

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



***IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES USANDO  
SERIES VOLTERRA-LAGUERRE.***

**TESIS**

PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
MENCIÓN: AUTOMÁTICA E INSTRUMENTACIÓN.

PRESENTADA POR:

***MEDINA RAMOS, CARLOS CELESTINO***

LIMA - PERÚ

**2011**

## **DEDICATORIA**

*A los que llenan el universo de mi alma.  
A quienes son rocío, en la sed de la vida.  
A los que son faro en la tempestad,  
A quien me da luz de vida.*

**MUXU BAT.**

## **AGRADECIMIENTO**

A: Raul Benites, Judith Betetta  
y Daniel Carbonel.

*Por lo aprendido y por su generosidad.*

# ÍNDICE

## Capítulo 1

1.0	Introducción .....	1
1.1	NMPC y los sistemas Volterra-Laguerre.....	2
1.2	Plan de la Tesis.....	3

## Capítulo 2

Nociones Generales sobre identificación y control predictivo no lineal usando algoritmos de la Matriz dinámica de Control.

	Sistemas no lineales de modelo dinámico desconocido .....	6
2.1	Introducción .....	6
2.2	Planteamiento del Problema .....	6
	2.2.1 Componentes del Sistema para la validación de la propuesta.....	6
	2.2.2 Necesidades de control para el Reactor de resina melamínica .....	8
	2.2.3 Modelo dinámico del sistema reactor melamínico.....	9
2.3	Propuesta de solución.....	12
	2.3.1 Propuesta del Modelo para un sistema no lineal usando series Volterra – Laguerre .....	13
	2.3.2 Propuesta para el modelo de control.....	14
	2.3.2.1 Respuesta predictiva del NMPC matricial .....	14
	2.3.2.2 Propuesta del controlador NMPC.....	17
	2.3.2.3 Estructura del modelo NMPC .....	18

## Capítulo 3

Antecedentes del modelamiento de sistemas usando series Volterra –Laguerre.

3.1	Modelamiento adaptivo Volterra-Laguerre para NMPC.....	19
	3.1.1 Introducción .....	19
	3.1.2 Identificación del modelo adaptivo Volterra-Laguerre .....	19
	3.1.3 Resultados en un proceso de neutralización de PH.....	23
	3.1.4 Conclusiones .....	23
3.2	Identificación de sistemas no lineales usando series Volterra-Laguerre.....	24
	3.2.1 Introducción.....	24
	3.2.2 Expansión Volterra-Laguerre en sistemas no lineales .....	24
3.3	Identificación de Sistemas no Lineales con excitaciones tipo secuencia multinivel pseudo aleatorias. ....	25
	3.3.1 Introducción.....	25
	3.3.2 Sistemas basados en series de Volterra de orden P y memoria truncada N.....	26
	3.3.3 Persistencia de excitación para sistemas modelados con series de Volterra .....	27

## Capítulo 4

Fundamentos Teóricos para el Modelado de sistemas no lineales usando Series Volterra-Laguerre.

4.1	Introducción a los Polinomios Ortogonales.....	29
-----	--	----

4.1.1	Representación de la salida $Y(k)$ en base a funciones ortogonales de Laguerre .....	29
4.2	La Expansión de Volterra .....	32
4.2.1	Series de Volterra en tiempo continuo .....	33
4.2.2	Series de Volterra en tiempo discreto .....	33
4.3	Propiedades de la Expansión de Volterra .....	39
4.4	Series de Volterra usando funciones de Laguerre .....	39
4.4.1	Determinación de $Y(k)$ y $l_{ki}$ aplicando el principio de ortogonalidad .....	43
4.4.2	Determinación de los coeficientes $C_i$ , $C_{ij}$ y $C_{ijk}$ . .....	44

## Capítulo 5

Modelamiento de un reactor químico tipo batch usando series Volterra-Laguerre.

5.1	Descripción de la planta.....	47
5.1.1	Proceso de fabricación de resina melamínica.....	47
5.2	Señal de entrada pseudo aleatoria multinivel PRMS .....	49
5.3	Respuesta del modelo y del reactor a la entrada multinivel .....	50
5.3.1	Caso del modelo Volterra-Laguerre de grado uno .....	50
5.3.2	Caso del modelo Volterra-Laguerre de grado dos.....	52
5.3.3	Caso del modelo Volterra-Laguerre de grado tres.....	56
5.4	Modelos Volterra-Laguerre obtenidos para el reactor de resina melamínica	
5.4.1	Modelos Volterra-Laguerre de primer orden .....	61
5.4.2	Modelos Volterra-Laguerre de segundo orden.....	63
5.4.3	Modelos Volterra-Laguerre de tercer orden.....	65

## Capítulo 6

Control predictivo no lineal basado en modelos usando el algoritmo de la matriz dinámica de control.

6.1	Ley de control no lineal por matriz dinámica NDMC.....	68
6.1.1	Matrices de la NDMC con kernels Volterra-Laguerre .....	70
6.1.2	Kernels para un sistema modelado con series de Volterra-Laguerre.....	73
6.2	Resumen del NMPC usando el algoritmo de la matriz dinámica no lineal.....	74
6.3	Transformación del modelo de la ley de control NMPC por Matriz dinámica basado en acciones de control normalizada .....	75
6.4	Algoritmo de control.....	76
6.5	Algoritmo para evaluar la acción de control.....	77

## Capítulo 7

Control de temperatura de un Reactor químico tipo batch usando NMPC por matriz dinámica y series Volterra-Laguerre.

7.1	Criterios para el diseño del controlador.....	79
7.1.1	Señal de referencia .....	79
7.1.2	Condiciones iniciales del proceso.....	79
7.1.3	Parámetros y función que representa al sistema no lineal .....	80
a)	Base del sistema de segundo orden.....	80
b)	Coefficientes que ponderan las bases $OBF$ y $OBF_2$ .....	81
c)	Kernels Volterra-Laguerre de primer orden.....	81
d)	Kernels Volterra-Laguerre de segundo orden .....	81

e)	Modelo Volterra-Laguerre para el sistema no lineal .....	82
7.1.4	Parámetros de la matriz dinámica no lineal NDMC .....	82
a)	Parámetros para la formación de la matriz.....	82
7.1.5	Modelo Predictivo para el sistema no lineal .....	83
a)	Salida predictiva del sistema no lineal.....	83
b)	Representación predictiva del sistema no lineal.....	83
c)	Representación predictiva del sistema no lineal de forma matricial .....	84
d)	Normalización de la señal $X$ y la señal $\tilde{Y}$ para el reactor .....	86
7.2	Obtención de la Ley de Control NMPC .....	88
7.3	Resultados de la simulación del control NMPC usando Series de Volterra-Laguerre y matriz dinámica de control no lineal.	
7.3.1	Señal de referencia escalón .....	89
a)	Señal escalón para un tiempo de reacción de 48 minutos .....	89
b)	Señal escalón para un tiempo de reacción de 60 minutos .....	91
7.3.2	Señal de referencia tangente hiperbólica .....	92
a)	Señal para un tiempo de reacción de 48 minutos .....	92
b)	Señal para un tiempo de reacción de 60 minutos .....	93

## Capítulo 8

<b>8</b>	Conclusiones y recomendaciones.	
8.1	Conclusiones .....	95.
8.2	Recomendaciones para trabajos futuros .....	96.

**Anexo 1:** PROGRAMA PARA IDENTIFICAR SISTEMAS NO LINEALES VOLTERRA-LAGUERRE. IDENTIFICACION DEL MODELO DE UN REACTOR TIPO BATCH.....99

**Anexo 2:** PROGRAMA EN MATLAB PARA EL CONTROL PREDICTIVO NO LINEAL DEL SEGUIMIENTO DE LA TRAYECTORIA DE TEMPERATURA DE UN REACTOR QUÍMICO TIPO BATCH USADO EN LA PRODUCCIÓN DE RESINA MELAMÍNICA.....105

**Anexo 3:** MODELOS VOLTERRA-LAGUERRE..... 110

**Anexo 4:** MODELOS VOLTERRA-LAGUERRE DIFERENCIAL..... 112

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**.....114

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Esquema básico de la Planta de fabricación de resina melamínica. ....	7
2.2	Esquema básico del reactor R01 .....	10
2.3	Respuesta del proceso de calentamiento a una señal escalón.....	15
2.4	Diagrama de bloques de la estructura NMPC con algoritmo NDMC .....	18
3.1	Diagrama de bloques del sistema Laguerre .....	20
4.1	Salida de un sistema modelado por polinomios de Laguerre, hasta tercer orden..	31
4.2	Ubicación de los kernels de un sistema, hasta de tercer orden, con truncamiento $N$ .....	36
4.3	Sistema de Volterra de tercer orden truncado en $N=3$ .....	37
5.1	Esquema básico de la Planta de Fabricación de resina melamínica.....	48
5.2	Salida del transductor I/P.....	49
5.3	Señal de entrada al conversor V/I .....	49
5.4	Resultado del experimento en el reactor R0-1 .....	50
5.5	Curva del modelo Volterra-Laguerre de grado uno y $T=30$ seg. ....	51
5.6	Variación de los coeficientes según el orden de truncamiento $N$ . ....	51
5.7	Curva correspondiente al Reactor y al modelo de grado uno $T=30$ segundos.....	52
5.8	Comparación del modelo de segundo orden y el Reactor, cuando se les aplica una señal PRMS. ....	53
5.9	Coefficientes lineales del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.....	53
5.10	Coefficientes cuadráticos del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.....	54
5.11	Respuesta del reactor y del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.....	55
5.12	Evolución de los coeficientes de primer orden del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.....	55
5.13	Evolución de los coeficientes cuadráticos del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.....	56
5.14	Respuestas del reactor y del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre .....	56
5.15	Evolución de los coeficientes lineales del modelo de tercer orden Volterra- Laguerre.....	57
5.16	Evolución de los coeficientes cuadráticos del modelo de tercer orden Volterra- Laguerre.....	58
5.17	Evolución de los coeficientes cúbicos del modelo de tercer orden Volterra- Laguerre.....	58
5.18	Respuesta del reactor y del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre.....	59
5.19	Evolución de los coeficientes lineales del modelo de tercer orden Volterra- Laguerre.....	59
5.20	Evolución de los coeficientes cuadráticos del modelo de tercer orden Volterra- Laguerre.....	60
5.21	Evolución de los coeficientes cúbicos del modelo de tercer orden Volterra- Laguerre. ....	60
6.1	Controlador NMPC basado en la matriz dinámica de control.....	75
7.1 a	Señal de referencia y salida predictiva .....	80
7.1 b	Señal de control.....	80
7.2	Señal multinivel seudo aleatoria .....	87
7.3	Señal multinivel seudo aleatoria normalizada .....	87
7.4	Respuesta predictiva y señal de control - reacción en 48 minutos.....	90

7.5	Respuesta predictiva y señal de control - reacción en 60 minutos.....	91
7.6	Respuesta predictiva y señal de control - reacción en 48 minutos.....	93
7.7	Respuesta predictiva y señal de control - reacción en 60 minutos.....	94

## SIMBOLOGÍA

$a$	.....Polo de Laguerre.
$a_i$	.....Coeficientes de primer orden de la respuesta a la señal escalón.
$af$	.....Polinomio de Laguerre de grado uno.
$b_i$	.....Coeficientes de segundo orden de la respuesta a la señal escalón.
$bf$	.....Polinomio de Laguerre grado dos.
$C_A$	.....Concentración del componente A en el reactor.
$C_J$	.....Coeficientes grado uno del modelo Volterra Laguerre.
$C_{JJ}$	.....Coeficientes grado dos del modelo Volterra Laguerre.
$C_{JJJ}$	.....Coeficientes grado tres del modelo Volterra Laguerre.
$C_p$	.....Capacidad calorífica de los componentes en el reactor.
$d$	.....Vector de ruido de la NDMC.
$E$	.....Energía de activación.
$f$	.....Vector que contiene los términos futuros de segundo orden en la NDMC.
$g$	.....Vector que contiene los términos lineales pasados en la NDMC.
$G$	.....Matriz que contiene los términos lineales del futuro en la NDMC.
$G^*$	.....Matriz que contiene los términos lineales del futuro Con señal normalizada en la NDMC.
$h_i$	.....Coeficientes de la respuesta a la señal impulso.
$h_1(m_1)$	.....Kernels de primer orden.
$h_2(m_1, m_2)$	.....Kernels de segundo orden.
$h_3(m_1, m_2, m_3)$	.....Kernels de tercer orden.
$H$	.....Matriz que contiene los términos lineales del pasado en la NDMC.
$I$	.....Matriz identidad.
$J$	.....Función de costo.
$k$	.....Tiempo discreto.
$K_0$	.....Constante de Arrhenius.
$L$	.....Número de polinomios en el sistema Laguerre.
$L^2$	.....Espacio de Lebesgue
$L_i(k)$	.....Vector de orden $i$ , de los estados de los filtros de Laguerre.
$l_{ki}(k)$	.....Estado de los filtros de Laguerre en tiempo discreto.
$l_{ki}(z)$	.....Estado de los filtros de Laguerre en el plano $z$ .
$M$	.....Horizonte de control.
$N$	.....Horizonte de truncamiento de la serie de Volterra.
$P$	.....Horizonte de predicción.
$q$	.....Cuadrado del Polinomio de grado uno de Laguerre.
$R$	.....Constante universal de los gases.
$\tilde{r}(k)$	.....Señal de referencia en tiempo discreto.

$\tilde{r}(t)$ .....	Señal de referencia en tiempo continuo.
$r$ .....	Cuadrado del Polinomio de grado dos de Laguerre.
$s$ .....	Cuadrado del Polinomio de grado tres de Laguerre.
$t$ .....	Tiempo continuo.
$T$ .....	Periodo de muestreo.
$T_r$ .....	Temperatura dentro del reactor.
$T_i$ .....	Temperatura a la entrada del reactor.
$X_A$ .....	Coeficiente de transferencia de calor.
$X$ .....	Vector de entrada futura de la acción de control.
$\tilde{X}$ .....	Vector de entrada del pasado de la acción de control.
$\tilde{X} n$ .....	Vector de entrada futura normalizada.
$V_r$ .....	Volumen del reactor.
$\dot{X}_i$ .....	Vector de estado iésimo.
$y_0$ .....	Estado inicial de la salida del sistema o bias.
$y(t)$ .....	Salida del sistema en tiempo continuo.
$y(k)$ .....	Salida del sistema en tiempo discreto.
$\tilde{y}_+$ .....	Salida futura del sistema.
$\tilde{y}_-$ .....	Salida del sistema en términos del pasado
$Z$ .....	Transformada zeta.
$\phi_1$ .....	Polinomio de Laguerre grado uno.
$\phi_2$ .....	Polinomio de Laguerre grado dos.
$\phi_3$ .....	Polinomio de Laguerre grado tres.
$\Delta \tilde{X}$ .....	Vector delta de la señal de control futura.

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**  
**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**Av. Túpac Amaru 210 – Rímac – Lima – Perú**  
**ccmedina@uni.edu.pe**

**Key Words:** Nonlinear systems identification; Volterra series; orthogonal functions, Laguerre; nonlinear based model predictive control; nonlinear dynamic matrix control.

**ABSTRACT**

This thesis work, is focused on identifying nonlinear systems, when the dynamic models are unknown, and further based on the results, we propose the application of the Nonlinear Model Predictive Control, NMPC, using the algorithm of the Nonlinear Dynamic Matrix Control, NDMC.

The first aim of this work is to propose a methodology for identification of nonlinear systems using truncated Volterra series, such that the Volterra kernels are projected on a basis of Laguerre polynomials. The theoretical criteria have been validated through the identification of the manufacturing system melamine resin, using a batch type reactor belong to PISOPAK PERU SAC.

The reactor system on test has been modeled using kernels up to third degree. In all cases, the resulting models show good behavior throughout of the time process of resin production melamine.

The second goal of this thesis is the use identified model to build a NMPC scheme with the NDMC algorithm. This theoretical formulation has been used for the simulation of a NMPC controller type for path tracking, the temperature inside reactor R0-1 used in the manufacture of melamine resin.

Furthermore, we have simulated the trajectory control of the temperature, up to a set point in accordance with the technical specifications for resin production on the test reactor. The simulation was performed with fixed and variable references.

The simulations results revealed that NMPC controller proposed has to ability for tracking temperature inside of the reactor when we use a hyperbolic tangent function as reference. In this sense, the control system proposed is very promising for nonlinear process control.

In identification processes of nonlinear systems, the application of Volterra–Laguerre model allows to obtain models with a reduced number of parameters, instead systems modeled with Volterra series that contain a huge parameters number.

# IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES USANDO SERIES VOLTERRA-LAGUERRE

*Carlos Celestino Medina Ramos*  
*Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica*  
*Universidad Nacional de Ingeniería*  
*Av. Túpac Amaru 210 Rimac, Lima, Perú*  
*ccmedina@uni.edu.pe*

**Palabras clave:** *Identificación de sistemas no lineales, series de Volterra, Funciones ortogonales, Laguerre, Control Predictivo no lineal basado en modelos, Matriz Dinámica de Control no lineal.*

## RESUMEN

Este trabajo de Tesis está enfocado en la identificación de sistemas no lineales de modelo dinámico no conocido, adicionalmente y en base a los resultados obtenidos, se propone la aplicación del sistema de Control Predictivo no Lineal Basado en Modelos, NMPC, usando el algoritmo de la Matriz Dinámica de Control no Lineal, NDMC.

El primer objetivo de este trabajo consiste en implementar una metodología para la identificación de sistemas no lineales usando series de Volterra truncadas; proyectadas sobre una base de polinomios de Laguerre. Los criterios teóricos han sido validados mediante la identificación del sistema de fabricación de resina melamínica, mediante un reactor tipo batch, de PISOPAK PERU SAC.

El sistema del reactor indicado ha sido modelado mediante el uso de kernels de primer, hasta tercer grado. En todos los casos los modelos obtenidos presentan un buen comportamiento a lo largo de todo el tiempo que dura el proceso de la producción de la resina melamínica.

El segundo objetivo, de esta tesis consiste en utilizar el modelo identificado, para la formulación de un control NMPC basado en el algoritmo de la NDMC. Esta formulación teórica, se ha utilizado para la simulación de un controlador NMPC para el seguimiento de la trayectoria de la temperatura en el reactor R0-1 utilizado en la fabricación de resina melamínica.

Adicionalmente se ha simulado el control de la trayectoria de la temperatura hasta alcanzar un set-point, en concordancia a las recomendaciones técnicas para la producción

de la resina en el reactor bajo prueba. La simulación se realizó con referencias fija y variable.

Los resultados de las simulaciones revelaron que el controlador NMPC propuesto tiene la capacidad para el seguimiento de la temperatura en el interior del reactor si la referencia es una función tangente hiperbólica. En este sentido, el sistema de control propuesto es muy prometedor para el control de procesos no lineales.

En los procesos de identificación de sistemas no lineales, la aplicación del modelo de Volterra-Laguerre permite obtener modelos con un número reducido de parámetros, en lugar de los sistemas modelados con series de Volterra que contienen un número enorme de parámetros.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

El siglo XXI se está caracterizando por la rápida innovación de la tecnología, ello se hace evidente en el constante progreso de las ingenierías aplicadas y su notable contribución en la construcción de modernos sistemas de fabricación.

De un lado aparece el sector industrial sujeto a reglas propias de la globalización, que obligan a incrementar la productividad y a elevar la calidad de sus productos y de otra parte tenemos los sistemas de las plantas industriales, que en su conjunto requieren de técnicas avanzadas que permitan hacer realidad los objetivos de la producción.

En el caso de los procesos industriales, en su conjunto, están gobernados por mecanismos de naturaleza no lineal y modelos poco conocidos, que en su mayoría son aproximados y operados en un contexto puramente lineal. Las consecuencias de esta dinámica están reflejadas en la necesidad de incrementar la productividad y calidad, así como también en obtener una fuerte minimización de costos. Bajo este concepto nos inclinamos en afirmar que las técnicas modernas de control gobiernan los mecanismos de optimización, calidad y de homogeneidad de la producción en las industrias a gran escala, por lo cual su aplicación es necesaria para lograr que sus productos puedan ser competitivos en el mercado internacional.

Precisamente, el avance del entendimiento de los procesos dinámicos no lineales en la industria ha sido llevado a cabo con bastante éxito en el campo de la teoría de control en los últimos años. En tal sentido para el desarrollo de esta tesis he considerado adecuado contribuir con esquemas de modelos de sistemas no lineales y de control aplicados a procesos industriales, basados en procedimientos matemáticos que recientemente han sido exitosamente aplicados en plantas industriales y reactores químicos de laboratorio.

En efecto, el vertiginoso auge de los procesos químicos industriales ha demandado, crucialmente, la implementación de técnicas de control no lineal y de optimización de procesos. Por tal razón, esta tesis encara el problema del modelado de la planta por medio de procedimientos matemáticos de aproximación que están plasmados en la efectividad de los algoritmos planteados.

Así, el problema de las plantas industriales, en las que se desconoce el modelo dinámico, es tratado en un escenario que incorpora los polinomios ortogonales generalizados de Laguerre para caracterizar los kernels de las expansiones de Volterra.

Tradicionalmente, el uso de la expansión de Volterra fue aplicado en el estudio de filtros de señales estacionarias y no estacionarias. A diferencia de aquello, proponemos el empleo de esta expansión en su forma discreta para el modelamiento de sistemas no lineales, y para la validación de estos criterios haremos la identificación de un sistema no

lineal caracterizado por señales de entrada y salida que representan el flujo de aceite diatérmico y la temperatura de un reactor respectivamente, en una planta de producción de resina melamínica controlada por variación del flujo de aceite diatérmico. Esta operación se realiza mediante una válvula neumática, un transductor corriente/presión (I/P) y un controlador Proporcional, Integral y Derivativo (PID).

En esencia, la primera tarea consiste en modelar el sistema no lineal, desde el estado inicial del proceso hasta alcanzar el máximo valor de operación de la variable que mejor caracteriza al sistema. El modelado del sistema se realiza proyectando los kernels de la expansión de las series de Volterra sobre un espacio formado por una base de polinomios de Laguerre. Esta estrategia ha traído consigo la realización de un esquema susceptible de ser implementado para la identificación de modelos de plantas con modelos dinámicos poco conocidos, en prueba de lo cual se aplicó esta estrategia en la identificación del sistema no lineal indicado en el párrafo anterior.

Finalmente en base al modelo Volterra-Laguerre que representa al sistema no lineal, se plantea un esquema de control predictivo no lineal basado en modelos “Non Linear Based on Model Predictive Control”, NMPC, usando los criterios de la llamada “Non Linear Dynamic Matrix Control”, NDMC. La validación de la propuesta se realiza a nivel de simulación, aplicando la estrategia de control indicada y el algoritmo similar a la NDMC, para el seguimiento de la trayectoria de la temperatura en un reactor dedicado a la fabricación de resina melamínica.

### **1.1 NMPC y los Sistemas Volterra-Laguerre:**

En general para aplicar la metodología de control NMPC a un sistema no lineal, un reactor químico por ejemplo, se requiere disponer de:

- Un modelo dinámico de la planta, que represente con fidelidad el proceso.
- Un algoritmo de optimización de la producción obtenido a partir de una función de costo que involucre las variables que minimicen el error y los esfuerzos de control, que permitan mejorar el proceso.
- Una ley de control para el proceso.

Las ventajas que se pretenden obtener al aplicar la técnica NMPC al control del sistema no lineal son:

- Capacidad de seguimiento de la trayectoria de un sistema no lineal. En el caso bajo estudio la evidencia del carácter no lineal corresponde a las ecuaciones de reacción de los elementos. También se observa en las gráficas “Input/Output”, I/O, obtenidas a partir de experimentos sobre la planta.
- Aplicación de restricciones, por lo general son parte del arte de la producción para lo cual el diseñador debe trabajar en estrecha relación con los encargados de los procesos. En el caso particular de la validación donde el sistema es un reactor químico para fabricación de resina melamínica, éste tiene como variable

fundamental la temperatura, la cual debe alcanzar un valor predeterminado y a partir de allí desconectar toda señal de entrada. Igualmente es pertinente observar que la entrada de aceite diatérmico no puede ser mayor que el flujo nominal del sistema. Finalmente, en nuestro caso el modelado del sistema ha sido reducido a uno tipo “Single Input, Single Output” SISO, para lo cual se mantienen constantes la presión y temperatura en la línea de calefacción.

## **1.2 Plan de la Tesis:**

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 planteamos el problema de los sistemas no lineales y la posibilidad de caracterizarlos usando series de Volterra y polinomios de Laguerre. El sistema bajo estudio en nuestro caso es un reactor químico que se halló operando con un controlador PID, pese a que con esa estrategia no es posible controlar trayectorias. Este tipo de control se usaba en parte por desconocimiento del modelo dinámico y en esencia porque el mercado no requería mayor calidad, ni productividad en sus procesos.

El problema del control para seguimiento de trayectoria de temperatura en un reactor, involucra controlar el flujo de aceite diatérmico en su chaqueta de calefacción, mediante un actuador, que en el presente caso es una válvula neumática, la que a su vez es operada por un transductor I/P.

Finalmente, se propone como solución a la tarea de controlar un sistema no lineal de modelo dinámico desconocido, la obtención de un modelo Volterra-Laguerre y un modelo de control NMPC con algoritmo similar a la NDMC para realizar el seguimiento de la trayectoria de la temperatura.

En el capítulo 3 se analiza diversos antecedentes sobre planteamientos de la técnica Volterra-Laguerre aplicada en controladores NMPC. En primera instancia analizamos los criterios de la investigación de [1] aplicada a un proceso de neutralización en un reactor continuo y utilizando su criterio para la expansión de Volterra generamos la nuestra para la expansión Volterra-Laguerre.

Igualmente en este capítulo se aborda los planteamientos de [2] aplicado a la identificación de sistemas no lineales usando las técnicas de Volterra-Laguerre, destacando los criterios de aplicación de ortogonalidad y separación de kernels.

En la parte final de este capítulo se analizan los criterios para aplicar señales pseudo aleatorias multinivel en los procesos de identificación, para lo cual destacamos aquellos que nos sirvan en el proceso de identificación. En este caso analizamos los resultados de la investigación de [3] sobre aplicación de señales “Pseudo Random Multi Sequence” PRMS en los procesos de identificación de sistemas no lineales.

El capítulo 4 lo iniciamos formulando la hipótesis de que los kernels de la expansión de Volterra pueden aproximarse cuando se proyectan sobre un espacio vectorial

formado por una base de polinomios ortogonales. El criterio de usar funciones ortogonales, como base que genera el espacio donde se proyectan los kernels que representan al operador del sistema no lineal, se ampara en los avances de investigaciones recientes y en la mayor comprensión de las propiedades de este tipo de funciones.

Adicionalmente en este capítulo se analiza la expansión de Volterra y sus principales propiedades ya que su matemática constituye el cimiento de esta investigación. Para lo cual se analizan los kernels y la caracterización de sus espacios desde el primer, hasta el tercer orden.

Nuestra metodología persigue el logro de la proyección del kernel de Volterra sobre una base finita de funciones ortogonales de polinomios generalizados de Laguerre con el propósito de reducir el número de parámetros cruzados de la serie original. Una vez que es aceptado el criterio de que un grupo reducido de parámetros y polinomios ortogonales son capaces de representar con buena aproximación los kernels del sistema, en base a la data entrada/salida y las ecuaciones del modelo aplicamos la técnica de mínimos cuadrados para extraer los parámetros que ponderan la base de los polinomios ortogonales, que en conjunto representan el comportamiento de la variable controlada del sistema. En nuestro caso esta variable es la temperatura de un reactor industrial, para cuya identificación hemos usado la respuesta del sistema cuando se aplica como entrada una señal pseudo aleatoria de cuatro niveles, ya que nos proponemos obtener modelos hasta de tercer orden.

Si bien la serie de Volterra es definida como una serie infinita de integrales, hemos optado por su desarrollo en series discretas y truncadas, con kernels proyectados sobre una base de polinomios ortogonales, que permitan reducir el número de parámetros aplicando el criterio de ortogonalidad y en esencia representar el sistema con adecuada aproximación.

Luego analizamos los criterios para introducir los polinomios ortogonales de Laguerre. Estos polinomios tienen propiedades interesantes entre la que destaca su naturaleza de carácter convergente. En consecuencia teniendo los kernels representados como función de estos polinomios, resulta evidente que heredan la naturaleza convergente. Esta característica será muy importante en la estabilidad del sistema.

En el capítulo 5 sometemos a prueba los algoritmos de identificación del sistema del reactor usado en la fabricación de resina melamínica, destacando las condiciones particulares de los ensayos y los resultados cuando se caracteriza el sistema no lineal por modelos de primer hasta tercer orden. Todos los ensayos fueron aplicados al reactor R01 de PISOPAK PERU SAC, cargado bajo condiciones normales de fabricación.

Si bien el trabajo se concentra en la variable temperatura, debo destacar que las pruebas fueron realizadas en operación, con señales multinivel y conforme a las necesidades de producción de planta. Lo cual nos indica que al seguir una trayectoria determinada es factible reducir el sistema a uno tipo SISO cuando mantenemos la presión y la temperatura constantes dentro de la línea térmica.

Adicionalmente en base a los resultados obtenidos de los modelos Volterra-Laguerre, su comparación con los datos de la planta y el buen ajuste entre el modelo y el

sistema, se concluye en afirmar que es acertado el planteamiento de la identificación de sistemas no lineales caracterizables por funciones continuas, mediante series Volterra-Laguerre.

En el capítulo 6 se plantea un sistema de control NMPC que usa el modelo Volterra-Laguerre, para lo cual usamos algunos criterios de la investigación de [4] sobre aplicación de NMPC usando series de Volterra, para configurar una propuesta de controlador por matriz dinámica no lineal NDMC, usando el modelo Volterra-Laguerre de segundo orden.

El capítulo 7 en esencia trata de la simulación del controlador propuesto, adicionalmente amplió los conceptos del NMPC usando los algoritmos de la NDMC aplicada explícitamente al control de temperatura del reactor melamínico de PISOPAK PERU SAC. Para todas las simulaciones se anexa los resultados.

Algo que estimo útil es la presentación de la metodología para implementar las matrices usando el modelo identificado, también es relevante el planteamiento de la función de costo y su minimización que permite obtener la ley de control.

El final de este trabajo corresponde a las conclusiones y recomendaciones.

## **CAPÍTULO 2**

### **NOCIONES GENERALES SOBRE IDENTIFICACIÓN Y CONTROL PREDICTIVO NO LINEAL USANDO ALGORITMOS DE LA MATRIZ DINÁMICA DE CONTROL**

#### **Sistemas no lineales de modelo dinámico desconocido**

##### **2.1 Introducción:**

Las industrias cuyas producciones no son de gran escala, generalmente solo han tenido acceso a controladores PID, con los cuales básicamente se controla el proceso considerando “set-points” (referencias) de valor fijo, sin embargo, en algunos sistemas de control es importante tener capacidad de controlar procesos con referencias variantes en el tiempo, es decir, el controlador debe tener la capacidad de seguir una trayectoria dada, como es el caso de los reactores tipo batch para producción de resina melamínica, para asegurar la normalización de los procesos.

La necesidad de controlar el comportamiento de los parámetros de un sistema no lineal deviene en conocer su modelo dinámico, que lamentablemente ninguna industria pequeña suele disponer, por tal razón es imprescindible dotar de herramientas de control a las pequeñas industrias, que les permitan ser competitivas. Como por ejemplo los métodos de control moderno NMPC.

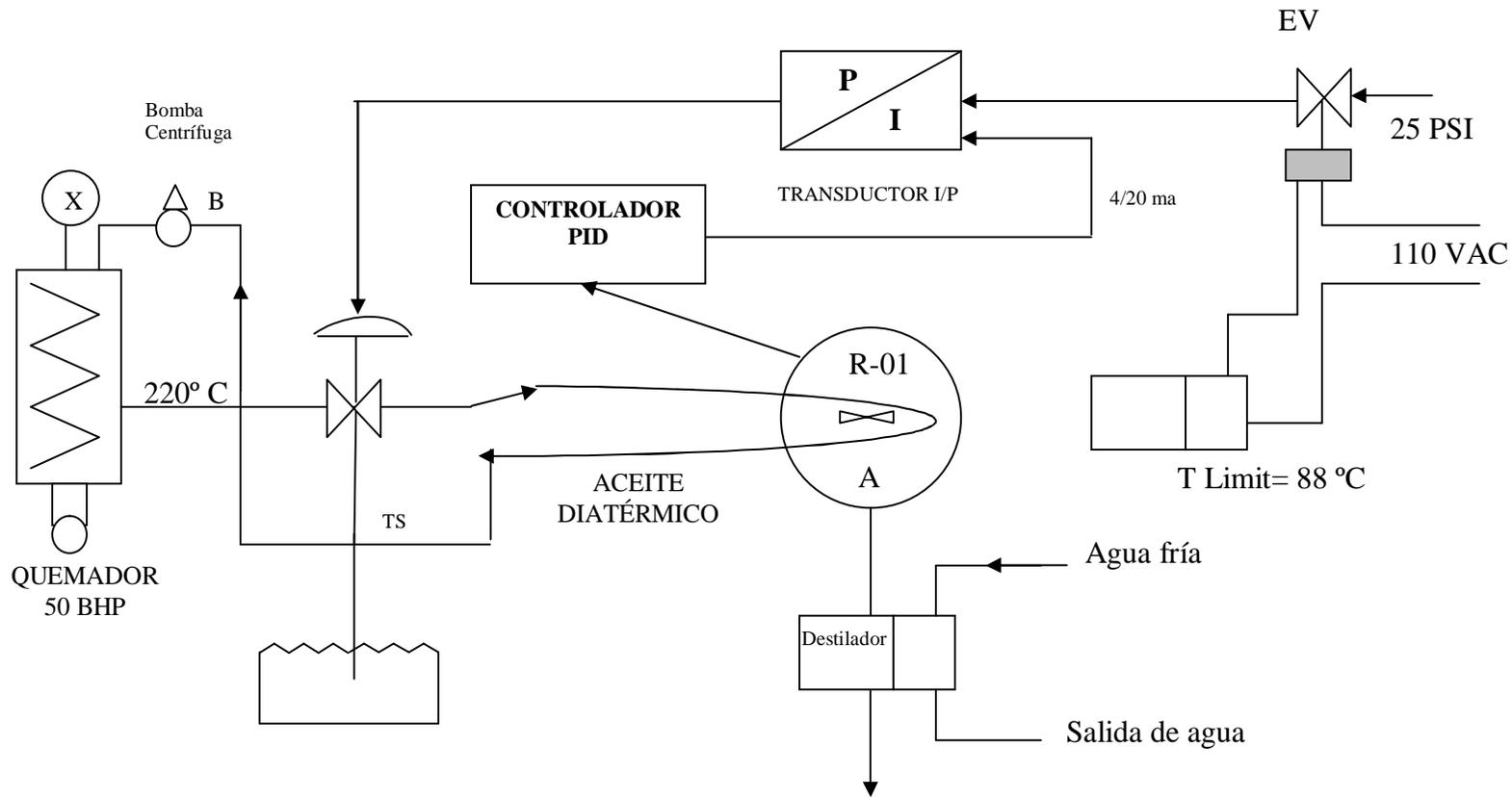
En el presente trabajo se simula un esquema NMPC tomando como modelo uno previamente identificado usando una técnica de identificación de sistemas no lineales. Para su validación se usó dichas metodologías en la obtención del modelo de un reactor y su propuesta de control NMPC.

##### **2.2 Planteamiento del Problema:**

###### **2.2.1 Componentes del Sistema Para la Validación de la Propuesta**

El reactor químico, sobre el que validaremos la propuesta del presente trabajo, comprende parte del sistema de fabricación de resina melamínica de la Planta de Impregnación de Papel en Resina de PISOPAK PERU SAC, tipo “batch” de 3500 Kg. de producción promedio.

El procesamiento de la resina en el reactor es la primera etapa del ciclo de fabricación de tableros para la industria del mueble; la segunda etapa es la impregnación de papel y finalmente el prensado del papel y los tableros a temperaturas capaces de producir la curación definitiva de la resina, es decir se logra alcanzar su máxima dureza de la superficie.



*Figura 2.1 Esquema básico de la Planta de fabricación de Resina Melamínica.*

La Figura 2.1 ilustra, básicamente, la estructura del sistema del reactor para la producción de resina melamínica usado actualmente y que es materia de la propuesta para ser mejorado. Las componentes del sistema se describen del modo siguiente:

- a) Quemador, esta unidad proporciona energía calorífica al aceite diatérmico y opera en el rango de  $220 \pm 5^\circ \text{C}$ . El quemador trabaja con gas natural y tiene una potencia de 50 BHP, lo cual aparte de su eficiencia respecto del combustible residual R5, minimiza el número de fallas por defectos de combustión.
- b) Válvula Neumática (V), esta unidad es de tres vías y controla el flujo de aceite hacia la chaqueta de calentamiento del reactor, su comportamiento es tipo raíz cuadrada y el actuador es un diafragma que opera con 3/15 PSI de aire comprimido.
- c) Transductor I/P, esta unidad opera con alimentación de 25 PSI de aire comprimido y otorga una salida de 3/15 PSI cuando recibe una entrada 4/20 ma, su comportamiento es aproximadamente lineal.
- d) Controlador PID, esta unidad recibe la información de la temperatura del material en el reactor mediante un transductor de resistencia de platino, PT 100, está programado con un “set-point” de  $88^\circ \text{C}$ . El instrumento responde con una salida de 4/20 ma según el error respecto al “set-point”.
- e) Limitador de Temperatura, esta unidad es fundamental en la protección de sobre-temperatura ya que abre un contacto normalmente cerrado cuando el reactor alcanza  $88^\circ \text{C}$ , este contacto desenergiza la electroválvula que provee aire al transductor I/P, de este modo deja sin entrada de aire a la válvula neumática V.
- f) Agitador, esta unidad tiene por finalidad homogenizar el material y sobre todo hacer del conjunto un sistema isotérmico, está constituido por una hélice, eje y motoreductor que opera a la velocidad angular de 20 RPM.
- g) Reactor Químico, esta unidad es de acero inoxidable y posee chaquetas de calentamiento y enfriamiento de 5 cm. de diámetro. El calentamiento se realiza usando aceite diatérmico a  $220^\circ \pm 5^\circ \text{C}$ . (figura 2.2).

### **2.2.2 Necesidades de Control Para el Reactor de Resina Melamínica:**

Para aplicar una adecuada técnica de control, se requiere conocer el modelo dinámico del sistema que en nuestro caso esta compuesto por transductor I/P, válvula neumática y reactor químico. La operación y ensayos se realizarán manteniendo constantes la temperatura y la presión del aceite diatérmico en la línea de calefacción. Bajo este criterio tendremos las condiciones para operar el sistema como un SISO, en el que la entrada es la señal al transductor I/P y la salida será la temperatura dentro del reactor.

La razón de dotar de nuevas técnicas de control para el reactor es la de ajustar su trayectoria de calentamiento a una prefijada, durante la fabricación de cada batch de resina melamínica.

El sistema del reactor en lo que a control de temperatura se refiere, puede caracterizarse por  $Y(k) = H[X(k)]$  donde  $Y(k)$  es la salida,  $X(k)$  la entrada y  $H[\cdot]$  el operador del sistema.

La producción de resina melamínica usada en impregnación de papel requiere elevar la temperatura de los componentes en el reactor desde la temperatura de inicio (temperatura inicial de los reactantes de 20 °C aproximadamente) hasta 88 °C, para lo cual se dispone de aceite diatérmico a  $220 \pm 5$  °C. Cuando el reactor alcanza los 88 °C se detiene el proceso de calentamiento. Una observación importante es anotar que durante el proceso, los reactantes incrementan su temperatura en aproximadamente 10 °C por fenómeno de exotermia.

En general el sistema tiene el comportamiento de acumular energía calorífica, esto intuitivamente nos indica que se puede caracterizar el sistema no lineal por una suma de convolución generalizada para sistemas invariantes en el tiempo y causales [4].

$$\begin{aligned}
 Y(k) = N[X(k)] = & \sum_{i=0}^{\infty} h_1(i)X(k-i) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_2(i,j)X(k-i)X(k-j) \\
 & + \dots \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \dots \sum_P h_P(i,j,l,\dots,P)X(k-i)X(k-j)\dots X(k-P)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

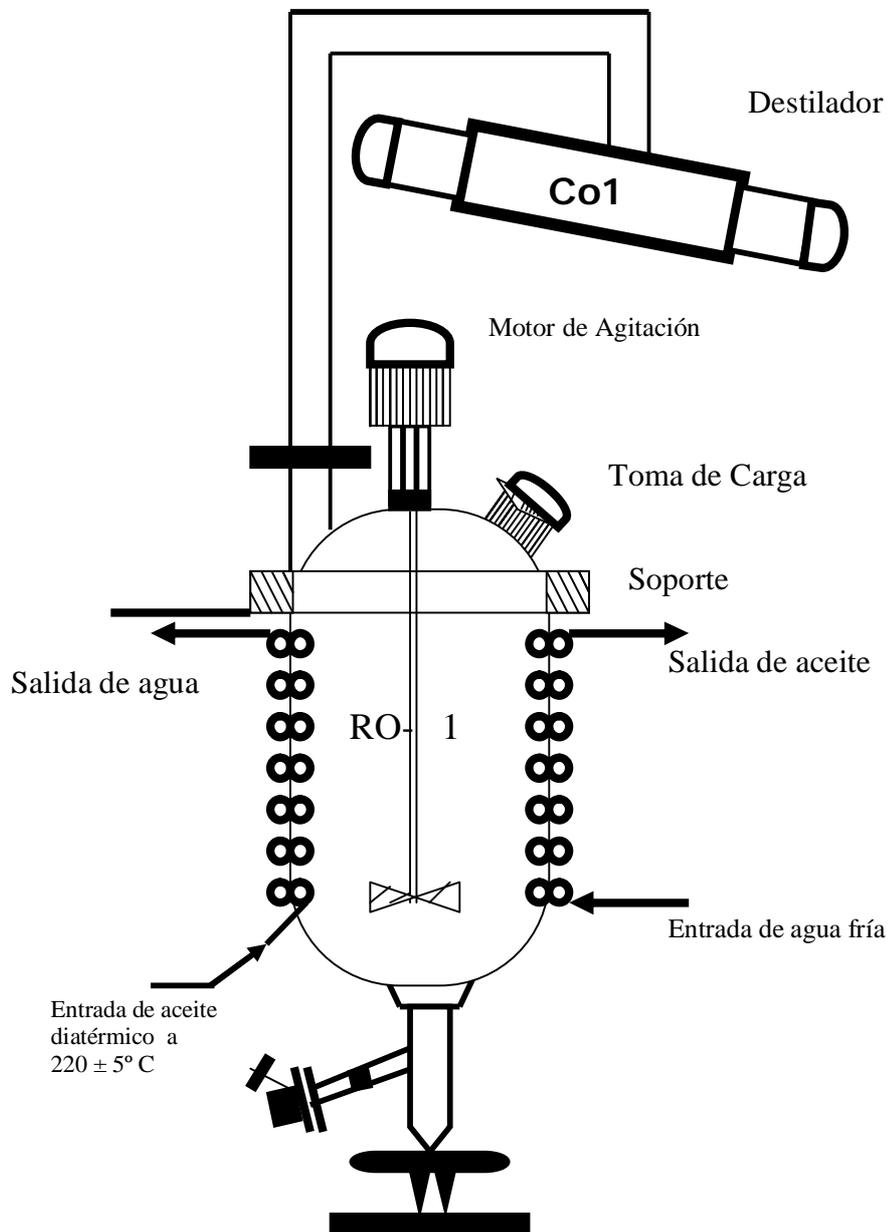
Finalmente podemos reducir el problema en las siguientes tareas:

- Identificar el sistema, caracterizándolo por un sistema tipo suma de convolución hasta grado  $P$ , usando el sistema Volterra-Laguerre.
- Plantear un modelo NMPC y luego a manera de aplicación utilizar el modelo en términos de validación para controlar la trayectoria de la temperatura dentro del reactor, para la producción de resina melamínica.

### 2.2.3 Modelo Dinámico Del Sistema Reactor Melamínico:

La figura 2.1 ilustra el esquema básico del sistema sobre el que aplicaremos el proceso de identificación del modelo Volterra-Laguerre. La idea de representar el modelo dinámico es para hacer evidente el carácter no lineal del sistema, ya que para obtener el modelo del sistema en estudio, no es necesario disponer de las ecuaciones que gobiernan los procesos físicos y químicos dentro del reactor.

Planteamos las ecuaciones básicas del reactor, pero precisamos que exactamente no conocemos como varía la concentración ni las ecuaciones que gobiernan el proceso de transferencia de calor desde el aceite diatérmico hacia los reactantes. En tal sentido por mediciones de temperatura observamos el fenómeno de exotermia, pero igual que en los otros casos no tenemos las ecuaciones que expliquen el fenómeno.



**Figura 2.2 Esquema Básico del Reactor R0-1.**

Para caracterizar el caudal que fluye en las chaquetas de calentamiento, recordamos que  $Q_i$  es una función cuadrática que depende de la apertura de la válvula neumática de tres vías, donde  $Q_i = k \ell^2$  y  $\ell$  es el desplazamiento del vástago de la válvula.

Si consideramos hipotéticamente una reacción cualquiera, la ecuación siguiente [5] representa el balance del reactante A dentro del proceso químico supuesto.

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_0 e^{-E/RT_r} C_A^2$$

Donde:

$C_A$	Es la concentración de A en el reactor	mol / litro
$k_0$	Es la constante de Arrhenius	Litro/ mol segundo
$E$	Energía de activación	kJ/mol
$T_r$	Temperatura en el reactor	°K
$t$	Tiempo	segundos
$R$	Constante universal de los gases	8,3143 J/°K mol

La siguiente ecuación corresponde a la dinámica del balance de entalpía:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\Delta H}{\rho C_P} k_0 e^{-E/RT_r} C_A + \frac{U_A}{V\rho C_P} (T_i - T)$$

Donde:

$C_P$	Capacidad calorífica de los componentes en el reactor	Kilo Joule/KgK°
$T_i$	Es la temperatura de ingreso del aceite diatérmico.	°K
$U_A$	Coefficiente de transferencia de calor del aceite a los reactantes	
$\Delta H$	Calor de reacción.	Kilo Joule / mol
$V_r$	Volumen del reactor	litros
$\rho$	Densidad volumétrica	Kg/m <sup>3</sup>

Expresando las ecuaciones del proceso para el reactante A, en función de las variables de estado tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 &= C_A \\ \dot{X}_1 &= -k_0 e^{-E/RX_2} X_1^2 \\ X_2 &= T_r \\ \dot{X}_2 &= k_4 (T_c - X_2) - k_3 k_0 X_1^2 e^{-E/RX_2} \end{aligned}$$

Donde:

$$k_4 = \frac{U_A}{V\rho C_p}, \quad k_3 = \frac{\Delta H}{\rho C_p},$$

$Y = H[X_1, T_i]$ , representa la salida del sistema.

Las ecuaciones de  $\dot{X}_1, \dot{X}_2, Y, y Q_i$  ilustran la característica no lineal del reactor, por lo cual resulta importante modelarlo mediante un sistema entrada/salida usando modelos Volterra-Laguerre, toda vez que no se dispone del modelo físico-químico del sistema.

### 2.3 Propuesta de Solución:

La propuesta de solución debe partir del conocimiento sobre el comportamiento del sistema. Una fuente eficaz de análisis son los gráficos de producción y en especial los correspondientes a la operación con señales apropiadas para fines de identificación que puedan ser tomadas como datos entrada /salida que caractericen al sistema no lineal.

Del análisis de las curvas de los ensayos al sistema, planteamos el supuesto que pueden ser representadas por funciones continuas y diferenciables, entonces si caracterizamos a la variable de salida como la función  $f(t)$ , a la señal de entrada que comanda el sistema como  $X(t)$  y al tiempo del ciclo batch como  $t \in [a, b]$ , se puede concluir que:

- $f^2(t)$ , es integrable sobre  $[a, b]$  y si adicionalmente  $\int_a^b |f|^2 dt < \infty$ , entonces la función es convergente.
- Como la función  $f(t)$  es continua en el rango de operación, es factible afirmar que existe una familia de polinomios algebraicos que convergen uniformemente a la función, según lo establece el Teorema de Weierstrass [7], como sigue:

Dado  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ , para todo  $\varepsilon > 0$  y un índice  $N > 0$ , existe una serie de polinomios  $\{P_n(t)\}$  que converge a la función  $f$ , esto es, tal que se cumple:

$$|f(t) - P_n(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b] \text{ y para todo } n > N$$

- Desde que las series de Volterra [8] pueden considerarse como una generalización de las series de Taylor de funciones no lineales que mapean:  $\mathfrak{R}^\infty \rightarrow \mathfrak{R}^\infty$  y dada que nuestra función es tal que:  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  y a su vez es diferenciable para todo  $t$ , entonces la Serie de Volterra se aproximará uniformemente a la función  $f(t)$ .

### 2.3.1 Propuesta Del Modelo Para Un Sistema No Lineal Usando Series Volterra-Laguerre:

Para caracterizar el sistema no lineal se propone:

- Usar series de Volterra de orden y horizonte truncados [9].
- Proyectar los kernels de la serie de Volterra sobre una “Orthogonal Basis Functions”, OBF, (Las más usadas son la función pulso, la funciones de Laguerre, Hermite, Chebishev y la función de Kautz). En particular hemos decidido usar las funciones de Laguerre por ser una familia de polinomios suaves y convergentes, y por los excelentes resultados obtenidos en investigaciones similares, como la del trabajo de la referencia [10].
- Verificar que el modelo deba tener baja sensibilidad frente a la variación de los kernels de la serie, lo cual es factible por las variaciones acotadas de las funciones ortogonales, [10].

Como conclusión, se debe caracterizar a la salida del sistema  $Y(t)$ , por una serie de Volterra truncada en tiempo discreto considerando que se trabaja con un sistema causal, no lineal e invariante en el tiempo [9].

Por lo general siendo estos sistemas muy densos en lo que respecta al número de kernels, se suele utilizar sistemas con kernels hasta de segundo orden [11] y en el caso de esta tesis para ahondar en el criterio, se identificará el sistema no lineal con kernels hasta de tercer orden y horizonte de truncamiento  $N$  como se muestra a continuación.

$$\hat{Y}(k) = N [X(k)] = \sum_{i=0}^N h_1(i)X(k-i) + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N h_2(i,j)X(k-i)X(k-j) + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{r=0}^N h_3(i,j,r)X(k-i)X(k-j)X(k-r) \quad 2.2$$

Para lograr un modelo Volterra-Laguerre, los kernels  $h_i$  deberán proyectarse sobre un espacio formado por una base de polinomios ortogonales de Laguerre [10] linealmente independientes, con el objeto de minimizar los parámetros a identificar gracias a la propiedad de ortogonalidad aplicable a los kernels cruzados en los modelos de Volterra. La expresión de los kernels proyectados sobre la OBF es como sigue:

$$\begin{aligned} h_1(m_1) &= \sum_{k_1=1}^L C_1(k_1)\phi_{k_1}(m_1) \\ h_2(m_1, m_2) &= \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L C_2(k_1, k_2)\phi_{k_1}(m_1)\phi_{k_2}(m_2) \\ h_3(m_1, m_2, m_3) &= \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L \dots \sum_{k_p=1}^L C_p(k_1, k_2, \dots, k_p)\phi_{k_1}(m_1)\phi_{k_2}(m_2)\dots\phi_{k_p}(m_p) \end{aligned} \quad 2.3$$

Para el caso de horizonte y grado truncados en tres, el error de aproximación queda representado por:

$$\varepsilon(k) = \left\| N [X(k)] - N^3 [X(k)] \right\| \leq \sum_{n=4}^{\infty} \|h_n\| \cdot \|X_n\|^n \quad 2.4$$

Donde:  $h_n = h(k_1, \dots, k_n)$ ,  $X_n = (x(k-k_1) \dots x(k-k_n))$ , y  $N^3 [X(k)]$  es la serie de Volterra truncada con kernels de tercer orden.

### 2.3.2 Propuesta para el Modelo de Control

Se propone utilizar un modelo de control NMPC, considerando que permite realizar seguimientos de trayectoria de referencia [13] con el objetivo de reemplazar los controladores PID, que son útiles en el control de “set-points” fijos.

- Para implementar la predicción en el modelo de control, los estados del sistema pueden ser estimados usando las funciones del modelo identificado y el algoritmo NDMC.
- El NMPC permite la aplicación de restricciones a la entrada y la salida.
- El sistema no lineal identificado apropiadamente con modelos Volterra-Laguerre de segundo orden, será el modelo que usará nuestro NMPC.

#### 2.3.2.1 Respuesta predictiva del NMPC matricial

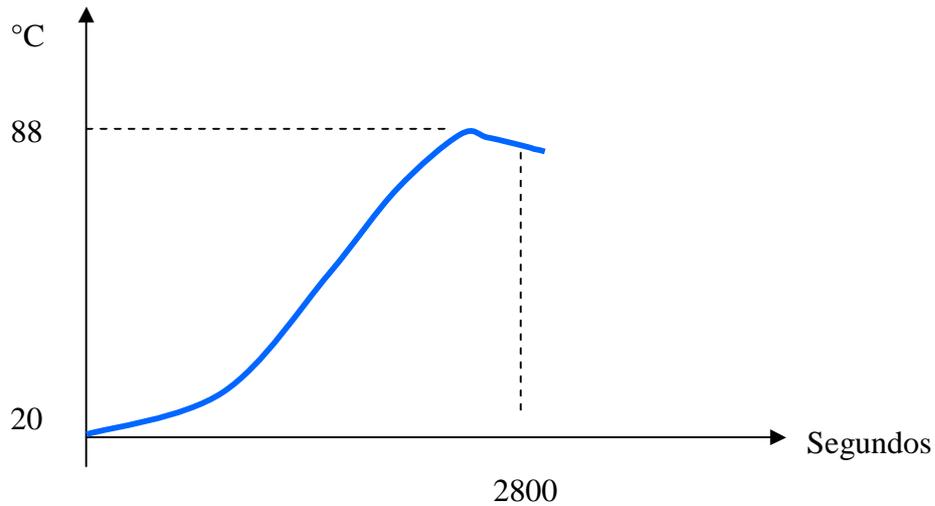
Precisando la propuesta, se pretende formular un controlador basado en el algoritmo de la “Dynamic Matriz Control”, DMC, con sus parámetros obtenidos a partir del modelo Volterra-Laguerre de segundo orden, en lugar del modelo original de la DMC donde sus parámetros se obtienen a partir de la respuesta a una señal escalón. La razón es que los modelos híbridos de Volterra para sistemas no lineales son obtenidos en base a señales multinivel que excitan al sistema con una mayor gama de frecuencias, en consecuencia la identificación es superior al modelo de la DMC que es obtenido con un solo nivel.

Una NDMC basada en modelos truncados Volterra-Laguerre de segundo orden implica trabajar con kernels de primer y segundo orden, para lo cual los kernels de la serie de Volterra deben ser proyectados sobre una base de funciones ortogonales, tal que los kernels de primer y segundo orden deben sustituirse en armonía a los parámetros usuales de la matriz dinámica como se indica a continuación:

$$h_i = a_i \quad h_{ii} = b_i \quad 2.4$$

$$a_i = \sum_{r=0}^i (C_1 \phi_1(r) + C_2 \phi_2(r) + C_3 \phi_3(r)) \quad 2.5$$

$$b_i = \sum_{r=0}^i (C_{11} \phi_1^2(r) + C_{22} \phi_2^2(r) + C_{33} \phi_3^2(r)) \quad 2.6$$



**Figura 2.3** Respuesta del proceso de calentamiento a una señal escalón.

- $h_i$  son los kernels de primer orden
- $h_{ii}$  son los kernels de segundo orden
- $h_0$  no se considera en la identificación, porque se modelará solo las variaciones.
- $P$  es el horizonte del modelo, tal que se logre capturar por lo menos el 99% de la respuesta del sistema.

De lo expuesto, la respuesta del sistema no lineal en su manera predictiva queda representada por la siguiente ecuación:

$$Y(k+n) = \sum_{i=1}^P (a_i x(k+i+n) + b_i x^2(k+i+n)) \quad 2.7$$

En el presente caso se expresa  $a_i$  y  $b_i$  mediante los polinomios de Laguerre ponderados por los coeficientes  $C_1, C_2, C_3, C_{11}, C_{22}, C_{33}$  que deben ser obtenidos mediante el proceso de identificación usando series Volterra-Laguerre, por ello es que en  $a_i$  y  $b_i$  deben estar involucrados los polinomios  $\phi_k(i)$ , hasta el tercer orden, debido a que la propuesta comprende una OBF de tres polinomios. Luego generalizando el modelo tenemos:

$$Y(k+n) = Y_+ + Y_- \quad 2.8$$

Donde:

$Y_+$  Corresponde a los términos del futuro y  $Y_-$  a los términos del pasado.

Entonces:

$$Y(k+M) = \sum_{i=1}^M a_i x(k+M-i) + \sum_{i=M+1}^P a_i x(k+M-i) + \sum_{i=1}^M d(k+M-i) + \sum_{i=1}^M b_i x^2(k+M-i) + \sum_{i=M+1}^P b_i x^2(k+M-i) \quad 2.9$$

Agrupando matricialmente tenemos:

$$GX = \sum_{i=1}^M a_i x(k+M-i) \quad \text{términos lineales del futuro} \quad 2.10$$

$$HX_- = \sum_{i=M+1}^P a_i x(k+M-i) \quad \text{términos lineales del pasado} \quad 2.11$$

$$d^T = [d(k+M-1) d(k+M-2) \dots d(k)] \quad \text{errores de predicción} \quad 2.12$$

$$G_2 = \sum_{i=1}^M b_i x^2(k+M-i) \quad \text{términos cuadráticos del futuro} \quad 2.13$$

$$H_2 = \sum_{i=M+1}^P b_i x^2(k+M-i) \quad \text{términos no lineales del pasado} \quad 2.14$$

Sintetizando las expresiones anteriores, tenemos la forma matricial para la trayectoria predictiva.

$$[Y] = G[X] + H[X_-] + [C] \quad 2.15$$

$$[C] = G_2 [X^2] + H_2 [X_-^2] + [d] \quad 2.16$$

Considerando  $N=P$  las matrices del sistema NMPC planteado son similares al trabajo de [5], dirigido a sistemas identificados con series de Volterra.

$$G[X] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_M & a_{M-1} & a_{M-2} & \dots & a_1 \\ a_{M+1} & a_M & a_{M-1} & \dots & a_1 + a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_P & a_{P-1} & a_{P-2} & \dots & \sum_{i=1}^{P-M+1} a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(k+M-1) \end{bmatrix} \quad 2.17$$

$$H[X_-] = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_N & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1} & a_N & \cdots & 0 & 0 \\ a_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-1) \\ x(k-2) \\ x(k-3) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(k-N) \end{bmatrix} \quad 2.18$$

$$G_2[X^2] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_M & b_{M-1} & b_{M-2} & \cdots & b_1 \\ b_{M+1} & b_M & b_{M-1} & \cdots & b_1 + b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_P & b_{P-1} & b_{P-2} & \cdots & \sum_{i=1}^{P-M+1} b_i \end{bmatrix} [\text{Diag}(X)] \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(k+M-1) \end{bmatrix} \quad 2.19$$

$$H_2[X_-^2] = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & b_N & 0 \\ b_3 & b_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N-1} & b_N & \cdots & 0 & 0 \\ b_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{Diag}(X_-)] \begin{bmatrix} x(k-1) \\ x(k-2) \\ x(k-3) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(k-N) \end{bmatrix} \quad 2.20$$

Agrupando los términos anteriores tenemos la respuesta predictiva del control NMPC matricial del modo siguiente:

$$[Y(k)] = G[X] + H[X_-] + G_2[\text{Diag } X][X] + H_2[\text{Diag } X_-][X_-] + [d] \quad 2.21$$

### 2.3.2.2 Propuesta del controlador NMPC:

Dada una trayectoria de referencia para la temperatura del reactor  $Rf(k)$  para un proceso tipo batch, planteamos una función de costo que involucre las variables principales que conviene minimizar, primero tendremos el error entre la referencia y la salida y de otra parte la señal de control. Con estos criterios planteamos una función [14] que mediante un proceso de minimización nos permita obtener la ley del controlador NMPC.

$$J = \sum_{k=1}^P [\tilde{Y}(k) - Rf(k)]^2 + \sum_{k=1}^M \lambda [X(k-1)]^2 \quad 2.22$$

Donde  $\lambda$  representa el parámetro de ponderación de la acción de control  $X$ .

En el caso de la presente tesis,  $J$  se representa de modo matricial por:

$$J = [GX + C - Rf]^T [GX + C - Rf] + \lambda X^T X \quad 2.23$$

De lo expuesto, se obtiene el mínimo de  $J$  derivándolo respecto a  $X$  si:

$$\frac{dJ}{dX} = 0 \quad 2.24$$

La solución, estimando que las variaciones cuadráticas son pequeñas es:

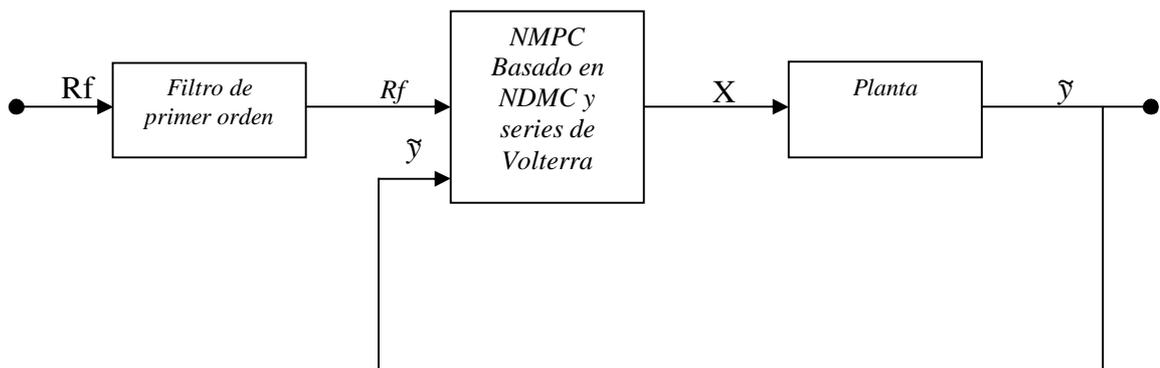
$$X = \text{inv}(G^T G + \lambda I) G^T (Rf - C) \quad 2.25$$

Donde:

$$X = [x(k) \quad x(k+1) \cdots x(k+M-1)] \quad 2.26$$

### 2.3.2.3. Estructura del modelo NMPC:

Se pretende utilizar la estructura de la figura 2.4, en la cual se incluye un filtro pasa bajo, tal que permita trabajar con un parámetro  $\lambda$  de bajo valor.



**Figura 2.4** Diagrama de bloques de la estructura NMPC con algoritmo NDMC

## CAPÍTULO 3

### ANTECEDENTES DEL MODELAMIENTO DE SISTEMAS USANDO SERIES VOLTERRA – LAGUERRE

#### 3.1 Modelamiento Adaptativo Volterra Laguerre Para NMPC:

##### 3.1.1 Introducción:

Mediante esta técnica se propone un modelo alternativo al de las series de Volterra para los procesos industriales que cambian su estructura por diversas razones, más aún si el modelo dinámico del sistema es poco conocido [1].

El fundamento de la propuesta radica en que el modelo de Volterra requiere identificar muchos términos denominados kernels  $h_1(k)$ ,  $h_2(k_1, k_2)$ ,  $h_3(k_1, k_2, k_3)$ , etc., aún en modelos tipo SISO, en esencia las razones del trabajo se pueden sintetizar en los siguientes considerandos:

- Los modelos de Volterra-Laguerre no necesitan conocimiento explícito de la constante de tiempo  $\tau$  del sistema en particular.
- A diferencia de los modelos de convolución o Volterra tradicional, el modelo Volterra-Laguerre requiere menos coeficientes debido a la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Laguerre.

##### 3.1.2 Identificación del Modelo Adaptativo Volterra–Laguerre

Este proceso lo iniciamos con la representación de un sistema lineal tipo SISO expresada por filtros con polinomios generalizados de Laguerre [1] linealmente independientes.

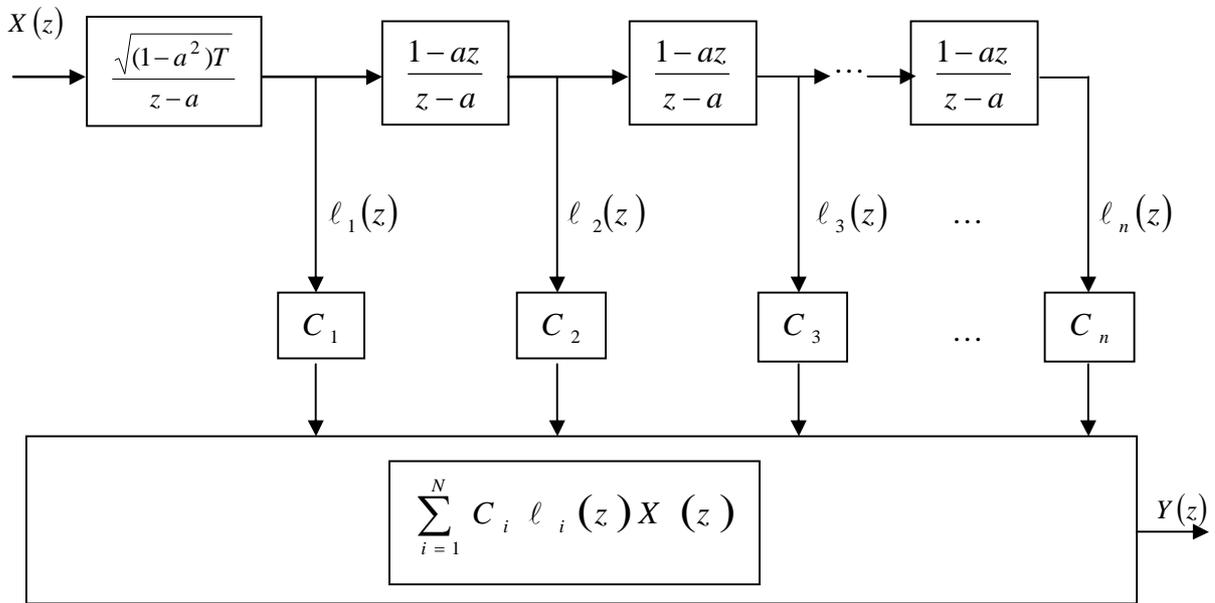
$$\hat{Y}(z) = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i(z) X_i(z) \quad 3.1$$

Debe observarse que la expresión corresponde a un modelo de primer orden, donde los polinomios de Laguerre quedan expresados por [15]:

$$\phi_i(z) = \sqrt{(1-a^2)T} \frac{(1-az)^{i-1}}{(z-a)^i} \quad \forall i \geq 1 \quad 3.2$$

En la expresión anterior  $a$  es el polo de los filtros de Laguerre, que por razones de estabilidad debe cumplir con  $|a| < 1$ ,  $T$  es el periodo de muestreo,  $\hat{Y}(z)$  la salida del modelo y  $X(z)$  la entrada al sistema.

Por simplificación, llamaremos  $l_i(z)$  a la señal de salida del filtro de Laguerre de orden  $i$ . La figura 3.1 ilustra como se puede obtener una salida  $Y(z)$  en función de los polinomios de Laguerre hasta orden  $N$  en particular. Por sencillez solo se grafica la combinación lineal.



**Figura 3.1 Diagrama de bloques del sistema Laguerre.**

En términos de tiempo discreto para una entrada  $X(k)$  podemos definir el vector de estado  $L(k)$ , como sigue:

$$L(k) = [\ell_1(k) \ \ell_2(k) \ \dots \ \ell_N(k)]^T \quad 3.3$$

De igual manera es factible expresar  $L(k+1)$  como:

$$L(k+1) = \phi(a) L(k) + \Gamma(a) X(k) \quad 3.4$$

Donde:

$$\phi(a) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1-a^2) & a & 0 & \dots & 0 \\ -a(1-a^2) & (1-a^2) & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ (-1)^N a^{N-2} (1-a^2) & (-1)^{N-1} a^{N-3} (1-a^2) & (-1)^{N-2} a^{N-4} (1-a^2) & \dots & a \end{bmatrix} \quad 3.5$$

$$\Gamma(a) = [\sqrt{(1-a^2)T} \quad -a\sqrt{(1-a^2)T} \quad \dots \quad (a)^{N-1}\sqrt{(1-a^2)T}]_{1 \times N} \quad 3.6$$

Finalmente  $\hat{Y}(k)$  en función de los coeficientes de los filtros de Laguerre se representa por:

$$\hat{Y}(k) = C \cdot L(k) \quad 3.7$$

Donde:

$$C = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_N] \quad 3.8$$

Recordando que  $\hat{Y}(k)$  en función del modelo de Volterra queda definida por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(k) = & \sum_{m_1=0}^{N-1} h_1(m_1) X(k-m_1) + \\ & \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} h_2(m_1, m_2) X(k-m_1) X(k-m_2) + \\ & \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \sum_{m_3=0}^{N-1} h_3(m_1, m_2, m_3) X(k-m_1) X(k-m_2) X(k-m_3) + \\ & \sum_{m_1=0}^{N-1} \dots \sum_{m_p=0}^{N-1} h_p(m_1, m_2, \dots, m_p) X(k-m_1) X(k-m_2) \dots X(k-m_p) \end{aligned} \quad 3.9$$

Introduciendo una base de polinomios ortogonales de Laguerre sobre los kernels de la expansión de Volterra, tenemos la expresión para un sistema no lineal de orden  $P$ :

$$\begin{aligned} \hat{Y}(k) = & h_0 + \sum_{k_1=1}^L C_1(k) \ell_{k_1}(k) + \\ & \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L C_2(k_1, k_2) \ell_{k_1}(k) \ell_{k_2}(k) + \\ & \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L \sum_{k_3=1}^L C_3(k_1, k_2, k_3) \ell_{k_1}(k) \ell_{k_2}(k) \ell_{k_3}(k) + \dots + \\ & \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L \dots \sum_{k_p=1}^L \prod_{k_i=k_1}^{k_p} C_p(k_1, \dots, k_p) \ell_{k_i} \end{aligned} \quad 3.10$$

Debe recordarse que se debe utilizar  $L$  filtros de Laguerre como OBF para proyectar los kernels de la serie de Volterra truncada en  $N$  y de orden  $P$ .

Considerando los criterios expuestos por [9], la salida de los filtros en sistemas Volterra-Laguerre puede expresarse del modo siguiente:

$$\ell_{k_i}(k) = \sum_{m_1=0}^{N-1} \phi_{k_i}(k) X(k-m_1) \quad 3.11$$

**Observación:** se formula la propuesta con  $L$  filtros y truncamiento  $N$  para la serie de Volterra-Laguerre, esto debe tomarse de modo genérico ya que si deseamos modelar un sistema, lo mas apropiado es utilizar  $L$  filtros y truncamiento en  $N$ , diferentes.

Los coeficientes  $C_1(k), C_2(k_1 k_2), C_3(k_1 k_2 k_3), \dots, C_L(k_1, k_2, \dots, k_L)$  pueden obtenerse usando la ecuación  $[y(k)]_{P \times 1} = [L(k)]_{P \times n} [C]_{n \times 1}$ , considerando  $n$  kernels y  $P$  puntos de medición, donde  $[C]$  puede representarse por:

$$[C] = [C_1(1) C_1(2) C_1(3) \dots C_1(L) C_2(1,0) C_2(2,0) \dots C_p(L, L, L, \dots, L)] \quad 3.12$$

También:

$$\hat{Y}(k) = C \phi(k) + \varepsilon(k) \quad 3.13$$

Es la salida en función de las series Volterra-Laguerre.

Donde:

$$\phi(k) = [l_1 l_2 l_3 \dots l_p \quad l_1^2 l_1 l_2 \dots l_L^2 \quad l_1^3 \dots l_L^3] \quad 3.14$$

$\varepsilon(k)$  Representa el error de estimación.

El criterio de [1] para la identificación del sistema considera que el número de polinomios de Laguerre necesarios y el orden de la serie de Volterra, se deben elegir de modo que se maximice la relación siguiente:

$$Vaf = \max \left\{ 1 - \frac{\text{var}\{y - \hat{y}\}}{\text{var}\{y\}} \right\} \times 100\% \quad \forall k \in \mathcal{R} / k = [1, \dots, N] \quad 3.15$$

El término var se refiere a la varianza de la expresión indicada.

La función de costo planteado, incluyendo el factor de olvido que plantea Montazeri [1], es:

$$VLS(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \lambda^{N-k} \varepsilon^2(k), \text{ donde } \lambda \text{ es menor que uno.}$$

El error siguiente o posterior queda definido por la propuesta de Montazeri [1], como sigue:

$$e(k) = y(k) - \theta(k-1)\phi(k), \quad 3.16$$

$$e(k) = \frac{e_p(k)}{1 + \phi^T(k)F(k-1)\phi(k)} \quad 3.17$$

En este caso  $e_p(k)$  es el error a priori.

$$\theta(k) = \theta(k-1) + F(k-1)\phi(k)e(k) \quad 3.18$$

$$F(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ F(k-1) - \frac{F(k-1)\phi(k)\phi^T(k)F(k-1)}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \phi^T(k)F(k-1)\phi(k)} \right] \quad 3.19$$

$\phi(k)$  es el vector de regresión,  $\lambda_1, \lambda_2$  son los parámetros de sintonía del algoritmo y  $F(k)$  la matriz de ganancia.

### 3.1.3 Resultados en un Proceso de Neutralización de PH

El experimento reportado en [1] tuvo, entre otros las siguientes características y considerandos:

- La señal  $X(k)$  excitatriz fue un ruido generalizado multinivel con 8 niveles.
- La data input-output usada fue de 6000 muestras obtenidas cada 10 seg.
- El orden elegido para el filtro de Laguerre fue 2, pero se precisa que mejor respuesta la obtuvieron con grado 3, obteniendo un valor de precisión del 98.43%.

Las condiciones iniciales para la ley de adaptación fueron:

$$\theta(0)=0, \quad F(0)=1000 I_{10}, \quad \lambda_1=0.99 \text{ y } \lambda_2=1.$$

### 3.1.4 Conclusiones

- En el trabajo de [1] se demuestra que es posible representar un proceso no lineal con series de Volterra usando filtros de Laguerre para proyectar los kernels.
- Si bien no se precisa el uso de la ortogonalidad de los filtros de Laguerre y el principio de simetría de los kernels de Volterra, resulta evidente su aplicación.
- Se indica que los filtros usados fueron los de grado dos y tres, y el orden de los kernels de Volterra fue tres. Esto lo considero un buen indicio al momento de decidir por el orden del sistema no lineal y el número de polinomios de la OBF.

### 3.2 Identificación de Sistemas No Lineales Usando Series Volterra–Laguerre:

#### 3.2.1 Introducción

La propuesta para minimizar el número de kernels que usa un sistema de Volterra, vía la aplicación de funciones ortogonales, requiere que los kernels de la citada expansión tengan característica de separabilidad.

Al respecto el criterio de “Stably separable Kernels” como condición necesaria para representar un sistema basado en expansión de Volterra por otro Volterra-Laguerre ha sido debidamente planteado en [2]. La idea en esencia de su planteamiento es hallar la condición para usar una base de funciones ortogonales, que para el caso pueden ser los polinomios de Laguerre.

#### 3.2.2 Expansión Volterra-Laguerre en Sistemas No Lineales:

La salida de un sistema lineal,  $\hat{Y}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} H_m(z) X^m(z)$  puede expresarse mediante los polinomios de Laguerre del modo siguiente [1]:

$$\hat{Y}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sqrt{(1-a^2)^k} \frac{(1-az)^{k-1}}{(z-a)^k} X(z) \quad 3.20$$

La expresión anterior es válida, si solo si:  $H(z)$  es analítica para todo  $z$  tal que  $|z| < 1$  y con la condición de  $|a| < 1$ , para garantizar la existencia de la sucesión  $C_k$ .

La aplicación de la ortogonalidad es aceptada en el sentido del producto interno, es decir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k1}(k) \phi_{k2}(k) = 0, \quad \forall k1 \neq k2 \quad / \quad k1 \text{ y } k2 \in Z^+ \quad 3.21$$

$$y \quad \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k1}(k) \phi_{k2}(k) = 1, \quad \forall k1 = k2 \quad / \quad k1 \text{ y } k2 \in Z^+ \quad 3.22$$

Finalmente, los vectores para evaluar la salida del sistema quedan expresados por:

$$\hat{Y}(k) = X(k) B C^T; \quad 3.23$$

Donde:

$$C = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_L] \quad 3.24$$

$C$  es el vector de peso para los  $L$  filtros de Laguerre.

$$X(k)=[X(k), X(k-1), X(k-2), \dots, X(k-N+1)] \quad 3.25$$

$X(k)$  es la entrada considerando un truncamiento en  $N$ .

$$B = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \dots & \phi_L(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(N) & \phi_2(N) & \dots & \phi_L(N) \end{bmatrix} \quad 3.26$$

*Definición 1:* del trabajo expuesto en [2].

Un kernel se denomina separable si dada la serie de Volterra,

$$\begin{aligned} Y(k) = & \sum_{m_1=0}^{N-1} h_1(m_1) X(k-m_1) + \\ & \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} h_2(m_1, m_2) X(k-m_1) X(k-m_2) + \\ & \vdots \\ & \sum_{m_1=0}^{N-1} \dots \sum_{m_p=0}^{N-1} h_p(m_1, \dots, m_p) X(k-m_1) X(k-m_2) \dots X(k-m_p) \end{aligned} \quad 3.27$$

Los kernels de las series de Volterra cuando son separables, pueden expresarse por la siguiente relación:

$$h(m_1, m_2, \dots, m_p) = \sum_{j=1}^q V_{1j}(m_1) V_{2j}(m_2) \dots V_{pj}(m_p) \quad 3.28$$

En este caso  $q$  es un número finito y  $V_{kj}(m_k) \forall k \in [1, p]$  es una función real. Adicionalmente para que un kernel sea separable y estable, debe cumplirse con la siguiente relación:

$$\sum_{m_k=0}^{\infty} |V_{kj}(m_k)| < \infty \quad 3.29$$

### 3.3 Identificación de Sistemas No Lineales con Excitaciones Tipo Secuencia Multinivel Seudo Aleatorias

#### 3.3.1 Introducción:

Cuando se desea identificar sistemas no lineales resulta eficiente el uso de la secuencia seudo aleatoria multinivel como señal excitatriz de sistemas descritos por la expansión de Volterra truncada, en la memoria  $N$  y en el orden  $P$  de los kernels. Al respecto, la señal “Gaussian White Noise” (GWN) y la señal “Pseudo Random Binary Sequence”, PRBS, pueden fallar, ya que suelen excitar insuficientemente a un sistema basado en series de Volterra y constante de tiempo larga. La falla puede ser total o con pérdida de precisión en el proceso de identificación [3]. Igualmente puede fallar la teoría de Wiener aplicable a sistemas no lineales, así como los métodos de



A partir de la ecuación anterior tenemos la matriz de los kernels, de manera similar al planteamiento de [4] para obtener de manera óptima la solución respectiva.

$$H = Y(k) F^T(k) (F(k) F^T(k))^{-1} \quad 3.36$$

La expresión anterior debe usarse de manera recursiva involucrando un número de lecturas igual al número de incógnitas hasta lograr una respuesta asintótica. A partir de allí podemos conocer el número de memorias necesarias para caracterizar el sistema en estudio.

### 3.3.3 Persistencia de Excitación Para Sistemas Modelados Con Series de Volterra:

*Definición 1 [3]:*

Si existe un intervalo finito de observación  $T$ , y un  $\alpha > 0$  tal que en todo instante de tiempo  $k$  existen enteros  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n < T$  para todo  $[F(k)]$  y los autovalores más pequeños de  $[F(k)]^T [F(k)]$  satisfacen que el autovalor  $\lambda_{\min} > \alpha$ , entonces se dice que la secuencia  $X(k)$  es de excitación persistente (P.E.) de grado  $P$  y orden  $N$ .

*Definición 2:*

Si  $S_q = \{P_0, P_1, \dots, P_{q-1}\}$  es un conjunto de  $q$  distintos valores reales y si  $\{X_m\}$  es un conjunto secuencia de entrada con elementos tomados de  $S_q$ , y si existe un intervalo de observación finito tal que para todo instante  $k$  toda  $n$ -tupla  $S_q^n$  ocurre secuencialmente y una sola vez en la secuencia  $\{X_m\}$  en el intervalo  $[k, k+T]$ , entonces se dice que la secuencia  $\{X_m\}$  es una señal PRMS, de grado  $n$ .

Finalmente usaremos el criterio que establece que una señal PRMS es P.E. de grado  $n$  y orden  $P$  si solo si  $q \geq p + 1$  y  $n \geq N$  [3], es decir que para identificar un sistema con señales PRMS, ésta debe tener por lo menos un nivel mas que el orden de la serie de Volterra utilizada para identificar un sistema no lineal.

Este concepto será utilizado para implementar los experimentos que apliquemos en la identificación del sistema correspondiente al reactor de resina melamínica, conducente a la validación de la propuesta de identificación usando el sistema Volterra-Laguerre.

## CAPÍTULO 4

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA EL MODELADO DE SISTEMAS NO LINEALES USANDO SERIES VOLTERRA-LAGUERRE

Recientemente, como parte de las metodologías modernas aplicadas en el control automático de los procesos de producción industrial se vienen utilizando los polinomios ortogonales para la descripción de procesos no lineales. En efecto, el uso de bases ortogonales como herramienta matemática simplifica notablemente las aproximaciones clásicas realizadas en el pasado. La incorporación de estas técnicas ha sido muy eficiente en la elaboración de esquemas para implementar y representar sistemas fuertemente no lineales y también han permitido un entendimiento mucho más profundo del funcionamiento y la optimización de los procesos de producción a gran escala.

Básicamente la realización de un sistema de entrada/salida obedece a la relación

$$Y(t) = H[X(t)] \quad 4.1$$

Donde,  $Y(t)$  es la salida del sistema,  $X(t)$  es la señal de entrada al proceso industrial y  $H[X(t)]$  es el operador del sistema. Se aclara que la ecuación 4.1 es absolutamente exacta para todo valor del tiempo del proceso.

Desde hace unos años, en el estudio de modelado de sistemas no lineales en los que no se conoce el modelo dinámico con precisión, se viene usando expansiones en series, cuya finalidad es transformar  $H[X(t)]$  en una serie de potencias de orden infinito, es decir:

$$Y(t) = H_0[x_0] + H_1[X(t)] + \dots + H_n[X^n(t)] \quad 4.2$$

Lo que complica el estudio teórico es la incorporación de una gran cantidad de coeficientes que podrían dificultar el logro de resultados puramente analíticos. La idea es adaptar la sumatoria (4.2) a una combinación lineal de expansiones de grado  $n$ , con un número finito de parámetros. Por ejemplo, para el caso de segundo orden (4.2) podría expresarse por una combinación de segundo orden para lo cual se debe definir  $H_2[\cdot]$  como  $H_2(\tau_1, \tau_2)$ , lo que implica que (4.2) para un sistema de segundo orden quedaría definida como [5]:

$$Y_2(t) = Y_0 + \int H_1(\tau_1)X(t-\tau_1)d\tau_1 + \iint H_2(\tau_1, \tau_2)X(t-\tau_1)X(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad 4.3$$

Esto indica que es posible representar el sistema (4.2) mediante una expansión de integrales de convolución de orden  $n$ .

Finalmente en esta tesis se propone proyectar los kernels  $H_2[\cdot]$ , sobre un espacio formado por una OBF, tal que la incorporación de estas funciones permita representar los kernels de la expansión de Volterra mediante un número pequeño de parámetros que ponderan cada polinomio de la OBF.

## 4.1 Introducción a los Polinomios Ortogonales

La idea general de una base de funciones ortogonales se asemeja a la visión conceptual geométrica de vectores en el espacio euclidiano, por ejemplo, dado un conjunto de vectores unitarios base del espacio  $R^2$ , usando la función delta de Kronecker, es válida la siguiente definición,

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad 4.4$$

En la presente tesis se aplica la ortogonalidad en el sentido del producto interno, para lo cual es válido la siguiente sentencia, dado un espacio vectorial  $\psi$  se define la operación producto interno como una función tal que,  $f: \psi \times \psi \rightarrow \mathfrak{R}$ , donde dicha operación en tiempo continuo es:

$$\int_a^b f_m(t) f_n(t) dt = k \delta_{mn} \quad 4.5$$

Donde:  $f_m(t)$  y  $f_n(t)$  son funciones reales,  
 los subíndices  $m$  y  $n$  son números enteros,  
 $[a, b]$  el rango de la ortogonalidad de las funciones y  
 $\delta_{mn}$  la función delta de Kronecker.

La ecuación (4.5) puede ser escrita en completa analogía a (4.4) si y solamente si, redefinimos las funciones multiplicándolas por la raíz cuadrada de la inversa de una constante  $\alpha > 0$ , con lo cual quedan normalizadas las funciones.

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f_m(t) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f_n(t) dt = \delta_{mn} \quad 4.6$$

Por lo general las funciones ortogonales incluyen una función de peso  $w(t)$  para asegurar la convergencia, entonces la expresión del producto interno sería [10]:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f_m(t) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f_n(t) w(t) dt = \delta_{mn} \quad 4.7$$

### 4.1.1 Representación de la salida $Y(k)$ en base a Funciones Ortogonales de Laguerre

Considerando que la salida  $y(t)$  de un sistema no lineal puede expresarse en tiempo discreto por  $y(z) = H[U(z)]$  ó  $y(k) = H[U(k)]$  donde las entradas son  $U(z)$  ó  $U(k)$ , el operador  $H[\cdot]$  debe ser tal que la función debe ser analítica en  $|z| < 1$  y continua en  $|z| \leq 1$  [16].

Luego, por criterio de estabilidad hacemos que el polo de la función sea  $|a| < 1$ , entonces se puede afirmar que para un sistema de primer orden existe una sumatoria  $\{C_k\}$  tal que:

$$H[z] = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sqrt{(1-a^2)T} \frac{(1-az)^{k-1}}{(z-a)^k} \quad 4.8$$

De modo general [17]  $\phi_{ki}(z) = \sum_{k=1}^{ki} \sqrt{(1-a^2)T} \frac{(1-az)^{k-1}}{(z-a)^k}$  es la expresión para la función de Laguerre.

La serie ortogonal de Laguerre  $\phi_{ki}(k)$  en tiempo discreto queda expresada por:

$$\phi_{ki}(k) = Z^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{ki} \sqrt{(1-a^2)T} \frac{(1-az)^{k-1}}{(z-a)^k} \right\} \quad 4.9$$

La ortogonalidad de estas funciones para el caso de tiempo discreto según [2] queda expresada por:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k_1}(k) \phi_{k_2}(k) = 0 \quad \forall k_1 \neq k_2 \quad 4.10$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k_1}(k) \phi_{k_2}(k) = 1 \quad \forall k_1 = k_2 \quad 4.11$$

Considerando que las funciones de Laguerre son ortonormales conviene considerar que la construcción de una OBF usando dichas funciones dan motivo a las siguientes definiciones:

*Definición 1:* Dado un espacio vectorial  $\psi$  generado por una base ortonormal  $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{\infty}\}$ , con polinomios linealmente independientes; en aplicación del Teorema de Riesz-Fischer [6] se puede afirmar que una función puede expresarse como una combinación lineal de los polinomios de la base ortonormal como a continuación se indica:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i \quad 4.12$$

*Definición 2:* Si las funciones de la base del espacio  $\psi$  son ortonormales, entonces satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i, \Phi_i \rangle &= 1 \quad \forall i=j, \\ \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle &= 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

La expresión  $\langle \zeta, \lambda \rangle$  se refiere a la operación producto interno.

Basado en la definición 1 podemos expresar la salida  $y(k)$  para un sistema de segundo orden en función de una base de polinomios ortogonales de Laguerre del modo siguiente:

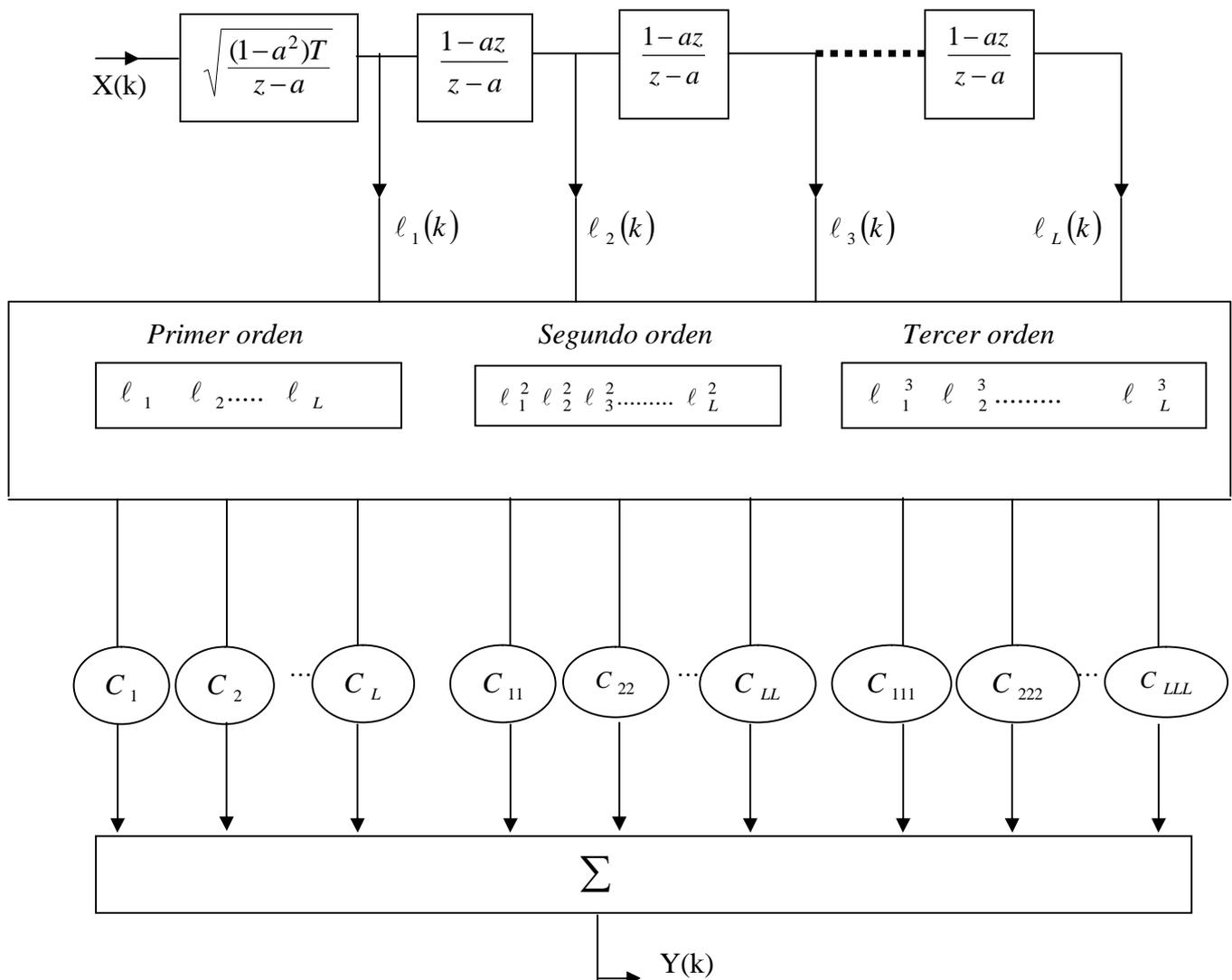
$$Y(k) = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i l_i(k) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} l_i(k) l_j(k) + \text{términos de orden superior.} \quad 4.13$$

Donde: 
$$l_j(k) = \sum_{j=1}^L \Phi_j(k) X(k). \quad 4.14$$

$L$  es la dimensión de la base ortogonal,  $C_i$  los coeficientes de las funciones y  $X(k)$  la entrada al sistema, cuya salida queda representada por  $Y(k)$ .

*Definición 3:* Dada una función discreta  $Y(k)$  obtenida desde una función continua en el tiempo, de cuadrado integrable, se puede afirmar que la función es convergente si:

$$\sum_0^{\infty} |Y(k)|^2 < \infty$$



**Figura 4.1** Salida de un sistema modelado por polinomios de Laguerre, hasta tercer orden.

En el presente trabajo, al usar funciones de Laguerre debe recordarse que éstas pertenecen al espacio de funciones de cuadrado integrable. Consecuentemente si  $Y(k)$  es representable por funciones de Laguerre y sus coeficientes no son de valor infinito, se puede abundar en el criterio de que  $Y(k)$  es convergente.

Para la representación de  $Y(k)$ , podemos proyectar los kernels sobre la base ortogonal y con potencias de ella, según lo que el diseñador encuentre más apropiado para identificar el sistema en estudio. Como ejemplo en la figura 4.1 se representa la salida  $Y(k)$  en función de la base polinomios de Laguerre de orden lineal, cuadrático y cúbico.

## 4.2 La Expansión de Volterra

Un sistema no lineal, causal e invariante en el tiempo con entrada  $X(t)$  y salida  $Y(t)$ , con condiciones iniciales cero puede caracterizarse por integrales de convolución como sigue [18]:

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad 4.15$$

Donde 
$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) X(t-\tau_1) X(t-\tau_2) \dots X(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad 4.16$$

Tomando la norma a la expresión anterior y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz [12] tenemos la siguiente relación:

$$|Y(t)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| \cdot \|X^n\| \quad 4.17$$

De la expresión anterior y bajo el considerando que las señales  $Y(t)$  y  $X(t)$  son acotadas los kernels devienen en ser acotados, lo que ayuda a reafirmar que la serie sería convergente.

Formalizando los criterios anteriores tenemos que, dada una bola abierta de radio  $r_h > 0$ , centrada en cero  $\beta^n(0, r_h)$  tal que los kernels de la serie se encuentran dentro de la citada bola, es decir  $h_n \in \beta^n$ , se puede inducir la siguiente ecuación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| \cdot \|X\|^n < \infty \quad 4.18$$

La condición descrita en 4.18 asegura la convergencia de la función. Abundando en este concepto resulta pertinente mencionar el criterio expuesto en el trabajo de [19] sobre sistemas que devienen en ser estables si cumplen la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad 4.19$$

Finalmente un sistema con modelo de Volterra quedaría expresado así:

$$Y(t) = h_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) X(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) X(t-\tau_1) X(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \quad 4.20$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) X(t-\tau_1) X(t-\tau_2) \dots X(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$$

### 4.2.1 Series de Volterra en Tiempo Continuo

Considerando que los criterios de identificación se suelen aplicar a las variaciones de la salida y no al estado inicial, la expansión 4.20 con estado inicial cero se formula de la siguiente manera.

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \zeta \quad 4.21$$

Siendo  $\zeta$  los términos de orden superior y como se puede apreciar la cantidad de variables a integrar aumenta indefinidamente, y así el integrando se convierte en una multiplicación infinita de términos que deben ser continuos a lo largo de todo el rango de integración.

En esencia, lo que caracteriza fundamentalmente a la expansión 4.21 es que se ajusta a los trabajos de identificación de sistemas no lineales representados por la relación entrada /salida.

Una cuestión que se va a abordar posteriormente es el criterio de truncamiento de 4.20, para reducir el orden  $n$  y de este modo tener los términos que vendrían a ser los más relevantes para el modelado de un sistema no lineal.

### 4.2.2 Series de Volterra en Tiempo Discreto

Un sistema en tiempo discreto, no lineal, causal e invariante en el tiempo, caracterizado por una función de transferencia que responde con  $Y(k)$  frente a una entrada  $X(k)$  puede expresarse como una expansión de series de Volterra de grado  $P$  y con horizonte truncado  $N$ , del modo siguiente:

$$Y(k) = \sum_{m_1=0}^{N-1} h_1(m_1)X(k-m_1) + \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} h_2(m_1, m_2)X(k-m_1)X(k-m_2) + \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \sum_{m_3=0}^{N-1} h_3(m_1, m_2, m_3)X(k-m_1)X(k-m_2)X(k-m_3) + \sum_{m_1=0}^{N-1} \dots \sum_{m_p=0}^{N-1} h_p(m_1, \dots, m_p)X(k-m_1)X(k-m_2)\dots X(k-m_p) \quad 4.22$$

Si consideramos  $P=3$  tenemos la serie de tercer orden con horizonte truncado  $N$ , en la cual por simplificación no consideramos el error debido al orden y al horizonte truncados [9].

$$\begin{aligned}
Y(k) = & \sum_{m_1=0}^{N-1} h_1(m_1) X(k-m_1) + \\
& \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} h_2(m_1, m_2) X(k-m_1) X(k-m_2) + \\
& \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \sum_{m_3=0}^{N-1} h_3(m_1, m_2, m_3) X(k-m_1) X(k-m_2) X(k-m_3)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

La ecuación 4.23 de modo matricial puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
Y(k) = & \sum H_i^T [X_i(k)] = H_1^T [X_1(k)] + H_2^T [X_2(k)] + H_3^T [X_3(k)] \\
Y(k) = & y_1(k) + y_2(k) + y_3(k)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

La clave en esta representación es obtener los vectores  $H_i$  y  $X_i(k)$ , para lo cual tomamos como elemento ilustrativo el caso de orden tres y truncamiento de  $N=3$ .

**a. Obtención del vector  $H_1$  y  $X(k)$ , desarrollando la serie correspondiente tenemos:**

$$Y_1(k) = \sum_{m_1=0}^{N-1} h_1(m_1) X(k-m_1) = h_0 + h_1(0) X(k) + h_1(1) X(k-1) + h_1(2) X(k-2) \tag{4.25}$$

Entonces si consideramos a las condiciones iniciales nulas, la expresión de los vectores sería:

$$\begin{aligned}
H_1^T &= [h_1(0) \quad h_1(1) \quad h_1(2)] \\
X_1^T(k) &= [X(k) \quad X(k-1) \quad X(k-2)]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

**b. Obtención del vector  $H_2$  y  $X_2(k)$**

La serie  $\sum_{m_1=0}^2 \sum_{m_2=0}^2 h_2(m_1, m_2) X(k-m_1) X(k-m_2)$ , obliga a tomar consideraciones, como por ejemplo utilizar el criterio de simetría de Kernels, lo cual implica que solo trabajaremos con  $h_2(m_1, m_2)$ , para  $m_1 \geq m_2$ , con lo cual:

$$\begin{aligned}
Y_2(k) = & \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} h_2(m_1, m_2) X(k-m_1) X(k-m_2) = h_2(0,0) X(k)X(k) + h_2(1,0)X(k-1)X(k) \\
& + h_2(1,1) X(k-1)X(k-1) + h_2(2,0) X(k-2)X(k) \\
& + h_2(2,1) X(k-2)X(k-1) + h_2(2,2) X(k-2)X(k-2)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Los vectores quedarían del modo siguiente:

$$\begin{aligned} H_2^T &= [h_2(0,0) \ h_2(1,0) \ h_2(1,1) \ h_2(2,0) \ h_2(2,1) \ h_2(2,2)] \\ X_2^T(k) &= [X^2(k) \ X(k)X(k-1) \ X^2(k-1) \ X(k-2)X(k) \ X(k-1)X(k-2) \ X^2(k-2)] \end{aligned} \quad 4.28$$

**c. Obtención del vector  $H_3$  y  $X_3(k)$ , para la expresión de los kernels de tercer orden tenemos:**

$$\sum_{m_1=0}^2 \sum_{m_2=0}^2 \sum_{m_3=0}^2 h_3(m_1, m_2, m_3) X(k-m_1) X(k-m_2) X(k-m_3)$$

Para este caso estimaremos solo los parámetros  $h_3(m_1, m_2, m_3)$  tal que  $m_1 \geq m_2 \geq m_3$  considerando que los Kernels son simétricos, entonces.

$$\begin{aligned} Y_3(k) = H_3^T X_3(k) &= h_3(0,0,0) X^3(k) + h_3(1,0,0) X(k-1) X^2(k) + h_3(1,1,0) X(k) X^2(k-1) \\ &+ h_3(1,1,1) X^3(k-1) + h_3(2,0,0) X^2(k) X(k-2) + h_3(2,1,0) X(k) X(k-1) X(k-2) \\ &+ h_3(2,1,1) X^2(k-1) X(k-2) + h_3(2,2,1) X(k-1) X^2(k-2) + h_3(2,2,2) X^3(k-2) \end{aligned} \quad 4.29$$

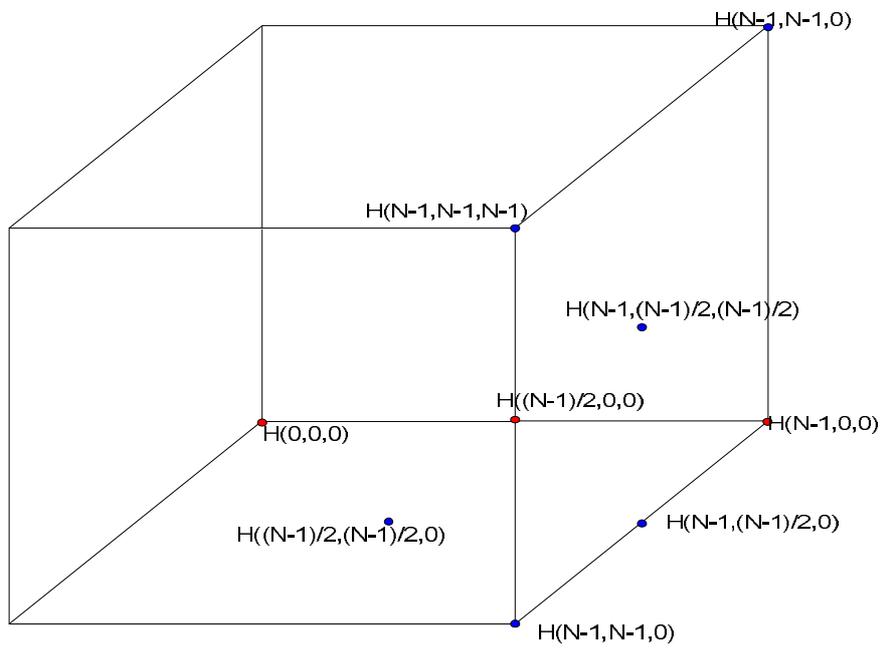
Resumiendo  $X_i(k)$  y  $H_i$  para un sistema de tercer orden y truncamiento en  $N=3$ , tenemos:

$$\begin{aligned} X_1^T(k) &= [X(k) \ X(k-1) \ X(k-2)] \\ X_2^T(k) &= [X^2(k) \ X(k)X(k-1) \ X(k)X(k-2) \ X^2(k-1) \ X(k-1)X(k-2) \ X^2(k-2)] \\ X_3^T(k) &= [X^3(k) \ X^2(k)X(k-1) \ X(k)X^2(k-1) \ X^3(k-1) \ X^2(k)X(k-2) \ X(k)X(k-1) \dots \\ &\dots X(k-2) \ X^2(k-1)X(k-2) \ X^2(k-2)X(k-1) \ X^3(k-2)] \end{aligned} \quad 4.30$$

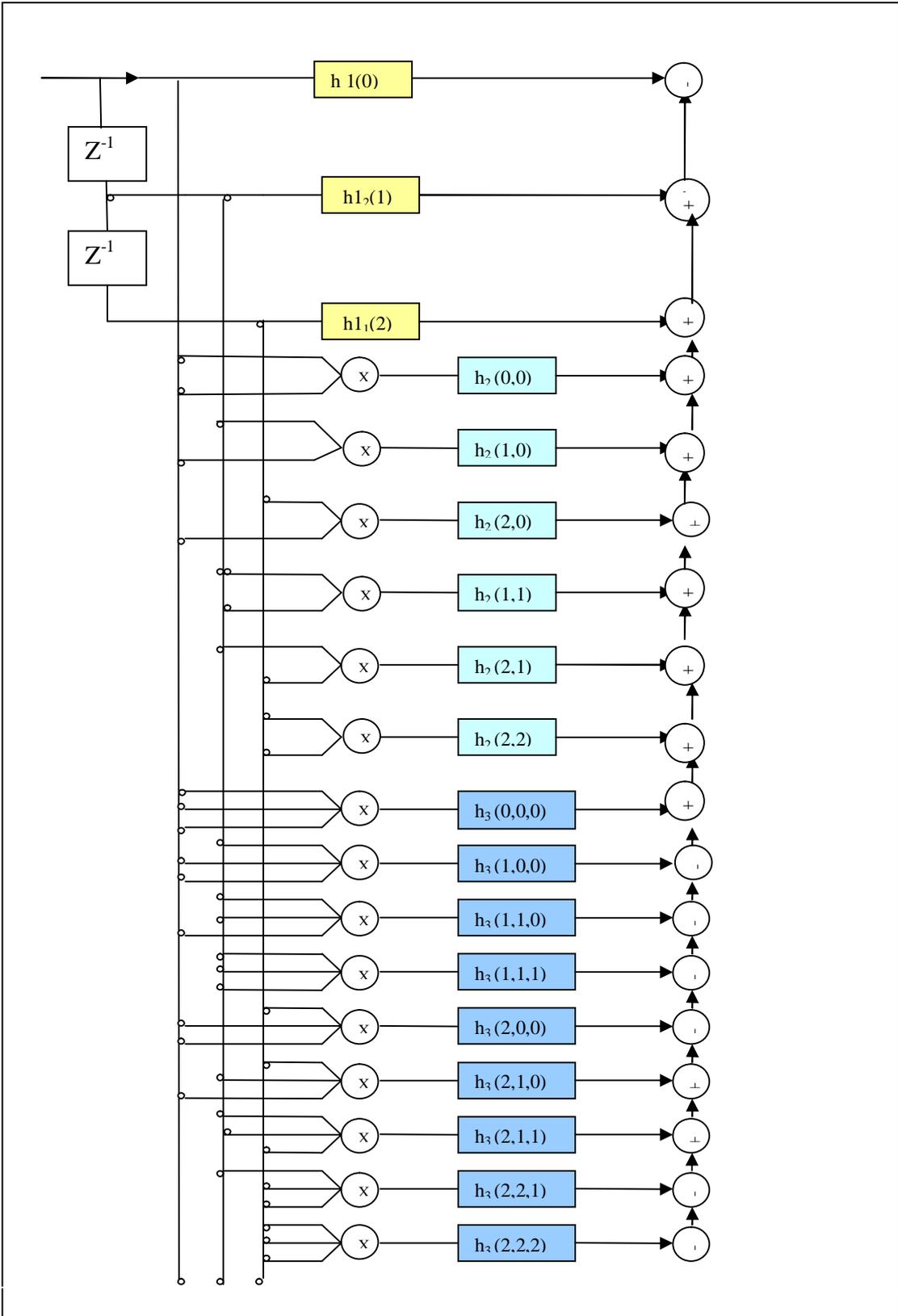
$$\begin{aligned} H_1^T &= [h_1(0) \ h_1(1) \ h_1(2)] \\ H_2^T &= [h_2(0,0) \ h_2(1,0) \ h_2(2,0) \ h_2(1,1) \ h_2(2,1) \ h_2(2,2)] \\ H_3^T &= [h_3(0,0,0) \ h_3(1,0,0) \ h_3(1,1,0) \ h_3(1,1,1) \ h_3(2,0,0) \ h_3(2,1,0) \ h_3(2,1,1) \ h_3(2,2,0) \\ &\quad h_3(2,2,1) \ h_3(2,2,2)] \end{aligned} \quad 4.31$$

En la figura 4.2 se muestra el espacio de los kernels para un sistema de tercer orden, en rojo el de primer orden, azul el de segundo y el cubo el de tercer orden.

$$\begin{bmatrix} h_1(0) \\ h_1(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_1(N-2) \\ h_1(N-1) \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} h_2(0,0) & h_2(0,1) & h_2(0,2) & \cdots & h_2(0,N-2) & h_2(0,N-1) \\ h_2(1,0) & h_2(1,1) & h_2(1,2) & \cdots & h_2(1,N-2) & h_2(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ h_2(N-2,0) & h_2(N-2,1) & h_2(N-2,2) & \cdots & h_2(N-2,N-2) & h_2(N-2,N-1) \\ h_2(N-1,0) & h_2(N-1,1) & h_2(N-1,2) & \cdots & h_2(N-1,N-2) & h_2(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$



*Figura. 4.2 Ubicación de los kernels de un sistema, hasta de tercer orden, con truncamiento  $N$*



*Figura 4.3 Sistema de Volterra de tercer orden truncado en  $N=3$*

Con los criterios anteriores podemos formular la expansión para grado 3 y truncamiento N.

**a) Caso de los vectores  $H_1$  y  $X_1(k)$**

$$\begin{aligned} X_1^T(k) &= [X(k) \quad X(k-1) \quad X(k-2) \dots X(k-N+1)] \\ H_1^T &= [h_1(0) \quad h_1(1) \quad h_1(2) \dots h_1(N-1)] \end{aligned} \quad 4.32$$

**b) Caso de los vectores  $H_2$  y  $X_2(k)$**

$$X_2(k) = \begin{bmatrix} X^2(k) \\ X(k-1)X(k) \\ X(k-2)X(k) \\ \vdots \\ X(k-N+1)X(k) \\ X^2(k-1) \\ X(k-2)X(k-1) \\ X(k-3)X(k-1) \\ \vdots \\ X(k-N+1)X(k-1) \\ \vdots \\ X(k-N+1)X(k-N+1) \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} h_2(0,0) \\ h_2(1,0) \\ \vdots \\ h_2(N-1,0) \\ h_2(1,1) \\ h_2(2,1) \\ \vdots \\ h_2(N-1,1) \\ \vdots \\ h_2(N-1,N-1) \end{bmatrix} \quad 4.33$$

**c) Caso de los vectores  $H_3$  y  $X_3(k)$**

$$H_3^T = \begin{bmatrix} h_3(0,0,0) \\ h_3(1,0,0) \\ \vdots \\ h_3(N-1,0,0) \\ h_3(1,1,0) \\ h_3(2,1,0) \\ \vdots \\ h_3(N-1,1,0) \\ h_3(2,2,0) \\ h_3(3,2,0) \\ \vdots \\ h_3(N-1,2,0) \\ \vdots \\ h_3(N-1,N-1,0) \\ \vdots \\ h_3(N-1,N-1,N-1) \end{bmatrix} \quad X_3(k) = \begin{bmatrix} X^3(k) \\ X^2(k)X(k-1) \\ \vdots \\ X^2(k)X(k-N+1) \\ X(k)X(k-1)X(k-1) \\ X(k)X(k-1)X(k-2) \\ \vdots \\ X(k)X(k-1)X(k-N+1) \\ X(k)X(k-2)X(k-2) \\ X(k)X(k-2)X(k-3) \\ \vdots \\ X(k)X(k-2)X(k-N+1) \\ \vdots \\ X(k)X(k-N+1)X(k-N+1) \\ \vdots \\ X(k-N+1)X(k-N+1)X(k-N+1) \end{bmatrix} \quad 4.34$$

### 4.3 Propiedades de la Expansión de Volterra

Como se comentó anteriormente, una de las principales virtudes de la expansión 4.20 está relacionada con su utilización para representar sistemas dinámicos no lineales, por ello es prudente conocer las principales características de la serie de Volterra [2].

- *Linealidad respecto a los Kernels*, esta propiedad se hace evidente en la ecuación 4.22 donde se nota que la salida del sistema no lineal de Volterra se presenta como una combinación lineal de los productos de las entradas, teniendo por coeficientes a los kernels.
- *Simetría de los Kernels*, la permutación de los índices de las series de Volterra deviene en simetría de los Kernels, esto trae consigo la disminución de los coeficientes requeridos para una representación en series de Volterra.
- *Convolución multidimensional*, el modelo de Volterra puede ser expresado por una convolución multidimensional, así un sistema de grado tres puede ser visto como una suma de convoluciones de dimensión uno, dos y tres.
- *Propiedad de estabilidad*, si un kernel separable de grado  $p$  que relaciona un vector de entrada  $[X(k)]$  y una salida  $Y(k)$ , es acotado, entonces dicho kernel correspondería a un sistema estable:

$$\sum_{k_1}^{M-1} \dots \sum_{k_p}^{M-1} |h_p(k_1, \dots, k_p)| < \infty \quad 4.35$$

- *Elevado grado de complejidad*, Un sistema de grado  $p$  truncado en  $N$  contiene  $N_p$  kernels, este valor puede ser obtenido usando la propiedad de simetría como sigue:

$$N_p = \left\{ \begin{array}{ll} N \dots & \dots \text{si el grado es uno} \\ \left( \frac{N^2}{2} \right) + (2N) \dots & \dots \text{si el grado es dos} \\ \left( \frac{N^3}{2} \right) + \left( \frac{N^2}{2} \right) + 3N \dots & \dots \text{si el grado es tres} \end{array} \right\} \quad 4.36$$

La respuesta al aplicar un impulso a una red de estructuras de Volterra no es suficiente para identificar todos sus kernels, para ello es necesario aplicar  $N$  pulsos finitos igualmente espaciados.

### 4.4 Series de Volterra Usando Funciones de Laguerre

Lo que se pretende es obtener un modelo de Volterra mediante la proyección de los kernels de la serie sobre una base de funciones ortogonales OBF con el objeto de reducir el número de kernels del sistema Volterra original. En este trabajo hemos elegido los polinomios generalizados de Laguerre.

Recordando que una serie de Volterra de tercer orden truncado en  $N$  queda descrita en tiempo discreto por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
Y(k) &= \sum_{m_1=0}^{N-1} h_1(m_1) X(k - m_1) \\
&+ \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} h_2(m_1, m_2) X(k - m_1) X(k - m_2) \\
&+ \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \sum_{m_3=0}^{N-1} h_3(m_1, m_2, m_3) X(k - m_1) X(k - m_2) X(k - m_3)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Tenemos que la salida del sistema es  $Y(k)$ ,  $X(k - m_i)$  es la entrada al sistema y  $h_i(m_1 \dots m_k)$  son los kernels de orden  $k$  de la serie de Volterra.

En el modelo de Laguerre las funciones OBF  $\{\phi_{ki}(k)\}$  pueden ser definidas en el plano  $Z$  mediante la siguiente ecuación:

$$\phi_{ki}(z) = \sqrt{(1-a^2)T} \frac{(1-az)^{ki-1}}{(z-a)^{ki}} \quad \forall ki > 1 \tag{4.38}$$

En la ecuación anterior  $a$  es el polo de Laguerre,  $T$  es el periodo de muestreo y  $ki$  el orden del polinomio de la OBF.

Asumiendo que los Kernels de Volterra [9] son sumables sobre el rango de memoria  $[0, N-1]$ , se pueden aproximar usando una base completa  $\{\phi_{ki}(mi)\}$  de polinomios generalizados de Laguerre de dimensión  $L$ , linealmente independientes, tal que:

$$h_1(m_1) = \sum_{k_1=1}^L C_1(k_1) \phi_{k_1}(m_1) \tag{4.39}$$

$$h_2(m_1, m_2) = \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L C_2(k_1, k_2) \phi_{k_1}(m_1) \phi_{k_2}(m_2) \tag{4.40}$$

$$h_3(m_1, m_2, m_3) = \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L \sum_{k_3=1}^L C_3(k_1, k_2, k_3) \phi_{k_1}(m_1) \phi_{k_2}(m_2) \phi_{k_3}(m_3) \tag{4.41}$$

Las salidas de los filtros o polinomios de Laguerre luego de aplicar la señal de pulsos finitos, en armonía con lo expuesto en el trabajo de [9] son:

$$l_{ki}(k) = \sum_{mi=0}^{N-1} \phi_{ki}(k) X(k - mi) \tag{4.42}$$

Usando la ecuación anterior la salida  $Y(k)$  puede expresarse del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
 Y(k) = & \sum_{k_1=1}^L C_1(k_1) l_{k_1}(k) + \\
 & \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L C_2(k_1, k_2) l_{k_1}(k) l_{k_2}(k) + \\
 & \sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L \sum_{k_3=1}^L C_3(k_1, k_2, k_3) l_{k_1}(k) l_{k_2}(k) l_{k_3}(k)
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Resolviendo los términos de primer orden para  $L=3$ , tenemos

$$\sum_{k_1=1}^L C_1(k_1) l_{k_1}(k) = C_1(1) l_1(k) + C_1(2) l_2(k) + C_1(3) l_3(k) \tag{4.44}$$

$$\sum_{k_1=1}^L C_1(k_1) l_{k_1}(k) = [C_1(k_1)] [L_1(k_1)] \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
 [C_1(k_1)] &= [C_1(1) C_1(2) C_1(3)] \\
 [L_1(k)]^T &= [\ell_1(k) \ell_2(k) \ell_3(k)]
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Resolviendo los términos de de segundo orden para  $L=3$ , tenemos:

$$\sum_{k_1=1}^L \sum_{k_2=1}^L C_2(k_1, k_2) \ell_{k_1}(k) \ell_{k_2}(k) = [C_2(k_1, k_2)] L_2(k) \tag{4.47}$$

Donde:

$$[C_2(k_1, k_2)] = [C_2(1,1) C_2(2,1) C_2(2,2) C_2(3,1) C_2(3,2) C_2(3,3)] \tag{4.48}$$

$$[L_2(k)]^T = [ \ell_1^2(k) \ell_2(k) \ell_1(k) \ell_2^2(k) \ell_3(k) \ell_1(k) \ell_3(k) \ell_2(k) \ell_3^2(k) ] \tag{4.49}$$

Finalmente resolviendo para los términos de orden 3 y  $L=3$  tenemos

$$[C_3(k_1, k_2, k_3)] = [ \begin{matrix} C_3(1,1,1) & C_3(2,1,1) & C_3(2,2,1) & C_3(2,2,2) & C_3(3,1,1) \\ C_3(3,2,1) & C_3(3,2,2) & C_3(3,3,1) & C_3(3,3,2) & C_3(3,3,3) \end{matrix} ] \tag{4.50}$$

$$[L_3(k)]^T = [ \ell_1^3(k) \ell_2(k) \ell_1^2(k) \ell_2^2(k) \ell_1(k) \ell_2^3(k) \ell_1^2(k) \ell_3(k) \ell_3(k) \ell_2(k) \ell_1(k) \ell_3^2(k) \ell_2^2(k) \ell_1(k) \ell_3^3(k) ] \tag{4.51}$$

Resumiendo tenemos:

$$Y(k)=[C_1(k_1)][L_1(k)]+[C_2(k_1, k_2)][L_2(k)]+[C_3(k_1, k_2, k_3)][L_3(k)] \quad 4.52$$

Los vectores  $[L_i(k)]$ ,  $i=1,3$  dependen de  $\ell_1(k)$ ,  $\ell_2(k)$  y  $\ell_3(k)$  los cuales son obtenidos de la siguiente expresión:

$$\ell_{(k1)}(k)=\sum_{m_1=1}^N \phi_{k1}(m_1) X(k-m_1) \quad 4.53$$

Luego expresando para  $N$  muestras dichos vectores tendremos:

$$\ell_1(k)=\phi_1(1) X(k)+\phi_1(2) X(k-1)+\phi_1(2) X(k-2)+\dots+\phi_1(N-1) X(k-N+1) \quad 4.54$$

$$\ell_2(k)=\phi_2(1) X(k)+\phi_2(2) X(k-1)+\dots+\phi_2(N) X(k-N+1) \quad 4.55$$

$$\ell_3(k)=\phi_3(1) X(k)+\phi_3(2) X(k-1)+\dots+\phi_3(N) X(k-N+1) \quad 4.56$$

Finalmente resulta conveniente evaluar en tiempo discreto la base ortonormal  $\{\phi_{ki}(k)\}$  que utilizaremos en el trabajo. Para obtener los polinomios de la OBF aplicamos la inversa de la transformada Zeta a la ecuación 4.30 para el caso de los tres primeros polinomios de Laguerre.

*El polinomio generalizado de Laguerre de primer orden:*

$$\phi_1(z)=\sqrt{(1-a^2)T} \frac{1}{(z-a)} \rightarrow \phi_1(k)=\sqrt{(1-a^2)T} a^{k-1} u(k-1) \quad 4.57$$

*El polinomio generalizado de Laguerre de segundo orden:*

$$\phi_2(z)=\sqrt{(1-a^2)T} \frac{1-az}{(z-a)^2} \rightarrow \phi_2(k)=\sqrt{(1-a^2)T} [(k-1)a^{(k-2)} u(k-2)-ka^k u(k-1)] \quad 4.58$$

*El polinomio generalizado de Laguerre de tercer orden:*

$$\phi_3(z)=\sqrt{(1-a^2)T} \frac{(1-az)^2}{(z-a)^3} =\sqrt{(1-a^2)T} \left( \frac{1-2az+a^2z^2}{(z-a)^3} \right) \quad 4.59$$

$$\phi_3(k)=\sqrt{(1-a^2)T} \left[ \left[ \frac{(k-1)(k-2)}{2} \right] a^{k-3} u(k-3) - k(k-1) a^{k-1} u(k-2) + \frac{(k+1)}{2} a^{k+1} u(k-1) \right]$$

#### 4.4.1 Determinación de $Y(k)$ y $\ell_{ki}$ Aplicando el Principio de Ortogonalidad.

De la ecuación 4.53 podemos expresar los  $\ell_{ki}$  del modo siguiente:

$$\ell_{k1}(k) = \sum_{m_1=1}^N \phi_{k1}(m_1) X(k-m_1) \quad 4.60$$

$$\ell_{k2}(k) = \sum_{m_2=1}^N \phi_{k2}(m_2) X(k-m_2) \quad 4.61$$

$$\ell_{k3}(k) = \sum_{m_3=1}^N \phi_{k3}(m_3) X(k-m_3) \quad 4.62$$

De la ecuación 4.52 la salida  $Y(k)$  se expresa por la siguiente ecuación:

$$Y(k) = [C_1(k_1)][L_1(k)] + [C_2(k_1, k_2)][L_2(k)] + [C_3(k_1, k_2, k_3)][L_3(k)] \quad 4.63$$

**Donde:**

$$\begin{aligned} [L_1(k)]^T &= [\ell_1(k) \quad \ell_2(k) \quad \ell_3(k)] \\ [C_1(k_1)] &= [C_1(1) \quad C_2(2) \quad C_3(3)] \end{aligned} \quad 4.64$$

Para evaluar  $[L_2(k)]^T$  consideramos conveniente usar las propiedades de las funciones de Laguerre, ante lo cual aplicaremos el concepto de ortogonalidad del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \ell_{ki}(k) &= \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}(mi) X(k-mi) \\ \ell_{kj}(k) &= \sum_{mj=1}^N \phi_{kj}(mj) X(k-mj) \\ \ell_{ki}(k) \ell_{kj}(k) &= \sum_{mi=1}^N \sum_{mj=1}^N \phi_{ki}(mi) \phi_{kj}(mj) X(k-mi) X(k-mj) \\ \ell_{ki}(k) \ell_{kj}(k) &= \begin{cases} 0 & \text{si } ki \neq kj \\ \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}^2 X^2(k-mi) & \text{si } ki = kj \end{cases} \end{aligned} \quad 4.65$$

Bajo el criterio anterior, evaluaremos los vectores de segundo orden:

$$[L_2(k)]^T = [\ell_1^2(k) \quad \ell_2(k) \ell_1(k) \quad \ell_2^2(k) \quad \ell_3(k) \ell_1(k) \quad \ell_3(k) \ell_2(k) \quad \ell_3^2(k)] \quad 4.66$$

Por aplicación del principio de ortogonalidad el vector anterior queda como sigue:



Con las  $N$  ecuaciones es factible obtener los coeficientes  $C_i$ ,  $C_{ij}$  y  $C_{ijk}$  aplicando los siguientes criterios:

- a) Agrupamos las salidas  $Y(k)$  en una matriz para un sistema de tercer orden:

$$Y(k) = [y(0) \ y(1) \ y(2) \ \dots \ y(p)]_{p \times 1}^T \quad 4.72$$

$$C = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{333}]_{1 \times 9}^T \quad 4.73$$

- b) Ahora construimos la matriz  $L$ :

$$L = \begin{bmatrix} l_1(k) & l_2(k) & l_3(k) & l_1^2(k) & l_2^2(k) & l_3^2(k) & \dots & l_3^3(k) \\ l_1(k+1) & l_2(k+1) & l_3(k+1) & l_1^2(k+1) & l_2^2(k+1) & l_3^2(k+1) & \dots & l_3^3(k+1) \\ \vdots & \vdots \\ l_1(k-1+P) & l_2(k-1+P) & l_3(k-1+P) & l_1^2(k-1+P) & l_2^2(k-1+P) & l_3^2(k-1+P) & \dots & l_3^3(k-1+P) \end{bmatrix} \quad 4.74$$

- c) Luego, recordando los experimentos en los que la señal PRMS  $X(k)$  origina las salidas  $\tilde{Y}(k)$  en el sistema no lineal, entonces podemos agrupar como un vector de salidas todas las lecturas correspondientes a las  $N$  muestras o memorias del experimento. Para el caso la expresión matricial de  $\tilde{Y}(k)$  es:  $\tilde{Y}(k) = [\tilde{Y}(1) \ \tilde{Y}(2) \ \dots \ \tilde{Y}(N)]$
- d) Considerando las discrepancias entre las lecturas del experimento y los resultados del modelo, el error de predicción quedará expresado de la manera siguiente:

$$[\varepsilon(k)] = [\tilde{Y}(k) - Y(k)] \quad 4.75$$

- e) El vector  $C$ -solución buscado se obtendrá a partir de la minimización de una función de costo [9] que involucre el error y tenga dependencia del vector de parámetros  $C$ , del modo siguiente:

$$[Y(k)] = [L][C] \quad 4.76$$

$$J(C) = \|\varepsilon(k)\|^2 = [\tilde{Y}(k) - [L][C]]^T [\tilde{Y}(k) - [L][C]] \quad 4.77$$

- f) Para minimizar  $J(C)$  [16], derivamos su expresión respecto de  $C$  y lo igualamos a cero:

$\frac{dJ}{dC} = 0$ . Esta condición se cumple si  $C$  tiene la siguiente expresión.

$$[C] = \text{INV}([L]^T [L]) (L)^T [\tilde{Y}(k)] \quad 4.78$$

***Observaciones:***

El polo  $a$ , de las funciones de Laguerre y el periodo de muestreo  $T$  deben determinarse con criterio y conocimiento sobre la constante de tiempo del sistema involucrado.

Considerando que tenemos  $N$  memorias correspondientes a las muestras del experimento, se propone evaluar la matriz de coeficientes  $C$ , de manera recursiva, variando la data desde  $Nc$  hasta  $r$ , siendo  $Nc$  el número de elementos de  $C$  y  $r$  el número de muestras involucradas en la solución. Del gráfico solución de cada elemento de  $C$ , es factible conocer el número de muestras o memorias necesarias para identificar el sistema.

La solución de  $C$  corresponde a los valores en los que se manifieste carácter convergente. Finalmente, es necesario que para una buena identificación se realicen múltiples experimentos para garantizar una solución adecuada.

## CAPÍTULO 5

### MODELAMIENTO DE UN REACTOR QUÍMICO TIPO BATCH USANDO SERIES VOLTERRA - LAGUERRE

#### 5.1 Descripción de la Planta

La aplicación del proceso de identificación con el modelo Volterra-Laguerre se ha realizado sobre el sistema del reactor usado en fabricación de resina melamínica de PISOPAK PERU SAC. Este reactor es tipo batch, con una producción del orden de los 3622 kg en cada batch. Los experimentos sobre el reactor fueron con el sistema cargado con materiales y excitado con señal multinivel pseudo aleatoria multinivel.

Para mayor ilustración mostramos la figura 5.1, que corresponde al diagrama básico de la planta de resina melamínica, sobre la cual se aplicó la técnica Volterra-Laguerre para la identificación del modelo. Los trabajos se realizaron en la condición de lazo abierto, para lo cual previamente se eliminó el lazo del control PID.

a) Reactor químico R-01, Está fabricado en acero inoxidable y posee chaqueta de calentamiento y tubos de enfriamiento. El calentamiento se realiza controlando el flujo de aceite diatérmico  $Q_i$  en las chaquetas respectivas, usualmente el aceite diatérmico se encuentra a la temperatura de  $220 \pm 5$  °C.

b) Válvula de control de tres vías V, esta válvula es de ley cuadrática y es operada por una señal de aire comprimido en el rango de 3/15 PSI; desde inminente cero a 100% de apertura. Se utiliza este tipo de válvula por que virtualmente elimina el efecto de ariete, por cuanto su acción es desviar el flujo entre las chaquetas y el tubo de retorno.

c) Transductor I/P, El sistema opera con una señal de 4/20 ma y otorga una salida de 3/15 PSI que sirve como señal de mando para la válvula de tres vías V.

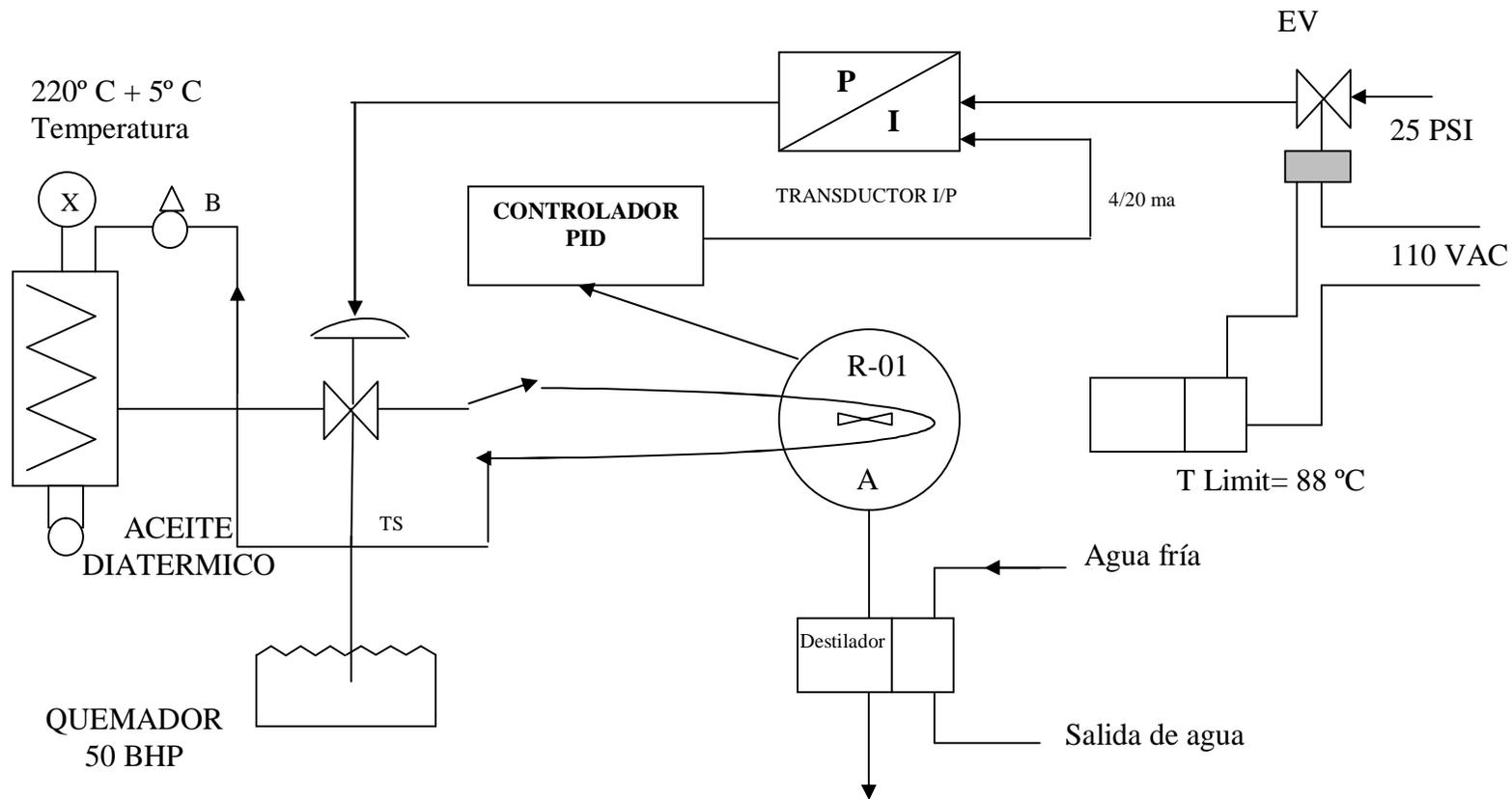
d) Agitador A, Este elemento es vital para la homogenización del material tanto de las sustancias como de la temperatura. Su operación es a la velocidad de 22 RPM.

#### 5.1.1 Proceso de Fabricación de Resina Melamínica

El modo de operación del reactor químico consiste en:

a) Introducir los componentes (con el agitador encendido)

- Resina melamínica en gránulos..... 1125 kg.
- Paraformaldehido..... 600 kg.
- Solución Amoniacal..... 6 kg.
- Trietanolamina..... 195 kg.
- Alcohol..... 36 lt.
- Agua..... 1300 kg.



*Figura 5.1 Esquema básico de la Planta de Fabricación de Resina Melamínica.*

b) Calentar el material hasta un máximo de 88 °C, en la observación del experimento para el proceso de identificación, se detecto la presencia de un fenómeno de exotermia en el rango de 46 a 60 °C.

c) Asentamiento de la reacción, a los 88 °C se anula la señal de mando de la válvula EV para asegurar que la temperatura no se incremente más allá de los 90 °C.

La variable critica en la fabricación de la resina melamínica es la temperatura en cada instante de tiempo que dura el batch, de tal manera que siguiendo una trayectoria predeterminada se logra una reacción controlada y en consecuencia una adecuada calidad del producto. Es importante señalar, que durante todo el proceso es conveniente mantener homogenizados todos los materiales.

## 5.2 Señal de Entrada Seudo Aleatoria Multinivel PRMS

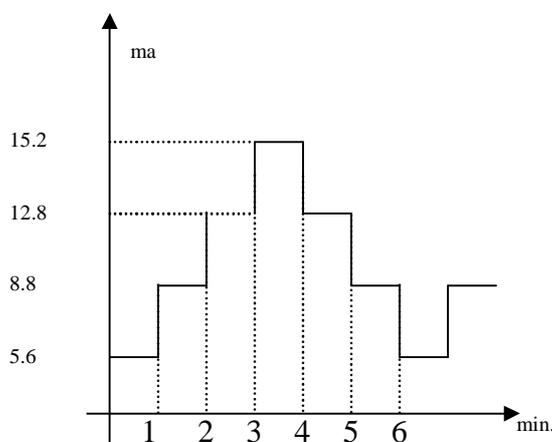
En esencia, nuestro trabajo se basa en los modelos de Volterra de horizonte truncado, por tal razón la identificación del sistema no lineal se realizará usando en los experimentos una señal multinivel seudo aleatoria de P+1 niveles, siendo P el orden de los kernels de la serie de Volterra. Este criterio fue expuesto en el capítulo 3.

La señal PRMS para los experimentos debe ser suficientemente capaz de excitar al sistema. Esto implica que la amplitud y la duración de cada nivel ocasionen variaciones medibles y que aseguren una buena relación señal/ruido.

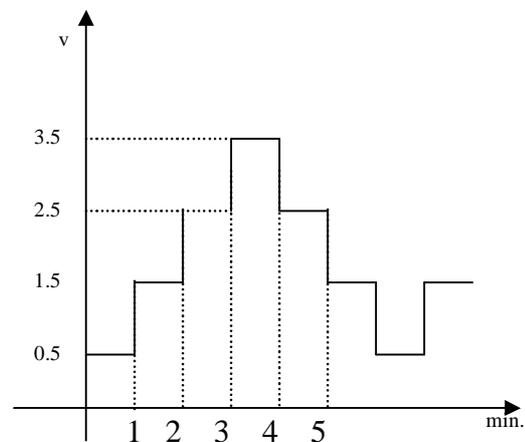
Los niveles elegidos para la corriente que opera el transductor I/P son de 5.6 ma, 8.8 ma, 12.8 ma y 15.2 ma respectivamente, tal como se grafica en la figura 5.2.

La corriente fue generada mediante un conversor Voltaje/Corriente V/I, para lo cual se excitó el generador PRMS con entradas de 0,5v, 1.5v, 2.5 y 3.5v., tal como se ilustra en la figura 5.3.

Se advierte que el utilizar cuatro niveles permite identificar sistemas de Volterra de primero, segundo y tercer orden como máximo.



**Figura 5.2 Salida de transductor I/P**



**Figura 5.3 Señal de entrada al conversor V/I**



**Figura 5.4**  
**Resultado del experimento en el reactor RO-1 (cargado y excitado con entrada de caudal de aceite y cuatro niveles en el transductor I/P = {14.375, 42.81, 71.438, 100}%)**

### 5.3 Respuesta del Modelo y del Reactor a la Entrada Multinivel

#### 5.3.1. Caso del Modelo Volterra-Laguerre de Grado Uno:

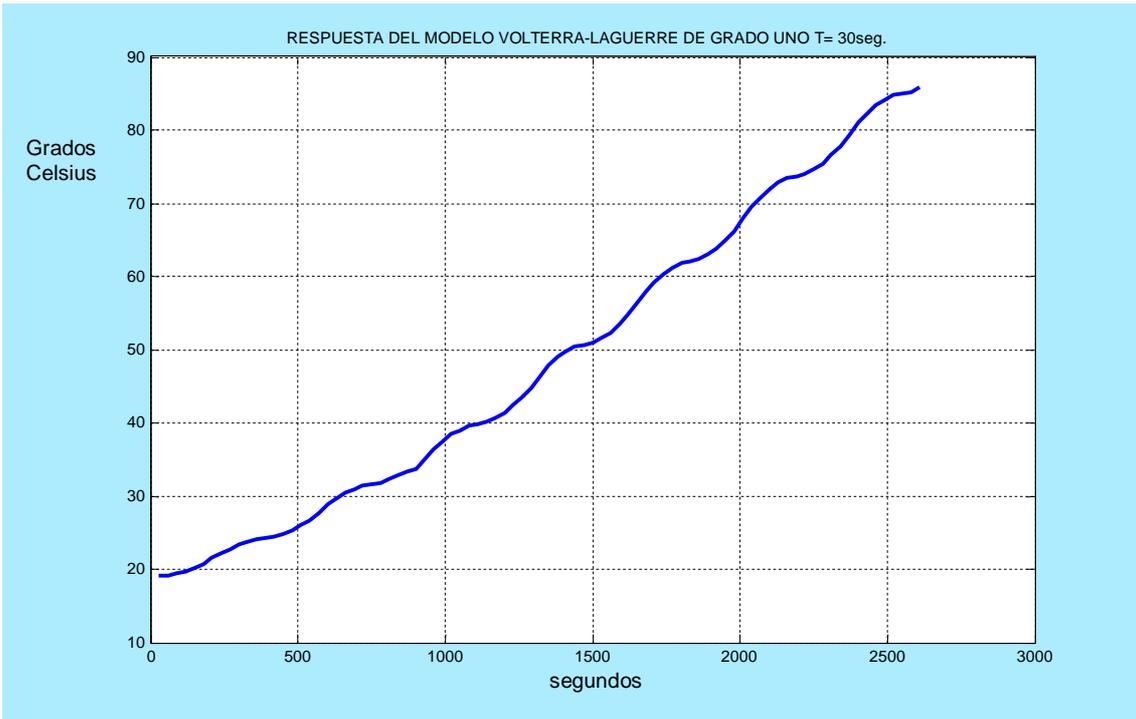
Durante el experimento se tomaron muestras en intervalos iguales de 10 segundos. Para la identificación se consideró como periodos de muestreo  $T=20$  segundos y  $T=30$  segundos.

##### *a. Caso de periodo de muestreo $T=30$ seg.*

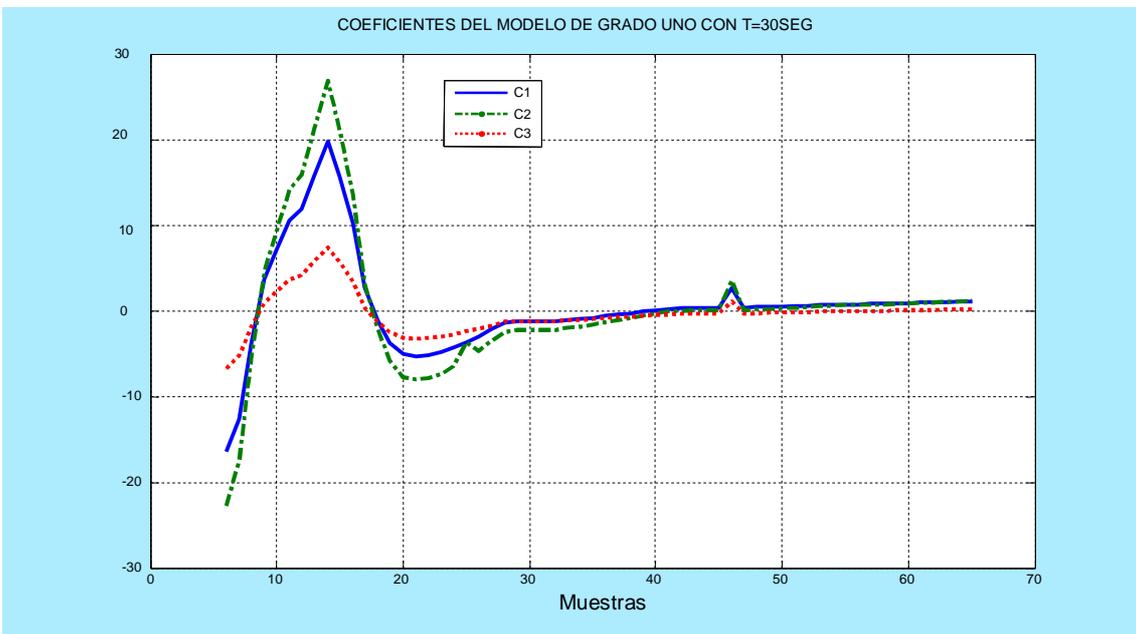
La respuesta del sistema permitió determinar el polo de Laguerre y los coeficientes de los kernels  $C_1$ ,  $C_2$ , y  $C_3$ , los cuales se detallan a continuación:

Polo	$a$	0.974655
Coefficiente	$C_1$	1.29282271023
Coefficiente	$C_2$	1.406684322211
Coefficiente	$C_3$	0.281474634226
Tiempo de muestreo	$T$	30 segundos

En el presente caso se trabaja con los coeficientes de mejor comportamiento.



**Figura 5.5** Curva del modelo Volterra-Laguerre de grado uno y  $T=30$  seg.

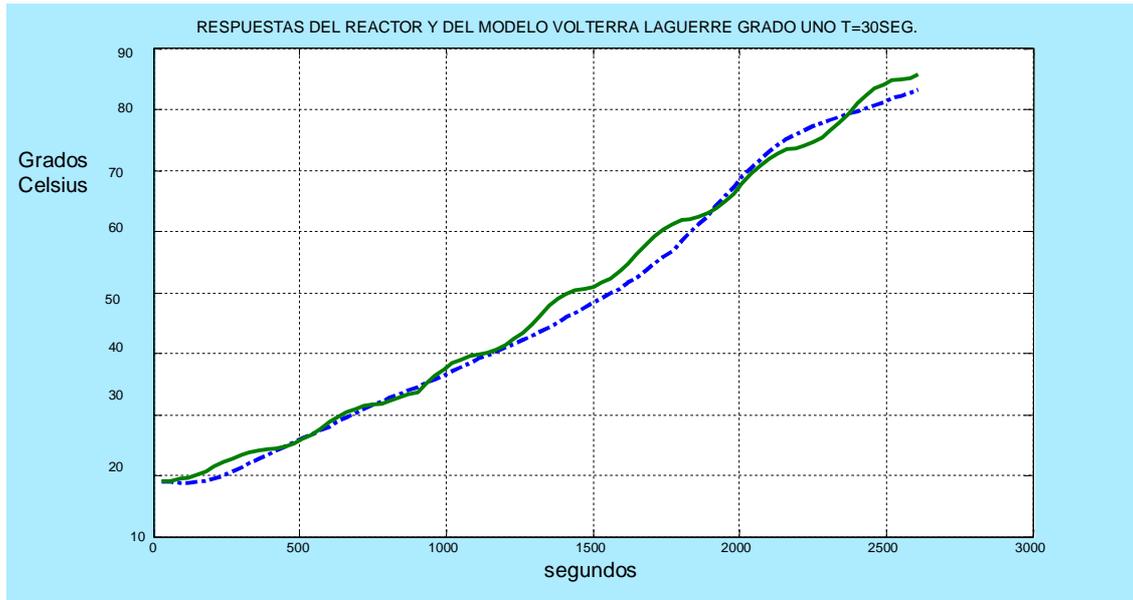


**Figura 5.6** Variación de los coeficientes según el orden de truncamiento  $N$

De la figura 5.6 se desprende que el modelo Volterra-Laguerre con kernels de primer orden y periodo de muestreo de 30 segundos, para el reactor en estudio, requiere aproximadamente memoria u orden de truncamiento  $N = 28$ . A partir de esa muestra los coeficientes son convergentes.

En la figura 5.7 se presentan las curvas que representan el comportamiento del reactor y del modelo Volterra-Laguerre de primer orden con periodo de muestreo  $T=30$  seg., cuando se excitan con una entrada multinivel. En este caso podemos concluir que la identificación tiene poca aproximación o no es muy eficiente, motivo por el cual no se insiste en modelos de grado uno con periodo de muestreo de 20 segundos.

El criterio utilizado para determinar los coeficientes fue el plasmado en el algoritmo de la ecuación para el Vector  $[Y(k)]_{P \times 1} = [A L]_{P \times 3} [C]_{3 \times 1}$ ; donde  $P \in [3, 87]$



**Figura 5.7** Curva correspondiente al Reactor y al modelo de grado uno  $T=30$  segundos.

### 5.3.2 Caso del Modelo Volterra-Laguerre de Grado Dos

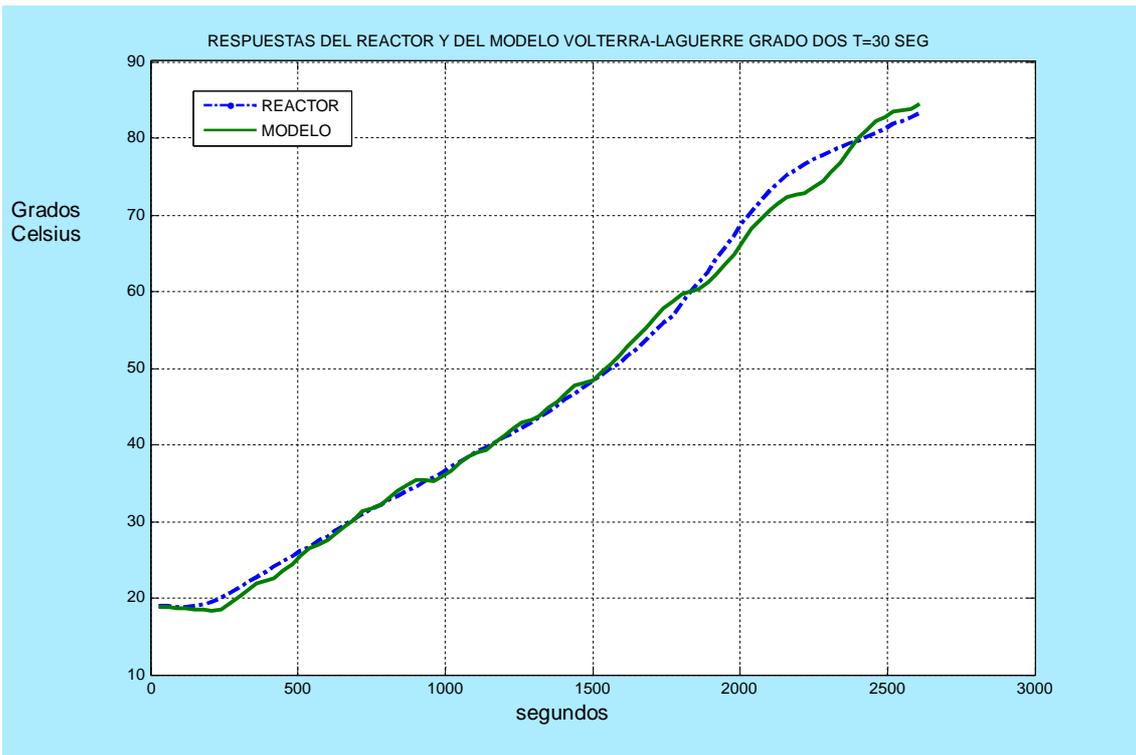
#### a. Caso de muestreo con $T=30$ seg.

En la figura 5.8 se presenta el comportamiento de las la respuestas del reactor y del modelo Volterra-Laguerre de segundo orden con periodo de muestreo  $T=30$  segundos cuando son excitados con señales multinivel. El gráfico con línea punteada corresponde al reactor; y la identificación de los coeficientes se realizó utilizando el algoritmo del vector  $[Y_k]_{P \times 1} = [A_L]_{P \times 6} [C]_{6 \times 1}$  donde  $P \in [6, 87]$ .

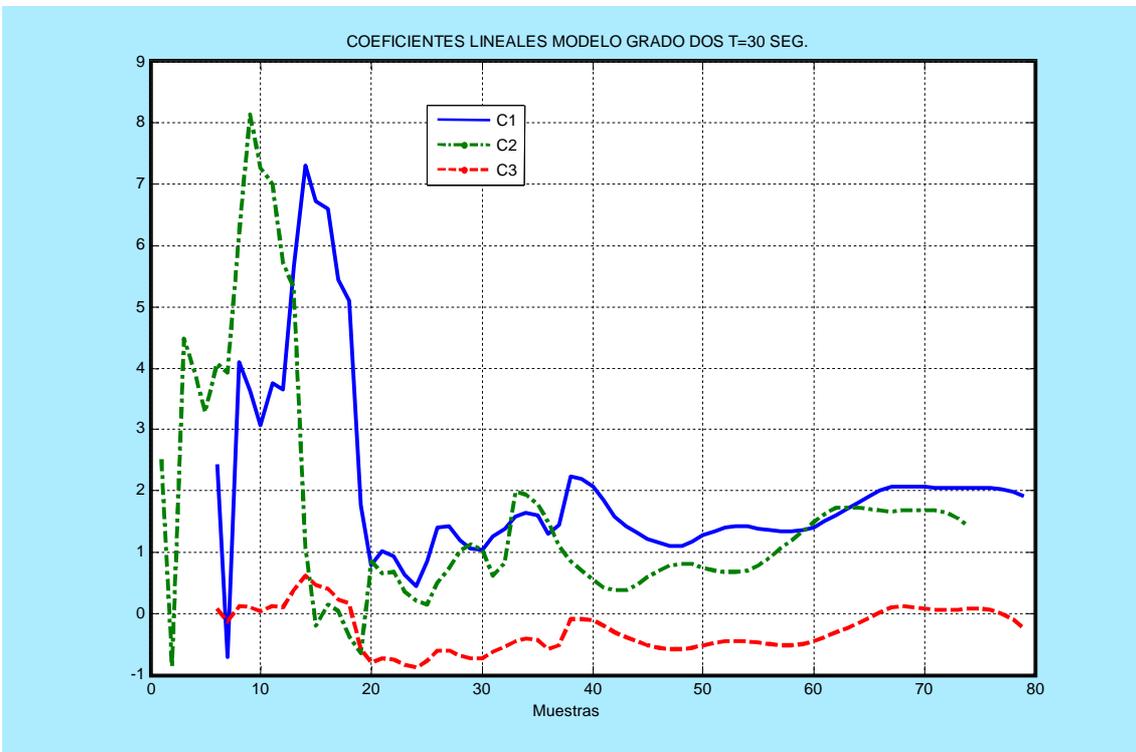
Esta Técnica permitió establecer la cantidad de muestras necesarias para identificar los coeficientes de primer y segundo orden del sistema.

La figura 5.9 correspondiente a los coeficientes lineales  $C_i$ , se observa que se necesitan por lo menos 65 muestras para identificar estos coeficientes y en el presente caso, después de una ligera optimización se tomó:

$$C_i = \begin{bmatrix} 1.52338316117687 \\ 0.7701975997131 \\ -0.57744407747 \end{bmatrix}; \text{ el polo correspondiente es } a = 0.978755$$



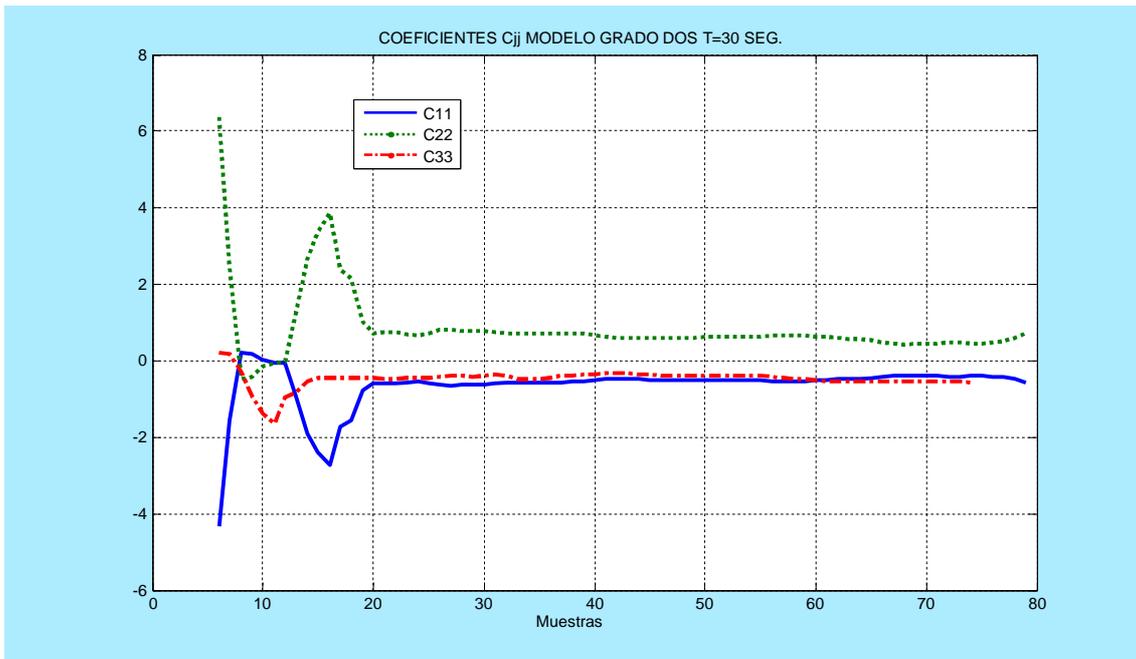
*Figura 5.8 Comparación del modelo de segundo orden y el reactor, cuando se les aplica una señal PRMS.*



*Figura 5.9 Coeficientes lineales del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.*

Los coeficientes cuadráticos  $C_{ij}$  se representan en la figura 5.10, observándose que la convergencia se da a partir de la muestra 25. Finalmente luego de optimizar el polo, se tomó el siguiente vector solución:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -0.60572833969049 \\ 0.73741956398 \\ -0.4357992931148 \end{bmatrix}; \text{ el polo correspondiente es } a = 0.978755$$



**Figura 5.10** Coeficientes cuadráticos del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.

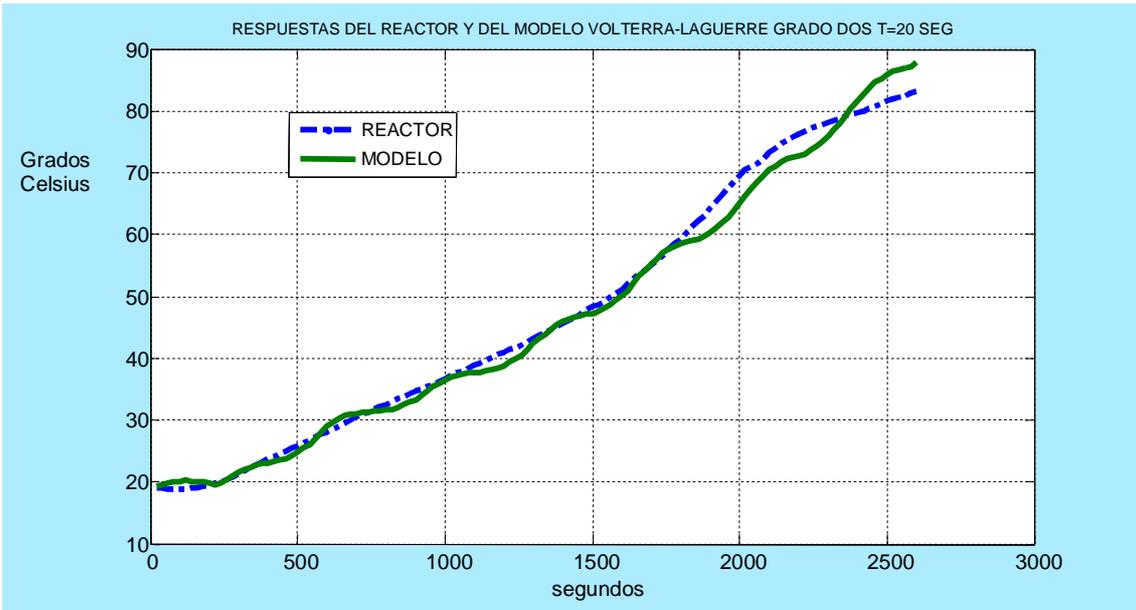
**b. Caso de muestreo a  $T = 20$  seg.**

En la figura 5.11 se muestra la respuesta del modelo Volterra-Laguerre de segundo orden y la del reactor como respuesta a la señal multinivel. Al comparar la respuesta del modelo y el reactor se observa una cierta ondulación alrededor de la trayectoria del reactor, notándose menor grado de identificación respecto al modelo con periodo de muestreo  $T=30$  segundos. Este fenómeno es porque la relación señal/ruido no es óptima.

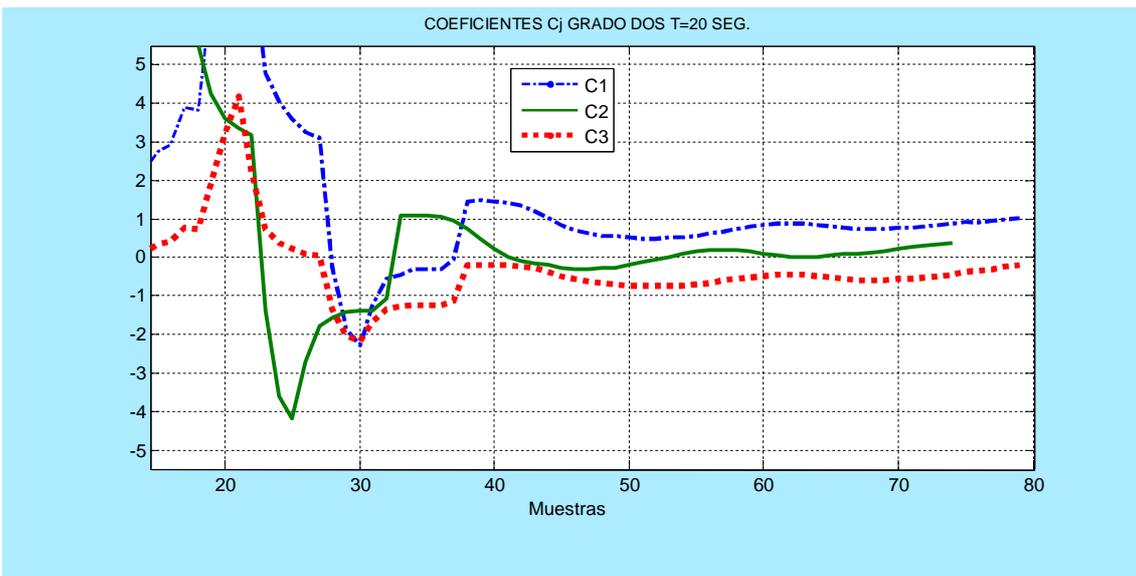
Igual que el caso anterior; la identificación fue realizada utilizando el algoritmo del vector  $[Y_k]_{P \times 1} = [A_L]_{P \times 6} [C]_{6 \times 1}$  donde  $P \in [6, 130]$ .

En la figura 5.12 se ilustra la evolución de la entradas del vector  $C_i$  para  $T = 20$  segundos, observándose una cierta convergencia a partir de la muestra 60. El vector elegido, luego de un sencillo proceso de optimización del polo, es:

$$C_j = \begin{bmatrix} 1.275057521436 \\ 0.993469572590 \\ 0.995728252516 \end{bmatrix}; \text{ el polo correspondiente es } a = 0.978755$$



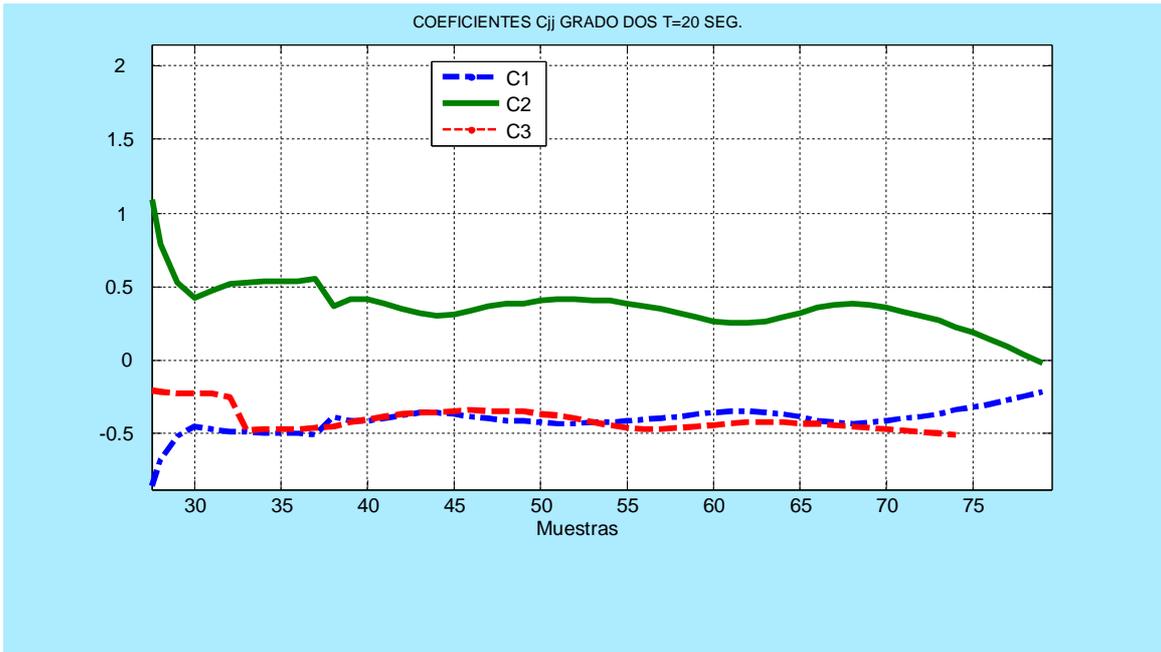
**Figura 5.11** Respuesta del Reactor y de modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.



**Figura 5.12** Evolución de los coeficientes de primer orden del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.

En la figura 5.13 se presenta el comportamiento de los coeficientes de segundo orden correspondiente al vector  $C_{jj}$ , donde se observa que el coeficiente  $C_{22}$  pierde convergencia a partir de la muestra 70. Pese a ello se ha utilizado el siguiente vector de coeficientes para observar el comportamiento del modelo:

$$C_{jj} = \begin{bmatrix} 0.54927670415522 \\ -1.3300159247 \\ -0.269177806424 \end{bmatrix}; \text{ el polo correspondiente es } a = 0.978755$$

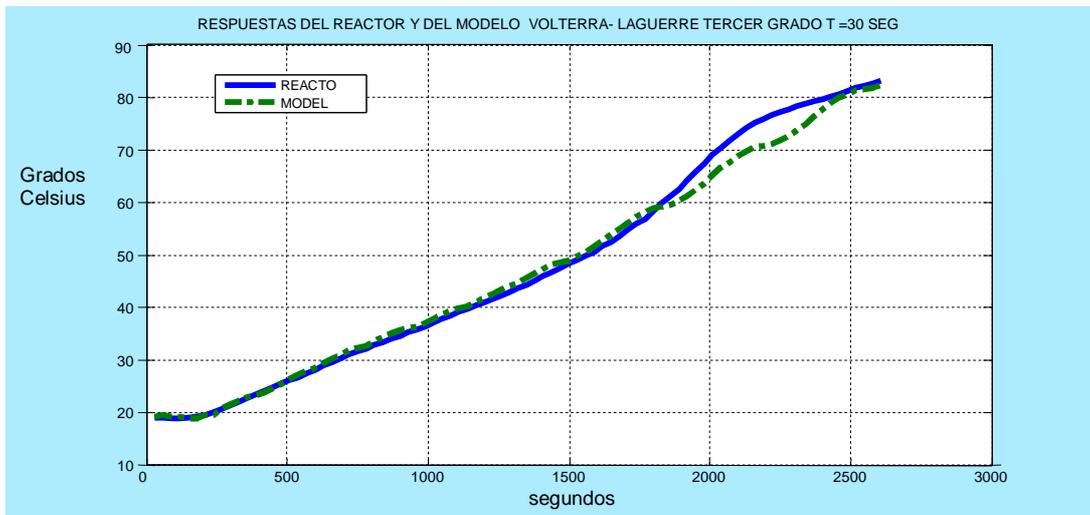


**Figura 5.13** Evolución de los coeficientes cuadráticos del modelo de segundo orden Volterra-Laguerre.

### 5.3.3 Caso del Modelo Volterra-Laguerre de Grado Tres

**a. Caso de muestreo a  $T=30$  segundos.**

En la figura 5.14 se ilustra el comportamiento del reactor y del modelo grado tres Volterra-Laguerre, cuando son excitados con una señal multinivel. En este caso se observa que la identificación es más eficiente respecto a los modelos de primer y segundo orden. La divergencia se presenta en la fase de exotermia por cuanto este fenómeno implica que el sistema es variante en el tiempo. Pese a ello, los algoritmos son eficientes en lograr la convergencia del modelo y el reactor a partir de los 2400 segundos, aproximadamente.

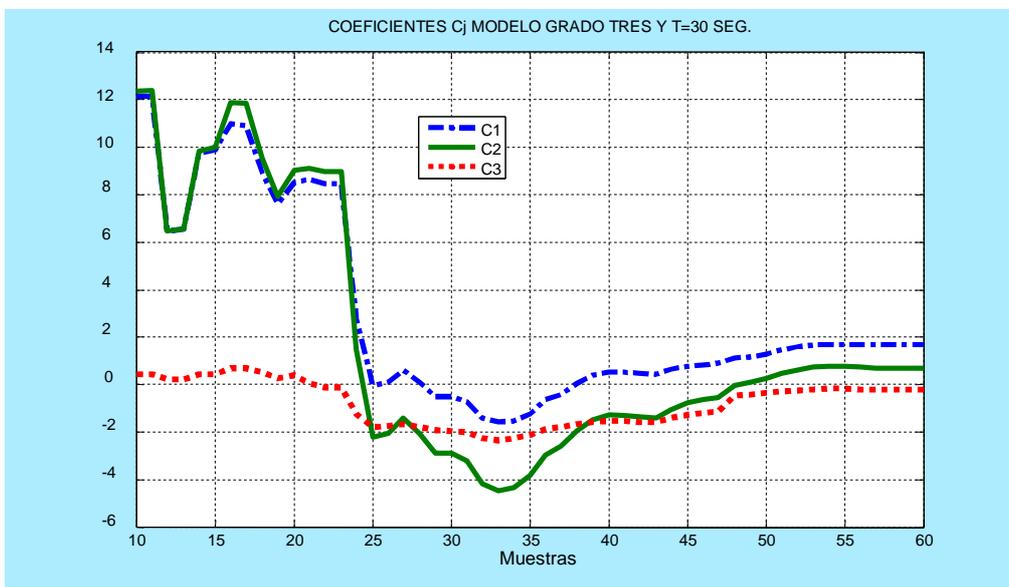


**Figura 5.14** Respuesta del Reactor y del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre.

El proceso de identificación de los coeficientes que ponderan la base OBF, lineales, cuadráticos y cúbicos del modelo Volterra-Laguerre de tercer orden se realizó aplicando el algoritmo del vector  $[Y_k]_{p \times 1} = [A_L]_{p \times 9} [C]_{9 \times 1}$  donde  $P \in [9, 87]$

En la figura 5.15 se ilustra el comportamiento de los coeficientes  $C_i$ , lográndose establecer que a partir de la muestra 55 logran una adecuada convergencia. Para el modelo hemos elegido, de la zona de convergencia, el siguiente vector solución:

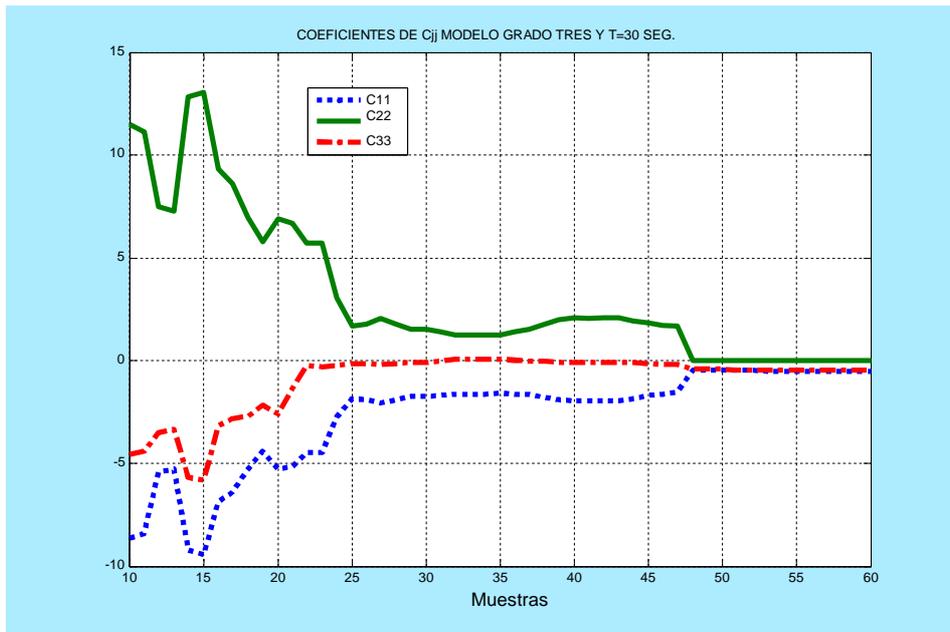
$$C_i = \begin{bmatrix} 1.54112897527396 \\ 0.67454688664398 \\ -1.09299905529156 \end{bmatrix}; \text{ el polo correspondiente es } a = 0.978921$$



**Figura 5.15 Evolución de los coeficientes lineales del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre.**

En la figura 5.16 se grafica el comportamiento de los coeficientes cuadráticos del modelo Volterra-Laguerre de tercer orden, observándose que se requiere 48 muestras para lograr la convergencia de la solución; los valores de las entradas del vector usado como solución, corresponden a la zona de convergencia:

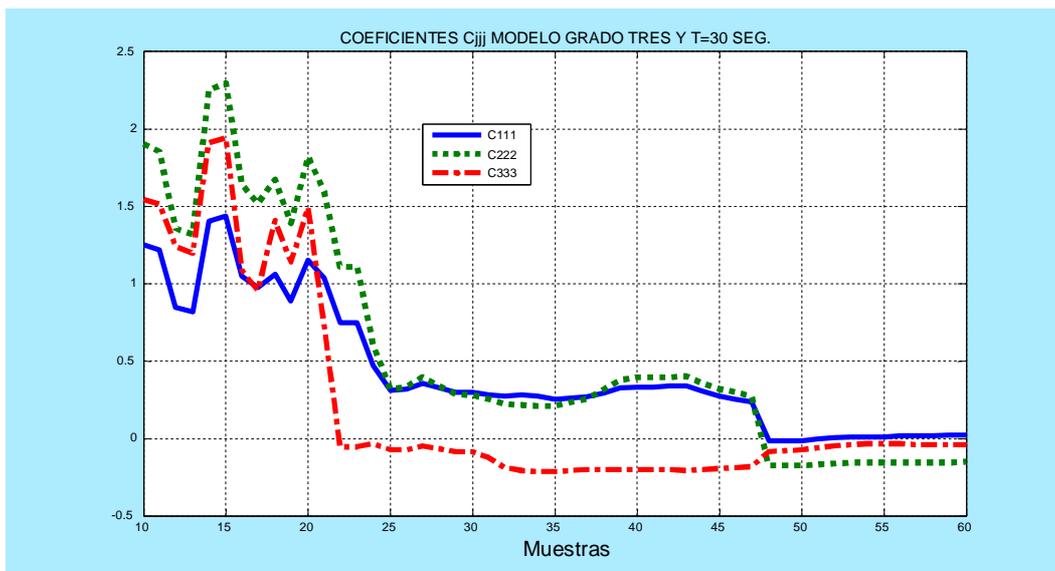
$$C_{jj} = \begin{bmatrix} -0.35086631791292 \\ -0.00058010235085 \\ -0.53655506410408 \end{bmatrix}, \text{ el polo correspondiente es } a = 0.9789217$$



**Figura 5.16** Evolución de los coeficientes cuadráticos del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre.

Para el caso de los kernels de tercer orden  $C_{ijk}$ ; de la figura 5.17 se concluye que es necesario que el truncamiento sea  $N = 48$ ; a partir del cual se considera que los coeficientes están debidamente identificados; el vector solución de la zona de convergencia elegido es:

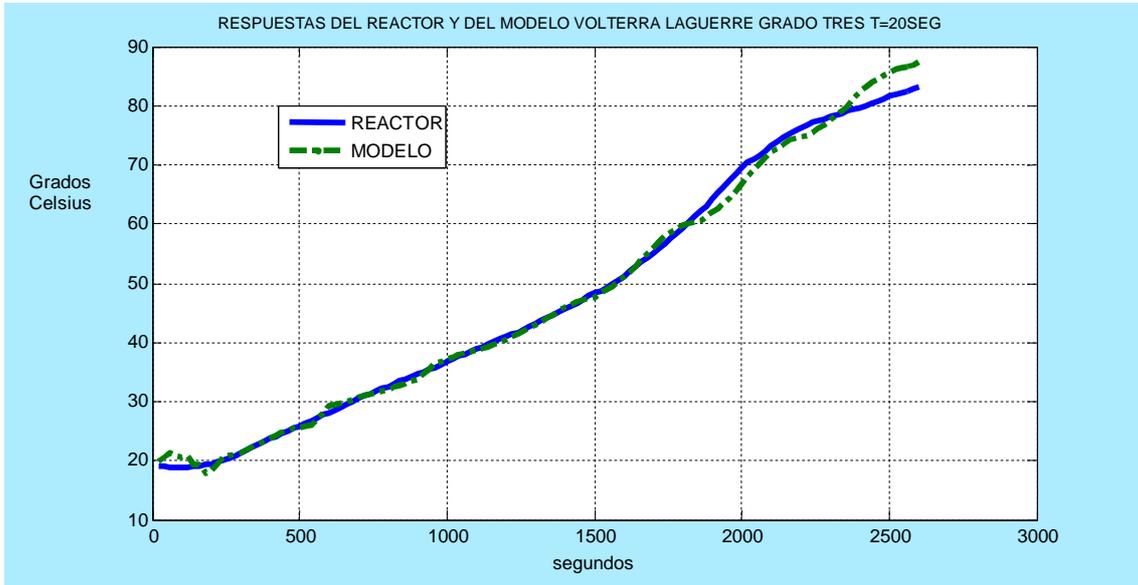
$$C_{ijk} = \begin{bmatrix} -0.10315978088806 \\ -0.27869385440674 \\ 0.48665647832738 \end{bmatrix}, \text{ el polo correspondiente es } a = 0.9789217$$



**Figura 5.17** Evolución de los coeficientes cúbicos del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre.

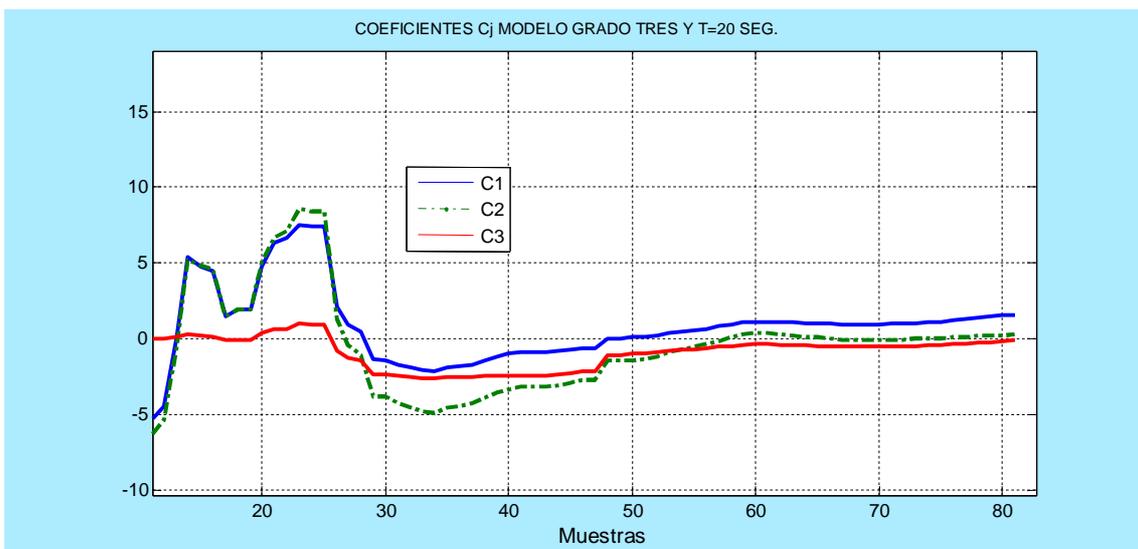
**b. Caso de muestreo a  $T=20$  segundos.**

En la figura 5.18 se muestra el comportamiento del reactor y del modelo Volterra-Laguerre de tercer orden con muestreo  $T = 20$  segundos cuando se les excita con una señal multinivel. Al comparar las respuestas observamos discrepancias en la zona de exotermia, en razón a que este fenómeno significa variación en el tiempo del sistema del reactor en estudio.



**Figura 5.18 Respuesta del Reactor y del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre.**

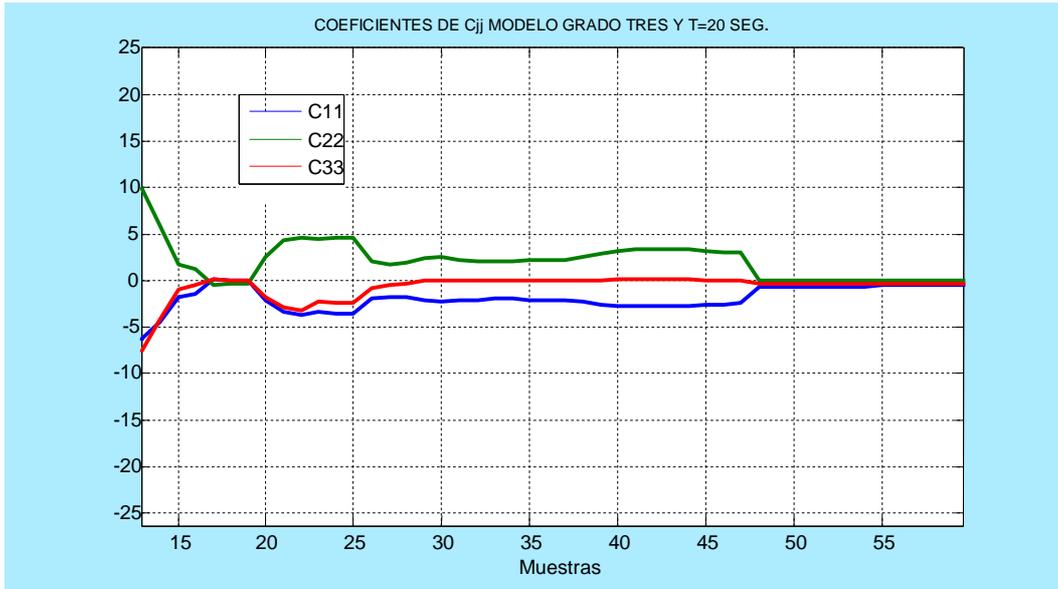
Igual que en los casos anteriores la identificación de los coeficientes se realizó aplicando el algoritmo  $[C]_{9 \times 1} = \text{inv}[A_L^T A_L]_{9 \times 9} [A_L]_{9 \times P}^T [Y_{(k)}]_{P \times 1}$ , donde  $P \in [9, 130]$ .



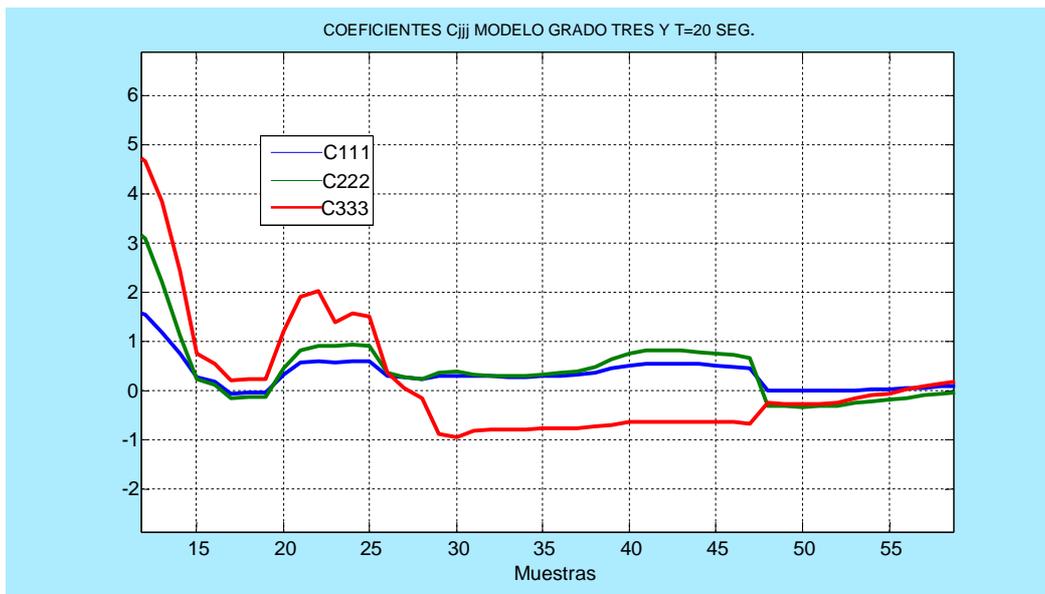
**Figura 5.19 Evolución de los coeficientes lineales del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre.**

En la figura 5.19 se distingue que a partir de la muestra 58 los coeficientes adquieren convergencia, por tanto de la zona de convergencia hemos elegido el vector solución siguiente:

$$C_j = \begin{bmatrix} 2.83271913117 \\ 0.44157443027 \\ 0.948591063337 \end{bmatrix}, \text{ el polo elegido es } a = 0.979790$$



**Figura 5.20** Evolución de los coeficientes cuadráticos del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre.



**Figura 5.21** Evolución de los coeficientes cúbicos del modelo de tercer orden Volterra-Laguerre

De las figura 5.19 y 5.20 se aprecia que la convergencia de los coeficientes se da a partir de la muestra 48 para los cuadráticos y 57 para los coeficientes cúbicos.

Los vectores solución de  $C_{jj}$  y  $C_{jjj}$  para este modelo fueron elegidos de la zona de convergencia, tal como sigue:

$$C_{jj} = \begin{bmatrix} -2.82559997238 \\ 0.0037431754 \\ -0.54604665818 \end{bmatrix} ; \text{ el polo elegido es } a = 0.979790$$

$$C_{jjj} = \begin{bmatrix} 1.0564151168 \\ 0.5673974572 \\ -0.9191478876 \end{bmatrix} ; \text{ el polo elegido es } a = 0.979790$$

## 5.4 Modelos Volterra-Laguerre Obtenidos Para el Reactor de Resina Melamínica

### 5.4.1 Modelos Volterra-Laguerre de Primer Orden.

Para obtener estos modelos, fue necesario implementar una serie de experimentos con señales multinivel, que dieran garantía de que la data entrada/salida tuviese la información necesaria que permitiera que la identificación diese como resultado un modelo representativo del sistema no lineal del reactor, de fabricación de resina melamínica para todo el tiempo que dura el proceso batch.

La señal de excitación fue de cuatro niveles con una duración promedio de 1 minuto por cada nivel, la toma de datos se realizó cada 10 segundos.

La base de las funciones ortogonales usada en este modelo, comprende el uso de los tres primeros polinomios generalizados de Laguerre que se expresan en el plano  $z$  como:  $\phi_{ki}(z) = \sqrt{(1-a^2)T} \frac{(1-az)^{ki-1}}{(z-a)^{ki}}$ , donde  $ki \in \{1,2,3\}$ ,  $a$  es el polo de Laguerre y  $T$  el periodo de muestreo.

Los polinomios de la base ortogonal en tiempo discreto son:

$$\phi_1(k) = \sqrt{(1-a^2)T} a^{k-1} \mu(k-1) \quad 5.1$$

$$\phi_2(k) = \sqrt{(1-a^2)T} \left[ (k-1)a^{k-2} \mu(k-2) - k a^k \mu(k-1) \right] \quad 5.2$$

$$\phi_3(k) = \sqrt{(1-a^2)T} \left[ \frac{(k-1)(k-2)}{2} a^{k-3} \mu(k-3) - k(k-1)a^{k-1} \mu(k-2) + \frac{(k+1)}{2} a^{(k+1)} \mu(k-1) \right] \quad 5.3$$

Donde para todos los casos  $k \in [1, \infty)$ .

Luego la base ortogonal es,  $OBF = \{ \phi_1(k), \phi_2(k), \phi_3(k) \}$ .

La data correspondiente al tiempo que dura el proceso de fabricación permite operar con horizontes truncados  $N = 261, 130, \text{ y } 87$  para  $T = 10, 20, \text{ y } 30$  segundos respectivamente. Esto significa que es posible obtener modelos Volterra-Laguerre de primer, segundo y tercer orden para el muestreo de  $T = 10, 20, \text{ y } 30$  segundos.

**a) Modelo de primer orden con muestreo de  $T = 20$  segundos.**

Este modelo se obtuvo proyectando los kernels de Volterra de primer orden sobre una superficie de un espacio que tiene como base los tres primeros polinomios generalizados de Laguerre  $\{\phi_1(k), \phi_2(k), \phi_3(k)\}$ .

Basado en el fundamento anterior y utilizando la ecuación 4.44, la obtención del modelo Volterra-Laguerre se realiza del modo siguiente:

a.1. Utilizando la data de entrada y salida, utilizamos las siguientes relaciones para obtener el vector solución de los coeficientes que ponderan la base ortogonal OBF.

$$Y(k) = [Li(k)][Ci] \quad 5.4$$

Donde:  $[Li(k)] = [\ell_1(k) \ \ell_2(k) \ \ell_3(k)] \quad 5.5$

$$[Ci]^T = [C_1 \ C_2 \ C_3] \quad 5.6$$

a.2. Conocido el vector solución, la salida del modelo se expresa como una suma de cada polinomio excitado por la entrada multinivel, como se indica:

$$Y(k) = C_1 \ell_1(k) + C_2 \ell_2(k) + C_3 \ell_3(k) \quad 5.7$$

$$\ell_i(k) = \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}(mi) X(k-mi) \quad 5.8$$

Basado en las ecuaciones y criterios de los capítulos anteriores formulamos el modelo de primer orden Volterra-Laguerre, para la salida  $Y(k)$  y el diferencial  $\Delta Y(k)$ , como se indica a continuación:

$$Y(k) = C_1 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1) X(k-m_1) + C_2 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2) X(k-m_2) + C_3 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3) X(k-m_3) \quad 5.9$$

$$\Delta Y(k) = C_1 \phi_1(k+1) X(k+1) + C_2 \phi_2(k+1) X(k+1) + C_3 \phi_3(k+1) X(k+1)$$

El polo de Laguerre y los coeficientes  $C_j$  del modelo, son como sigue:

Polo de Laguerre:  $a = 0.981$

$$\text{Vector solución, } C_j = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.09501926 \\ 1.21352088 \\ 0.30807610 \end{bmatrix} \quad 5.10$$

**b) Modelo de primer orden con muestreo de  $T = 30$  segundos**

Este modelo es similar al anterior, solo difiere en el periodo de muestreo. Igualmente los kernels de la serie de Volterra son proyectados sobre un espacio

que tiene por base ortogonal la OBF, formada por los siguientes polinomios generalizados de Laguerre:  $\phi_1(k)$ ,  $\phi_2(k)$ , y  $\phi_3(k)$ .

Utilizando los criterios formulados en el capítulo 4, la salida  $Y(k)$  del modelo Volterra-Laguerre cuando se le aplica una señal de entrada  $X(k)$  es como sigue:

$$\begin{aligned} Y(k) &= [Li(k)][Ci] \quad \text{donde:} \\ [Li(k)] &= [\ell_1(k) \quad \ell_2(k) \quad \ell_3(k)] \\ [Ci]^T &= [C_1 \quad C_2 \quad C_3] \end{aligned} \quad 5.11$$

La salida  $Y(k)$  en función de cada polinomio es:

$$Y(k) = C_1 \ell_1(k) + C_2 \ell_2(k) + C_3 \ell_3(k) \quad 5.12$$

Donde la expresión de  $\ell_i(k)$  es como sigue:

$$\ell_i(k) = \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}(mi) X(k-mi) \quad 5.13$$

Con los criterios anteriores el modelo Volterra-Laguerre de primer orden para un periodo de muestreo  $T=30$  segundos, es:

$$Y(k) = C_1 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1) X(k-m_1) + C_2 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2) X(k-m_2) + C_3 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3) X(k-m_3) \quad 5.14$$

La expresión del diferencial  $Y(k)$  es como se indica a continuación:

$$\Delta Y(k) = C_1 \phi_1(k+1) X(k+1) + C_2 \phi_2(k+1) X(k+1) + C_3 \phi_3(k+1) X(k+1) \quad 5.15$$

El polo y los coeficientes del vector solución  $C_j$  para el modelo en estudio es:

Polo de Laguerre:  $a = 0.974655$

$$\text{Vector solución, } C_j = \begin{bmatrix} 1.29282271023 \\ 1.406684322211 \\ 0.281474634226 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad 5.16$$

## 5.4.2 Modelos Volterra-Laguerre de Segundo Orden

### a) Caso de muestreo con $T=20$ segundos

Para la implementación de este modelo, se ha considerado que los kernels de primer orden se proyectan sobre la superficie de un espacio formado por la base ortogonal OBF =  $\{\phi_1(k), \phi_2(k), \phi_3(k)\}$  y la proyección de los kernels de segundo orden se realiza sobre una superficie formada por la base OBF<sub>2</sub> =  $\{\phi_1^2(k), \phi_2^2(k), \phi_3^2(k)\}$ .

Para la proyección de los kernels de segundo orden aplicando el criterio de ortogonalidad utilizaremos la relación  $\sum_{m_1=1}^N \sum_{m_2=1}^N \phi_{k_1}(m_1) \phi_{k_2}(m_2) \approx 0$  /  $k_1 \neq k_2$ . En consecuencia para los coeficientes cuadráticos del modelo Volterra-Laguerre que ponderan la OBF<sub>2</sub> se debe considerar que  $C_2(k_1, k_2) = 0$  si  $k_1 \neq k_2$ .

De los criterios anteriores y lo señalado en el Capítulo 4, el modelo Volterra-Laguerre de segundo orden para la salida del sistema será:

$$Y(k) = [\ell_1(k) \ell_2(k) \ell_3(k)] [C_i] + [\ell_1^2(k) \ell_2^2(k) \ell_3^2(k)] [C_{ij}] \quad 5.17$$

$$\ell_i(k) = \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}(mi) X(k-mi) \quad 5.18$$

$$\ell_i^2(k) = \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}^2(mi) X^2(k-mi)$$

Resumiendo, tenemos el modelo global de segundo orden:

$$Y(k) = C_1 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1) X(k-m_1) + C_2 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2) X(k-m_2) + C_3 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3) X(k-m_3) + C_{11} \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1) X^2(k-m_1) + C_{22} \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2) X^2(k-m_2) + C_{33} \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3) X^2(k-m_3) \quad 5.19$$

Igual que el caso anterior representamos el diferencial  $\Delta Y(k)$  como sigue:

$$\Delta Y(k) = C_1 \phi_1(k+1) X(k+1) + C_2 \phi_2(k+1) X(k+1) + C_3 \phi_3(k+1) X(k+1) + C_{11} \phi_1^2(k+1) X^2(k+1) + C_{22} \phi_2^2(k+1) X^2(k+1) + C_{33} \phi_3^2(k+1) X^2(k+1) \quad 5.20$$

El polo y los coeficientes de los vectores solución para el modelo de segundo orden Volterra-Laguerre para  $T = 20$  segundos son:

Polo de Laguerre:  $a = 0.9788755$

$$\text{Vectores solución, } C_i = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2750575214 \ 3 \\ 0.9934695725 \\ 0.9957282525 \ 18 \end{bmatrix} \quad 5.21$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{22} \\ C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5492767041 \ 57 \\ -1.3300159247 \\ -0.2691778064 \end{bmatrix} \quad 5.22$$

**b) Caso de muestreo  $T = 30$  segundos**

Considerando que el modelo Volterra-Laguerre tiene la misma estructura que el caso anterior; excepto en los valores del polo  $a$  y las entradas de los vectores solución  $C_i$  y  $C_{ij}$ ; entonces para el caso tenemos:

Polo de Laguerre:  $a = 0.97875$

$$\text{Vectores solución, } C_i = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.52338316117687 \\ 0.7701975997131 \\ -0.57744407747 \end{bmatrix} \quad 5.23$$

$$C_{jj} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{22} \\ C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.60572833969049 \\ 0.73741956398 \\ -0.4357992931148 \end{bmatrix} \quad 5.24$$

### 5.4.3 Modelos Volterra- Laguerre de Tercer Orden

#### a) Caso de muestreo con $T = 20$ segundos

Para la identificación del modelo Volterra-Laguerre de tercer orden, se consideró que los kernels de primer orden se proyectarían sobre la superficie del espacio formado por la base ortogonal  $OBF = \{\phi_1(k), \phi_2(k), \phi_3(k)\}$ , la proyección de los kernels de segundo orden se realiza sobre una superficie del espacio formado por la base  $OBF_2 = \{\phi_1^2(k), \phi_2^2(k), \phi_3^2(k)\}$  y finalmente los kernels de tercer orden se deben proyectar sobre una superficie del espacio formado por la base  $OBF_3 = \{\phi_1^3(k), \phi_2^3(k), \phi_3^3(k)\}$ .

Las entradas de los vectores solución que ponderan las bases,  $C_{ij}$  y  $C_{ijk}$ , son no nulos en las diagonales, en razón a que son aplicables los criterios de ortogonalidad como se ilustra a continuación:

$$\sum_{m_1=1}^N \sum_{m_2=1}^N \phi_{k1}(m_1) \phi_{k2}(m_2) \approx 0 \quad / k1 \neq k2 \quad 5.25$$

$$\sum_{m_1=1}^N \sum_{m_2=1}^N \sum_{m_3=1}^N \phi_{k1}(m_1) \phi_{k2}(m_2) \phi_{k3}(m_3) \approx 0 \quad / k1 \neq k2 \neq k3 \quad 5.26$$

Finalmente, los vectores solución que ponderan las bases de  $OBF_2$  y  $OBF_3$ , cumplen con las restricciones que se derivan del criterio de la ortogonalidad  $C_2(k_1, k_2) = 0$ ;  $C_3(k_1, k_2, k_3) = 0$ ; si  $k_1 \neq k_2$  y  $k_1 \neq k_2 \neq k_3$  respectivamente.

Basado en los criterios anteriores y los fundamentos expresados en el Capítulo 4, el modelo Volterra-Laguerre de tercer orden para la salida  $Y(k)$  del sistema reactor melamínico es como sigue:

$$Y(k) = [L_1(k)] [C_j] + [L_2(k)] [C_{jj}] + [L_3(k)] [C_{jjj}] \quad 5.27$$

Siendo:

$$\begin{aligned} L_1 &= [\ell_1(k), \ell_2(k), \ell_3(k)] \\ [C_j]^T &= [C_1 \ C_2 \ C_3] \\ L_2 &= [\ell_1^2(k) \ \ell_2^2(k) \ \ell_3^2(k)] \\ [C_{jj}]^T &= [C_{11} \ C_{22} \ C_{33}] \\ L_3 &= [\ell_1^3(k) \ \ell_2^3(k) \ \ell_3^3(k)] \\ [C_{jjj}]^T &= [C_{111} \ C_{222} \ C_{333}] \end{aligned} \quad 5.28$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned}
Y(k) = & C_1 \ell_1(k) + C_2 \ell_2(k) + C_3 \ell_3(k) + \\
& C_{11} \ell_1^2(k) + C_{22} \ell_2^2(k) + C_{33} \ell_3^2(k) + \\
& C_{111} \ell_1^3(k) + C_{222} \ell_2^3(k) + C_{333} \ell_3^3(k)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
\ell_i(k) = & \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}(mi) X(k-mi) \\
\ell_i^2(k) = & \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}^2(mi) X^2(k-mi) \\
\ell_i^3(k) = & \sum_{mi=1}^N \phi_{ki}^3(mi) X^3(k-mi)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Finalmente el modelo de Volterra-Laguerre de tercer orden es:

$$\begin{aligned}
Y(k) = & C_1 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1) X(k-m_1) + C_2 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2) X(k-m_2) + C_3 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3) X(k-m_3) \\
& + C_{11} \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1) X^2(k-m_1) + C_{22} \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2) X^2(k-m_2) + C_{33} \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3) X^2(k-m_3) \\
& + C_{111} \sum_{m_1=1}^N \phi_1^3(m_1) X^3(k-m_1) + C_{222} \sum_{m_2=1}^N \phi_2^3(m_2) X^3(k-m_2) + C_{333} \sum_{m_3=1}^N \phi_3^3(m_3) X^3(k-m_3)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Siendo de importancia conocer el diferencial de  $Y(k)$  tenemos:

$$\Delta Y(k) = Y(k+1) - Y(k) \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Y(k) = & C_1 \phi_1(k+1) X(k+1) + C_2 \phi_2(k+1) X(k+1) + C_3 \phi_3(k+1) X(k+1) \\
& + C_{11} \phi_1^2(k+1) X^2(k+1) + C_{22} \phi_2^2(k+1) X^2(k+1) + C_{33} \phi_3^2(k+1) X^2(k+1) \\
& + C_{111} \phi_1^3(k+1) X^3(k+1) + C_{222} \phi_2^3(k+1) X^3(k+1) + C_{333} \phi_3^3(k+1) X^3(k+1)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

El polo y los coeficientes correspondientes al modelo de tercer orden con periodo de muestreo  $T=20$  son:

Polo de Laguerre:  $a = 0.97979$

$$\text{Vectores solución, } [C_j] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8327191311 \\ 0.4415744302 \\ 0.9485910633 \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{22} \\ C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.8255999 \\ -0.0037431754 \\ -0.54604665818 \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

$$[C_{ijj}] = \begin{bmatrix} C_{111} \\ C_{222} \\ C_{333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0564151168 \\ 0.56739745719 \\ -0.9191478876 \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

**b) Caso de muestreo con  $T = 30$  segundos**

El modelo indudablemente es similar al caso anterior, excepto en el valor de los coeficientes que ponderan las bases y el polo.

Abreviando tenemos que el modelo queda representado por:

$$\begin{aligned}
 Y(k) = & C_1 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1) X(k-m_1) + C_2 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2) X(k-m_2) + C_3 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3) X(k-m_3) \\
 & + C_{11} \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1) X^2(k-m_1) + C_{22} \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2) X^2(k-m_2) + C_{33} \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3) X^2(k-m_3) \\
 & + C_{111} \sum_{m_1=1}^N \phi_1^3(m_1) X^3(k-m_1) + C_{222} \sum_{m_2=1}^N \phi_2^3(m_2) X^3(k-m_2) + C_{333} \sum_{m_3=1}^N \phi_3^3(m_3) X^3(k-m_3)
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Donde el polo y los vectores  $C_j$ ,  $C_{jj}$ , y  $C_{jjj}$ ; son:

Polo de Laguerre:  $a = 0.9789217$

$$\text{Vectores solución, } [C_j] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.54112897527396 \\ 0.67454688664398 \\ -1.09299905529150 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

$$[C_{jj}] = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{22} \\ C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.35086631791292 \\ -0.00058010235085 \\ -0.5365506410408 \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

$$[C_{jjj}] = \begin{bmatrix} C_{111} \\ C_{222} \\ C_{333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10315978088806 \\ -0.27869385440674 \\ 0.48665647832738 \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

## CAPÍTULO 6

### CONTROL PREDICTIVO NO LINEAL BASADO EN MODELOS USANDO EL ALGORITMO DE LA MATRIZ DINÁMICA DE CONTROL

En el área de control predictivo tenemos una serie de controladores que en esencia se diferencian por el modo de predicción y el método usado para determinar la ley de control.

Considerando que para controlar sistemas no lineales, con mayor frecuencia se viene utilizando el método de control NMPC. Este tipo de control resulta muy adecuado cuando se desea hacer seguimiento de referencias variables en el tiempo, como es el caso de los reactores tipo batch por ser sistemas no lineales.

En nuestro caso, hemos considerado pertinente formular un controlador no lineal basado en el algoritmo de la NDMC. La diferencia con el método tradicional radica en que el modelo original usa las componentes matriciales obtenidas a partir del modelamiento entrada/salida cuando la señal excitatriz es tipo escalón. En nuestro caso planteamos generar las componentes matriciales desde el modelo Volterra-Laguerre.

#### 6.1 Ley de Control No Lineal por Matriz Dinámica NDMC

La versión lineal del control usando estos algoritmos fue desarrollado por Cutler y Ramaker de la Shell oil co. [20] y desde su formulación (1979) ha sido aplicada con gran énfasis en la industria petroquímica y del cemento.

Para el caso de la presente tesis, donde la identificación de los sistemas está basada en las series Volterra–Laguerre, se utilizará un modelo de segundo orden para simular un controlador dedicado al seguimiento de una trayectoria del tipo tangente hiperbólica aplicado en el calentamiento del reactor de Resina Melamínica RO-1 de PISOPAK PERU SAC.

Iniciamos la propuesta expresando la salida del sistema no lineal en su forma predictiva tradicional para la NDMC, representada por los términos lineales y de segundo orden de la manera siguiente [21]:

$$Y(k+M) = \sum_{i=1}^P \left( a_i X(k+i+M) + b_i X^2(k+i+M) \right) \quad 6.1$$

En la ecuación anterior  $P$  es el horizonte de predicción,  $M$  es el horizonte de control.

Para nuestro trabajo, los términos  $a_i$  y  $b_i$  deben adecuarse al modelo Volterra-Laguerre y en particular a los polinomios generalizados de Laguerre de la OBF y de la OBF<sub>2</sub>; y sus coeficientes  $C_1, C_2, C_3, C_{11}, C_{22}, C_{33}$  del modelo previamente identificado.

Generalizando la salida predictiva tenemos:

$$\tilde{Y}(k+n) = \tilde{Y}_+ + \tilde{Y}_- \quad 6.2$$

Donde:

$\tilde{Y}_+$  Corresponde a los términos del futuro y  $\tilde{Y}_-$  a los términos del pasado.

Un modelo NMPC con horizonte de control  $M$ , un horizonte de predicción  $P$  y errores de predicción  $d$ , se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(k+M) = & \sum_{i=1}^M a_i X(k+M-i) + \sum_{i=M+1}^P a_i X(k+M-i) + \\ & \sum_{i=1}^M d(k+M-i) + \sum_{i=1}^M b_i X^2(k+M-i) + \sum_{i=M+1}^P b_i X^2(k+M-i) \end{aligned} \quad 6.3$$

La idea esencial es representar los términos de  $\tilde{Y}(k+M)$  de manera matricial para lo cual separamos los términos del pasado, del futuro, lineales y cuadráticos [11] y [21].

$$G X = \sum_{i=1}^{M-1} a_i X(k+M-i) \quad \text{son los términos lineales del futuro} \quad 6.4$$

$$H X_- = \sum_{i=M+1}^P a_i X(k+M-i) \quad \text{son los términos lineales del pasado} \quad 6.5$$

$$d = [d(k+M-1) d(k+M-2) \dots \dots \dots d(k)] \quad \text{son los errores de predicción} \quad 6.6$$

$$G_2 X^2 = \sum_{i=1}^M b_i X^2(k+M-i) \quad \text{son los términos cuadráticos del futuro} \quad 6.7$$

$$H_2 X_-^2 = \sum_{i=M+1}^M b_i X^2(k+M-i) \quad \text{son los términos no lineales del pasado} \quad 6.8$$

Sintetizando las expresiones anteriores; tenemos la forma matricial de la salida predictiva del sistema:

$$[\tilde{Y}] = G[X] + [C] + G_2 X^2 \quad 6.9$$

$$[C] = [H][X_-] + [d] + H_2 X_-^2 \quad 6.10$$

Estas expresiones las hemos adaptado en su forma a las del trabajo de [5], en la que propone un controlador NMPC basado en el Modelo diagonal de Volterra.

Para una mejor descripción de los parámetros del sistema no lineal los detallamos a continuación:

- $\tilde{y}$  : Es la salida futura.
- $X$  : Es la entrada futura de la acción de control.
- $X_-$  : Representa los valores pasados de la acción de control.
- $G$  : Es la matriz que contiene los parámetros lineales para estimar los términos lineales del futuro.
- $H_-$  : Es la matriz que contiene los parámetros lineales para estimar los términos lineales pasados.

- $d$  : Es el vector que contiene la diferencia entre la salida de la planta y la salida del modelo, en un instante  $k$ .
- $G_2 X^2$  : Es el vector que contiene los términos de segundo orden futuro/futuro.
- $H_2 X_-^2$  : Es el vector que reúne los términos de segundo orden pasado/pasado.
- $N$  : Orden de truncamiento de la serie.
- $P$  : Horizonte de predicción.
- $M$  : Horizonte de control.

### 6.1.1. Matrices de la NDMC con Kernels Volterra-Laguerre

A continuación, detallamos la forma de las matrices del modelo NDMC:

#### a) *Matriz G.*

Esta matriz pertenece al espacio  $M_{PxM}$  y sus componentes corresponden a la respuesta de índole lineal.

$$G = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ a_M & a_{M-1} & \cdots & a_1 \\ a_{M+1} & a_M & \cdots & a_1 + a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_P & a_{P+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{P-M+1} a_i \end{bmatrix} \quad 6.11$$

La regla de formación para calcular los elementos de la última columna debe realizarse para cada entrada.

$$\sum_{i=1}^{P-M+1} a_i \quad 6.12$$

#### b) *Matriz H.*

Esta matriz que pertenece al espacio  $M_{PxN}$  tiene la siguiente forma:

##### b.1) *Caso de $P < N$*

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots & a_N & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_P & a_{P+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{P+1} & a_{P+2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad 6.13$$

b.2) Caso de  $N=P$

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_N & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_N & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1} & a_N & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_N & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 6.14$$

c) Construcción de los Vectores que contienen la salida del futuro y del pasado que operan con la señal a la segunda potencia,  $f=G_2 X^2$  y  $g=H_2 X^2$

c.1) Vector  $f$

El vector  $f \in M_{Px1}$  y contiene los términos cruzados futuro/futuro y futuro/pasado; y se determina usando el siguiente algoritmo [21].

$$f(k+1) = [X(k) \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times M} B [X(k) \ X(k-1) \ \dots \ X(k-M)]_{M \times 1}^T \quad 6.15$$

$$f(k+2) = [X(k+1) \ X(k) \ 0 \ \dots \ 0] B [X(k+1) \ X(k) \ \dots \ X(k-M+1)]^T \quad 6.16$$

$$f(k+3) = [X(k+2) \ X(k+1) \ X(k) \ \dots \ 0 \ 0] B [X(k+2) \ X(k+1) \ \dots \ X(k-M+2)] \quad 6.17$$

$$f(k+P) = [X(k+P) \ \dots \ X(k+P-M)] B [X(k+P) \ \dots \ X(k+P-M)]^T \quad 6.18$$

Los elementos  $b_{ij}$  de la matriz  $B \in M_{NxM}$  se hacen dependientes de la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre. Esto permite aplicar los criterios de ortogonalidad:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_i(k) \phi_j(k) \approx 0 \quad 6.19$$

Bajo tal condición la matriz  $B$  queda expresada por [23]:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1M} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{NM} \end{bmatrix} \quad 6.20$$

Aplicando el criterio de ortogonalidad obtenemos:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_{NM} \end{bmatrix} \quad 6.21$$

Con el criterio anterior podemos formular la expresión del vector  $f$ , como sigue:

$$f = G_2 \text{diag}(X).X \quad 6.22$$

Donde:

$$G_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ b_M & b_{M-1} & \cdots & b_1 \\ b_{M+1} & b_M & \cdots & b_1 + b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_P & b_{P+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{P-M+1} b_i \end{bmatrix} \quad 6.23$$

$$X = [X(k) \quad X(k+1) \quad X(k+2) \cdots X(k+M-1)] \quad 6.24$$

$$\text{diag}(X) = \begin{bmatrix} X(k) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(k+1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X(k+M-1) \end{bmatrix} \quad 6.25$$

### c.2) Evaluación del Vector $g = H_2 X_-^2$

El vector  $g \in$  al espacio  $M_{Px1}$  y contiene los kernels cruzados pasado/pasado, sus entradas se determinan usando el siguiente algoritmo.

$$g(k+1) = [0 \quad X(k-1) \cdots X(k-N-1)] B1_{NxN} [0 \quad X(k-1) \cdots X(k-N-1)]^T \quad 6.26$$

$$g(k+2) = [0 \quad 0 \quad X(k-1) \cdots X(k-N-2)] B1_{NxN} [0 \quad 0 \quad X(k-1) \cdots X(k-N-2)]^T \quad 6.27$$

$$g(k+P) = [0 \cdots 0 \quad X(k-1) \cdots X(k-N-P)]_{1 \times N} B1_{NxN} [0 \cdots 0 \quad X(k-1) \cdots X(k-N-P)]_{Nx1}^T \quad 6.28$$

La matriz  $B1$  se trata de modo similar a la matriz usada para el vector  $f$ . En este sentido aplicando el criterio de ortogonalidad es factible expresar el vector  $g$  mediante la siguiente ecuación:

$$g = H_2 \text{diag}(X_-).X_- \quad 6.29$$

Donde, para  $P < N$  la matriz  $H_2$  tiene la siguiente expresión:

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & \cdots & \cdots & a_N & 0 \\ b_3 & b_4 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_P & b_{P+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{P+1} & b_{P+2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad 6.30$$

Para el caso de  $P=N$  la matriz  $H_2$  es como sigue:

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & \cdots & b_N & 0 \\ b_3 & b_4 & \cdots & b_N & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N-1} & b_N & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 6.31$$

$$\text{diag}(X_-) = \begin{bmatrix} X(k-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(k-2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X(k-N) \end{bmatrix} \quad 6.32$$

$$X_- = [X(k-1) \quad X(k-2) \dots X(k-N)]^T \quad 6.33$$

## 6.1.2 Kernels Para un Sistema Modelado con Series de Volterra-Laguerre

### a) Obtención de los kernels de primer orden

En principio se debe precisar que se realiza el modelado de un sistema no lineal utilizando series de Volterra-Laguerre de segundo orden. En el que se considera que el truncamiento es  $N$ , dos bases ortogonales una  $OBF_1 = \{\phi_1(k), \phi_2(k), \phi_3(k)\}$  y una  $OBF_2 = \{\phi^2_1(k), \phi^2_2(k), \phi^2_3(k)\}$  sobre la que se proyectan los kernels de primer y segundo orden respectivamente. Con tales criterios y los fundamentos del Capítulo 4 podemos expresar la salida  $Y(k)$  debido a las entradas  $x(k)$ , trabajando solo con los kernels de primer orden, como se indica a continuación:

$$Y(1) = Y(0) + C_1 \phi_1(1) X(1) + C_2 \phi_2(1) X(1) + C_3 \phi_3(1) X(1) \quad 6.34$$

$$Y(2) = Y(1) + C_1 \phi_1(2) X(2) + C_2 \phi_2(2) X(2) + C_3 \phi_3(2) X(2) \quad 6.35$$

$$Y(k) = Y(k-1) + C_1 \phi_1(k) X(k) + C_2 \phi_2(k) X(k) + C_3 \phi_3(k) X(k) \quad 6.36$$

$$Y(k+1) = Y(k) + C_1 \phi_1(k+1) X(k+1) + C_2 \phi_2(k+1) X(k+1) + C_3 \phi_3(k+1) X(k+1) \quad 6.37$$

En general la salida en función de  $x(k)$  se expresa del modo siguiente:

$$Y(k) = Y(0) + \sum_{i=1}^N (C_1 \phi_1(i)X(k-i) + C_2 \phi_2(i)X(k-i) + C_3 \phi_3(i)X(k-i)) \quad 6.38$$

Utilizando la expresión anterior expresamos los kernels de Volterra-Laguerre de primer orden para la NDMC como sigue:

$$a_r = \sum_{i=1}^r (C_1 \phi_1(i) + C_2 \phi_2(i) + C_3 \phi_3(i)) \quad , \quad \forall r \in [1, N] \quad 6.39$$

### b) Obtención de los kernels de la serie Volterra-Laguerre de segundo orden

Similar al caso de kernels de primer orden se expresa la contribución de los Kernels de segundo orden cuando aplicamos  $X^2(k)$ , del modo siguiente:

$$Y(1) = Y(0) + C_{11} \phi_1^2(1) X^2(1) + C_{22} \phi_2^2(1) X^2(1) + C_{33} \phi_3^2(1) X^2(1) \quad 6.40$$

$$Y(2) = Y(1) + C_{11} \phi_1^2(2) X^2(2) + C_{22} \phi_2^2(2) X^2(2) + C_{33} \phi_3^2(2) X^2(2) \quad 6.41$$

$$Y(k) = Y(k-1) + C_{11} \phi_1^2(k) X^2(k) + C_{22} \phi_2^2(k) X^2(k) + C_{33} \phi_3^2(k) X^2(k) \quad 6.42$$

Finalmente la expresión de la salida como función de  $X^2(k)$  se escribe como sigue:

$$Y(k) = Y(0) + \sum_{i=1}^N (C_{11} \phi_1^2(i) + C_{22} \phi_2^2(i) + C_{33} \phi_3^2(i)) X^2(k-i) \quad 6.43$$

De la ecuación anterior deducimos que los kernels Volterra-Laguerre de segundo orden se expresan mediante la ecuación siguiente:

$$b_r = (C_{11} \phi_1^2(r) + C_{22} \phi_2^2(r) + C_{33} \phi_3^2(r)) \quad 6.44$$

## 6.2 Resumen del NMPC Usando el Algoritmo de la Matriz Dinámica No Lineal

Resumiendo los conceptos anteriores para el modelo Volterra-Laguerre la salida del sistema utilizando el modelo es representada por [11] y [23]:

$$Y = G X + C + f \quad 6.45$$

Donde las expresiones de sus componentes se detallan a continuación:

$$C = H X_- + d + g \quad / \quad C \in M_{Px1} \quad 6.46$$

$$f = G_2 \cdot \text{diag} \cdot (X) \cdot X \quad 6.47$$

$$g = H_2 \text{diag}(X_-) \cdot X_- \quad 6.48$$

$$d = [d(k) \quad d(k+1) \dots \dots \dots d(k+M-1)]^T \quad 6.49$$

$$X = [X(k) \quad X(k+1) \dots \dots \dots X(k+M-1)]^T \quad 6.50$$

$$X_- = [X(k-1) \quad X(k-2) \dots \dots \dots X(k-N)]^T \quad 6.51$$

Las matrices  $G_1, G_2, H_1, H_2$  y sus respectivos parámetros son obtenidos a partir de los kernels  $a_r$  y  $b_r$  del modelo Volterra-Laguerre.

### 6.3 Transformación del Modelo de La Ley De Control NMPC por Matriz Dinámica Basado en Acciones de Control Normalizada

Siendo necesario incluir los incrementos de la acción de control en la función de costo para obtener la ley de control; es conveniente transformar  $Y = f(X)$  a otra  $Y = f_1(\Delta X)$  para lo cual tenemos:

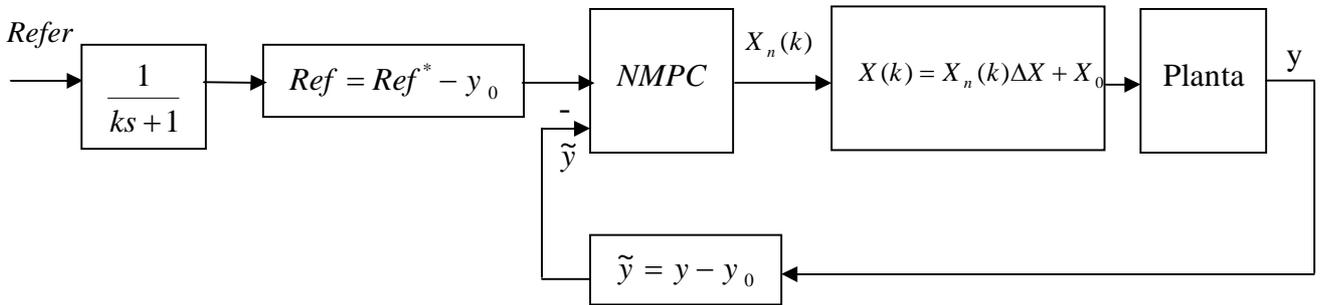
$$f(\Delta X(k+i)) = -Y(k+i) + Ref(k+i) \quad 6.52$$

$$Ref = Ref^* - y_0, \text{ donde } y_0 \text{ es el bias del sistema (temperatura inicial)} \quad 6.53$$

$$Ref^* = Refer(1 - e^{-(\beta t)}) , \text{ donde } Refer \text{ es la referencia para el sistema de control} \quad 6.54$$

$$X_n(k) = \frac{X(k) - X_0}{\Delta X} , \quad X_0 \text{ Es el valor medio de la señal de entrada.} \quad 6.55$$

Estas ecuaciones pueden representarse en el diagrama de la figura 6.1, como a continuación se indica:



**Figura 6.1 controlador NMPC basado en la matriz dinámica de control.**

Recordando la expresión para del vector  $X(k)$  se puede representar por:

$$X(k) = X(k-1) + \Delta X(k) \quad 6.56$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} X(k-1) + X(k) \\ X(k-1) + X(k) + X(k+1) \\ X(k-1) + \Delta X(k) + \Delta X(k+1) + \Delta X(k+2) \\ \vdots \\ X(k-1) + \Delta X(k) + \Delta X(k+1) + \Delta X(k+2) + \dots + \Delta X(k+M-1) \end{bmatrix} \quad 6.57$$

Utilizando los criterios de (6.56) y (6.57) reescribimos  $G X(k)$  del modo siguiente:

$$G X(k) = G_{P \times M} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M \times M} \begin{bmatrix} X(k-1) \\ X(k-1) \\ \vdots \\ X(k-1) \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X(k) \\ \Delta X(k+1) \\ \vdots \\ \Delta X(k+M+1) \end{bmatrix} \quad 6.58$$

Para simplificar llamaremos  $Li$  a la matriz de entradas cero excepto las  $a_{1j} = 1, L$  a la matriz triangular inferior y  $G^* = G.L$ , entonces la ecuación (6.58) se expresa del modo siguiente:

$$G.X(k) = G.Li.X(k-1) + G.L.\Delta X \quad 6.59$$

$$G.X(k) = G.Li.X(k-1) + G^*.\Delta X \quad 6.60$$

Por lo tanto, el modelo predictivo usando las ecuaciones (6.45) a (6.48) y (6.60) queda formulado mediante los siguientes ecuaciones.

$$Y = G X(k) + C + f \quad 6.61$$

$$Y = GL \Delta X + GLi X(k-1) + H X_{-} + d + g + f \quad 6.62$$

$$Y = G^* \Delta X + H X_{-} + G.Li.X(k-1) + d + g + f \quad 6.63$$

$$Y = G^* \Delta X + C^* + f \quad 6.64$$

Donde la matriz  $C^*$  se expresa como sigue:

$$C^* = H X_{-} + GLi X(k-1) + d + g \quad 6.65$$

## 6.4 Algoritmo de Control

El propósito de un controlador NDMC es hacer que la salida sea lo más próxima a un set point determinado o a la trayectoria de un proceso industrial cualquiera, para ello es necesario determinarlo desde una función de costo y luego minimizarla utilizando entre otros métodos el de mínimos cuadrados y de ser el caso se puede incluir un término de penalización sobre el manejo de la variable de entrada.

Al respecto la función de costo en el caso de control de trayectorias debe considerar el error entre la trayectoria y la referencia [22] así como los esfuerzos de la señal de control como a continuación se expresa:

$$J = \sum_{i=1}^P [\text{Ref}(k+i) - Y(k+i)]^2 + \sum_{j=1}^M \lambda [\Delta X(k+j-1)]^2 \quad 6.66$$

En la expresión anterior  $\lambda$  corresponde al coeficiente de ponderación de la acción de control. Luego sin considerar restricciones la solución que minimiza la función de costo  $J = e^T e + \lambda X^T X$ , en la que  $e$  representa al vector de errores futuros alrededor del horizonte de predicción y  $X$  es el vector compuesto de los incrementos  $\{\Delta X(k), \Delta X(k+1), \dots, \Delta X(k+m)\}$ ; se obtiene haciendo  $\frac{dJ}{dX} = 0$ .

Aplicando la condición anterior, el procedimiento para evaluar la solución que minimiza la función de costo y la salida de la planta  $Y(k+1)$ , tenemos:

$$Y(k+1) = G^* X + C^* + f; \quad 6.67$$

$$J = [G^* X + C^* + f - Ref]^2 + \lambda X^T X \quad 6.68$$

$$J = (G^* X + C^* + f - Ref)^T (G^* X + C^* + f - Ref) + \lambda X^T X \quad 6.69$$

$$\frac{dJ}{dX} = 0 = G^{*T} (G^* X + C^* + f - Ref) + \lambda X \quad 6.70$$

$$G^{*T} G^* X + G^{*T} (C^* + f - Ref) + \lambda X = 0 \quad 6.71$$

$$(G^{*T} G^* + \lambda I) X = G^{*T} (-C^* + Ref - f) \quad 6.72$$

Finalmente el vector solución de los incrementos futuros que minimiza la función de costo queda expresado por la relación que a continuación se detalla:

$$X = inv(G^{*T} G^* + \lambda I) \cdot G^{*T} (-C^* + Ref - f) \quad 6.73$$

Se deja constancia que en todas las estrategias predictivas solo el primer elemento del vector  $X = [\Delta X(k), \dots, \Delta X(k+M-1)]$  se envía a la planta, debido a que no es conveniente implementar la secuencia completa sobre el intervalo  $M$  ya que en el siguiente instante los otros componentes corresponden al pasado. Adicionalmente por que en algunos casos puede cambiar el “set-point” en todo el intervalo, como ocurre en los casos de seguimiento de trayectoria.

## 6.5 Algoritmo Para Evaluar la Acción de Control

Para la evaluación de la acción de control he usado parte de los criterios expuestos en [19] por cuanto considera el error  $\tilde{y}(k+i) - \tilde{r}(k+i)$  y la acción de control evaluada minimizando la función de costo; mediante el siguiente algoritmo [23]:

*Paso 1.* hacer:  $i = 1$  y  $\Delta X^i(k) = 0$  6.74

*Paso 2.* resolver sin usar restricciones las ecuaciones:

$$a = G^{*T} (r - C^* - f) \quad 6.75$$

$$X = inv(G^{*T} G^* + \lambda I) a \quad 6.76$$

Para la simulación he considerado las siguientes aproximaciones:

$$a \approx (Ref - y_f)$$

$$X \approx inv(G^{*T} G^* + \lambda I)(Ref - y_f)$$

*Paso 3.* evaluada la condición del paso 2 hacemos:

$$\left| X^i(k) - X^{i-1}(k) \right| \leq \Delta \quad 6.77$$

$\Delta$  es un factor de tolerancia prefijado

*Paso 4.* si se cumple la condición en 2, hacemos:

$$X(k) = X^i(k) \quad 6.78$$

La nueva acción de control en el tiempo k es:

$$X(k) = X(k-1) + \Delta X^i(k) \quad 6.79$$

Si no se cumple la condición, se recalcula  $f$  usando la expresión  $X^i(k)$ , tanto para los valores futuros lineales y de segundo orden de la entrada; haciendo la nueva iteración con  $i = i + 1$ ; luego se debe recalcular el vector  $X$  del paso 2 y así sucesivamente.

Para la acción de control, por lo menos, debe aplicarse las siguientes restricciones:

$$x(k) = \begin{cases} X \text{ min} & \text{si } X(k) < X \text{ min} \\ X \text{ max} & \text{si } X(k) > X \text{ max} \end{cases} \quad 6.80$$

Como planteamiento final, se puede afirmar que las restricciones dependen de las limitaciones aplicables a la señal de control, por ejemplo alcanzar o mantener un “set-point” y otras veces será el seguimiento de una trayectoria. Sin duda, en todos los casos lo mas crítico será evitar la saturación del actuador o actuadores, con el objetivo de garantizar un adecuado seguimiento de la trayectoria usada como consigna.

## CAPÍTULO 7

### CONTROL DE TEMPERATURA DE UN REACTOR QUÍMICO TIPO BATCH USANDO NMPC POR MATRIZ DINÁMICA Y SERIES VOLTERRA-LAGUERRE

En este capítulo se muestra la metodología para la formulación de un controlador NMPC usando un algoritmo similar a la NDMC y el modelo Volterra-Laguerre de segundo orden. El fundamento radica en los criterios formulados en el Capítulo 6. Finalmente se simulará el control de la trayectoria de temperatura en un reactor químico tipo batch, usado en la fabricación de resina melamínica en PISOPAK PERU SAC.

#### 7.1 Criterios Para el Diseño del Controlador

##### 7.1.1 Señal de Referencia

En un reactor químico tipo batch para fabricación de resina melamínica es importante la trayectoria de calentamiento y la temperatura máxima a la que debe llegar el reactor para asegurar una producción con características predeterminadas. Con tal motivo se debe enfatizar el control del proceso de calentamiento, es decir, mantener una trayectoria prefijada de la temperatura, desde el inicio del proceso hasta alcanzar el valor máximo de la misma.

De los ensayos a la planta, de las consultas a los ingenieros encargados de la producción y de las curvas de calentamiento del proceso, se concluye que una trayectoria adecuada corresponde a la función tangente hiperbólica, tal como se indica a continuación:

$$Ref(t) = G_a \tanh\left(\frac{t}{m} - \tau\right) \quad 7.1$$

Donde:

$m$  = factor de escalamiento para el tiempo del proceso.

$G_a = T_{MAX} - Y(0)$

$\tau$  = tiempo de retardo debido a la inercia térmica del reactor.

Para el caso del reactor bajo estudio:

$T_{MAX} = 88 \text{ }^\circ\text{C}$

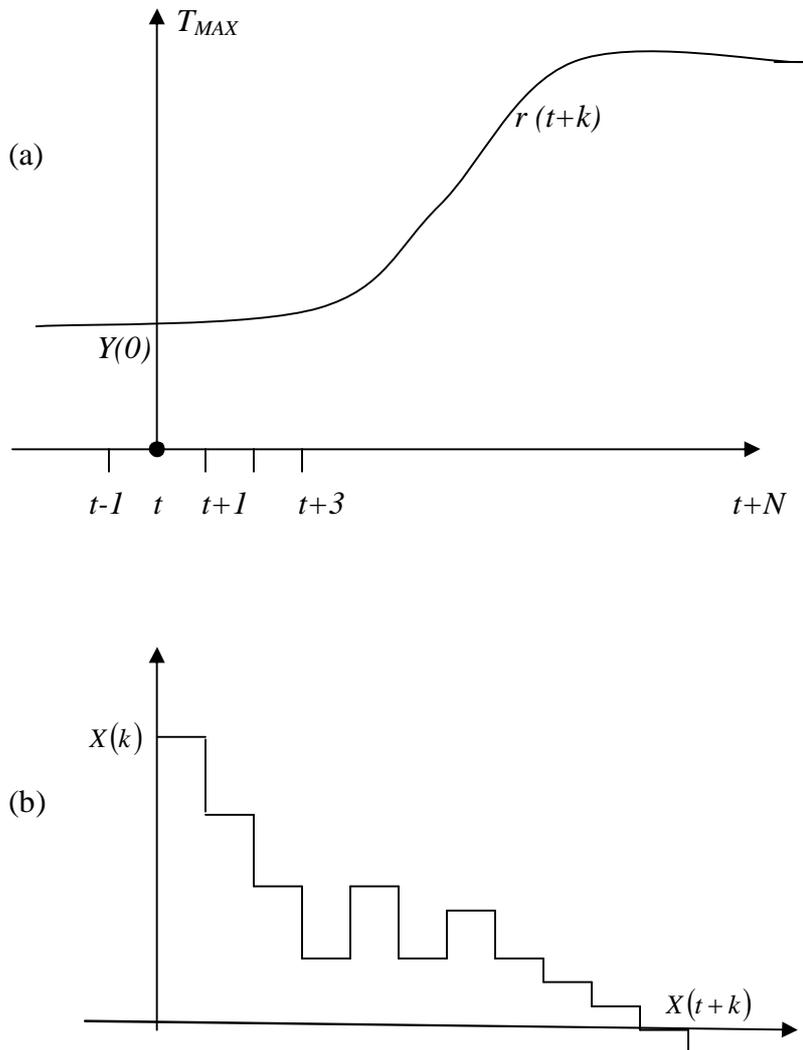
$Y(0) = 19 \text{ }^\circ\text{C}$  (temperatura de inicio del proceso)

Como observación, anotamos que la temperatura de inicio del proceso depende de la temperatura ambiente y la acción de los reactantes antes del inicio del proceso de calentamiento en el reactor.

##### 7.1.2 Condiciones Iniciales del Proceso

En la figura 7.1 se ilustra las condiciones iniciales del proceso, bajo las que el reactor se halla a temperatura constante y con la señal de control en cero. Por lo tanto el control NMPC que se propone es válido a partir del tiempo  $t$  y desde la temperatura

$Y(0)$  hasta alcanzar la temperatura  $T_{MAX} = 88\text{ }^{\circ}\text{C}$ , teniendo como premisa que la salida del sistema  $\tilde{y}(t+k)$  siga la trayectoria deseada  $r(t+k)$ .



**Figura 7.1 (a) Señal de referencia y salida predictiva y (b) Señal de control.**

### 7.1.3 Parámetros y función que representa al Sistema No Lineal

En este caso nos referimos a los parámetros de la función que representa al conjunto conversor V/I, transductor I/P, válvula neumática de tres vías y reactor químico. De modo explícito, son los coeficientes que ponderan los polinomios de la  $OFB$  y  $OFB_2$  sobre las que se han proyectado los kernels de primer y segundo orden del modelo Volterra-Laguerre, representado por  $\tilde{y}(k)$ . A detalle dichos parámetros son:

#### a) Base para un sistema de segundo orden

Para el caso en estudio la base está formada por los tres primeros polinomios generalizados de Laguerre, en su forma lineal y su forma cuadrática, es decir

la  $OBF$  y la  $OBF_2$ . La razón de usar dos bases, se debe al uso de términos de primer y de segundo orden de la señal aplicada al sistema, que requiere el modelo.

*a.1) Términos lineales*

$$af(k) = \phi_1(k) = F a^{k-1} \quad 7.2$$

$$bf(k) = \phi_2(k) = F ( (k-1) a^{k-2} - k a^{k-1} ) \quad 7.3$$

$$cf(k) = \phi_3(k) = F ( ( (k-1)(k-2)/2 ) a^{k-3} - k(k-1) a^{k-2} + (k(k-1)/2) a^{k-1} ) \quad 7.4$$

*a.2) Términos de segundo orden*

$$q(k) = \phi_1^2(k) \quad 7.5$$

$$r(k) = \phi_2^2(k) \quad 7.6$$

$$s(k) = \phi_3^2(k) \quad 7.7$$

*a.3) Otros parámetros*

$$F = \sqrt{(1-a^2)T} \quad 7.8$$

$a = 0.97875$  polo de Laguerre para el proceso

$T = 30$  segundos. (Periodo de muestreo)

**b) Coeficientes que ponderan las bases  $OBF$  y  $OBF_2$**

$$C_1 = 1.523383$$

$$C_2 = 0.7701975$$

$$C_3 = -0.577444$$

$$C_{11} = -0.6057283$$

$$C_{22} = 0.73741956$$

$$C_{33} = -0.4357992$$

**c) Kernels Volterra-Laguerre de primer orden:**

$$a_i(k) = C_1 af(k) + C_2 bf(k) + C_3 cf(k) \quad 7.9$$

**d) Kernels Volterra-Laguerre de segundo orden:**

$$b_i(k) = C_{11} q(k) + C_{22} r(k) + C_{33} s(k) \quad 7.10$$

e) **Modelo Volterra-Laguerre para el sistema no lineal**

Utilizando los datos del cuadro 5.1, para un modelo de segundo de orden, tenemos que el sistema identificado para el reactor corresponde a:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1.84996727 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1) X(k-m_1) + 0.7701975 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2) X(k-m_2) \\
 & - 0.546783 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3) X(k-m_3) \\
 & - 0.735657 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1) X^2(k-m_1) + 0.69826454 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2) X^2(k-m_2) \\
 & - 0.4126595 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3) X^2(k-m_3)
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

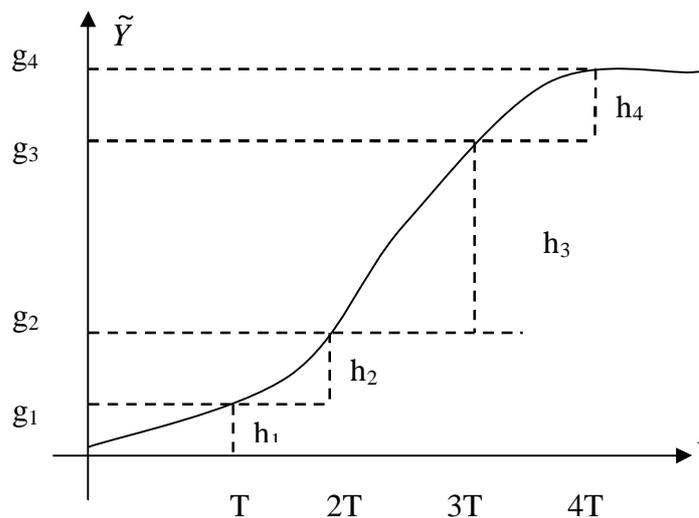
**7.1.4 Parámetros de la Matriz Dinámica No Lineal NDMC**

a) **Parámetros para la formación de la matriz:**

a.1) **Términos Lineales  $a_i$ :**

Para mayor ilustración supondremos que la respuesta del sistema queda expresada por términos lineales.

En la figura 7.2, los términos  $a_i$  pueden ser hallados en función de los kernels lineales  $h_i$  del modelo Volterra-Laguerre.



**Figura 7.2 respuesta de un sistema no lineal a una señal escalón.**

- $g_i$  son los coeficientes de la respuesta a la señal escalón.
- $h_i$  son los coeficientes de la respuesta a la señal impulso.
- $i \in \{1,2,\dots,87\}$

Para el caso de la señal escalón, usando series de Volterra-Laguerre los términos  $g_i$  quedan expresados por:

$$g_i = \sum_{r=0}^i (C_1 \phi_1(r) + C_2 \phi_2(r) + C_3 \phi_3(r)) \quad 7.14$$

a.2) *Términos no lineales*

Para el caso en estudio, se considera un sistema con kernels de segundo orden ( $gb_i$ ), compuesto por los cuadrados de los tres primeros polinomios de Laguerre, tal como lo detallamos a continuación:

$$gb_i = \sum_{r=0}^i (C_{11} \phi_1^2(r) + C_{22} \phi_2^2(r) + C_{33} \phi_3^2(r)) \quad 7.15$$

### 7.1.5 Modelo Predictivo Para el Sistema No Lineal

a) *Salida predictiva del sistema no lineal*

Utilizando como referencia la figura 7.2, el sistema no lineal que representa al reactor melamínico, sobre el que se pretende aplicar la técnica de control NMPC, se representa usando las series Volterra-Laguerre con kernels de grados uno y dos, de la siguiente manera:

$$\tilde{Y}(k+n) = \sum_{i=1}^N h_i X(k+n-i) + \sum_{i=1}^N h_{ii} X^2(k+n-i) \quad 7.16$$

La expresión anterior es válida para los sistemas de convolución tipo diagonal debido a que los términos cruzados son nulos por aplicación del criterio de ortogonalidad.

De otra parte, si consideramos una señal de entrada, tipo escalón la salida tiene la siguiente expresión:

$$\tilde{Y}(k+n) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta X(k+n-i) + \sum_{i=1}^N gb_i \Delta X^2(k+n-i) \quad 7.17$$

Debe recordarse que  $g_i$  son los coeficientes de los términos lineales y  $gb_i$  son los coeficientes para los términos cuadráticos de la serie.

b) *Representación predictiva del sistema no lineal*

Considerando que la propuesta de esta tesis para validar el controlador NMPC con algoritmo NDMC, para lo cual se propone que  $M = 15$  sea el horizonte de control y el horizonte de predicción sea  $N = P = 87$ . Para lo cual la respuesta predictiva del modelo se ilustra paso a paso con las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{Y}(k+1) = a_1 X(k) + \sum_{i=2}^N a_i X(k+1-i) + b_1 X^2(k) + \sum_{i=2}^N b_i X^2(k+1-i) \quad 7.18$$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(k+2) = & \sum_{i=1}^2 a_i X(k+2-i) + \sum_{i=3}^N a_i X(k+2-i) + \sum_{i=1}^2 b_i X^2(k+2-i) \\ & + \sum_{i=3}^N b_i X^2(k+2-i)\end{aligned}\quad 7.19$$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(k+M) = & \sum_{i=1}^M a_i X(k+M-i) + \sum_{i=M+1}^N a_i X(k+M-i) + \sum_{i=1}^M b_i X^2(k+M-i) \\ & + \sum_{i=M+1}^N b_i X^2(k+M-i)\end{aligned}\quad 7.20$$

Los términos  $a_i$  y  $b_i$  son obtenidos durante el proceso de identificación estudiado en los capítulos cuatro y cinco.

Finalmente planteamos de modo generalizado la salida predictiva del sistema  $\tilde{Y}(k+n)$ , la cual queda expresada por:

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(k+n) = & \sum_{i=1}^n a_i X(k+n-i) + \sum_{i=n+1}^N a_i X(k+n-i) + \sum_{i=1}^n b_i X^2(k+n-i) \\ & + \sum_{i=n+1}^N b_i X^2(k+n-i) \quad \text{si } n \leq M=15\end{aligned}\quad 7.21$$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(k+n) = & \sum_{i=n-M+1}^n a_i X(k+n-i) + \sum_{i=n+1}^N a_i X(k+n-i) + \sum_{i=n-M+1}^n b_i X^2(k+n-i) \\ & + \sum_{i=n-M+1}^N b_i X^2(k+n-i) \quad \text{si } M < n \leq N=87\end{aligned}\quad 7.22$$

### c) Representación predictiva del sistema no lineal de forma matricial

Para obtener la representación matricial de los términos  $\tilde{Y}(k+n)$  hasta  $\tilde{Y}(k+N)$  se usará las expresiones predictivas anteriores, lo cual de manera sintética se expresa del modo siguiente:

$$[\tilde{Y}] = [G][X] + [\tilde{Y}_1^0] + [G_2] \text{diag}[X] \cdot [X] + [\tilde{Y}_2^0], \quad 7.23$$

Donde la expresión para cada componente es como sigue:

➤ De la expresión  $\sum_{i=1}^M a_i X(k+M-i)$ , podemos obtener

$$[G][X] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_M & a_{M-1} & a_{M-2} & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & \sum_{i=1}^{\tilde{n}-M+1} a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ X(k+1) \\ X(k+2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X(k+M-1) \end{bmatrix} \quad 7.24$$

En este caso  $\tilde{n}$  es el numero de fila comprendido entre  $[M, N]$

➤ De la expresión  $\sum_{i=n+1}^N a_i X(k+n+i)$ , podemos obtener  $[\tilde{Y}_1^0]$

$$[\tilde{Y}_1^0] = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1^0(k+1) \\ \tilde{Y}_1^0(k+2) \\ \tilde{Y}_1^0(k+3) \\ \vdots \\ \tilde{Y}_1^0(k+N-1) \\ \tilde{Y}_1^0(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_{N-1} & a_N & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_N & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1} & a_N & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_N & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k-1) \\ X(k-2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X(k-N) \end{bmatrix} \quad 7.25$$

Sintéticamente tenemos:  $[\tilde{Y}_1^0] = [H][X_-]$  7.26

➤ De la expresión  $\sum_{i=1}^n b_i X^2(k+n-i)$ , podemos obtener:  $[G_2] \text{diag}(X) \cdot [X]$

$$[G_2] \text{diag}(X) \cdot [X] = f = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_M & b_{M-1} & b_{M-2} & \cdots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_N & b_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & \sum_{i=1}^{\tilde{n}-M+1} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^2(k) \\ X^2(k+1) \\ X^2(k+2) \\ \vdots \\ \vdots \\ X^2(k+M-1) \end{bmatrix} \quad 7.27$$

➤ Finalmente de la expresión  $\sum_{i=n+1}^N b_i X^2(k+n-i)$  tenemos  $[\tilde{Y}_2^0]$ :

$$[\tilde{Y}_2^0] = g = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_2^0(k+1) \\ \tilde{Y}_2^0(k+2) \\ \tilde{Y}_2^0(k+3) \\ \vdots \\ \tilde{Y}_2^0(k+N-1) \\ \tilde{Y}_2^0(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & b_{N-1} & b_N & 0 \\ b_3 & b_4 & \cdots & b_N & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N-1} & b_N & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_N & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{diag}(X_-)[X_-] \quad 7.28$$

$$X_- = [X(k-1) \quad X(k-2) \quad X(k-3) \quad \dots \quad X(k-N)]^T \quad 7.29$$

La representación sintética de  $[Y_2^0]$ , tiene la siguiente expresión:

$$[\tilde{Y}_2^0] = [H_2] \text{diag}(X_-) [X_-] \quad 7.30$$

Finalmente la expresión global de la salida predictiva del sistema no lineal usando el algoritmo para una NDMC, es como a continuación se indica:

$$[\tilde{Y}] = [G][X] + [G_2] \text{diag}[X][X] + [H][X_-] + [H_2] \text{diag}(X_-)[X_-] \quad 7.31$$

Agrupando los términos cuadráticos tenemos que la salida se representa por:

$$[\tilde{Y}] = [G][X] + f + [H][X_-] + g \quad 7.32$$

Los términos en  $X$  representan el futuro y los términos en  $X_-$  representan el pasado.

Si a la ecuación (7.32) le añadimos el vector de error tenemos la expresión final de la matriz dinámica no lineal del reactor.

$$[\tilde{Y}] = [G][X] + C + f \quad 7.33$$

Donde:

$$C = [H][X_-] + g + d \quad 7.34$$

Las consideraciones para el error son las expuestas en el trabajo de [22], en consecuencia el vector  $d$  es como sigue:

$$d = [d(k+1) \quad d(k+1) \quad \dots \quad d(k+1)]_{M \times 1}^T \quad 7.35$$

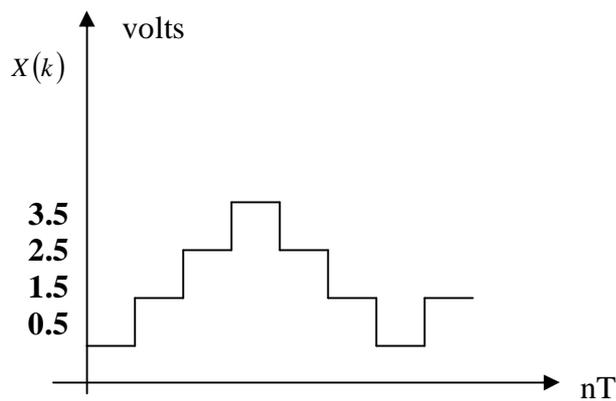
Es decir se opera bajo el concepto de error constante.

#### ***d) Normalización de la señal $X$ y la señal $\tilde{Y}$ para el reactor***

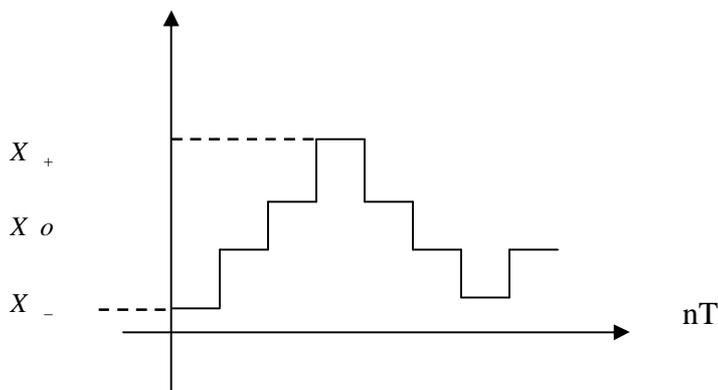
Los experimentos sobre el reactor se realizaron utilizando señales multinivel de 0.5, 1.5, 2.5 y de 3.5 voltios tal como se muestra en la figura 7.2. y de manera normalizada se grafican como en la figura 7.3.

Para efecto de normalización hemos tomado los siguientes considerandos:

$$X_n = \frac{X(k) - X_0}{\Delta X}, \text{ Tal que } X_n = \{-1, 0, 1\}, \text{ si } X_0 = 2v \text{ y } \Delta X = 1.5 \text{ voltios}$$



**Figura 7.2. Señal multinivel seudo aleatoria.**



**Figura 7.3 Señal multinivel seudo aleatoria normalizada**

Para el caso de la salida del reactor debo precisar que la temperatura de inicio del proceso es diferente de cero, motivo por el cual le añadimos dicho valor como  $Y(0)$

$$Y(k) = \tilde{Y}_r(k) + Y(0) \quad 7.36$$

En todos los experimentos del reactor se trabajó con las siguientes condiciones:

$$Y(0) \approx 19^\circ C.$$

$$Y(k) \text{ máximo} = 88^\circ C.$$

La razón de trabajar siempre con esos valores se debe a que hemos trabajado con material de producción.

Para la salida hemos restado la temperatura de bias como a continuación se expresa:

$$\tilde{Y}_r(k) = Y(k) - Y(0) \quad 7.37$$

## 7.2 Obtención de la Ley de Control NMPC

Conforme a los criterios expuestos en la ecuaciones (6.63) y (6.64) la respuesta predictiva del sistema no lineal queda expresada por:

$$Y = G^* \Delta X + C^* + f \quad 7.38$$

Donde:

$$C^* = HX_- + GLi X(k-1) + d + g \quad 7.39$$

La salida predictiva en función a la entrada normalizada  $X(n)$  se expresa del modo siguiente:

$$\tilde{Y}(X_n) = GL X_n + (GLi) X_- + H X_- + d + g + f \quad 7.40$$

Agrupando términos, tenemos:

$$\tilde{Y} = GL X_n + (H + GLi) X_- + d + g + f \quad 7.41$$

Haciendo:

$$GL = G^*,$$

tenemos

$$\tilde{Y}(X_n) = G^* X_n + (H + GLi) X_- + d + g \quad 7.42$$

$$H^* = H + GLi$$

Finalmente la expresión simplificada de la salida como función de  $X_n$  es la siguiente:

$$\tilde{Y}(X_n) = G^* X_n + C^* + f \quad 7.43$$

Siendo

$$C^* = H^* X_- + d + g \quad 7.44$$

Para formular la ecuación de costo para el sistema en estudio tendremos en consideración que esta debe depender de las dos variables más importantes del sistema de control, en primer lugar el error de predicción y en segundo lugar la señal de control normalizada ponderada por un factor  $\lambda$ . En tal sentido dicha función es como sigue:

$$J = \sum_i^N (\tilde{r}(k+i) - \tilde{Y}(k+i))^2 + \sum_{i=0}^{M-1} \lambda X_n^2(k+i) \quad 7.45$$

$$J = [\tilde{r} - \tilde{Y}]^T [\tilde{r} - \tilde{Y}] + \lambda X_n^T X_n$$

$$J = [G^* X_n + C^* + f - \tilde{r}]^T [G^* X_n + C^* + f - \tilde{r}] + \lambda X_n^T X_n$$

Donde:  $N = 87$  y  $M = 15$

Para evaluar la solución óptima derivamos  $J$  respecto de  $X_n$  e igualamos a cero su expresión:  $\frac{dJ}{dX_n} = 0$ , esta condición aplicando la ecuación (6.69) nos indica que el vector solución que minimiza la función de costo es:

$$[X_n] = \text{inv}(G^{*T} G^* + \lambda I) [G^*]^T [(\bar{r} - C^* - f)] \quad 7.46$$

La ecuación anterior corresponde a la ley del controlador NMPC basado en el algoritmo de la NDMC.

Advertimos que en todos los casos del modelo predictivo solo se usa la primera entrada del vector  $[X_n]$ , en razón a que en la segunda iteración los otros elementos se convierten en términos del pasado:  $x_n = X_n(1)$

Si recordamos la expresión de  $C^*$  tenemos:

$$C^* = H^* X_- + d + H_2 \text{diag}(X_-) X_- \quad 7.47$$

$$f = G_2 \text{diag}(X_-) X_- \quad 7.48$$

La salida libre del sistema  $\tilde{Y}_{free}(k)$ , puede representarse de modo aproximado por la siguiente ecuación:

$$\tilde{Y}_{free}(k) = H^* X_- + H_2 \text{diag}(X_-) X_- + d + f \quad 7.49$$

Donde:

$$\tilde{Y}_{free}(k), \text{ es la respuesta libre.}$$

La expresión de la ley del controlador NMPC  $[X_n]$ , despreciando el error  $d$  puede aproximarse mediante la ecuación siguiente:

$$[X_n] \approx \text{inv}(G^{*T} G^* + \lambda I) G^{*T} [\tilde{r} - \tilde{Y}_{free}] \quad 7.50$$

### 7.3 Resultados de la Simulación del Control NMPC Usando Series de Volterra-Laguerre y Matriz Dinámica de Control No Lineal

#### 7.3.1 Señal de Referencia Escalón:

##### a) Señal escalón para un tiempo de reacción de 48 minutos

Los resultados se muestran en las figuras 7.4 en las que se resalta la comparación de la señal de referencia con la respuesta predictiva y la señal de control respectiva.

Los parámetros para la simulación son:

$$Y_{bias} = 19^\circ \text{ C.}, \alpha = 0.01, \lambda = 0.94$$

$$G = 69, T_{max} = 88^\circ \text{ C.}$$

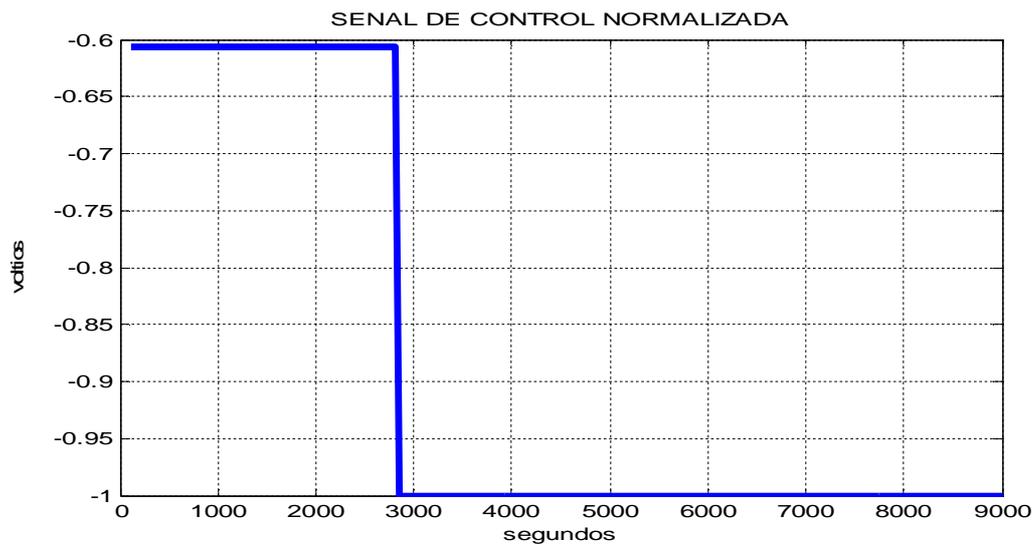
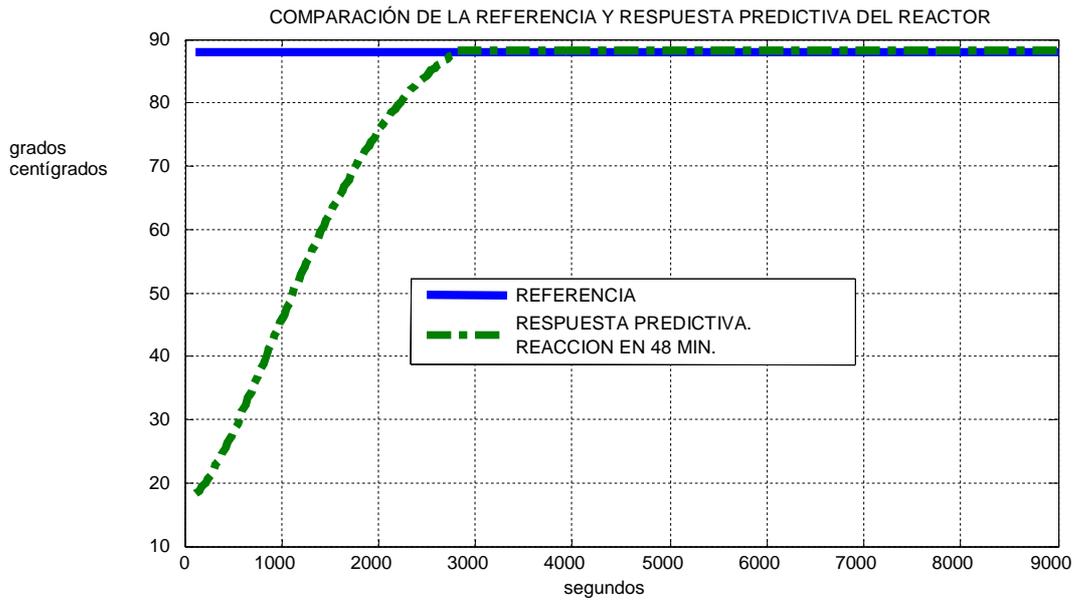
Para el logro de la trayectoria que permita una reacción de 48 minutos se aplicó la siguiente consideración para la señal normalizada:

Si  $X_n > -0.607$

Hacer  $X_n = -0.607$

Y si  $X_n < -0.644$

Hacer  $X_n = -0.644$



*Figura 7.4 Respuesta predictiva y señal de control – Reacción en 48 minutos*

**b) Señal escalón para un tiempo de reacción de 60 minutos**

Los resultados se muestran en las figuras 7.5 en las que se resalta la comparación de la señal de referencia con la respuesta predictiva y la señal de control respectiva.

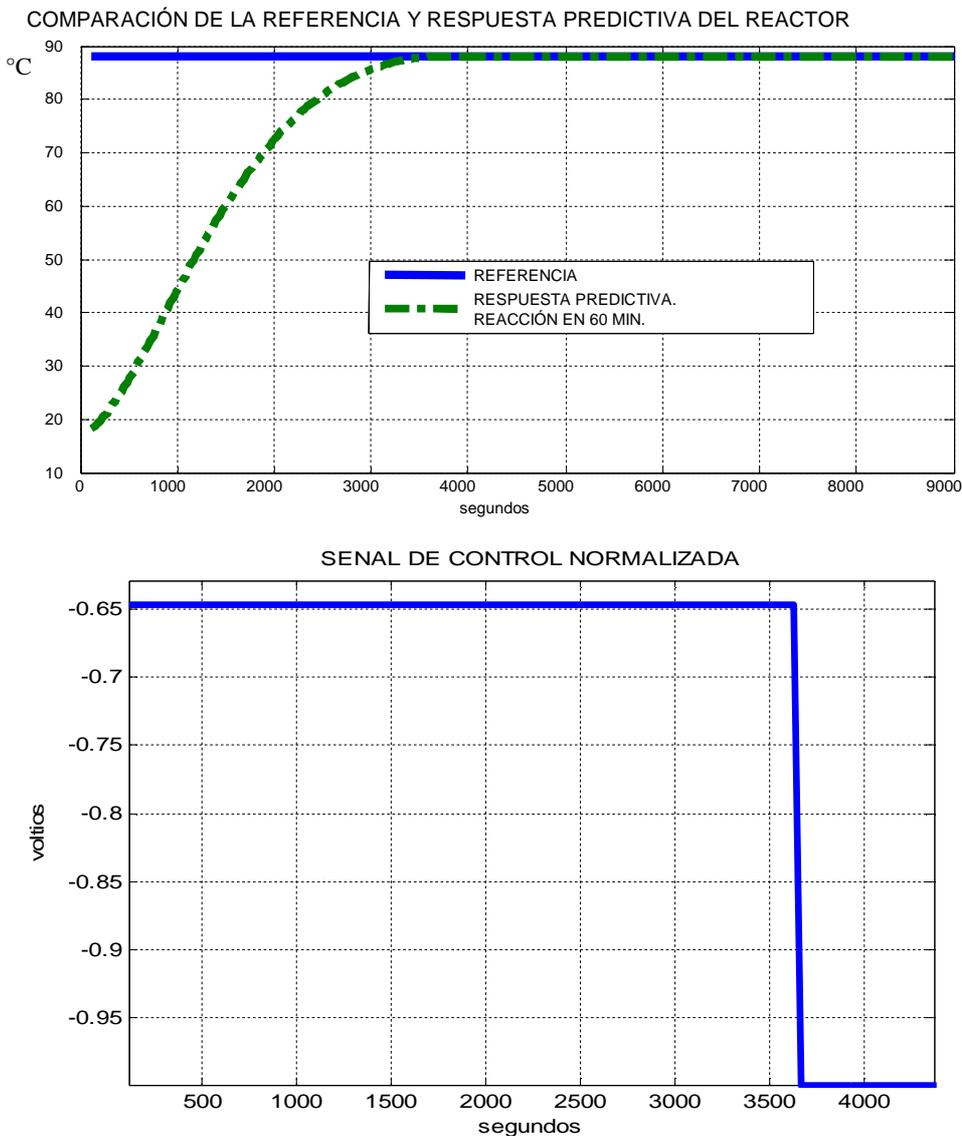
Los parámetros para la simulación son:

$$Y_{\text{bías}} = 19^\circ \text{C.}, \alpha = 0.01, \lambda = 0.94$$

$$G = 69, T_{\text{max}} = 88^\circ \text{C.}$$

Para el logro de la trayectoria que permita una reacción de 48 minutos se aplicó la siguiente consideración para la señal normalizada:

Si	$X_n > -0.647$ ,	Hacer	$X_n = -0.647$
Si	$X_n < -0.844$ ,	Hacer	$X_n = -0.844$



**Figura 7.5 Respuesta predictiva y señal de control - Reacción en 60 minutos**

### 7.3.2 Señal de Referencia Tangente Hiperbólica:

#### a) Señal para un tiempo de reacción de 48 minutos

Los resultados se muestran en las figura 7.6 en las que se resalta la comparación de la señal de referencia con la respuesta predictiva y la señal de control respectiva.

Los parámetros para la simulación son:

$$Y_{\text{bías}} = 19^\circ \text{C.}, \alpha = 0.01, \lambda = 0.94$$

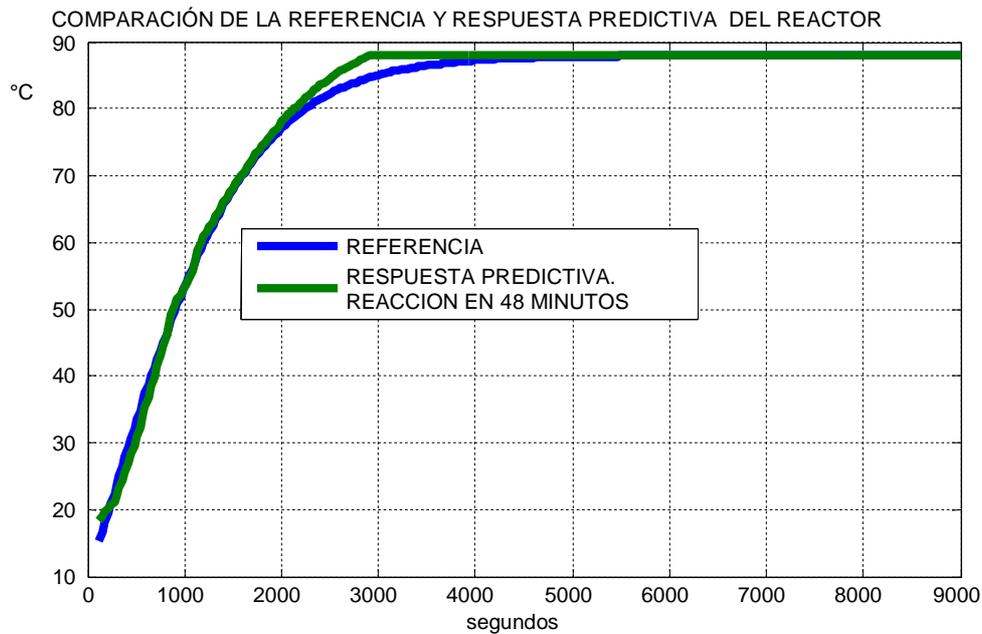
$$G = 69, T_{\text{max}} = 88^\circ \text{C.}, m = 49, \tau = 0.11455$$

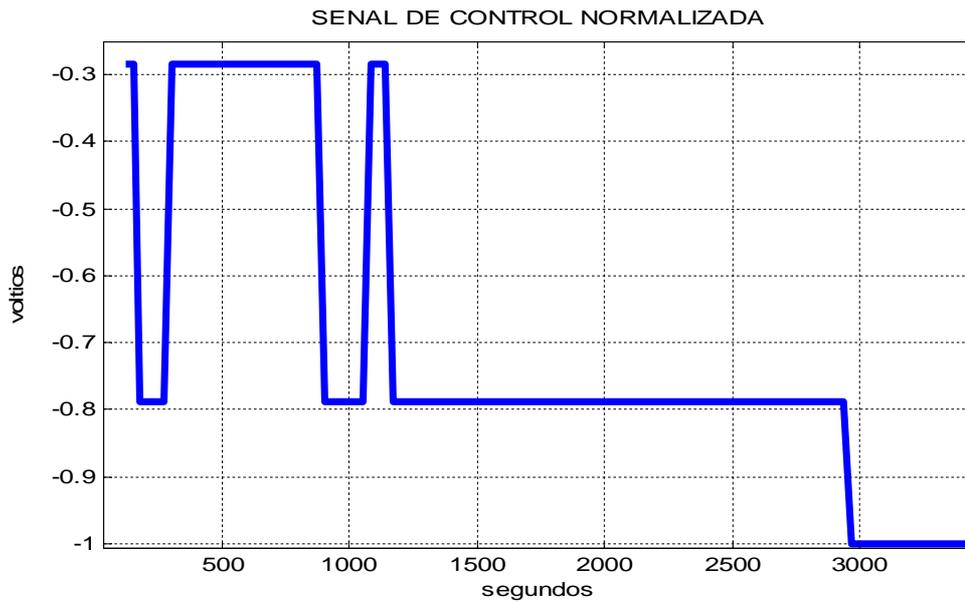
Para el logro de la trayectoria que permita una reacción de 48 minutos se aplicó la siguiente consideración:

$$\text{Si } X_n > -0.10, \quad \text{Hacer } X_n = -0.15$$

$$\text{Si } X_n < -0.285, \quad \text{Hacer } X_n = -0.285$$

$$\text{Si } \text{dif} = \tilde{y}_{\text{raster}} \text{ y } \text{dif} < -0.1, \quad \text{Hacer } X_n = 0.788$$





**Figura 7.6 Respuesta predictiva y señal de control - reacción en 48 minutos**

**b) Señal para un tiempo de reacción de 60 minutos**

Los resultados se muestran en las figuras 7.7 en las que se resalta la comparación de la señal de referencia con la respuesta predictiva y la señal de control respectiva.

Los parámetros para la simulación son:

$$Y_{\text{bias}} = 19^\circ \text{ C.}, \quad \alpha = 0.01, \quad \lambda = 0.94, \quad m = 48.8$$

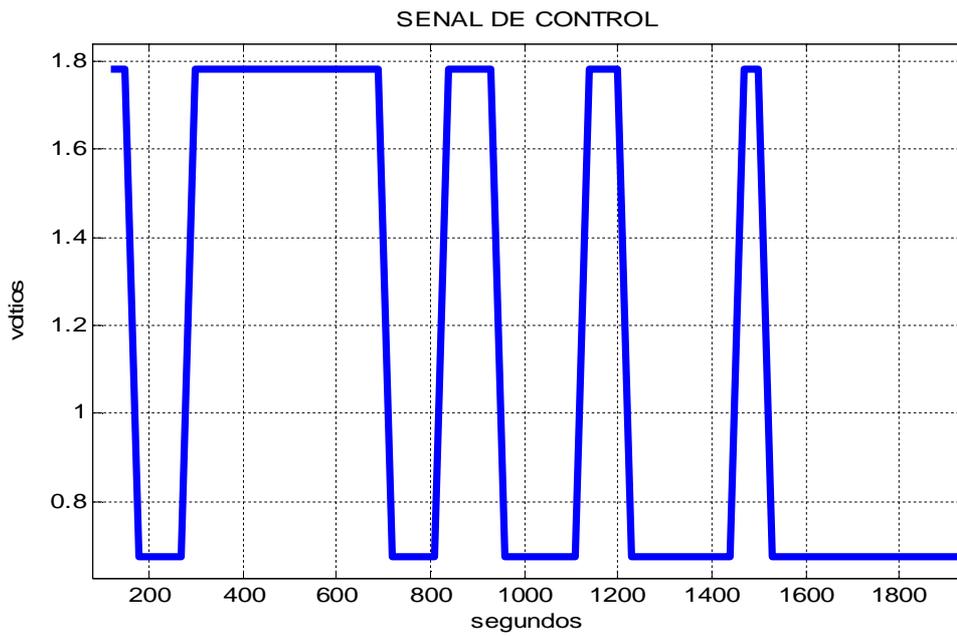
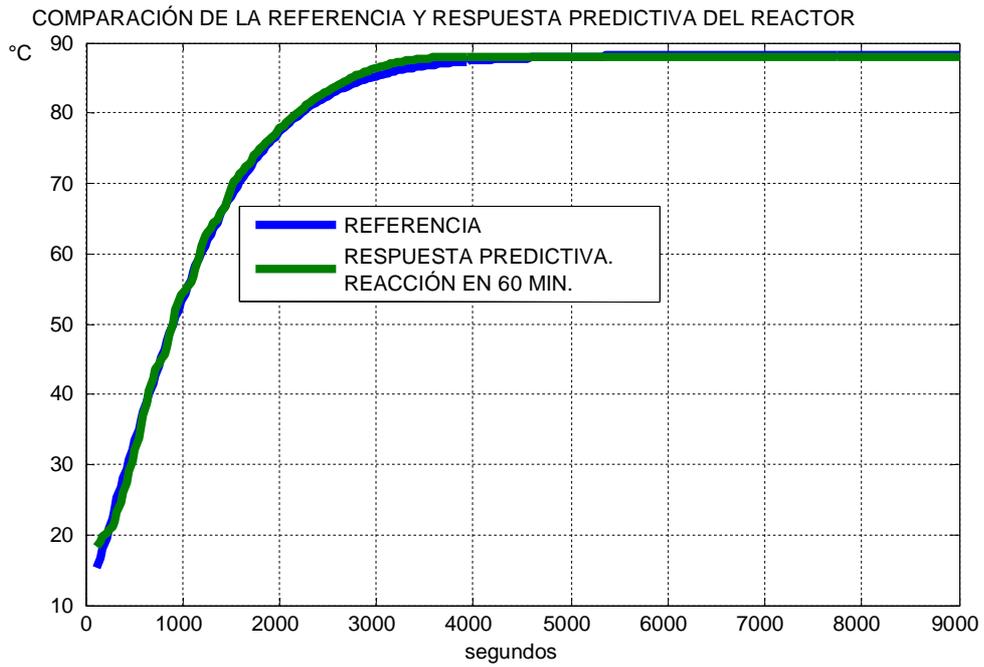
$$G = 69, \quad T_{\text{max}} = 88^\circ \text{ C} \quad \tau = 0.115$$

Para lograr la trayectoria que permita una reacción de 48 minutos, se aplicó la siguiente consideración para la señal de control normalizada:

**Si  $X_n > -0.15$  , Hacer  $X_n = -0.15$**

**Si  $X_n < -0.144$  , Hacer  $X_n = -0.144$**

**Si  $\text{dif} = \tilde{y}_{\text{raster}}$  y  $\text{dif} < -0.1$  , Hacer  $X_n = 0.833$**



**Figura 7.7** Respuesta predictiva y señal de control –  
Reacción en 60 minutos

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este trabajo en esencia está dirigido a la identificación de sistemas no lineales usando series de Volterra, con sus kernels proyectados sobre una base de polinomios ortogonales, y para la validación de los criterios propuestos se aplicó estos criterios para la obtención de modelos de un sistema industrial dedicado a la fabricación de resina melamínica.

Adicionalmente considero un aporte de este trabajo la propuesta y simulación de un sistema de control predictivo no lineal NMPC usando algoritmo similar a la matriz dinámica de control no lineal NDMC. La razón del uso de la NDMC se fundamenta en ser eficaz para seguir trayectorias y la consideración de que el modelo Volterra-Laguerre identificado tiene característica no lineal. Finalmente, lo principal de la contribución se detalla en los párrafos siguientes.

#### 8.1 Conclusiones

##### 8.1.1 De la Identificación del Sistema Usando Series Volterra-Laguerre:

- Los resultados obtenidos, confirman que la proyección de los kernels de Volterra sobre una base ortogonal de polinomios generalizados de Laguerre permite minimizar drásticamente el número de kernels del sistema Volterra truncado.
- Tres filtros o polinomios generalizados de Laguerre han permitido construir modelos de primer, segundo y tercer orden de buen comportamiento en todo el rango de operación del sistema usado en la validación, es decir, en el tiempo requerido para la fabricación de los batch de resina melamínica en el reactor R01 de Pisopak Perú SAC.
- La aplicación del criterio de solución de la matriz de coeficientes del modelo; para el caso donde la matriz de entrada L no es cuadrada; corresponde al método de solución de mínimos cuadrados. Dada su importancia y eficacia la anoto a continuación:

$$\begin{aligned} [Y(k)]_{P \times 1} &= [L]_{P \times t} [C]_{t \times 1} \\ [L]^T [Y(k)] &= [L]^T [L] [C] \\ [C] &= INV([L]^T [L]) (L)^T [Y(k)] \end{aligned}$$

Donde:  $P$  corresponde al número de lecturas de la salida del sistema involucrado y  $t$  el número de coeficientes del modelo materia de la identificación.

- Los modelos obtenidos corresponden a un sistema Volterra truncado; con kernels proyectados sobre una base de polinomios ortogonales y su validación en la identificación del sistema del reactor R01 confirma que la citada proyección permite eliminar kernels cruzados de segundo y tercer orden, por aplicación de los criterios de ortogonalidad de los polinomios.
- La señal multinivel diseñada con cuatro niveles, permitió identificar los tres modelos Volterra-Laguerre, con lo cual resulta evidente que se cumplió el principio de permanente excitabilidad. Esto es posible por la magnitud del nivel y el tiempo de duración para lograr que la salida sea suficientemente discriminada del ruido y de los errores de medición.
- Los modelos Volterra-Laguerre son factibles de usar en sistema a lazo cerrado, para el diseño del controlador.

### **8.1.2 Del Control NMPC Usando Matriz Dinámica de Control No Lineal:**

- Los resultados de la simulación del NMPC basado en el algoritmo de la matriz dinámica de control no lineal dan un serio indicio de su potencialidad para realizar seguimiento de trayectoria en sistemas no lineales, como el caso del reactor R01.
- El uso del modelo Volterra-Laguerre aplicado a un sistema no lineal, para la construcción de las matrices de términos lineales y términos no lineales es trascendental, tanto por ser la herramienta clave para conocer las entradas de las matrices como por la sencillez para determinarlos en base al modelo matemático obtenido en el proceso de identificación.
- Un sistema NMPC basado en algoritmo NDMC aplicado a un sistema no lineal identificado mediante series Volterra-Laguerre tiene por característica que los términos cruzado del pasado/futuro y viceversa son nulos. Esto es factible por la ortogonalidad de los polinomios usados como OBF.
- El periodo de muestreo para el NMPC, utilizado en todos los casos de la simulación, es el correspondiente al modelo Volterra-Laguerre que se usa para caracterizar al sistema no lineal.
- La agresividad del controlador es regulada por el factor de ponderación  $\lambda$  y por las restricciones al vector de entrada. En el caso de la simulación para el seguimiento de trayectoria se aplicó el criterio de hacer mínima la diferencia entre la referencia y la salida del sistema.

## **8.2 Recomendaciones Para Trabajos Futuros**

### **8.2.1. Sobre Identificación de Sistemas No Lineales**

- La aplicación de los polinomios ortogonales abre un campo prometedor en la identificación de sistemas no lineales de uso industrial, en razón de lo cual resulta conveniente investigar el uso de bases de polinomios ortogonales (Hermite y Chebishev por ejemplo) para modelar sistemas no lineales.

- La propuesta de Volterra como un sistema de convolución múltiple en sistemas continuos, puede ser una alternativa de identificación truncando el nivel de convolución, es decir utilizando integrales múltiples de grado prefijado.
- Para la identificación de coeficientes se propone usar la técnica de descomposición en valores singulares SVD y de otra parte la teoría de principales componentes.
- El presente trabajo ha sido desarrollado como un sistema SISO, con un número de coeficientes reducido, comparado con un sistema Volterra clásico; esto hace factible extender el algoritmo de identificación a sistemas MIMO.

### **8.2.2 Sobre el Control NMPC Usando Matriz Dinámica de Control No Lineal**

- Usar los modelos Volterra-Laguerre con mayor número de polinomios de Laguerre y plantear un controlador basado en DMC, implicaría usar kernels de primer orden en la representación de un sistema no lineal, con la ventaja que la DMC tiene característica lineal. Sin duda lo que se pretende es que la no linealidad esté representada por los polinomios.

# **ANEXOS**

## ANEXO 1

**%PROGRAMA PARA IDENTIFICAR SISTEMAS NO LINEALES**  
**%VOLTERRA-LAGUERRE.**  
**%PROGRAMA PARA MODELOS DE SEGUNDO ORDEN**  
**%IDENTIFICACION DEL MODELO DE UN REACTOR TIPO BATCH.**

```
format long
a=0.986375 %POLO DE LAGUERRE.
T=20; % PERIODO DE MUESTREO

%YOUT(0)=19°C temperatura al inicio del proceso.

F=sqrt((1-a^2)*T);

% Señal multinivel.

XIN=[0.20;0.4;0.5;1.5;1.5;1.5;2.5;2.5;2.5;3.5;3.5;3.5;2.5;2.5;2.5;1.5;
...
1.5;1.5;0.5;0.5;0.5;1.5;1.5;1.5;2.5;2.5;2.5;3.5;3.5;3.5;2.5;...
2.5;2.5;1.5;1.5;1.5;0.5;0.5;0.5;1.5;1.5;1.5;2.5;2.5;2.5;3.5;...
3.5;3.5;2.5;2.5;2.5;1.5;1.5;1.5;0.5;0.5;0.5;1.5;1.5;1.5;2.5;...
2.5;2.5;3.5;3.5;3.5;2.5;2.5;2.5;1.5;1.5;1.5;0.5;0.5;0.5;1.5;...
1.5;1.5;2.5;2.5;2.5;3.5;3.5;3.5;2.5;2.5;2.5;1.5;1.5;1.5;0.5;...
0.5;0.5;1.5;1.5;1.5;2.5;2.5;2.5;3.5;3.5;3.5;2.5;2.5;2.5;1.5;...
1.5;1.5;0.5;0.5;0.5;1.5;1.5;1.5;2.5;2.5;2.5;3.5;3.5;3.5;2.5;...
2.5;2.5;1.5;1.5;1.5;0.5;0.5;0.5;1.5];

%Respuesta del reactor a la señal multinivel.

YOUT=[-0.05;-0.1;0.1;-0.15;-0.18;-
0.12;0;0.1;0.2;0.4;0.7;1;1.3;1.8;2.3;...
2.7;3.2;3.7;4.2;4.7;5.15;5.65;6;6.5;6.9;7.3;7.7;8.2;8.7;9.1;9.6;10.05;
...
10.5;11;11.45;11.9;12.35;12.8;13.2;13.6;14;14.4;14.8;15.2;15.6;16;16.4
;...
16.8;17.3;17.65;18.1;18.65;19.05;19.45;19.95;20.3;20.7;21.2;21.6;22;22
.4;...
22.8;23.2;23.7;24.2;24.6;25.1;25.6;26.1;26.7;27.2;27.7;28.2;28.8;29.3;
...
29.7;30.2;30.9;31.45;32;32.6;33.2;33.85;34.6;35.3;36.1;36.85;37.7;38.5
5;...
39.5;40.35;41.25;42.2;43.2;44;45.2;46.3;47.35;48.4;49.5;50.5;51.5;52.4
;...
53.3;54.2;54.9;55.6;56.2;56.75;57.2;57.6;58.1;58.45;58.8;59.15;59.45;
...
59.85;60.30;60.70;61.0;61.35;61.7;62.10;62.45;62.85;63.2;63.65;63.95;6
4.25;65.35];

% Primeros polinomios generalizados de Laguerre.

k=1:130;

% polinomio grado uno al cuadrado
q=(F*a.^(k-1)).^2;
% polinomio grado dos al cuadrado
```

```

    r=(F*((k-1).*a.^(k-2)-k.*a.^(k-1)).^2;
    % polinomio grado tres al cuadrado
    s=(F*((k-1).*(k-2)/2.*(a.^(k-3))-k.*(k-1).*(a.^(k-
1))+k.*(k+1)/2.*(a.^(k+1)))).^2;
    % polinomio grado uno
    af=F*a.^(k-1);
    % polinomio grado dos
    bf=F*((k-1).*a.^(k-2)-k.*a.^(k-1));
    % polinomio grado tres
    cf=F*(((k-1).*(k-2)/2.*(a.^(k-3))-k.*(k-1).*(a.^(k-
1))+k.*(k+1)/2.*(a.^(k+1))));

    figure
    plot(k,af,'b',k,bf,'r',k,cf,'g')
    title('POLINOMIOS DE LAGUERRE GRADO UNO, DOS Y TRES')
    xlabel('TIEMPO DISCRETO')
    grid
    figure
    plot(k,q,'b',k,r,'r',k,s,'g')
    title('CUADRADO DE POLINOMIOS DE LAGUERRE GRADO UNO, DOS Y TRES')
    xlabel('TIEMPO DISCRETO')
    grid
    % RESPUESTA DE LOS FILTROS VOLTERRA-LAGUERRE
    for k=1:1:129;
    AL(1)=(af(1))*XIN(1);
    AL(k+1)=AL(k)+(af(k+1))*XIN(k+1);
    BL(1)=(bf(1))*XIN(1);
    BL(k+1)=BL(k)+(bf(k+1))*XIN(k+1);
    CL(1)=(cf(1))*XIN(1);
    CL(k+1)=CL(k)+(cf(k+1))*XIN(k+1);
    QL(1)=(q(1))*XIN(1)^2;
    QL(k+1)=QL(k)+(q(k+1))*XIN(k+1)^2;
    RL(1)=(r(1))*XIN(1)^2;
    RL(k+1)=RL(k)+(r(k+1))*XIN(k+1)^2;
    SL(1)=(s(1))*XIN(1)^2;
    SL(k+1)=SL(k)+(s(k+1))*XIN(k+1)^2;
    ALL=[AL; BL; CL; QL; RL; SL]';
    end
    x= size(ALL)

%Evaluación de la matriz de coeficientes.
m=129;
Ck=zeros(m,6);
for i=6:m
    Ck(i,:)=inv(ALL(1:i,:))*ALL(1:i,:)*ALL(1:i,:)*YOUT(1:i);
end

% MATRIZ DE COEFICIENTES INDIVIDUALES A LO LARGO DE K.

w=1:1:95;
CS=Ck(1:95,1);

w2=1:1:95;
CS2=Ck(1:95,1);

w3=1:1:95;
CS3=Ck(1:95,3);

figure

```

```

plot(w+5,CS,w2,CS2,w3+5,CS3)
title('COEFICIENTES Cj GRADO DOS T=20 SEG.')
    xlabel('tiempo discreto')
    grid
w4=1:1:95;
CS4=Ck(1:95,4);

w5=1:1:95;
CS5=Ck(1:95,5);

w6=1:1:95;
CS6=Ck(1:95,6);
figure
plot(w4+5,CS4,w5+5,CS5,w6+5,CS6)
title('COEFICIENTES Cjj GRADO DOS T=20 SEG.')
xlabel('tiempo discreto')
grid

z=1:130;
b=1:130;
[z1]=z;

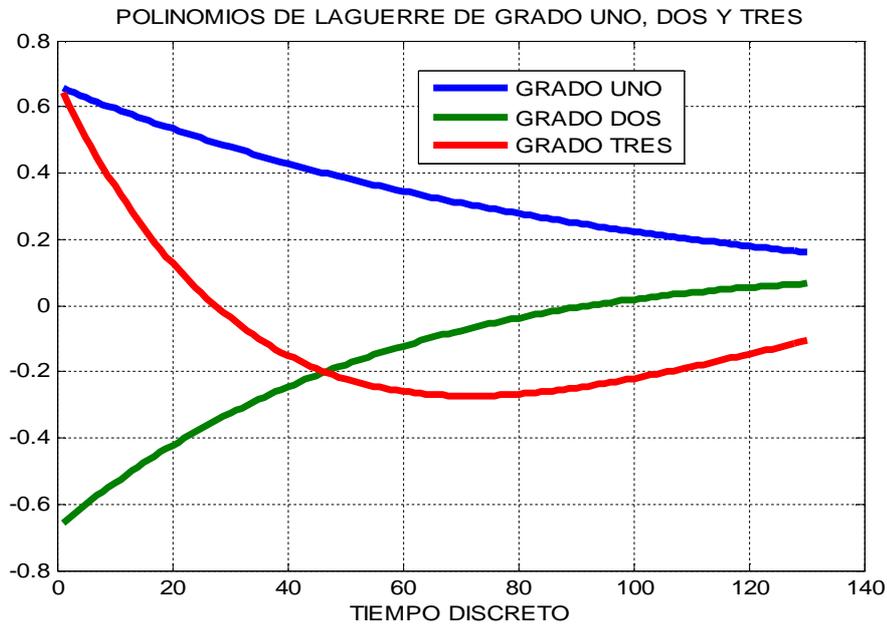
%COMPARACION ENTRE LA RESPUESTA DEL REACTOR Y EL MODELO VOLTERRA-
LAGUERRE
ki=109;
kf=129;
n=1:1:m;
for i=ki:kf
YES=1*ALL*Ck(i,:);
plot(20*b,YOUT'+19,20*z,YES+19);
title('RESPUESTAS DEL REACTOR Y DEL MODELO VOLTERRA LAGUERRE ')
legend('Yreal','Yestimado')
xlabel('tiempo en segundos')
ylabel('grados centígrados')
grid
hold on
end
figure

% ERROR DE IDENTIFICACIÓN

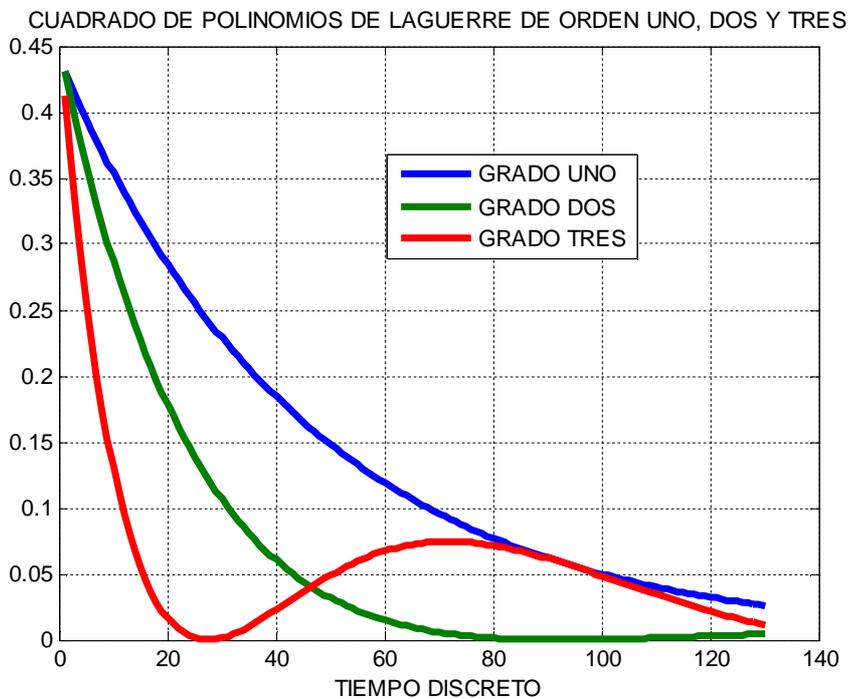
Er=100*(YOUT-YES)./YOUT;
plot(20*z,Er);
title('ERROR RELATIVO')
xlabel('tiempo en segundos')
ylabel('%')
axis([0 2800 -20 20]);
grid.

```

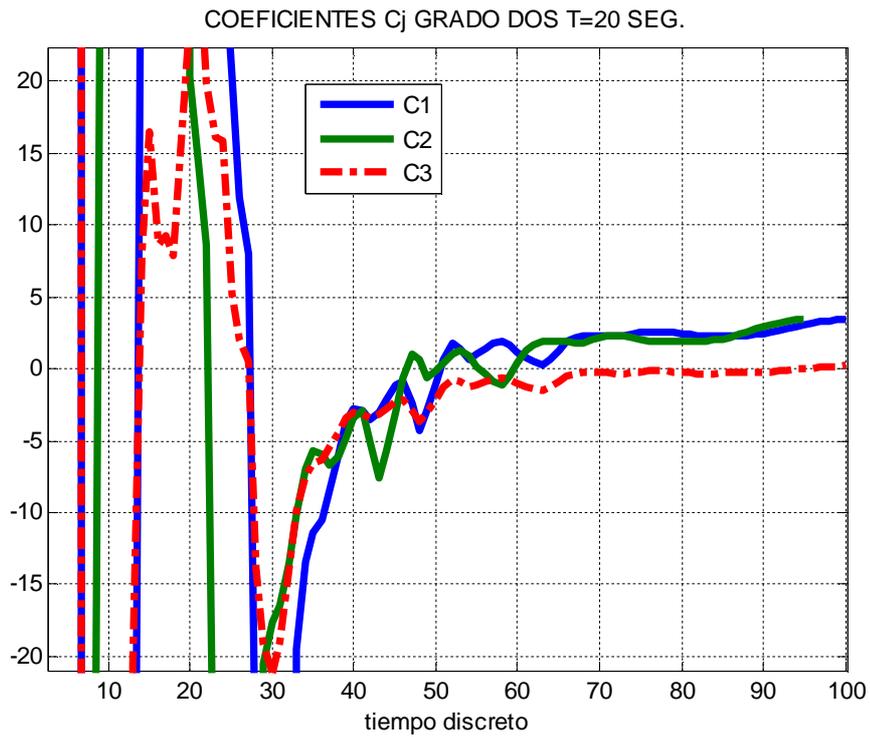
**PRINCIPALES GRÁFICOS DEL PROCESO DE IDENTIFICACIÓN  
SISTEMA VOLTERRA-LAGUERRE DE SEGUNDO ORDEN**



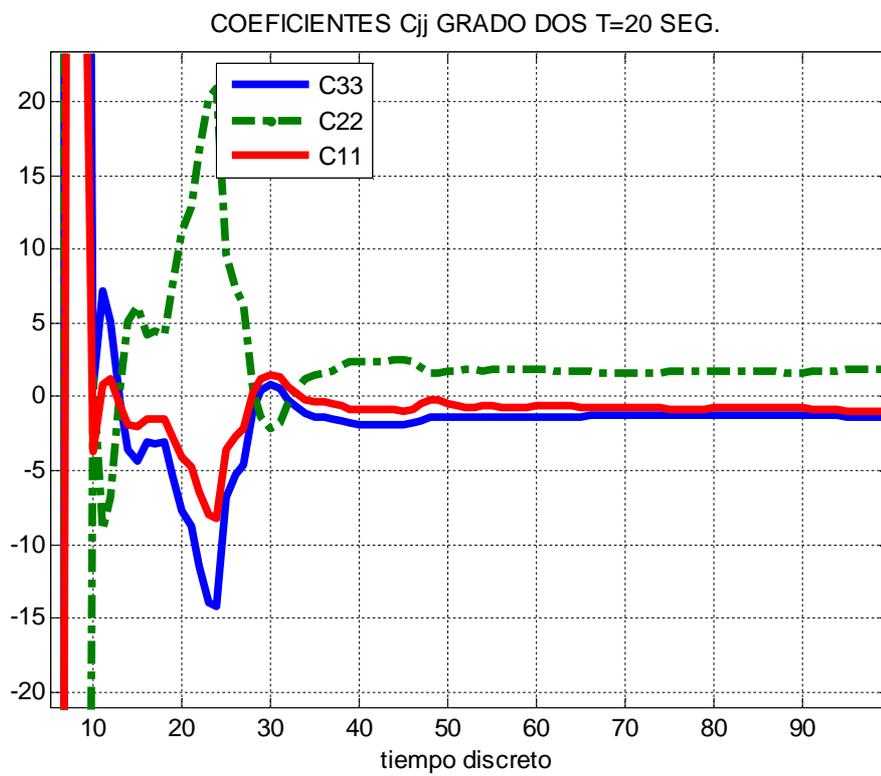
*Figura A1.1, gráfico de los polinomios de Laguerre grado uno, dos y tres*



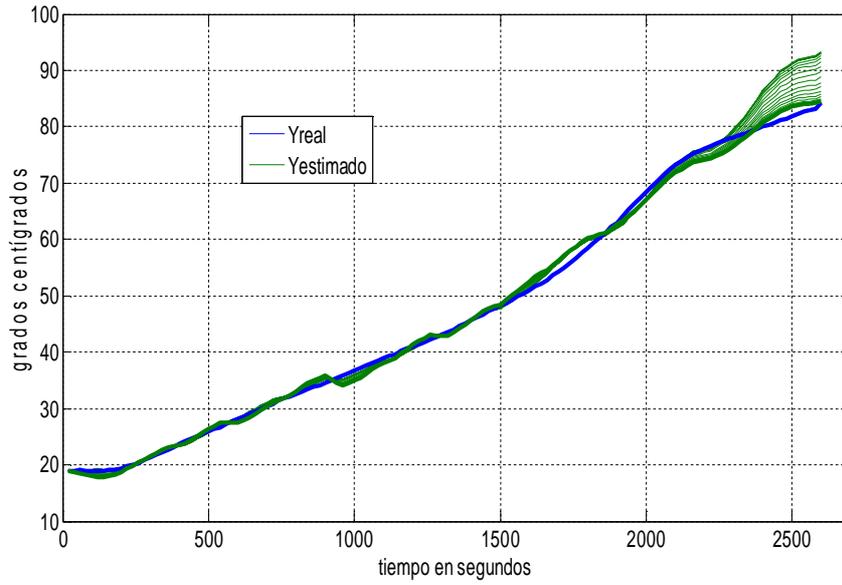
*Figura A1.2, gráfico deL cuadrado de polinomios de Laguerre grado uno, dos y tres*



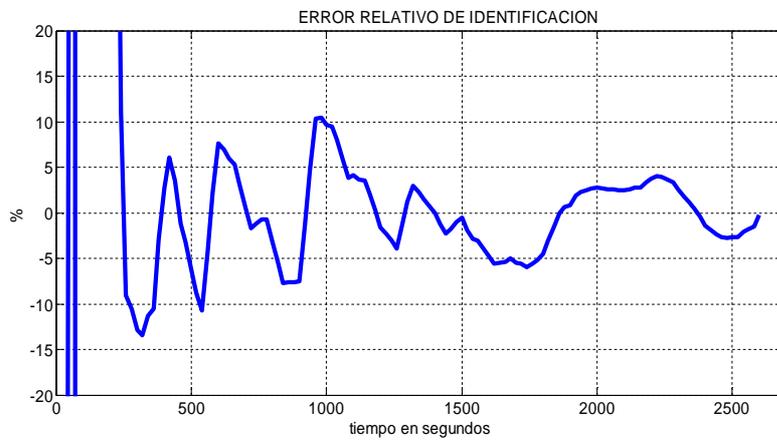
*Figura A1.3, Gráfico de los coeficientes lineales para el sistema Volterra Laguerre*



*Figura A1.4, gráfico de los coeficientes de grado dos para el sistema Volterra Laguerre*



**Figura A1.5, gráfico de comparación de la respuesta del Reactor y el modelo Volterra-Laguerre para 20 vectores solución**



**Figura A1.6, gráfico del error de identificación**

## ANEXO 2

### **%PROGRAMA EN MATLAB PARA EL CONTROL PREDICTIVO NO %LINEAL DEL SEGUIMIENTO DE LA TRAYECTORIA DE TEMPERATURA %DE UN REACTOR QUÍMICO TIPO BATCH USADO EN LA PRODUCCIÓN %DE RESINA MELAMÍNICA.**

```
%NMPC BASADO EN MODELO VOLTERRA LAGUERRE Y ALGORITMO NDMC.
%EVALUACION DE LAS MATRICES PARA FORMULAR LA NDMC
close all
clear all
format long
a=0.97875;% POLO DE LAGUERRE
T=30;%PERIODO DE MUESTREO
F=sqrt((1-a^2)*T);

k=1:2000;

    % CUADRADO DEL POLINOMIO UNO DE LAGUERRE
    q=(F*a.^(k-1)).^2;
    % CUADRADO DEL POLINOMIO DOS DE LAGUERRE
    r=(F*((k-1).*a.^(k-2)-k.*a.^(k-1))).^2;
    % CUADRADO DEL POLINOMIO TRES DE LAGUERRE
    s=(F*((k-1).*(k-2)/2.*(a.^(k-3))-k.*(k-1).*(a.^(k-1))...
        +k.*(k+1)/2.*(a.^(k+1)))).^2;
    % POLINOMIO UNO DE LAGUERRE
    af=F*a.^(k-1);
    % POLINOMIO DOS DE LAGUERRE
    bf=F*((k-1).*a.^(k-2)-k.*a.^(k-1));
    % POLINOMIO TRES DE LAGUERRE
    cf=F*((k-1).*(k-2)/2.*(a.^(k-3))-k.*(k-1).*(a.^(k-1))...
        +(k.*(k+1)/2).*a.^(k+1));
    % COEFICIENTES DE LOS POLINOMIOS DEL MODELO
    C1=1.52338316447687;
    C2=0.7701975997131;
    C3=-0.57744407747;
    C11=-0.60572833969049;
    C22=0.73741956398;
    C33=-0.4357992931148;
    %GENERACION DE KERNELS.
for k=2:2000;
    A(1)=C1*af(1)+C2*bf(1)+C3*cf(1);
    AS(1)=A(1);
    A(k)=C1*af(k)+C2*bf(k)+C3*cf(k);% KERNELS DE VOLTERRA DE PRIMER
ORDEN.
    AS(k)=AS(k-1)+C1*af(k)+C2*bf(k)+C3*cf(k);
end

for k=2:2000;
    B(1)=C11*q(1)+C22*r(1)+C33*s(1);
    BS(1)=B(1);
    B(k)=C11*q(k)+C22*r(k)+C33*s(k);%KERNELS DE SEGUNDO ORDEN.
    BS(k)=BS(k-1)+C11*q(k)+C22*r(k)+C33*s(k);
end

k=1:2000;
```

```

plot(k,B)
xlabel('memoria');
ylabel('unidades')
title('KERNELS DE SEGUNDO ORDEN')
figure
plot(k,A)
xlabel('memoria');
ylabel('unidades')
title('KERNELS DE PRIMER ORDEN')
x=A(1)+A(2)+A(3);
y=B(3);

%MATRIZ G
gg=[A(1:1:87)];
N=size(gg,2);

hh=zeros(N,N);

for i=1:N;
    for j=1:N-i+1;
        hh(i,j)=gg(89-j-i);
    end
end
GP=rot90(hh);
m=73;
f=N-m;
g=GP(:,1:1:f);
gp=[zeros(1,14) AS(1:1:73)]';
G=cat(2,g,gp);%MATRIZ G
x=size(G);

%MATRIZ H.
AH=[A(1:1:87)];
n=size(AH,2);
HH=zeros(n,n);
for i=1:n;
    for j=1:n-i;
        HH(i,j)=AH(j+i);
    end
end
H=HH;% MATRIZ H.

%GENERACION DE LA MATRIZ G2
gg2=[B(1:1:87)];
N=size(gg2,2);
hh2=zeros(N,N);

for i=1:N;
    for j=1:N-i+1;
        hh2(i,j)=gg2(89-j-i);
    end
end
GP2=rot90(hh2);
m=73;
f=N-m;
g2=GP2(:,1:1:f);
gp2=[zeros(1,14) BS(1:1:73)]';
G2=cat(2,g2,gp2);%MATRIZ G2

%EVALUANDO LA MATRIZ H2

```

```

BH=[B(1:1:87)];
n=size(BH,2);
HH2=zeros(n,n);
for i=1:n;
    for j=1:n-i;
        HH2(i,j)=BH(j+i);
    end
end
H2=HH2;% MATRIZ H2.

%MATRIZ L
L=tril(ones(15,15));
ULi=ones(1,15);
ZLi=zeros(86,15);

%MATRIZ Li
Lit=cat(1,ULi,ZLi);
Li=Lit';
x3=size(Li);
Gaster=G*L;%Gaster=G*
x4=size(Gaster);
Haster=H+G*Li;%Haster=H*
x5=size(Haster);

%LISTO PARA EL ALGORITMO DE LA NDMC.
%HORIZONTES DE PREDICCIÓN.
N=87; %orden de truncamiento
N2=87; %horizonte de prediccion N2=P.
M=15;% horizonte de control M=Nu.
G=69.25;
frec=0.002;

%CONDICIONES INICIALES.
ybias=19;
for k=1:4;
    yf(k)=-0.9;y(k)=-0.9;raster(k)=0;un(k)=0;u(k)=0;
end
alf=0.01;lambda=0.94;MM=300;du(1)=0;
I=eye(15,15);%matriz identidad.

%LAZO DE CONTROL.
for t=3:MM+3;
    %TRAYECTORIA DESEADA, REFERENCIA raster Y RESPUESTA LIBRE yf.
    for k=1:N2;
        m=48.8;
        tau=0.115;
        r(t+k)=G*tanh(t/m-tau);
        raster(t+k)=alf*raster(t+k-1)+(1-alf)*r(t+k);
        yf(t+k)=yf(t+k-1)+A(k+t)*u(t)+B(k+t)*(u(t)^2-u(t-1)^2);
    end

    %MATRIZ R DE SEÑALES DE REFERENCIA r
    R=[raster(1:1:87)]';
    %MATRIZ DE RESPUESTA LIBRE yf.
    YF=[yf(1:1:87)]';
    %LEY DE CONTROL.
    %Determinacion del vector de control normalizado
    U=inv(Gaster'*Gaster+lambda*I)*Gaster'*(R-YF);
    xu=size(U);
    du=U(1);

```

```

un(t+1)=un(t)+du;
if (un(t+1)>0.15)
    un(t+1)=0.15;
elseif(un(t+1)<-0.144);
    un(t+1)=-0.144;
end

%PROCESO.
dif=-raster(t-1)+y(t-1)
if (dif>0.10)
    un(t+1)=-0.883;
end

if (y(t-1)+19>88)
    y(t)=y(t-1);un(t)=-1.0;
end

%desnormalizacion de la señal de control
uo=2;dU=1.5;
u(t+1)=un(t+1)*dU+uo;
y(t+1)=y(t)+A(t+1)*u(t+1)+B(t+1)*(u(t+1)^2-u(t)^2);
end

%GRAFICOS
ejex=(4:MM);ejex=ejex*T;
figure
plot(ejex,raster(4:MM)+ybias)
xlabel('segundos');
ylabel('grados centigrados')
title('REFERENCIA DESPUES DEL FILTRO')
grid
figure
plot(ejex,yf(4:MM)+ybias)
xlabel('segundos');
ylabel('grados centigrados')
title('RESPUESTA LIBRE')
grid
figure
plot(ejex,y(4:MM)+ybias)
xlabel('segundos');
ylabel('grados centigrados')
title('RESPUESTA PREDICTIVA DEL REACTOR')

grid
figure
plot(ejex, r(4:MM)+ybias, ejex, y(4:MM)+ybias)
xlabel('segundos');
ylabel('grados centigrados')
title('COMPARACION DE LA REFERENCIA Y RESPUESTA PREDICTIVA DEL
REACTOR')

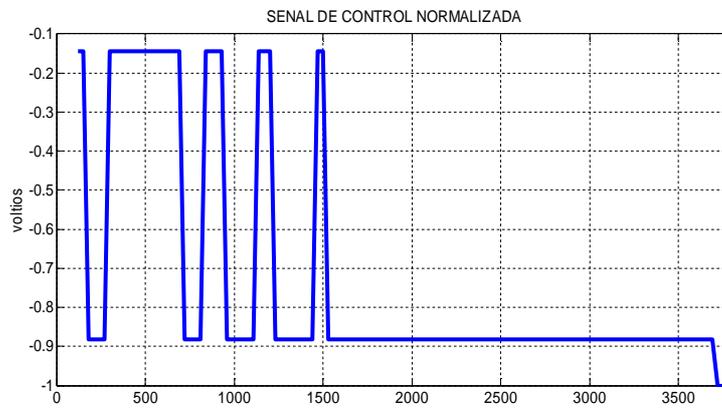
grid
figure
plot(ejex, u(4:MM))
xlabel('segundos');
ylabel('voltios')
title('SEÑAL DE CONTROL')
grid
figure
plot(ejex, un(4:MM))

```

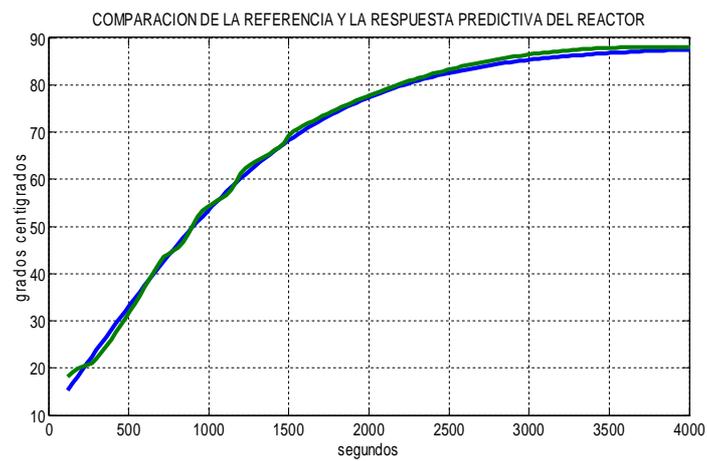
```

xlabel('segundos');
ylabel('voltios')
title('SEÑAL DE CONTROL NORMALIZADA')
grid

```



**Figura A1.7, gráfico de la señal normalizada**



**Figura A1.8, gráfico comparativo entre la referencia y el modelo del NMPC propuesto.**

ANEXO 3

MODELOS VOLTERRA LAGUERRE

(USANDO SERIES DE VOLTERRA TRUNCADA Y USO DE OBF CON TRES POLINOMIOS DE LAGUERRE)

Orden del modelo	T en segundo	polo	$y(k)$		
			Aportes de primer orden	Aportes de segundo orden	Aportes de tercer orden
1	20	0.981	$1.09501926 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1)X(k-m_1) +$ $1.2135088 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2)X(k-m_2) +$ $0.308076 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3)X(k-m_3)$		
	30	0.974655	$1.29282271 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1)X(k-m_1) +$ $1.406684322 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2)X(k-m_2) +$ $0.2814746342 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3)X(k-m_3)$		

2	20	0.978875 5	$1.275057 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1)X(k-m_1) +$ $0.993469 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2)X(k-m_2) +$ $0.9957 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3)X(k-m_3)$	$0.549276 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1)X^2(k-m_1)$ $-0.3301529 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2)X^2(k-m_2)$ $-0.269177 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3)X^2(k-m_3)$	
	30	0.97875	$1.523383 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1)X(k-m_1) +$ $0.7701975 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2)X(k-m_2) +$ $-0.57744407 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3)X(k-m_3)$	$-0.60572833 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1)X^2(k-m_1)$ $+0.7374195639 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2)X^2(k-m_2)$ $-0.43579929 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3)X^2(k-m_3)$	
3	20	0.97979	$2.832719 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1)X(k-m_1) +$ $0.4415744 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2)X(k-m_2) +$ $0.94859106 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3)X(k-m_3)$	$-2.825599 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1)X^2(k-m_1)$ $+0.003743 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2)X^2(k-m_2)$ $-0.5460 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3)X^2(k-m_3)$	$1.056415 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^3(m_1)X^3(k-m_1)$ $+0.567397 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^3(m_2)X^3(k-m_2)$ $-0.9141478 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^3(m_3)X^3(k-m_3)$
	30	0.978921 7	$1.5411289752 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(m_1)X(k-m_1) +$ $0.6745468866 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(m_2)X(k-m_2) +$ $-1.09299905529 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(m_3)X(k-m_3)$	$-0.35086631791 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1)X^2(k-m_1)$ $-0.00058010235 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2)X^2(k-m_2)$ $-0.53655064104 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3)X^2(k-m_3)$	$-0.103159780888 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^3(m_1)X^3(k-m_1)$ $-0.278693854406 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^3(m_2)X^3(k-m_2)$ $+0.486656478327 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^3(m_3)X^3(k-m_3)$

ANEXO 4

MODELOS VOLTERRA LAGUERRE

SERIES DE VOLTERRA TRUNCADA Y USO DE BASE ORTOGORMAL CON TRES POLINOMIOS DE LAGUERRE

$$\text{DIFERENCIAL } \Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$$

Orden del modelo	T en segundo	polo	$y(k)$		
			Aportes de primer orden	Aportes de segundo orden	Aportes de tercer orden
1	20	0.981	$1.09501926 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(k+1)X(k+1) +$ $1.2135088 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(k+1)X(k+1) +$ $0.308076 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(k+1)X(k+1)$		
	30	0.974655	$1.29282271 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(k+1)X(k+1) +$ $1.4668432 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(k+1)X(k+1) +$ $0.2814746342 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(k+1)X(k+1)$		

2	20	0.9788755	$1.275057 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(k+1)X(k+1) +$ $0.993469 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(k+1)X(k+1) +$ $0.9957 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(k+1)X(k+1)$	$0.549276 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(k+1)X^2(k+1)$ $- 0.3301529 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(k+1)X^2(k+1)$ $- 0.269177 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(k+1)X^2(k+1)$	
	30	0.97875	$1.523383 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(k+1)X(k+1) +$ $0.7701975 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(k+1)X(k+1) +$ $- 0.57744407 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(k+1)X(k+1)$	$- 0.60572833 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(k+1)X^2(k+1)$ $+ 0.7374195639 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(k+1)X^2(k+1)$ $- 0.43579929 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(k+1)X^2(k+1)$	
3	20	0.97979	$2.832719 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(k+1)X(k+1) +$ $0.4415744 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(k+1)X(k+1) +$ $+ 0.94859106 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(k+1)X(k+1)$	$- 2.825599 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(k+1)X^2(k+1)$ $+ 0.003743 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(k+1)X^2(k+1)$ $- 0.5460 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(k+1)X^2(k+1)$	$1.056415 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^3(k+1)X^3(k+1)$ $+ 0.567397 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^3(k+1)X^3(k+1)$ $- 0.9141478 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^3(k+1)X^3(k+1)$
	30	0.9789217	$1.5411289752 \sum_{m_1=1}^N \phi_1(k+1)X(k+1) +$ $0.6745468866 \sum_{m_2=1}^N \phi_2(k+1)X(k+1) +$ $- 1.09299905529 \sum_{m_3=1}^N \phi_3(k+1)X(k+1)$	$- 0.35086631791 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^2(m_1)X^2(k-m_1)$ $+ 0.00058010235 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^2(m_2)X^2(k-m_2)$ $- 0.53655064104 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^2(m_3)X^2(k-m_3)$	$- 0.103159780888 \sum_{m_1=1}^N \phi_1^3(m_1)X^3(k-m_1)$ $- 0.278693854406 \sum_{m_2=1}^N \phi_2^3(m_2)X^3(k-m_2)$ $+ 0.486656478327 \sum_{m_3=1}^N \phi_3^3(m_3)X^3(k-m_3)$

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adaptive Volterra-Laguerre Modeling for NMPC, Allahyar Montazeri et al, IEEE Signal Processing and its Application, 2007 ISSPA, 9<sup>th</sup> International Symposium on.
- [2] Nonlinear System Identification for Control Using Volterra-Laguerre Expansion, Qinsheng Zheng and Evangelhos Zafiriou Proceedings of the American Control Conference Seattle , Washinton, June 1995.
- [3] Random and Pseudorandom Inputs for Volterra Filter Identification, Robert D. Nowak and Barry D. Van Veen, IEEE Transactions On Signal Processing, vol 42 N. 8 August 1994.
- [4] MPC Control Using AR-Volterra Models, P.Taraba and S. Kozak, Department of Automatic Control, Faculty of Electrical Engineering and Information Technology, Slovak University of Technology in Bratislava.
- [5] A NEW SOLUTION TO VOLTERRA SERIES ESTIMATION, Tony J. Dodd and Robert F. Harrison, 15<sup>th</sup> Triennial World Congress, Barcelona Spain.
- [6] Principles of Mathematical Analysis, Walter Rudin, Third Edition MacGraw Hill, Inc.
- [7] A survey on the Weierstrass Approximation Theorem, Dilcia Perez, Divulgaciones Matemáticas Vol.16 N° 1(2008),pp231-247.
- [8] Analytical Foundations of Volterra Series, Stephen Boyd et al, IMA Journal of Mathematical Control & Information (1984) 1,243-282.
- [9] RF Power Amplifier Behavioral Modeling Using Volterra Expansion with Laguerre Functions, Anding Zhu and Thomas J. Brazil, Microwave Symposium Digest, 2005 IEEE MTT-S International.
- [10] Nonlinear System Identification Using Discrete Laguerre Functions, Andrew D. Back and Ah Chung Tsoi, Journal of Systems Engineering, Vol. 6,N° 6. 1996.
- [11] Control Predictivo no lineal basado en modelos de Volterra. Aplicación a una planta piloto. Jorn K. Gruber y Carlos Bordon. Revista Iberoamericana de automática e Informática Industrial (RIAI) Vol.4,Num.3, Julio 2007,pp 34-45.
- [12] Otra Demostración de la Desigualdad de Cauchy-Schwartz, Javier Martin Lalanda, Ediciones Universidad de Salamanca,1987.
- [13] Nonlinear Predictive Control of an Industrial Slurry Recator, C. H. Fontes and M.J. Mendes, Revista Controle Automacao/ Vol.19 N°4/Octubre, Noviembre, Diciembre 2008.
- [14] Fault Sensitivity of Explicit DMC and GPC Algorithms, Piotr Gawkowski et al, Journal of automation Mobile Robotics & Intelligent Systems, Volume 3, N° 1, 2009.
- [15] Fully and Partially Interpolated adaptive Volterra Filters, Eduardo L. O. Batista et al, European Signal Processing Conference 2005.

- [16] System Identification Using Laguerre Models, Bo Wahlberg, Automatic Control, IEEE transaction on, Vol. 36, 1991.
- [17] Adaptive Laguerre-Volterra Filters Optimization Based on Laguerre Spectra, Alain Y. Kibangou et al, Eurasip journal on applied Signal Processing 2005: pp17,2874-2887.
- [18] Fading Memory and the problems of approximating nonlinear operators with Volterra series, Stephen Boyd and Leon O. Chua, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-32, N°11, November 1985.
- [19] System Identification and Pattern Recognition, Rob Roy and James Sherman, Rensselaer Polytechnic Institute; Troy N.Y. for NASA.
- [20] Dynamic Matrix Control Method, David M. Prett, Brian Ramaker and Charles Cutler, United States Patent 4,349,869. Sp.14,1982.
- [21] Constrained Nonlinear Predictive Control using Volterra Models, F. Dorado and C. Bordons, Emerging Technologies and Factory Automation, 2005 ETFA 2005, 10 th IEEE Conference on.
- [22] Model Predictive Control solved example from assignment 03 Nicket S. *Kaisare*. Department of Chemical Engineering; Indian Institute of technology - Madras.
- [23] CONTROL AVANZADO, Arturo Rojas Moreno, Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real.

