# ASIGNACIÓN DE FLUJOS DE TRANSITO A REDES DE TRANSPORTE URBANO

# ASSIGNATION OF TRANSIT FLUXES IN A NET OF URBAN TRANSPORT

**Pedro Canales García**


## *RESUMEN*

*La asignación de flujos de tránsito a una red de transporte urbano (AFRTU) puede hacerse considerando el principio de equilibrio formulado por Wardrop, que se refiere a la elección de rutas de viaje por parte de los usuarios. Esta elección es hecha por los usuarios, bajo la hipótesis de una información uniforme para todos, en base a la percepción que tienen del costo mínimo de viaje entre sus orígenes y destinos. Según este principio, en el equilibrio de los flujos en la red, ningún usuario mejoraría su costo de viaje cambiando de modo unilateral la ruta que inicialmente escogió. Los flujos de tránsito formados en estas condiciones, se denominan flujos de equilibrio determinístico del usuario. En este trabajo, se considera el interés que tiene el administrador de la red de optimizar inversiones (con el fin de mejorar el rendimiento de la red y lograr un uso racional de la misma), y, también, el interés de los usuarios, de minimizar su costo de viaje. En estos casos, se hace necesario formular un modelo que recoja estos dos intereses. Esto dio lugar a una formulación de programación matemática de dos niveles. Aquí, el segundo nivel modela el problema del usuario y se abordará mediante una desigualdad variacional, a este modelo se le conoce como un programa de dos niveles generalizado.*


*Palabras claves: Transporte, proyecto de redes de tránsito, equilibrio, desigualdad variacional, función gap.*


## *ABSTRACT*

*The assignation of traffic flow to an urban transportation network can be done using Wardrop's equilibrium principle, which deals the election of travel routes by the users. This election is done under the hypothesis of uniform information to users based on the perception they have of a minimum travel costs between the travel origin-destination. According to this principle, in the network flow point, none of the users would improve their travel costs changing the route initially chosen unilaterally. The traffic flow in these conditions are called user's deterministic traffic flow. In this work, we consider interest of the network administrator in optimizing his investment as well as the interest of the users to minimize travel costs. In this case, it's necessary to formulate a model which picks both interest. This gave rise to a mathematical formulation in two levels. The second level on this model describe the user problem by mathns of variational inequality. This formulation is known as a generalized two-level programm.*


*Key words: Transportation, traffic network project, equilibrium, variational inequality, gap function.*

Facultad de Ciencias - Sección de Postgrado
E-mail: pedro1007@hotmail.com

## INTRODUCCIÓN

El problema de transporte es un problema antiguo y complicado de resolver. La mayor dificultad ocurre cuando se trata de modelar un problema que lleva en consideración las condiciones de saturación de la red. Por ejemplo, cuando la función de costo de viaje sobre arco depende, además del flujo del propio arco, de los flujos de otros arcos (por ejemplo, una vía con arcos de tránsito en dos sentidos), formación de filas en las intersecciones señalizadas, tiempos de espera en los paraderos o intersecciones, etc.

Inicialmente se consideró el problema para determinar el flujo de equilibrio de tránsito, llamado flujo óptimo del usuario. Este problema es conocido como problema de equilibrio del tránsito (PET). Sobre la hipótesis que el costo de viaje sobre un arco, depende apenas del flujo del propio arco, el problema se puede formular como un programa de optimización convexa, pues la matriz Jacobiana de la función de costo de viaje, en este caso, es simétrica.

El problema de equilibrio de tránsito ha sido formulado, como un programa no lineal (PNL) en [1], como un problema de complementariedad no lineal (CNL) en [2], como un problema de punto fijo (PF) en [3], y como un problema de desigualdad variacional (DV) en [4,5]. En este trabajo se adopta una formulación de desigualdad variacional como formulado en Smith [11].

El problema de asignación de flujos a redes de transporte urbano (AFRTU) es un problema de tipo de decisión, y se origina en el planeamiento del transporte urbano. En el se trata de alcanzar objetivos específicos, como, por ejemplo, disminuir la congestión, evitar la contaminación del aire, entre otros.

En este trabajo se considera el problema de (AFRTU) formulado como un programa de dos niveles. En el primer nivel, se minimiza una función $T(f,s)$, llamada función de costo total de viaje, en general, depende del fujo $f$ y de la capacidad $s$. Con frecuencia se dice que la función $T(f,s)$ representa el costo social del sistema de transporte, y puede considerarse como la suma de los costos de viaje por las diferentes vías de la red y los costos de inversión para aumentar la capacidad de algunos arcos, o, en general, para modificar la topología de la red y tentar mejorar su desempeño.

Utilizaremos el término *usuario* para referirnos a todo aquel que transita por la red usando diferentes medios de transporte. Ellos forman los flujos de tránsito, y su problema es minimizar el costo individual de viaje origen/destino (O/D). Este problema constituye el segundo nivel del problema (AFRTU), y consiste en hallar el flujo óptimo del usuario suponiendo una capacidad s dada de la red; se formulará como una desigualdad variacional.

La función de costo social del sistema $T(f^*,s)$, para $f^*$, solución de equilibrio, la asumiremos estrictamente convexa como función de $s$ $(s>0)$. La función de los tiempos (generalizados) de viaje unitario sobre arcos $C(f,s)$, será continua y estrictamente monótona como función de $f$ (en particular, una función de tipo BPR (Bureau of Public Roads = Agencia de Rodovías Públicas), es estrictamente monótona). Esta hipótesis para $C$ permite afirmar que la solución de equilibrio es única.

Para determinar el vector de flujos de equilibrio (solución de la DV en el segundo nivel del problema AFRTU), para una capacidad inicial dada, se considera una *función gap* asociada a la (DV) como definida en [6]. El cero de la función *gap* es el flujo de equilibrio óptimo del usuario, i.e la solución de la (DV). La consistencia del método es puesta a prueba considerando tres ejemplos, uno de los cuales se encuentra en [8].

### Notaciones y Definiciones

Vamos a considerar una red con $n$ nodos y $m$ arcos.

*El conjunto de pares origen/destino (O/D), denotaremos por $W=\{w/\ w$ conecta un par de nodos O/D$\}$.*

$N \subset R^n$ *es el conjunto de nodos,* $|N|=n$.

$A$ *: conjunto de arcos de la red,* $|A|=m$.

*El arco desde el nodo i hasta el nodo j lo denotamos por* $a=(i,j)$.

$f_a$ *: flujo sobre el arco a.*

$s_a$ *: capacidad del arco a.*

$f=(f_a)_{a\in A}$ *vector de flujos sobre arcos.*

$s=(s_a)_{a\in A}$ *vector de las capacidades de los arcos.*

La función $C : R^m x R^m \longrightarrow R^m$, es una aplicación continua que representa los tiempos (generalizados) de viaje sobre arcos. Si $f = ( f_1 ,...,f_m)\in R^m$ es un vector de flujo en la red, entonces el costo total de viaje será

$\langle f, C(f,s)\rangle = f_1 . C_1(f,s)+ \ldots + f_m . C_m(f,s) = \sum^m_{j=1} f_j C_j(f,s)$, o, en general, para un conjunto $A$ de arcos, se tiene:

$$T(f,s)=\langle f, C(f,s)\rangle = \sum_{a\in A} f_a \cdot C_a(f,s). \qquad (1)$$

También, para cada arco $a$ de la red, se asocia una función $I_a: R \longrightarrow R$, denominada función de costos de inversión para el arco $a$, depende de la capacidad $s_a$ sobre el arco $a$. Esta función es creciente como función de la variable $s_a$ (ver [9], aquí la consideraremos lineal).

De este modo, podemos definir una función real de variable vectorial.

$$q: R^{|A|} \longrightarrow R, \quad por \quad q(s) = \sum_{a \in A} I_a(s_a).$$

El hecho de ser $q$ definida de este modo dice que es una función de arcos separables. Esta función, representa, en general, el capital de inversión y costos de operación de la red.

Considerando los resultados previos, ahora la función de costo total de viaje puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} T(f,s) &= \sum_{a \in A} [f_a \cdot C_a(f,s) + I_a(s_a)] \\ &= \langle f, C(f,s)\rangle + q(s) \end{aligned} \qquad (2)$$

## Formulación del problema

Se considera un *administrador* de la red (de carácter municipal, regional, ministerial, o privado), cuyo interés es determinar las inversiones (éstas son hechas para mejorar la calidad de la red), de modo que el costo total que resulta de realizar viajes en la red $T(f,s)$, llamado costo del sistema (también llamado costo social) sea minimizado. En cuanto que los *usuarios* escogen rutas O/D llevando en consideración la minimización de sus tiempos de viaje, de acuerdo a su percepción.

En conclusión, el problema de asignación de flujos de tránsito a una red de transporte urbano, consiste en: determinar un vector de capacidades $s^- \geq 0$, un vector de flujo de tránsito $f^*$ que resuelve la desigualdad variacional (problema de equilibrio de flujos).

$$\langle C(f^*, s^-), f - f^*\rangle \geq 0, \; \forall f \; factible, \qquad (3)$$

y tal que el par $(f^*, s^-)$ minimice la función $T$ definida en la ecuación 2. Un problema con este formato, es conocido como programa matemático con restricción de equilibrio. En este trabajo, seguiremos refiriéndonos a él como Asignación de Flujos en Redes de Tránsito Urbano (AFRTU), y tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &(AFRTU): \\ &min\; T(f,s) = \langle f, C(f,s)\rangle + q(s) \qquad (4) \\ &f,s \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &s.\,a. \quad el\; flujo\; f \in \Omega \; resuelve \\ &\langle C(f,s), g - f\rangle \geq 0 \quad \forall g \in \Omega \qquad (5) \end{aligned}$$

donde $\Omega$ es el conjunto de flujos factibles para la red. Factibles en el sentido que el flujo $f$ satisface restricciones de conservación de flujo y no negatividad (a) y (b) siguientes.

Para una red $G=(N,A)$, donde $N$ es el conjunto de nodos y $A= \{(i,j)/ i,j\in N\}$ es el conjunto de arcos. Las siguientes restricciones definen el conjunto $\Omega$ de flujos factibles:

$$\sum_{j\in} f^k_{ij} - \sum_{j\in Ii} f^k_{ji} = \begin{cases} \sum_{l\in D} d_{kl} si = k\in O \\ -d_{kl} \quad si \in D \quad (a) \\ 0 \quad si \notin O \cup D \end{cases}$$

$$f^k_{ij} \geq 0 \; \forall \, i, j, k \qquad (b)$$

donde:

O : conjunto de nodos orígenes.
D : conjunto de nodos destinos.
$d_{kl}$ : demanda de viaje O/D.
$f^k_{ij}$: flujo que proviene del nodo $k\in O$ y recorre el arco (i,j).
$E_i = \{ j\in N / (i,j)\in A \}$, $i\in N$.
$I_i = \{ \{ j\in N / (j,i)\in A \}$, , $i\in N$.

## METODOLOGÍA

En general, la mayor dificultad en un problema del tipo 4-5, radica en resolver la desigualdad variacional. Aquí, para resolver la desigualdad variacional (5), se usa un tipo de función *gap,* que es definida como en [6]. Para $s^-$ dada, vector de capacidades en los arcos, la función $gap: R^m x R^m \rightarrow R$, asociada a la desigualdad variacional (5) es definida como:

$$gap(f,s)=sup\{\langle C(f,s),f-g\rangle, g\in\Omega\},$$

donde $\Omega$ es un conjunto compacto, por lo que el *sup* es reemplazado por el *max*, i.e.

$$gap(f,s^-) = max\{\langle C(f,s^-), f-g\rangle, g\in\Omega\} \quad (6)$$

Las siguientes propiedades de la función *gap* son establecidas en [6]:

$$gap(f,s) \geq 0 \quad \forall f\in\Omega_1, \ s>0 \quad (7)$$

*gap(f,s) = 0 si, y solamente si, f resuelve la desigualdad variacional (5).* (8)

En el caso de matriz Jacobiana no simétrica, no es posible obtener una formulación equivalente como optimización convexa para la DV (5).

Por tanto, es conveniente contar con métodos que puedan considerar este tipo de desigualdad variacional, y poder determinar el vector de equilibrio. El método que se presenta considera este caso.

Ya que $gap(f,s) \geq 0$, la minimización de la función *gap,* permite hallar el cero de esta función (en un proceso iterativo se halla una aproximación a dicho cero).

### Proceso de solución del problema AFRTU

Paso (0).- Escoger cualquier vector $s^-$ de capacidades positivas, i.é. $s^-=(s_i^-)$, $s_i^->0$, $i = 1,...,m$.

Paso (1).- Para $s^-$ fijo, resolvemos la desigualdad variacional (5). Hallar $f\in\Omega$ tal que

$$\langle C(f,s^-), g-f\rangle \geq 0, \quad \forall g\in\Omega,$$

Esta desigualdad variacional será resuelta por un algoritmo que minimiza un tipo de *función gap*, presentado mas adelante.

Paso (2).- Sea $f^*$ la solución de (5). Resolver el problema del primer nivel, o problema del administrador (L),

$$(L): \min_{s\geq 0} T(f^*,s) = \langle f^*, C(f^*,s)\rangle + q(s)$$

Supongamos que $s^*$ sea la solución de (L).

Si para algun $\varepsilon > 0$ fijo, se tiene que $||s^- - s^*|| < \varepsilon$, entonces PARAR. La solución aproximada del problema (AFRTU) es $(f^*, s^-)$. En otro caso, hacer $s^- \leftarrow s^*$ e ir al paso (1).

Observemos que la propiedad (8) anterior permite formular el problema de hallar la solución de la DV, como un problema de minimización equivalente

$$\min_{f\in\Omega} gap(f,s^-) = gap(f^*,s^-) = 0 \quad (9)$$

Notar que $f^*$ es un cero de la *función gap*, y por la propiedad (8) es solución de la DV.

Un artificio conocido en programación matemática, resuelve el problema de minimización (9) utilizando la siguiente variable auxiliar

$$\alpha = gap(f,s^-) = max\{\langle C(f,s^-), f-g\rangle, g\in\Omega\},$$

de este modo, minimizar la función *gap*, se transforma en el siguiente problema equivalente

$$(P): \min_{(f,\alpha)\in R^{n+1}} \alpha$$

$$s.\ a.\ el\ flujo\ f\in\Omega\ satisface$$

$$\langle C(f,s^-), f-g\rangle \leq \alpha, \quad \forall g\in\Omega$$

El problema (P) que aparentemente presenta una sola restricción, es conocido como de programación semi-infinita, y presenta infinitas restricciones. Si la función de costo de viaje es de tipo BPR, el problema (P) tiene la forma siguiente:

$$\min_{(f,\alpha)\in R^{n+1}} \alpha$$

$$s.\ a.\ \ el\ \ flujo\ \ f \in \Omega \subset R^n\ \ satisface$$
$$\tau_1 (1 + \beta ( f_1 / s^-_1)^4 ( f_1 - g_1) + \ldots$$
$$+ \tau_n (1 + \beta ( f_n / s^-_n)^4 ( f_n - g_n) \leq \alpha, \quad \forall\ g \in \Omega$$

donde $\tau_i$, $i=1, \ldots, n$ son los tiempos de viaje de flujo libre, y $s^-$ es el vector de capacidades.

La sucesión finita $\{P_k\}$ que resuelve $(P)$ en el caso de función BPR, es definida por:

$$(P_k):\ \min_{(f,\alpha) \in R^{n+1}}\ \alpha$$
$$s.\ a.\ \ el\ \ flujo\ \ f \in \Omega \subset R^n\ \ satisface$$
$$\tau_1 (1 + \beta ( f_1 / s^-_1)^4 ( f_1 - g^i_1) + \ldots +$$
$$\tau_n (1 + \beta ( f_n / s^-_n)^4 ( f_n - g^i_n) \leq \alpha, \quad i=1,\ldots,k$$

A continuación presentamos una adaptación del algoritmo encontrado en [7] sobre la minimización de una *función gap*, para resolver la desigualdad variacional (5) con función de costo BPR:

Paso 0.- Escoger $g^1 \in \Omega$.

Paso 1.- Resolver el problema

$$P_1:\ \min_{(f,\alpha) \in R^{n+1}}\ \alpha$$
$$s.\ a.\ \ el\ \ flujo\ \ f \in \Omega \subset R^n\ \ satisface$$
$$\tau_1 (1 + \beta ( f_1 / s^-_1)^4 ( f_1 - g^1_1) + \ldots +$$
$$\tau_n (1 + \beta ( f_n / s^-_n)^4 ( f_n - g^1_n) \leq \alpha,$$

Sea $(f^1, \alpha_1)$ la solución de $P_1$. Para $f^1$ fijo resolver

$$gap( f^1, s^-) = \max_{g \in \Omega} \{\tau_1 (1 + \beta ( f^1_1 / s^-_1)^4 ( f^1_1 - g_1) + \ldots + \tau_n (1 + \beta ( f^1_n / s^-_n)^4 ( f^1_n - g_n)\}$$
$$= \langle C(f^1, s^-), f^1 - g^2 \rangle$$

donde $g^2 = \operatorname{argmax} \{\langle \mathbf{C}(\mathbf{f}^1, s^-), \mathbf{f}^1 - \mathbf{g} \rangle, g \in \Omega \}$, esto es, el vector $\mathbf{g}$ proporciona el valor de la función gap en el punto $(f^1, s^-)$.

Paso 2.- Si $gap( f^1, s^-) \leq \alpha_1$, entonces el par $(\mathbf{f}^1, \alpha_1)$ es factible para el problema P, o sea se cumple

$$gap( f^1, s^-) = \{\tau_1 (1 + \beta ( f^1_1 / s^-_1)^4 ( f^1_1 - g^2_1) + \ldots + \tau_n (1 + \beta ( f^1_n / s^-_n)^4 ( f^1_n - g^2_n)\} \leq \alpha_1,$$

en tal caso, PARAR, el par $(f^1, s^-)$ es solución de P, ver 2.1 en [7]. En el caso no factible, ir al paso 1 para resolver el problema $P_2$ que tiene una restricción más que $P_1$, la cual, es de la forma:

$$\tau_1 (1 + \beta ( f_1 / s^-_1)^4 ( f_1 - g^2_1) + \ldots$$
$$+ \tau_n (1 + \beta ( f_n / s^-_n)^4 ( f_n - g^2_n) \leq \alpha,$$

Así, $P_2$ es:

$$(P_2):\ \min_{(f,a) \in R^{n+1}}\ \alpha$$
$$s.\ a.\ \ el\ \ flujo\ \ f \in \Omega \subset R^n\ \ satisface$$
$$\tau_1 (1 + \beta ( f_1 / s^-_1)^4 ( f_1 - g^1_1) + \ldots$$
$$+ \tau_n (1 + \beta ( f_n / s^-_n)^4 ( f_n - g^1_n) \leq \alpha$$
$$\tau_1 (1 + \beta ( f_1 / s^-_1)^4 ( f_1 - g^2_1) + \ldots$$
$$+ \tau_n (1 + \beta ( f_n / s^-_n)^4 ( f_n - g^2_n) \leq \alpha$$

### Paso General

Sea $(f^k, \alpha_k)$ una solución del problema $P_k$. Calcular para $f^k$ la función gap,

$$gap( f^k, s^-) = \max_{g \in \Omega} \{\tau_1 (1 + \beta ( f^k_1 / s^-_1)^4 ( f^k_1 - g_1) + \ldots + \tau_n (1 + \beta ( f^k_n / s^-_n)^4 ( f^k_n - g_n)\}$$
$$= \langle C(f^k, s^-), f^k - g^{k+1} \rangle$$

donde $g^{k+1} = \operatorname{argmax} \{\langle C(f^k, s), f^k - g \rangle,\ g \in \Omega\}$.

Si $gap( f^k, s^-) \leq \alpha_k$, el par $(f^k, \alpha_k)$ es factible para el problema P. Entonces, PARAR. El par $(f^k, \alpha_k)$ es una solución óptima del problema P, en consecuencia $f^k$ es solución de la desigualdad variacional. Caso contrario, resolver el problema $P_{k+1}$ (este problema tiene una restricción más que $P_k$):

$$(P_{k+1}):\ \min_{(f,\alpha) \in R^{n+1}}\ \alpha$$
$$s.\ a.\ \ el\ \ flujo\ f \in \Omega \subset R^n\ \ satisface$$
$$\tau_1 (1 + \beta ( f_1 / s^-_1)^4 ( f_1 - g^i_1) + \ldots$$
$$+ \tau_n (1 + \beta ( f_n / s^-_n)^4 ( f_n - g^i_n) \leq \alpha, \quad i = 1, \ldots, k+1.$$

Nota.- Sobre hipótesis de monotonía estricta para la función $C$ respecto de la variable de flujo $f$, el Teorema 2.3 en [7] garantiza convergencia del algoritmo.

## EJEMPLOS

A continuación presentamos tres ejemplos. El primero ilustra el método de hallar la solución del problema

AFRTU. El problema de equilibrio (esto es, la DV) es resuelto hallando el cero de la función *gap*. El segundo ejemplo se encuentra en [8], el flujo de equilibrio es hallado por tres métodos distintos: Frank Wolfe (F–W), Aproximación Lineal (AL), y Medias Sucesivas (MS), en este trabajo los comparamos con el método de la minimización de la *función gap*. En estos ejemplos, la función de los tiempos de viajes considerados es de tipo BPR (Bureau of Public Roads). Un tercer ejemplo, con un tipo de congestionamiento, es considerado con la finalidad de mostrar la bondad del procedimiento.

Una función de tipo BPR muy utilizada y que se emplea en los dos primeros ejemplos, tiene la forma siguiente:

$$C_i\,(f_i, s_i) = \tau_i\,(1+ \alpha\,(f_i/s_i)^{\beta}) \qquad (10)$$

Donde $C_i\,(f_i, s_i)$ es el tiempo (generalizado) de viaje sobre el arco i,

$\iota_i$ : tiempo de viaje de flujo libre,

$f_i$ : flujo sobre el arco i,

$s_i$ : capacidad del arco i,

$\alpha$ : constante llamada parámetro de vía, y $\beta \in Z^{+}$.

<u>Asignación de flujos a redes de tránsito</u>.- Consideremos $\Omega=\Omega_1 x \Omega_2$ y $S = S_1 x S_2$, donde $\Omega_1=[3,5]$ , $\Omega_2=[4,8]$ , $S_1=[2,5]$ y $S_2=[3,8]$.

Las funciones de inversión $I_1(a_1)=s_1$ , $I_2(a_2)=s_2$ para cada arco $a_1, a_2$ y las funciones de tiempo de viaje son $C_1(f_1, s_1)=( 1+ f_1/ s_1)$ , $C_2(f_2, s_2)=( 1+ f_2 / s_2)$.

Los tiempos de viaje de flujo cero son iguales a uno.

Sean $f_1\in\Omega_1$, $f_2\in\Omega_2$ , $s_1\in S_1$ , $s_2\in S_2$ y la red de tránsito con un origen y dos destinos siguientes:

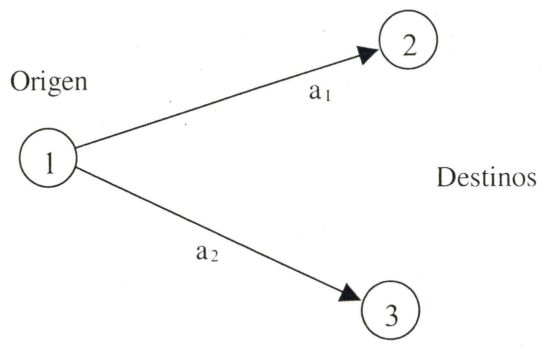


***Fig. 1*** *Red de Tránsito.*

Tenemos:

$T(f,s) = f_1 \cdot (1 + f_1/s_1) + s_1 + f_2 \cdot (1 + f_2/s_2) + s_2$, el problema de la desigualdad variacional para $s^{-}$ fijo es, hallar $f^{*}\in\Omega$ tal que

$$(1+ f_1^{*}/s^{-}_1)(g_1 - f_1^{*}) + (1+ f_2^{*}/s^{-}_2)(g_2 - f_2^{*}) \geq 0, \forall g\in\Omega$$

Para $s^{-}$ fijo tenemos:

$$gap\ (f,s^{-})=\max_{g\in\Omega} \{(1+ f_1/s^{-}_1)(f_1 - g_1)+(1+ f_2/s^{-}_2)\,(f_2 - g_2)\}$$

$$= \max_{g\in\Omega} \{f_1^{2}/s^{-}_1 + f_2^{2}/s^{-}_2 + f_1 + f_2 - (1 + f_1/s^{-}_1)\, g_1 - (1 + f_2/s^{-}_2)\, g_2\},$$

entonces:

$$gap\ (f,s^{-}) = \{ f_1^{2}/s^{-}_1 + f_2^{2}/s^{-}_2 + f_1 + f_2 - 3\,(1 + f_1/s^{-}_1) -4\,(1 + f_2/s^{-}_2)\},$$

obtenido para $(g_1,g_2)=(3,4)$.

Sea $s^{-}=(4,7)$ el valor inicial de la capacidad, entonces

$$gap\ (f,s^{-}) = f_1(f_1 + 1)/4 + f_2(f_2 + 3)/\,7 - 7 = 0 \Leftrightarrow (f^{-}_1, f^{-}_2) = (3,4).$$

(Obs. Se puede verificar que, para $s^{-}= (4,7)$ y $(f^{-}_1,f^{-}_2)=(3,4)$, se obtiene $T(f^{-},s^{-}) = 22.5$ ).

Para este flujo de equilibrio hallado $(f^{-}_1,f^{-}_2)=(3,4)$ , vamos a resolver el problema del líder

$$\min_{s\in S}\ T(f^{-},s) = \{3\,(1 + 3/s_1) + s_1 + 4\,(1 + 4/s_2) + s_2\}$$

donde $S=[2,5]x[3,8]$.

(Observar que para el flujo $(f^{-}_1,f^{-}_2)=(3,4)$, la función del líder es una función de s,i.e.

$$T(f^{-};\, s_1,\, s_2)=(s_1 + 9/s_1 + s_2 + 16/s_2 + 7)\ )$$

La solución exacta del problema del líder es $s^{*}=(3,4)\in S$ y $|| s^{-} - s^{*} || =\sqrt{10} > 1/10$. Hacemos $s^{-} = s^{*}$, esto es la nueva capacidad a usar $s^{-}= (3,4)$.

Entonces:

$$gap\ (f,(3,4)) = \max_{g\in\Omega} \{ f_1^2/3 + f_2^2/4 + f_1 + f_2 - (1 + f_1/3)g_1 - (1 + f_2/4)g_2 \}$$

$$= f_1^2/3 + f_2^2/4 + f_1 + f_2 - 3\,(1 + f_1/3) - 4\,(1 + f_2/4),\ \text{obtenido para}\ (g_1,g_2)=(3,4)$$

$$= f_1^2/3 + f_2^2/4 - 7 = 0 \Leftrightarrow f^* = (f^*_1, f^*_2) = (3,4).$$

Si para $f^* =(3,4)$ volvemos a resolver el problema del líder, otra vez se obtiene $s^* = (3,4)$, y obviamente $\| s^* - s^- \| = 0 < \varepsilon$, entonces STOP. La solución del problema AFRTU es ((3,4),(3,4)), y

$$T(f^*,s^*)=3\ (1 + 3/3) + 3 + 4\ (1 + 4/4) + 4 = 21$$

*es el valor óptimo de T.*

<u>Problema de equilibrio en redes de tránsito</u>.- En [8] se considera una función $C$ de costo de viaje (de tipo BPR), para una red con tres arcos que conectan un par w = (O/D) y que tiene la forma general (10)

$$C_i(f_i, s_i) = \tau_i (1 + \alpha\, (f_i / s_i)^{\beta})$$

Nótese que esta función modela el caso donde el costo de viaje sobre cada arco o vía de la red, depende de la capacidad y del flujo que circula apenas por este arco. La red se muestra en la figura 2.

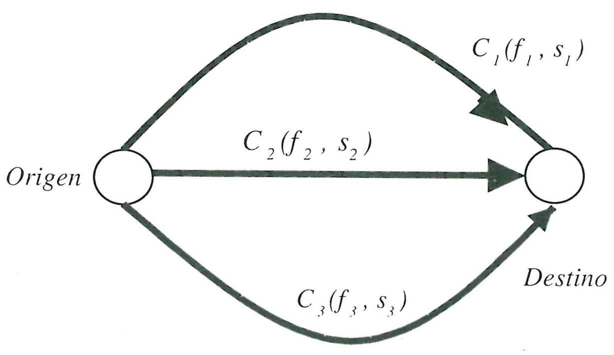


***Fig. 2*** *Un par O/D con tres vías que las conectan y sus tiempos generalizados de viaje.*

La función es la siguiente:

$$\mathbf{C(f,s^-)}=[10(1 + (0.15/16)\, f_1^4),\ 20(1 + (0.15/256)\, f_2^4),\ 25(1 + (0.15/81)\, f_3^4)],$$

donde $s^- =(2,4,3)$, $\tau =(10,20,25)$, $\alpha = 0.15$, y $\beta = 4$. El flujo de equilibrio obtenido por el método de F-W es reportado como $f^* = (3.59,4.70,1.71)$ para una demanda O/D fija $d=10$. de aquí,

$$\Omega = \{ f\in R^3 / f_1 + f_2 + f_3 = 10,\ (f_1,f_2,f_3) \qquad (11)$$

La desigualdad variacional a resolver es, determinar un flujo $\boldsymbol{f}^* \in \Omega$, tal que

*(DV):*

$$10(1 + (0.15/16)\, f^{*4}_1)(g_1 - f^*_1) + 20(1 + (0.15/256)\, f^{*4}_2)(g_2 - f^*_2) + 25(1 + (0.15/81)\, f^{*4}_3)(g_3 - f^*_3) \geq 0,\ \ \forall\, \mathbf{g}\in\Omega$$

La función *gap* asociada a la desigualdad variacional en este caso es,

$$gap(\boldsymbol{f},s^-) = \max_{\mathbf{g}\in\Omega} \{10(1 + (0.15/16)\, f_1^4)(f_1 - g_1) + 20(1 + (0.15/256)\, f_2^4)(f_2 - g_2) + 25(1 + (0.15/81)\, f_3^4)(f_3 - g_3)\} \qquad (12)$$

$$= \max_{g\in\Omega} \{ -10(1 + (0.15/16)\, f_1^4)\, g_1 - 20(1 + (0.15/256)\, f_2^4)\, g_2 - 25(1 + (0.15/81)\, f_3^4)\, g_3 \}$$

El conjunto $\Omega$ definido en (11) es representado en la figura siguiente:

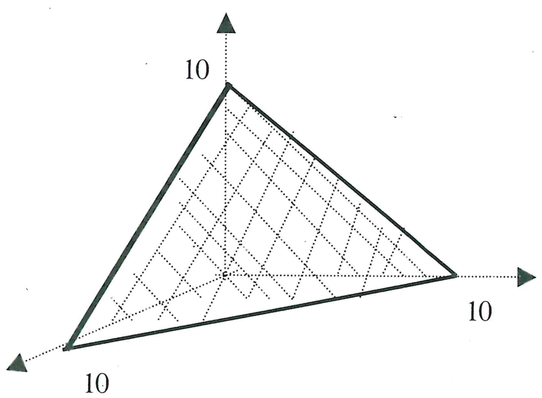


***Fig. 3*** *Conjunto $\Omega$ de restricciones.*

De los resultados previos sabemos que la solución de la DV (el cero de la *función gap*), puede ser aproximado resolviendo una sucesión finita de problemas con restricciones no lineales, de la forma:

$$(P_k):\ \min_{(f,\alpha)\in R^{n+1}} \alpha$$
s. a. el flujo $f\in\Omega\subset R^n$ satisface
$$10(1+0.15/16\,(f_1{}^4(f_1-g^i{}_1)+$$
$$20(1+0.15/256\,(f_2{}^4(f_2-g^i{}_2)+$$
$$25(1+0.15/81\,(f_3{}^4(f_3-g^i{}_3)\leq\alpha,\quad i=1,\ldots,k.$$

**Resultados Computacionales obtenidos usando el algoritmo de minimización de la función gap**

El algoritmo fue corrido usando el aplicativo MATLAB versión 5.3, en un micro computador Pentiun III personal.

Para iniciar el programa en MATLAB se consideró la misma capacidad $s^- = (2,4,3)$ del ejemplo, se escogió un vector inicial de flujos $\mathbf{f} = (2.5, 3.5, 4)$, se tomó $\alpha_0 = 2$, y $g^1\in\Omega$ como $g^1 = (1, 6, 3)$. El valor límite inferior para $\alpha$ próximo de cero, se consideró igual a 0,001, el cual, fue alcanzado en la primera iteración.

**Iteración 1.**

Solución del problema inicial $P_1$.
Primer vector de flujo candidato a equilibrio:
$f^1 = (2.7971, 3.7629, 3.4400)$, $\alpha_1 = 0.0010$,
$g^1 = (1, 6, 3)$.
Cálculo de la función

$$gap(f^1,\ s^-) = \max\ \{\langle C\,(f^1,\ s^-), f^1 - g\rangle,\ g\in\Omega\},$$

este máximo es obtenido para el vector
$\mathbf{g}^2 = (9.9980, 0.0010, 0.0010)$.
Evaluando $gap(f^1,\ s^-) = \mathbf{79.0136}$.
Probando si $gap(f^1,\ s^-) \leq \alpha_1$
(o si $\alpha_1 - gap(f^1,\ s^-) \geq 0$ ).
Aquí, se tiene que,
$\alpha_1 - gap(f^1,\ s^-) = \mathbf{-79.0126} \leq 0$. SE CONTINUA.

**Iteración 2.**

Solución del problema inicial $P_2$.
Segundo vector de flujo candidato a equilibrio:
$f^2 = (3.5232, 4.0477, 2.4291)$, $\alpha_2 = 0.0010$.
Cálculo de la función

$$gap(f^2,\ s^-) = \max\ \{\langle C\,(f^2,\ s^-), f^2 - g\rangle,\ g\in\Omega\},$$

este máximo es obtenido para el vector

$\mathbf{g}^3 = (0.0010, 9.9980, 0.0010)$.
Evaluando $gap(f^2,\ s^-) = \mathbf{12.9950}$.
Provando si $gap(f^2,\ s^-) \leq \alpha_2$
(o si $\alpha_2 - gap(f^2,\ s^-) \geq 0$ ).
Aquí, se tiene que,
$\alpha_2 - gap(f^2,\ s^-) = \mathbf{-12.9940} \leq 0$. SE CONTINUA.

**Iteración 3.**

Solución del problema inicial $P_3$.
Tercer vector de flujo candidato a equilibrio:

$f^3 = (3.5833, 4.6451, 1.7717)$, $\alpha_3 = 0.0010$.
Cálculo de la función

$$gap(f^3,\ s^-) = \max\ \{\langle C\,(f^3,\ s^-), f^3 - g\rangle,\ g\in\Omega\},$$

Este máximo es obtenido para el vector
$g^4 = (0.0010, 9.9980, 0.0010)$.
Evaluando $gap(f^3,\ s^-) = 6.6053e\text{-}004$.
Provando si $gap(f^3,\ s^-) \leq \alpha_3$
(o si $\alpha_3 - gap(f^2,\ s^-) \geq 0$ ).
Aquí, se tiene que,
$\alpha_3 - gap(f^3,\ s^-) = \mathbf{3.3947e\text{-}004} \geq 0$. Es positivo.
PARAR. El flujo obtenido es óptimo.

Así, el par $(f^3, \alpha_3)$ es solución del problema (P), por tanto $f^3$ es una aproximación al cero de la función *gap*. Luego $f^* = f^3$ es una aproximación al flujo de equilibrio, solución de la desigualdad variacional.

En la siguiente tabla, comparamos los resultados obtenidos por los diferentes métodos.

***Tabla 1.*** *Flujos de equilibrio, costos de viaje en equilibrio e iteraciones.*

| Método | Flujos de equilibrio | Costos de viaje | N°. de Ites. |
|---|---|---|---|
| MS | $f^*_{MS}$= (3.61, 4.65, 1.74) | (25.92, 25.48, 25.42) | 45 |
| AL | $f^*_{AL}$= (3.59, 4.66, 1.75) | (25.57, 25.53, 25.43) | 15 |
| F-W | $f^*_{FW}$= (3.59, 4.70, 1.71) | (25.60, 25.70, 25.40) | 5 |
| Min gap | $f^*_{GAP}$= (3.58, 4.65, 1.77) | (25.40, 25.48, 25.45) | 3 |

Problema de equilibrio con congestionamiento.- Aplicamos el algoritmo de la minimización de la *función gap* a un ejemplo encontrado en [4] para probar la bondad del algoritmo.

Se tiene un par origen - destino (A,B) conectados por cinco arcos, tres de A para B y dos de B para A (figura 4).

La demanda de viaje en A, $d_A = 210$ y la demanda de viaje en B, $d_B = 120$.

La función de costo de viaje es no simétrica y los costos de viaje en arcos son:

$C_1=10f_1+5f_4+1000$, $C_2=15f_2+5\,f_5+950$,
$C_3=20f_3+3000$, $C_4=20f_4+2\,f_1+1000$,
$C_5=25f_5+f_2+1300$.

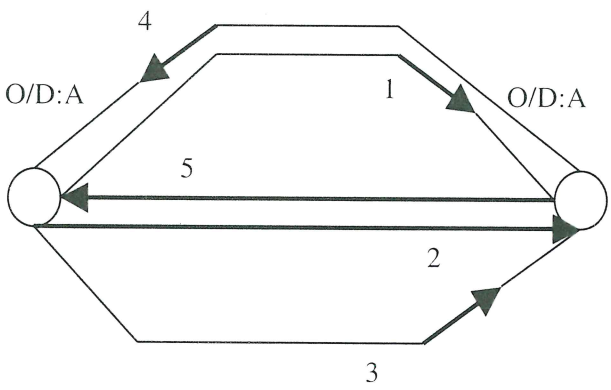


***Fig. 4*** *Red con un tipo de congestionamiento.*

Las demandas de viaje origen-destino son asignadas por los arcos respectivos, cuyos flujos satisfacen:

$f_1 + f_2 + f_3 = 210$, $f_4 + f_5 = 120$,
$f_i \geq 0$, i= 1, 2, 3, 4, 5.

Observar que la función, en este ejemplo, es estrictamente monótona, por lo que, la solución de equilibrio óptimo del usuario será única.

Después de cuatro iteraciones se obtuvo el flujo óptimo del usuario, a continuación se dan resultados comparativos.

***Tabla 2.*** *Resultados del algoritmo de Dafermos [4] y de la minimización de la función gap.*

| | | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Alg. Daf | Fluj | 120.0 | 90 | 0.0 | 70.0 | 50 |
| (10 iter.) | Cost | 2550.0 | 2550 | 3000.0 | 2640.0 | 2640 |
| Min gap | Fluj | 119. 9 | 90 | 1x 10e -4 | 70.0 | 50 |
| (4 iter.) | Cost | 2549.9 | 2550 | 3000.0 | 2639.9 | 2640 |

## CONCLUSIONES

Los modelos de transporte, que consideran funciones de costo de viaje que dependen del vector de flujo total en la red, son los más difíciles, ya que la función de costo total de viaje, en general, es no convexa.

No existen muchos algoritmos para este tipo de problemas. Marcotte [10], ha desarrollado métodos heurísticos para resolver el problema AFRTU formulado como programa de dos niveles, sin embargo, hace varias hipótesis para relajar el problema.

El método de minimización de la función *gap* [7], utilizado en este trabajo para resolver la desigualdad variacional en el segundo nivel del problema AFRTU, se puede aplicar en general. El problema de la minimización del *gap*, es un problema lineal con infinitas restricciones. Para resolverlo se utiliza una sucesión de problemas que aproximan la solución.

Las funciones de tipo BPR utilizadas para representar la función tiempo de viaje son estrictamente monótonas en la variable de flujo, esto garantiza solución única para el problema de equilibrio.

En el ejemplo tres, la función de costo de viaje es no simétrica, sin embargo, sólo depende del vector de flujo, mas no de la capacidad en arcos. Un caso más real sería considerar funciones de costo que dependan del vector de flujo y de la capacidad.

## REFERENCIAS


1. **Beckman, C.B., Mc., Guire, Winsten, C.B.,** "Studies in the Economics of Transportation", Yale University Press, New Haven, 1956.
2. **Aashtiani, Z., Magnanti, T.,** "Equilibria on a congested Transportation Network", SIAM J. Algebraic Discrete Methods 2, 213-226 (1981).
3. **Asmuth, R.L.,** "Traffic Network Equiluibria", P.h.D. Thesis, Stanford University, 1978.
4. **Dafermos, S.C.**, "Traffic Equilibrium and Variational Inequalities", Transportation Science, 14, 42-54 (1980).
5. **Fisk C., Boyce, D.,** "Alternative Variational Inequality Formulations of the Equilibrium Travel-choice Problem", Transportation Science 17, 454-463 (1983).
6. **Morales, G.**, "O Problema de Programação Matematica com restrições Generalizadas de Equilíbrio", Tese de Doutorado,COPEE/ Sistemas, UFRJ, 1997.
7. **Arica, J., Morales, G., Scheimberg, S.,** "A Cutting Plane Algorithm to solve the Generalized Variational Inequality Ploblem for convex constrain set", No. 12/96, LCENG/ CCT/UENF, 1996.
8. **Kriseida, C.**, "Gerenciamento Dinámico de Tráfego por Indução dos fluxos de Equilíbrio no caso da ocorrência de um Incidente", Tese M.Sc.março 1998/ UFRJ- COPPE.
9. **Migdadlas A.,** "Bilevel Programmnig Traffic Planing: Model Methods and Challenger", Journal of Optimization, 7: 381-405, 1995.
10. **Marcotte, P.,** "Network Design Problem with Congestion Effects: A case of Bilevel Programming", Mathematical Programming 34 (1986) 142-162 North- Holland.
11. **Smith, M.J.,** "The Existence, Uniqueness, and Stability of Traffic Equilibria", Transportation Research 13B, 295-304 (1979).