajo virtual interno.

$$\int_{V_0} {}^t S_{ij} \delta_0^t \varepsilon_{ij} dV_0 = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (1.4.2)$$

En la que S el segundo esfuerzo tensor Piola-Kirchhoff y \mathcal{E} es el esfuerzo tensor de Green-Lagrange. Aquí el superíndice t significa de nuevo que el tensor se aplica en la configuración deformada, pero el subíndice 0 designa que están referidos a la configuración no deformada; es decir las componentes del tensor se escriben como función de coordenadas cartesianas conocidas en el punto p_0 y la integración es sobre el volumen no deformado. Nuestro objetivo inmediato es demostrar que el trabajo virtual simbolizado por la ecuación (1.4.2) es idéntico a la de la ecuación (1.4.1). A todo lo largo del proceso se supone que el trabajo virtual externo es independiente de la deformación. El tensor de deformación de Green-Lagrange es una medida de deformación finita definida como

$${}^t \mathcal{E} = \frac{1}{2} ({}^t X^T {}^t X - I) \quad (1.4.3)$$

En que ${}^t X$ es el gradiente de deformación que describe la elongación y rotación que una fibra de material experimenta entre la configuración 0 y la configuración t . Como se ilustra en la Figura 1.4. 2 un diferencial del material, $d^0 x$, en el punto P_0 podría ser $d^t x$ en el punto P_t . Por lo tanto, por el cambio de regla de diferenciación

$$[d^t x] = [{}^t X] [d^0 x]$$

También notamos que los cuadrados de las longitudes de los elementos en los estados son

$$(d^0 x)^2 = [d^0 x] \{d^0 x\} \text{ y } (d^t x)^2 = [d^t x] \{d^t x\}$$

Esto sigue como

$$(d^t x)^2 - (d^0 x)^2 = [d^0 x] [{}^t X^T {}^t X - 1] \{d^0 x\} \quad (1.4.4)$$

A través de la comparación de las ecuaciones (1.4.3) y (1.4.4) podría verse que el tensor de deformación de Green-Lagrange fue definido para dar el cambio en el cuadrado de la longitud del material. De la Figura 1.4. 2 y la manera en que la ecuación (1.4.4) fue derivada, es claro que esta contiene información en la rotación del elemento así como de su elongación.

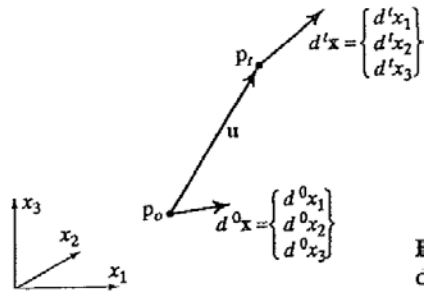


Figura 1.4. 2 Desplazamiento, elongación y rotación de un diferencial del material

Teniendo el gradiente de deformación

$${}^t_0 X = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix}$$

y dejando ${}^t x_i = {}^0 x_i + u_i$, en el tensor deformación Green-Lagrange las componentes de forma se transforman en

$${}^t_0 \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t_0 u_{ij} + {}^t_0 u_{j,i} + {}^t_0 u_{k,i} {}^t_0 u_{kj}) \quad (1.4.5)$$

En la que la coma denota la diferenciación con respecto a la coordenada siguiente. Para la comparación con el tensor de deformación infinitesimal tenemos, por ejemplo

$${}^t_0 \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial^0 x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial^0 x_1} \right)^2 \right]$$

$${}^t_0 \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial^0 x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial u_1}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial u_2}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial u_3}{\partial^0 x_2} \right)$$

También de la ecuación (1.4.3) podemos escribir la deformación virtual como

$$\delta_0^t \varepsilon = \frac{1}{2} \left((\delta_0^t X^T)({}_0^t X) + ({}_0^t X^T)(\delta_0^t X) \right) \quad (1.4.6)$$

a partir de la regla de la cadena para las diferenciaciones parciales de los elementos de $\delta_i U$ con respecto a los de $\{p_0\}$ se puede observar que

$$\delta_0^t X = \delta_i U {}_0^t X$$

Así, de la ecuación (1.4.6) y del tensor de deformación infinitesimales

$$\delta_0^t \varepsilon = \frac{1}{2} \left[{}_0^t X^T (\delta_i U) {}_0^t X + {}_0^t X^T (\delta_i U) {}_0^t X \right] = {}_0^t X^T \left(\frac{1}{2} [(\delta_i U) {}_0^t X + ({}_0^t X^T) \delta_i U] \right)$$

$$\delta_0^t \varepsilon = {}_0^t X^T \delta e_0^t X \quad (1.4.7)$$

Que relaciona la deformación virtual de Green-Lagrange con la deformación virtual infinitesimal. Ahora queremos definir el tensor de esfuerzos adecuado para usar con este tensor de deformaciones.

Consideremos el segundo tensor de esfuerzos Piola-Kirchhoff. En el contexto de los dos estados considerados, este se define como

$${}_0^t S = \frac{{}_0^t \rho}{{}_i^t \rho} {}_0^t X \tau {}_i^t X^T \quad (1.4.8)$$

En que ${}_0^t \rho$ y ${}_i^t \rho$ son las densidades de la configuración no deformada y deformada del material respectivamente y ${}_0^t X$ es el gradiente de deformación espacial. En forma de componentes el tensor de esfuerzos es

$${}_0^t S_{ij} = \frac{{}_0^t \rho}{{}_i^t \rho} {}_0^t X_{i,m} \tau_{mn} {}_i^t X_{j,n} \quad (1.4.8.b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.4.7) y (1.4.8) en (1.4.2), tenemos

$$\int_{V_0} {}_0^t S_{ij} \delta_0^t \varepsilon_{ij} dV_0 = \int_{V_0} \frac{{}_0^t \rho}{{}_i^t \rho} [{}_0^t X \tau {}_i^t X^T] [{}_0^t X^T \delta e_0^t X] dV_0 \quad (1.4.9)$$

Asumiendo que no hay pérdida de masa en la transición, es decir que ${}^0\rho V_0 = {}^t\rho V_t$ y reconociendo la ortogonalidad de las matrices gradientes y simétrica de los tensores de esfuerzo y deformación, vemos que

$$\int_{V_0} {}^t S_{ij} \delta_0^t \varepsilon_{ij} dV_0 = \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta_t e_{ij} dV_t \quad (1.4.10)$$

Que satisface el objetivo de demostración de las ecuaciones (1.4.1) y (1.4.2) de valores de fluencia idénticos en el trabajo virtual interno.

De lo expuesto anteriormente, se observará que las deformaciones de Green-Lagrange no son más que una de varias medidas de deformación finita, deformaciones logarítmicas (Hencky) entre otros. Todos tienen una base física pero la variación de Green-Lagrange es quizá la más usada en el desarrollo de los métodos generales de análisis no lineal.

Como medida de esfuerzos, por otra parte, los esfuerzos de Cauchy son los que tienen un significado físico y por lo tanto ellos o sus resultantes son los que finalmente se debe calcular.

Los segundos esfuerzos de Piola-Kirchhoff stress construcciones ingeniosas basadas en la transformación de esfuerzos y la deformación del elemento en donde actúan de un estado a otro, pero tiene muy poco significado físico. Su principales virtudes son la que acabamos de describir: en combinación con las de formaciones de Green-Lagrange ellas son unas mediciones válidas de trabajo virtual y por lo tanto proveen un base para la formulación de ecuaciones no lineales de equilibrio en una configuración conocida. La formulación lagrangiana es usada para ilustrar las variaciones usando las coordenadas del material en la configuración no deformada o en una referencia temporal-en lugar de las coordenadas espaciales de la configuración deformada- para trazar el comportamiento no lineal de un sistema.

1.1.1 Formulación de Lagrange actualizado y su linearización

El objetivo es escribir las ecuaciones de equilibrio para el siguiente incremento, la configuración $t + \Delta t$.

Las ecuaciones de la sección anterior pueden ser simbólicamente aplicadas en el presente caso cambiando 0 y t por t y $t + \Delta t$ respectivamente. Por lo tanto de la ecuación (1.4.1) tenemos

$$\int_{V_{t+\Delta t}} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta_{t+\Delta t} e_{ij} dV_{t+\Delta t} = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (1.4.11)$$

Donde \mathfrak{R} es el trabajo virtual externo el cual es independiente de la deformación.

De la ecuación (1.4.10) la alternativa de expresión para el trabajo virtual interno

$$\int_{V_t} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta_t^{\Delta t} \varepsilon_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (1.4.11a)$$

En la que los componentes de forma ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ y $\delta_t^{\Delta t} \varepsilon_{ij}$ pueden obtenerse de las ecuaciones (1.4.8.b) y (1.4.5) por cambio apropiado de los sub y superíndices.

El esfuerzo puede ser descompuesto como

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^tS_{ij} + \Delta_t S_{ij} = {}^t\tau_{ij} + \Delta_t S_{ij}$$

En que ${}^tS_{ij}$ el segundo esfuerzo de Piola-Kirchoff en la configuración t , es idéntico al esfuerzo de Cauchy, ${}^t\tau_{ij}$, en que la configuración, y $\Delta_t S_{ij}$ es el incremento del esfuerzo de Piola-Kirchoff entre la configuración t y $t + \Delta t$

Para las de formaciones de Green-Lagrange y los incrementos de desplazamientos expresados en términos del estado de referencia, ${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = {}_t\varepsilon_{ij}$. Así, de la ecuación

$${}_t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t u_{ij} + {}_t u_{ji} + {}_t u_{k,i} {}_t u_{kj}) \quad (1.4.12)$$

Dejando ${}_t\varepsilon_{ij} = {}_t e_{ij} + {}_t \eta_{ij}$, la ecuación (1.4.12) puede ser descompuesta en componentes lineal y no lineal en que

$${}_t e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t u_{i,j} + {}_t u_{j,i}) \text{ y } {}_t \eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t u_{k,i} + {}_t u_{k,j})$$

La deformación virtual puede ser descompuesta de la misma manera.

Descomponiendo esfuerzos y deformaciones en la ecuación (1.4.11a) de esta manera tenemos

$$\int_{V_t} \Delta_t S_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta_t e_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (1.4.13)$$

La ecuación (1.4.13) sigue siendo una declaración coherente del principio de desplazamientos virtuales en que todas las integrales son con respecto al volumen conocido de la configuración t . Para una variación de desplazamiento dado, la segunda integral es una cantidad conocida. Se acostumbra transponerlo al lado derecho de la ecuación como una expresión del trabajo virtual de las fuerzas existentes en la configuración t . La tercera integral es lineal en los desplazamientos incrementales, pero la primera no lo es, por lo que debe ser aproximada de alguna manera con el propósito de un cálculo práctico. Las aproximaciones sugeridas son

${}_t \Delta S_{ij} = {}_t C_{ijrs} e_{rs}$ y $\delta_t \varepsilon_{ij} = \delta_t e_{ij}$ en donde ${}_t C_{ijrs}$ es el incremento del tensor de esfuerzo-deformación en la configuración t .

El resultado es la ecuación de linealizada

$$\int_{V_t} {}_t C_{ijrs} e_{rs} \delta_t e_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta_t e_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (1.4.14)$$

Formas linearizadas de Total Lagrange y Lagrange Actualizado

Las tablas 1.4.1 y 1.4.2 resumen las relaciones usadas para llegar a las ecuaciones de movimiento alrededor del estado en el tiempo t en las formulaciones de Total-Lagrange y Lagrange actualizado.

Comparando las formulaciones de Total Lagrange (TL) y Lagrange Actualizado (UL), observamos que estas son muy similares, de hecho la única deferencia entre estas dos formulaciones, radica en la elección de las diferentes configuraciones de referencia para las variables cinemática y estática. De hecho, si en la solución numérica son empleados adecuadamente los tensores constitutivos, obtendremos resultados idénticos.

Tabla 1.4. 1: Formulación de total Lagrange

1. Ecuación de movimiento

$$\int_{V_0} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta_0 {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} dV_0 = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}$$

Donde

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} {}^0 X_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}^0 X_{j,n} \quad \delta_0 {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta_0 \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t} u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,i} {}^{t+\Delta t} u_{k,j} \right)$$

2. Descomposición incremental

a) Esfuerzos ${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + \Delta_0 S_{ij}$

b) Deformaciones

$${}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = {}^t e_{ij} + {}_0 \varepsilon_{ij}; \quad {}_0 \varepsilon_{ij} = {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij}$$

$${}_0 e_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t u_{ij} + {}_0 u_{j,i} + \frac{{}^t u_{k,i} {}_0 u_{kj} + {}_0 u_{k,i} {}^t u_{kj}}{2} \right); \quad {}_0 \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j}$$

Efecto de desplazamiento inicial

3. Ecuación de movimiento con descomposición incremental

Notemos que $\delta_0 {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta_0 \varepsilon_{ij}$, la ecuación de movimiento es

$$\int_{V_0} \Delta_0 S_{ij} \delta_0 \varepsilon_{ij} dV_0 + \int_{V_0} {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} dV_0 = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{V_0} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} dV_0$$

4. Linearización de la ecuación de movimiento

Usando la aproximación ${}_0 \Delta S_{ij} = {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs}$, $\delta_0 \varepsilon_{ij} = \delta_0 e_{ij}$,

obtenemos como ecuación de aproximación de movimiento:

$$\int_{V_0} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 e_{ij} dV_0 + \int_{V_t} {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} dV_0 = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{V_0} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} dV_0$$

Tabla 1.4. 2: Formulación de Lagrange Actualizado

<p>1. Ecuación de movimiento</p> $\int_{V_t} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}$ <p>Donde</p> ${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{{}^t \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} {}^t X_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}^t X_{j,n} \quad \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} ({}_t u_{i,j} + {}_t u_{j,i} + {}_t u_{k,i} {}_t u_{k,j})$ <p>2. Descomposición incremental</p> <p>a) Esfuerzos ${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \tau_{ij} + \Delta {}_t S_{ij}$</p> <p>b) Deformaciones</p> ${}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = {}_t \varepsilon_{ij}; \quad {}_t \varepsilon_{ij} = {}_t e_{ij} + {}_t \eta_{ij}$ ${}_t e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t u_{i,j} + {}_t u_{j,i}); \quad {}_t \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_t u_{k,i} {}_t u_{k,j}$ <p style="text-align: center;">Efecto de desplazamiento inicial</p> <p>3. Ecuación de movimiento con descomposición incremental</p> <p>La ecuación de movimiento es</p> $\int_{V_t} \Delta {}_t S_{ij} \delta {}_t \varepsilon_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t e_{ij} dV_t$ <p>4. Linearización de la ecuación de movimiento</p> <p>Usando la aproximación ${}_t \Delta S_{ij} = {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs}$, $\delta {}_t \varepsilon_{ij} = \delta {}_t e_{ij}$,</p> <p>obtenemos como ecuación de aproximación de movimiento:</p> $\int_{V_t} {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t e_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{V_t} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t e_{ij} dV_t$

Fuerzas desbalanceadas

Asumiendo que la aproximación de desplazamientos, deformaciones, y por lo tanto se han obtenido los esfuerzos, ahora podemos comprobar la diferencia entre el trabajo virtual interno cuando es calculado con variables estática y cinemática para el tiempo t y $t + \Delta t$ y el trabajo virtual externo. Denotando la aproximación con el superíndice (1) previendo que en general una iteración será necesaria, el error debido a la linearización es, en la formulación de Total Lagrange

$$Error = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{V_0} {}^{t+\Delta t} S_{ij}^{(1)} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV_0 \quad (1.4.15)$$

Y en la formulación de Lagrange Actualizada

$$Error = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{V_{t+\Delta t}^{(1)}} \tau_{ij}^{(1)} \delta_t e_{ij}^{(1)} dV_{t+\Delta t} \quad (1.4.16)$$

Podemos observar que el lado derecho de la ecuaciones (1.4.15) y (1.4.16) son equivalentes a las ecuaciones del paso 3 de las tablas 1.4.1 y 1.4.2 de TL y UL respectivamente pero en cada caso la configuración actual se emplean con las correspondientes variables de esfuerzo y deformación.

Estas consideraciones muestran que el lado derecho de la ecuaciones del paso 3 de las tablas 1.4.1 y 1.4.2 representan el trabajo virtual desbalanceado previo al cálculo de los incrementos en los desplazamientos, mientras que el lado derecho de las ecuaciones (1.4.15) y (1.4.16) representan el trabajo virtual desbalanceado después de la solución, como el resultado de la linearización realizada. Con el fin de reducir aún mas el trabajo virtual desbalanceado tenemos que realizar una iteración en la que el paso de solución anterior se repite hasta que la diferencia entre el trabajo virtual externo e interno es despreciable dentro de una cierta medida de convergencia. Usando la formulación de TL, la ecuación solucionada repetitivamente

$$\int_{V_0} {}_0 C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta_0 e_{rs}^{(k)} \delta_0 e_{ij} dV_0 + \int_{V_t} {}^{t+\Delta t} S_{ij}^{(k-1)} \delta \Delta_0 \eta_{ij}^{(k)} dV_0 = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{V_0} {}^{t+\Delta t} S_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}^{(k-1)} dV_0 \quad (1.4.17)$$

Y usando la formulación de UL, la ecuación considerada es

$$\int_{V_{t+\Delta t}^{(k-1)}} {}_{t+\Delta t} C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta_{t+\Delta t} e_{rs}^{(k)} \delta_{t+\Delta t} e_{ij} dV_{t+\Delta t} + \int_{V_{t+\Delta t}^{(k-1)}} \tau_{ij}^{(k-1)} \delta \Delta_{t+\Delta t} \eta_{ij}^{(k)} dV_{t+\Delta t} = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{V_{t+\Delta t}^{(k-1)}} \tau_{ij}^{(k-1)} \delta_{t+\Delta t} e_{ij}^{(k-1)} dV_{t+\Delta t}$$

1.5 ANÁLISIS NO LINEAL CON ELEMENTOS FINITOS

Una vez obtenidas las ecuaciones Constitutivas que establecen la no linealidad del material y las ecuaciones linealizadas de movimiento usando la formulación de Lagrange

Actualizada, se necesita de un método para el cálculo de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos.

El método de Elementos Finitos es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales. Los cálculos se realizan sobre una malla de puntos (llamados nodos), que sirven a su vez de base para discretización del dominio en elementos finitos. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos. Típicamente el análisis de los elementos finitos se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas las deformaciones y tensiones respectivamente, cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables o más generalmente un problema de mecánica de medios continuos.

Al examinar las interpolaciones de las coordenadas y desplazamientos del elemento, debemos reconocer que es importante emplear las mismas interpolaciones para las coordenadas y desplazamientos en cualquiera y todas las veces durante el movimiento del elemento.

Las ecuaciones de las tablas 1.4.1 y 1.4.2 son las relaciones básicas que son usadas en las iteraciones. Sustituyendo las interpolaciones de la coordenada del elemento y el desplazamiento dentro de estas ecuaciones como se hizo en el análisis lineal, obtenemos- para un elemento simple o para un ensamblaje de elementos-

Análisis estático:

$${}^t K U = {}^{t+\Delta t} R - {}^t F$$

Análisis dinámico, tiempo de integración implícito

$$M {}^{t+\Delta t} \ddot{U} + {}^t K U = {}^{t+\Delta t} R - {}^t F$$

Análisis dinámico, tiempo de integración explícito

$$M^t \dot{U} = {}^t R - {}^t F$$

Usando la formulación Lagrange actualizado:

Análisis Estáticos:

$$({}^t K_L + {}^t K_{NL})U = {}^{t+\Delta t} R - {}^t F$$

Análisis dinámico, implícito el tiempo de integración:

$$M^{t+\Delta t} \ddot{U} + ({}^t K_L + {}^t K_{NL})U = {}^{t+\Delta t} R - {}^t F$$

Análisis dinámico, tiempo de integración explícito

$$M^t \dot{U} = {}^t R - {}^t F$$

- $M =$ Matriz de masa independiente del tiempo
- ${}^t K =$ Matriz de rigidez de incrementos lineales de deformación, no incluye los efectos del desplazamiento inicial.
- ${}^t K_L, {}^t K_L =$ Matrices de rigidez de incrementos de deformación lineales.
- ${}^t K_{NL}, {}^t K_{NL} =$ Matrices de rigidez de incrementos de deformación no lineales.
- ${}^{t+\Delta t} R =$ Vector de carga externa aplicado en un punto nodal en el tiempo $t + \Delta t$
- ${}^t F, {}^t F, {}^t F =$ Vectores de fuerza en un punto nodal equivalente a los esfuerzos del elemento en el tiempo t
- $U =$ Vector de incrementos en los desplazamientos del punto nodal.
- ${}^t \dot{U}, {}^{t+\Delta t} \dot{U} =$ Vector de aceleraciones del punto nodal en el tiempo t y $t + \Delta t$.

En la discretización de elementos finitos se asume que los efectos del amortiguamiento son despreciables o pueden ser modelados en relaciones constitutivas no lineales como en nuestro caso usando una relación de deformación dependiente de las leyes del material.

En la tabla resumen 1.5.1, para un elemento simple, se han considerado las integrales básicas y las correspondientes evaluaciones de la matriz. La siguiente notación es usada en el cálculo de las matrices de elementos.

- $H^S, H =$ Superficie – volumen – matrices de interpolación de desplazamiento.
- ${}^{t+\Delta t} f^S, {}^{t+\Delta t} f^B =$ Vectores de superficie y fuerzas de cuerpo definidas por unidad de área y por unidad de volumen del elemento en el tiempo 0
- $B_L, {}^t B_L, {}^t B_L =$ Deformación lineal-matrices de transformación de desplazamiento B_L es igual a ${}^t B_L$ cuando los efectos de desplazamiento inicial son despreciables.

${}^t_0 B_{NL}, {}^t_0 B_{NL}$	=	Deformación no lineal – matrices de transformación de desplazamiento.
C	=	Matriz de propiedades de esfuerzo deformación del material (incremental o total)
${}^0_0 C, {}^t_0 C$	=	Matrices incrementales de propiedades de esfuerzo-deformación del material
${}^t \tau, {}^t \hat{\tau}$	=	Matriz y vector de esfuerzos de Cauchy
${}^t S, {}^t \hat{S}$	=	Matriz y vector del segundo esfuerzo de Piola – Kirchoff

Tabla 1.5. 1: Matrices de elementos finitos

Tipo de Análisis	Integral	Evaluación de la matriz
En todos los análisis	$\int_{V_0} {}^0 \rho^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i dV_0$	$M^{t+\Delta t} \ddot{u} = \left(\int_{V_0} {}^0 \rho H^t H dV_0 \right) \ddot{u}$
	${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} = \int_{{}^0 S_f} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S dS_0 + \int_{V_0} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i^B dV_0$	${}^{t+\Delta t} R = \int_{{}^0 S_f} H^{S^t} {}^{t+\Delta t} f^S dS_0 + \int_{V_0} H^{t+\Delta t} f^B dV_0$
Solo materiales no lineales	$\int_V C_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} dV$	${}^t K \hat{u} = \left(\int B \zeta C B_L dV \right) \hat{u}$
	$\int_V {}^t \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV$	${}^t F = \int_V B_L^t {}^t \hat{\Sigma} dV$
Formulación de LaGrange actualizado	$\int_{V_t} C_{ijrs} e_{rs} \delta_t e_{ij} dV_t$	${}^t K_L \hat{u} = \left(\int_{V_t} {}^t B_{NL}^t C_t^i B_L dV_t \right) \hat{u}$
	$\int_{V_t} {}^t \tau_{ijrs} \delta_t \eta_{ij} dV_t$	${}^t K_L \hat{u} = \left(\int_{V_t} {}^t B_{NL}^t C_t^i B_L dV_t \right) \hat{u}$
	$\int_{V_t} {}^t \tau_{ijrs} \delta_t e_{ij} dV_t$	${}^t F = \int_{V_t} {}^t B_L^t {}^t \hat{\alpha} dV$

A continuación se presenta el cálculo de las matrices de desplazamiento, deformaciones y esfuerzo y vectores. Como lo anterior, la interpolación de los desplazamientos y las matrices de deformación y desplazamiento son expresadas en términos de las coordenadas isoparamétricas.

Para el presente estudio consideraremos solo las formulaciones de LaGrange Actualizado con las que obtenemos directamente del análisis matricial no lineal del material ya que es el método que se utilizará para los modelos matemáticos.

1.5.1 Elementos bidimensionales axisimétricos, planos de esfuerzos y plano de deformaciones

Consideraremos un elemento bidimensional típico en su configuración en el tiempo 0 y en el tiempo t , como se ilustra para un nodo nueve de un elemento en la figura 1.5.1. Las coordenadas globales de un punto nodal del elemento son en el tiempo 0, ${}^0x_1^k, {}^0x_2^k$ y en el tiempo t , ${}^t x_1^k, {}^t x_2^k$ donde $k = 1, 2, \dots, N$ y N denota el total número de nodos del elemento.

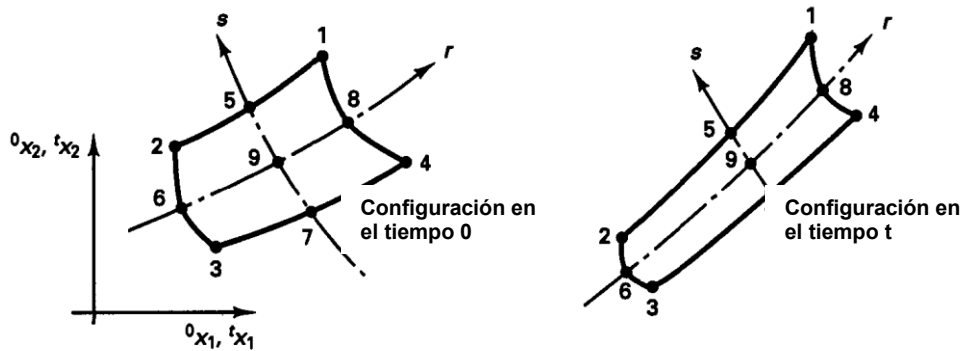


Figura 1.5. 1 Elemento bidimensional mostrado en el plano global ${}^t x_1, {}^t x_2$

Usando los conceptos de interpolación, tendremos en el tiempo 0 ,

$${}^0x_1 = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_1^k ; \quad {}^0x_2 = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_2^k$$

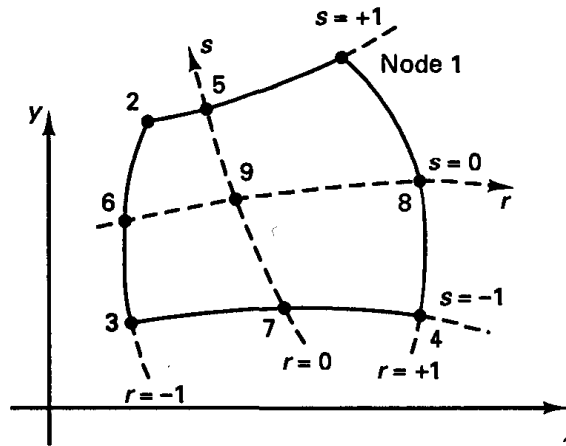
Y en el tiempo t ,

$${}^t x_1 = \sum_{k=1}^N h_k {}^t x_1^k ; \quad {}^t x_2 = \sum_{k=1}^N h_k {}^t x_2^k$$

Donde los h_k son las funciones de interpolación, como se muestra en la Figura 1.5. 2

Ya que se utiliza la discretización isoparamétrica de elementos finitos, los desplazamientos del elemento son interpolados de igual forma que la geometría;

$$\begin{aligned} {}^t u_1 &= \sum_{k=1}^N h_k {}^t u_1^k ; & {}^t u_2 &= \sum_{k=1}^N h_k {}^t u_2^k \\ \Delta u_1 &= \sum_{k=1}^N h_k \Delta u_1^k ; & \Delta u_2 &= \sum_{k=1}^N h_k \Delta u_2^k \end{aligned}$$



(a) Elemento bidimensional de 4 a 9 variables o nudos

		incluye solo si el nudo i se define				
		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
$h_1 =$	$1/4(1+r)(1+s)$	$-1/2h_5$	-	-	$-1/2h_8$	$-1/4h_9$
$h_2 =$	$1/4(1-r)(1+s)$	$-1/2h_5$	$-1/2h_6$			$-1/4h_9$
$h_3 =$	$1/4(1-r)(1-s)$		$-1/2h_6$	$-1/2h_7$		$-1/4h_9$
$h_4 =$	$1/4(1+r)(1-s)$			$-1/2h_7$	$-1/2h_8$	$-1/4h_9$
$h_5 =$	$1/2(1-r^2)(1+s)$					$-1/2h_9$
$h_6 =$	$1/2(1-s^2)(1-r)$					$-1/2h_9$
$h_7 =$	$1/2(1-r^2)(1-s)$					$-1/2h_9$
$h_8 =$	$1/2(1-s^2)(1+r)$					$-1/2h_9$
$h_9 =$	$(1-r^2)(1-s^2)$					

(b) funciones de interpolación

Figura 1.5. 2 Funciones de interpolación de cuatro a nueve números de nodos de un elemento bidimensional K.-Jurgen Bathe (1996).

La evaluación de las deformaciones requiere de las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial^0 x_j} \right) {}^t u_i^k$$

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial^0 x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial^0 x_j} \right) \Delta u_i^k \quad \begin{array}{l} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{array}$$

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial^t x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial^t x_j} \right) \Delta u_i^k$$

A continuación se presenta el análisis de las derivadas anteriores ya que las otras derivadas se obtienen de manera análoga.

La regla de la cadena en relación a las derivadas ${}^t x_1, {}^t x_2$ para r, s se escribe como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = {}^t J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^t x_1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^t x_2} \end{bmatrix}$$

En que ${}^t J = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial r} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial {}^t x_1}{\partial s} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial s} \end{bmatrix}$

Invirtiéndolo el operador Jacobiano J , se obtendrá

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^t x_1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^t x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det {}^t J} \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_2}{\partial s} & -\frac{\partial {}^t x_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial {}^t x_1}{\partial s} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Donde el determinante del Jacobiano es

$$\det {}^t J = \frac{\partial {}^t x_1}{\partial r} \frac{\partial {}^t x_2}{\partial s} - \frac{\partial {}^t x_1}{\partial s} \frac{\partial {}^t x_2}{\partial r}$$

Y la derivada de la coordenada con respecto de r y s se obtienen de

$$\frac{\partial {}^t x_i}{\partial r} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial r} \right) {}^t x_i^k$$

Con todas las derivadas definidas se establecen las matrices de transformación de desplazamiento-deformación para los elementos.

En la Tabla 1.5.2 da las matrices requeridas para la formulación de LaGrange actualizado. En la integración numérica estas matrices son evaluadas en los puntos de integración de Gauss.

Tabla 1.5.2: Matrices usadas en la formulación de elementos bi dimensionales

Formulación de LaGrange Actualizado

1. Incrementos de deformación

$${}^t \varepsilon_{11} = {}^t u_{1,1} + \frac{1}{2} \left(({}^t u_{1,1})^2 + ({}^t u_{2,1})^2 \right)$$

$${}^t \varepsilon_{22} = {}^t u_{2,2} + \frac{1}{2} \left(({}^t u_{1,2})^2 + ({}^t u_{2,2})^2 \right)$$

$${}^t \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(({}^t u_{1,2} + {}^t u_{2,1}) + \frac{1}{2} ({}^t u_{1,1} {}^t u_{1,2} + {}^t u_{2,1} {}^t u_{2,2})^2 \right)$$

$${}^t \varepsilon_{33} = \frac{u_1}{{}^t x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{{}^t x_1} \right)^2$$

Donde ${}^t u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial {}^t x_j}$

2. Matriz de transformación lineal deformación – desplazamiento

Usando ${}^t e = {}^t B_L \hat{u}$

Donde ${}^t e^T = [{}^t e_{11} \quad {}^t e_{22} \quad 2 {}^t e_{12} \quad {}^t e_{33}]$

$$\hat{u}^T = [{}^t u_1^1 \quad {}^t u_2^1 \quad {}^t u_1^2 \quad {}^t u_2^2 \dots \quad {}^t u_1^N \quad {}^t u_2^N]$$

$${}^t B_L = \begin{bmatrix} {}^t h_{1,1} & 0 & {}^t h_{2,1} & 0 & {}^t h_{3,1} & 0 & \dots & {}^t h_{N,1} & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,2} & 0 & {}^t h_{2,2} & 0 & {}^t h_{3,2} & \dots & 0 & {}^t h_{N,2} \\ {}^t h_{1,2} & {}^t h_{1,1} & {}^t h_{2,2} & {}^t h_{2,1} & {}^t h_{3,2} & {}^t h_{3,1} & \dots & {}^t h_{N,2} & {}^t h_{N,1} \\ \frac{h_1}{{}^t x_1} & 0 & \frac{h_2}{{}^t x_1} & 0 & \frac{h_3}{{}^t x_1} & 0 & \dots & \frac{h_N}{{}^t x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

Donde ${}^t h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial {}^t x_j}$ $u_j^k = {}^{t+\Delta t} u_j^k - {}^t u_j^k$; ${}^t \bar{x}_i = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial r} \right) {}^t x_i^k$; $N = \text{número de nodos}$

3. Matriz de transformación No lineal de deformación – desplazamiento

$${}^t B_{NL} = \begin{bmatrix} {}^t h_{1,1} & 0 & {}^t h_{2,1} & 0 & {}^t h_{3,1} & 0 & \dots & {}^t h_{N,1} & 0 \\ {}^t h_{1,2} & 0 & {}^t h_{2,2} & 0 & {}^t h_{3,2} & 0 & \dots & {}^t h_{N,2} & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,1} & 0 & {}^t h_{2,1} & 0 & {}^t h_{3,1} & \dots & 0 & {}^t h_{N,1} \\ 0 & {}^t h_{1,2} & 0 & {}^t h_{2,2} & 0 & {}^t h_{3,2} & \dots & 0 & {}^t h_{N,2} \\ \frac{h_1}{{}^t x_1} & 0 & \frac{h_2}{{}^t x_1} & 0 & \frac{h_3}{{}^t x_1} & 0 & \dots & \frac{h_N}{{}^t x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

4. Matriz de esfuerzos de Cauchy y vector de esfuerzos

$${}^t \tau = \begin{bmatrix} {}^t \tau_{11} & {}^t \tau_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}^t \tau_{21} & {}^t \tau_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t \tau_{11} & {}^t \tau_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t \tau_{21} & {}^t \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t \tau_{33} \end{bmatrix}; \quad {}^t \hat{\tau} = \begin{bmatrix} {}^t \tau_{11} \\ {}^t \tau_{22} \\ {}^t \tau_{12} \\ {}^t \tau_{33} \end{bmatrix}$$

1.5.2 Elementos de Cáscara

Considere un elemento de cáscara general con un número variable de nodos, q . La Figura 1.5. 3 muestra un elemento de nueve nodos, para lo cual $q=9$. Usando las coordenadas naturales r, s y t las coordenadas cartesianas de un punto en elemento con q puntos nodales son, antes y después de la deformación.

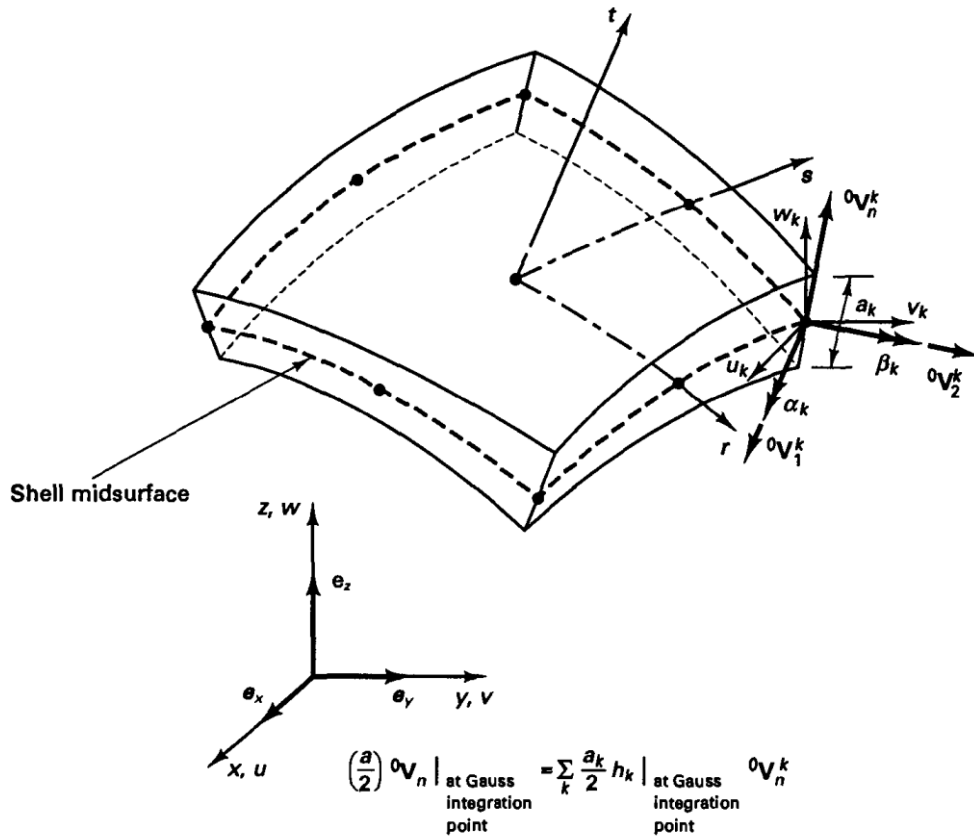


Figura 1.5. 3 Elemento cáscara de nueve nodos, definición de ejes ortogonales $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$ para las relaciones constitutivas. K.-Jurgen Bathe (1996).

$$\begin{aligned} \ell x(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k \ell x_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \ell V_{nx}^k \\ \ell y(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k \ell y_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \ell V_{ny}^k \\ \ell z(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k \ell z_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \ell V_{nz}^k \end{aligned}$$

Donde $h_k(r, s)$ son las funciones de interpolación resumidas en la figura (1.5.2) y

$\ell x, \ell y, \ell z =$ Coordenadas cartesianas de cualquier punto en el elemento

${}^\ell x_k, {}^\ell y_k, {}^\ell z_k =$ Coordenadas cartesianas de un punto nodal k

$a_k =$ Espesor de la cáscara en la dirección t en el punto nodal k

${}^\ell V_{nx}^k, {}^\ell V_{ny}^k, {}^\ell V_{nz}^k =$ Componentes del vector unitario “normal” ${}^\ell V_n^k$ en la superficie media de la cáscara en la dirección t en el punto nodal k, a este vector se le llamará el vector director en el punto nodal k.

El superíndice del lado izquierdo ${}^\ell$ denota la configuración del elemento; ${}^\ell = 0$ y 1 denota la configuración original y final del elemento cáscara. Por lo tanto, las componentes del desplazamiento son

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \Delta V_{nx}^k \\ v(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \Delta V_{ny}^k \\ w(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \Delta V_{nz}^k \end{aligned}$$

Donde ΔV_n^k almacena los incrementos en la dirección de los cosenos de ${}^0 V_n^k$,

$$\Delta V_n^k = {}^1 V_n^k - {}^0 V_n^k$$

Si consideramos un elemento plano sometido a grandes deflexiones, se observará que tan pronto el elemento plano se deflexe significativamente, la acción de la estructura es realmente la de una cáscara, ambos esfuerzo de membrana y de flexión son significativos.

En la siguiente presentación se considera la formulación no lineal del elemento cáscara. La figura 1.5.2 muestra un típico elemento de 9 nudos en su posición original y en su configuración en el tiempo t . El comportamiento de elemento se basa en las mismas asunciones que son empleadas en el análisis lineal, es decir, que las líneas rectas definidas por el vector director nodal (que, usualmente, son líneas en la configuración original, son cercanas a la normal en la mitad de la superficie de la cáscara) permanece recta durante las deformaciones del elemento y que los esfuerzos normales no

transversales se desarrollan en las direcciones del vector director. Sin embargo, la formulación no lineal dada aquí si admite desplazamientos arbitrariamente grandes y rotaciones del elemento cáscara.

Las coordenadas de un punto genérico en el elemento cáscara ahora sometido a grandes desplazamientos y rotaciones son:

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^t x_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^t V_{ni}^k \quad (1.5.1)$$

Utilizando la ecuación anterior en los tiempos 0, t y $t + \Delta t$ se tendrá

$$\begin{aligned} {}^t u_i &= {}^t x_i - {}^0 x_i \\ \Delta u_i &= {}^{t+\Delta t} x_i - {}^t x_i \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Y sustituyendo desde la ecuación (1.5.1) en las ecuaciones (1.5.2), se obtiene

$${}^t u_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^t u_i^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k ({}^t V_{ni}^k - {}^0 V_{ni}^k) \quad (1.5.3)$$

$$Y \quad \Delta u_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^t u_i^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \Delta V_{ni}^k \quad (1.5.4)$$

$$\text{Donde } \Delta V_{ni}^k = {}^{t+\Delta t} V_{ni}^k - {}^t V_{ni}^k \quad (1.5.5)$$

La ecuación (1.5.3) se emplea para evaluar los desplazamientos y las deformaciones totales de las partículas del elemento. A continuación expresaremos las componentes del vector V_{ni}^k en términos de rotación sobre dos vectores ortogonales a ${}^t V_{ni}^k$, estos dos vectores ${}^t V_1^k$ y ${}^t V_2^k$ se definen en el tiempo 0 usando.

$$\begin{aligned} {}^0 V_1^k &= \frac{e_2 \cdot {}^0 V_n^k}{\|e_2 \cdot {}^0 V_n^k\|} \\ {}^0 V_2^k &= {}^0 V_n^k \cdot {}^0 V_1^k \end{aligned}$$

Donde ${}^0 V_1^k$ es igual a e_3 si ${}^0 V_n^k$ es paralelo a e_2 . Los vectores para el tiempo t son obtenidos por un proceso de integración para el vector director en (1.5.8)

Sean α_k y β_k las rotaciones del vector director ${}^tV_n^k$ alrededor de los vectores ${}^tV_1^k$ y ${}^tV_2^k$ en la configuración en el tiempo t . Entonces se tiene aproximadamente para ángulos pequeños α_k y β_k pero incluyendo los efectos de rotación de segundo orden

$$\Delta V_n^k = -{}^tV_2^k \alpha_k + {}^tV_1^k \beta_k - \frac{1}{2}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) {}^tV_n^k \quad (1.5.6)$$

Sustituyendo (1.5.6) en (1.5.4), se obtiene

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^q h_k \Delta u_i^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \left[-{}^tV_{2i}^k \alpha_k + {}^tV_{1i}^k \beta_k - \frac{1}{2}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) {}^tV_{ni}^k \right] \quad (1.5.7)$$

La solución de elementos finitos produce las variables de punto nodal u_i^k , α_k y β_k , que a continuación pueden ser empleados para evaluar ${}^{t+\Delta t}V_n^k$

$${}^{t+\Delta t}V_n^k = {}^tV_n^k + \int_{\alpha_k, \beta_k} -{}^\tau V_2^k d\alpha_k + {}^\tau V_1^k \beta_k \quad (1.5.8)$$

Las relaciones (1.5.1) y (1.5.7) pueden ser directamente empleadas para establecer las matrices de deformación-desplazamiento del desplazamiento-base del elemento de cáscara.

El punto de partida de la formulación es el principio de trabajos virtuales escrito en términos de las componentes covariantes de deformación y componentes covariantes de esfuerzo. En la formulación de LaGrange Actualizado se tiene

$$\int_{V_t} {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{E}}_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{E}}_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}$$

Las formas incrementales se dieron en las tablas 1.4.1 y 1.4.2, pero aquí las covariantes de esfuerzo y deformación son empleadas.

El paso básico para la formulación del elemento cáscara es asumir interpolaciones de deformación y vincular estas con las obtenidas de las interpolaciones de desplazamientos.

Las interpolaciones de deformación ahora son usadas por las componentes de deformación de Green-Lagrange ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{AS}$ donde el superíndice AS denota *deformación asumida*. Estos componentes de formación asumidos son vinculados a los componentes

de deformación ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{DI}$ obtenidos desde la interpolación de desplazamientos (1.5.3) y (1.5.4).

Las componentes de la covariante de deformación ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{DI}$ calculadas desde las expresiones fundamentales usando vectores bases

$${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^{DI} = \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t} g_i \cdot {}^{t+\Delta t} g_j - {}^t g_i \cdot {}^t g_j \right)$$

Donde

$${}^{t+\Delta t} g_i = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} x}{\partial r_i}; \quad {}^t g_i = \frac{\partial {}^t x}{\partial r_i}; \quad {}^0 g_i = \frac{\partial {}^0 x}{\partial r_i}$$

Y se usa $r_1 \equiv r, r_2 \equiv s, r_3 \equiv t$, y además,

$${}^{t+\Delta t} x = {}^0 x + {}^{t+\Delta t} u; \quad {}^t x = {}^0 x + {}^t u$$

Usando las interpolaciones discutidas en este capítulo, con las componentes de deformación anteriores, la interpolación mixta de las componentes tensoriales (MITC) del elemento cáscara ahora incluye efectos de grandes desplazamientos y grandes rotaciones.

CAPITULO 2: RESULTADOS EXPERIMENTALES

2.1 RELACIONES ESFUERZO DEFORMACIÓN DEL ACERO

Los aceros de construcción tienen muchas propiedades que son usadas implícita o explícitamente en la evaluación del material para diversas aplicaciones. En general, mucha información está disponible para el acero utilizado tradicionalmente. Sin embargo, para esos mismos tipos comunes de acero es difícil obtener algunas propiedades, tales como características de deformación – endurecimiento y valores estáticos de esfuerzo de fluencia, ya que estos no son medidos rutinariamente en las pruebas de control de calidad. Estas propiedades a menudo solo se encuentran disponibles en reportes de investigación. Otras propiedades, como el módulo de elasticidad y la razón de Poisson, son difíciles de medir con precisión en una rutina de prueba de tensión, y por lo tanto los valores especificados, que estrechamente representan las medias de los valores medidos cuidadosamente descritos en la literatura, se utilizan en los cálculos de diseño.

Organizaciones como la ASTM (American Society for Testing and Materials) en Estados Unidos, se encargan de estandarizar las pruebas; es decir, establecer límites dentro de los cuales es significativo realizarlas, ya que los resultados dependen de la forma y el tamaño de las muestras, de la velocidad de aplicación de las cargas, de la temperatura y de otras variables. Estos ensayos se clasifican en destructivos y no destructivos. Dentro de los ensayos destructivos, el más importante es el ensayo de tracción.

La prueba de tracción comprende el esfuerzo de fluencia, F_y , la resistencia a la tensión máxima F_u , la medida de la ductilidad como se indica por el porcentaje de elongación y el porcentaje de reducción del área.

Los laboratorios de ingeniería estructural en los que se realizaron los ensayos que son base del presente trabajo dan resultados de los ensayos de tracción por cada espécimen, proporcionando valores del esfuerzo de fluencia, módulo de elasticidad y las curvas esfuerzo-deformación solo por cada tipo de espécimen.

En el caso de los ensayos reportados por Vitelmo V. Bertero y colaboradores (1971), fabricados con acero ASTM A36, se cuenta con los valores de esfuerzo de fluencia tanto para el ala como para el alma de cada elemento. También se cuenta con la curva esfuerzo-deformación del alma de cada tipo de espécimen.

Para los ensayos de vigas en voladizo realizados por E.P. Popov (1967), en especímenes fabricados con dos tipos de acero, ASTM A36 y ASTM A441, se cuenta con valores de esfuerzo de fluencia y módulo de elasticidad por cada espécimen y una curva de esfuerzo deformación para cada tipo de acero utilizado, ver Figuras 2.2 y 2.3.

En todos los casos, a pesar que el espécimen ensayado fue fabricado con un determinado tipo de material, el mismo espécimen presenta valores diferentes de esfuerzo de fluencia y módulo de elasticidad tanto en el alma como en el ala. Esto se debe a los efectos de los esfuerzos residuales, producto del proceso de fabricación.

2.1.1 Idealización de la curva esfuerzo-deformación

El software utilizado para el modelamiento matemático de los especímenes, ADINA, permite incorporar la curva de esfuerzo-deformación del material como bilineal o multi-lineal.

Estos modelos del material se basan en

- La condición de fluencia de von Misses
- Una regla de flujo asociada con la función de fluencia de von Mises
- La hipótesis de endurecimiento Isotrópico o cinemática, bilineal o multi lineal

Las Figuras 2.4 y 2.5 resumen algunas de las características importantes de estos modelos de material.

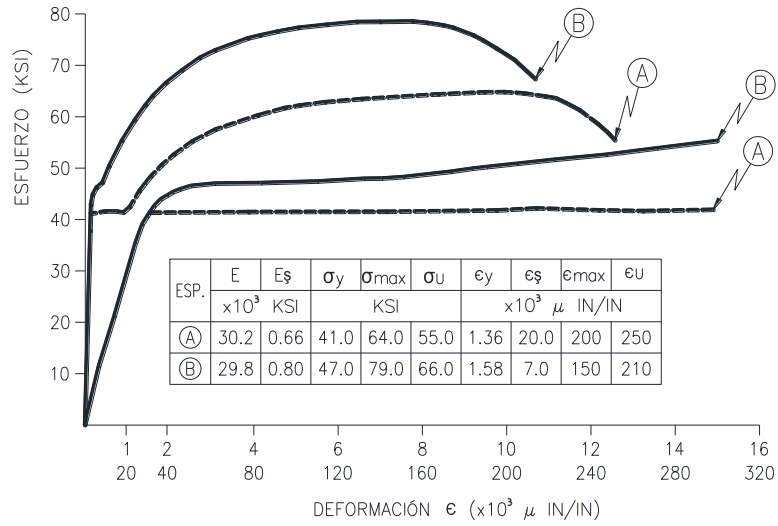


Figura 2. 1 Diagramas de esfuerzo-deformación tomadas de alma las columnas de los especímenes (EERC-71-07)

de

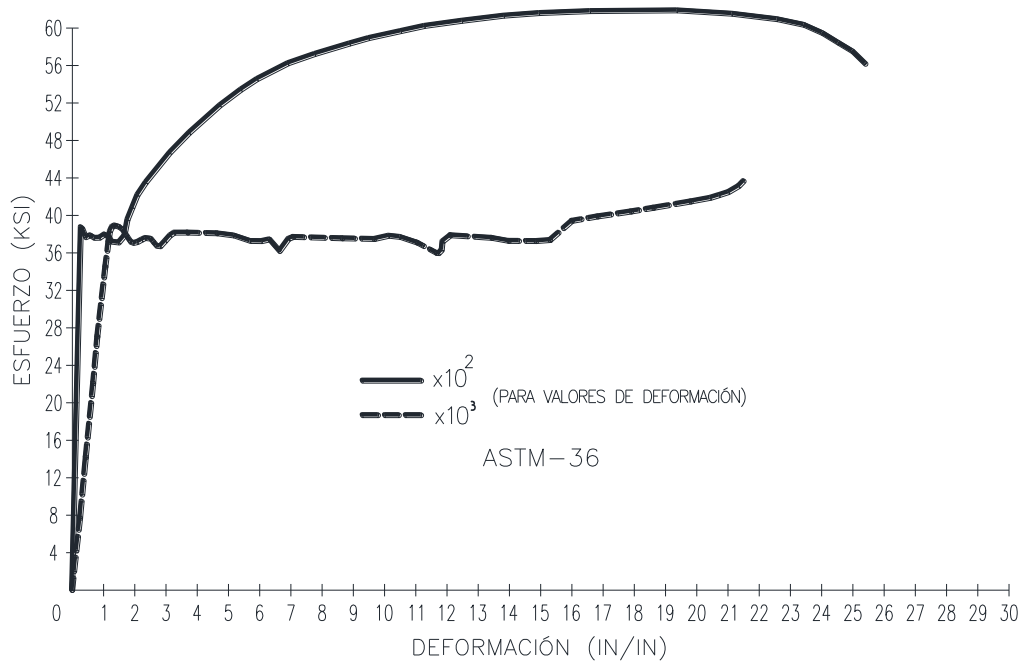


Figura 2. 2: Curva esfuerzo-deformación del material ASTM A36 (SESM 67)

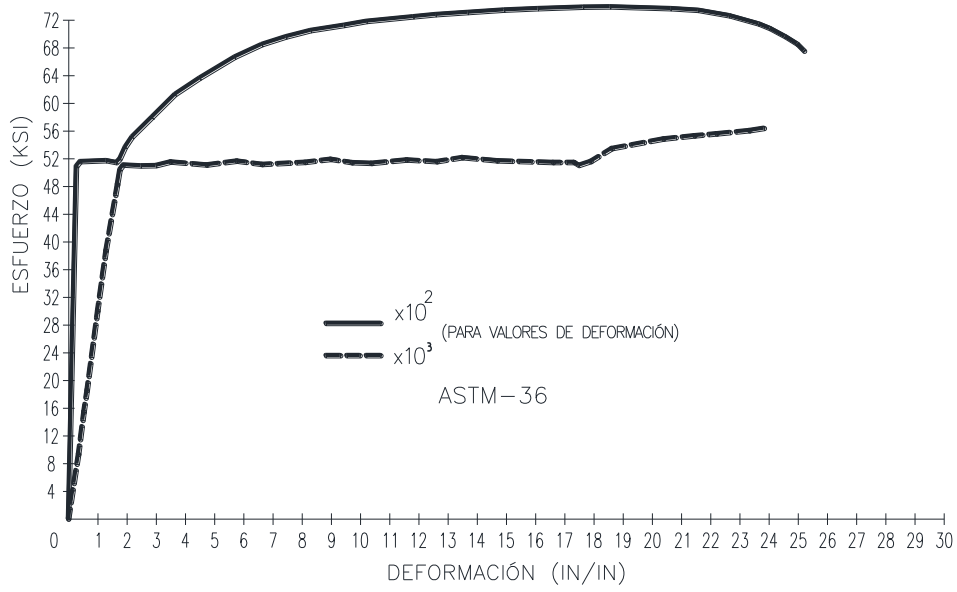


Figura 2. 3: Curva esfuerzo-deformación del material ASTM A441 (SESM 67)

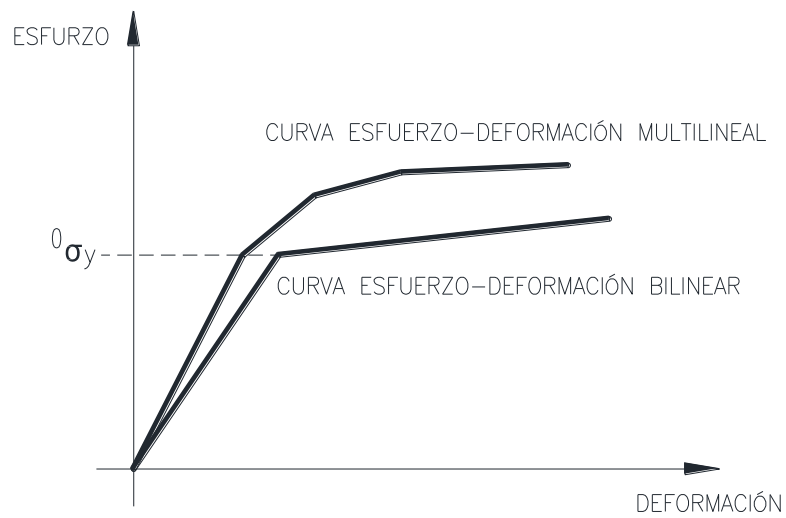


Figura 2. 4: Modelo von Mises (ADINA 5.1)

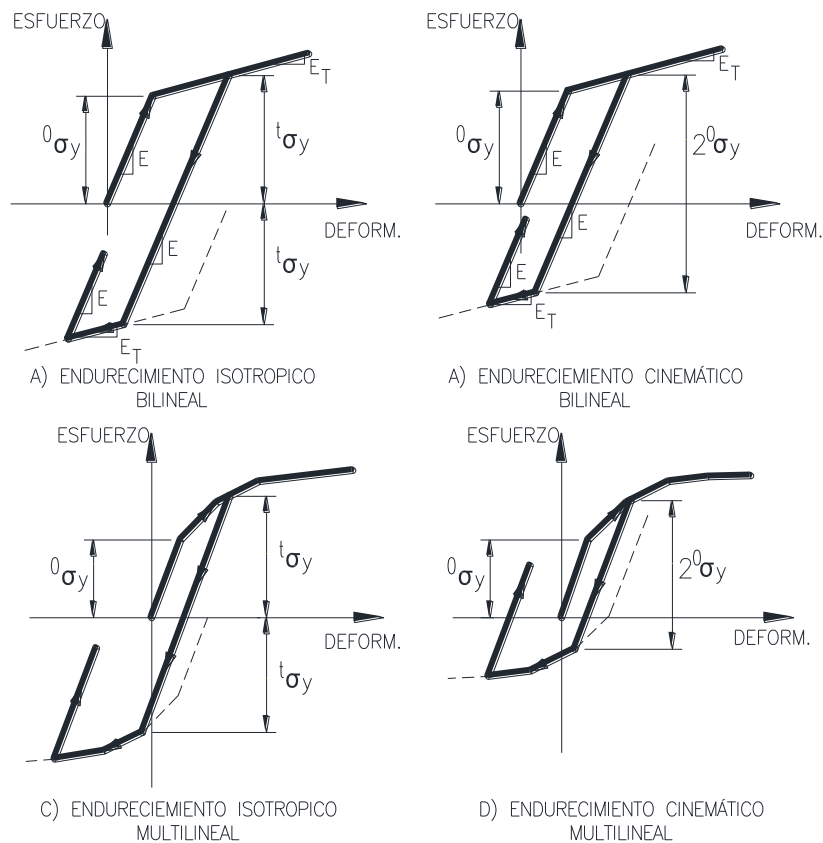


Figura 2. 5: Endurecimiento isotrópico y cinemático (ADINA 5.1)

2.2 ENSAYOS DE VIGAS EN VOLADIZO

Los resultados de ensayos de vigas en voladizo se obtuvieron del American Iron and Steel Institute (AISI) Proyecto N° 120, realizado en el laboratorio de ingeniería estructural de la Universidad de California, Berkeley.

Los especímenes fueron fabricados en cinco diferentes grupos, que se listan en la tabla 2.1

La sección de viga seleccionada para esta serie de experimentos fue W8x20, la cual se incorporó como un voladizo a una columna corta, tal como se muestra en la figura 2.6

Todas las columnas cortas fueron fabricadas con la sección WF8x48. Esto resultó en columna corta de una rigidez relativamente grande y minimizó la rotación en el apoyo de la viga en voladizo. Esto también logra el comportamiento deseado en que, para todo fin práctico, los esfuerzos en la columna corta se mantuvieron en el rango elástico durante el experimento.

Se investigaron cinco diferentes tipos de conexiones; en tres de éstas (especímenes F1, F2 y F3) fueron conectadas al ala de la columna, las otras dos W1 y W2 fueron conectados al alma de la columna.

2.2.1 Descripción de los tipos de conexiones

A. Conexión tipo F1

La conexión más simple y más extensamente usada es la F1, ver figura 2.6. La capacidad del miembro se desarrolla por medio de una soldadura bisel de penetración aplicada en ambas alas y en el alma.

B. Conexión tipo F2

En esta conexión, la transferencia de momentos se efectúa por las planchas en las alas superior e inferior de la viga, ver Figura 2.7. La plancha de fondo rectangular es soldada a la columna con una soldadura bisel de penetración total. Una vez izada la viga se suelda la plancha al ala inferior de la viga. La plancha superior es diseñada de tal manera que la capacidad de flexión de la plancha coincida con la de la sección de la viga.

C. Conexión tipo F3

La tercera conexión usa pernos de alta resistencia para la transferencia de los esfuerzos, ver figura 2.8. Las planchas superior, inferior y el alma de la viga están soldadas a la columna; en este caso solo el ángulo del alma es usado para transferir el corte.

D. Modificación en los tipos de conexiones F3 y F4

Las interrelaciones entre las conexiones básicas F2 y F3 y sus modificaciones F2A, F2B, F3A y F3B se resumen en la tabla 2.2

E. Conexión Tipo W1

La primera de las conexiones al alma de la columna es extensamente usada por su simplicidad, ver Figura 2.9. Las planchas de refuerzo están soldadas a ambas alas de la viga y al alma, mediante una soldadura a tope para las alas. La plancha del alma transfiere el corte a través de una conexión completa de soldadura de filete.

F. Conexión Tipo W2

En lugar de la conexión W1, algunas veces las planchas de refuerzo se usan con la idea de cambiar gradualmente la sección transversal de las alas de la viga para reducir los efectos de la concentración de esfuerzos. Dos especímenes de este tipo fueron ensayados: W2A y W2B. El espécimen W2A tuvo una plancha estrechada o ahusada en el ala superior y una plancha perfilada en el ala inferior como se muestra en la figura 2.10. El espécimen W2B tuvo la configuración inversa.

G. Especímenes tipo HS

Todos los especímenes anteriormente mencionados fueron fabricados con acero ASTM A36. Adicionalmente se fabricaron dos de cada uno de los tipos F1 y F2 con acero de alta resistencia ASTM A-441. El símbolo que los identifica es HS a continuación de tipo de conexión, como F1HS y F2HS. Las dimensiones y detalles para estos especímenes fueron iguales que para los de ASTM A36.

2.2.2 Datos de los ensayos de los especímenes

De toda la data de los especímenes de vigas en voladizo se escogieron las conexiones más comúnmente usadas, como son las conexiones F1 y W1, para ser modeladas y comparadas con los datos experimentales.

A continuación se presenta la información disponible de cada uno de los especímenes escogidos para el modelamiento matemático. Las dimensiones y las propiedades de las secciones de cada espécimen se muestran en las tablas 2.3 a 2.6. Las curvas de Carga versus Deformación se presentan en las figuras 2.11 a 2.14

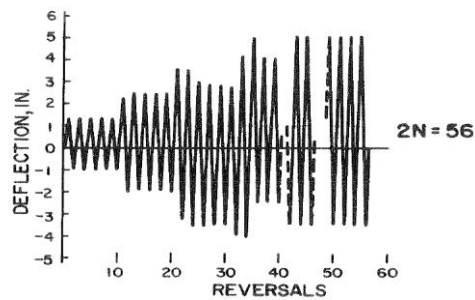
A. Especimen F1-S

Programa de carga: esta fue una prueba estática unidireccional

Observaciones del ensayo: El espécimen fue cargado y descargado tres veces durante la prueba. La prueba fue terminada después que la carga alcanzara un máximo y empezara a disminuir. La deflexión máxima registrada en la punta fue de 9.5 pulgadas. No se produjeron fracturas.

B. Espécimen F1-C2

Programa de ciclos:



Datos incluidos

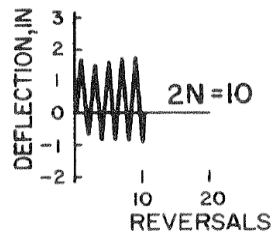
- Datos de gráfico de Carga-Control de deformación. El control de deformación fue medido en el ala superior de la viga a 5.5 pulgadas de la cara de la columna.
- Datos de gráfico de Carga-deflexión

Observaciones del ensayo: el pandeo plástico de ambas alas de la viga fue visible después del primer ciclo inelástico. Se notó una pequeña grieta en la soldadura del ala superior después de 3 ciclos. El pandeo del ala superior fue severo después de 5 ciclos y el alma empezó a pandearse con el ala superior alrededor del ciclo 7. El ala inferior y el alma mostraron igual distorsión por el ciclo 8.5. Se encontró un grieta en la parte inferior después de 15 ciclos. Similar grieta se notó en la parte superior después de 18.5 ciclos. Estas grietas se propagaron hasta que atravesó el ala inferior, causando la falla después del ciclo 22.5.

C. Espécimen W1-C1

La viga fue indirectamente conectada al alma de la columna a través de dos planchas cortas en las alas y una en el alma. Con el espécimen ensayado no hubo aparentes fallas visibles respecto a los detalles de los planos,. No hubo defectos significativos en la soldadura por medio de las inspecciones ultrasónicas.

Programa de ciclos:



Prueba de control: La deformación fue medida en el centro del ala superior de la viga, a 7.5 pulgadas de la cara del alma de la columna.

Datos incluidos:

- Gráfico de carga-control de deformación
- Gráfico de carga-deflexión

Total de energía de absorción: 129 kip-pulgada

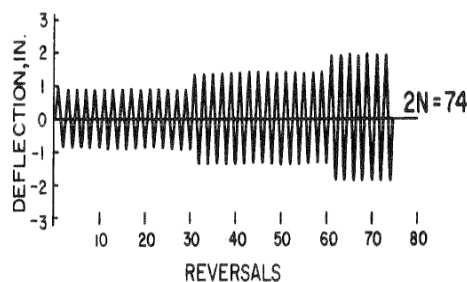
Número de ciclos completos antes de la falla: 5

Observaciones del ensayo: En el quinto ciclo la inspección mostró una profunda grieta en un borde de la soldadura del ala superior con la plancha de conexión. En la segunda mitad del mismo ciclo se pudo ver claramente una grieta en el otro extremo de la misma soldadura. La soldadura a tope del ala superior falló a inicios del sexto ciclo. La falla reveló que la soldadura a tope había penetrado sólo aproximadamente la mitad del espesor del ala.

D. Espécimen W1-C7

Este espécimen fue similar al W1-C1, excepto por lo siguiente: La única modificación con el plano de detalle fue que la placa de conexión al alma se centró al alma de la columna, con el resultado que la viga estaba fuera del centro con respecto a la línea central vertical de la columna.

Programa de ciclos:



Datos incluidos:

- Gráfico de carga-control de deformación, con deformaciones medidas en el centro del ala superior a 5.05 pulgadas de la cara del alma de la columna
- Gráfico de carga-deflexión

Total de energía de absorción: 926 kip-pulgada

Número de ciclos completos antes de la falla: 37

Observaciones del ensayo: el pandeo en el ala inferior empezó a evidenciarse en el 18avo ciclo plástico. Al final del ciclo 20 una grieta de 1/16" de longitud apareció en el borde de la soldadura superior, a la mitad del ala. Un ciclo más tarde apareció una fina grieta al final de la misma soldadura. Esto fue seguido por una grieta similar en la soldadura del ala inferior. Después del ciclo 28 y más notoriamente durante el ciclo 33 la grieta en el borde del ala superior se propagó lentamente. Aproximadamente al mismo tiempo empezó a aparecer algo de pandeo en el ala superior. La falla se produjo cuando la grieta del ala superior se propagó rápidamente dentro de la plancha de conexión.

Tabla 2. 1: Grupos de Especímenes

Grupo	Especímenes			
I	F1-S F1-C1	F2-C1	F3-C1	
II	F1-C2 F1-C3	F2-C4	F3-C5	W1-C1 W1-C4
III	F1-C4 F1-C6	F2A-C7 F2B-C8	F3A-C7 F3B-C7	
IV			W1-C7 W1-C9	W2A-C7 W2B-C10
V	F1HS-C7 F1HS-C11	F2HS-C7 F2HS-C9		

Tabla 2. 2 Modificación de las conexiones F2 y F3

Tipo	Espesor de plancha superior	Espesor de plancha inferior
F2	1/2"	3/8"
F2A	7/16"	5/16"
F2B	3/8"	1/4"
F3	1/2"	1/2"
F3A	7/16"	7/16"
F3B	3/8"	3/8"

Tabla 2. 3: Dimensiones y Propiedades del espécimen F1-S
Dimensiones de la sección W

Peralte	8.560 in
Ancho de ala Superior	5.150 in
Ancho de ala inferior	5.300 in
Espesor de ala superior	0.373 in
Espesor de ala inferior	0.344 in
Espesor del alma	0.230 in
Módulo de Elasticidad	29,800 Ksi
Esfuerzo de fluencia	38.900 Ksi

Propiedades de la sección W

Área, A	5.89 in ²
Ubicación del centroide*, Y _E	4.18 in
Momento de inercia, I	69.4 in ⁴
Módulo de sección superior, S _T	17.0 in ³
Módulo de sección inferior, S _B	16.6 in ³
Ubicación del eje neutro, Plástico*, Y _P	4.29 in
Módulo plástico, Z	19.00 in ³
Factor de forma	1.144
Momento de fluencia, M _Y	53.80 kip-ft
Momento plástico, M _P	61.57 kip-ft

* Medidos desde la cara exterior de ala inferior

Propiedades de la viga

Longitud, L	66.00 in
Rigidez elástica, P/Delta	21.59 kip/in
Deflexión en la fluencia, Delta Y	0.453 in
Carga de fluencia, P _Y	9.780 kip
Carga plástica, P _P	11.19 kip

Tabla 2. 4: Dimensiones y Propiedades del espécimen F1-C2

Dimensiones de la sección W

Peralte	8.360 in
Ancho de ala Superior	5.160 in
Ancho de ala inferior	5.160 in
Espesor de ala superior	0.375 in
Espesor de ala inferior	0.366 in
Espesor del alma	0.276 in
Módulo de Elasticidad	29,000 Ksi
Esfuerzo de fluencia	40.500 Ksi

Propiedades de la sección W

Área, A	6.01 in ²
Ubicación del centroide*, Y _E	4.21 in
Momento de inercia, I	72.4 in ⁴
Módulo de sección superior, S _T	17.4 in ³
Módulo de sección inferior, S _B	17.2 in ³
Ubicación del eje neutro, Plástico*, Y _P	4.26 in
Módulo plástico, Z	19.60 in ³
Factor de forma	1.139
Momento de fluencia, M _Y	53.06 kip-ft
Momento plástico, M _P	66.14 kip-ft

* Medidos desde la cara exterior de ala inferior

Propiedades de la viga

Longitud, L	66.00 in
Rigidez elástica, P/Delta	21.90 kip/in
Deflexión en la fluencia, Delta Y	0.482 in
Carga de fluencia, P _Y	10.56 kip
Carga plástica, P _P	12.02 kip

Tabla 2. 5: Dimensiones y Propiedades del espécimen W1-C1

Dimensiones de la sección W

Peralte	8.260 in
Ancho de ala Superior	5.170 in
Ancho de ala inferior	5.170 in
Espesor de ala superior	0.368 in
Espesor de ala inferior	0.376 in
Espesor del alma	0.280 in
Módulo de Elasticidad	29,000 Ksi
Esfuerzo de fluencia	40.500 Ksi

Propiedades de la sección W

Área, A	6.04 in ²
Ubicación del centroide*, Y_E	4.10 in
Momento de inercia, I	70.9 in ⁴
Módulo de sección superior, S_T	17.1 in ³
Módulo de sección inferior, S_B	17.3 in ³
Ubicación del eje neutro, Plástico*, Y_P	4.06 in
Módulo plástico, Z	19.40 in ³
Factor de forma	1.138
Momento de fluencia, M_Y	57.60 kip-ft
Momento plástico, M_P	65.57 kip-ft

* Medidos desde la cara exterior de ala inferior

Propiedades de la viga

Longitud, L	66.10 in
Rigidez elástica, P/Delta	21.34 kip/in
Deflexión en la fluencia, Delta Y	0.490 in
Carga de fluencia, P_Y	10.46 kip
Carga plástica, P_P	11.90 kip

Tabla 2. 6: Dimensiones y Propiedades del espécimen W1-C7

Dimensiones de la sección W

Peralte	8.180 in
Ancho de ala Superior	5.340 in
Ancho de ala inferior	5.340 in
Espesor de ala superior	0.353 in
Espesor de ala inferior	0.354 in
Espesor del alma	0.260 in
Módulo de Elasticidad	29,200 Ksi
Esfuerzo de fluencia	44.100 Ksi

Propiedades de la sección W

Área, A	5.81 in ²
Ubicación del centroide*, Y _E	4.09 in
Momento de inercia, I	68.1 in ⁴
Módulo de sección superior, S _T	16.6 in ³
Módulo de sección inferior, S _B	16.7 in ³
Ubicación del eje neutro, Plástico*, Y _P	4.08 in
Módulo plástico, Z	18.70 in ³
Factor de forma	1.126
Momento de fluencia, M _Y	61.12 kip-ft
Momento plástico, M _P	68.82 kip-ft

* Medidos desde la cara exterior de ala inferior

Propiedades de la viga

Longitud, L	66.20 in
Rigidez elástica, P/Delta	20.57 kip/in
Deflexión en la fluencia, Delta Y	0.539 in
Carga de fluencia, P _Y	11.08 kip
Carga plástica, P _P	12.48 kip

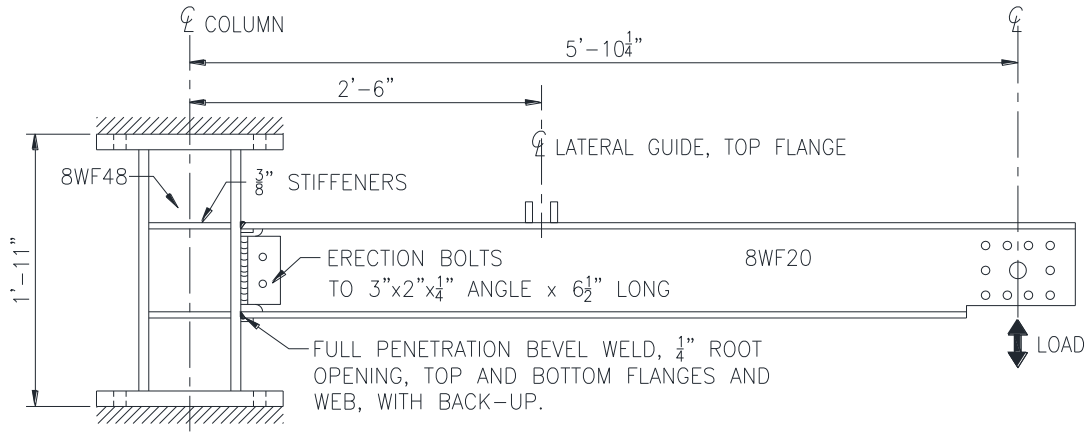


Figura 2. 6: Espécimen tipo F1 (SESM 67-30)

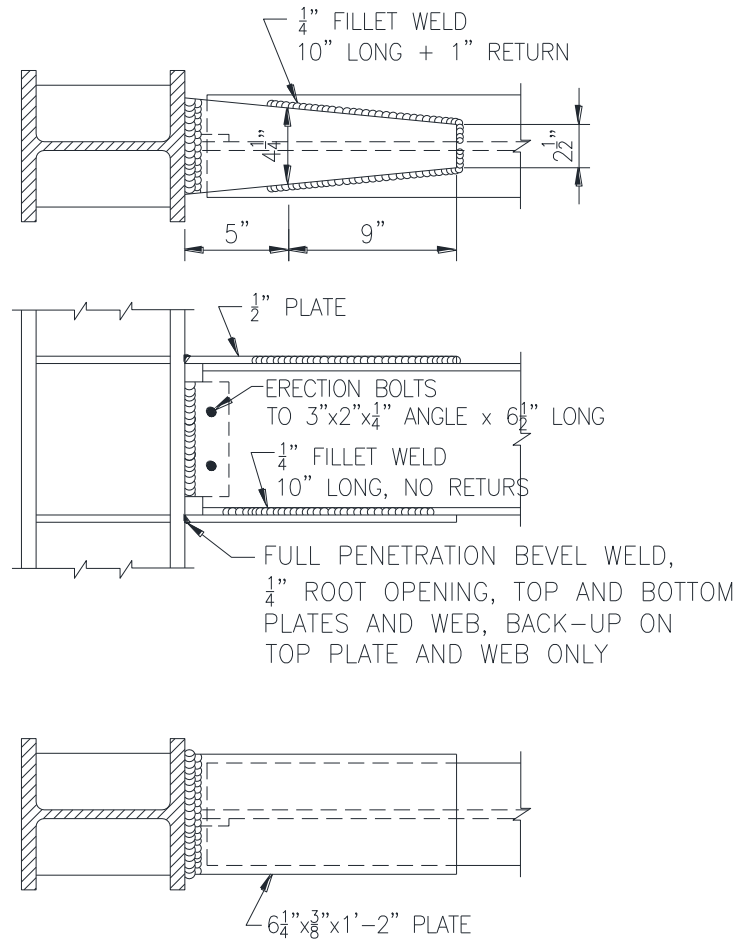


Figura 2. 7: Conexión Tipo F2 (SESM 67-30)

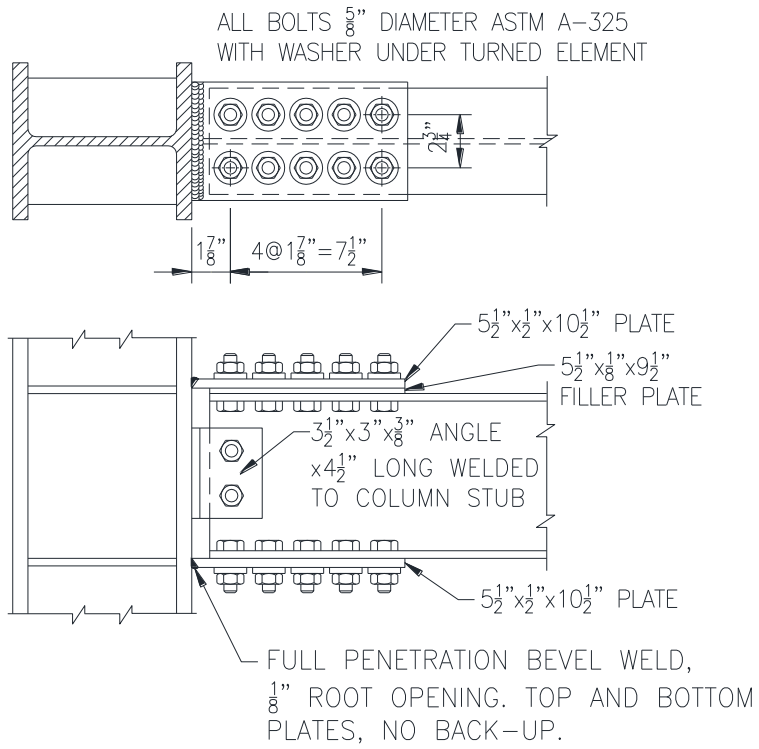


Figura 2. 8: Conexión Tipo F3 (SESM 67-30)

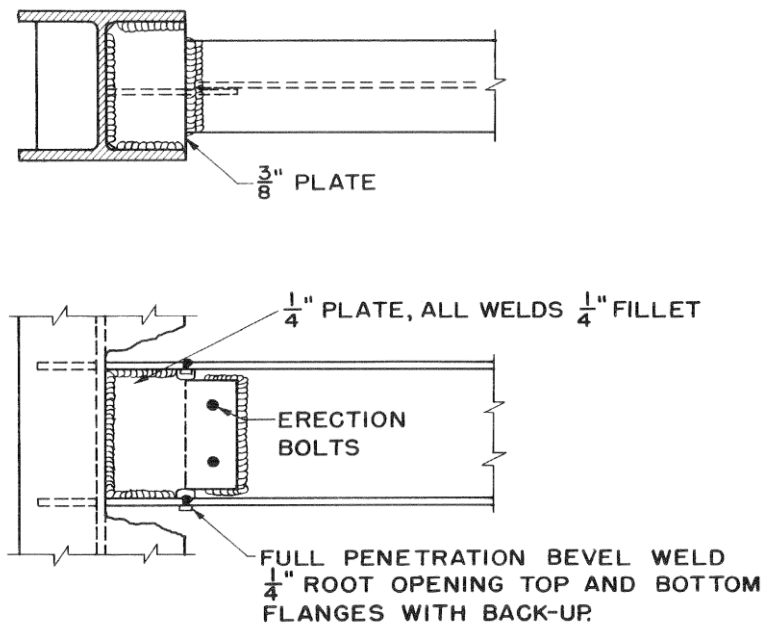


Figura 2. 9: Conexión Tipo W1

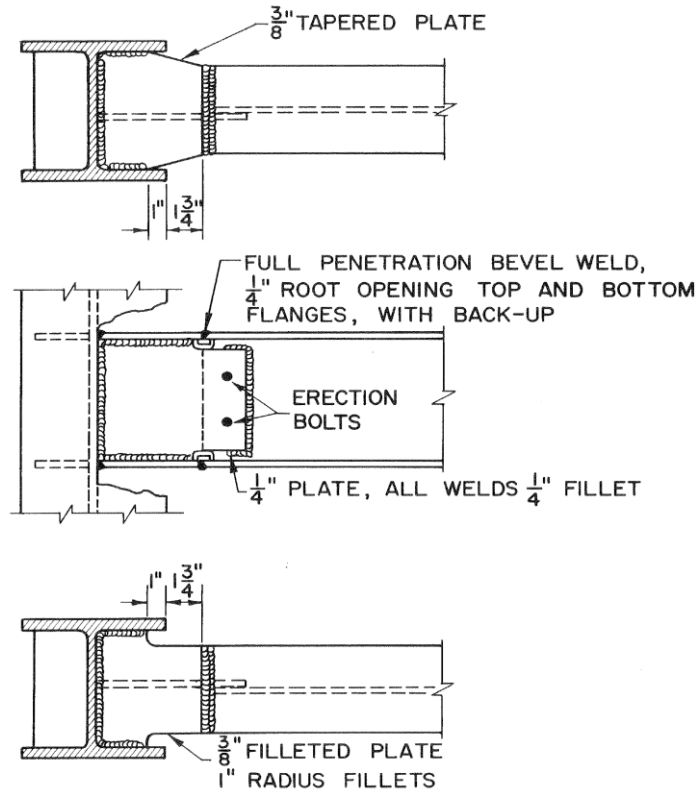


Figura 2. 10: Conexión Tipo W2A (SESM 67-30)

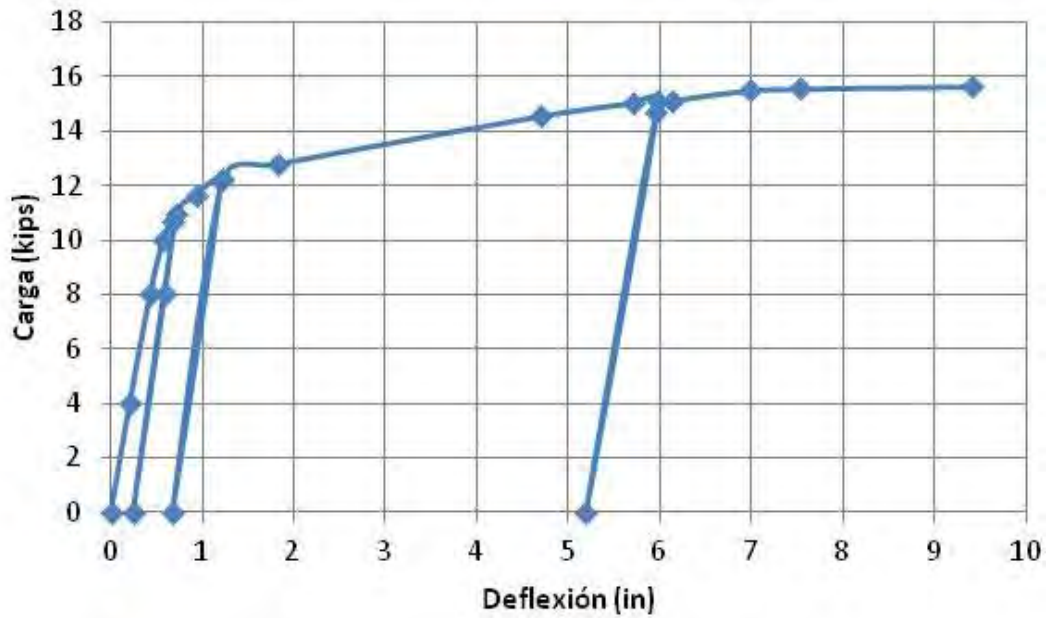


Figura 2. 11: Gráfica Carga-Deflexión Espécimen F1-S (SESM 67-30)

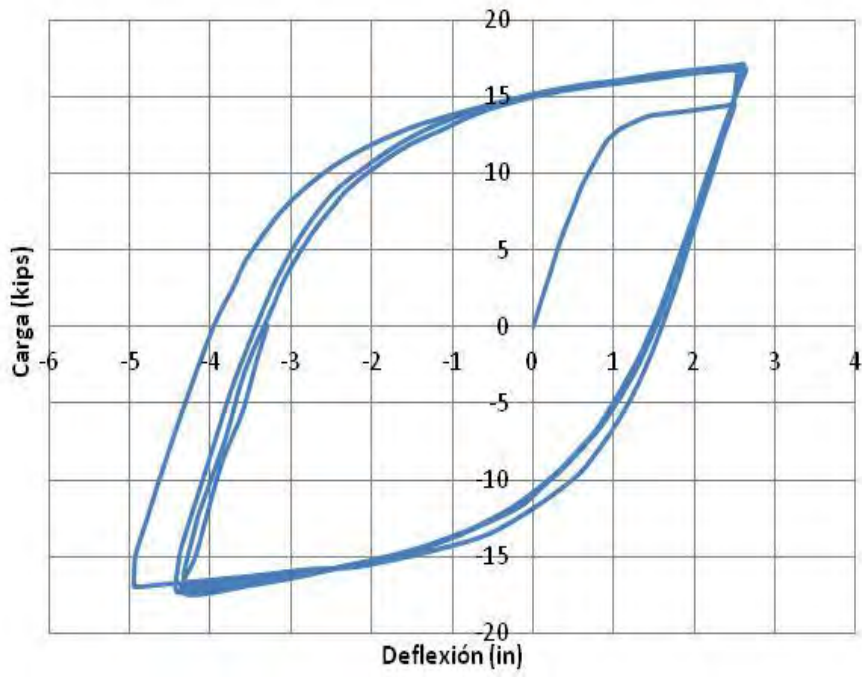


Figura 2. 12: Gráfica Carga-Deflexión Especimen F1-C2 (SESM 67-30)

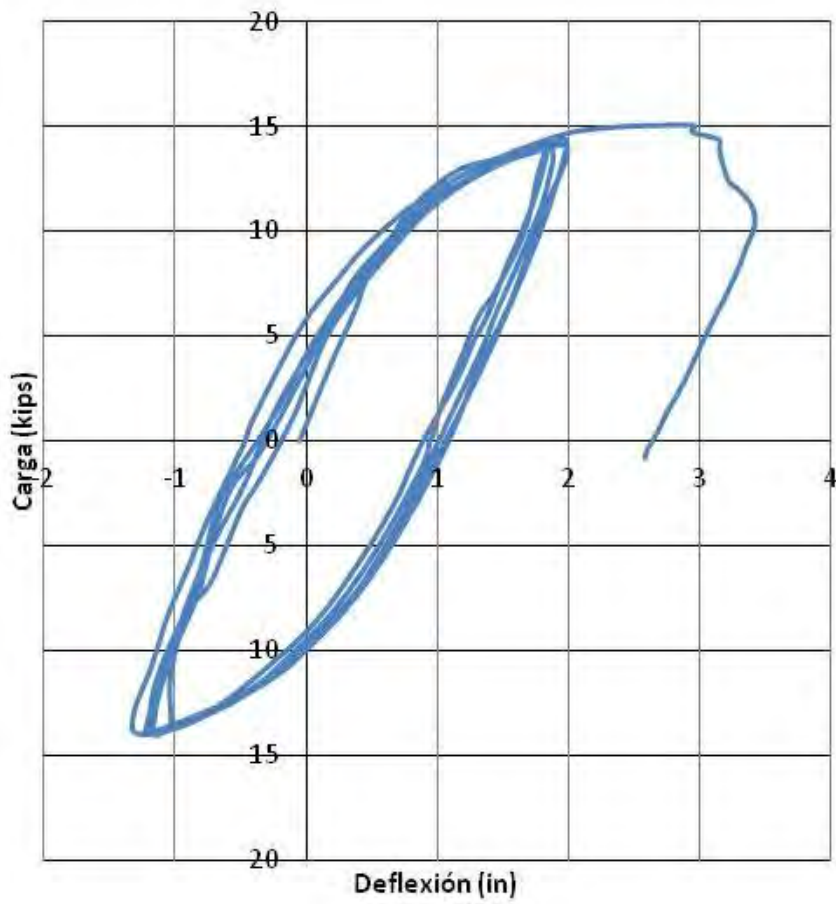


Figura 2. 13: Gráfica Carga-Deflexión Especimen W1-C1 (SESM 67-30)

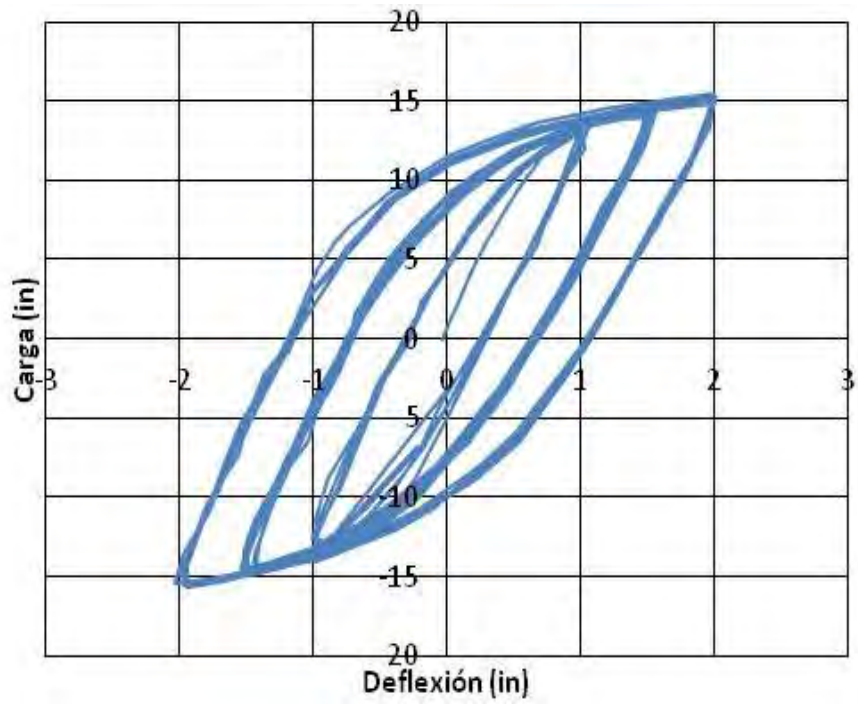


Figura 2. 14: Gráfica Carga-Deflexión Espécimen W1-C7 (SESM 67-30)

2.3 ENSAYOS DE COMPONENTES VIGA-COLUMNA

La data de los ensayos de componentes Viga Columna se encuentra en los reportes EERC-71-07 y EERC-73-27 del Centro de Investigaciones de Ingeniería Sísmica de la Universidad de California, Berkely.

2.3.1 Diseño de especímenes

Los especímenes fueron seleccionados para simular un sub ensamblaje de una estructura real, a la que se refieren como prototipo.

Dos sub-ensamblajes fueron seleccionados y luego reducidos a escala en una relación adecuada, tal que los especímenes pudieran ser fabricados usando secciones roladas estándar y todavía seguir con la similitud del modelo real.

El prototipo seleccionado en el estudio fue un edificio de oficinas de 20 pisos y cuatro vanos, ver figura 2.15, el cual fue diseñado con la norma ASD y siguiendo los requerimientos generales del UBC y las especificaciones de la AISC. Las secciones se seleccionaron como se ilustra en la figura 2.16.

Los especímenes se obtuvieron considerando un factor de escala adecuado (λ), que fue determinado por varios intentos para seguir con la similitud del modelo real para todos los parámetros tan cerca como fuera posible y para usar solo secciones roladas estándar. Esto llevó a los factores de escala y secciones como se ilustra en las tablas 2.7 a 2.10. Todas las propiedades de las secciones son valores de manuales y la capacidad de los momentos se basan en $\sigma_y = 36$ Ksi. Las mediciones de las dimensiones de las secciones y las capacidades de momento obtenidos experimentalmente se listan en el apéndice B, las tablas B1 a B6 del reporte EERC 71-07.

En total se ensayaron ocho especímenes, cuatro del tipo A y cuatro del tipo B; estos fueron fabricados en dos series de ensayos.

Serie 1: Especímenes A1, A2, B1 y B2, reporte EECR-71-07

Serie 2: Especímenes A3, A4, B3 y B4, reporte EECR-73-27

Los especímenes de la primera serie A1, A2, B1 y B2 se muestran en la figura 2.17. Las vigas se soldaron directamente a las alas de la columna, con soldadura de penetración total. Mientras que el clip de montaje sirvió de respaldo para la soldadura a lo largo del alma de la viga.

Para la segunda serie de ensayos los especímenes A3 y A4 fueron reforzados en la zona del panel (zona de confluencia de vigas y columna) con una doble plancha para investigar los efectos del punto de reforzamiento en esfuerzo, rigidez, y energía de disipación del sub ensamblaje.

En el espécimen A3, la zona del panel fue reforzada con una plancha de $\frac{1}{4}$ ", soldada con soldadura de filete a las alas de la columna y con refuerzos horizontales como se muestra en la figura 2.18. En el espécimen A4 la zona del panel fue reforzada con planchas verticales de $\frac{1}{4}$ " a ambos lados del alma de la columna, formando una sección tipo cajón, como se muestra en la figura 2.19.

Para los especímenes B3 y B4 las vigas fueron diseñadas para la misma capacidad de momento que las usadas en los especímenes B1 y B2, pero con una menor relación b/t (ancho / espesor de las alas) la cual fue de 15.4. Esto se logró al tomar vigas de menor peralte pero más pesadas, con las alas de la viga cortadas para ajustarlas a la exigencia del momento de las anteriores.

En el espécimen B3 una W12x27 fue escogida con un b/t de 11.7, y en el espécimen B4 se usó una W10x29 con un b/t de 10.3. Los detalles de los especímenes B3 y B4 se muestran en la figura 2.20.

2.3.2 Ensayo de los especímenes

Las características generales del aparato de pruebas con un espécimen instalado en ella se muestran en la figura 2.21. Este aparato consiste en un pórtico de acero, los dispositivos de carga e instrumentación para las medidas de carga, desplazamientos y deformaciones.

Primero, el espécimen fue suspendido desde el travesaño a través de pernos en la parte superior de la columna. Después se ajustaron las vigas en los extremos sobre los rieles, permitiendo rotación, movimiento horizontal pero no vertical. Por medio de gatas hidráulicas, podía aplicarse a la columna una carga axial de hasta 600 kip, simultáneamente con cargas de hasta 40 Kip sobre cada una de las vigas.

En cada experimento se aplicaron primero las cargas de gravedad P, G_1, G_2 como se indica en la figura 2.22, y se mantuvieron constantes a través de toda la prueba. La carga axial sobre la columna P fue de 86 kip para el espécimen A y de 339.2 para el espécimen B; la carga de gravedad de las vigas G_1, G_2 , fueron de 12.05 kip para A y 11.83 kip para B. La carga horizontal H, aplicada en el extremo inferior de la columna, varió de acuerdo a la historia de carga preseleccionada. En esta serie de ensayos, los ciclos asimétricos de carga se aplicaron en forma similar a lo esperado en un problema de colapso de tipo incremental. Los especímenes fueron cargados monotónicamente hasta que ocurrieron grandes deformaciones inelásticas, proporcionando así toda la información necesaria para la carga monotónica. Los programas de carga para los especímenes se muestran en las figuras 2.23 a 2.26.

2.3.3 Resultados experimentales

Los datos obtenidos de todos los especímenes se presentan a continuación en tablas y gráficos. El número de ciclos llevados a cabo, los valores picos de la carga horizontal H y su correspondiente desplazamiento δ , así como los puntos característicos en la historia de carga son indicados en las figuras 2.23 a 2.26.

Diagramas de histéresis

Los diagramas de histéresis que caracterizan el comportamiento general del espécimen, descritos por la carga horizontal H versus el desplazamiento de la columna correspondiente δ , se presentan en las figuras 2.27 a 2.34.

Tablas de resultados de pruebas

Los principales resultados experimentales para los puntos más significativos de la historia de carga se presentan desde la tabla 2.11 a la 2.18 de todos los especímenes A y B.

Tabla 2. 7: Propiedades de las secciones de Prototipos y Especímenes A1 y A2 (EERC-71-07)

	Columna				Vigas			
	Prototipo 14WF68	Espécimen 8WF24	λ ideal	λ actual	Prototipo 18WF45	Espécimen 10B15	λ ideal	λ actual
b (in)	10.04	5.82*	1.75	1.73	7.48	4	1.75	1.87
d (in)	14.06	7.93	1.75	1.77	17.86	10	1.75	1.79
t ^w (in)	0.418	0.245	1.75	1.71	0.335	0.23	1.75	1.46
t ^f (in)	0.718	0.398	1.75	1.8	0.499	0.269	1.75	1.85
A (in ²)	20	6.52	3.06	3.07	13.24	4.4	3.06	3.01
I _x (in ⁴)	724.1	74.8	9.38	9.67	70.45	68.8	9.38	10.23
I _y (in ⁴)	121.2	13.07	9.38	9.28	31.9	2.79	9.38	11.42
S _x (in ³)	103	18.86	5.36	5.46	78.9	13.8	5.36	5.73
S _y (in ³)	24.1	4.49	5.36	5.36	8.5	1.39	5.36	6.12
R _x (in)	6.02	3.39	1.75	1.78	7.3	3.95	1.75	1.85
R _y (in)	2.46	1.42	1.75	1.73	1.55	0.8	1.75	1.94
b/t ^f	14	14.6	1	0.96	15	14.9	1	1.01
Rigidizador horizontal	7/16x3 1/2"	1/4x2	1.75	1.75				
My (kip-in)					2840	495	5.36	
Mp (kip-in)					3225	576	5.36	
P/Py	0.365	0.365	1	1				
Myc (kip-in)	2355	432	5.36	5.46				
Mpc (kip-in)	3060	560	5.36	5.47				

Tabla 2. 8: Propiedades de las secciones de Prototipos y Especímenes B1 y B2 (EERC-71-07)

	Columna				Vigas			
	Prototipo 14WF228	Especimen 8WF67	λ ideal	λ actual	Prototipo 18WF68	Especimen 14B22	λ ideal	λ actual
b (in)	15.87	8.29	1.8	1.91	8.96	5	1.8	1.79
d (in)	16	9	1.8	1.78	23.71	13.72	1.8	1.73
t ^w (in)	1.045	0.575	1.8	1.82	0.416	0.23	1.8	1.81
t ^f (in)	1.688	0.933	1.8	1.81	0.582	0.335	1.8	1.74
A (in ²)	67.06	19.7	3.24	3.4	20	6.47	3.24	3.1
I _x (in ⁴)	2942.4	271.8	10.5	10.83	1814.5	197.4	10.5	9.2
I _y (in ⁴)	1124.8	88.6	10.5	12.68	63.8	6.4	10.5	9.97
S _x (in ³)	367.8	60.4	5.83	6.07	153.1	28.8	5.83	5.32
S _y (in ³)	141.8	21.4	5.83	6.63	14.2	2.56	5.83	5.54
R _x (in)	6.62	3.71	1.8	1.79	9.53	5.52	1.8	1.73
R _y (in)	4.1	2.12	1.8	1.93	1.79	0.99	1.8	1.81
b/tf	9.4	8.9	1	1.05	15.4	14.9	1	1.03
Rigidizador horizontal	ninguno	ninguno						
M _y (kip-in)					5510	1036	5.83	5.32
M _p (kip-in)					6320	1188	5.83	5.32
P/Py	0.48	0.48	1	1				
M _{yc} (kip-in)	6890	1135	5.83	6.07				
M _{pc} (kip-in)	9350	1550	5.83	6.03				

Tabla 2. 9: Propiedades de las secciones de Prototipos y Especímenes A3 y A4 (EERC-73-27)

(EERC-73-27)

	Prototipo *		Especímen **			
	Columnas A3 y A4	Vigas A3 y A4	Columnas		Vigas	
	W14x68	W18x45	A3 W8x24	A4 W8x24	A3 B10x15	A4 B10x15
b (in)	10.04	7.48	5.82+	5.82+	4.08	4.08
d _w (in)	14.06	17.86	7.94	7.98	10.08	10.07
t _w (in)	0.418	0.335	0.276	0.276	0.242	0.238
t _f (in)	0.718	0.499	0.382	0.385	0.28	0.273
b/t _f	14	15	15.2	15.1	14.6	14.9
A (in ²)	20	13.24	6.52	6.57	4.68	4.58
I _x (in ⁴)	724.1	70.45	72.2	74.5	74.2	72.54
I _y (in ⁴)	121.2	31.9	12.55	12.6	3.17	3.14
S _x (in ³)	103	78.9	18.45	18.67	14.7	14.4
S _y (in ³)	24.1	8.5	4.3	4.32	1.55	1.53
M _y (kip-in)		2840			590	578
M _p (kip-in)		3225			710	705
P _y			282	282		
P/P _y	0.365		0.305	0.305		
M _{yc} (kip-in)	2355		554	556		
M _{pc} (kip-in)	3060		740	741		
τ _{y web} (ksi)	20.8		25.8	25.8		
τ _{y web} (ksi)	19.3		24.7	24.7		
Unión			Refuerzo horizontal y doble plancha de 1/4 in	dos planchas de refuerzo vertical de corte de 1/4 in		

* Valores basados en los manuales y $\sigma_y=36$ ksi

** Propiedades de las secciones basados en mediciones y esfuerzos de fluencia actualizados

+ Alas recortadas para simular la sección del prototipo

Tabla 2. 10: Propiedades de las secciones de Prototipos y Especímenes B3 y B4 (EERC-73-27)

	Prototipo *			Especimen **			
	Columnas B3 y B4 W14x228	Vigas		Columnas		Vigas	
		B3 W21x73	B4 W18x85	B3 W8x24	B4 W8x24	B3 B10x15	B4 B10x15
b (in)	15.87	8.295	8.838	8.15	8.15	4.72+	4.93+
d _w (in)	16	21.24	18.32	9.1	9.09	11.98	10.26
t _w (in)	1.045	0.455	0.526	0.626	0.627	0.254	0.315
t _f (in)	1.688	0.74	0.911	0.908	0.908	0.403	0.481
b/t _f	9.4	11.2	9.7	9	9	11.7	10.2
A (in ²)	67.06	21.46	24.97	10.46	19.47	6.88	7.77
I _x (in ⁴)	2942.4	1600.3	1429.9	270.8	270.2	176.14	136.6
I _y (in ⁴)	1124.8	66.2	99.4	81.15	82.2	7	9.58
S _x (in ³)	367.8	150.7	156.1	59.5	59.4	28.2	26.62
S _y (in ³)	141.8	16	22.5	20.15	20.16	2.97	3.89
M _y (kip-in)		5430	5620			1150	1104
M _p (kip-in)		6200	6390			1320	1268
P _y	2415			827	827		
P/P _y	0.48			0.41	0.41		
M _{yc} (kip-in)	6890			1490	1490		
M _{pc} (kip-in)	9350			2080	2080		
τ _{y web} (ksi)	20.8			27.1	27.1		
τ _{y web} (ksi)	18.1			25.2	25.2		
Unión				sin refuerzo	sin refuerzo		

* Valores basados en los manuales y $\sigma_y=36\text{ksi}$

** Propiedades de las secciones basados en mediciones y esfuerzos de fluencia actualizados

+ Alas recortadas para simular la sección del prototipo

Tabla 2. 11: Resultados de prueba para espécimen A1

LP	H	δ
	kip	in
2	0.00	0.000
WL	3.65	0.456
9	3.87	0.482
13	5.14	0.730
14	-0.56	0.025
15	-5.26	-0.620
19	5.97	1.060
20	-0.43	0.240
21	-5.86	-0.590
23	5.88	1.020
25	6.71	2.290
26	-0.35	1.370
28	-8.10	-1.910
29	-0.02	-0.840
32	7.58	2.300
33	7.01	3.830
34	-0.62	2.820
35	-6.80	-4.910
38	6.37	5.100

Tabla 2. 12: Resultados de prueba para espécimen A2

LP	H	δ
	kip	in
2	0.00	0.000
WL	3.65	0.447
3	4.15	0.512
4	5.33	0.730
5	5.85	0.950
6	6.40	1.590
7	6.58	2.250
8	6.75	3.320
9	6.30	4.370
10	0.12	3.560
14	6.60	4.510
15	5.95	5.440
16	-0.40	4.630
17	-11.30	-0.160
18	0.00	1.330
19	6.50	5.230
20	6.10	5.250
21	-8.65	-4.220
22	7.45	5.200
26	-8.05	-4.850
27	9.60	0.200
28	6.40	5.460

Tabla 2. 13: Resultados de prueba para espécimen A3

LP	H	δ
	kip	in
11	0.00	0.000
12	3.57	0.404
13	5.79	0.638
16	12.55	1.910
18	13.00	3.110
19	12.60	4.310
21	11.41	6.360
22	-1.00	5.030
28	-16.41	0.100
37	11.39	6.050
39	(-11.66)	-4.810
42	(-10.00)	6.010

Tabla 2. 14: Resultados de prueba para espécimen A4

LP	H	δ
	kip	in
6	0.00	0.000
7	4.08	0.434
8	6.35	0.729
11	12.32	1.815
13	13.32	3.480
14	12.62	4.480
17	11.22	5.980
18	2.42	5.010
21	-15.30	0.040
22	9.90	5.960
26	(-9.40)	-3.910
27	11.00	4.540

Tabla 2. 15: Resultados de prueba para espécimen B1

LP	H	δ
	kip	in
2	0.00	0.000
WL	13.50	0.608
10	-11.10	-0.500
12	12.43	0.561
13	21.40	1.140
14	-0.50	0.090
15	-22.20	-1.140
18	1.30	-0.040
19	22.00	0.970
20	26.60	1.700
21	-1.10	0.380
22	-24.60	-1.770
23	1.80	-0.490
25	25.80	2.660
26	-0.90	1.350
27	-20.20	-3.510
28	3.00	-2.390
31	24.50	2.680
32	15.60	4.230

Tabla 2. 16: Resultados de prueba para espécimen B2

LP	H	δ
	kip	in
3	0.00	0.000
WL	13.50	0.599
5	11.70	0.517
7	18.80	0.875
9	23.50	1.240
10	25.40	1.570
12	27.05	2.450
13	25.60	3.230
14	23.30	3.960
15	0.90	2.960
16	23.05	4.080
17	22.25	4.460
18	1.25	3.500
19	-31.50	0.000
20	2.05	1.600
21	22.45	4.460
30	21.40	4.440
31	-32.50	0.040
32	-15.50	-4.290
33	30.10	-0.030
34	21.60	4.500

Tabla 2. 17: Resultados de prueba para espécimen B3

LP	H	δ
	kip	in
11	0.00	0.000
12	15.40	0.880
13	20.60	1.280
16	24.00	2.120
17	19.30	4.320
19	17.45	4.840
20	-31.00	0.100
22	18.20	4.850
26	-32.80	0.100
27	-19.60	-4.400
28	26.90	0.150
29	16.40	4.950

Tabla 2. 18: Resultados de prueba para espécimen B4

LP	H	δ
	kip	in
10	0.00	0.000
11	22.50	1.350
12	25.00	2.340
13	20.20	4.240
14	-24.90	0.030
21	19.70	4.360
22	-26.30	0.170
23	-14.80	-4.190
24	28.10	0.080
25	21.00	4.360
34	15.40	5.960
35	-20.50	-3.190

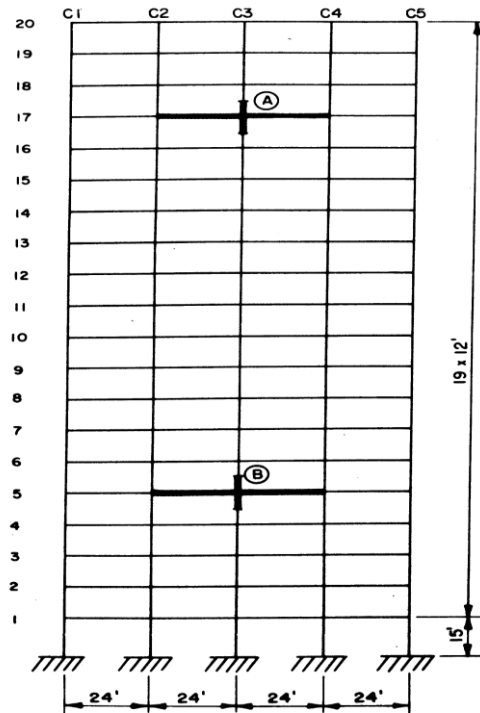


Figura 2. 15: Prototipo (EERC-71-07)

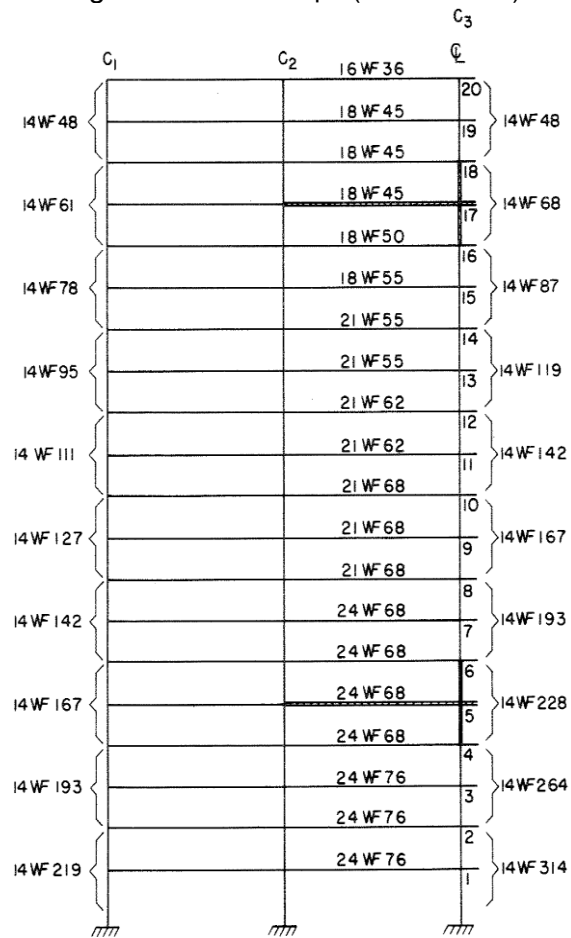


Figura 2. 16: Secciones de vigas y columnas de los prototipos (EERC-71-07)

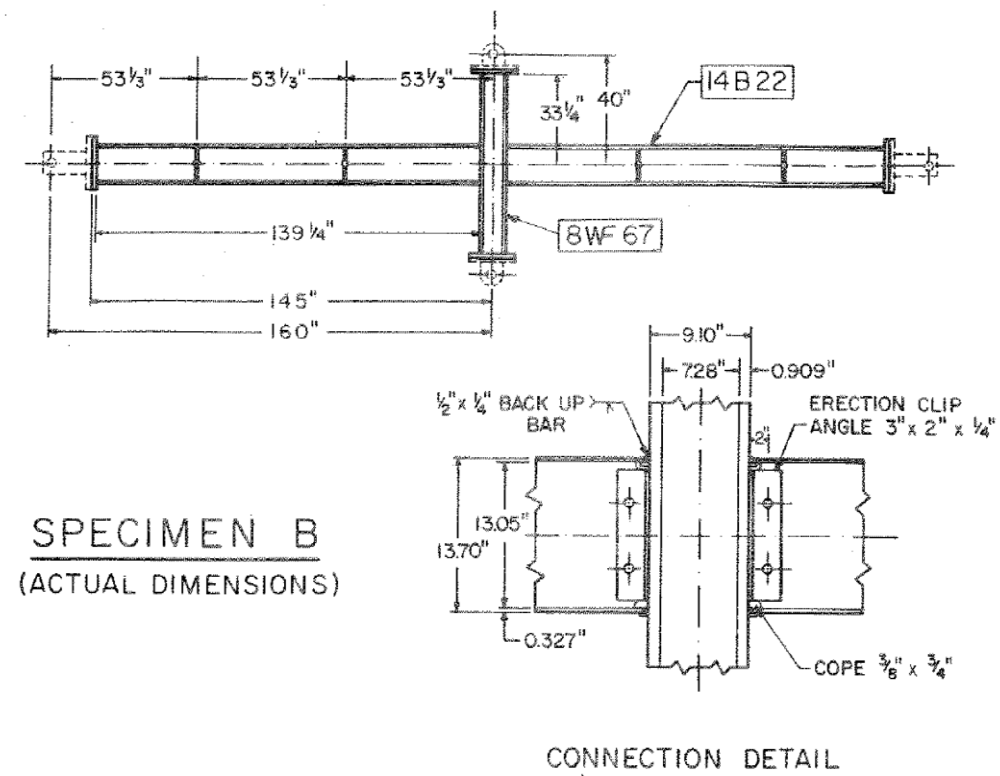
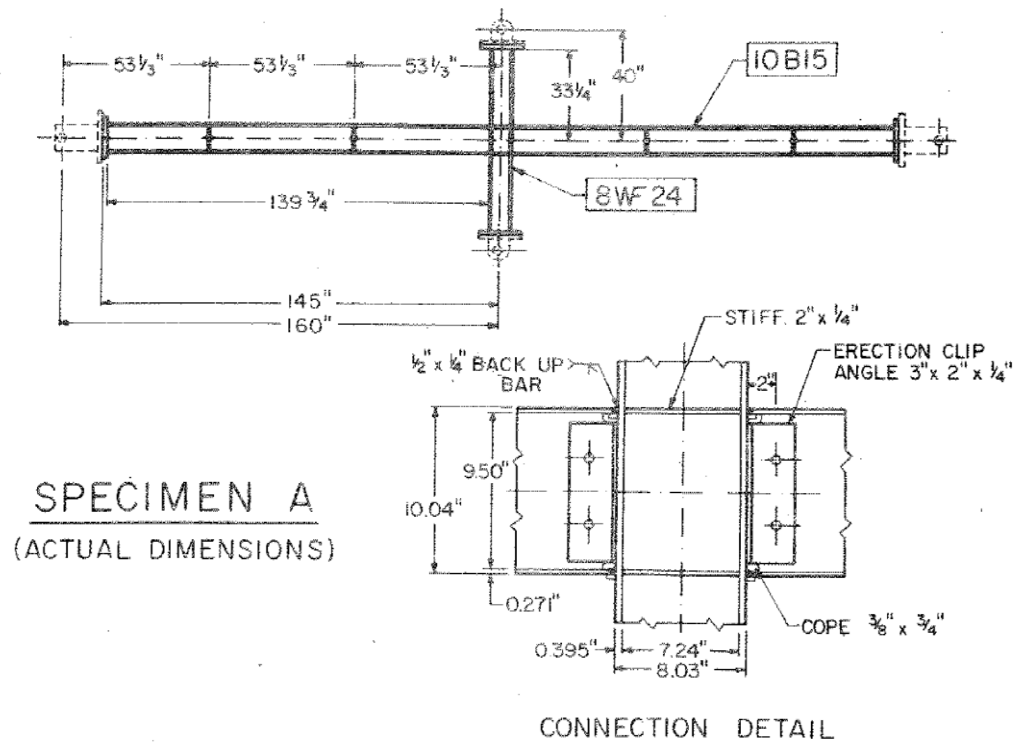


Figura 2. 17: Especímenes A1, A2, B1 y B2 (EERC-71-07)

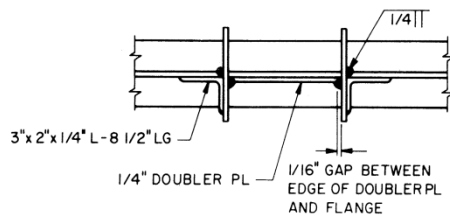
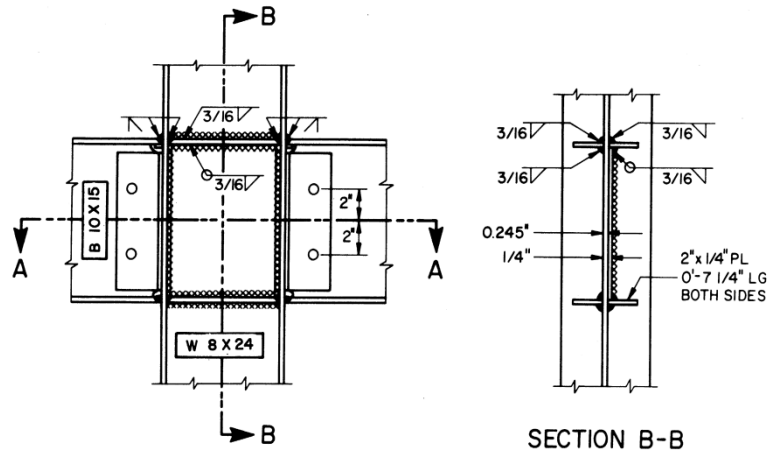


Figura 2. 18: Espécimen A3 (EERC-73-27)

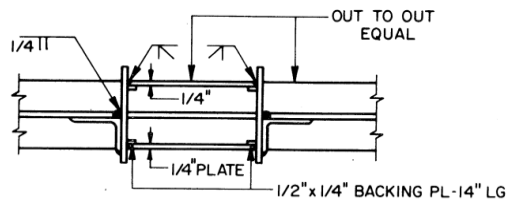
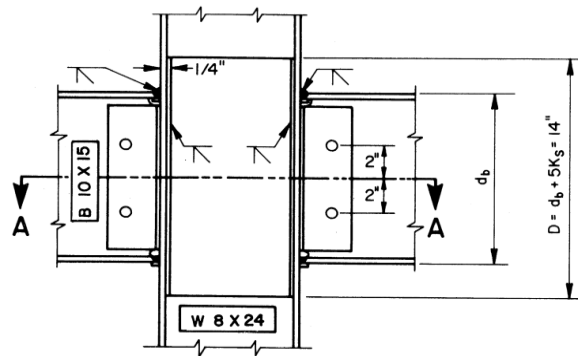
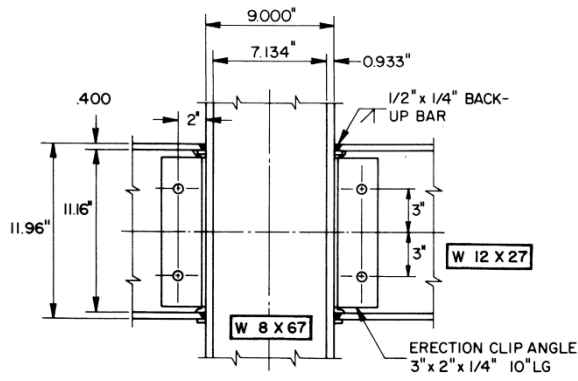
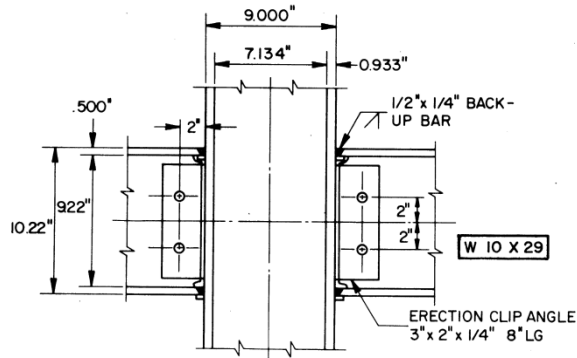


Figura 2. 19: Espécimen A4 (EERC-73-27)



SPECIMEN B-3



SPECIMEN B-4

Figura 2. 20: Especímenes B3 y B4 (EERC-73-27)

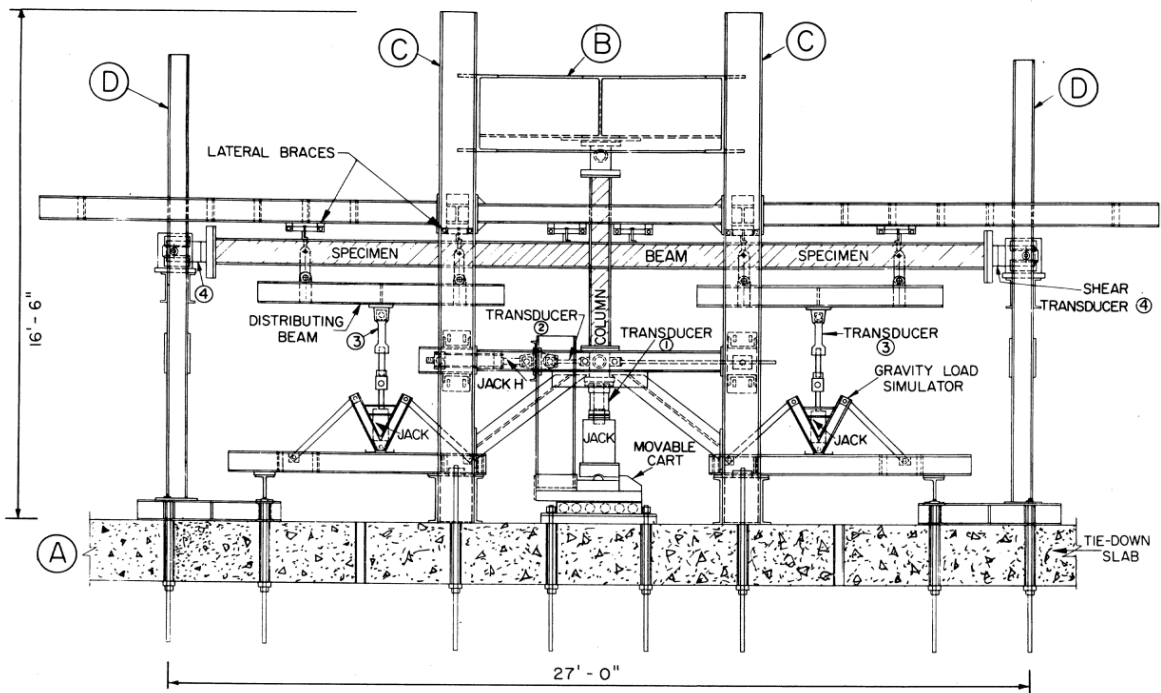


Figura 2. 21: Configuración del ensayo (EERC-73-27)

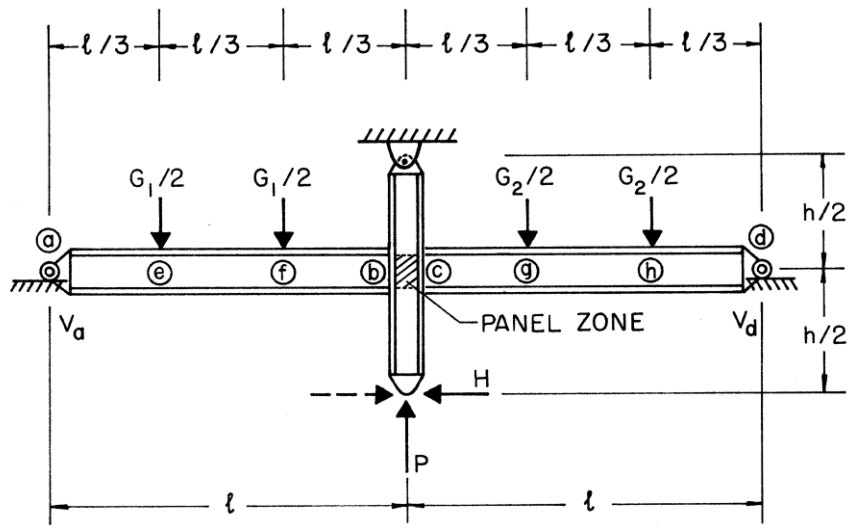


Figura 2. 22: Modelo idealizado (EERC-71-07)

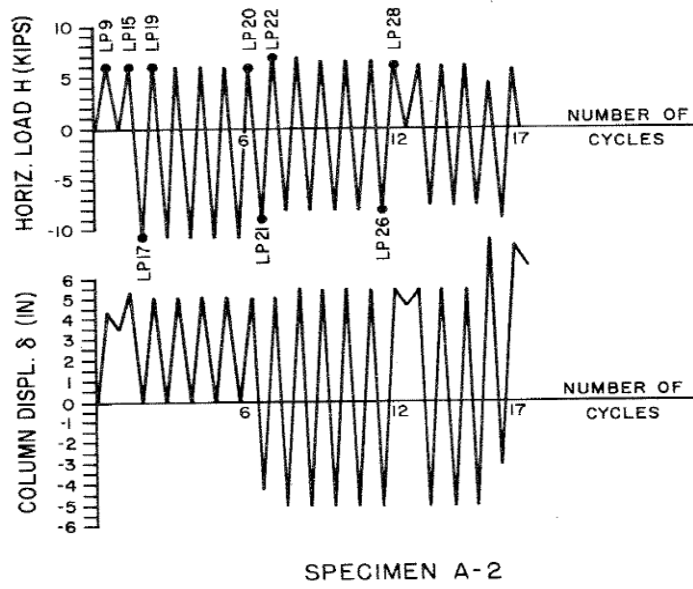
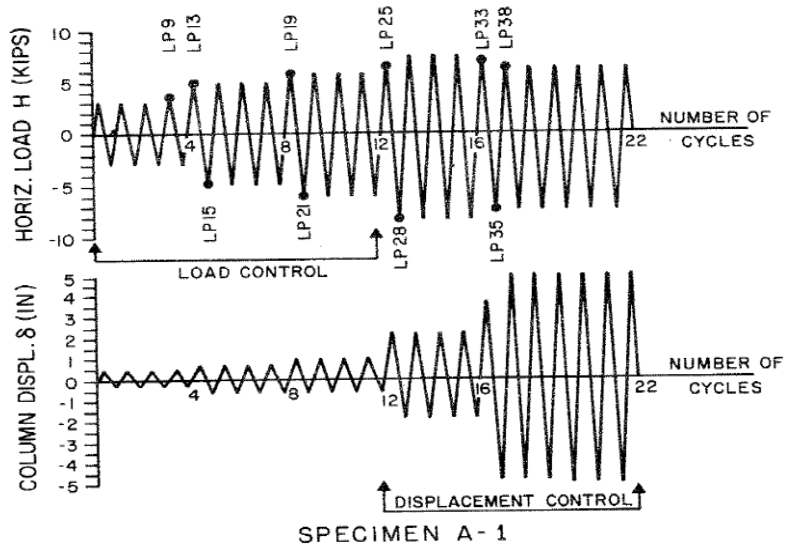
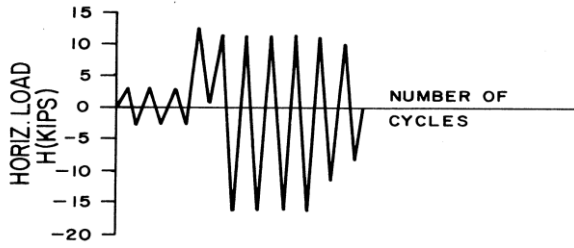
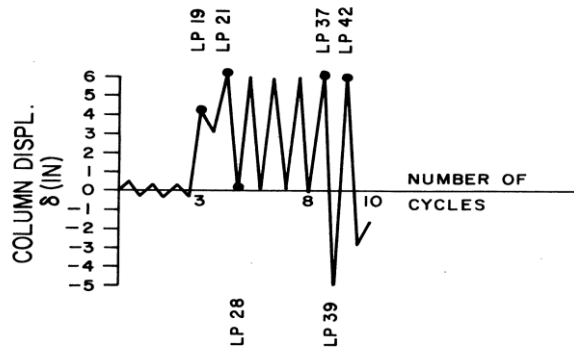
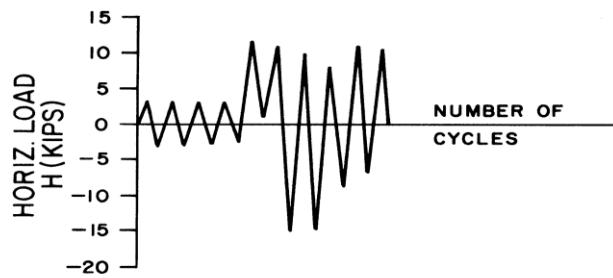
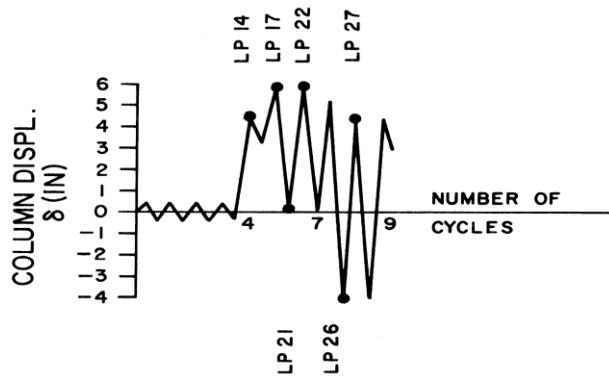


Figura 2. 23: Programas de carga para los especímenes A1 y A2 (EERC-71-07)

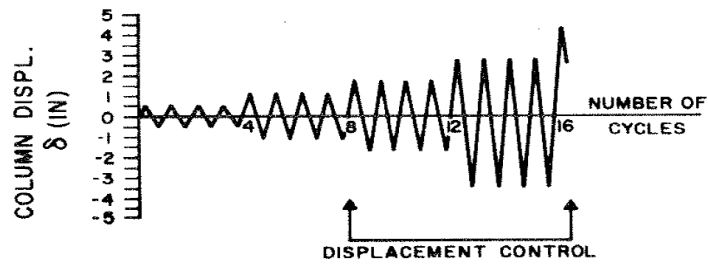
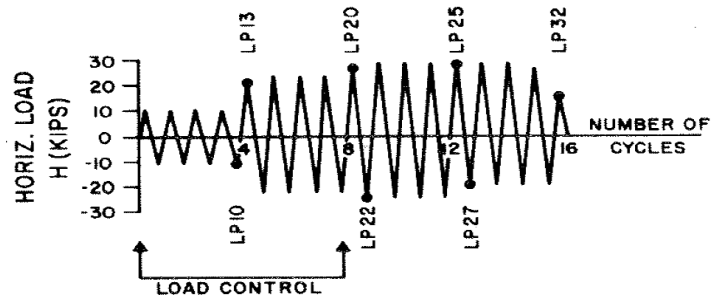


Especimen A3

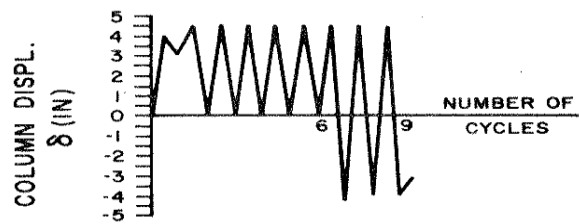
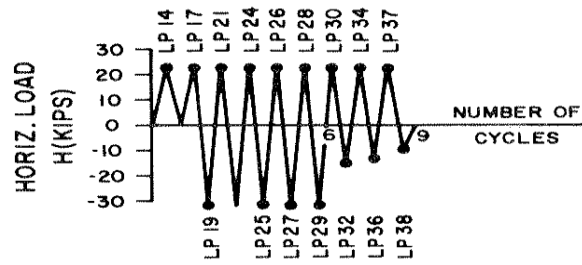


Especimen A4

Figura 2. 24: Programas de carga para los especímenes A3 y A4 (EERC-73-27)

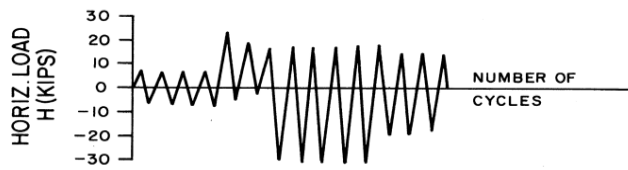
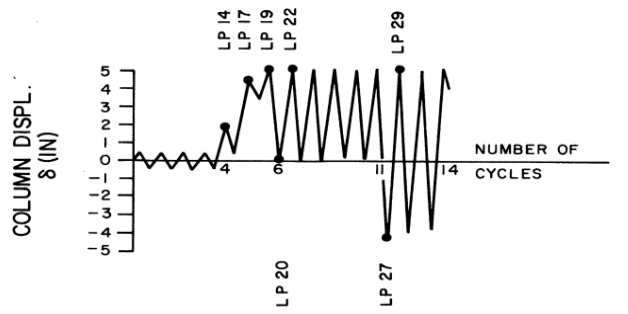


Espécimen B1

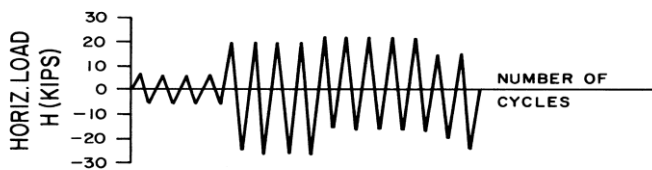
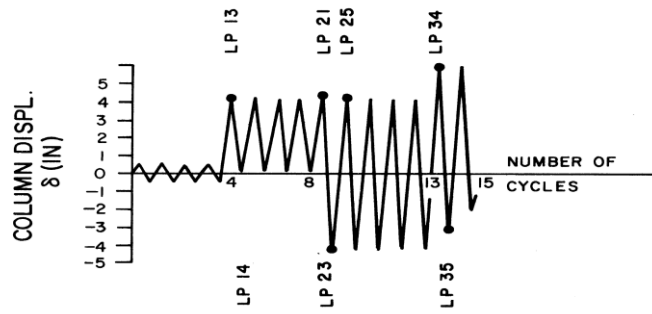


Espécimen B2

Figura 2. 25: Programas de carga para los especímenes B1 y B2 (EERC-71-07)



Especimen B3



Especimen B4

Figura 2. 26: Programas de carga para los especímenes B3 y B4 (EERC-73-27)

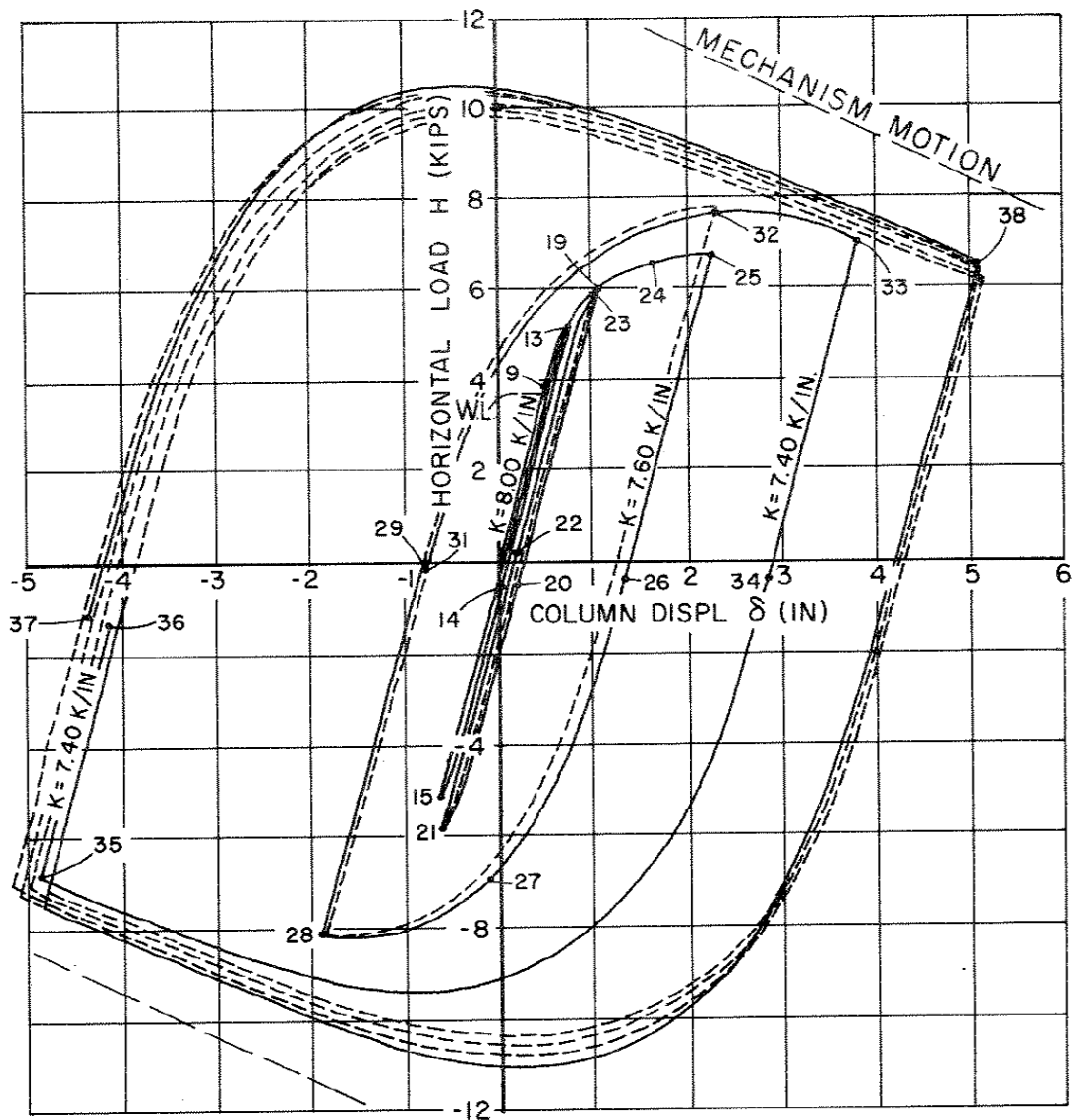


Figura 2. 27: Espécimen A1- Diagrama H vs. δ (EERC-71-07)

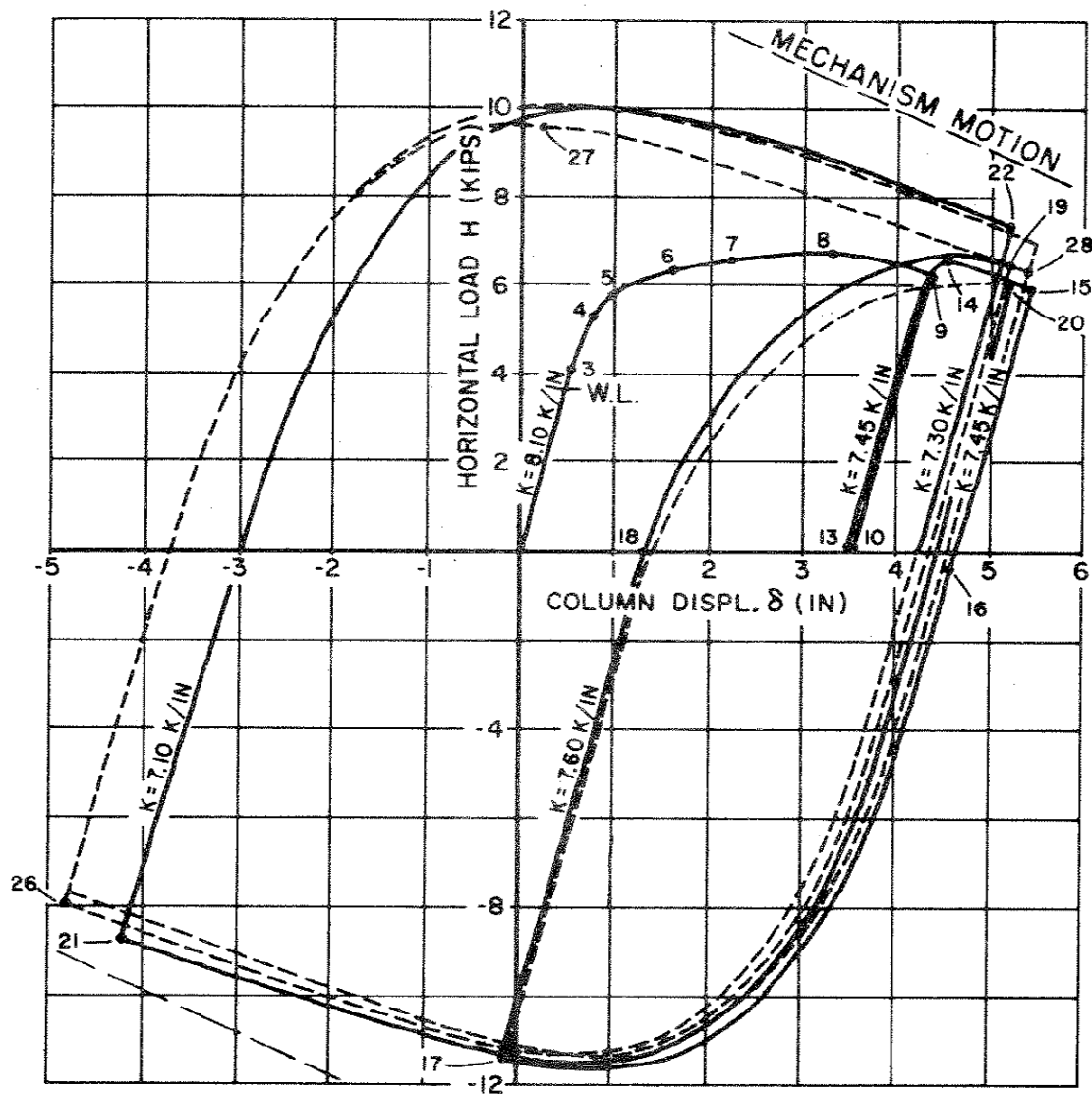


Figura 2. 28: Espécimen A2- Diagrama H vs. δ (EERC-71-07)

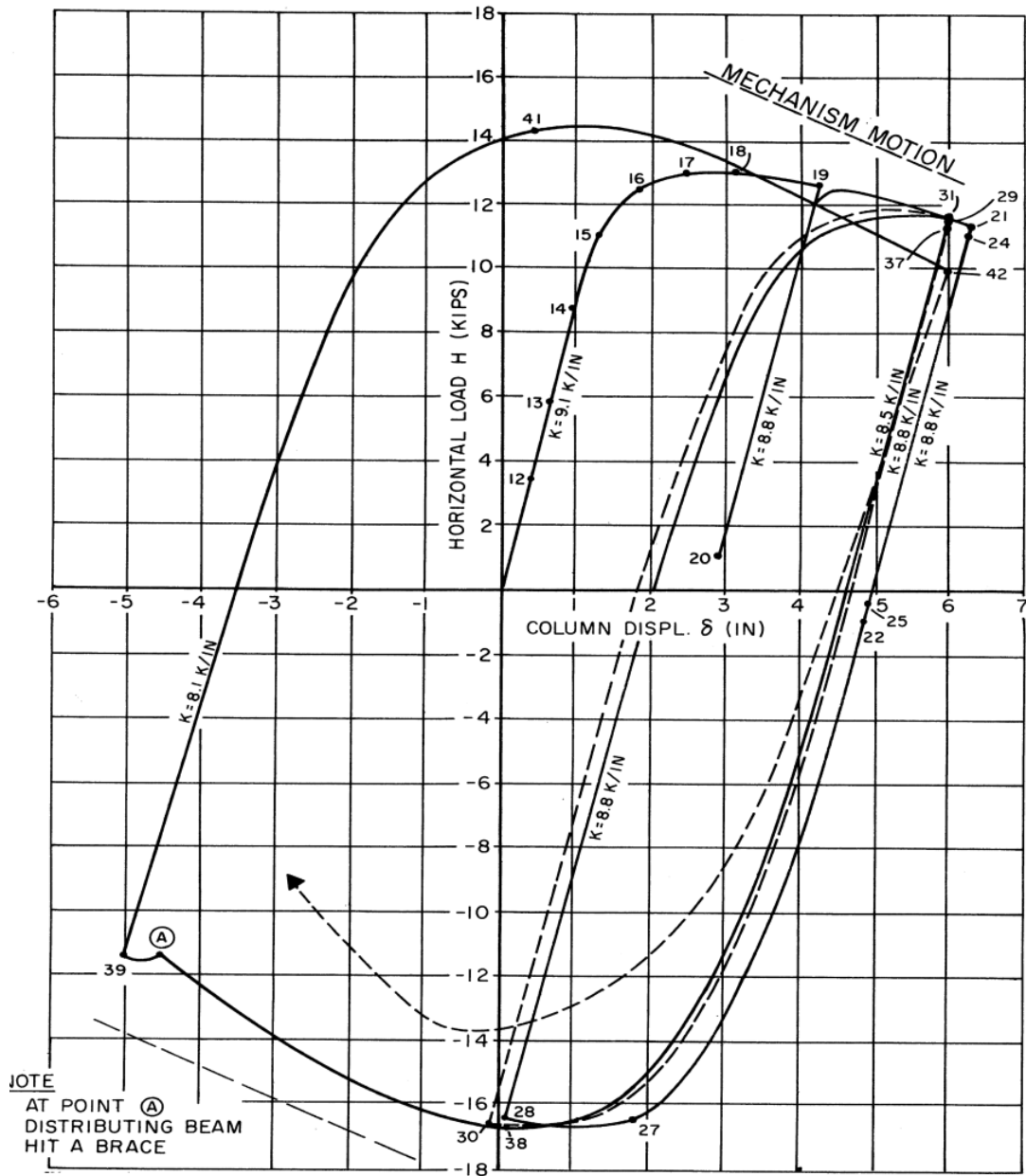


Figura 2. 29: Espécimen A3- Diagrama H vs. δ (EERC-73-27)

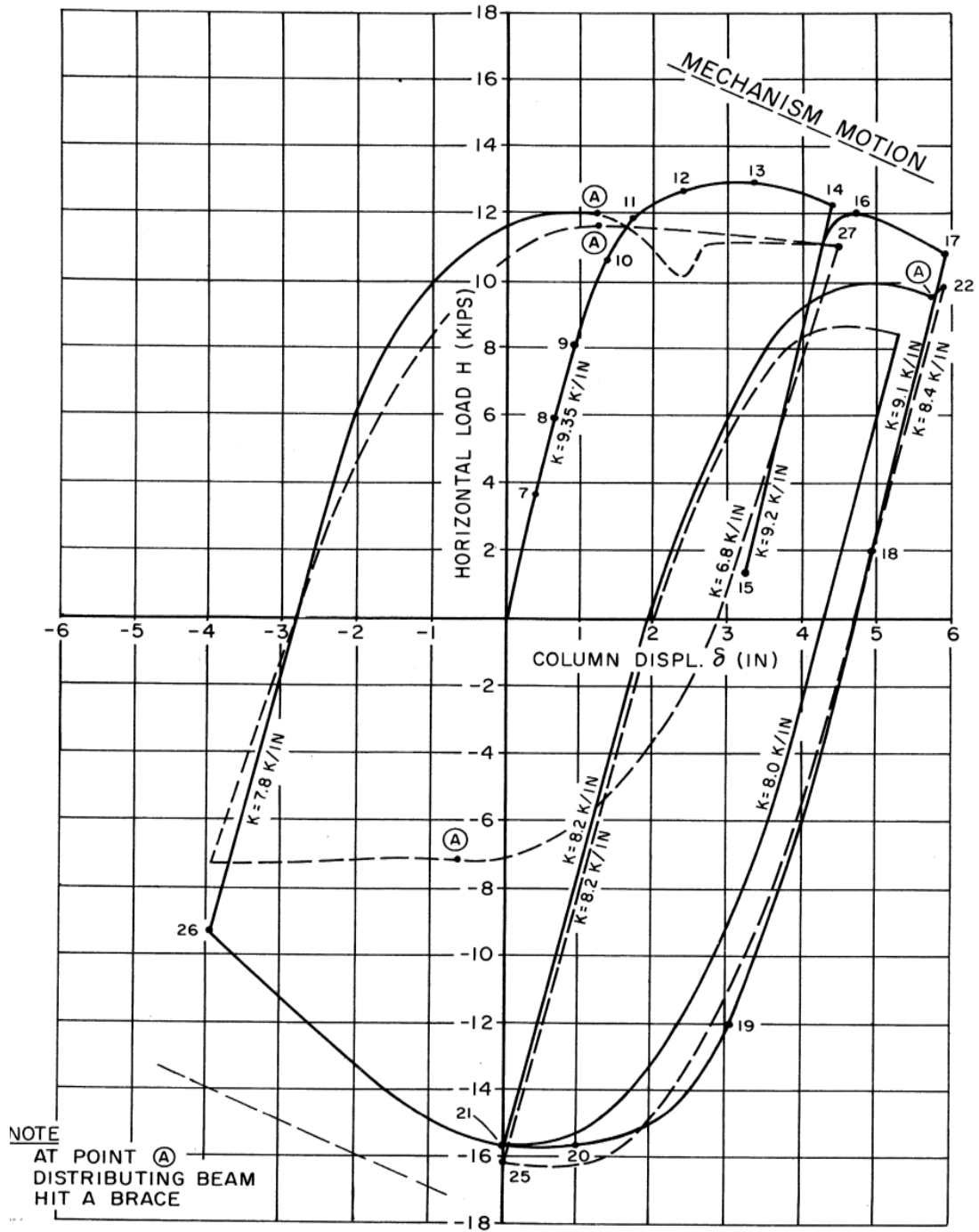


Figura 2. 30: Espécimen A4- Diagrama H vs. δ (EERC-73-27)

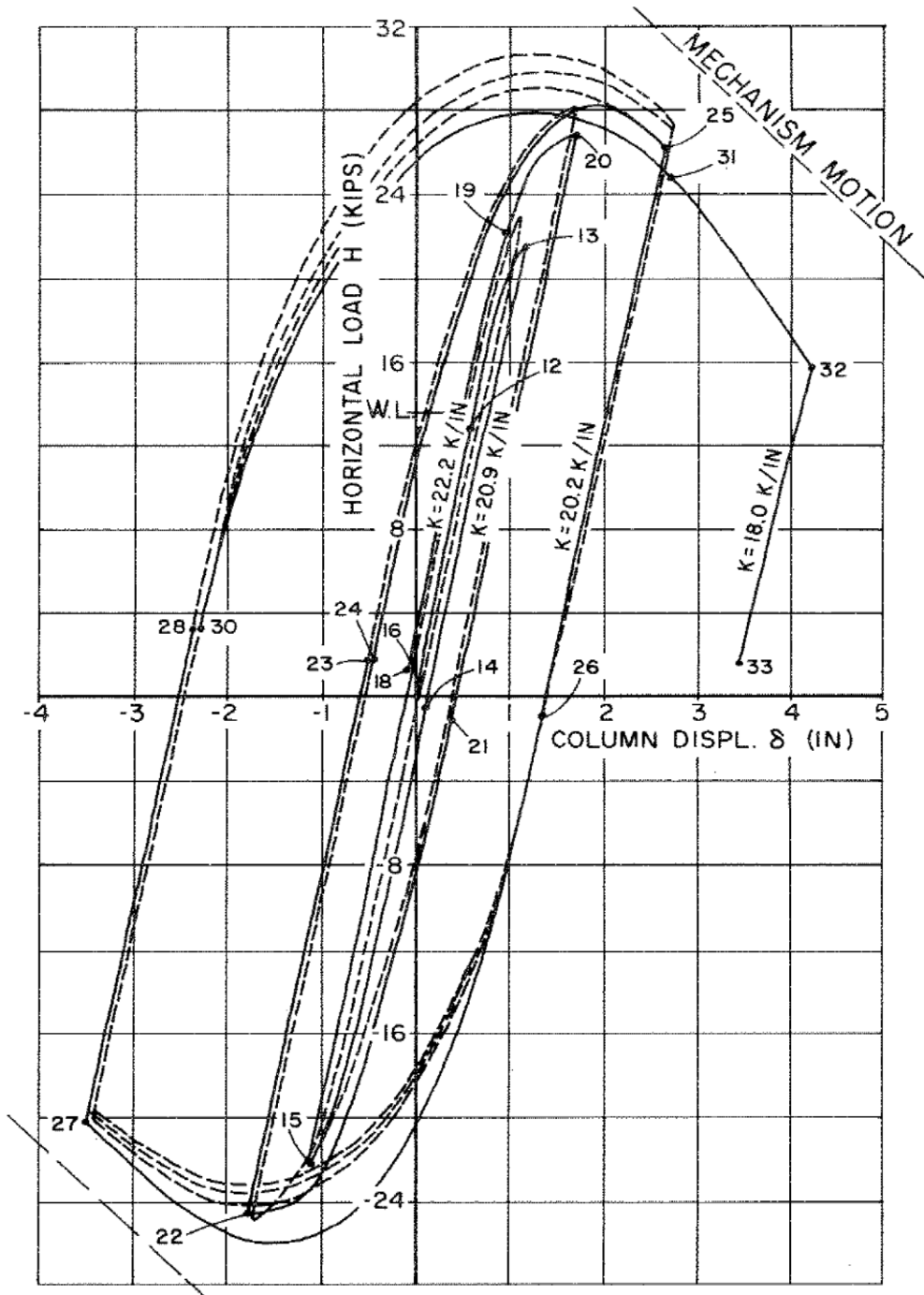


Figura 2. 31: Espécimen B1- Diagrama H vs. δ (EERC-71-07)

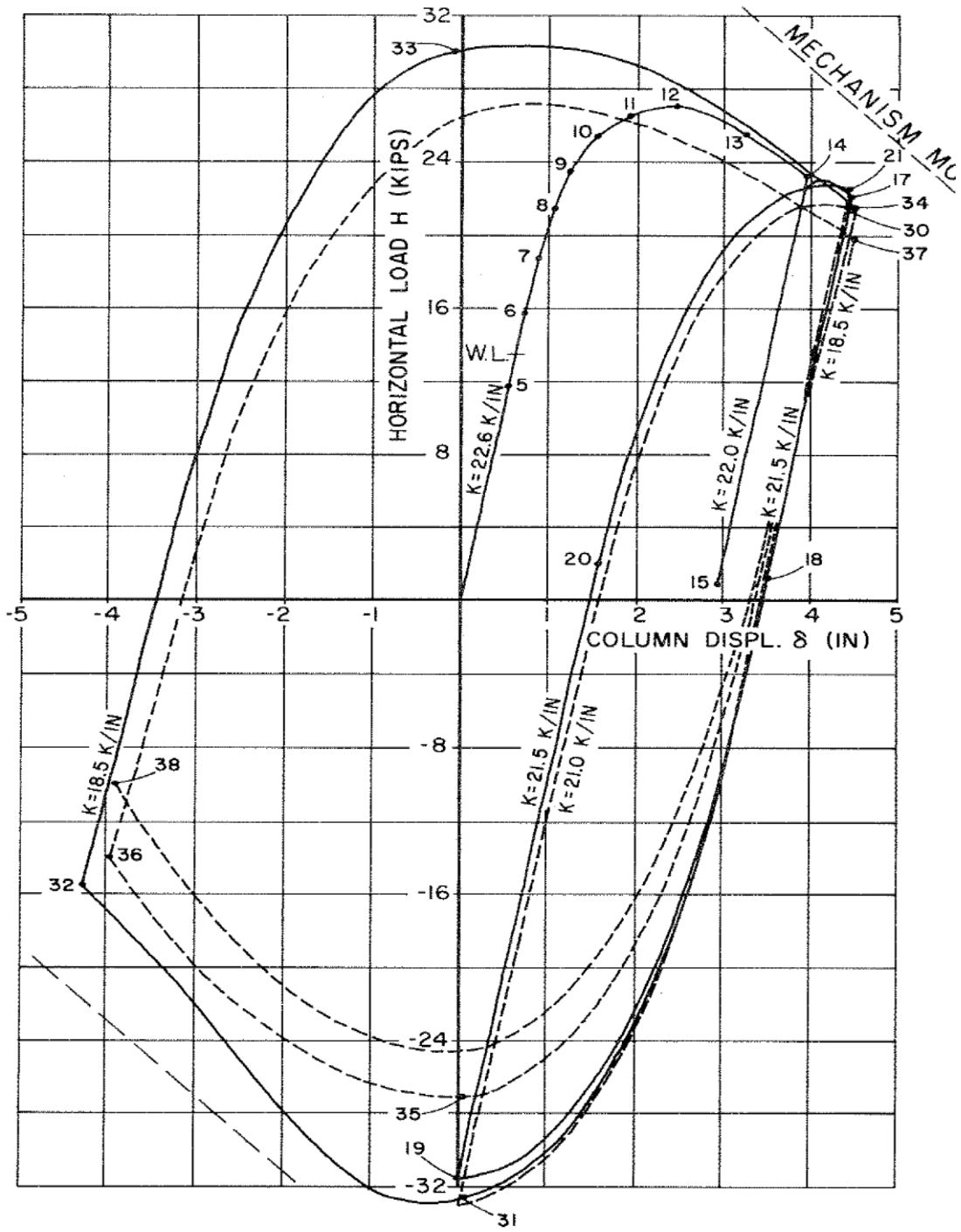


Figura 2. 32: Espécimen B2- Diagrama H vs. δ (EERC-71-07)

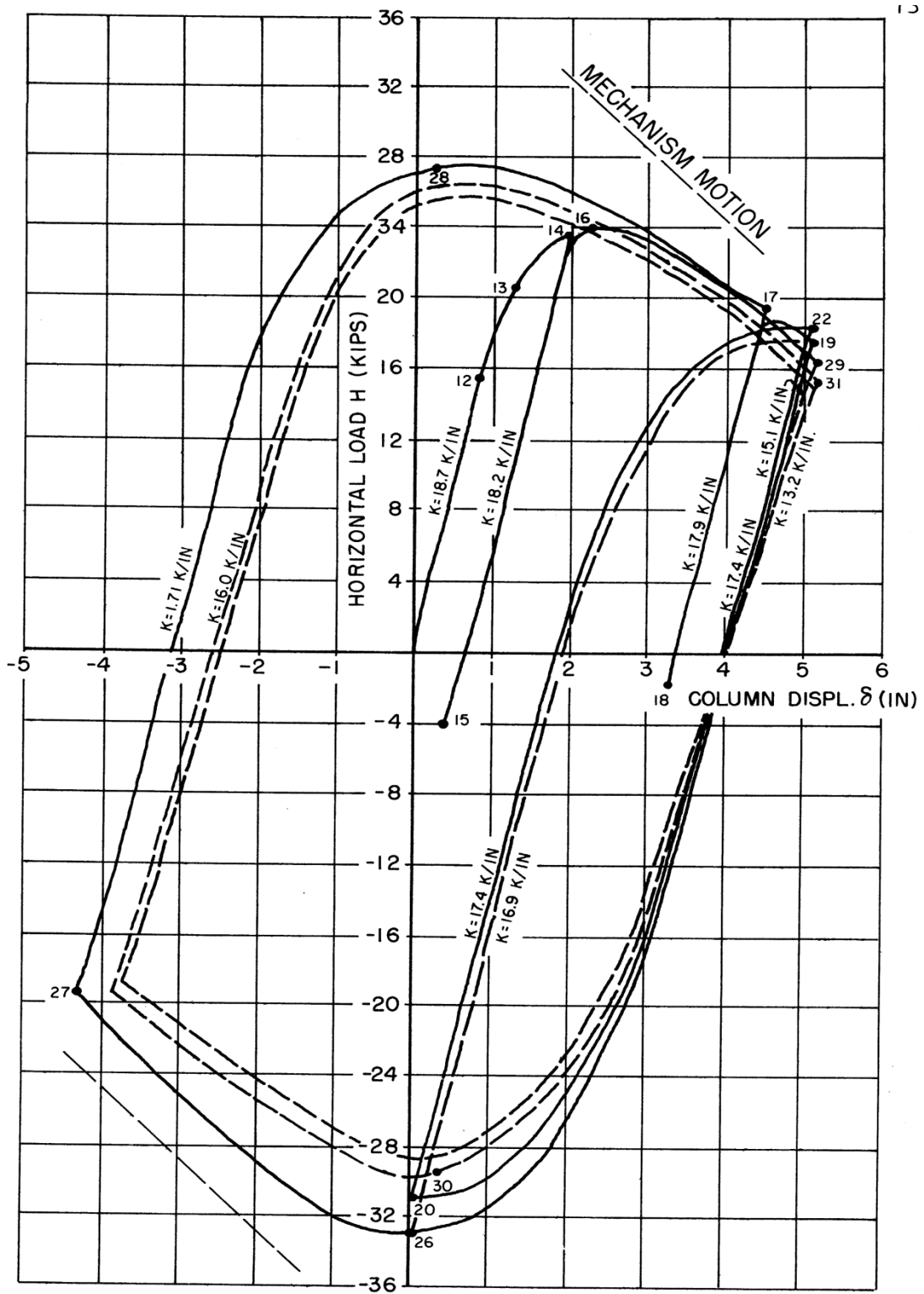


Figura 2. 33: Espécimen B3- Diagrama H vs. δ (EERC-73-27)

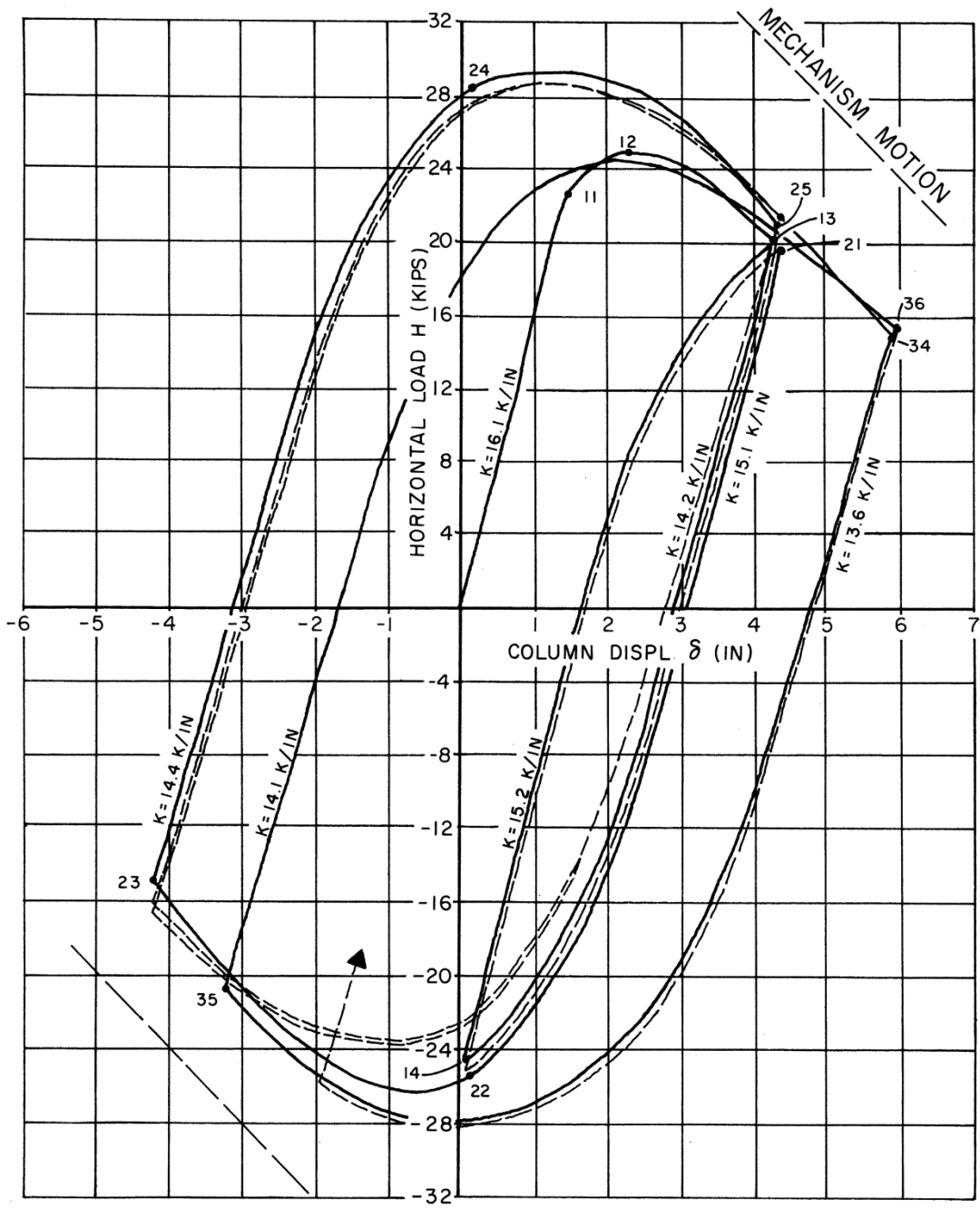


Figura 2. 34: Espécimen B4- Diagrama H vs. δ (EERC-73-27)

CAPITULO 3: SIMULACIÓN NUMÉRICA

3.1 ESTUDIO DE LOS MODELOS

En este capítulo se presentan los modelos matemáticos utilizados para la simulación de la prueba o ensayo de cada uno de los especímenes mencionados en el capítulo anterior. Esta simulación numérica se basa en el marco teórico revisado en el capítulo I.

Como primer paso, se demuestra la importancia del refinamiento adecuado de la malla de elementos finitos para obtener resultados suficientemente aproximados. Se considera inicialmente una viga en voladizo, con 100cm de luz, de material homogéneo y de sección rectangular de 6cm de ancho y 10cm de peralte, como se muestra en la Figura 3.1. Luego se presentan cuatro modelos matemáticos con diferentes enmallados, como se observa en la Figura 3.2, observándose las reacciones en el extremo empotrado y los esfuerzos en la sección, figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6.

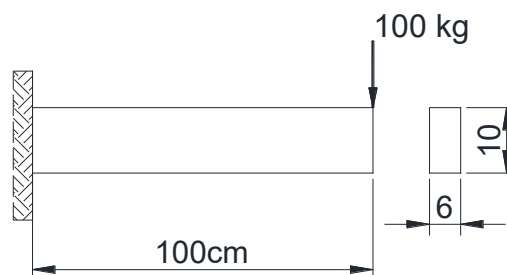


Figura 3.1: Viga en voladizo para análisis de discretización

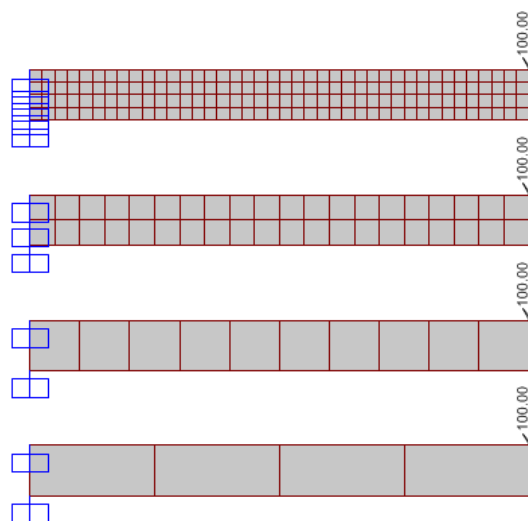


Figura 3.2: Mallas de elementos finitos comparadas

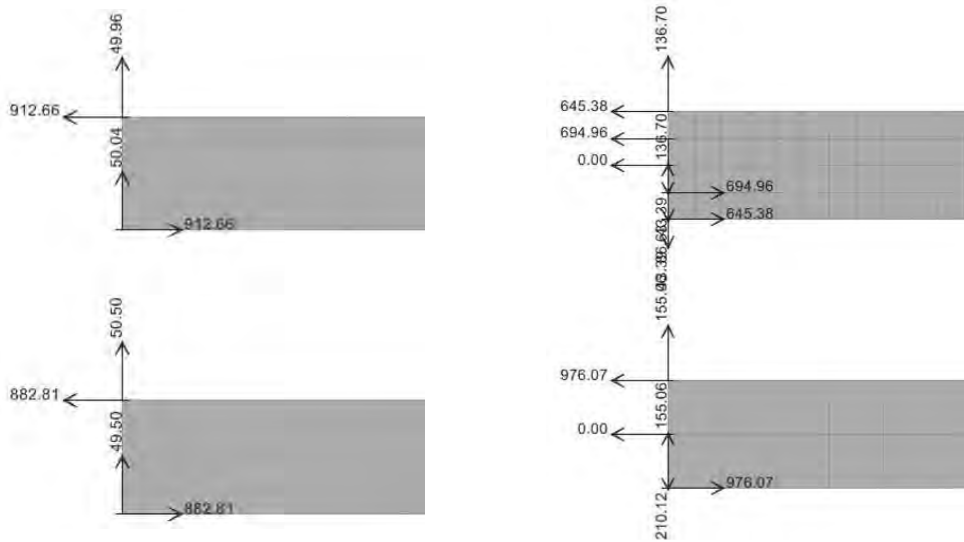


Figura 3. 3: Reacciones en el apoyo de viga en voladizo (kg)

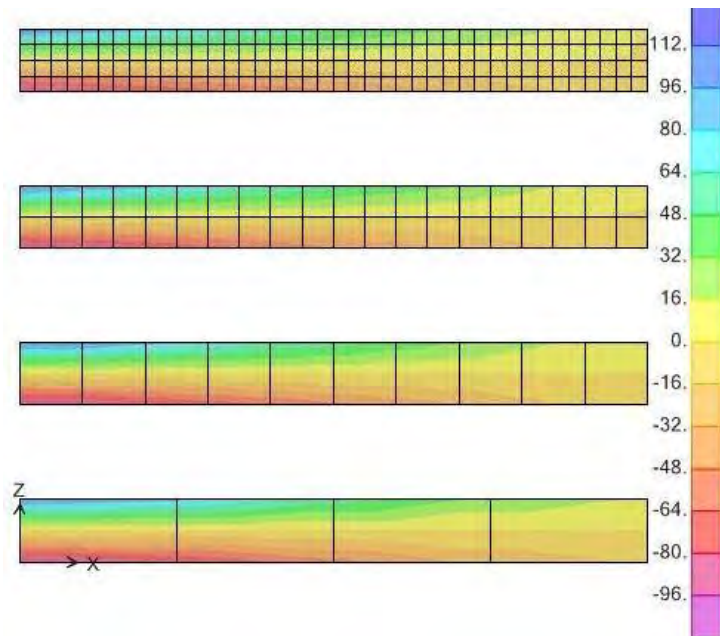


Figura 3.4: Esfuerzos normales en la dirección X (kg/cm^2)

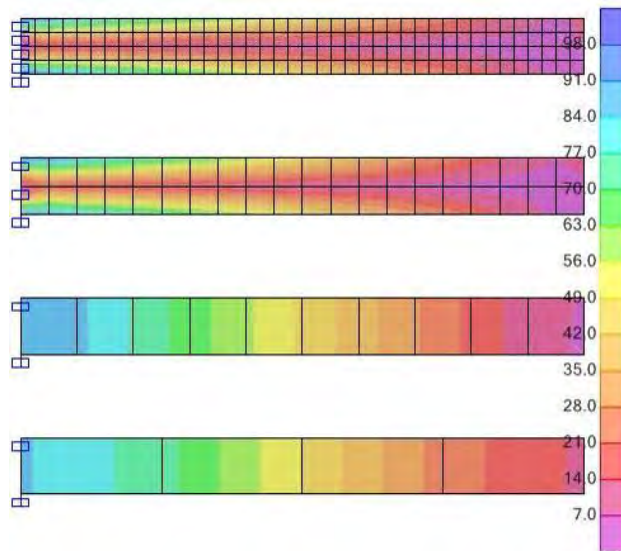


Figura 3.5: Esfuerzos de von Mises (kg/cm^2)

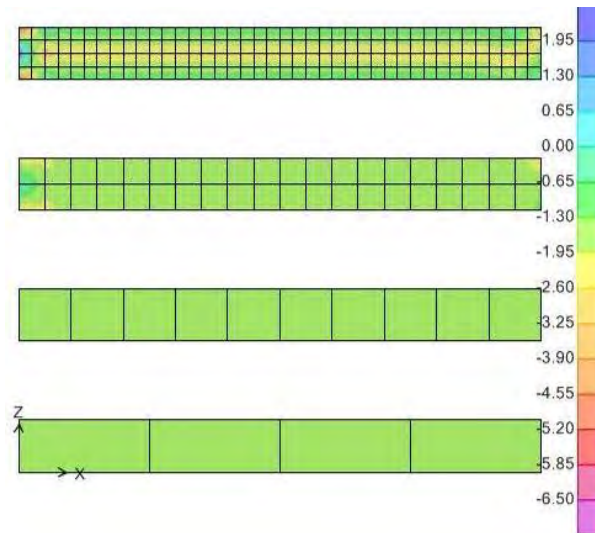


Figura 3.6: Esfuerzos de Corte (kg/cm^2)

En los resultados anteriores se aprecia que una adecuada discretización lleva a una mejor aproximación de resultados, sobre todo en el caso de las figuras 3.3, 3.5 y 3.6 donde se presentan las reacciones en el apoyo empotrado, la energía de distorsión o esfuerzos de von Mises y los esfuerzos de corte, respectivamente. Con los elementos finitos empleados, basados en interpolaciones de los desplazamientos, estos convergen a la solución exacta más rápidamente que los esfuerzos. Los esfuerzos de corte, que en este caso tienen una variación parabólica en la sección transversal, son más difíciles de representar que los esfuerzos normales, que varía linealmente. Por ello, al ver los

esfuerzos cortantes de la sección observamos una diferencia sustancial entre los modelos 1 y 4, contando de abajo hacia arriba. Esto tiene importancia en el análisis no lineal, que depende de la correcta estimación del estado de esfuerzos.

En la Figura 3.7 se presenta la gráfica de esfuerzos de corte en la sección de la viga contigua al empotramiento, donde se aprecia más claramente las diferencias entre los resultados obtenidos con distintos modelos.

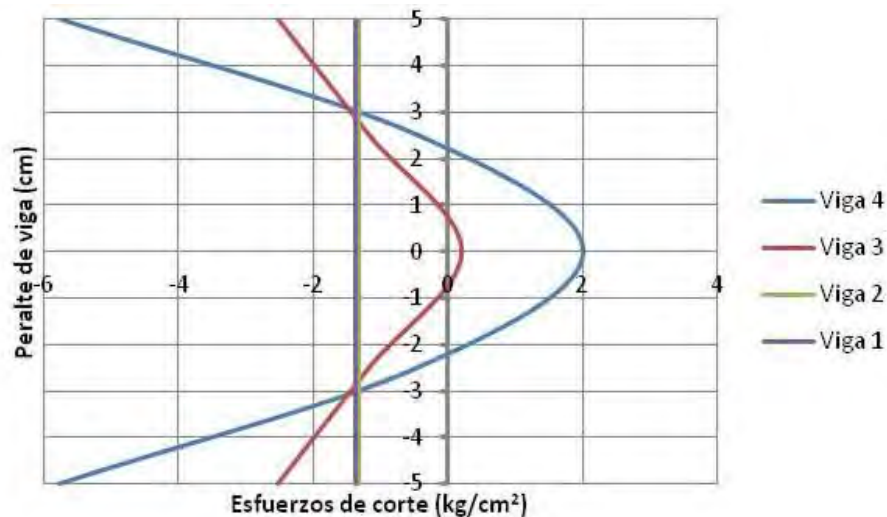


Figura 3.7: Diagrama de Esfuerzos de Corte en la sección contigua al apoyo (kg/cm^2)

3.1.1 Espécimen F1-S

El modelo se realizó tomando en cuenta las medidas reales del espécimen tomadas en el laboratorio, las cuales difieren un tanto de las dimensiones que se dan en los manuales. Estas dimensiones fueron presentadas en el capítulo anterior.

En este caso se compararon resultados obtenidos con tres modelos matemáticos:

Modelo 1: consta de 1023 nudos y 952 elementos de cáscara (ver Figura 3.8), modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.3 y utilizando una curva idealizada de esfuerzo deformación multilineal que simula la curva del ensayo para el acero ASTM A36 (ver figura 2.2), con endurecimiento cinemático.

Modelo 2: se refinó aún más el modelo anterior, con lo que se obtuvo un modelo de 2135 nudos y 2024 elementos de cáscara, ver Figura 3.9.

La comparación de los resultados obtenidos con estos modelos y en el ensayo se presenta en la Figura 3.10, en la que se muestra la gráfica carga versus deflexión. Puede observarse que las curvas de los modelos 1 y 2 son casi idénticas y difieren muy poco entre sí; por tanto se presume que la malla de elementos finitos utilizada en el modelo 1 es adecuada para predecir el comportamiento global del ensayo. También se puede observar que la curva del modelo matemático se encuentra por debajo de la experimental, ya que se obtuvieron valores de fuerzas 7% menores con respecto al ensayo, sobre todo a partir de la deflexión 1" hasta el final. Finalmente, se puede ver que la curva del ensayo presenta una mayor rigidez inicial. Dado que la geometría del modelo coincide con la del espécimen ensayado, la diferencia en la rigidez inicial solo puede deberse a una subestimación del módulo de elasticidad.

Modelo 3: se realizó con la misma malla de elementos que el modelo 2, pero se empleó un curva bilineal de esfuerzo deformación del material, utilizando un módulo de elasticidad de 33,000 Ksi, un modulo plástico de 320 Ksi y el mismo esfuerzo de fluencia de los dos modelos anteriores ($f_y=38.9\text{Ksi}$). En este modelo se consideró endurecimiento mixto, con un factor de endurecimiento $M=0.05$

En la Figura 3.11 se comparan resultados obtenidos con los modelos 2 y 3. Se aprecia que el comportamiento del modelo 3 se aproxima más al del ensayo; esto se debe sobre todo a la modificación del módulo de rigidez inicial, que incide de manera notoria en el modelamiento matemático.

Por último, en la Figura 3.12 se muestra una fotografía del espécimen al final del ensayo comparada con la del modelo. Se puede apreciar el mismo tipo de pandeo en el ala inferior de la viga.

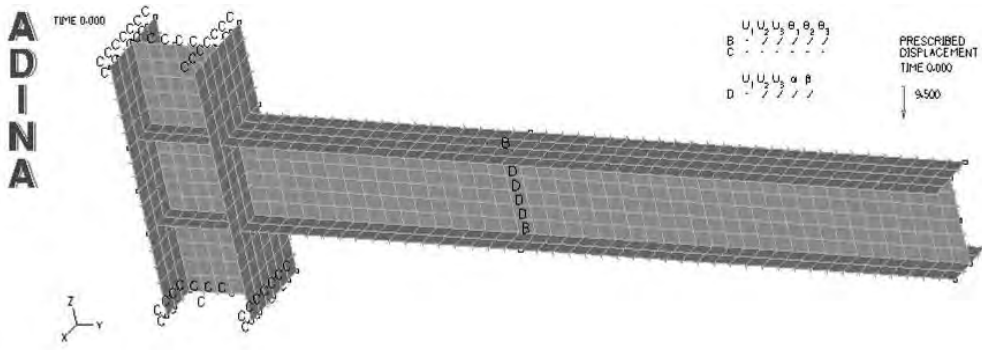


Figura 3.8: Espécimen F1-S-Modelo 1

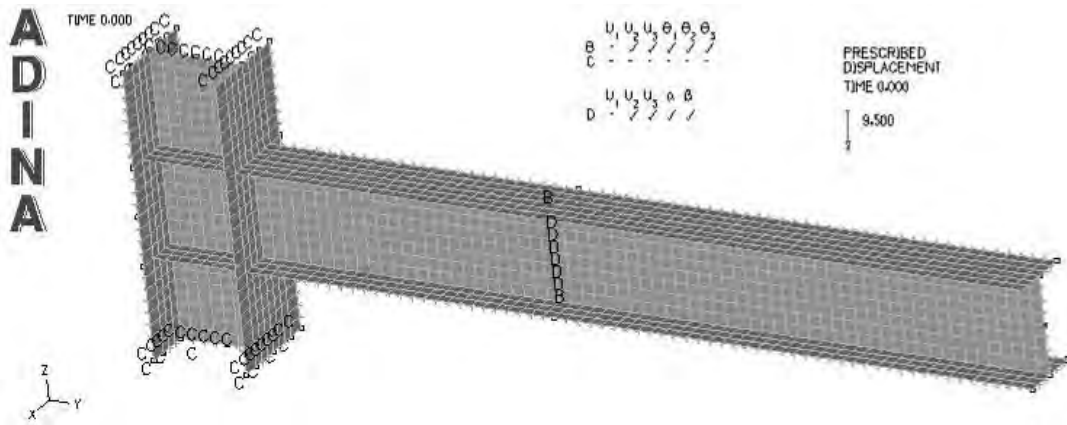


Figura 3.9: Espécimen F1-S-Modelo 2

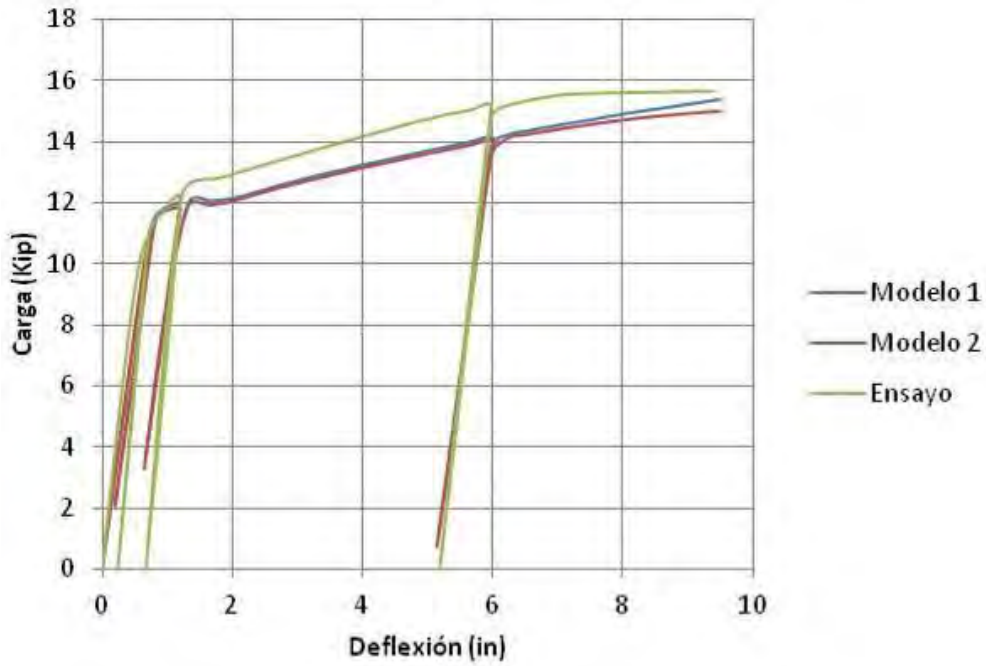


Figura 3.10: Carga vs. Deflexión-Espécimen F1-S

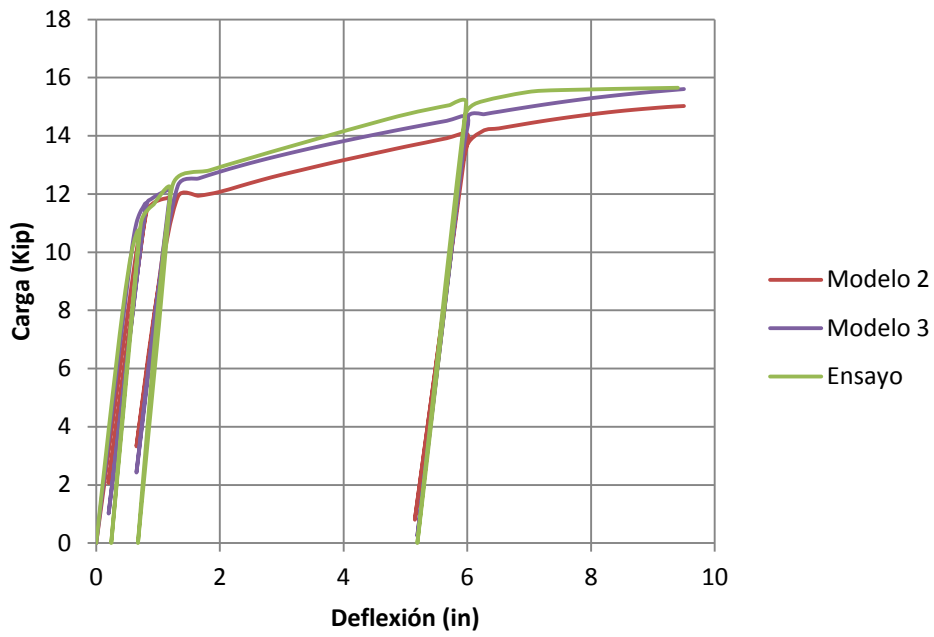
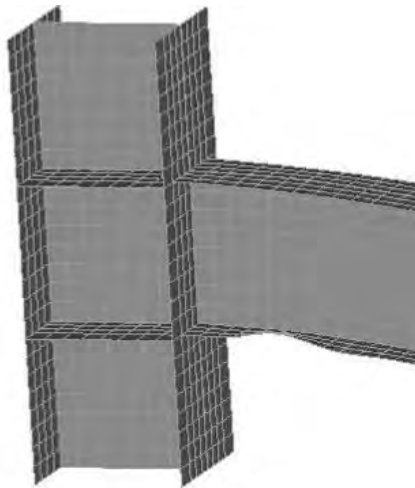


Figura 3.11: Carga vs. Deflexión-Espécimen F1-S



Modelo Adina



Espécimen Ensayado

Figura 3.12: Espécimen F1-S al final del ensayo (SEMM-67-31)

3.1.2 Espécimen F1-C2

Para el análisis de este espécimen se utilizó una curva esfuerzo deformación bilineal, con los datos presentados en la tabla 2.4, el módulo plástico utilizado en el modelo anterior y el mismo factor de endurecimiento mixto $M=0.05$: Se realizaron dos modelos de este espécimen, con distinto grado de refinamiento de la malla de elementos finitos.

Modelo 1: Consta de 478 nudos y 424 elementos de cáscara.

Modelo 2: Consta de 2095 nudos y 1992 elementos de cáscara.

En la Figura 3.13 se presentan las curvas Carga–Deflexión obtenidas con ambos modelos para los 7 primeros ciclos de carga, en donde se puede apreciar una vez más que para predecir el comportamiento global del espécimen es suficiente utilizar una malla como la del modelo 1..

En la Figura 3.14 se comparan las gráficas Carga-Deflexión del ensayo y del modelo1. Aunque se observa el mismo patrón de comportamiento y los valores máximos y mínimos de carga y desplazamiento están en el mismo orden de magnitud, las curvas difieren en el nivel de esfuerzo con el que se inicia la fluencia en cada ciclo. Uno de los factores que podrían estar ocasionando este comportamiento es, como ya se mencionó, que el mismo espécimen presenta valores diferentes de esfuerzo de fluencia y módulo de elasticidad tanto en el alma como en el ala; es decir, el material no es completamente uniforme. También podría esto deberse a la presencia de esfuerzos residuales. Aún cuando los esfuerzos residuales están en equilibrio, se superponen a los esfuerzos debidos a las cargas externas aplicadas y pueden dar lugar a que en ciertos puntos de la sección se alcance la fluencia antes que lo que se tendría por la sola aplicación de las cargas externas. En la Figura 3.15 se presenta el espécimen al final del ensayo

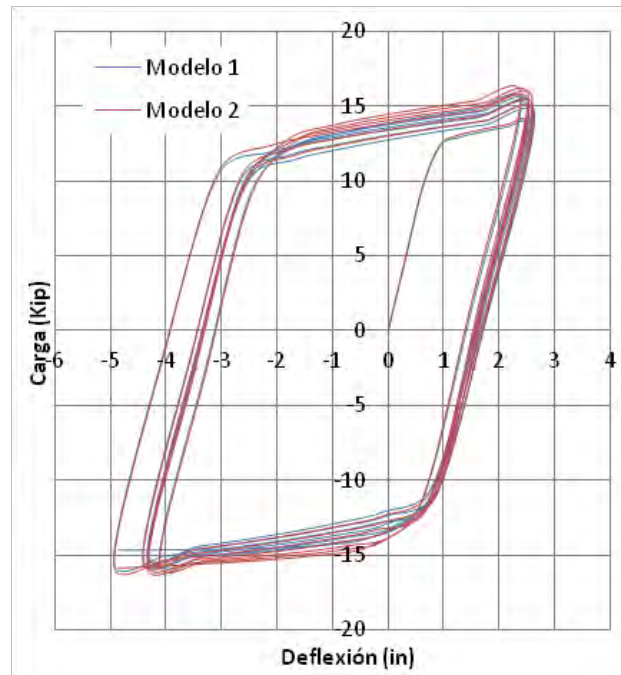


Figura 3.13: Carga vs. Deflexión-modelos de Espécimen F1-C2

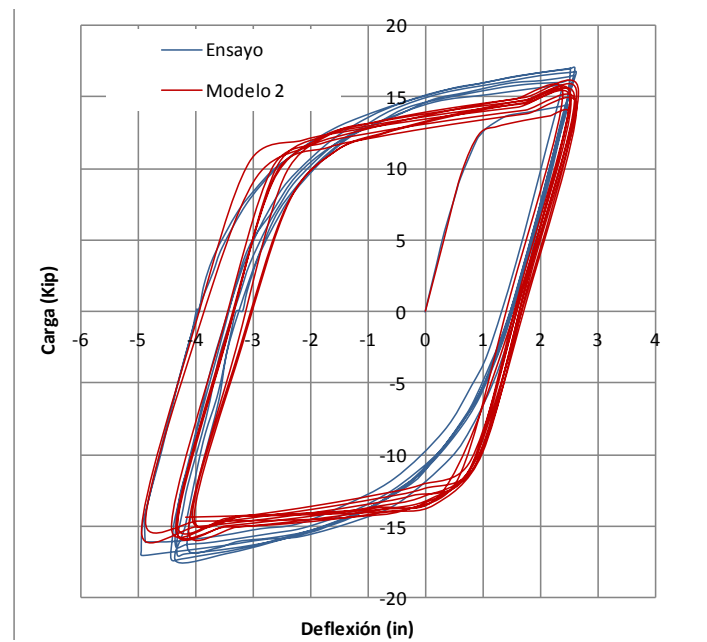
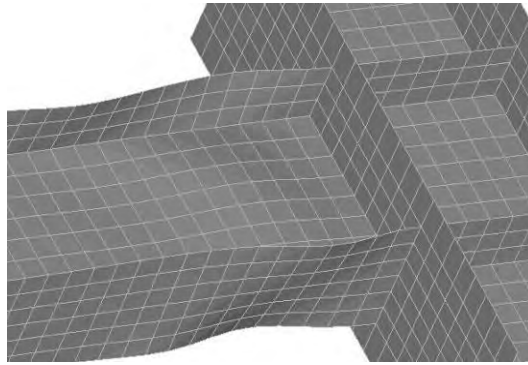


Figura 3.14: Carga vs. Deflexión- Espécimen F1-C2



FIGURE 16. F1-C2

Espécimen ensayado



Modelo ADINA

Figura 3.15: Espécimen F1-C2 al final del ensayo (SEMM-67-31)

3.1.3 Espécimen W1-C1

Para el análisis de este espécimen se utilizó una curva esfuerzo deformación bilineal, el módulo plástico utilizado en los modelos anteriores (320Ksi) y el factor de endurecimiento mixto $M=0.1$. Se realizaron dos modelos de este espécimen:

Modelo 1: Consta de 502 nudos y 456 elementos de cáscara.

Modelo 2: Consta de 2179 nudos y 2088 elementos de cáscara.

En la Figura 3.16 se comparan las curvas Carga-Deflexión de ambos modelos y en la Figura 3.17 se compara la curva Carga-Deflexión del ensayo con la del modelo 2.

Al igual que en el modelo anterior, el comportamiento global de los modelos es similar al del ensayo y los valores máximos y mínimos de carga y desplazamiento están en el mismo orden de magnitud. Sin embargo las curvas de histéresis del ensayo alcanzan la fluencia antes que las del modelo y se presentan más curvadas.

En la Figura 3.18 se presenta el espécimen al final del ensayo. Como se mencionó en el capítulo anterior, este espécimen falló al presentarse una grieta en la soldadura que une las alas con las plancha de refuerzo que va soldada a la columna, zona en la que se concentra la mayor deformación plástica acumulada.

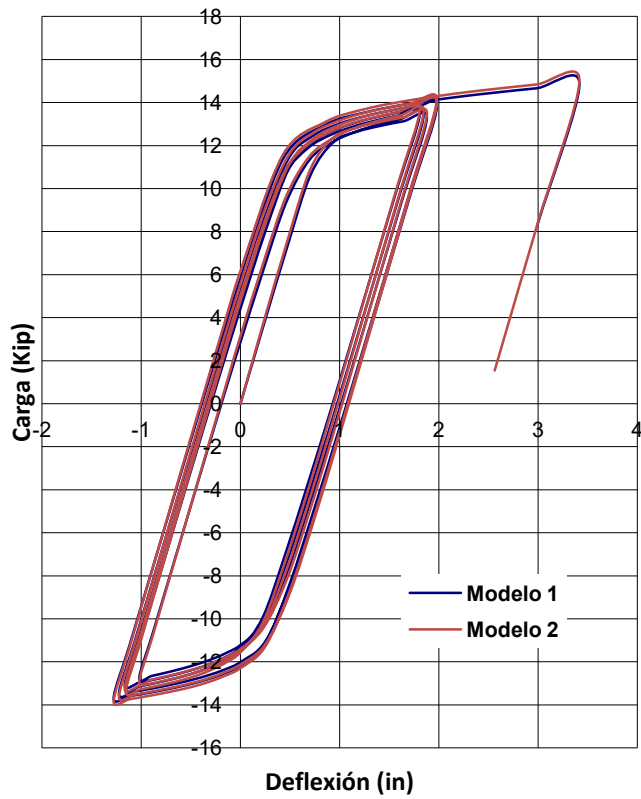


Figura 3.16: Carga vs. Deflexión-modelos Espécimen W1-C1

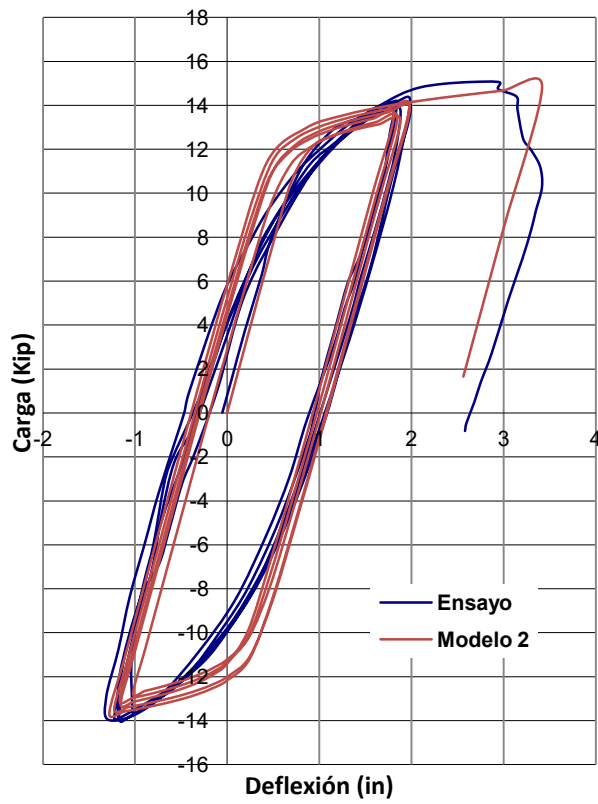
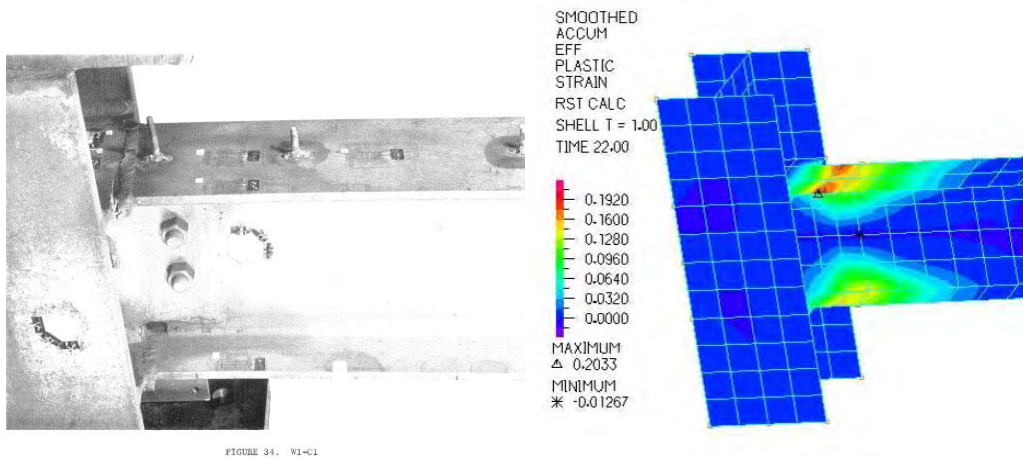


Figura 3.17: Carga vs. Deflexión- Espécimen W1-C1



Espécimen ensayado (SEMM-67-31) Modelo: Deformación plástica acumulada

Figura 3.18: Espécimen F1-C2 al final del ensayo

3.1.4 Espécimen W1-C7

Para el análisis de este espécimen se utilizaron las propiedades del material y dimensiones de la sección dadas en la tabla 2.6. También se utilizó una curva de esfuerzo deformación bilineal, el módulo plástico considerado en los modelos anteriores (320Ksi) y el factor de endurecimiento mixto $M=0.05$.

El modelo consta de 502 nudos y 456 elementos de cáscara.

En la Figura 3.19 se compara la curva Carga–Deflexión del ensayo con la del modelo

El comportamiento global del modelo es similar al del ensayo y los valores máximos y mínimos de carga y desplazamiento están en el mismo orden de magnitud. Sin embargo, al igual que en otros casos, en las curvas de histéresis del ensayo se alcanza la fluencia antes que en las del modelo

En la Figura 3.20 se presenta el espécimen al final del ensayo. Cabe resaltar que este espécimen falló por la aparición de grietas en la soldadura que une las alas con la plancha de refuerzo soldada a la columna. En la Figura 3.20 también aparecen las deformaciones plásticas acumuladas al final de los ciclos de ensayo en el modelo.

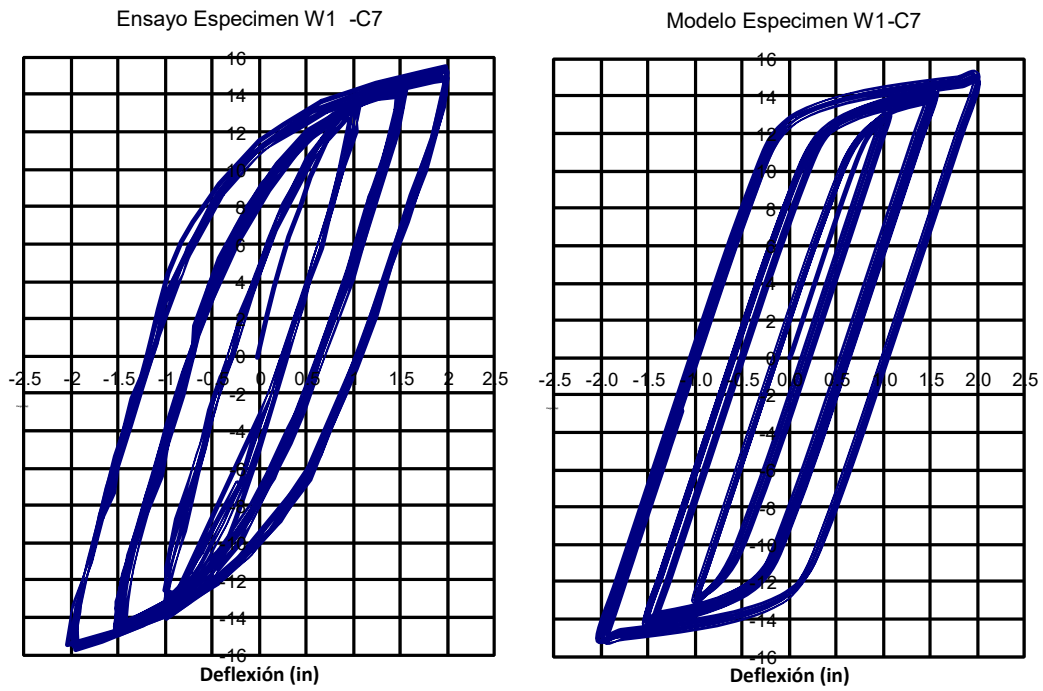
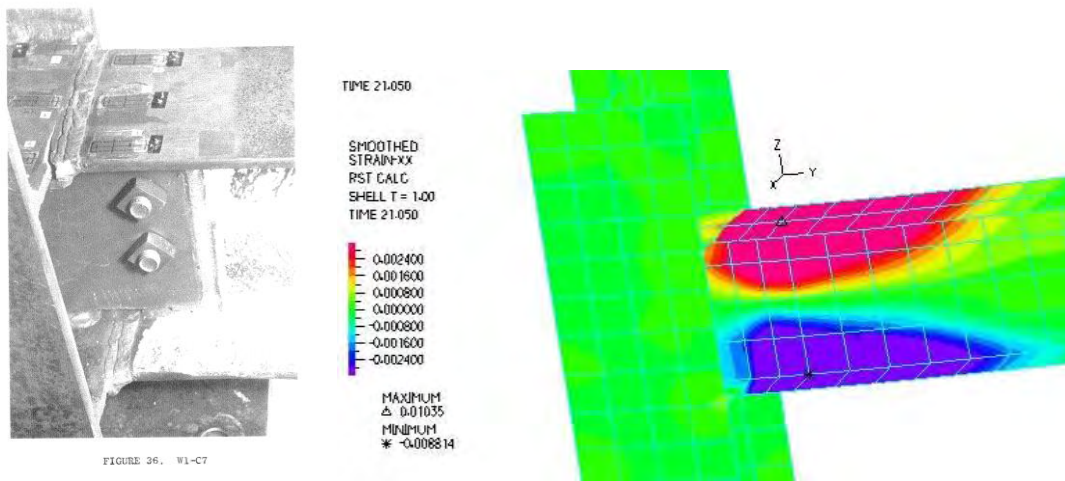


Figura 3.19: Carga vs. Deflexión- Especimen W1-C7



Especimen ensayado

Modelo ADINA: Deformación XX en el Ciclo 21

Figura 3.20: Especimen F1-C2 al final del ensayo

3.1.5 Espécimen A1

El modelo se realizó tomando en cuenta las medidas reales del espécimen tomadas en el laboratorio, las cuales difieren un poco con las dimensiones dadas en manuales para perfiles estándares. Estas dimensiones fueron presentadas en el capítulo anterior.

El modelo matemático consta de 2041 nudos y 1956 elementos de cáscara (ver Figura 3.21), modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.7 y utilizando una curva idealizada de esfuerzo deformación multilínea que simula la curva del ensayo para el acero ASTM A36 (ver figura 2.1). También se utilizó la regla de endurecimiento isotrópica.

Para modelar este espécimen se prepararon dos curvas esfuerzo-deformación; esto con el fin de modelar el alma y las alas con los valores de esfuerzo de fluencia dados en el apéndice B, tablas B1 y B2, del estudio EERC-71-07. Estas curvas se presentan en la Figura 3.22. El material 2 se utilizó en el alma de viga y el material 1 en el resto se modeló.

En la Figura 3.23 se observa la comparación del modelo y el ensayo, donde se aprecia que el comportamiento del modelo se aproxima al del ensayo, aún cuando las curvas no son exactamente iguales. La energía de disipación dada por el área de los lazos de histéresis es mayor en el modelo, aproximadamente en 18% para los lazos que van de 2" a -2" de desplazamiento y en un 5% para los lazos que van de 5" a -5" de desplazamiento.

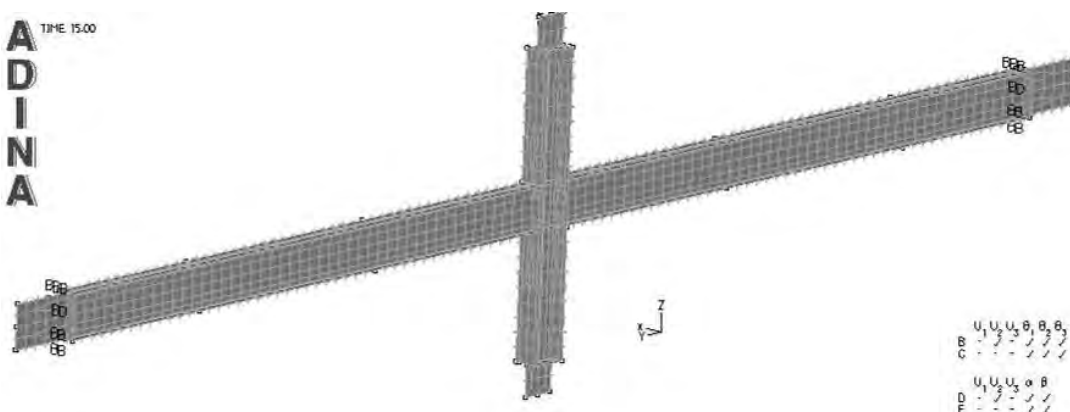


Figura 3.21: Modelo Espécimen A1

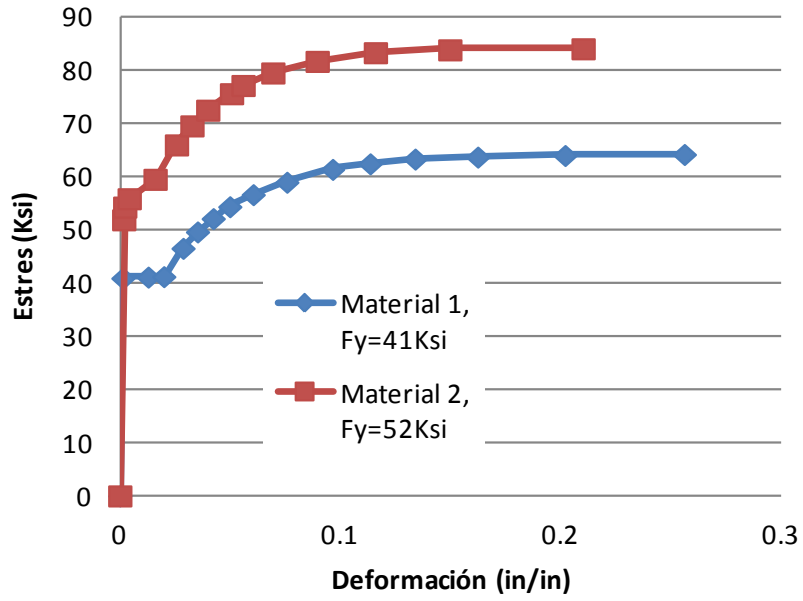


Figura 3.22: Diagramas de esfuerzo-deformación del material

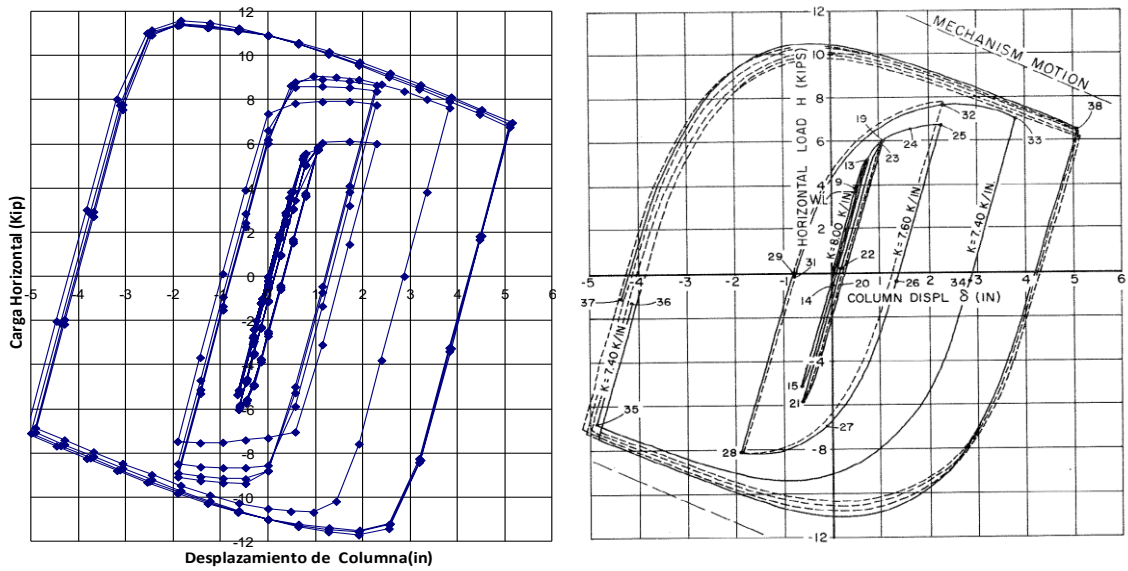


Figura 3.23: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Especimen A1

3.1.6 Espécimen A2

El modelo matemático consta de 1203 nudos y 1076 elementos de cáscara (ver Figura 3.24), modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.7 y utilizando una curva idealizada de esfuerzo deformación multilínea que simula la curva del ensayo para el acero ASTM A36 (ver figura 2.1). Se consideró también endurecimiento isotrópico. Al igual que para el espécimen anterior, se prepararon dos curvas esfuerzo-deformación (ver Figura 3.22).

En la Figura 3.25 se comparan resultados del modelo y el ensayo, donde se aprecia que, si bien es cierto el comportamiento del modelo se aproxima al del ensayo, este no es exactamente igual. Sin embargo las energías disipadas en cada ciclo, dadas por las áreas de los lazos de histéresis son casi iguales en los lazos mayores, siendo la diferencia entre éstas de $\pm 3\%$ con respecto a las de ensayo. La diferencia de energía de disipación en el primer lazo es de 9% menor en el modelo con respecto al ensayo. Los lazos de histéresis del modelo se distorsionan en los últimos ciclos de carga debido a que en la zona panel los elementos alcanzan su máxima deformación unitaria y van siendo eliminados de la matriz de rigidez en el modelo matemático (ver Figura 3.26), por lo que la resistencia del espécimen baja considerablemente (ver Figura 3.25).

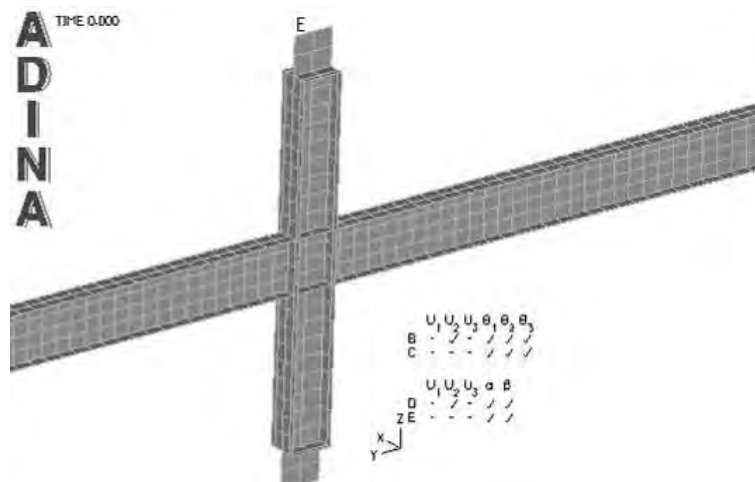
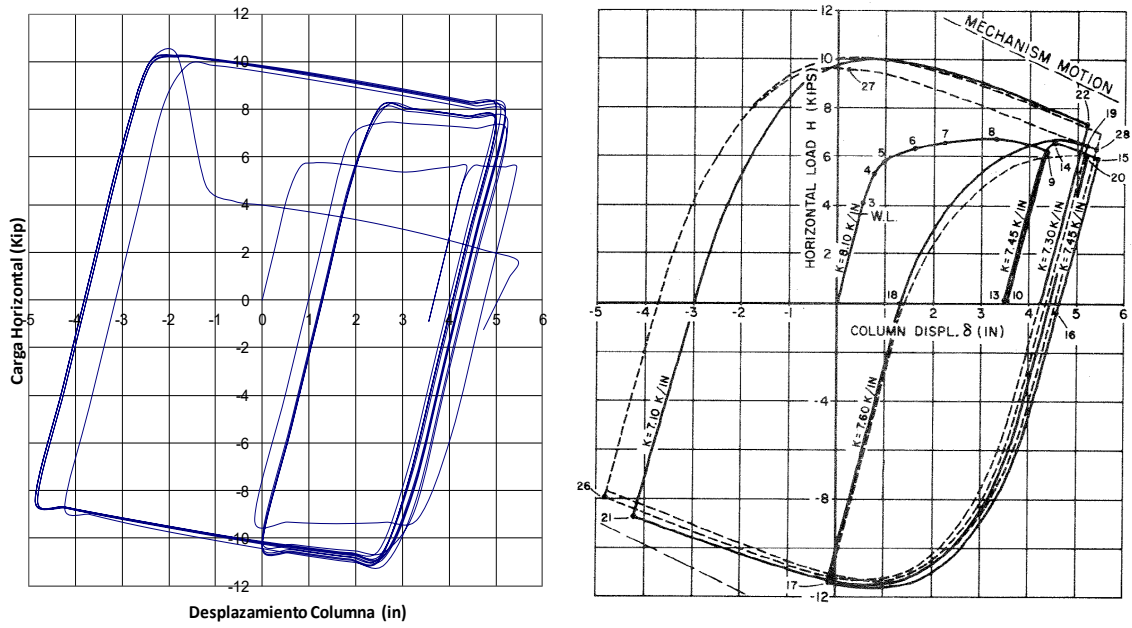


Figura 3.24: Modelo Espécimen A2



Modelo Ensayo
 Figura 3.25: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen A2

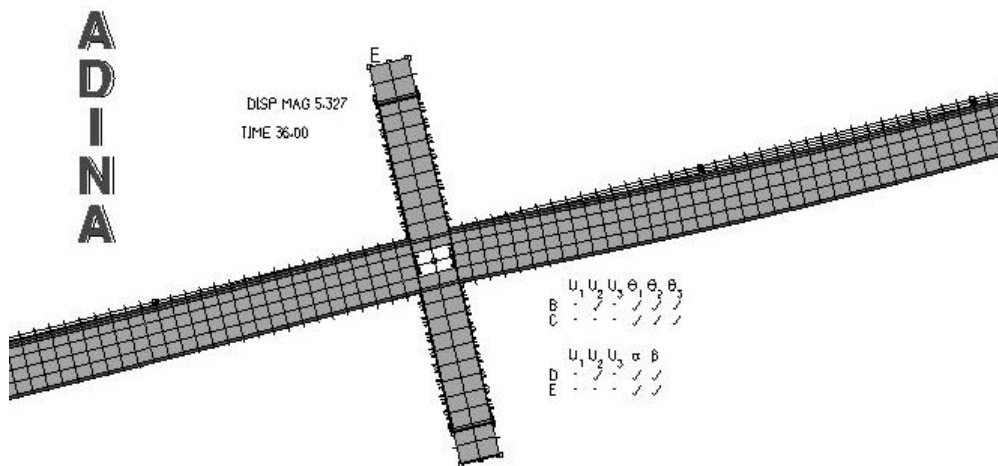


Figura 3.26: Modelo Espécimen A2 en los últimos ciclos de carga

3.1.7 Espécimen B1

El modelo matemático consta de 2083 nudos y 1952 elementos de cáscara (ver Figura 3.27), modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.8 y utilizando tres curvas idealizadas de esfuerzo deformación multilineal que simulan la curva del ensayo para el acero ASTM A36 (ver figura 2.1), con la regla de endurecimiento cinemática. Esto con el fin de modelar cada elemento con su valor de esfuerzo de fluencia dado en el apéndice B, tablas B1 y B2, del estudio EERC-71-07. Estas curvas se presentan en la Figura 3.28. El material 1 se utilizó en el alma de la viga y el alma la columna, el material 2 se utilizó en las alas de la columna y el material 3 en las alas de la viga. Todos los especímenes B se modelaron de esta misma forma, empleando tres distintas curvas del material.

En la Figura 3.29 se comparan las gráficas de desplazamiento versus carga horizontal del espécimen ensayado y del modelo matemático, donde se aprecia que el modelo predice el orden de magnitud de las fuerzas y desplazamientos obtenidos en el ensayo. Sin embargo, el modelo numérico presenta valores de carga más altos antes de la carga y descarga; también se aprecia que en el ensayo se llega a la fluencia antes que en el modelo. Como ya se mencionó, esto podría deberse a la no perfecta homogeneidad del material y a los esfuerzos residuales.

En la Figura 3.30 se comparan tres lazos de histéresis. El primer lazo del modelo, contando del más pequeño al más grande, presenta una energía de disipación mayor respecto al ensayo en un 3%, el segundo lazo mayor en un 28% y el tercero lazo mayor en un 13%.

En la Figura 3.31 se muestra el modelo a final de los ciclos de carga, donde se observa a las vigas en su deformación máxima.

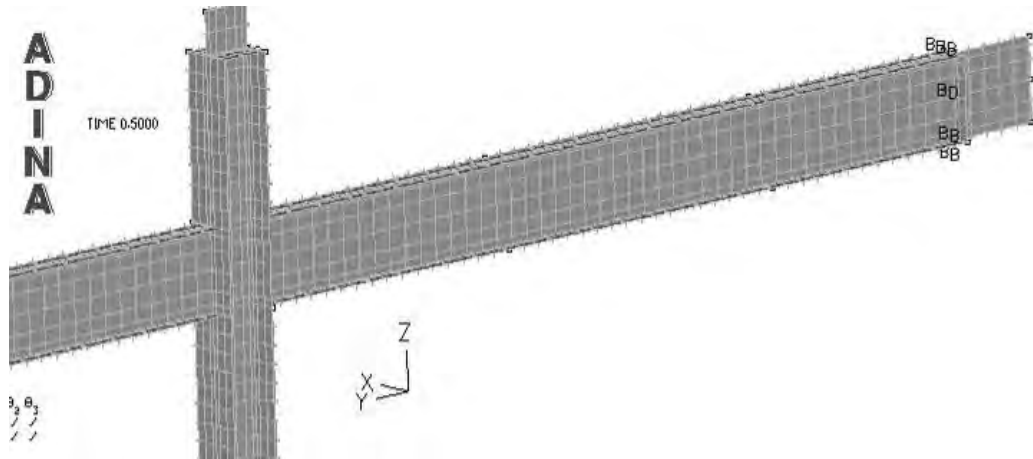


Figura 3.27: Modelo Espécimen B1

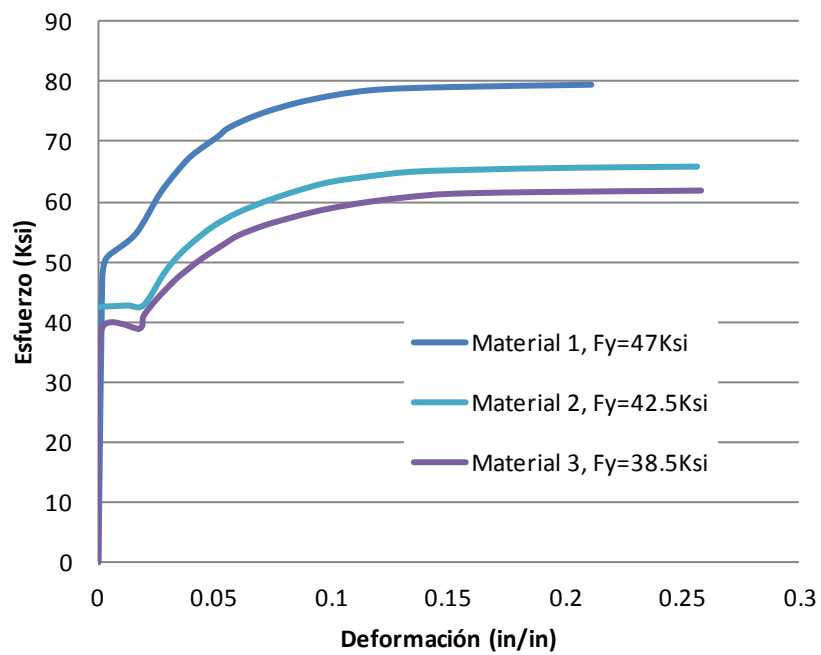
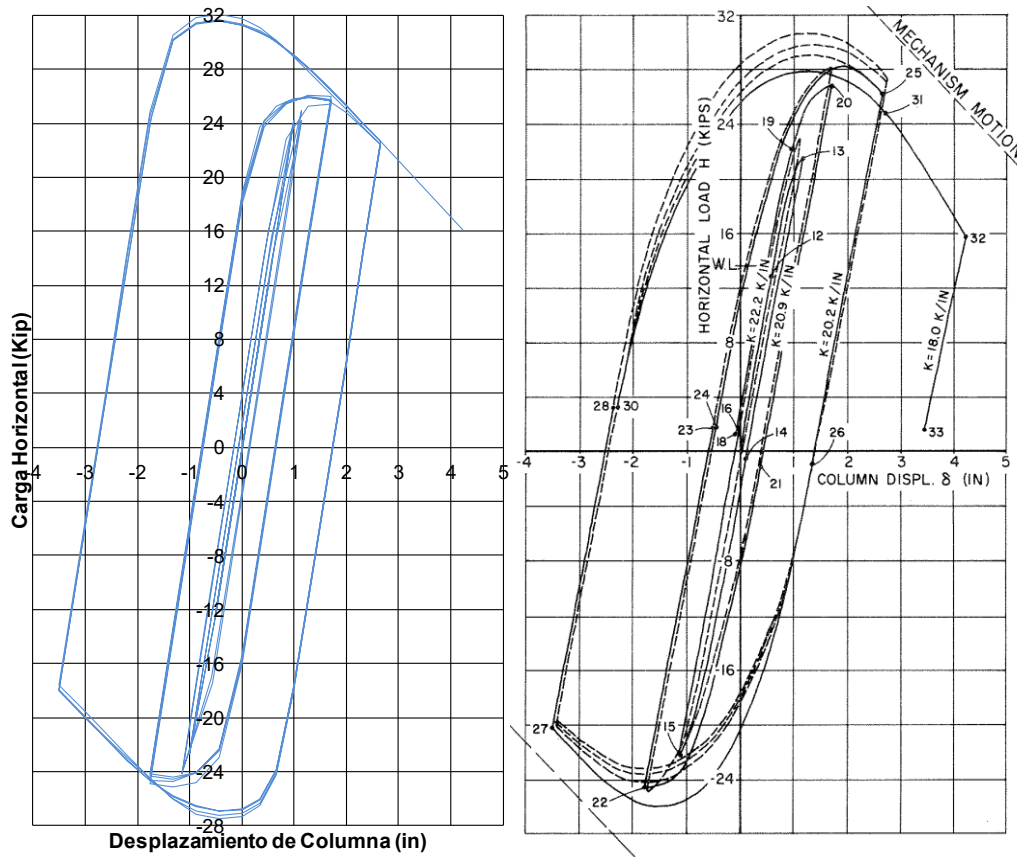


Figura 3.28: Diagramas de esfuerzo-deformación del material



Modelo

Ensayo

Figura 3.29: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Especimen B1

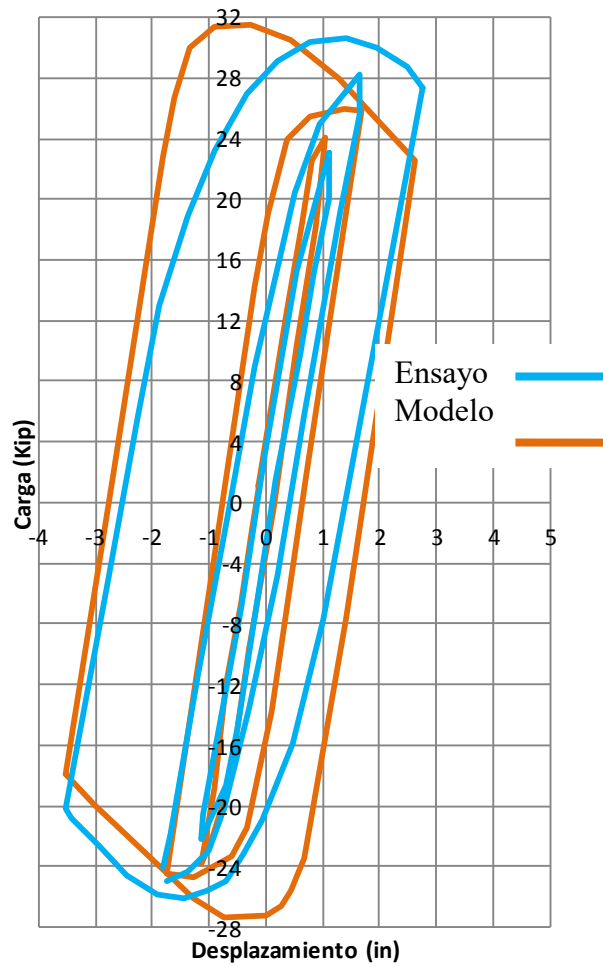


Figura 3.30: Comparación de lazos de histéresis -Especimen B1

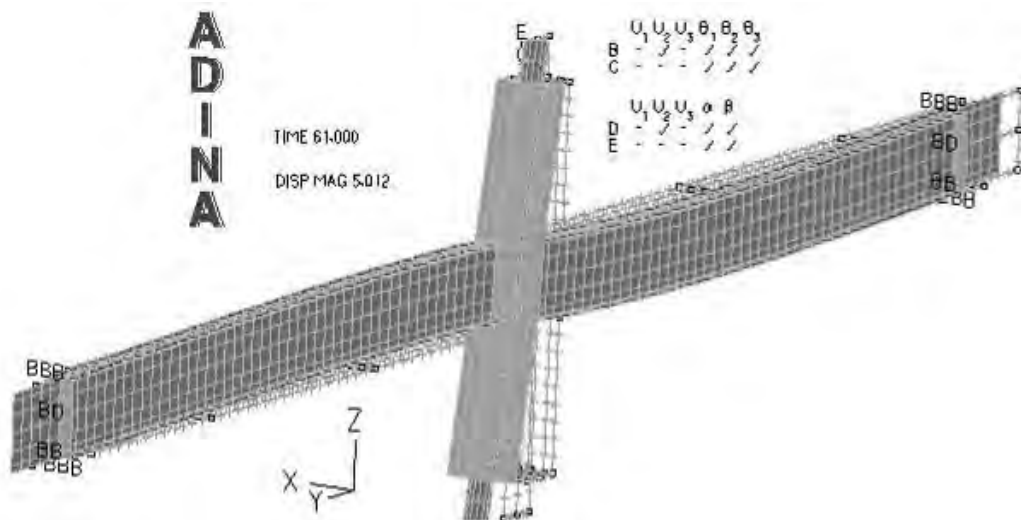


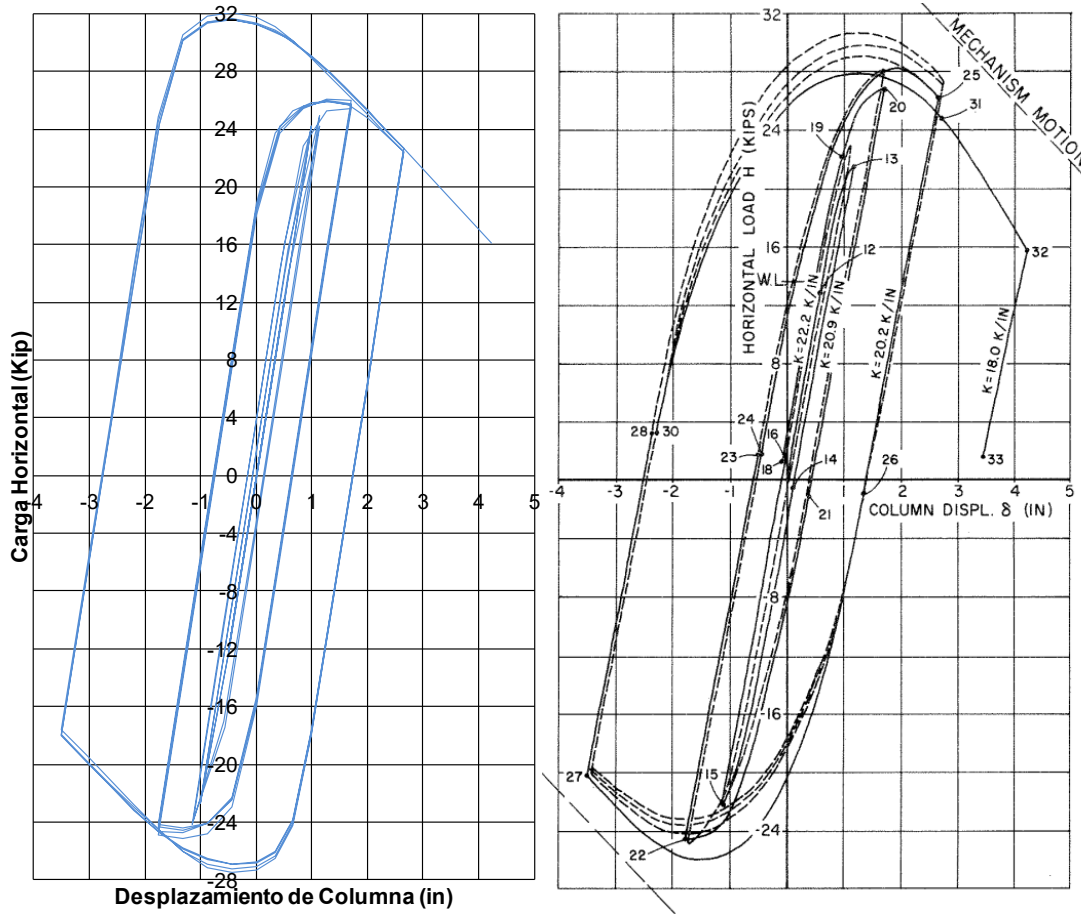
Figura 3.31: Modelo Especimen B1 al final de los ciclos de carga

3.1.8 Espécimen B2

El modelo matemático consta de 2083 nudos y 1952 elementos de cáscara, modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.8 y utilizando tres curvas idealizadas de esfuerzo deformación multilínea para simular las propiedades del acero ASTM A36 (ver figura 2.1), con la regla de endurecimiento cinemática. Estas curvas se presentan en la Figura 3.28 y se usaron de igual forma que en el modelo anterior

En la Figura 3.32 se comparan las gráficas de desplazamiento versus carga horizontal del espécimen ensayado y del modelo matemático. También en este caso se observa que el modelo presenta valores de fuerza más altos antes de la carga y descarga y que en el ensayo se llega a la fluencia antes que en el modelo numérico.

En la Figura 3.33 se muestra el modelo a final de los ciclos de carga, donde se observa a las vigas en su deformación máxima. En la Figura 3.34 se presentan las fotografías del ensayo durante los ciclos de carga, donde se observa el pandeo de las alas de la viga en la zona donde se presentan los mayores esfuerzos y de formaciones. Esto se ve claramente en la Figura 3.35 donde se muestra un gráfico de deformaciones del modelo para un desplazamiento de 4.5". Las zonas de máxima deformación coinciden con las del ensayo.



Modelo Ensayo
 Figura 3.32: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen B2

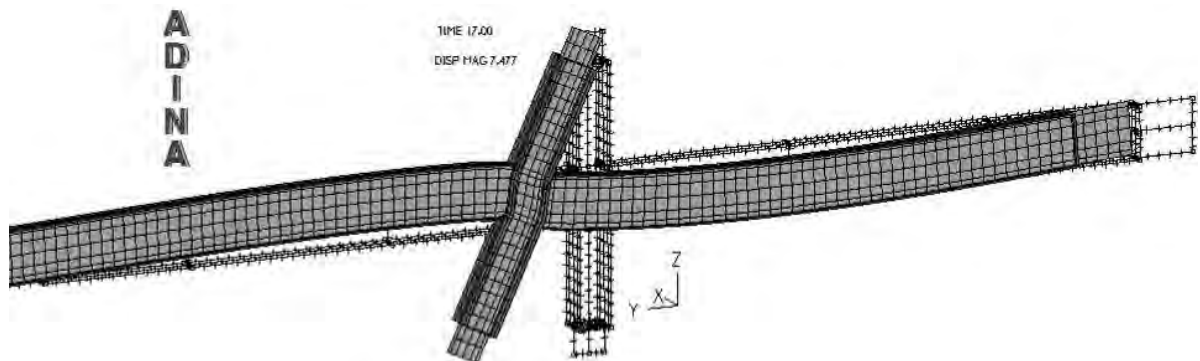
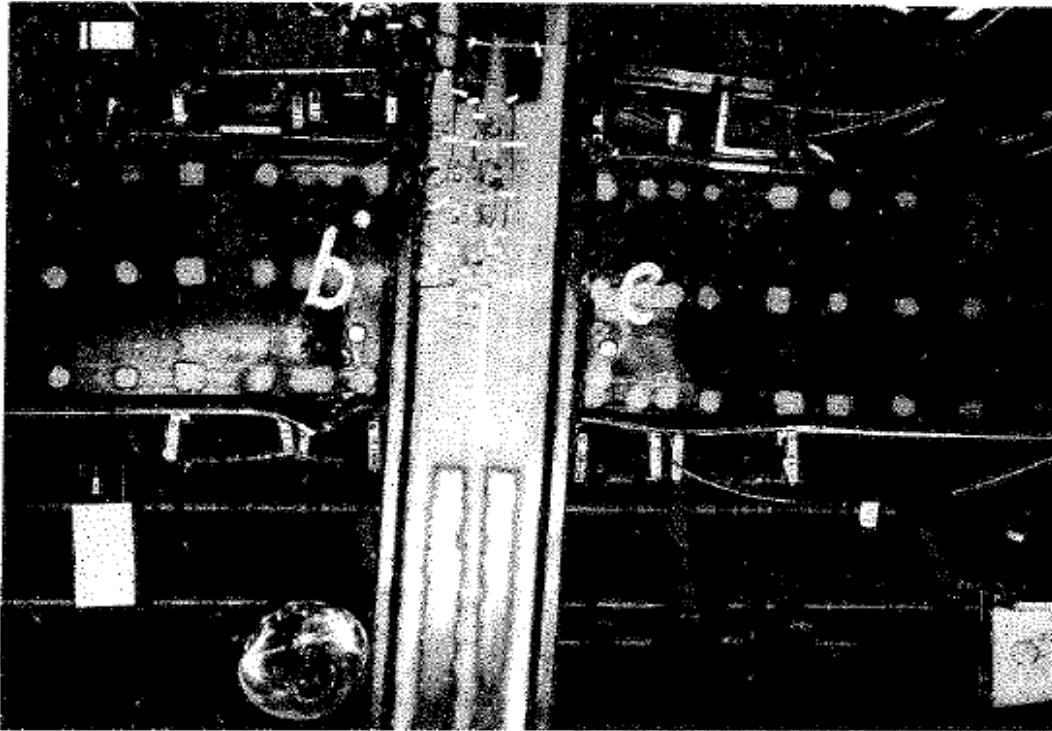
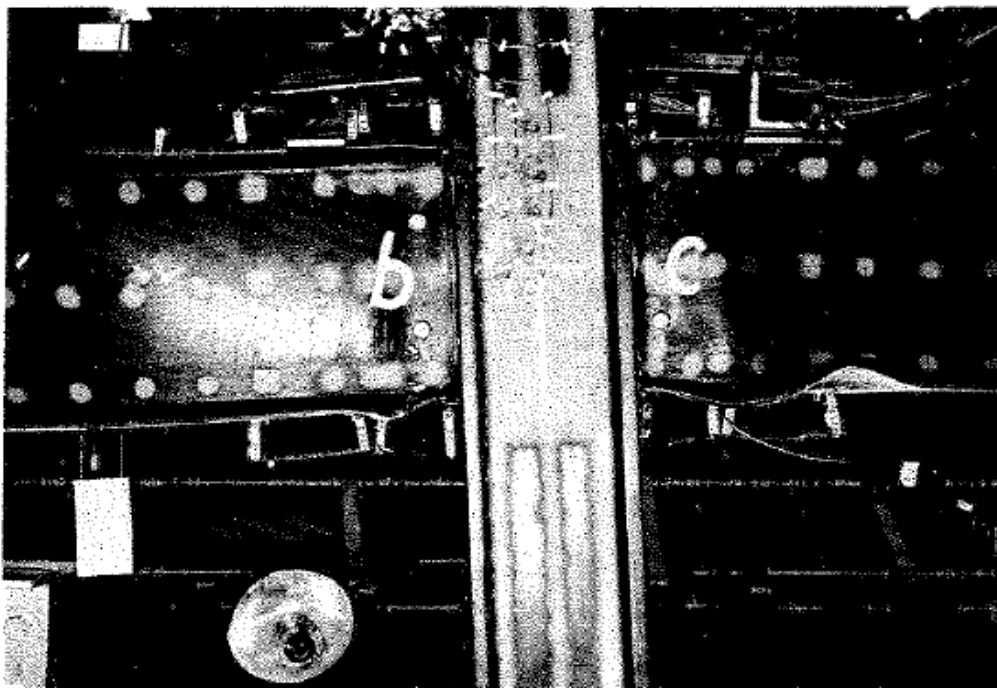


Figura 3.33: Modelo Espécimen B2 al final de los ciclos de carga



Espécimen B2, $\delta=4.49''$



Espécimen B2, $\delta=3.91''$

Figura 3.34: Ensayo de Espécimen B2 durante los ciclos de carga (EERC 71-07)

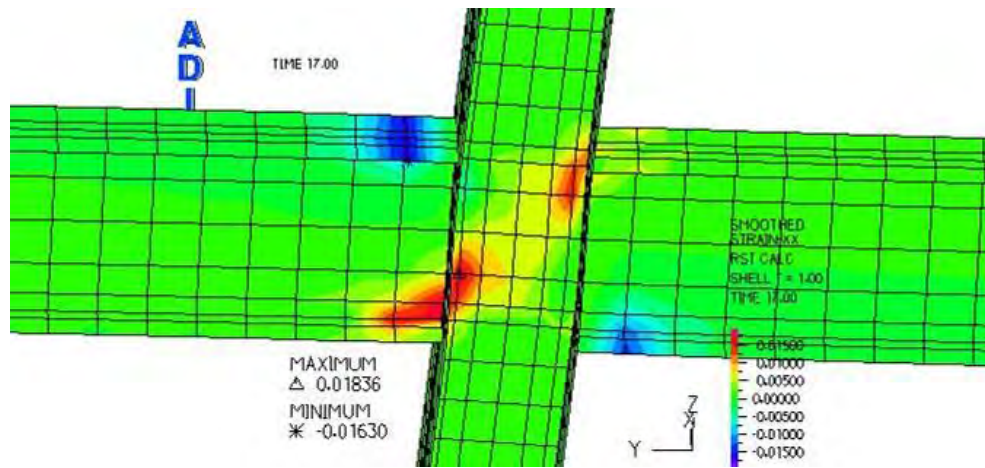


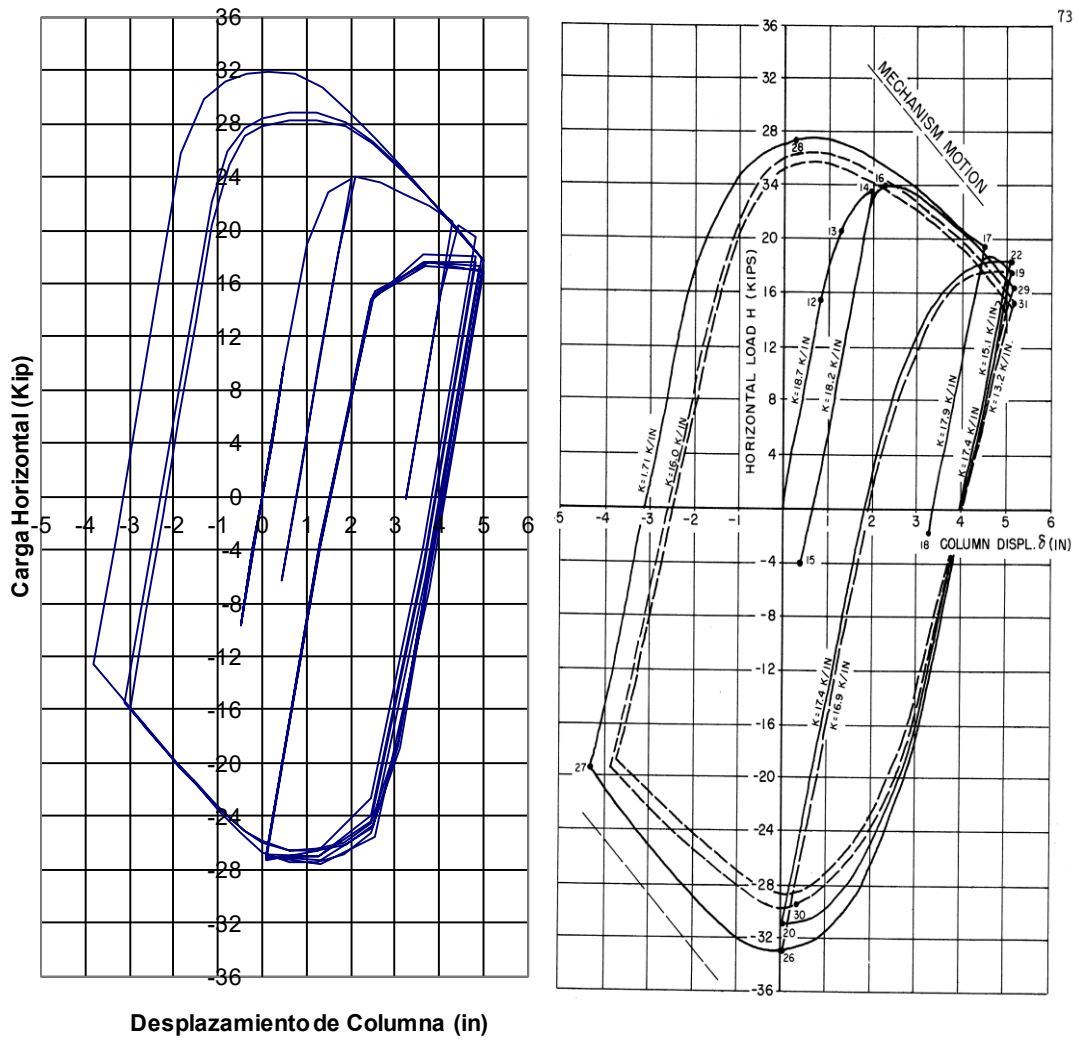
Figura 3.35: Modelo B2. Deformación ϵ_{xx} para un desplazamiento de 4.5"

3.1.9 Espécimen B3

El modelo matemático consta de 2519 nudos y 2360 elementos de cáscara, modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.10 y utilizando tres curvas idealizadas de esfuerzo-deformación multilineal para simular las propiedades del acero ASTM A36, con la regla de endurecimiento cinemática. Cada elemento se modeló con su valor de esfuerzo de fluencia y curva de igual forma que en los modelos anteriores.

En la Figura 3.36 se comparan las gráficas de desplazamiento versus carga horizontal del espécimen ensayado y del modelo matemático. De la gráfica se puede observar que el comportamiento global del modelo es muy similar al del ensayo, teniendo como referencia los valores máximos de desplazamiento y deformación. En el lazo superior no se observa lo mismo, ya que en el mismo informe del ensayo se menciona que una de las vigas sufrió un pandeo lateral torsional, que causó una disminución en la resistencia de esta viga. Como consecuencia los ciclos de carga exhibieron un comportamiento inestable de los lazos de histéresis (ver página 21 del reporte EERC 73-27).

En la Figura 3.37 se muestra una fotografía del espécimen al final del ensayo. Se observa el pandeo de las alas de las vigas. En la Figura 3.38 se presenta la gráfica de esfuerzos normales en dirección Y para un desplazamiento de 5" en el modelo matemático; allí se observa que los elementos más esforzados son las alas de la viga, lo cual coincide con lo ocurrido en el ensayo.



Desplazamiento de Columna (in)

Modelo

Ensayo

Figura 3.36: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Especimen B3

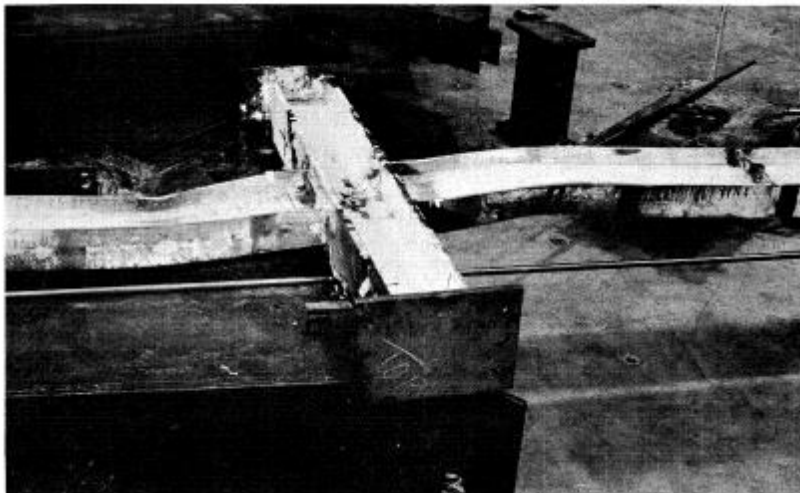


Figura 3.37: Especimen B3 después del ensayo (EERC 73-27)

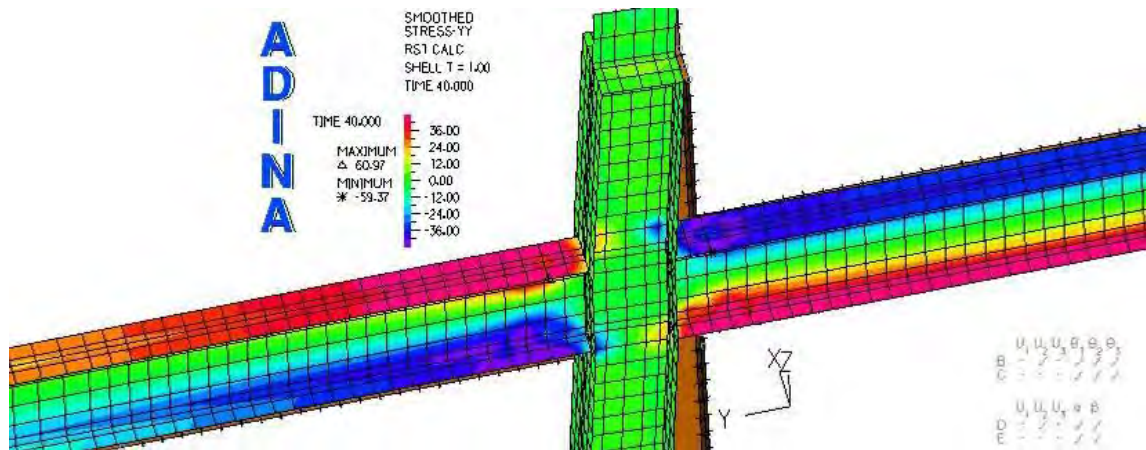


Figura 3.38: Modelo B3, Esfuerzos Y-Y para un desplazamiento de 5"

3.1.10 Espécimen B4

El modelo matemático consta de 1207 nudos y 1079 elementos de cáscara, modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.10 y utilizando tres curvas idealizadas de esfuerzo-deformación multilínea para simular las propiedades del acero ASTM A36, con la regla de endurecimiento cinemática. Cada elemento se modeló con su valor de esfuerzo de fluencia y respectiva curva, igual que en el modelo B1.

En la Figura 3.39 se comparan las gráficas de desplazamiento versus carga horizontal del espécimen ensayado y el modelo matemático. De la gráfica se puede observar que el comportamiento global del modelo es similar al del ensayo. Sin embargo, en el modelo se llega a la fluencia antes que en el ensayo, y como consecuencia se tienen lazos de histéresis más pequeños. Este espécimen se comportó muy bien a lo largo del ensayo, como se aprecia en los lazos de histéresis. Para un desplazamiento de la columna de 6" se presentó un pequeño pandeo lateral visible, pero no ocasionó pérdida de resistencia en el espécimen. En la Figura 3.40 se muestra la foto del espécimen B4 después del ensayo, donde casi no se aprecian pandeos locales en vigas o columnas (ver página 22 del reporte, EERC 73-27).

En la Figura 3.41 se presenta la gráfica del modelo matemático en el último ciclo de carga, con desplazamiento 0. Al igual que en el ensayo, no se aprecia pandeo en las alas, pero sí una ligera deformación en la columna.

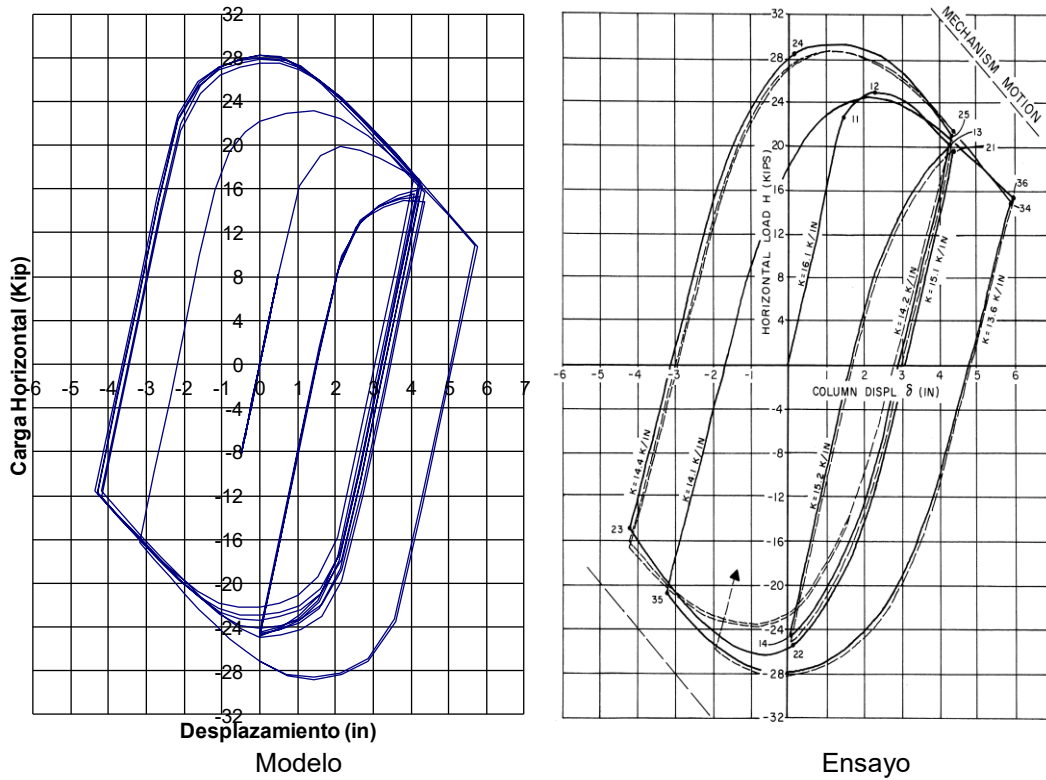


Figura 3.39: Diagrama Carga vs. Desplazamiento-Espécimen B4

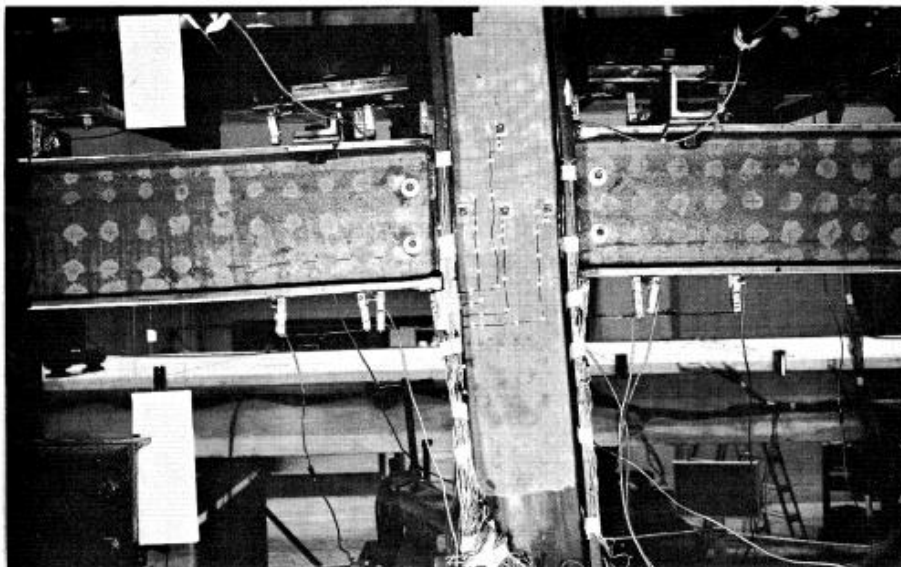


Figura 3.40: Espécimen B4 al fina del ensayo (EERC 73-27)

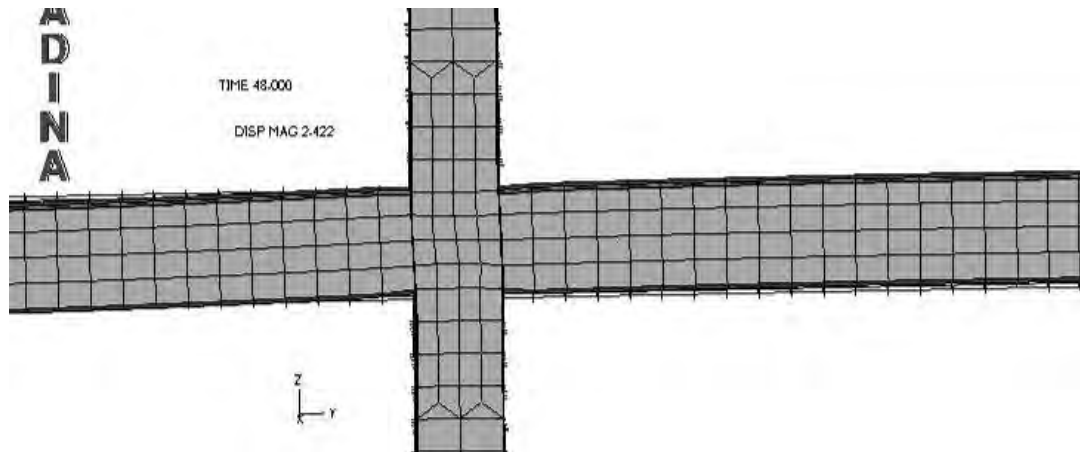


Figura 3.41: Modelo Espécimen B4, último ciclo de carga

3.2 RESULTADOS PARA MODELOS A ESCALA REAL

En esta sección se presentan los modelos a escala real de los especímenes A1, A2, B1 y B2, descritos en el capítulo. A estos modelos se les denomina Prototipos A y B y se realizaron de acuerdo a las dimensiones de sección presentadas en las tablas 2.7 y 2.8 respectivamente.

Las dimensiones de la columna y de las vigas se modelaron de acuerdo a la figura 2.15, donde se muestra un edificio cuya altura de entrepiso es 12 pies y la longitud de los vanos es de 24 pies; partir de éste se obtuvo el modelo que se presenta en la Figura 3.42. La carga axial de la columna fue proporcional al área y fue de 263 kip para el prototipo A y de 1159 kip para el prototipo B. Las cargas G1 y G2, que simulan las cargas de gravedad sobre las vigas, fueron 39 kip en ambos casos. La carga horizontal H, aplicada en el extremo inferior de la columna, varió de acuerdo al ciclo de carga preseleccionado. Se utilizaron los mismos ciclos de carga utilizados en los especímenes.

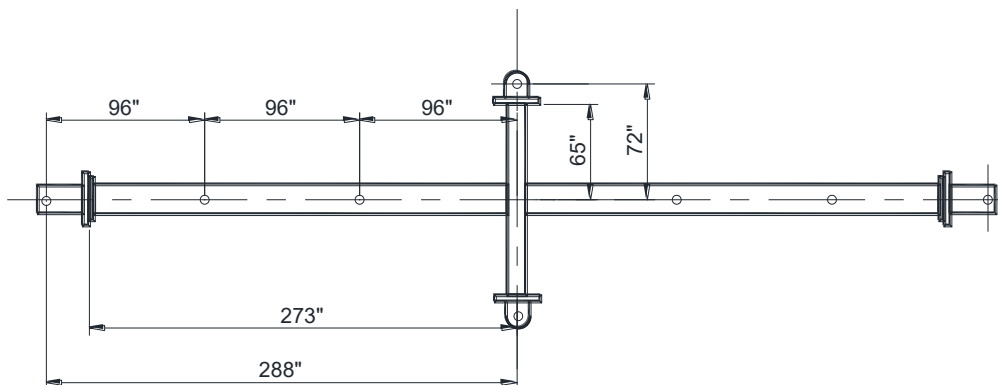


Figura 3.42: Modelo idealizado a escala real

3.2.1 Prototipo A1

Para el prototipo A1 se emplearon 2720 nudos y 2483 elementos de cáscara. Se utilizó la misma historia de carga que en el espécimen A1 (ver figura 2.23) pero amplificada por un factor tal que se obtenga el mismo ángulo de rotación de la columna que se tuvo en el ensayo del espécimen (modelo a escala) A1. El factor se obtuvo de la relación entre las longitudes de las columnas, la cual fue 1.8. Para el modelamiento de las curvas de histéresis se usó la regla de endurecimiento cinemática.

En la Figura 3.43 se muestra las curvas Desplazamiento-Carga Horizontal tanto del espécimen como del prototipo A1. De la figura se observa que ambas curvas siguen los mismos patrones de comportamiento en cuanto a la resistencia en la carga y descarga, pero a mayor escala. La rigidez inicial del Prototipo es superior a la del espécimen, los valores son de 12.2kip/in y de 8.01kip/in respectivamente. Además se observa que tanto el espécimen como el prototipo tienen casi la misma ductilidad (en términos del desplazamiento), alrededor de 4.5. En la Figura 3.44 se presenta el modelo del prototipo al final de los ciclos de carga con desplazamiento 0. Como se observa, no se presenta pandeo torsional en las vigas, ni grandes deformaciones, al igual que en el espécimen.

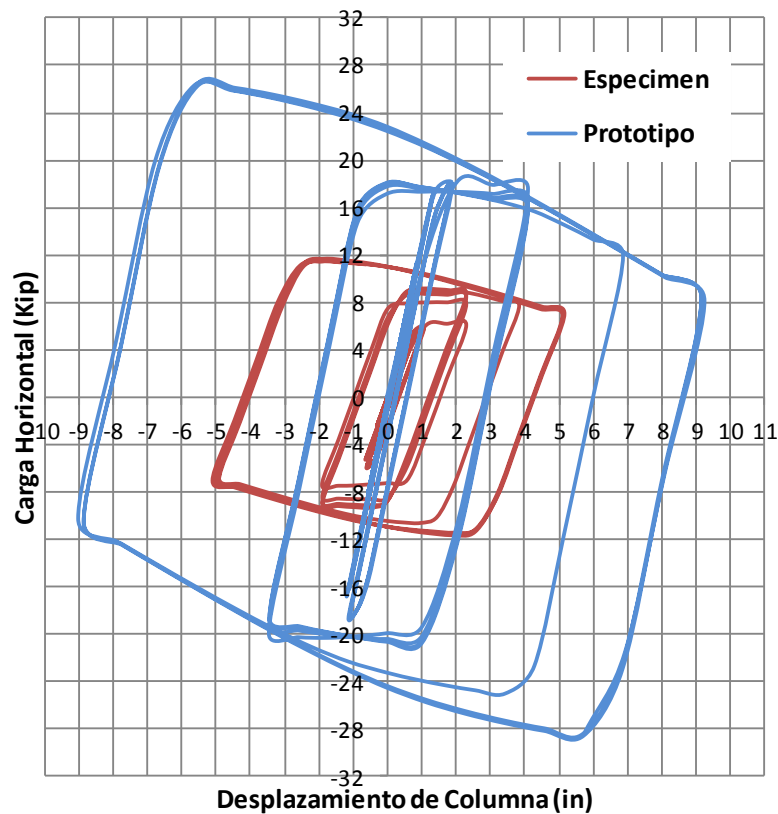


Figura 3.43: Gráfica Carga-Desplazamiento, Prototipo y Especimen A1

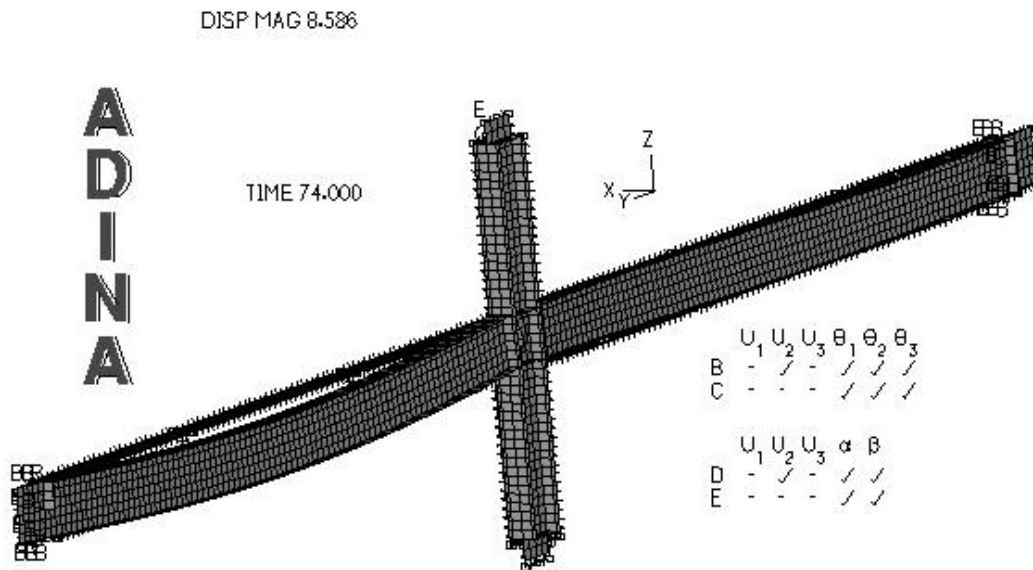


Figura 3.44: Modelo Prototipo A1, último ciclo de carga

3.2.2 Prototipo A2

Es el mismo prototipo anterior pero con otra historia de carga; la historia de carga fue la misma que la del espécimen A2 (ver figura 2.23) pero amplificada por el factor 1.8. También se usó la regla de endurecimiento cinemático para modelar los lazos de histéresis.

En la Figura 3.45 se muestran las curvas Desplazamiento-Carga Horizontal tanto del espécimen como del prototipo A2. De la figura se puede observar que el prototipo llega a la fluencia con una carga de 16 kip mientras que el Especímen lo hace con una carga de 5 kip y la máxima carga debido al endurecimiento, para el prototipo es de 30 kip y para el espécimen de 10.3 kip; en ambos casos casi se duplica la carga debido al endurecimiento.

Este modelo sufre una caída en su resistencia en el penúltimo ciclo de carga, debido al pandeo lateral torsional que sufren las vigas, como se muestra en la Figura 3.46. Esto hace que los lazos de histéresis aparezcan distorsionados. En el mismo gráfico se puede observar cómo en el modelo numérico se han eliminado algunos elementos finitos, específicamente de la zona panel de la columna; esto debido a que dichos puntos alcanzaron su máxima deformación.

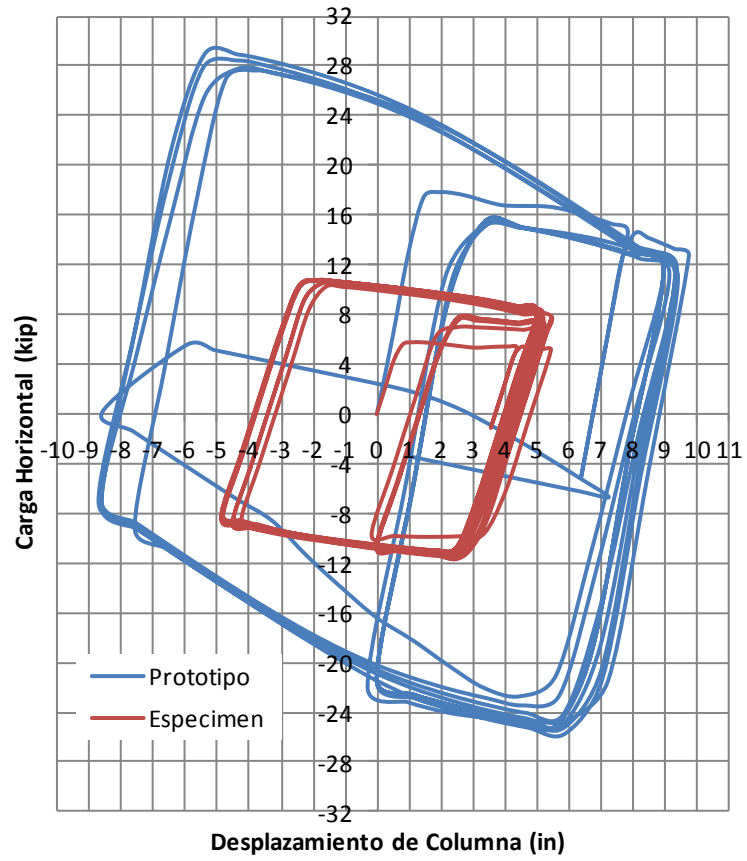


Figura 3.45: Gráfica Carga-Desplazamiento, Prototipo y Especimen A2

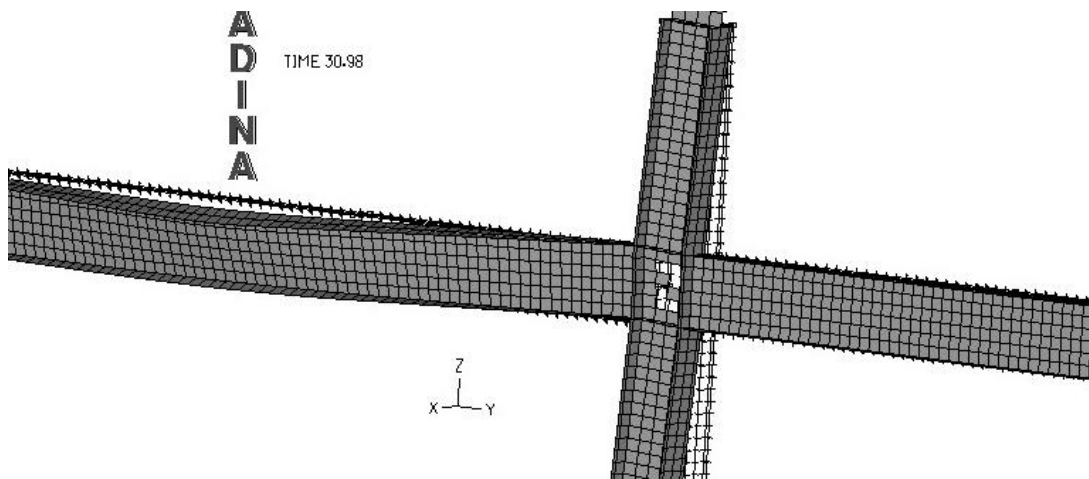


Figura 3.46: Modelo Prototipo A2, último ciclo de carga, desplazamiento 9"

3.2.3 Prototipo B1

En el prototipo B1 se emplearon 3155 nudos y 2920 elementos de cáscara. Se escalo la historia de carga del espécimen espécimen B1 (ver figura 2.25), para tener el mismo ángulo de rotación de la columna; el factor de amplificación del desplazamiento fue de 1.8 y se utilizó también la misma regla de endurecimiento, cinemática.

En la Figura 3.47 se muestran las curvas Desplazamiento-Carga Horizontal tanto del espécimen B1 como del prototipo B1. De la figura se observa que ambos siguen el mismo patrón de comportamiento, pero el prototipo a mayor escala. La rigidez inicial del Prototipo es superior a la del espécimen, los valores son de 42.2kip/in y de 24.4kip/in respectivamente. En el prototipo no se llega a la fluencia hasta un desplazamiento aproximado de 2" y en el espécimen 1.1", su relación es proporcional al factor de escala utilizado para amplificar la historia de carga. También se observa en la curva del prototipo que la resistencia cae en el último ciclo de carga por presentarse un pandeo torsional, ver Figura 3.48.

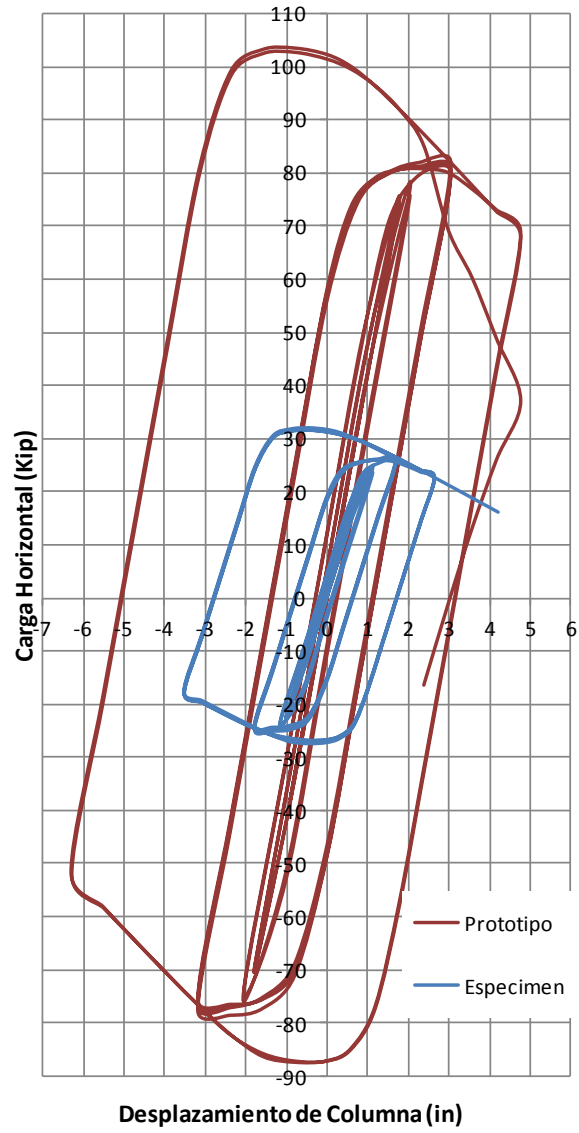


Figura 3.47: Gráfica Carga-Desplazamiento, Prototipo y Espécimen B1

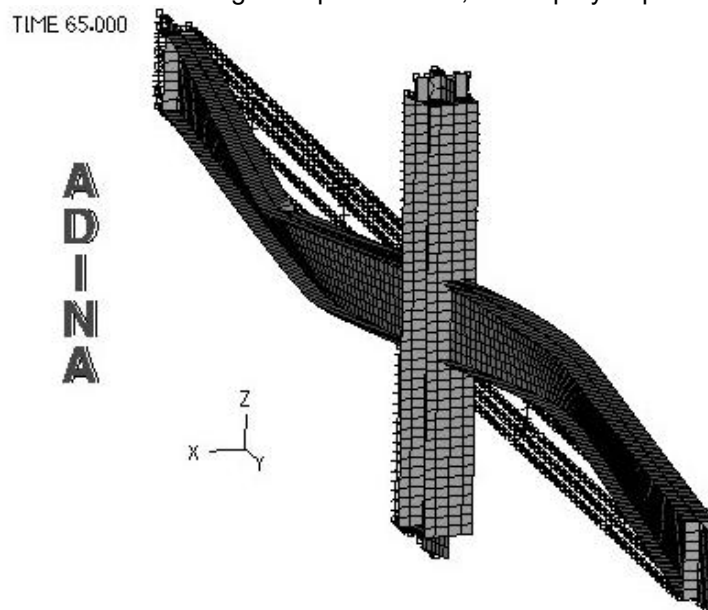


Figura 3.48: Modelo Prototipo B1, último ciclo de carga

3.2.4 Prototipo B2

Es el mismo Prototipo B1 pero con otra historia de carga. La historia de carga fue la misma que la del espécimen B2 (ver figura 2.25) pero amplificada para obtener el mismo ángulo de rotación de la columna. El factor de amplificación fue 1.8. Al igual que en el espécimen B2, se usó la regla de endurecimiento cinemático.

En la Figura 3.49 se muestran las curvas Desplazamiento-Carga Horizontal tanto del espécimen como del prototipo B2. De la figura se puede observar un patrón similar de comportamiento pero a diferente escala. El prototipo llega a la fluencia con una carga de 74 kip mientras que el espécimen lo hace con una carga de 21.7 kip y la máxima carga debido al endurecimiento, para el prototipo es de 124 kip y para el espécimen de 37 kip.

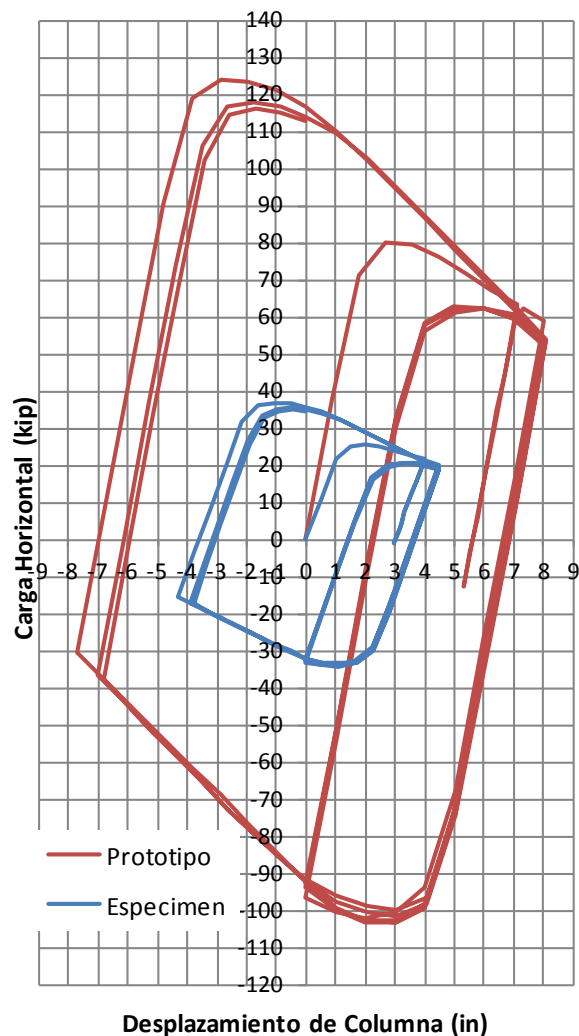


Figura 3.49: Gráfica Carga-Desplazamiento, Prototipo y Especimen B2

3.3 REFORZAMIENTO DE LAS UNIONES

Como se mencionó en el capítulo anterior, dos especímenes fueron ensayados reforzando la zona panel, que es la zona de unión de las vigas a la columna. Los especímenes reforzados fueron del tipo A y se ensayaron dos especímenes A3 y A4. Las historias de carga de ambos se presentan en la figura 2.24.

3.3.1 Espécimen A3

El modelo matemático consta de 1875 nudos y 1680 elementos de cáscara (ver Figura 3.50), modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.9 y utilizando una curva idealizada de esfuerzo deformación multilineal que simula la curva del ensayo para el acero ASTM A36 (ver figura 2.1), con la regla de endurecimiento isotrópica.

Al igual que en los especímenes A1 y A2 se prepararon dos curvas esfuerzo-deformación, con el fin de modelar cada elemento con sus propiedades correctas (ver Figura 3.22). Al alma de la viga se le asignó el material 2; el resto de elementos se modelaron con el material 1.

En la Figura 3.51 comparan resultados del modelo numérico y el ensayo, donde se aprecia que si bien es cierto que el comportamiento del modelo se aproxima al del ensayo, éste no es exactamente igual, ya que en el ensayo se llega a la fluencia antes que en el modelo. Sin embargo la energía disipada dada por el área del lazo de histéresis es casi igual, siendo la mayor diferencia en el lazo que va desde 0 a 6 pulgadas; allí la diferencia es de 10% mayor en los lazos del modelo respecto a los del ensayo.

En la Figura 3.52 se comparan las gráficas de Carga –Desplazamiento de los modelos A2 sin refuerzo y A3 reforzado. Se observa como al reforzar la zona del panel mejora notablemente el comportamiento del espécimen incrementando su capacidad de carga inicial de 5.8 Kip a 13.2 Kip y la carga máxima por el endurecimiento de 10kip a 15kip.

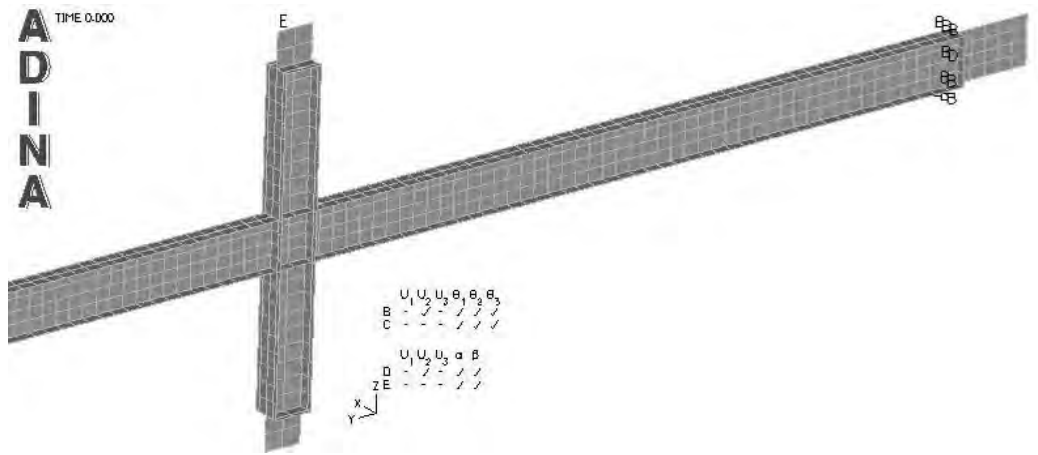
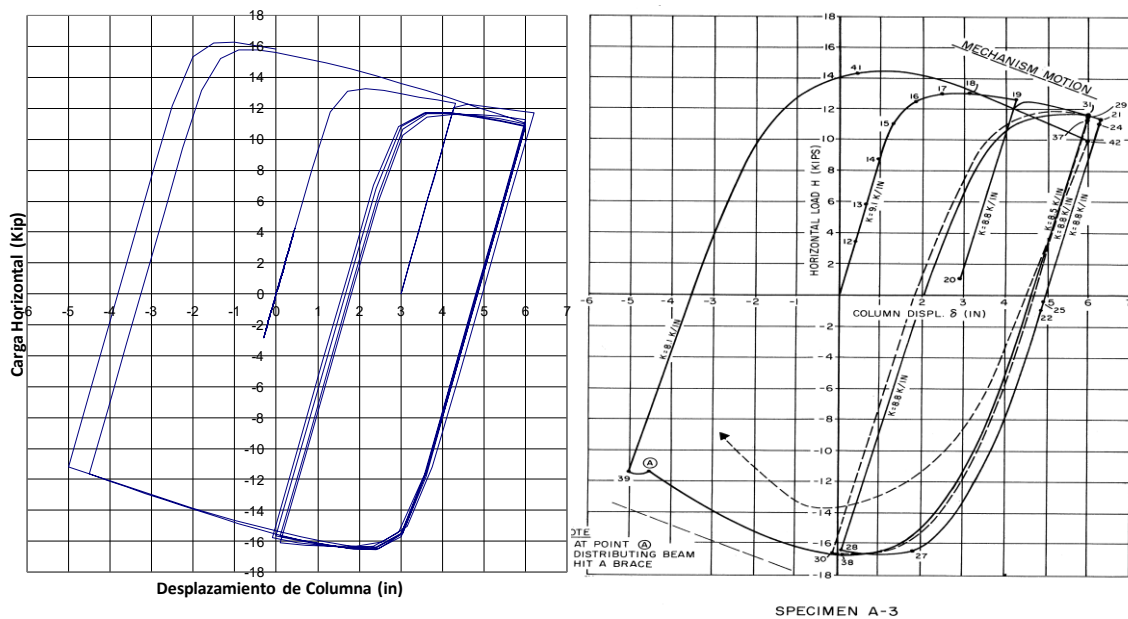


Figura 3.50: Modelo Espécimen A3



Modelo Ensayo
Figura 3.51: Gráfica Carga-Desplazamiento, Espécimen A3

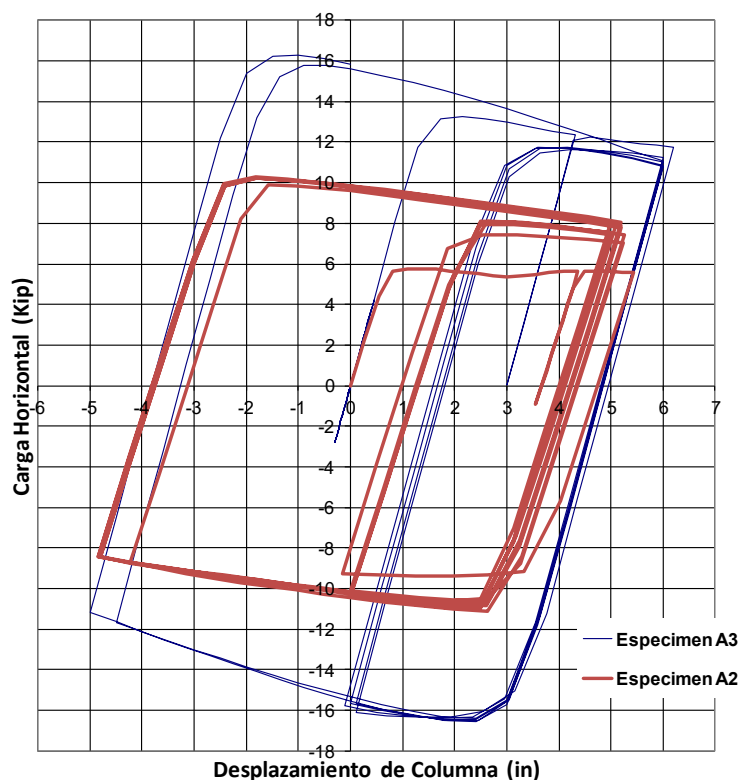


Figura 3.52: Gráfica Carga-Desplazamiento, Especímenes A3 y A2

3.3.2 Especímen A4

El modelo matemático consta de 2760 nudos y 2568 elementos de cáscara, modelado con las dimensiones y propiedades de la sección dadas en la tabla 2.9 y se utilizó una curva idealizada de esfuerzo deformación multilínea que simula el acero ASTM A36, ver figura 2.1, con la regla de endurecimiento cinemática.

Al igual que en el espécimen anterior se prepararon dos curvas de esfuerzo-deformación con el fin de modelar cada elemento con las propiedades que le corresponden (ver Figura 3.22). Al alma de la viga se le asignó el material 2, el resto se modeló con el material 1.

En la Figura 3.53 se comparan las gráficas de desplazamiento-carga horizontal del modelo y del ensayo. En este modelo donde se reforzó la zona del panel con planchas de $\frac{1}{4}$ ". En este caso no se logró la aproximación que se esperaba; el programa comienza a iterar con advertencia de error debido a grandes deformaciones torsionales que sufre el modelo de este espécimen, ver Figura 3.54. Esto también se dio en los resultados del ensayo donde textualmente se dice que en el espécimen A4 los grandes requisitos de

rotación plástica en las conexiones condujeron al pandeo local y lateral torsional de las vigas, claramente visibles en fotografías que se muestran en la Figura 3.55. Esto significó una caída en la resistencia del espécimen ocurrido después de solo la primera descarga (ver Figura 3.53). En el modelo numérico ocurrió esto un poco antes que en el ensayo.

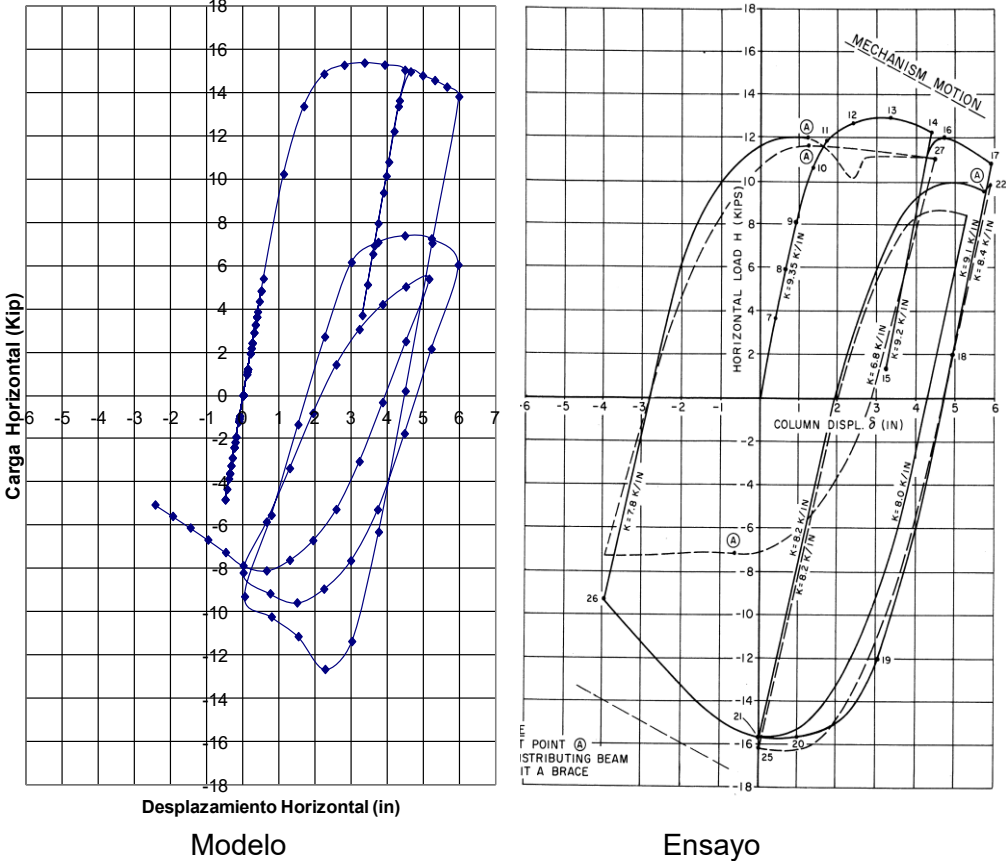


Figura 3.53: Diagrama Carga-Desplazamiento, Especimen A4

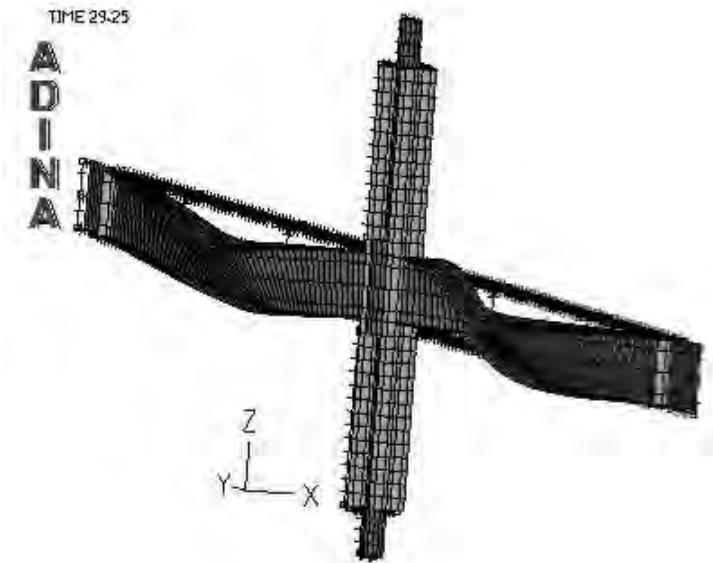
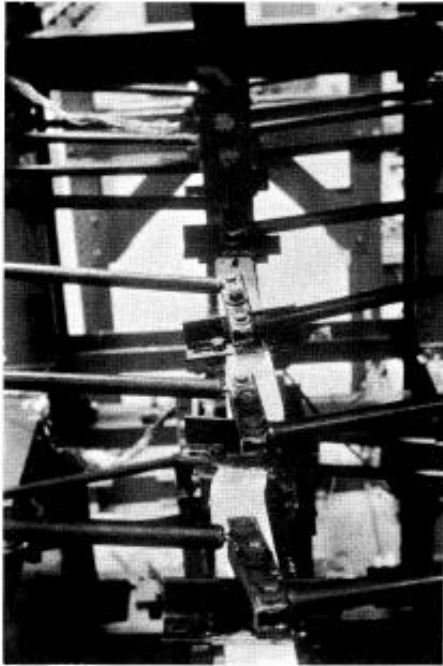
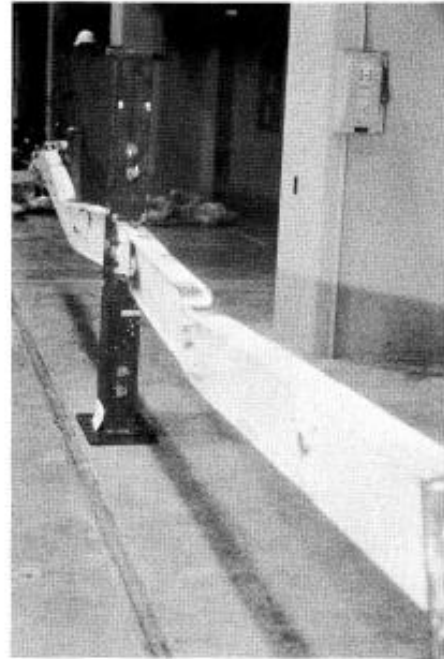


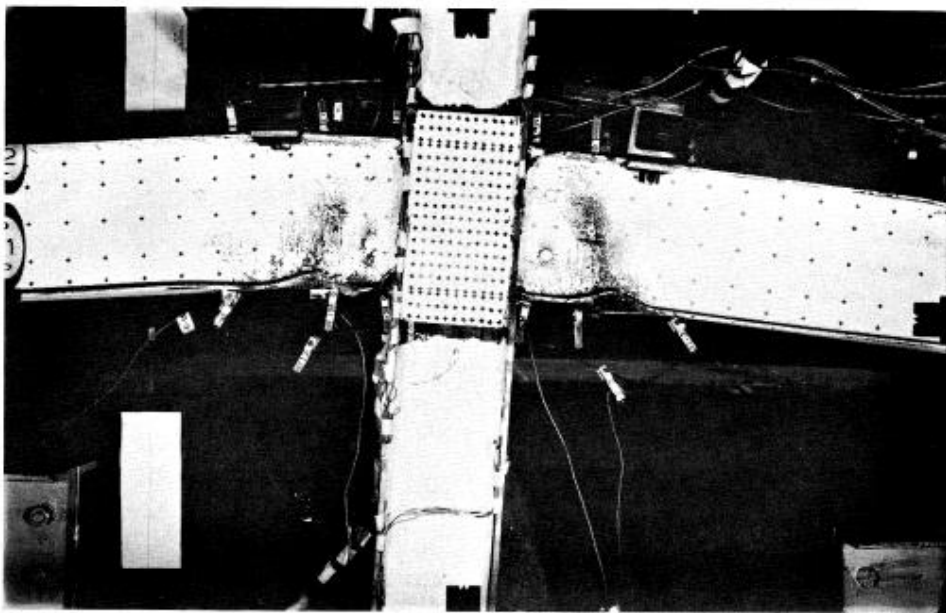
Figura 3.54: Modelo Especimen A4 al final de los ciclos de carga



Pandeo torsional lateral por compresión del ala (A4)



Espécimen A4 después del ensayo



Zona panel reforzada con planchas de acero

Figura 3.55: Espécimen A4 (Reporte EERC 73-27)

3.4 INFLUENCIA DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL ACERO

En esta parte emplearemos para el estudio dos modelos uno del tipo Viga en voladizo y dos del tipo Viga-Columna; para modelar el espécimen con una curva de esfuerzo-deformación cuyo esfuerzo de fluencia sea de 36 ksi, un esfuerzo último de rotura de 58 ksi y una rigidez inicial de 29,000 kip por pulgada cuadrada tal como se indica en los manuales de diseño. Esto con el propósito de comparar los resultados del modelamiento que se hubiese realizado antes del ensayo versus el modelo realizado con los datos del ensayo y versus el ensayo mismo. Cabe resaltar que antes del ensayo no se hubiese contado con el esfuerzo de fluencia del ala ni del alma de la sección, tampoco hubiésemos contado con la curva de esfuerzo-deformación ni con el módulo de elasticidad para cada tipo de material. Además de esto, se hubiese empleado los espesores que se indican en los manuales para cada tipo de sección estándar W.

3.4.1 Modelo tipo viga en voladizo

En la Figura 3.56 se presenta la gráfica multilineal esfuerzo-deformación para el acero ASTM A36 de tablas, donde se compara con la grafica obtenida del ensayo. Como apreciamos la curva A36 de acuerdo a lo manuales presenta valores de esfuerzo inferiores que las del ensayo para una misma deformación unitaria, por lo que se espera que en las curvas de Carga-Deflexión se presenten valores menores que lo del ensayo y su respectivo modelo.

Para este modelo se tomo el espécimen F1 y se realizó el modelo F1-M. Este espécimen fue modelado con la misma historia de carga que la del espécimen F1S y F1-C2. En la Figura 3.57 se presenta la gráfica Carga-Deflexión con la historia de carga del espécimen F1S. De la gráfica podemos observar que desde la fluencia en adelante se tienen valores de de tienen valores de carga 6% menores que los del modelo F1S y 12% menores respecto de los valores obtenidos en el ensayo. Sin embargo el comportamiento del espécimen es el mismo, la viga al final de los ciclos de carga sufre un pandeo local en las alas al igual que en el ensayo (ver Figura 3.12).

En la Figura 3.58 se presenta la comparación del espécimen F1-C2 versus el modelo con los datos del ensayo y el modelo F1-M, en el cual podemos observar que existe una diferencia sustancial debido a que en el ensayo se obtuvieron valores de fluencia de 40Ksi y para el modelo se utilizó la regla de endurecimiento mixto con lo cual la gráfica se acercaba más al comportamiento del ensayo. En el caso del ADINA esta opción solo está disponible cuando se usan curva de esfuerzo-deformación bilineales. Si tomamos la curva bilineal del modelo F1-C2 y le cambiamos el esfuerzo de fluencia se obtiene una gráfica de deflexión-carga como la de Figura 3.59, la cual se aproxima más a la curva del ensayo con valores máximos y mínimos 12% menores con respecto a los del ensayo. El primer ciclo de carga se mantiene la misma diferencia de valores de carga 12% menores que los del ensayo. La viga al final de los ciclos de carga sufre un pandeo local en las alas al igual que en el ensayo (ver Figura 3.15).

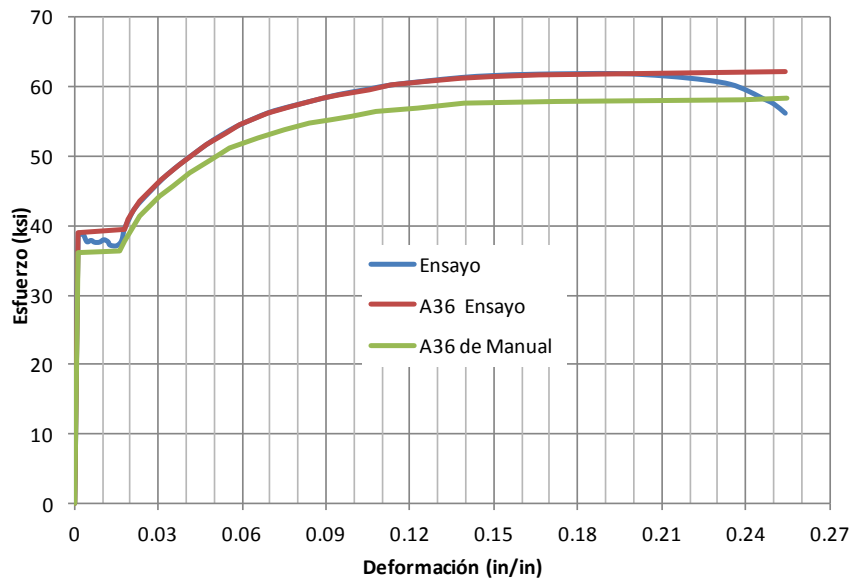


Figura 3.56: Gráfica Esfuerzo-Deformación ASTM A-36 Manual

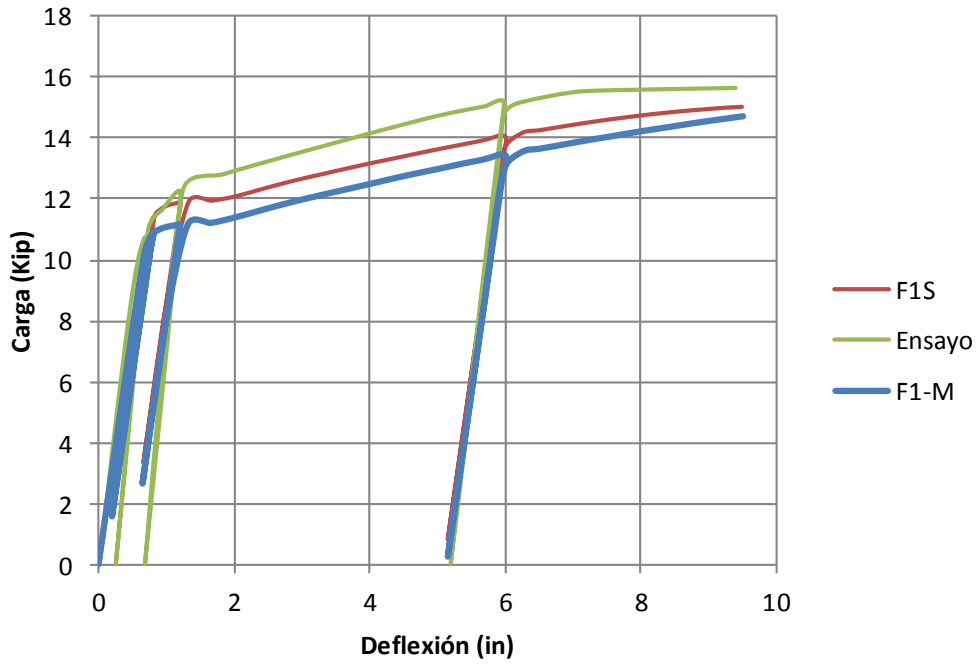


Figura 3.57: Gráfica Carga-Deflexión, Espécimen F1S Vs. Modelo F1-M

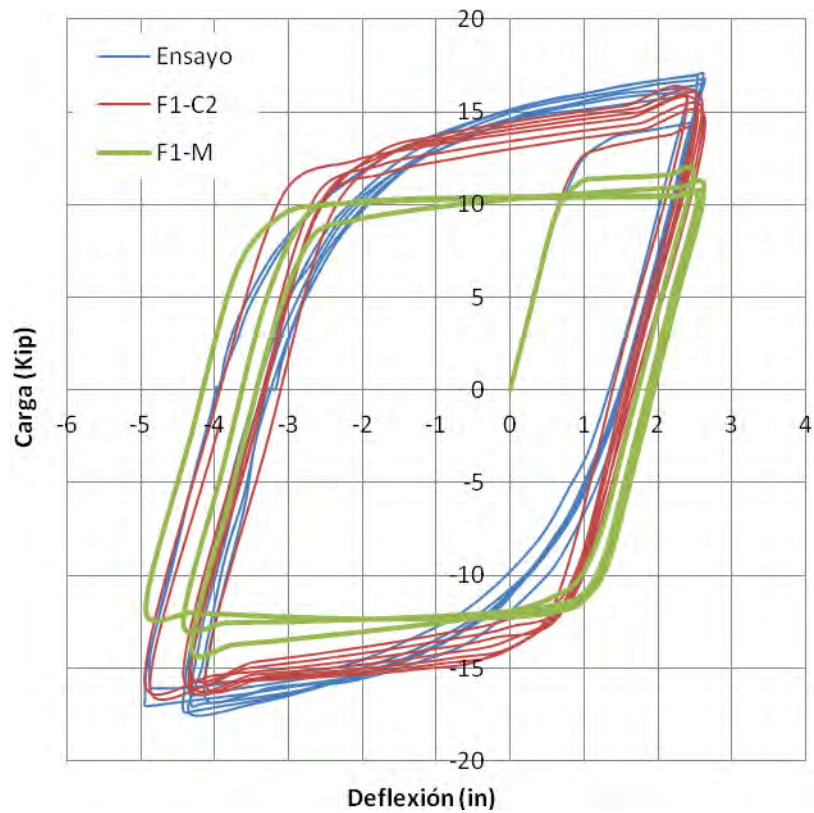


Figura 3.58: Carga-Deflexión, Espécimen y Modelo F1-C2 Vs. F1-M

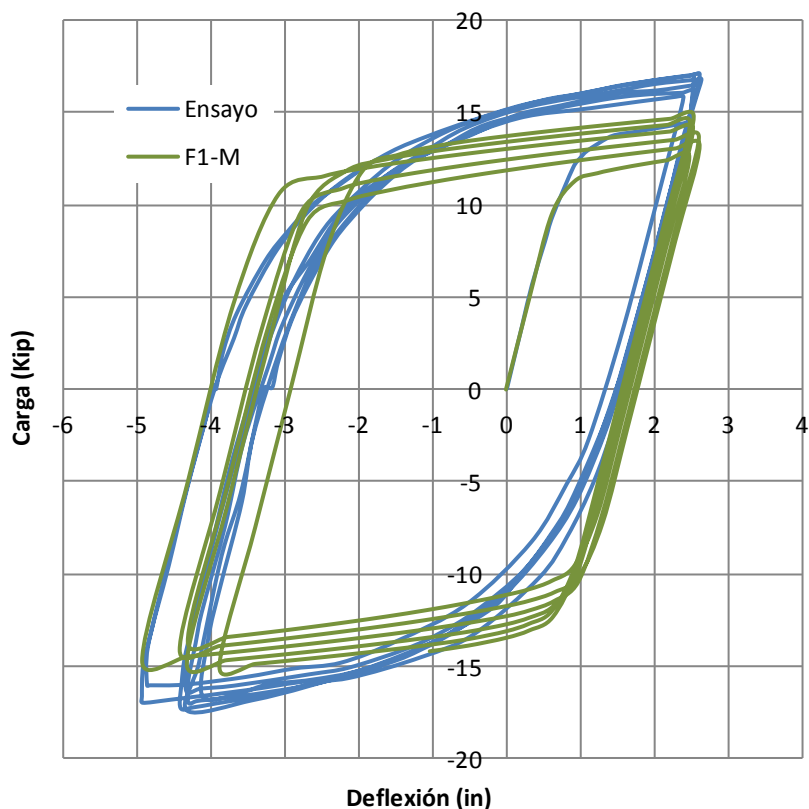


Figura 3.59: Gráfica Carga-Deflexión-Especimen F1-C2 Vs. Modelo F1-M

3.4.2 Modelo tipo Viga-Columna

Para este modelo se tomaron los especímenes A y B se realizaron los modelos AM y BM los cuales fueron evaluados con las historias de carga de los especímenes A2 y B2 respectivamente.

En la Figura 3.60 se presenta la gráfica Carga-Deflexión con la historia de carga del espécimen A2. De la gráfica podemos observar que para el primer ciclo de carga se tienen valores de carga 12% menores que los del modelo A2 y 22% menores respecto de los valores obtenidos en el ensayo. El Comportamiento en cuanto a la aparición de los mayores esfuerzos en el espécimen es el mismo, el área de mayor deformación se presenta en la zona panel, en la Figura 3.61 se puede observar el gráfico de deformación plástica acumulada en el instante donde la deformación es de 0.25 in/in a partir de este instante el modelo AM pierde su resistencia y los lasos de histéresis caen como se aprecia en la Figura 3.60, sin llegar a completar los últimos ciclos de carga.

En la Figura 3.62 se presenta la comparación del espécimen B2 versus el modelo B con los datos del ensayo y versus el modelo BM, en el cual podemos observar que para los primeros ciclos de carga y descarga los valores del ensayo son 100% mayores comparados con el modelo BM y en general el comportamiento de modelo BM difiere con los del ensayo por lo que toma relevancia el hecho de poder modelar con las características del acero modelados en el ensayo.

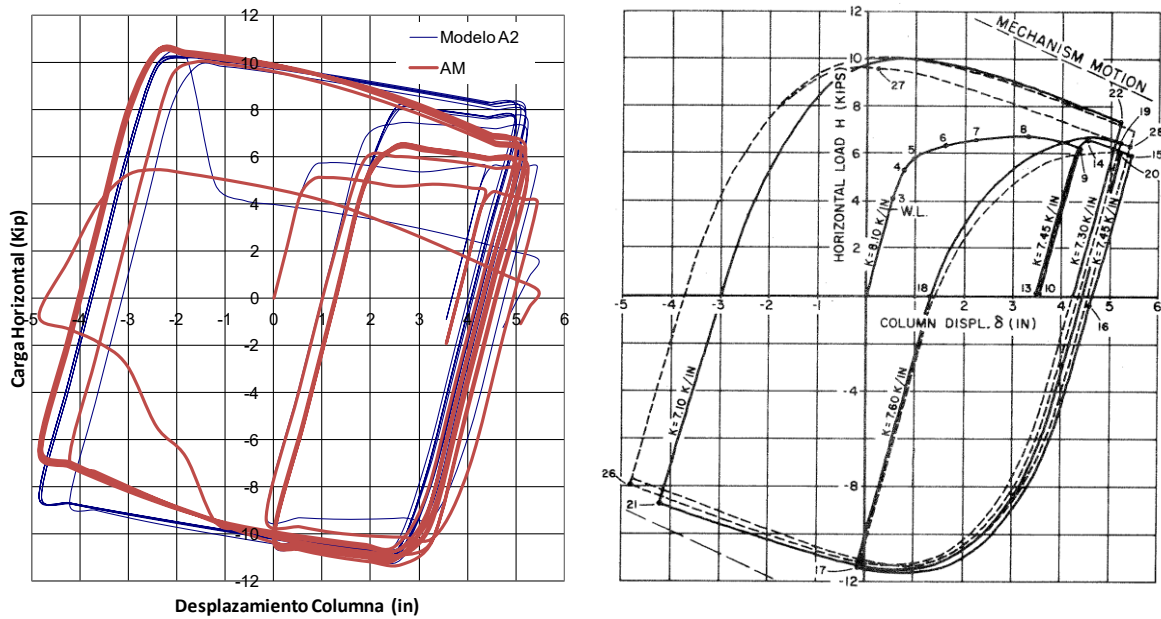


Figura 3.60: Diagrama Carga-Desplazamiento, Modelo AM

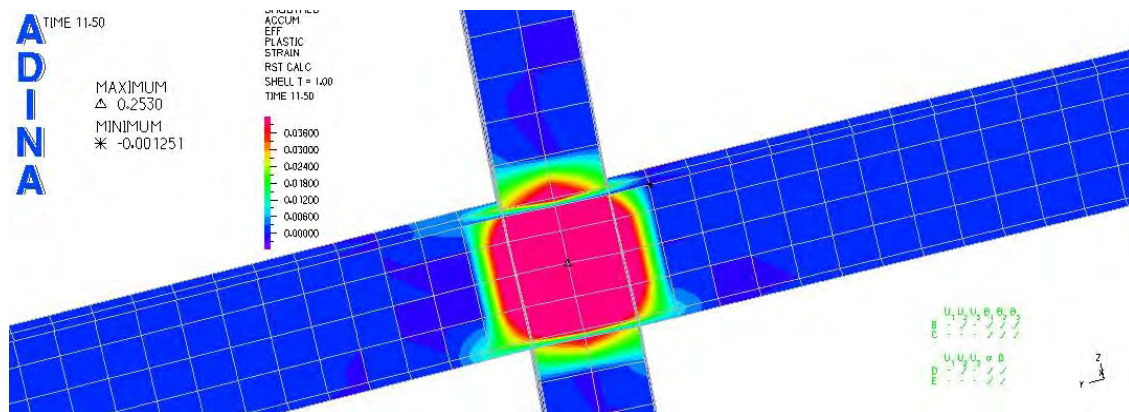


Figura 3.61: Diagrama de deformación plástica acumulada (in/in), Modelo AM

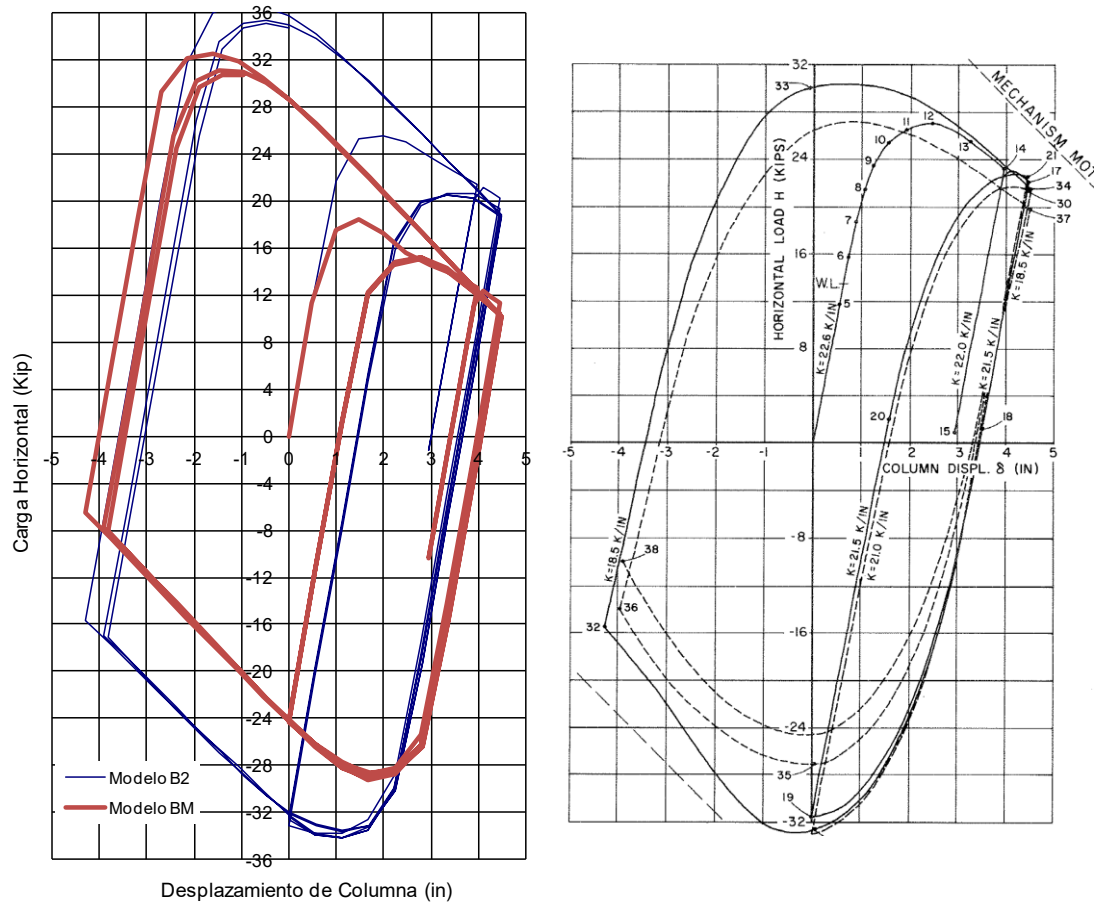


Figura 3.62: Gráfica Carga-Desplazamiento, Modelo BM

CONCLUSIONES

- En el método de análisis empleado en este estudio se considera un proceso incremental e iterativo. Para cada incremento en las fuerzas de cuerpo o de superficie se determinan las fuerzas nodales concentradas equivalentes y, empleando una matriz de rigidez tangente actualizada, se determinan correcciones a los desplazamientos nodales. A partir de estos se calculan incrementos en las deformaciones unitarias en los puntos de integración numérica (de cada elemento finito) y, empleando las leyes constitutivas apropiadas, se obtienen los esfuerzos. Luego se determinan las fuerzas nodales en equilibrio con los esfuerzos internos y, comparándolas con las fuerzas nodales aplicadas, se determinan las fuerzas aún desequilibradas. Considerando tales fuerzas desequilibradas se corrigen los desplazamientos de los nudos, conservando la matriz tangente obtenida al inicio del incremento de carga. Se repite el proceso actualizando los esfuerzos y determinando las fuerzas desequilibradas y las correcciones a los desplazamientos hasta satisfacer correctamente las condiciones de equilibrio, luego de lo cual puede procederse al siguiente incremento de carga. En los modelos considerados en esta tesis se observó que el procedimiento es siempre convergente, excepto cuando la estructura se vuelve efectivamente inestable, como en el caso del espécimen A4.
- La mayor parte del esfuerzo de cómputo en el análisis no lineal con elementos finitos está en la determinación del estado de esfuerzos que corresponde a un determinado estado de deformación en el punto considerado. Esto debe realizarse en cada uno de los puntos de integración numérica (4 por elemento en el presente estudio) de cada uno de los cientos y en algunos casos miles elementos del modelo de elementos finitos, en cada una de las iteraciones de cada uno de los incrementos de carga. En este estudio se consideraron un mínimo de 32 incrementos para cada ciclo de carga y descarga de los ensayos.

- En el caso de metales, las teorías de plasticidad que describen el comportamiento no lineal del material están bien establecidas. Estas teorías se basan en las condiciones de fluencia, reglas de endurecimiento (que gobiernan los cambios en las condiciones de fluencia como resultado de las deformaciones) y una regla de flujo que determina las deformaciones plásticas que se producen a medida que evolucionan los esfuerzos. Aún cuando el programa de cómputo empleado no permite considerar las reglas de endurecimiento más generales, la comparación de los resultados numéricos con la información experimental muestra que pueden predecirse correctamente los aspectos básicos del comportamiento frente a cargas cíclicas.
- Sin embargo, este tipo de cálculo todavía resulta ser muy complejo para aplicarse como procedimiento estándar en los diseños comunes de estructuras, puesto que se requeriría mucho tiempo para procesar las respuestas, por la cantidad de ecuaciones que se deben resolver por cada paso del proceso, lo que lo hace todavía muy ineficiente. Por eso, en las condiciones actuales el análisis no lineal de componentes de estructuras de acero con modelo de elementos finitos podría ser una herramienta más útil al investigador. Realizando un modelamiento previo del espécimen que se requiere investigar; se podrían facilitar las decisiones sobre cómo desarrollar los ensayos. También puede ser útil un análisis de este tipo en el reforzamiento de elementos estructurales afectados por acciones extremas o sobre los que se piensa aplicar acciones originalmente no previstas.
- En cuanto a los modelos de los especímenes, para definir apropiadamente el modelo se requiere más información que la que típicamente se utilizaría en un análisis lineal. Las comparaciones realizadas muestran que la variabilidad en propiedades tales como el esfuerzo de fluencia influye en el comportamiento no lineal observado a nivel global.
- En la mayoría de los casos los modelos matemáticos reprodujeron el tipo de falla que se observó al final del ensayo. También se aproximaron bastante bien los lazos de

histéresis, aunque con una ligera subestimación de la energía disipada. En todos los casos se pudo ver las zonas de mayores esfuerzos y deformaciones plásticas (máxima y acumulada) sobre las cuales los investigadores podrían poner más énfasis en el ensayo y planificar un nuevo ensayo reforzando esa zona, tal como ocurrió con el espécimen A3, o proponiendo una mejora en cuanto a una sección más compacta, como en el caso de los especímenes B3 y B4.

- Un tema importante es reconocer el carácter aproximado de las técnicas de elementos finitos. La determinación de rigideces y fuerzas se basa habitualmente en interpolaciones de desplazamientos que sólo serían exactas en el límite, para elementos infinitamente pequeños. En la tesis se hicieron comparaciones de los resultados obtenidos con distintos grados de refinamiento de las mallas de elementos finitos. Con mallas no muy finas, dividiendo las alas de los perfiles en cuatro filas de elementos y las almas en unas seis filas de elementos, se obtienen resultados muy precisos. Como primera aproximación podrían incluso emplearse mallas con elementos de mayor dimensión, lo cual ahorra tiempo en el procesamiento. Sin embargo, si se requiere hacer un control de deformaciones y esfuerzos de cierta zona del modelo se deberá refinar la malla localmente.

RECOMENDACIONES

- Para cuantificar correctamente el comportamiento no lineal no es suficiente conocer la geometría y las propiedades elásticas del material. Se requiere información adicional relativa a los parámetros que controlan el comportamiento, como es el esfuerzo de fluencia en metales. En la medida de lo posible, sería conveniente disponer de muestras de un lote de material con la misma fecha fabricación. Por otro lado, se considera conveniente desarrollar procedimientos para estimar los esfuerzos residuales preexistentes e incorporarlos en el proceso de análisis.
- El refinamiento de la malla de elementos finitos está directamente relacionado con la calidad de los resultados obtenidos. Sin embargo, no es necesario plantear una malla muy fina en una etapa inicial, en la que solo se podría requerir una estimación del comportamiento global del espécimen frente a cierto tipo de ensayo.
- Se requiere de un hardware adecuado para procesar este tipo de modelos, que para los procesadores modernos toma unos minutos en cada corrida, dependiendo el tiempo de la historia de carga y de los pasos por cada ciclo de carga. Se recomienda no menos de 32 pasos por cada ciclo de carga y descarga para lograr un curva de histéresis aproximada.
- Es recomendable invertir tiempo en realizar este tipo de análisis para tener estimaciones que permitan optimizar los ensayos de laboratorio. En la mayor parte de los casos los análisis deberán basarse en las propiedades nominales del material y las características geométricas indicadas en los manuales de diseño, no en las propiedades reales de los especímenes, pero aún así puede obtenerse información valiosa sobre el comportamiento esperado.
- Refiriéndose a los temas de mayor interés para el ingeniero civil involucrado en el diseño estructural, es importante desarrollar capacidades para realizar análisis no

lineales de estructuras de concreto armado y de albañilería. Los modelos de comportamiento no lineal para estos materiales son mucho más complejos (véase por ejemplo Chen y Han, 1988) y menos sustentados con información experimental para estados de esfuerzo multiaxiales, en comparación a los desarrollos hechos para metales (el criterio de fluencia de von Mises tiene aproximadamente un siglo). Sin embargo, dado que se espera continúe la tendencia hacia computadoras con mayor poder de cómputo y capacidad de memoria, puede preverse que el uso de técnicas de análisis no lineal para estos materiales será más común en un futuro cercano.

BIBLIOGRAFIA

- ADINA R&D, inc, Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis, Theory and Modeling Guide, Report ARD 03-07,(2003)
- Bathe, K.J. (1995) *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Belytschko, T., W.K. Liu y B. Moran (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons.
- Bertero, V.V., H. Krawinkler y E.P. Popov (1973). *Further Studies on Seismic Behavior of Steel Beam – Column Subassemblages*. Engineering Research Center. Reporte UCB/EERC 73-27. Universidad de California, Berkeley.
- Bertero V.V., J.C. Anderson y H. Krawinkler (1995). *Performance of steel building structures during the Northridge Earthquake*. Reporte UCB/EERC 94-09, Universidad de California, Berkeley.
- Chen W.F. y D.J. Han (1988). *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag, New York.
- Chrisfield M.A. (1991). *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, Londres.
- Fung Y.C. (1969). *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Galambos, T.V., J.F. Hajjar, C.J. Earls y J.L. Gross (1997). *Required Properties of High-Performance Steels*. National Institute of Standards and Technology. Reporte NISTIR 6004. Gaithersburg, MD.
- Kim, T., A.S. Whittaker, A.S. Gilani, V.V. Bertero y S.M. Takhirov (2000). *Cover-Plate and Flange-Plate Reinforced Steel Moment-Resisting Connections*. Pacific Earthquake Engineering Research Center, Reporte PEER 2000/07. Universidad de California, Berkeley
- Kojic, M. y K.J. Bathe (2005). *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. Springer, Berlin.
- Krawinkler, H., V.V. Bertero y E.P. Popov (1971). *Inelastic Behavior of Steel Beam to Column Subassemblages*. Earthquake Engineering Research Center. Reporte UCB/EERC 71-07. Universidad de California, Berkeley.

- Kuwamura, H. y T. Suzuki (1992), Low Cycle Fatigue Resistance of Welded Joints of High-Strength Steel Under Earthquake Loadings. *Décimo Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica*, 5, 2851-2856.
- Malvern, L.E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliff , NJ.
- Pinkey, R.B. (1973). *Cyclic Plastic Analysis of Structural Steel Joints*. Earthquake Engineering Research Center. Reporte UCB/EERC 73-15. Universidad de California, Berkeley
- Popov, E.P. y R.B. Pinkney (1967). *Behavior of Steel Building Connections Subjected to Repeated Inelastic Strain Reversal*. Report SESM 67-30 to American Iron and Steel Institute AISI, Universidad de California Berkeley.
- Popov, E.P. y R.B. Pinkney (1967). *Behavior of Steel Building Connections Subjected to Repeated Inelastic Strain Reversal*. Report SESM 67-31 to American Iron and Steel Institute AISI. Universidad de California Berkeley.
- Popov, E.P. y S.M. Takhirov (2000). Experimental Study of Large Seismic Steel Beam-to-Column Connections. Pacific Earthquake Engineering Research Center, Reporte PEER 2001/01. Universidad de California, Berkeley
- Prager W. (1959). *Introduction to Plasticity*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Zienkiewicz O.C.y R.L. Taylor (2004). *El Método de los Elementos Finitos*. 5ª ed. CIMNE, Barcelona.
- Zienkiewicz O.C., R.L. Taylor y J.Z. Zhu (2005). *The Finite Element Method*. 6ª ed. Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford-Burlington.