

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**ESTADO DEL ARTE DE LA MECÁNICA DE FRACTURA Y
LINEAMIENTOS BÁSICOS PARA SU MODELAMIENTO NUMÉRICO**

INFORME DE SUFICIENCIA

Para optar el Título Profesional de:

INGENIERO CIVIL

EVANDRO ESTEBAN PANDIA CAYRO

Lima - Perú

2014

Con cariño dedicado a la memoria de
mi Papá: Esteban Pandia Ramos

| | Pág. |
|---|------|
| RESUMEN..... | 3 |
| LISTA DE TABLAS..... | 4 |
| LISTA DE FIGURAS..... | 5 |
| LISTA DE SÍMBOLOS Y SIGLAS..... | 7 |
| INTRODUCCIÓN..... | 8 |
| CAPÍTULO I: GENERALIDADES..... | 9 |
| 1.1 TEORÍA DE FRACTURA..... | 9 |
| 1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA..... | 10 |
| 1.3 OBJETIVOS..... | 10 |
| 1.4 METODOLOGÍA Y ORGANIZACIÓN..... | 11 |
| CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE..... | 12 |
| 2.1 MARCO TEÓRICO..... | 12 |
| 2.1.1 Modos de Falla de una estructura..... | 12 |
| 2.1.2 Escalas de Observación en la mecánica de fractura..... | 12 |
| 2.1.3 Clasificación de los tipos de fractura..... | 13 |
| 2.1.4 Modos básicos de desplazamiento de una grieta..... | 16 |
| 2.1.5 Variables de la mecánica de fractura en el diseño..... | 16 |
| 2.1.6 Resistencia Cohesiva..... | 17 |
| 2.1.7 Conceptos generales de la mecánica de fractura lineal elástica..... | 18 |
| 2.1.18 Conceptos generales de la mecánica elastoplástica..... | 23 |
| 2.2. ESTADO DEL ARTE..... | 26 |
| 2.2.1 Investigaciones actuales..... | 27 |
| CAPÍTULO III: MODELO MATEMÁTICO EN EL ANÁLISIS DE LA FRACTURA..... | 35 |
| 3.1 MODELO DISTRIBUIDO DE FRACTURA FIJO MULTIDIRECCIONAL..... | 36 |
| 3.2 PROCESO DE ANÁLISIS DEL MÉTODO DE FRACTURA DISTRIBUIDO..... | 42 |
| CAPÍTULO IV: APLICACIONES..... | 43 |
| 4.1 VIGA DE TRES PUNTOS A FLEXIÓN..... | 43 |
| 4.1.1 Pre-procesamiento..... | 46 |
| 4.1.2 Procesamiento..... | 47 |
| 4.1.3 Post-procesamiento..... | 49 |
| 4.1.4. Validación experimental..... | 54 |

| | |
|--|----|
| CAPÍTULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES..... | 56 |
| 4.1 CONCLUSIONES..... | 56 |
| 4.2 RECOMENDACIONES..... | 57 |
| BIBLIOGRAFÍA..... | 58 |
| ANEXOS..... | 73 |
| ANEXO I: PROCEDIMIENTO DE MODELAMIENTO DE LA VIGA EN EL PROGRAMA DIANA..... | 73 |
| ANEXO II: FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO FIJO DE FRACTURAMIENTO MULTIDIRECCIONAL..... | 94 |
| ANEXO III: DEMOSTRACIONES DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FRACTURA LINEAL..... | 98 |

RESUMEN

El estudio de la Mecánica de Fractura provee análisis y soluciones a la falla por fractura en estructuras y componentes. Las soluciones analíticas solo existen para unos pocos casos, así también son desarrollados métodos numéricos para su análisis y el análisis de fatiga en estructuras. Siendo un tema importante en estructuras que tienen un comportamiento gobernado por la fractura. El presente trabajo es una introducción a la mecánica de fractura, comenzando con los principios básicos. En el segundo capítulo se agrupó y clasificó los modelos encontrados en la literatura, indicando su aplicación, autor, programas, métodos computacionales y bibliografía recomendada, posteriormente se escogió el modelo distribuido fijo multidireccional en la realización de la parte aplicativa. Se describieron los conceptos teóricos del modelo y se modeló una viga simplemente apoyada con una carga en el centro de la luz y una muesca en el centro, con la ayuda del programa comercial de elementos finitos DIANA [37]. Se compararon los resultados con los experimentales obtenidos por Ting [119], observándose una buena correlación con los resultados numéricos obtenidos.

LISTA DE TABLAS

| | |
|---|----|
| TABLA N°2.1 .- Escala de aplicación de la mecánica de fractura..... | 12 |
| TABLA N°2.2 .- Clasificación de la fractura en distintos tipos de materiales..... | 13 |
| TABLA N°2.3 .- Categorías de la fractura en función del tiempo..... | 15 |
| TABLA N°2.4 .- Modos de superficies de fractura en un cuerpo agrietado..... | 16 |
| TABLA N°2.5 .- Primeros Conceptos sobre Mecánica de Fractura..... | 19 |
| TABLA N°2.6 .- Variables de análisis estructural introduciendo la mecánica de fractura..... | 21 |
| TABLA N°2.7 .- Descripción de la zona plástica..... | 22 |
| TABLA N°2.8 .- Criterios de fractura en mecánica lineal elástica..... | 23 |
| TABLA N°2.9.- Métodos para abordar el análisis elasto-plástico | 24 |
| TABLA N°2.10.- Datos principales de la investigación actual a)..... | 27 |
| TABLA N°2.11.- Datos principales de la investigación actual b)..... | 28 |
| TABLA N°2.12.- Datos principales de la investigación actual c)..... | 28 |
| TABLA N°2.13.- Datos principales de la investigación actual d)..... | 29 |
| TABLA N°2.14.- Datos principales de la investigación actual e)..... | 29 |
| TABLA N°2.15.- Datos principales de la investigación actual f)..... | 30 |
| TABLA N°2.16.- Datos principales de la investigación actual g)..... | 30 |
| TABLA N°2.17.- Datos principales de la investigación actual h)..... | 31 |
| TABLA N°2.18.- Datos principales de la investigación actual i)..... | 31 |
| TABLA N°2.19.- Datos principales de la investigación actual j)..... | 32 |
| TABLA N°2.20.- Datos principales de la investigación actual k)..... | 33 |
| TABLA N°2.21.- Clasificación de datos importantes de los principales modelos de la Mecánica de Fractura..... | 34 |
| TABLA N°4.1 .- Resultados del post-procesamiento..... | 49 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| FIGURA N°2.1 .- Diferentes escalas de observación..... | 13 |
| FIGURA N°2.2 .- Variables del análisis estructural introduciendo la mecánica de fractura..... | 17 |
| FIGURA N°2.3 .- Comparación de la fuerza cohesiva en dos materiales diferentes..... | 17 |
| FIGURA N°2.4 .- Esquema de un punto en el campo de esfuerzos..... | 18 |
| FIGURA N°2.5 .- Esquema de un punto en el campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta | 21 |
| FIGURA N°2.6 .- Comportamiento típico esfuerzo-deformación de un material bajo tensión uniaxial..... | 23 |
| FIGURA N° 2.7.- Curva R para un material frágil y cuasi-frágil..... | 25 |
| FIGURA N°3.1 .- Esquema del modelo de fractura distribuido..... | 35 |
| FIGURA N°3.2 .- Idealización de la grieta del modelo distribuido..... | 36 |
| FIGURA N°3.3 .- Placa con un agujero elíptico en el centro..... | 37 |
| FIGURA N°3.4 .- Esfuerzo ZZ en la placa con un agujero circular de radio 5mm..... | 38 |
| FIGURA N°3.5 .- Esfuerzo ZZ en el segmento MAN, en la placa con agujero circular de radio 5mm..... | 38 |
| FIGURA N°3.6 .- Esfuerzo ZZ en el segmento MAN, en la placa con agujero elíptico con eje menor 0.125mm y eje mayor 5 mm..... | 38 |
| FIGURA N°3.7 .- Distribución de esfuerzos ZZ en 4 etapas del achatamiento de la elipse..... | 40 |
| FIGURA N°3.8 .- Esfuerzo ZZ en el punto A, a medida que decrece el eje menor de la elipse | 41 |
| FIGURA N°3.9 .- Esfuerzo YY en el punto A, a medida que decrece el eje menor de la elipse | 41 |
| FIGURA N°3.10.- Proceso general de análisis por agrietamiento por el modelo de fractura distribuido..... | 42 |
| FIGURA N° 4.1 .- Comparaciones entre el entorno del ensayo de una viga en el laboratorio y las estructuras en el mundo real..... | 43 |
| FIGURA N°4.2 .- Viga modelada, de tres puntos a flexión | 44 |
| FIGURA N°4.3 .- Esquema general del proceso de análisis..... | 45 |

| | |
|--|----|
| FIGURA N° 4.4 .- Esquema básico de ingreso de datos en el pre procesamiento..... | 46 |
| FIGURA N°4.5 .- Esquema de procesamiento con los comandos del programa DIANA para el análisis no lineal..... | 47 |
| FIGURA N°4.6 .- Esquema general del proceso de análisis iterativo..... | 48 |
| FIGURA N°4.7 .- Comparación entre resultados numéricos y experimentales... | 54 |

LISTA DE SIGLAS Y SÍMBOLOS

| | |
|-----------------------------------|---|
| θ | : Ángulo, coordenada angular |
| h | : Ancho de banda |
| A | : Área |
| ν | : Coeficiente de Poisson |
| $z=x + iy$ | : Coodernadas complejas |
| ε | : Deformación |
| w | : Densidad de energía de deformación |
| ε_f | : Ductilidad |
| γ | : Energía de superficie para que ocurra fractura |
| G_f | : Energía de fractura en modo I |
| Π | : Energía potencial elástica |
| ε_p | : Energía plástica requerida para deformar un material |
| G_c | : Energía crítica requerida para propagar la grieta |
| σ | : Esfuerzo normal |
| τ_{xy} | : Esfuerzo de corte |
| σ_{xx} | : Esfuerzo en la dirección positiva del eje x |
| σ_{yy} | : Esfuerzo en la dirección positiva del eje y |
| σ_c | : Esfuerzo crítico de fractura |
| σ_1, σ_2 y σ_3 | : Esfuerzos principales |
| σ_0 | : Esfuerzo de fluencia |
| K_I | : Factor de Intensidad de esfuerzos |
| J | : Integral J |
| a | : Longitud de grieta |
| D^{CO} | : Matriz de rigidez de un punto no fractura |
| D^{CR} | : Matriz de rigidez de un punto fracturado |
| MFLE | : Mecánica de Fractura Lineal Elástica o Mecánica de Fractura Lineal |
| MFEP | : Mecánica de Fractura Elasto-Plástica |
| E | : Módulo de Young |
| G | : Rapidez de liberación de energía potencial elástica o Módulo de corte |
| K_{IC} | : Tenacidad a la fractura |
| FPZ | : Zona de proceso de fractura |

INTRODUCCIÓN

Actualmente el estudio de la Mecánica de Fractura en el Perú se encuentra en estado inicial. Por mucho tiempo se ha considerado la Mecánica de Fractura poco práctica por ser muy analítica, sin embargo hoy existen en el mercado muchos programas que han desarrollado el análisis por fractura. Entre los programas más comerciales están: DIANA [37], ABAQUS [1] y ANSYS [7], los cuales empleando los elementos finitos hacen posible su análisis.

El presente informe de suficiencia es un aporte introductorio a la Mecánica de Fractura, en donde se han explicado los conceptos básicos y se ha recopilado los métodos, modelos matemáticos y computacionales sintetizados en una tabla que permite ahondar en cualquiera de ellos, siguiendo las referencias.

En el segundo capítulo, se han desarrollado conceptos básicos generales que son comúnmente mencionados en los trabajos sobre mecánica de fractura. También se ha sintetizado la información sobre los distintos modelos de la mecánica de fractura, referenciándose su autor, aplicaciones, software que lo emplea, métodos computacionales y bibliografía recomendada. De dicho estado del arte, se ha escogido el modelo de fracturamiento distribuido fijo multidireccional, por ser uno de los más utilizados en la práctica. Es así que se ha implementado en la mayoría de los códigos comerciales de análisis de estructuras que abarcan la fractura. Finalmente en el cuarto capítulo, se realiza un ejemplo aplicativo utilizando los conceptos del tercer capítulo y con la ayuda del software DIANA [37]. Se modeló una viga simplemente apoyada con una carga en el medio, la cual es aumentada progresivamente hasta conseguir la fractura. Se observan los esfuerzos y deformaciones a lo largo de las etapas de fracturamiento y los patrones de fracturamiento. Los resultados numéricos obtenidos fueron validados con los datos experimentales del trabajo de Ting [119], los cuales mostraron una buena correlación.

CAPÍTULO I: GENERALIDADES

1.1 TEORÍA DE FRACTURA

La Mecánica de Fractura puede definirse como aquel conjunto de ideas o conceptos que describen la transición de comportamiento continuo a discreto así también la separación que ocurre en el material [98], estudiando por ello la iniciación, propagación y detenimiento de la fractura. Es la parte de la mecánica de sólidos que relaciona el tamaño y forma de una grieta y las fuerzas o cargas que conducen a la fractura de un componente, de forma y dimensiones definidas. Se apoya en el cálculo de la distribución de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos alrededor de una grieta y en el establecimiento de los balances de energía que tienen lugar durante la extensión de la grieta [48]. Con la mecánica de fractura lineal se pueden estudiar materiales que cumplen la ley de Hooke, mientras que el campo se ha ampliado a materiales de comportamiento no lineal, a materiales con plasticidad, viscoplasticidad y viscoelasticidad.

Usualmente para fracturar un material se requiere incrementar la carga progresivamente hasta que ocurra un proceso de nucleación y propagación de grietas. Para que se origine la fractura, no es necesario que todo el elemento se encuentre fracturado; la fractura puede alcanzarse en una pequeña zona y expandirse en el volumen.

La mecánica de fractura a su vez se divide en sub-tareas:

- Análisis de las condiciones mecánicas de carga, sobre la base de la mecánica del continuo usando métodos analíticos y numéricos de la mecánica estructural.
- Derivación de parámetros específicos de fractura en el material y criterios de falla, en la iniciación, progreso y detenimiento de las grietas.

- Desarrollo de métodos experimentales de prueba, para la determinación de parámetros, con características de resistencia del material en contra de la propagación de la grieta.
- Aplicación del criterio de la mecánica de fractura en la construcción de estructuras con resistencia a la fractura y vida de servicio.

El presente trabajo, se ha estructurado de la siguiente forma: en el segundo capítulo, en la parte de marco teórico, se han incluido los conceptos esenciales y las clasificaciones comúnmente utilizadas en la mecánica de fractura. Se comienza con los conceptos de la mecánica elástica y elastoplástica. En la parte de estado del arte se ha recopilado y sintetizado en una tabla los modelos, autores, aplicaciones, métodos computacionales y software de la mecánica de fractura. Se incluyen también los últimos trabajos presentados en el área. En la tercera parte, de los modelos desarrollados en el estado del arte se ha escogido el Modelo Distribuido Fijo Multidireccional, el cual es descrito para poder utilizarlo en la cuarta parte, donde se hace una aplicación del fracturamiento de una viga simplemente apoyada con muesca, con la aplicación de una carga en el medio, la cual es incrementada progresivamente hasta conseguir el inicio, propagación y falla a fractura de la viga. Estos resultados fueron comparados con resultados experimentales desarrollados por Ting [119], los cuales mostraron una buena correlación.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los criterios de diseño basados en esfuerzos de tensión, de fluencia y pandeo, incluyendo factores de carga, pueden ser adecuados para muchas estructuras, pero insuficientes cuando existen defectos y probabilidad de fracturación y defectos. La inclusión de factores de seguridad durante el diseño es entonces inadecuada ya que debe usarse criterios de la mecánica de fractura.

1.3 OBJETIVOS

Objetivo Principal:

Revisión del estado del arte de la mecánica de fractura.

Objetivos Específicos:

- Síntesis y recopilación del estado del arte de la mecánica de fractura.
- Identificación y determinación de los parámetros de fractura como: resistencia a tensión, energía de fractura, abertura de grieta.
- Lineamientos básicos para la aplicación de un modelo numérico con software relativo al tema.

1.4 METODOLOGÍA Y ORGANIZACIÓN

- Recopilación de información básica: normas, manuales, libros, papers y toda aquella información relevante.
- Análisis y síntesis de la información obtenida, sistematizando de una manera cronológica la información, desde los primeros procedimientos semi-empíricos, hasta el análisis en la actualidad, llegando a sentar las bases para poder realizar los lineamientos para un modelamiento matemático con las técnicas matemáticas utilizadas en la actualidad.
- Conclusiones y recomendaciones. Luego del análisis se obtendrán las conclusiones y recomendaciones del informe.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

2.1 MARCO TEÓRICO

2.1.1 Modos de Falla de una estructura

Una pieza de material o estructura, puede tener demandas de varios tipos: mecánica, química (corrosión), térmica, que pueden llevar a la falla. Las principales formas por las cuales puede fallar son: inestabilidad elástica o pandeo, inestabilidad plástica o excesiva deformación, daño o agrietamiento, requiriéndose un análisis por agrietamiento para el buen desempeño estructural.

2.1.2 Escalas de Observación en la mecánica de fractura

Desde el punto de vista de la escala de estudio de la fractura, la mecánica de fractura se encuentra dentro de las escalas mesoscópica (nos permite discutir el comportamiento del material sin discutir su estructura atómica) y macroscópica, es decir abarca sistemas visibles al ojo humano (más de 0.1 mm) [49].

Para el concreto se puede establecer:

TABLA N°2.1 .- Escala da aplicación de la mecánica de fractura

| ESCALAS | En metros | Descripción |
|-----------------|-------------|--|
| Nanométrica | 10^{-9} | Se puede distinguir la estructura atómica del cemento y agregados |
| Micrométrica | 10^{-6} | Es posible identificar los granos individuales del concreto (antes del endurecimiento del concreto, pueden ser observados los granos del concreto no hidratado, mientras que en estado endurecido son visibles los granos de silicato de calcio e hidróxido de calcio) |
| Milimétrica | 10^{-3} | Pueden ser distinguidas las partículas individuales de arena y agregado |
| Métrica | 10 | Escala donde se hacen los ensayos de laboratorio |
| Escalas mayores | 10^2-10^3 | Se encuentran las estructuras comunes de construcción civil |

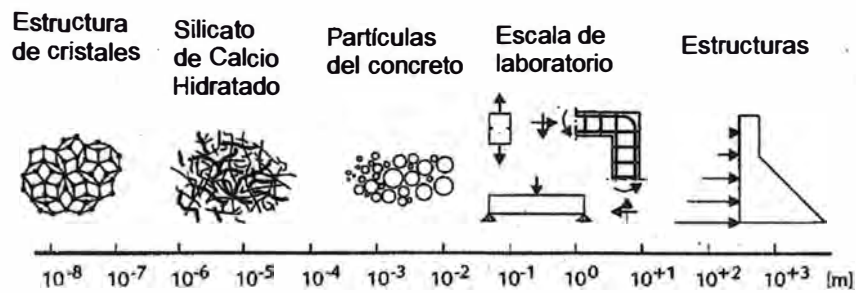
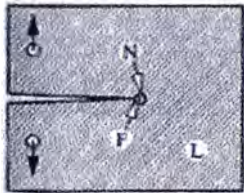



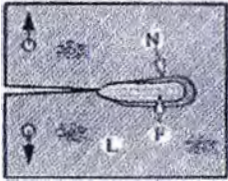

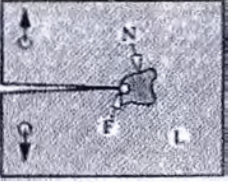
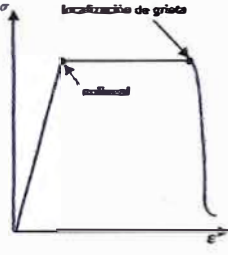
FIGURA N°2.1.- Diferentes escalas de observación

2.1.3 Clasificación de los tipos de fractura

Se pueden clasificar dos tipos de fractura, dependiendo de la cantidad de deformación plástica previa, en:

TABLA N°2.2.- Clasificación de la fractura en distintos tipos de materiales

| Clasificación | Definición | Gráfico |
|---------------------------------|--|---|
| Fractura en materiales frágiles | Es la que ocurre cuando la deformación de la mayor parte del cuerpo es elástica (ZONA L). Así las deformaciones son limitadas a una región pequeña en frente de la grieta. Se demuestra experimentalmente que se origina una zona plástica junto a la punta de la grieta, de dimensiones despreciables. Ejemplos de este tipo son los metales con baja ductilidad y tenacidad y el vidrio, entre otros. Aunque metales normalmente dúctiles también fallan de manera frágil, cuando se les aplica gran velocidad de deformación, como en los impactos. |  <p>Fractura Frágil Elástico-Linear MFLE</p>  <p>Gráfico esfuerzo-deformación</p> |

| Clasificación | Definición | Gráfico |
|--|---|---|
| <p>Fractura en materiales cuasi-frágiles</p> | <p>Es aquella fractura que se encuentra entre una fractura frágil y una fractura dúctil. Dado que estos materiales no son homogéneos, están formados por un arreglo complejo de granos unidos. Aquí observamos que la zona de fracturamiento F, es de dimensiones considerables, volviendo despreciables los efectos que se originan en la zona no lineal de plastificación (Zona N). Ejemplo de este tipo son el concreto, el mortero, la roca, el ladrillo.</p> |  <p>Fractura Cuasi-frágil No lineal</p>  <p>Gráfico esfuerzo-deformación</p> |
| <p>Fractura en materiales dúctiles</p> | <p>Es la fractura que ocurre después de una apreciable deformación plástica del cuerpo, entendiendo que los esfuerzos en una región relativamente grande de la pieza rebasaron el límite elástico. La región donde se producen procesos inelásticos (N+F) es significativa en comparación a la región elástica L. Este tipo de fractura se presenta en los metales con buena ductilidad y tenacidad.</p> |  <p>Fractura Dúctil Plástico-No lineal MFEP</p>  <p>Gráfico esfuerzo-deformación</p> |

Fuente: Adaptado de BAZANT, Z., Mechanics of Fracture and Progressive Cracking in Concrete Structures, 23 de febrero del 2014, 12:00 h

<http://www.civil.northwestern.edu/people/bazant/PDFs/Papers/S14.pdf>

Existen otros tipos de fractura asociados a los materiales como el visco-elástico y el visco-plástico que escapan al alcance del presente trabajo.

La clasificación de frágil y dúctil es estrictamente ingenieril, ya que en algunas fracturas de aspecto frágil pueden existir una intensa deformación plástica, sólo que ésta se localiza en una región pequeña alrededor de la grieta y el resto del material permanece sin deformación plástica. Ambos tipos de fractura pueden ocurrir en un mismo componente [48].

En la mecánica de fractura se considera que el proceso de fractura inicia con una grieta que se propaga hasta la separación final de la pieza. Si en la propagación ésta puede detenerse al disminuir o desaparecer los esfuerzos, se dice que la propagación es estable y si la grieta se propaga de manera rápida, auto-acelerada y es prácticamente imposible de detener, entonces la grieta se denomina inestable.

En función del tiempo, la fractura se clasifica en:

TABLA N°2.3.- Categorías de la fractura en función del tiempo

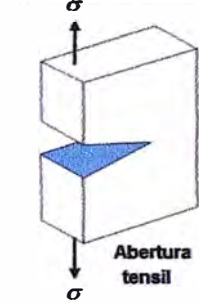
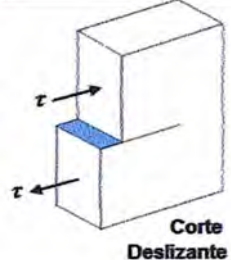
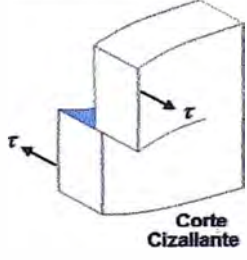
| CLASIFICACIÓN | DEFINICIÓN |
|-------------------------------------|--|
| Fractura estática | Es la fractura bajo una sola aplicación de carga en un sólido, que contiene una grieta inicialmente estática que comienza a propagarse rápidamente en condiciones de inestabilidad. Aquí se incluye la fractura frágil, la fractura dúctil y el colapso plástico |
| Fractura lenta, retardada o estable | Es la fractura que ocurre por la propagación lenta de una grieta a través del tiempo o por la acción de cargas repetitivas o fluctuantes. Es de carácter estable e incluye la fatiga, la propagación de grietas por termo-fluencia y el agrietamiento por corrosión. |
| Fractura dinámica | Se da cuando en los elementos se rompen bajo la acción de cargas impulsivas, muy súbitas, como el choque de dos vehículos, impacto de objetos desprendidos, impacto de proyectiles o de explosiones. |

Fuente: Adaptado de GONZÁLEZ, J., *Mecánica de Fractura*, Editorial Limusa, Ciudad de México, 2004.

2.1.4 Modos básicos de desplazamiento de una grieta

Para facilitar, el análisis de la propagación de una grieta, ésta se subdivide en tres modos básicos de desplazamiento, en el caso general se combinan los tres modos, que corresponden a los grados de libertad posibles de la grieta.

TABLA N°2.4.- Modos de superficies de fractura en un cuerpo agrietado

| MODOS DE DESPLAZAMIENTO | DESCRIPCIÓN | GRÁFICO |
|-------------------------|---|---|
| Modo I | Es la abertura de la grieta en la dirección perpendicular al plano de fractura |  |
| Modo II | Es el desplazamiento de las superficies en sentidos opuestos pero en la dirección de avance de la grieta. Se presenta en grietas inclinadas |  |
| Modo III | Es el desplazamiento fuera del plano en dirección perpendicular a la dirección de avance. Se presenta en fracturas por torsión pura |  |

Fuente: Adaptado de GONZÁLEZ, J. *Mecánica de Fractura*, Editorial Limusa, Ciudad de México, 2004.

2.1.5 Variables de la mecánica de fractura en el diseño

Generalmente es posible obtener la solución analítica de problemas sencillos, relacionados con mecánica de fractura, como la que presenta la Mecánica de Fractura Lineal (MFLE), mientras que para la solución de problemas más complicados, con geometrías y cargas complejas, se hace necesaria la aplicación de técnicas computacionales.

En el diseño tradicional sólo se toman en cuenta tres variables: geometría (espesor, forma de la sección), resistencia del material (límite elástico, resistencia máxima) y las cargas, mientras que en diseño por mecánica de fractura, se agrega una variable adicional que es la grieta.

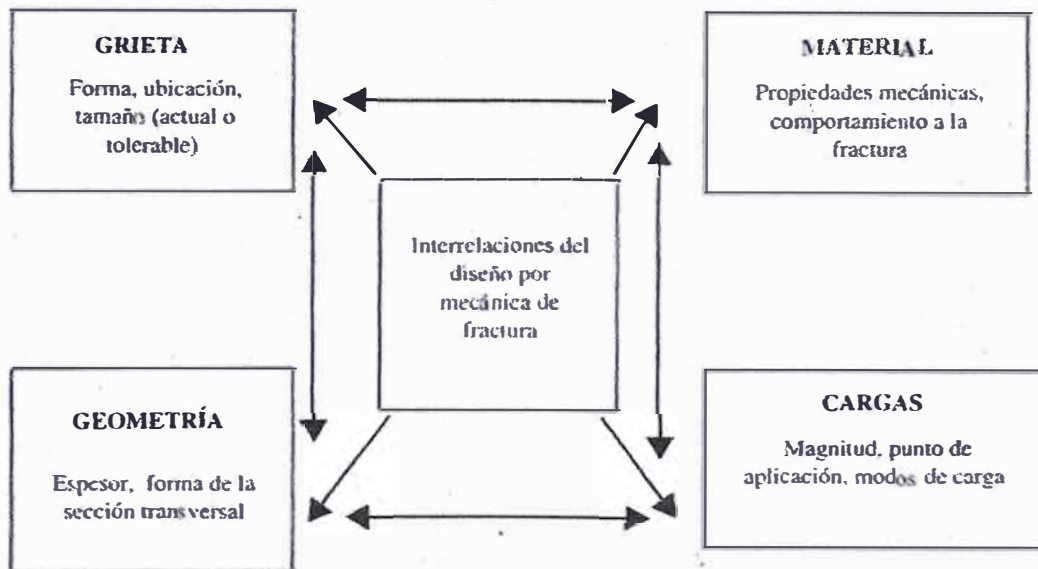


FIGURA N°2.2 - Variables de análisis estructural introduciendo la mecánica de fractura

2.1.6 Resistencia Cohesiva

Se denomina resistencia cohesiva aquella que presenta un cuerpo ante el esfuerzo de fractura necesario para separar y romper los enlaces atómicos en el plano de fractura. La resistencia cohesiva puede representarse también con la cantidad de energía necesaria para que ocurra la falla.

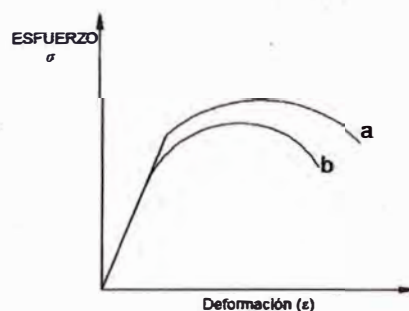


FIGURA N°2.3 – Comparación de la fuerza cohesiva en dos materiales diferentes

Dado dos materiales a y b cuyas gráficas se muestran en la Figura N°2.3, el material a presenta mayor energía acumulada que el material b, por lo tanto presenta también mayor resistencia cohesiva.

El modelo más simple (de Irwin [57]), expresa que, siendo a_0 la distancia interplanar, cuando la separación del plano de fractura es igual a $a_0/2$, la resistencia cohesiva es alcanzada y ocurre la fractura cuando la separación es a_0 . La fuerza interatómica es casi nula. De acuerdo a este modelo el trabajo suministrado por las cargas se convierte en energía para la creación de nuevas superficies de fractura.

2.1.7 Conceptos generales de la mecánica de fractura lineal elástica

La mecánica de fractura lineal-elástica (MFLE), es aquella en que se estudia la fractura en los sólidos, considerando que en la totalidad del sólido se cumple la ley de Hooke.

Los primeros trabajos fueron solamente aplicables a materiales lineales elásticos, bajo condiciones cuasi-estáticas, mientras que los trabajos siguientes incorporaron otros tipos de materiales. La fractura elasto-plástica considera la deformación plástica, mientras que las fracturas dinámica, viscoelástica y viscoplástica, incluyen al tiempo como variable [6].

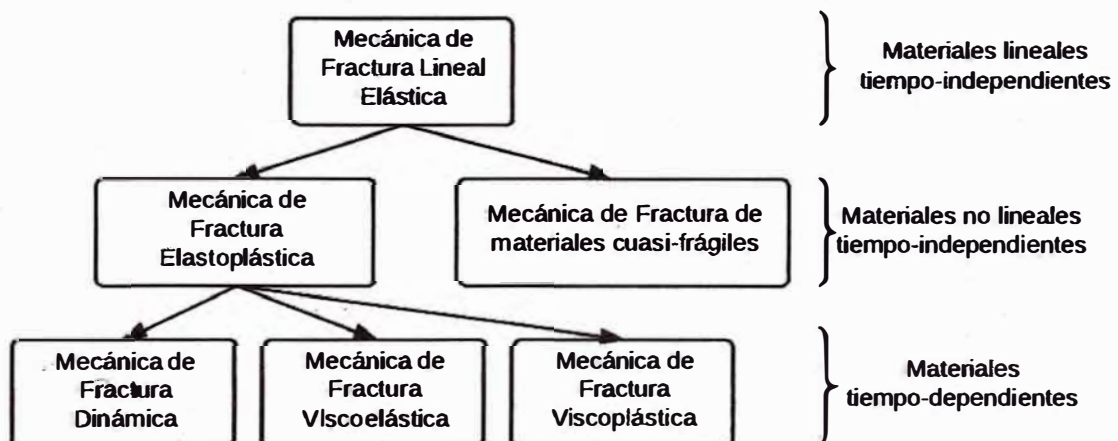

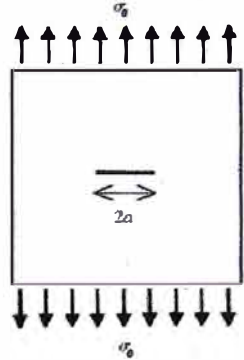


FIGURA N°2.4 – Esquema de las ramas de la mecánica de fractura

Fuente: Adaptado de ANDERSON, T., Fracture Mechanics, CRC Press, Miami, 2005.

Los primeros conceptos científicos de la mecánica de fractura lineal son expresados en la siguiente tabla N° 2.6 :

TABLA N° 2.5 .- Primeros Conceptos sobre Mecánica de Fractura

| | | |
|-----------------------------|--|--|
| <p>Inglis (1913) [55]</p> |  | <p>Resuelve una aproximación del campo de esfuerzos en la punta de una placa infinita con un hueco elíptico, llegando a la relación siguiente:</p> $\sigma_{yy} = \sigma_0 (1 + 2a/b)$ <p>Donde a, b, son los semiejes de la elipse y muestra que los esfuerzos σ_{yy} en la punta de la elipse van aumentando a medida que disminuye b. Cuando b tiende a cero, se aproxima a una grieta y se origina una singularidad en la punta. La demostración se encuentra en Sauoma [105] y Ramesh [96]</p> |
| <p>Griffith (1921) [53]</p> |  | <p>En una placa infinita con una grieta en el medio, sometida a un esfuerzo σ_0, la grieta se propaga cuando es mayor o igual a un esfuerzo crítico:</p> $\sigma_c = \sqrt{\frac{2\gamma E'}{\pi a}}$ <p>Formando en la placa nuevas superficies de fractura. Este resultado es obtenido con un criterio energético.</p> <p>donde E: módulo de Young, γ = energía de superficie esfuerzo plano: $E' = E$ en deformación plana: $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$</p> <p>Esta expresión es sólo válida en materiales frágiles. La demostración se encuentra en Ramesh [96] y [110].</p> |
| <p>Irwin (1958) [57]</p> | <p>Al criterio de energía propuesto por Griffith (1921), le adiciona la energía debida a la deformación de la zona plástica, modificando la expresión a una más completa y general, ampliando su rango de utilización a los metales.</p> | |

| | |
|-------------------|---|
| Irwin (1958) [57] | $\sigma_c = \sqrt{\frac{2E(\gamma + \epsilon_p)}{\pi a}}$ <p>Donde, ϵ_p, representa la energía plástica necesaria para deformar el material.</p> <p>También introduce un nuevo concepto de propagación, con el concepto de rapidez de liberación de energía potencial elástica (G), introducida como una fuerza guiadora de la fractura, representa el cambio de energía potencial por unidad de área fisurada, de la cual se desprende el concepto de las curvas de resistencia R. G se define como, Nogueira [82]:</p> $G = -\frac{d\Pi}{dA}$ <p>La demostración se encuentra en Ramesh [96]</p> |
|-------------------|---|

El criterio de Griffith plantea una enorme dificultad para evaluar experimentalmente la energía de superficie (γ), por lo que nunca se pudo aplicar extensamente. Sin embargo, hizo dos aportes fundamentales:

1. La ecuación de Griffith provee una relación entre el esfuerzo de la fractura y el tamaño de la grieta del tipo σ directamente proporcional a $\frac{1}{\sqrt{a}}$, la cual se ha comprobado repetidamente.
2. La fractura resulta de un proceso de conversión de energía, que no depende solamente del esfuerzo, sino también del tamaño de grieta.

Esta última aportación sentó las bases de la mecánica de fractura moderna y por ello Griffith se le llama: "el padre de la Mecánica de Fractura" González [48].

Entre los conceptos teóricos más importantes de la mecánica lineal elástica (MFLE) están:

a) El factor de intensidad de esfuerzos

Es un parámetro que define la magnitud de esfuerzos alrededor de la grieta. Determina por lo tanto el efecto de la introducción de una grieta en la estructura, ya que una vez conocido el factor de intensidad de esfuerzos, el campo de esfuerzos alrededor de la grieta queda definido por completo.

En el caso de una placa de una grieta central de longitud $2a$, Westergaard [129], resolvió el planteamiento diferencial:

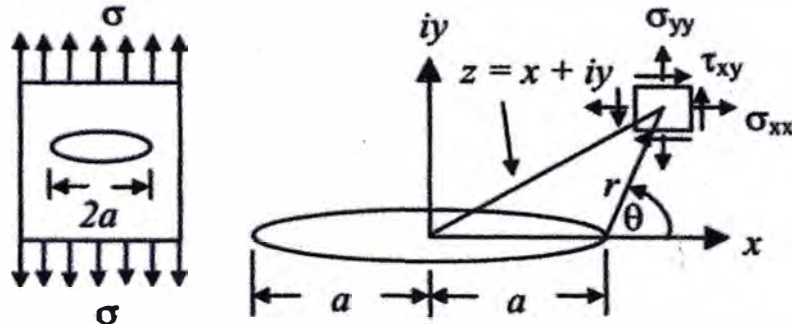


FIGURA N°2.5 .- Esquema de un punto en el campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta

TABLA N°2.6 - Variables de análisis estructural introduciendo la mecánica de fractura

| Ecuación diferencial | Condiciones | Condiciones de Borde |
|----------------------|--|---|
| $\nabla^2\psi = 0$ | $E\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}$ $E\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}$ $G\gamma_{xy} = \tau_{xy}$ | <ul style="list-style-type: none"> El esfuerzo aplicado en el infinito (x,y) es igual a: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{\text{aplicado}}; \tau_{xy} = 0$ En la superficie de grieta se cumple: $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ |

Fuente: GONZÁLEZ, J. *Mecánica de Fractura*, Editorial Limusa, Ciudad de México, 2004.

En condiciones de esfuerzo plano, los esfuerzos son los siguientes:

$$\sigma_{xx} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

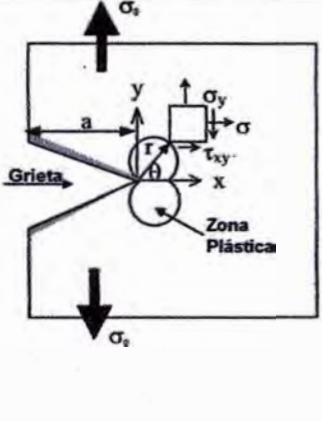
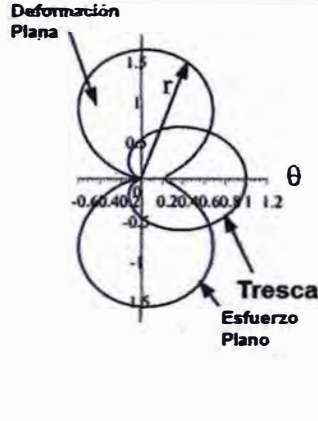
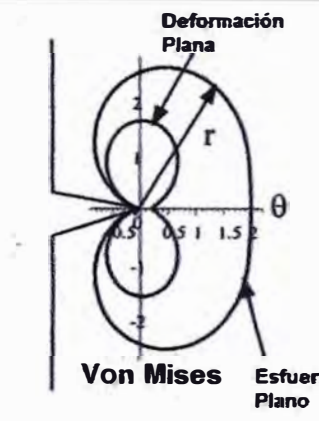
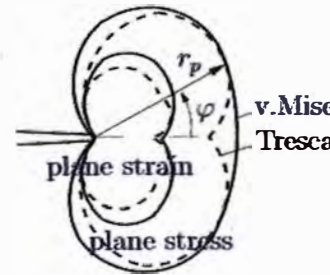
Igualmente existen soluciones para el modo II y el modo III (Véase Tabla N° 2.5).

Las demostraciones se encuentran en Perez [90] y Ramesh [96].

b) Zona plástica

Antes que el material alcance su esfuerzo máximo, se origina una zona plástica en la región de máximos esfuerzos cuando se alcanza el esfuerzo de fluencia. Su tamaño y forma depende del tipo de material, siendo en los metales, de menor tamaño que en concreto. Se ha podido corroborar experimentalmente y se ha dado una aproximación teórica.

TABLA N°2.7 - Descripción de la zona plástica

| ZONA PLÁSTICA | SEGUN TRESCA | SEGUN VON-MISES |
|---|--|--|
|  |  |  |
|  | <p>El criterio de Tresca establece que un material sometido a esfuerzo triaxial, entra en estado de fluencia, cuando el máximo esfuerzo de corte se vuelve igual al esfuerzo crítico de corte en una prueba de corte puro.</p> $\frac{ \sigma_1 - \sigma_3 }{2} = k$ <p>$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ k, es el esfuerzo de fluencia en una prueba a corte puro.</p> | <p>Establece que un material, inicia la fluencia cuando absorbe una cantidad crítica de energía de deformación distorsional.</p> $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2$ <p>Donde: σ_1, σ_2 y σ_3 son los esfuerzos principales y σ_y, es el esfuerzo de fluencia en tensión uniaxial.</p> |

Fuente Adaptado de PEREZ, N., *Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.

Las demostraciones de las expresiones se encuentran en Perez [90].

c) Criterios de Fractura en la mecánica de fractura lineal elástica

Existen dos criterios:

TABLA N°2.8 - Criterios de fractura en mecánica lineal elástica

| TENACIDAD A LA FRACTURA | RAPIDEZ DE LIBERACIÓN DE ENERGÍA |
|--|--|
| <p>Es un criterio para el crecimiento de grieta, basado en la resistencia del material a la fractura, es decir:</p> $K_I \geq K_{IC}$ <p>Donde K_I es el factor de intensidad de esfuerzos y K_{IC}, es una propiedad del material medida experimentalmente.</p> | <p>Se basa en la energía G, que es la rapidez de liberación de energía disponible por unidad de área, comparada con la energía requerida para propagar la grieta (ésta es medida experimentalmente).</p> $G \geq G_C$ |

2.1.8 Conceptos generales de la mecánica elastoplástica

La mecánica elastoplástica, es una ampliación de la mecánica elástica, incorporando el efecto de plasticidad, a medida que la curva de esfuerzo-deformación aumenta y entra en la zona plástica. También aumenta la demanda de ductilidad del material por lo que se requiere de técnicas adicionales para su análisis.

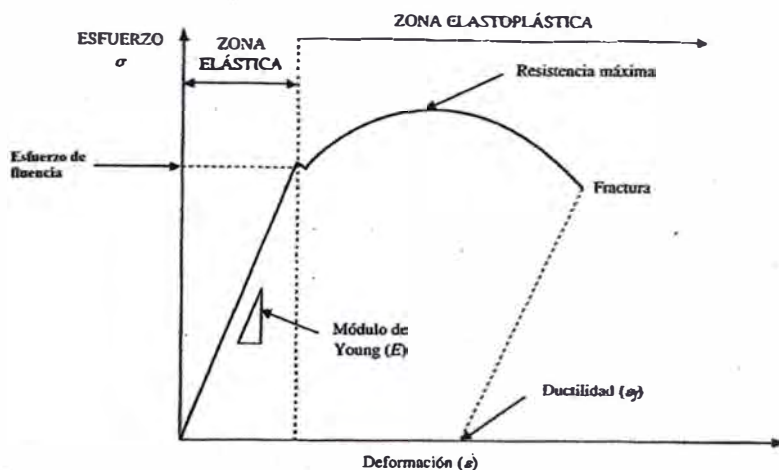
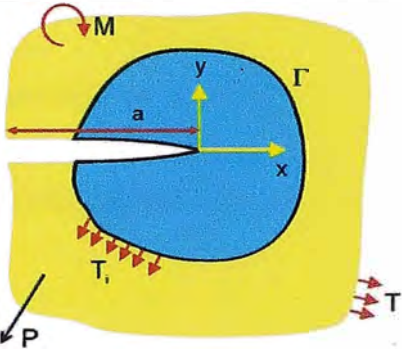
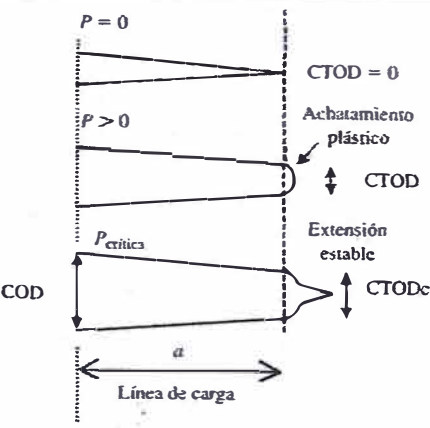


FIGURA N°2.6 .- Comportamiento típico esfuerzo-deformación de un material, bajo tensión uniaxial

Es así que se emplean las técnicas de la Integral J y el desplazamiento de abertura de punta de grieta: "Crack Tip Opening Displacement".

a) Métodos para abordar el análisis elastoplástico

TABLA N°2.9 .- Métodos para abordar el análisis elasto-plástico

| INTEGRAL J | CTOD |
|--|--|
| Rice (1968) | Well (1961) |
|  |  |
| <p>Criterio basado en Energía, viene a ser lo mismo que la rapidez de liberación de energía propuesto por Griffith en 1920 , en forma de integral de línea.</p> | <p>Depende de la magnitud de los esfuerzos en la punta de grieta. Cuando se alcanza un valor de CTOD crítico, ocurre la fractura.</p> |
| $J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds$ | $CTOD = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{E \sigma_0}$ |
| <p>En donde:</p> <p>$w = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ es la densidad de energía de deformación</p> <p>σ_{ij} y ε_{ij} son los tensores de esfuerzo y deformación</p> <p>$T_i = \sigma_{ij} n_j$: son los componentes del vector tracción, el cual actúa sobre el contorno</p> <p>u_i : son los componentes del vector desplazamiento</p> <p>ds : es el incremento de longitud a lo largo del contorno Γ</p> | <p>En donde:</p> <p>K_I : Factor de Intensidad de esfuerzos</p> <p>E : Módulo de Young</p> <p>σ_0 : Esfuerzo de fluencia</p> |

b) La curva R

Es definida por la relación de la rapidez de liberación de energía y la longitud del incremento de la grieta. La curva R representa la capacidad del material para resistir el crecimiento de una grieta. Ese aumento de resistencia indica que el material se vuelve más dúctil, con el crecimiento de la fisura. En el caso ideal de la placa completamente frágil, de dimensiones infinitas con una grieta en el medio, la capacidad del material para resistir el crecimiento de una fractura no puede ser constante, debido a mecanismos de retención en la zona de procesos inelásticos (N+F), resultando que la curva es creciente, Nogueira [82].

La obtención de la curva R, ha sido motivo de varios trabajos: Broek [20], Karihaloo [61], entre otros. Es un criterio para analizar la estabilidad o inestabilidad de la propagación de las fracturas.

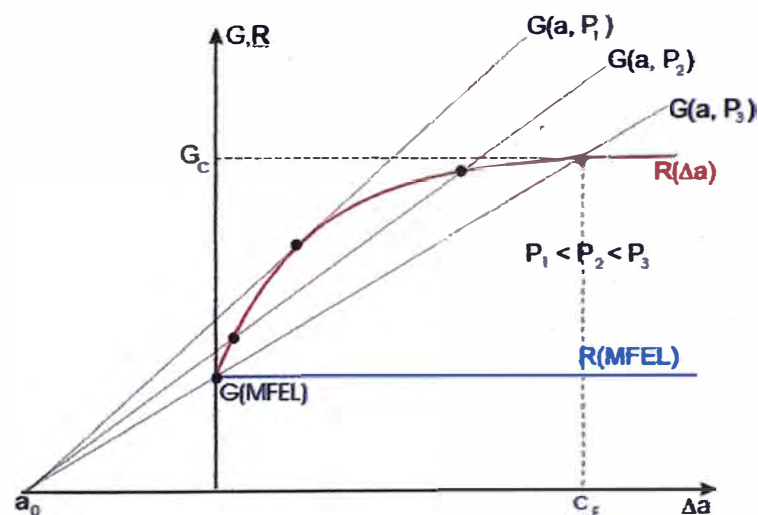


FIGURA N° 2.7 .- Curva R para un material frágil en azul y para un materia cuasi-frágil en rojo

Del lado izquierdo se tiene que la grieta tiene una longitud a_0 , y del lado derecho están los aumentos de longitud de grieta (Δa). Las curvas R son obtenidas y se trazan las funciones G (que son la rapidez de liberación de energía elástica), para distintos valores de carga P_1, P_2, P_3 . La propagación de grieta se dará cuando $G=R$. Si:

$$\frac{\partial G}{\partial a} \leq \frac{\partial R}{\partial a} \quad \text{ocurrirá un crecimiento estable}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a} > \frac{\partial R}{\partial a} \quad \text{ocurrirá un crecimiento inestable}$$

2.2. ESTADO DEL ARTE

La mecánica de fractura ha alcanzado un desarrollo a grandes pasos en poco tiempo, con la mejora de la capacidad de los ordenadores, cada vez se investigan nuevas formulaciones matemáticas y se analizan nuevos materiales, es así que aparecen formulaciones numéricas, con plasticidad, visco-plasticidad, viscoelasticidad, mecánica del daño, representaciones de meso-escala entre otros, que se muestran en la siguiente tabla resumen N°2.21, que se encuentra en la parte final del presente capítulo.

La escala y el tamaño gobierna casi todo en la fractura. Así la fractura en materiales frágiles, es decir aquellos que presentan una pequeña zona de fractura de proceso, puede ser modelada por la mecánica de fractura lineal elástica, mientras que las predicciones de la mecánica de fractura lineal elástica dan resultados erróneos cuando la zona en proceso de falla es del orden del tamaño de la estructura.

Para la elección del tipo de modelo a usar en la evaluación, se hace necesario evaluar el tamaño relativo de la zona de proceso de fractura (FPZ), y la dimensión crítica más pequeña de la estructura (D), resultando que: para $D/(FPZ) > 100$ la Mecánica de Fractura Lineal Elástica es válida, mientras que si $5 < D/(FPZ) < 100$ debería usarse una no-lineal o aproximación cuasi-frágil para $D/(FPZ) < 5$ se recomienda evaluar los modelos de daño no locales [12].

Si la escala de la estructura es pequeña, (es decir al discretizar la estructura, el tamaño de los elementos formados es del tamaño del agregado), no se presenta ningún problema en particular. Siempre que la estructura interna (tamaño del

agregado), sea de un tamaño comparable con la estructura, los factores de intensidad (parámetros fundamentales en la mecánica de fractura lineal elástica), pueden ser un método más eficiente, que el método distribuido y otros más complejos [12].

2.2.1 Investigaciones actuales:

a) Un modelo de zona cohesiva dependiente de la velocidad para grietas en movimiento con fuerza de tracción no uniforme.

Estudia el cambio de estado en movimiento de una grieta, bajo carga en modo I, con un modelo modificado de zona cohesiva, el cual direcciona el rol de la velocidad dependiente del esfuerzo normal, paralelo al eje de la grieta y a la no uniformidad de la fuerza de tracción en la zona cohesiva, a diferencia del clásico modelo de Dugdale, el cual predice la independencia del tamaño de la zona cohesiva sobre la velocidad de grieta. Presenta un modelo que predice el tamaño de la zona cohesiva dependiente de la velocidad de grieta. Comparaciones experimentales sugieren que el modelo captura el efecto de velocidad moviéndose en grietas de materiales dúctiles.

TABLA N°2.10 .-Datos principales de la investigación actual a)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|------------------------------------|---|----------------------|
| Modelo de zona cohesiva modificada | Modelamiento de fractura en materiales dúctiles | Whu y Rhu 2014 [133] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| | Analítico | |

b) Aproximación crítica del uso de modelos de daño locales y no locales para predecir el crecimiento de la grieta dúctil y los patrones de grieta en varias condiciones de borde y carga

Utiliza el modelo de daño de Rousselier [102], el cual es utilizado para el modelamiento del crecimiento dúctil de grietas. Considera varios puntos como: aproximación en la simulación del patrón de grieta, extensión y ancho de la región con daño, comportamiento de resistencia a la fractura en situaciones de

problemas de borde simétricos y no simétricos. Muestra que también los mismos problemas pueden ser resueltos por modelos de daño no locales.

TABLA N°2.11 .-Datos principales de la investigación actual b)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|---------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Modelo de daño local y no local | Modelamiento de materiales dúctiles | Seidenfuss, Samal y Ross 2011 [107] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| Implementado en el ANSYS [7] | Elementos Finitos | |

c) Análisis Discreto de fracturamiento de presas de gravedad de concreto, basado en el campo conocido de fuerzas de inercia del análisis de respuesta lineal.

El trabajo presenta dos pasos de aproximación de grieta discreta de presas de gravedad de concreto bajo fuerza sísmica. La variación en el tiempo de las fuerzas de inercia es primero obtenida de la respuesta lineal elástica, luego para cada paso incrementa el análisis de fracturamiento discreto. La aproximación de dos pasos transforma la fuerza sísmica de un análisis dinámico a uno estático, basado en que los efectos de las grietas en la aceleración estructural son pequeños. Presenta una generalización matemática de la estrategia de solución.

TABLA N°2.12 .-Datos principales de la investigación actual c)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|---------------------------|---|------------------------|
| Modelo Distribuido | Agrietamiento en presas de concreto bajo fuerza sísmica | Ziai et al. 2013 [138] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| DIANA [37] | Elementos Finitos | |

d) Modelamiento no-lineal de vigas de concreto armado sujetas a torsión usando el modelo de fracturamiento distribuido

Examina la posibilidad de análisis no lineal de vigas de concreto armado sujetas a torsión, usando el modelo distribuido. Estudia 14 ejemplos experimentales empleando elementos finitos y los modela en el programa ANSYS [7]. Entre ellos

incluye secciones rectangulares, secciones cajón y secciones T, indicando que el modelo distribuido es capaz de realizar estimaciones aceptables.

TABLA N°2.13 .-Datos principales de la investigación actual d)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|---------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| Modelo Distribuido | Torsión en vigas | Mostofinejad y Talaeritaba 2011 [73] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| ANSYS [7] | Elementos Finitos | |

e) Modelo probabilístico para el crecimiento de fisura por fatiga de juntas soldadas en estructuras de ingeniería civil.

El trabajo presenta un modelo aproximación probabilística para la mecánica de fractura lineal elástica. Permite la determinación de la probabilidad de falla de una estructura sujeta a carga por fatiga. Determina las variables aleatorias para la ingeniería civil. Analiza el caso las juntas soldadas sometidas a fatiga en un puente.

TABLA N°2.14 .-Datos principales de la investigación actual e)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|--|---|---------------------------|
| Modelo Probabilístico y Modelo de fatiga | Análisis a fatiga de las juntas soldadas en un puente | Maljaars et al. 2012 [69] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| Programado en FORTRAN | Analítico y Elementos Finitos | |

f) Modelo estocástico multi-escala para análisis de fractura en tres dimensiones de materiales funcionalmente graduados.

Presenta tres modelos multi-escala: modelo invasivo, secuencial y concurrente, en el análisis de una fisura en dos fases, en compuestos funcionalmente graduados. Usa un algoritmo a dos escalas incluyendo análisis de microescala y macro escala en la determinación de las fuerzas conductoras de la fractura, y dos métodos estocásticos para el análisis de rehabilitación de fractura. Las fracciones de volumen de partícula son definidas por definidos por un campo

aleatorio de Poisson no homogéneo, el cual describe estadísticamente la microestructura no homogénea de compuestos funcionalmente graduados. Dos métodos estocásticos son empleados: el método de la descomposición dimensional y el método de la simulación directa de Monte-Carlo, Éstos son usados para obtener las características de la fuerza guiadora de fractura.

TABLA N°2.15 .-Datos principales de la investigación actual f)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|-------------------------------------|---|--------------------------------|
| Modelo Probabilístico – Monte Carlo | Análisis de fractura en materiales funcionalmente graduados | Chakraborty y Rahman 2011 [27] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| ABAQUS [1] | Elementos Finitos | |

g) Modelamiento de deformación finita elasto-plástica utilizando un método adaptativo sin malla.

En este estudio son usados los métodos sin malla como una posibilidad de procedimientos adaptativos simples, debido al no remallado y simple inserción o eliminación de nodos. Utiliza el método del elemento libre de Galerkin para la mecánica no lineal del sólido; así estudia problemas elasto-estáticos y extiende a problemas no lineales de deformación finita y elasto-plasticidad utilizando un proceso adaptativo nuevo, que es descrito y demostrado.

TABLA N°2.16 .-Datos principales de la investigación actual g)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|---------------------------|---|----------------------------|
| Modelo elasto-plástico | Estudio de problemas elasto-estáticos y materiales elásticos y elasto-plásticos | Ullah y Augarde 2013 [120] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| | Meshless-Método del Elemento Libre Galerkins | |

h) Un modelo de fractura embebido por un análisis de elementos finitos para materiales cuasi-frágiles

Esta publicación presenta una implementación numérica de un modelo de fractura cohesivo, para el análisis de materiales cuasi-frágiles, como el mortero, concreto y albañilería, basado en aproximaciones de discontinuidad fuerte en el

entorno de los elementos finitos, se usa un modelo de fuerza central para el esfuerzo vs la curva de abrimiento de grieta. Este modelo se implementa en una subrutina en un programa de elementos finitos comercial (ABAQUS_UMAT). Toma en cuenta la anisotropía del material y es contrastado con datos experimentales.

TABLA N°2.17 .-Datos principales de la investigación actual h)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|-------------------------------|---|-------------------------|
| Modelo de fisura cohesiva | En fracturamiento en materiales cuasi-frágiles, en modo I y modo II | Galvez et al. 2012 [89] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| Programado en ABAQUS-UMAT [1] | Método del Elementos Finitos Embebidos | |

i) Un modelo de fractura viscoelástico para materiales funcionalmente graduados con propiedades mecánicas generales

Esta publicación desarrolla un modelo de fractura viscoelástico para investigar el problema de fractura, en materiales funcionalmente graduados. El problema de materiales funcionalmente graduados es cambiado a un problema elástico con propiedades mecánicas generales. Desarrolla un modelo multicapa donde las propiedades de cada capa son descritas por funciones exponenciales. Calcula los factores de intensidad de esfuerzo invirtiendo los factores de intensidad de esfuerzo transformado. Desarrolla ejemplos de varios materiales, parámetros geométricos y condiciones de carga.

TABLA N°2.18 .-Datos principales de la investigación actual i)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|---------------------------|--|------------------------|
| Modelo viscoelástico | En fracturamiento de materiales funcionalmente graduados | Wang et al. 2013 [128] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| | Analítico | |

j) Modelo de daño gradiente acoplado con plasticidad: formulación variacional y propiedades principales

Propone una nueva formulación para la familia de modelos de daño elasto-plástico. Define la energía total que contiene un término de daño gradiente y un término que representa la disipación plástica, pero que depende también del daño. Deduce la ley de evolución de los principios de irreversibilidad, estabilidad y balance de energía, de acuerdo al término de disipación plástica, el cual aparece en ambos criterios de daño y deformación plástica. Usa una versión de elemento finito discreto con condiciones mixtas de borde. Localiza bandas de deformación plástica volviendo al problema independiente del tamaño de la malla.

TABLA N°2.19 .-Datos principales de la investigación actual j)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|---------------------------|--------------------------------|------------------------|
| Modelo de daño gradiente | En materiales elasto-plásticos | Alessi et al. 2014 [5] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| | Elementos Finitos | |

k) Modelamiento computacional de la fractura en concreto usando un método meso-macro-multiescala

Esta publicación modela un método multiescala para la fractura en el concreto, la zona de proceso de fractura es modelada por un modelo de material homogenizado mientras que en la zona de fractura de proceso se utiliza un modelo constitutivo mesoscópico no lineal, en la escala mesoscópica se modela los compuestos constituyentes del concreto (la matriz de cemento y agregados), se implementa un modelo de zona cohesiva en un contexto de método de malla libre con partición de unidad enriquecida. Es validado por resultados experimentales.

TABLA N°2.20 .-Datos principales de la investigación actual k)

| MODELO DE FRACTURA | USO | AUTOR |
|---|---|-----------------------------|
| Modelo meso-macro multiescala y modelo de zona cohesiva | En el modelamiento de materiales cuasifrágiles como el concreto | Ghosh y Chaudhuri 2013 [50] |
| PROGRAMA | MÉTODO COMPUTACIONAL | |
| | Elemento Libre de Galerkin Extendido | |

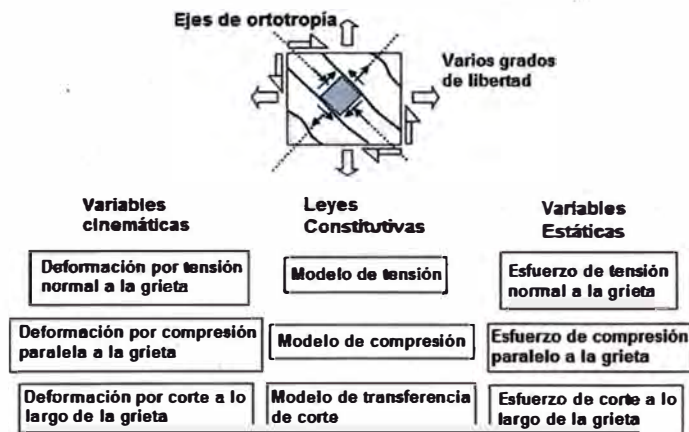
TABLA N° 2.11 CLASIFICACIÓN Y DATOS IMPORTANTES DE LOS MODELOS PRINCIPALES DE LA MECÁNICA DE FRACTURA

| MODELOS | LINEALIDAD | CONTINUIDAD | USO | AUTOR | PROGRAMAS | MÉTODOS COMPUTACIONALES | BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA |
|---|------------------|----------------------|---|--|--|---|--------------------------|
| A. MODELOS DE ZONA COHESIVA | | | | | | | |
| A.1 MODELO DE LA FRANJA DE FLUENCIA (STRIP YIELD MODEL) | No Lineal | Continuo | Es utilizado en el análisis a fractura de metales, en fractura elasto-plástica y fatiga [60], [43]; Fractura en arterias humanas / Mahanth, 2011 [68] | Dugdale (1960) [40] | ABAQUS [1], NASTRA(62), ZEBULON [136] | Elementos Finitos (FEM) [56], Elementos Libres Galerkin Extendidos (XFEM), Método del nodo fantasma (FEM-Phantom node method) | [108], [42] |
| A.2 MODELO DE BARENBLATT | No Lineal | Continuo | Desgaste en estructuras aéreas (Liu et al., 2005) [63] | Barenblatt (1962) [9] | ABAQUS [1], FASTRAN [77], NASGRO [76] | Elementos Finitos (FEM) [56], Elementos Finitos Extendidos (XFEM) [35] | [104], [25] |
| A.3 MODELO DE LA GRIETA FICTICIA (FICTIOUS CRACK MODEL) | No-lineal | Continuo/Discontinuo | Análisis de fracturamiento en presas de concreto (Shi, 2006) [109], Concreto de alto desempeño (Whitmann, 2002) [139], Fracturamiento en el domo de la Iglesia Santa María-Parma-Italia 2008 [86] | Hillerborg (1976) [54] | FRANC2D [47] | XFEM [35] | [24] |
| A.4 MODELO DE GRIETA DISCRETA | No-lineal | Continuo/Discontinuo | Estudio de las causas de colapso del puente Scholarie creek (Swenson y Ingraffea, 1991) [115]; Estudio sobre albañilería confinada (Rojas, 1994) [45] | | DIANA [37], FEAPpv [45], RCFEM [112], Interface Elements Generator [79] | FEM/Elementos Interface, XFEM [72] | [26], [101] |
| A.5 MODELO INICIALMENTE ELÁSTICO | No-lineal | Continuo/Discontinuo | Caracterización de juntas adhesivas entre metales [87]; Generalmente utilizado en la fractura frágil | Papoulia et al. (200) [87] | ABAQUS [1], FEAP [45], FRANC2D [47] | Elementos Finitos (FEM) [56] | [50] |
| A.6 MODELO FRACTAL DE GRIETA COHESIVA | Lineal | | Análisis a fatiga de metales [24] | Carpinteri (1994) [23] | | | [131] |
| A.7 MODELOS DE LA FRACTURA LINEAL ELÁSTICA | Lineal | | Análisis a fractura del contenedor de un reactor (Kurt, et al., 1995) [62]; Delaminación (Thouless y Pargimiani, 2007) [51]; Análisis a fractura de recipientes a presión de acero (Guerrero y Betegón, 2006) [55]; Estudio de la presa Zavin (Bina y Akhavan, 2013) [17]; Estabilidad de fisuras en presas de concreto | Griffith (1921) [53] | AFGROW [4], MERLIN [71], CRACKS2000 [31], Interface Element Generator [79], FEMAP [46], FRANC2D [47] | Elementos Finitos FEM [56], Edge Based Smoothed Finite Element Method SFEM [60] [135], Métodos sin Malla [95], Singular Cell Based Radial Point Interpolation Method SCS-RPIM [60], XIGA [80] [39], Formulación Variacional [18], Meshless Finite Volume Method [132] | [3], [10], [11], [96] |
| A.7.1 SOLUCIONES CONOCIDAS | Lineal | | En geometrías conocidas [116] | | NASGRO [76], AFGROW [4], FASTRAN II [77] | FEM [56], BEM [33] | [116] |
| A.7.2 MODELOS DE FATIGA | Lineal/No lineal | | Envejecimiento de estructuras de aeronáutica (Mahanth, 2011) [20], Análisis de fatiga en juntas soldadas [134], Análisis de fatiga en estructuras de albañilería [99] | | AGILE 3D, FASTRAN [77], NASGRO [76], COSMOSM [30], ABAQUS [1], VIDA [127], CAST3M [9] | XFEM [72], Método de Elementos de Borde [74] | [121] |
| A.7.3 MODELO DE PARIS | Lineal/No lineal | | Industria Aeroespacial. Diseño a fatiga de recipientes a presión [1] | Paris (1962) [88] | MSC Fatigue [74], NASGRO [76] | EFEM [75] | [75] |
| A.7.4 MODELOS DE PROPAGACIÓN | | | | | AGILE 3D, CAST3M [22] | FEM, EFEM [94], XFEM [114], NURBS (Non-uniform Rational B-Spline) [89] | |
| a) La curva R | | | En análisis de propagación de fractura, estudio de fractura en materiales de madera [75] | Broek (1991) [20] | | | |
| b) Máximos Esfuerzos Circunferenciales | | | En análisis de propagación de fractura | Erdogan (1963) | FRANC2D [47] | FEM | |
| c) Máxima Energía Potencial Liberada | | | En análisis de propagación de fractura | Hussain (1974) | FRANC2D [47] | FEM | |
| d) Teoría de la Mínima Densidad de Energía de Deformación | | | En análisis de propagación de fractura | Sih (1974) | FRANC2D [47] | FEM | |
| A.8 MODELO ELASTO-PLÁSTICO | No lineal | Continuo | Análisis de columnas estructurales (Zergua y Mohamed, 2006) [137], Fractura dúctil en modo mixto de estructuras off-shore [132], modelamiento de fractura de un material compuesto laminado [118] | | ADINA-M [3], COSMOSM [30], WARP3D | | |
| B. MODELOS DE GRIETA DISTRIBUIDOS | No lineal | | Fracturamiento en viga | Rashid (1968) [97] | DIANA [37], ATENA, VGEST [126] | Elementos Finitos, FEM-DEM [135] | |
| B.1 MODELO DISTRIBUIDO FIJO ESTANDAR | No lineal | Continuo | Estudio de la fisuración en la presa de Mequinenza-España [83], Análisis concreto en plantas nucleares (200); simulación del fracturamiento de albañilería con ladrillos 2008 [25] | Bazant and Oh (1983) | ATENA, FEAP [45] | Elementos Finitos | [101] |
| B.2 MODELO DISTRIBUIDO FIJO MULTIDIRECCIONAL | No lineal | Continuo | Estudio del fracturamiento originado por asentamiento en edificio histórico Industrielle-Holanda 2005 [101] | | DIANA [37], MASA | Elementos Finitos | [101] |
| B.3 DISTURBED STRESS FIELD MODEL | | Continuo | Análisis de concreto armado [125] | Vechio y Collins (1986) [123] | VecTor [124] | Elementos Finitos | [85] |
| B.4 NON ORTHOGONAL CRACK MODEL | | Continuo | Análisis de fracturamiento en presa en forma de arco [123] | De Borst y Nauta (1985) [35] | LUSAS [65] | Elementos Finitos | |
| B.5 ROTATING SMEARED CRACK | | Continuo | Modelamiento de un puente de concreto armado (Bac, 2006) (60); estudio a fractura de canchales de albañilería reforzada a corte 1991 [64] | Cope et al. (1980) | | Elementos Finitos | [101] |
| B.6 CRACK BAND MODEL | | Continuo | Reconstrucción de la catedral Noto Italia 2003 [122] | Bazant y Oh (1983) [13] | DIANA [37], SBETA [15], ATENA [8] | Elementos Finitos | |
| C. MODELOS DE DAÑO | | | | | | | |
| C.1 MAZARS DAMAGE MODEL | | | | Mazars (1984) | | | [92] |
| C.2 MODELO DE DAÑO ISOTROPICO | No lineal | | Fracturamiento en concreto, análisis a presión de rotura de un edificio de contención nuclear, estudio de un pórtico de concreto armado sometido a cargas estáticas y sísmicas [83], Análisis de daño de una planta de un edificio de viviendas [83] | | OOFEM [84] | Elementos Finitos | |
| C.3 MODELO DE DAÑO Y PLASTICIDAD | No lineal | | Aplicaciones Concreto [2] | Grassl y Jirásek (2006) | ATENA, ABAQUS-UMAT | Elementos Finitos Extendidos, BEM, EFEM | |
| C.4 COUPLED SMEARED CRACK AND DAMAGE | No lineal | | | | ATENA | Elementos Finitos, Método sin malla [91] | |
| C.5 MODELO DE DAÑO DE DOS PARAMETROS | | | Modelamiento de albañilería con fibra de plástico [32] | Creazza et al. (2001) [32] | | Elementos Finitos (FEM) | |
| C.6 DISCRETE DAMAGE ZONE MODEL | No lineal | Discontinuo | | Chen (1982) [28] | CAST3M [22] | | |
| D. PLASTICITY CRACK MODELS | | | | | | | |
| D.1 COMPOSITE PLASTICITY MODEL FOR CONCRETE | No lineal | | | Feenstra y De Borst (1995) | | | |
| D.2 PLASTIC ELASTIC CONSTITUTIVE MODEL | No lineal | | Cobertura de concreto para reactor nuclear | William y Warnke (1974) | SBB-3D [106] | Diferencias Finitas, Elementos Finitos (Elementos Singulares) | |
| D.3 MODELO DE PLASTICIDAD Y DAÑO | No lineal | | Fracturamiento en concreto | | | Elementos Finitos | |
| D.4 MULTICRACK PLASTICITY MODEL | | | Análisis de pilares de puente bajo cargas cíclicas 2005 [78] | Carlos y Bazant (1995) | LUSAS [65] | Elementos Finitos | |
| E. NON-LOCAL MODELS | | | | | | | |
| E.1 NON-LOCAL ELASTICITY | Lineal | | Estudio de Singularidad en Punta de Grieta | Eringen (1981), Wang (1990) | ABAQUS-Explicit-Standart | Diferencias Finitas, Elementos Finitos | [15] |
| E.2 MODELO NO-LOCAL DE DAÑO | | | Estudio de la fractura en impactos de alta velocidad en aluminio | Bazant and Pijaudier-Cabot (1987) [10] | LS-DYNA-Explicit | Elementos Finitos | |
| E.3 NON-LOCAL DAMAGE GRADIENT MODEL | | | Caracterización de la fractura en aluminio 2011 [29] | Brunet et al. (2004) | ABAQUS-UMAT | Elementos Finitos | |
| E.4 NON-LOCAL SMEARED CRACK MODEL | | | | Bazant y Lin (1988a) | | | |
| E.5 NON-LOCAL PROBABILISTIC MODELS OF FAILURE | | | | Bazant y Xi (1991) [52] | | Stochastic Finite element Method | |
| E.6 PLASTICIDAD NO LOCAL | | | En materiales cohesivo-friccionantes como el concreto [58]; En materiales dúctiles con deformaciones largas 2013 [21] | Bazant y Lin 1988 [11] | | XFEM | |
| E.7 NON-LOCAL MICROPLANE MODEL | | | | Bazant y Ozbolt (1990) [14] | | | |
| E.8 ELASTO-PLASTIC NON LOCAL DAMAGE MODEL | | | Problemas de fractura dúctil con deformaciones largas 2013 [21] | Adessi, 2002 (3) | DYNA3D (42) | XFEM | |
| F. GRADIENT ENHANCED MODELS | | | | | | | |
| F.1 GRADIENT PLASTICITY MODEL | | | Comportamiento de metales y compuestos | Borst y Mühlhaus (1992) [19] | ABAQUS(3) | Elementos Finitos | |
| F.2 GRADIENT DAMAGE MODEL | No lineal | | Viscoelasticidad | De Borst et al. (1998) [7] | | | |
| G. MODELOS VISCOSOS | | | | | | | |
| G.1 MODELO VISCO-ELÁSTICO | | | Análisis de los esfuerzos del concreto a edad temprana [9] | Norton, Chaboche, Maxwell | ANSYS [7], CAST3M [22], TAHOE (117) | Elementos Finitos | |
| H. MODELOS BASADOS EN LA MICRO-MESO ESTRUCTURA | | | Cuando la ley de escala no se cumple, en la fractura de elementos compuestos con fibras [49], estudio de la mecánica multiscala de nanocompuestos [111] | | ABAQUS | Elementos Finitos | |
| H.1 LATTICE MODEL | | | | | Z-SET (40), NEWCON3D (41), DHC (151) | Elementos Finitos-Método FE2 (151) | |
| H.2 PARTICLE MODEL | | | | Nijenhuis (1973) [81] | CFDEM (32) | | |
| H.3 ATOMISTIC MODEL | Discreto | | Estudio de la fractura en taludes de gran altura 2013 [70], Fracture in sea ice (47) | Cundall (1971) [34] | TAHOE(117), ABAQUS [1] | Discrete Element Method o Distinct Element Method | |
| H.3.1 Atomistic Montecarlo Method (MC) | | | | | OFEMD (31), LAMMPS (24) | | |
| H.3.2 Molecular Mechanics (MM) | estocástico | | Modelamiento mecanismos de falla en compuestos laminados [6] | | | | |
| H.3.3 Molecular Dynamics (MD) | determinístico | | | | | | |
| H.3.4 Pseudodynamic Model | determinístico | | | | | | |
| I. MICROPLANE MODEL | No local | | | | | | |
| I.1 MICROPLANE MODEL | No lineal | | Análisis of concrete arch dams [103] | Silling (2002) | LAMMPS-PERIDIGM (24) | | |
| J. COSERRAT O MICROPOLAR CONTINUUM MODELS | | | | | | | |
| J.1 COSERRAT O MICROPOLAR CONTINUUM MODELS | | | | Bazant y Oh (1985) (43) | ATENA [8], MASA, ABAQUS [1] | Elementos Finitos | |
| K. MODELO CONTINUO CON DISCONTINUIDAD FUERTE | | | | | | | |
| K.1 MODELO CONTINUO CON DISCONTINUIDAD FUERTE | | | Modelamiento de corte en la interfaz suelo-estructura 2012 [41] | Simo et al. () | Z-SET [140] | | |
| L. MODELOS DE FRACTURA DINÁMICA | | | | | | | |
| L.1 MODELOS DE FRACTURA DINÁMICA | | | | | CAST3M [22] | FEM, Element erosion technique, EFEM [94], Métodos sin malla | |
| L.2 DEFORMACIÓN GEOMÉTRICA DE SUPERFICIE SUAVE | Lineal | | Propagación de grietas | Paluszny y Zimmerman (2013) | | FEM-ELEMENT EROSION | |
| L.3 MODELO DINÁMICO COHESIVO EN SÓLIDOS FRÁGILES | Lineal | | Dinámica de fractura | Xu y Needleman (1994) | TAHOE [117] | FEM-INTERELEMENT SEPARATION | |
| L.4 MODELO DE DAÑO FRÁGIL | Lineal | | Dinámica de fractura | Griffith et al. (2005) | LS-DYNA [66] | InterElement Separation Method | |
| M. MODELO PROBABILÍSTICO | | | | | | | |
| M.1 MODELO PROBABILÍSTICO | | | Análisis no destructivo y rehabilitación del puente Brenner Motorway - Italia [113]; Análisis probabilístico para evaluar la rehabilitación de una estructura con pocos datos de las grietas [72] | Graham y Tetelman (1974) [52] | FREET-SARA [73] | Elementos Finitos | [93] |
| N. MODELO VARIACIONAL A LA FRACTURA | Lineal | Continuo | Mismos problemas de la mecánica de fractura lineal | Francfort y Marigó (2005) | | Formulación Variacional [8] | [36] |

CAPÍTULO III: UN MODELO MATEMÁTICO EN EL ANÁLISIS DE LA FRACTURA

Los modelos más utilizados en el modelamiento de la fractura son los modelos distribuidos. Entre ellos se pueden clasificar según la libertad de la grieta para girar en:

a) Modelo Distribuido Fijo



b) Modelo Distribuido Rotado

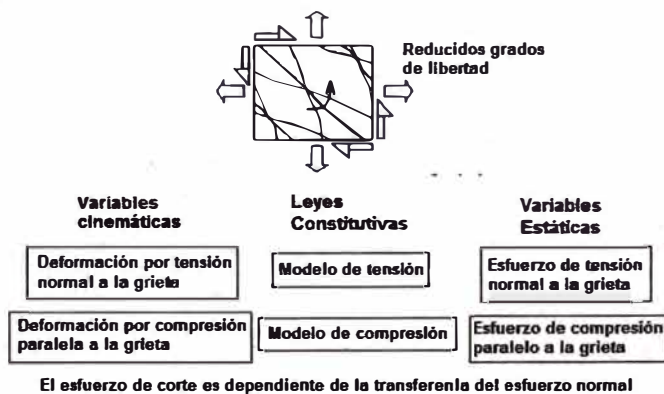


FIGURA N° 3.1 .- Esquema del modelo de fractura distribuido

Fuente: MAEKAWA, A., PIMANMAS, A., OKAMURA, H. *Non Linear Mechanics of Reinforced Concrete*, Spon Spress, New York, 2003

Para el desarrollo de un modelo matemático en el análisis de la fractura, se ha escogido el Modelo Distribuido Multidireccional, que es básicamente un modelo distribuido fijo, con variaciones en la formulación, siendo un modelo intermedio

entre el modelo fijo y el modelo rotado. Presenta practicidad en el campo de la ingeniería y fácil implementación numérica, dado que no precisa de remallado comparado con otros modelos. Es así, que la mayoría de los programas comerciales de elementos finitos que analizan el caso de fractura lo han implementado satisfactoriamente.

3.1 MODELO DISTRIBUIDO DE FRACTURA FIJO MULTIDIRECCIONAL

La idea de los modelos distribuidos es propuesta por Rashid [97] en 1968, y desarrollada por Bazant [13] en 1983 y mejorada por Rots [100] en 1987. El modelo distribuido fijo multidireccional o "Multidirectional Fixed Crack Model", considera al cuerpo como continuo, el cual va degradando su rigidez, principalmente por causa de la progresiva micro-fisuración y crecimiento de vacíos es decir, la rigidez en la dirección del esfuerzo principal de tensión es gradualmente reducida a cero.

Está basado principalmente en las relaciones existentes entre esfuerzo y deformación, idealizando la existencia de bandas, en las cuales ocurre la fisuración y considerándose como propiedad del material.

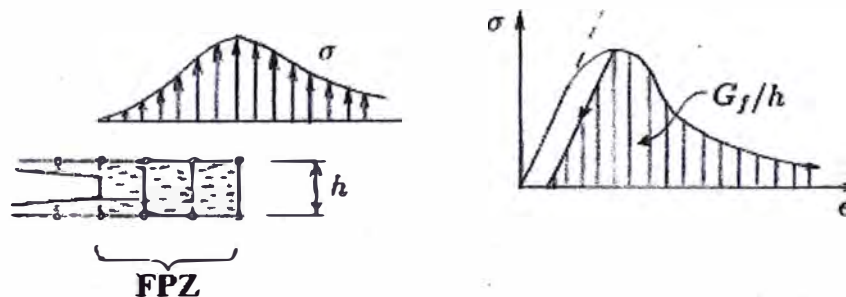


FIGURA N°3.2.- Idealización de la grieta del modelo distribuido

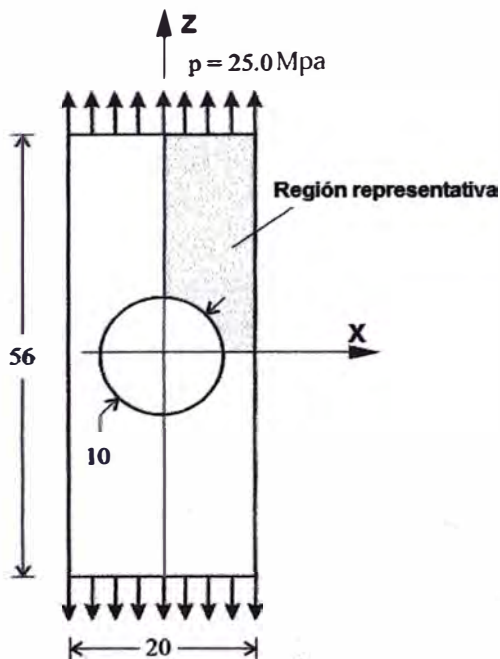
Fuente: BAZANT, Z., JIRASEK, M. "Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage", Journal of Engineering Mechanics, vol. 128, pp. 1119-1149, 2002.

El modelo distribuido considera que la grieta es en forma roma. A partir de la punta roma comienzan a aparecer las micro-fisuras las cuales aparecen en el ancho de banda h . El esfuerzo se considera que aumenta progresivamente en la zona de fisuración (FPZ).

Para observar el aumento progresivo del esfuerzo en la zona de fisuración, que es aquella que sigue a la punta roma de grieta, utilizamos un ejemplo sencillo, que consiste en modelar con elementos finitos una placa con un agujero en forma de elipse en el medio, la cual es sometida a tracción. Para ello se usó el software libre ADINA de 900 nodos [3].

La elipse al inicio será un círculo de radio 5 mm, el cual va achatándose en forma de elipse, hasta formar una grieta, se observa el campo de esfuerzos alrededor de la elipse y los esfuerzos ZZ e YY.

Se aprovecha la simetría para modelar la cuarta parte, restringiendo convenientemente los desplazamientos en los ejes de simetría.



Datos:

Todas las dimensiones en mm

Espesor = 1 mm

$E = 7.0 \times 10^4$ Mpa

$\nu = 0.25$

FIGURA N°3.3 Placa con un agujero elíptico en el centro

En el programa ADINA [3], se obtuvieron los siguientes resultados:

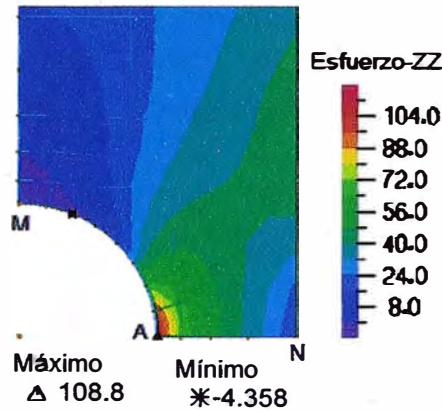


FIGURA N°3.4 .- Esfuerzo ZZ en la placa con un agujero circular de radio 5mm

Cuando la elipse es un círculo de radio 5 mm, en la distribución de esfuerzos se puede observar que la máxima concentración de carga se da en A (que es la punta de la grieta), y luego continúa a un ritmo decreciente

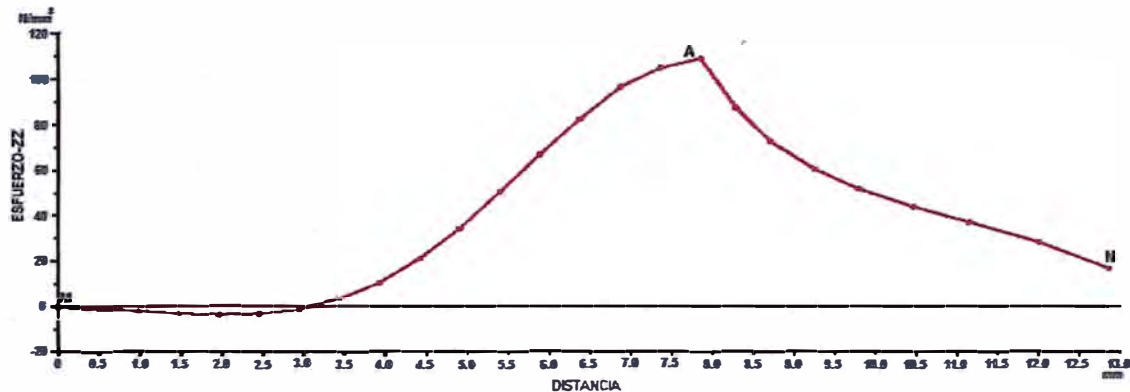


FIGURA N°3.5 .- Esfuerzo ZZ en el segmento MAN, en la placa con agujero circular de radio 5mm

El gráfico muestra la variación de los esfuerzos en MAN, observando que la distribución se ajusta con la hipótesis del modelo (Fig. N° 3.3) y la predicción de la mecánica de fractura lineal (propuesta por Inglis [55]), en que el máximo esfuerzo se ubica en la punta de grieta A.

En el último paso (se simula una grieta), después de achatar la elipse hasta casi la formación de una grieta, el esfuerzo ZZ, se observan los parámetros mas pronunciados a una grieta alrededor del segmento MAN:

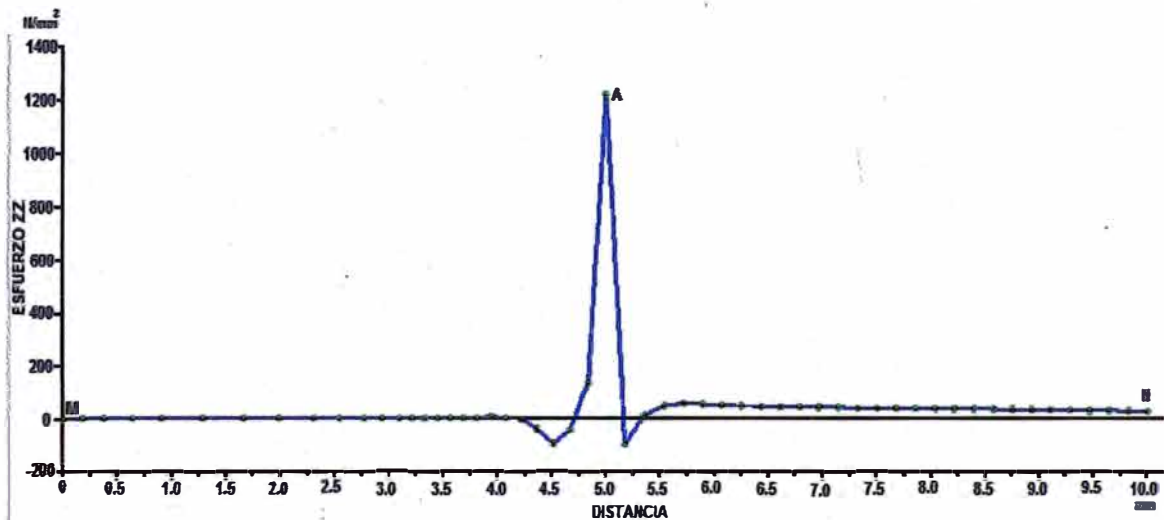


FIGURA N°3.6.- Esfuerzo ZZ en el segmento MAN, en la placa con agujero elíptico con eje menor 0.125mm y eje mayor 5 mm

Se va cerrando el agujero, disminuyendo un eje de la elipse hasta formar una grieta, siguiendo lo propuesto por Griffith, en donde se obtuvo:

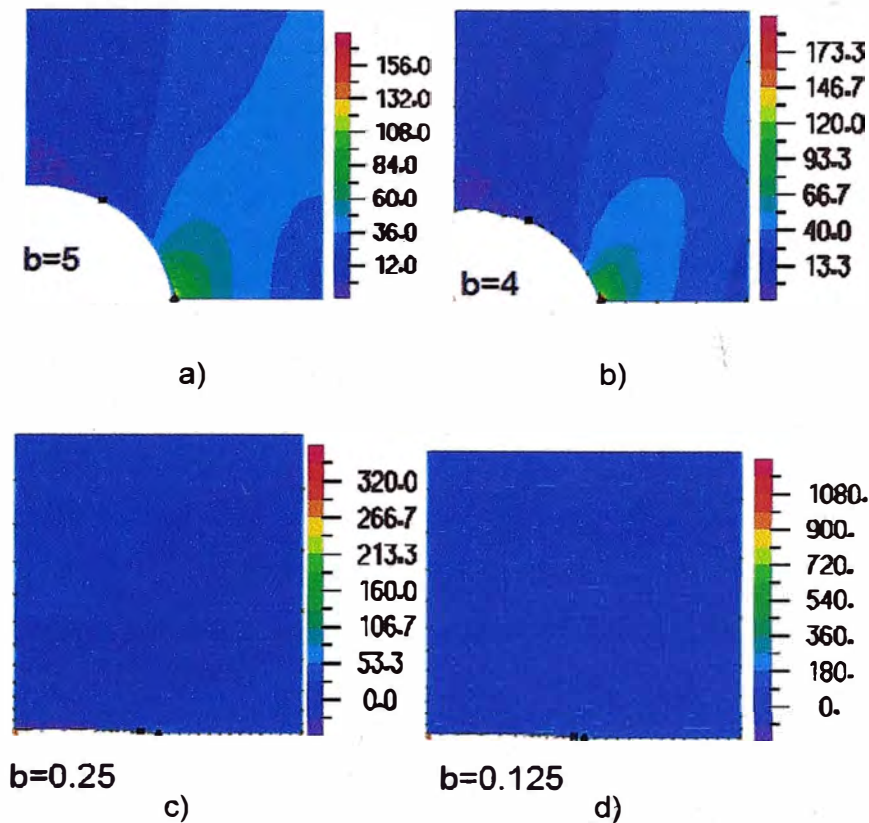


FIGURA N°3.7.- Distribución de esfuerzos ZZ en 4 etapas del achatamiento de la elipse a) cuando el eje menor de la elipse es 5 mm, b) cuando el eje menor de la elipse es 4mm c) cuando el eje menor de la elipse es 0.25 mm d) cuando el eje menor de la elipse es 0.125 mm

En la fig a) la elipse tiene ejes 4 mm y 5 mm, en la fig b) ejes 3mm y 5 mm, en la fig c) ejes 0.25 mm y 5 mm y d) ejes 0.125 mm y 5 mm.

Se observa que a medida que se cierra la elipse, los esfuerzos en la cercanía de la punta aumentan y se localizan en la misma, en c) y d) ya no se observan gráficamente porque se encuentran muy localizados.

| Ejes | Elipse 0 | Elipse 1 | Elipse 2 | Elipse 3 | Elipse 4 | Elipse 5 | Elipse 6 | Elipse 7 |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| b | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0.5 | 0.25 | 0.125 |
| a | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

| Elipse | esfuerzo ZZ |
|--------|-------------|
| 0 | 108.8 |
| 1 | 166.9 |
| 2 | 243.8 |
| 3 | 357.6 |
| 4 | 535.6 |
| 5 | 750.1 |
| 6 | 984.3 |
| 7 | 1217 |

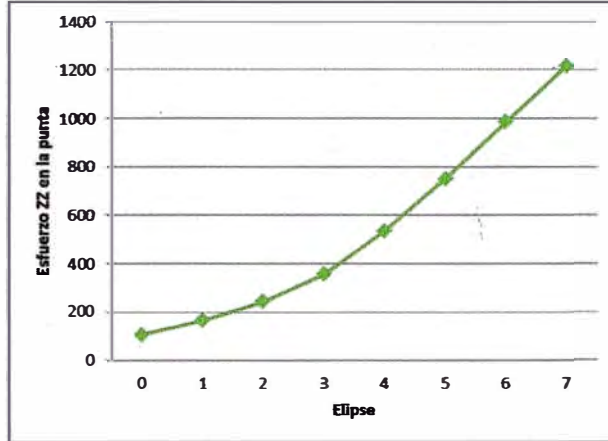


FIGURA N°3.8 .- Esfuerzo ZZ en el punto A, a medida que decrece el eje menor de la elipse

| Elipse | esfuerzo YY |
|--------|-------------|
| 0 | 22.84 |
| 1 | 22.57 |
| 2 | 45.6 |
| 3 | 70.63 |
| 4 | 138 |
| 5 | 223.5 |
| 6 | 296.2 |
| 7 | 359.3 |

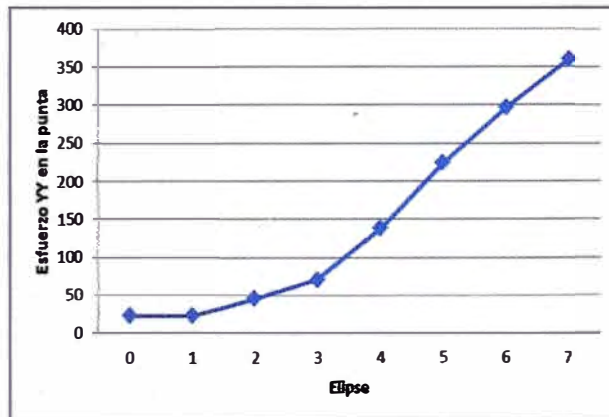


FIGURA N°3.9 .- Esfuerzo YY en el punto A, a medida que decrece el eje menor de la elipse

La formulación del Modelo Distribuido de Fractura Fijo Multidireccional y las formulas mencionadas en la Figura N° 3.9, se encuentra en el anexo III.

3.2 PROCESO DE ANÁLISIS DEL MÉTODO DE FRACTURA DISTRIBUIDO

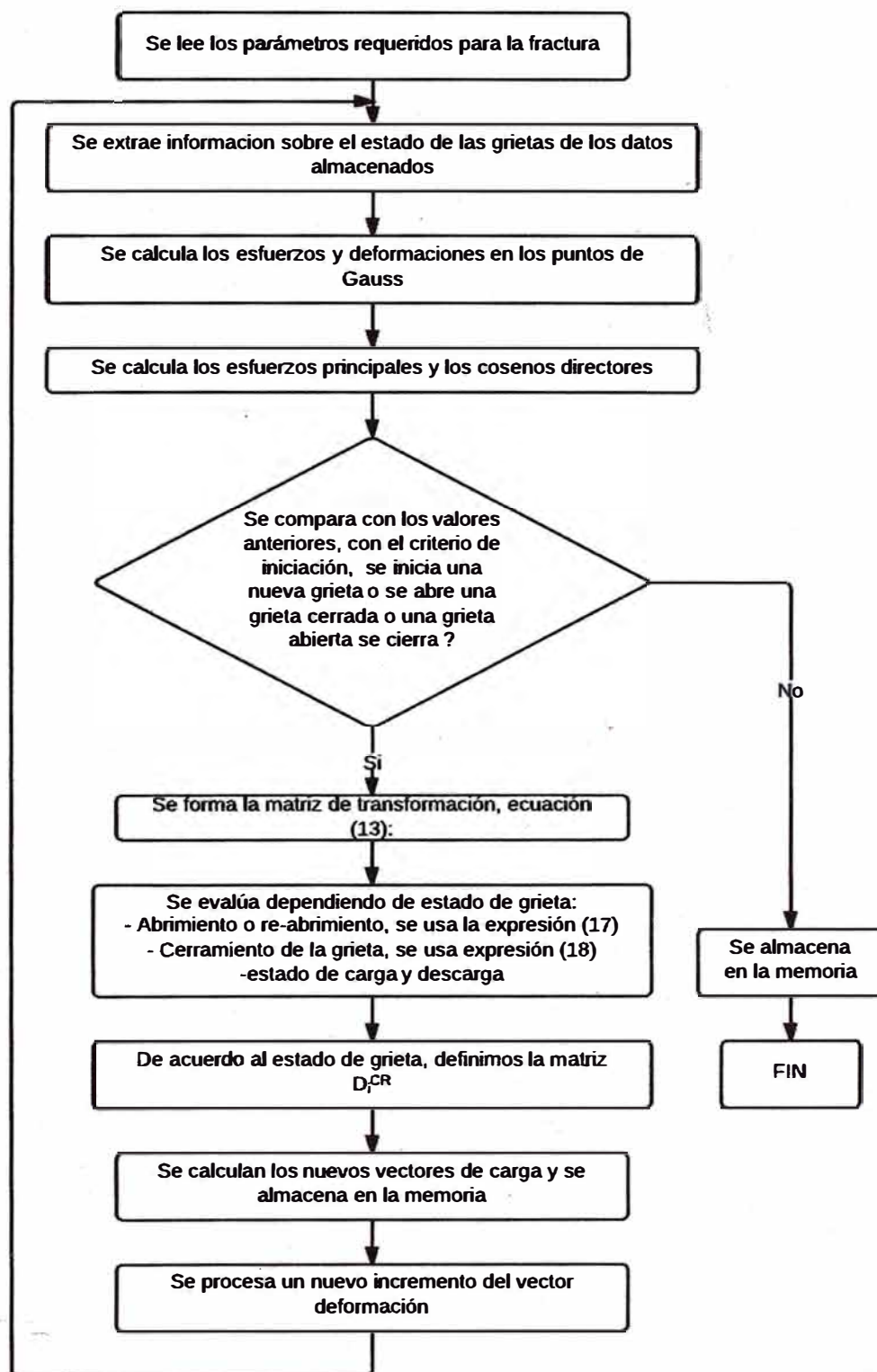


FIGURA N° 3.10.- Proceso general de análisis por agrietamiento por el modelo de fractura distribuido

Fuente: Adaptado de ROTS G., "Computational Modeling of Concrete Fracture". Tesis presentada en Delf University of Technology, Delft, 1988.

CAPÍTULO IV: APLICACIONES

4.1 VIGA DE TRES PUNTOS A FLEXIÓN

Se presenta como aplicación, una viga de concreto primeramente modelada por Kaplan [59], porque permite observar indirectamente la viga en tensión y compresión. Además de ello presenta facilidad para ser estudiada en el laboratorio. Es un ejemplo simple que permitirá comprender el desarrollo complejo que ocurre en elementos estructurales sometidos a diversas cargas que se observa cotidianamente.

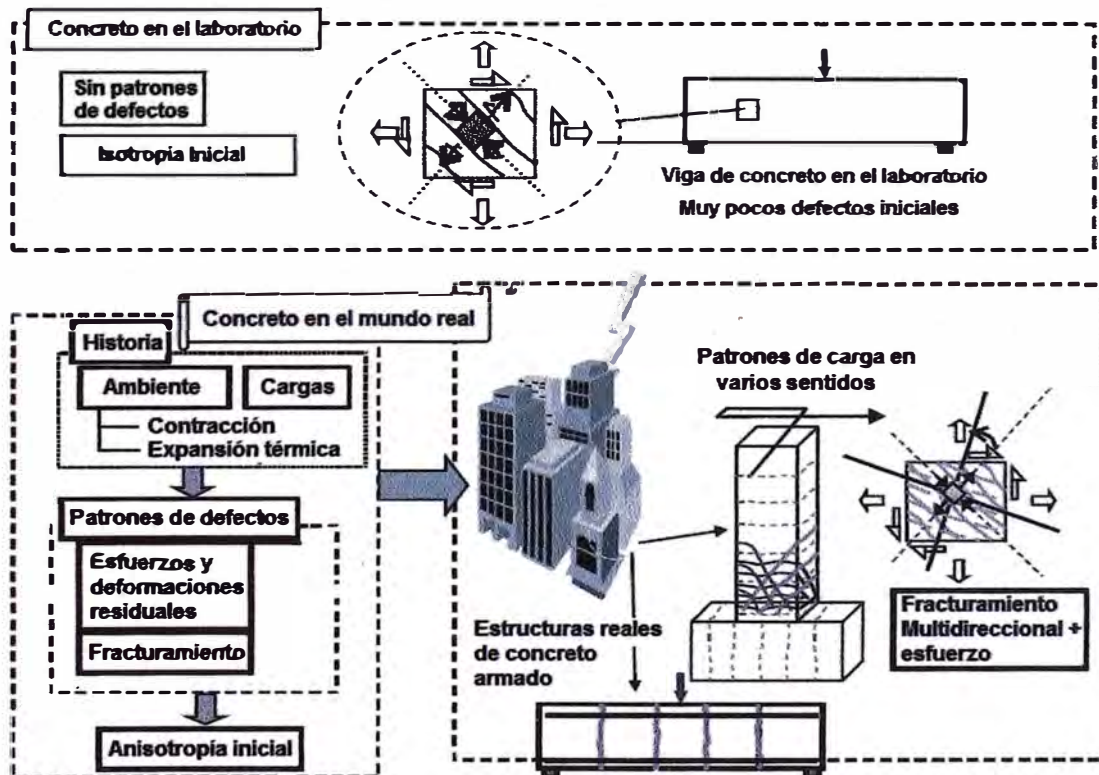


FIGURA N° 4.1 .- Comparaciones entre el entorno del ensayo de una viga en el laboratorio y las estructuras en el mundo real.

Fuente: MAEKAWA, A., PIMANMAS, A., OKAMURA, H. *Non Linear Mechanics of Reinforced Concrete*, Spon Spres, New York, 2003.

Los parámetros de esta viga pueden ser obtenidos por pruebas de tensión directa, o realizando un análisis inverso de los datos registrados de fuerza-deflexión en la misma viga con muesca de tres puntos.

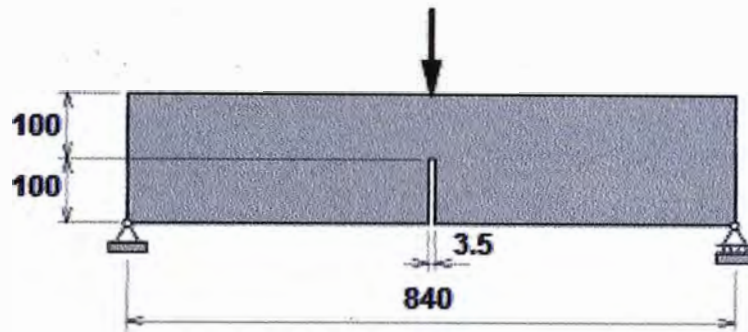


FIGURA N° 4.2 .- Viga modelada, de tres puntos a flexión

Las dimensiones de la viga son: longitud $L = 840$ mm, ancho $b = 100$ mm, altura $h = 200$ mm, espesor de la muesca $t = 3.5$ mm.

Se utiliza el programa DIANA 9.4.4 [37]. El procedimiento consiste en someter a la viga a incrementos de carga o desplazamiento en la parte central, obteniendo, en cada punto del sólido, incrementos en la deformación.

El manual detallado del proceso en el programa DIANA, se encuentra en el anexo I.

El procedimiento general del análisis de elementos a fracturamiento se puede expresar como:

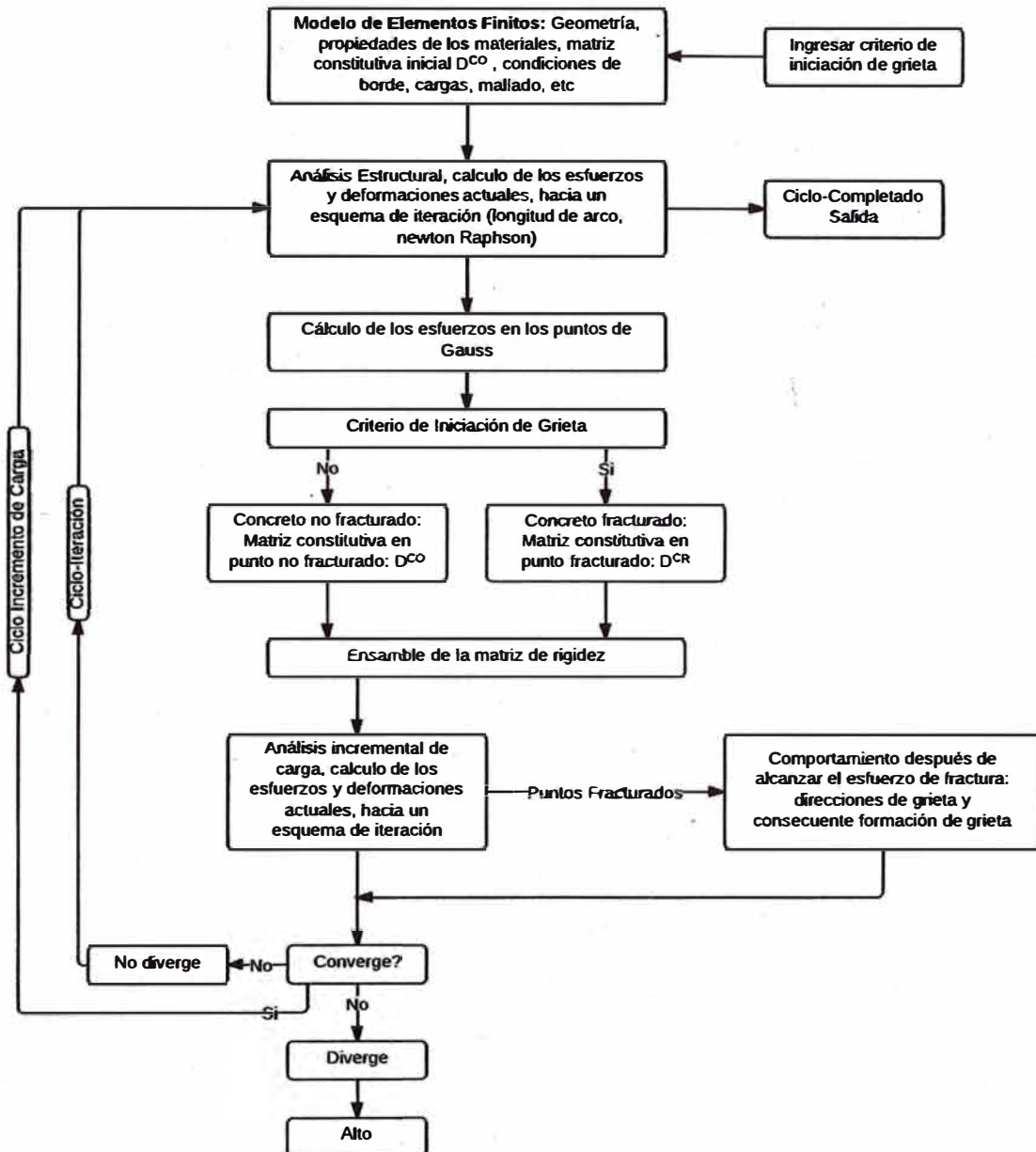


FIGURA N° 4.3 .- Esquema General del proceso de análisis

El análisis en el programa DIANA 9.4.4, se divide en tres etapas:

El pre-procesamiento: es la etapa donde se ingresan los datos, necesarios para el análisis

El procesamiento: es donde se realiza el análisis propiamente.

El post-procesamiento: es donde se muestran los resultados obtenidos en el procesamiento

4.1.1 Pre-procesamiento

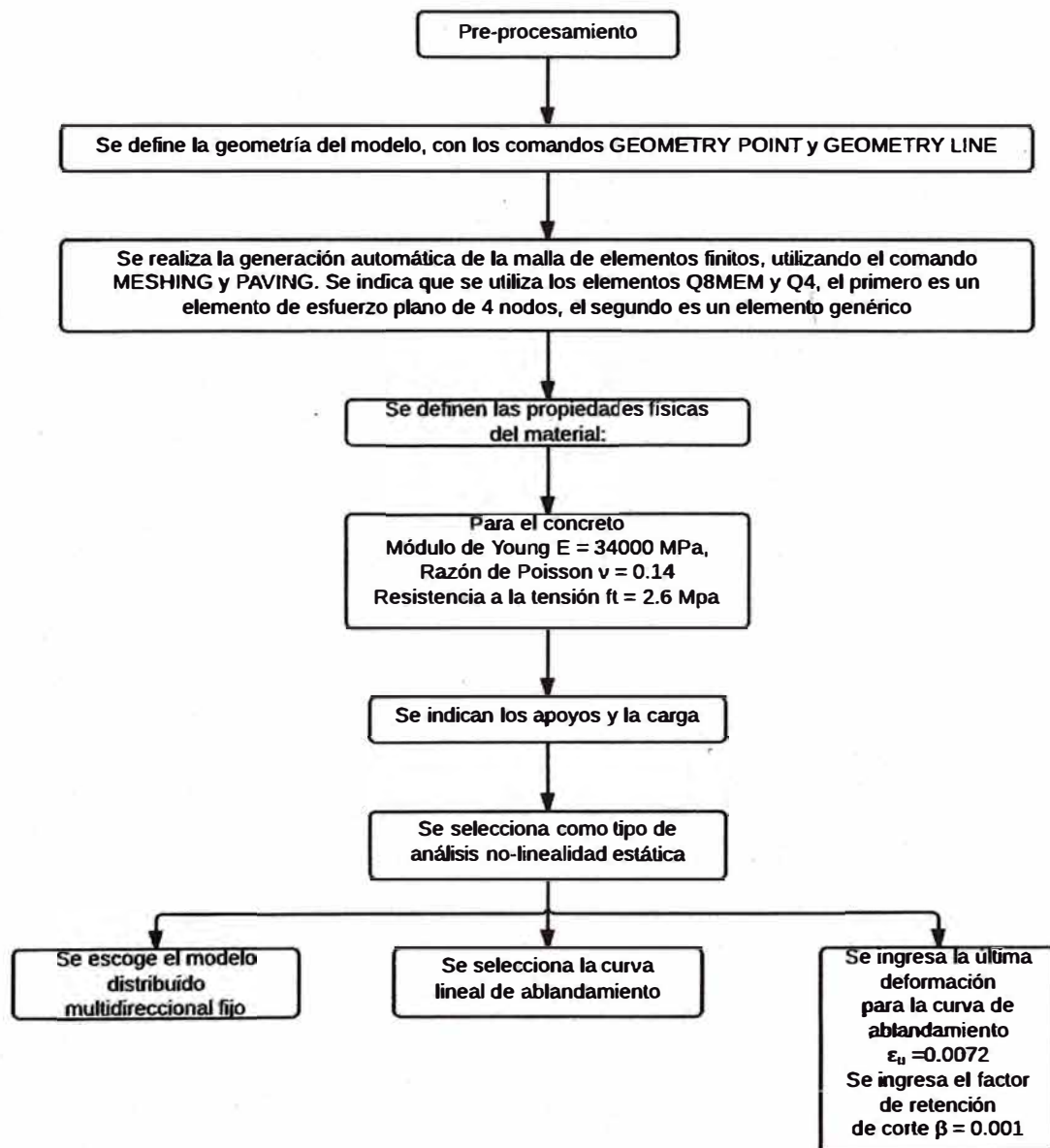


FIGURA N° 4.4 .- Esquema básico de ingreso de datos en el pre-procesamiento

4.1.2 Procesamiento

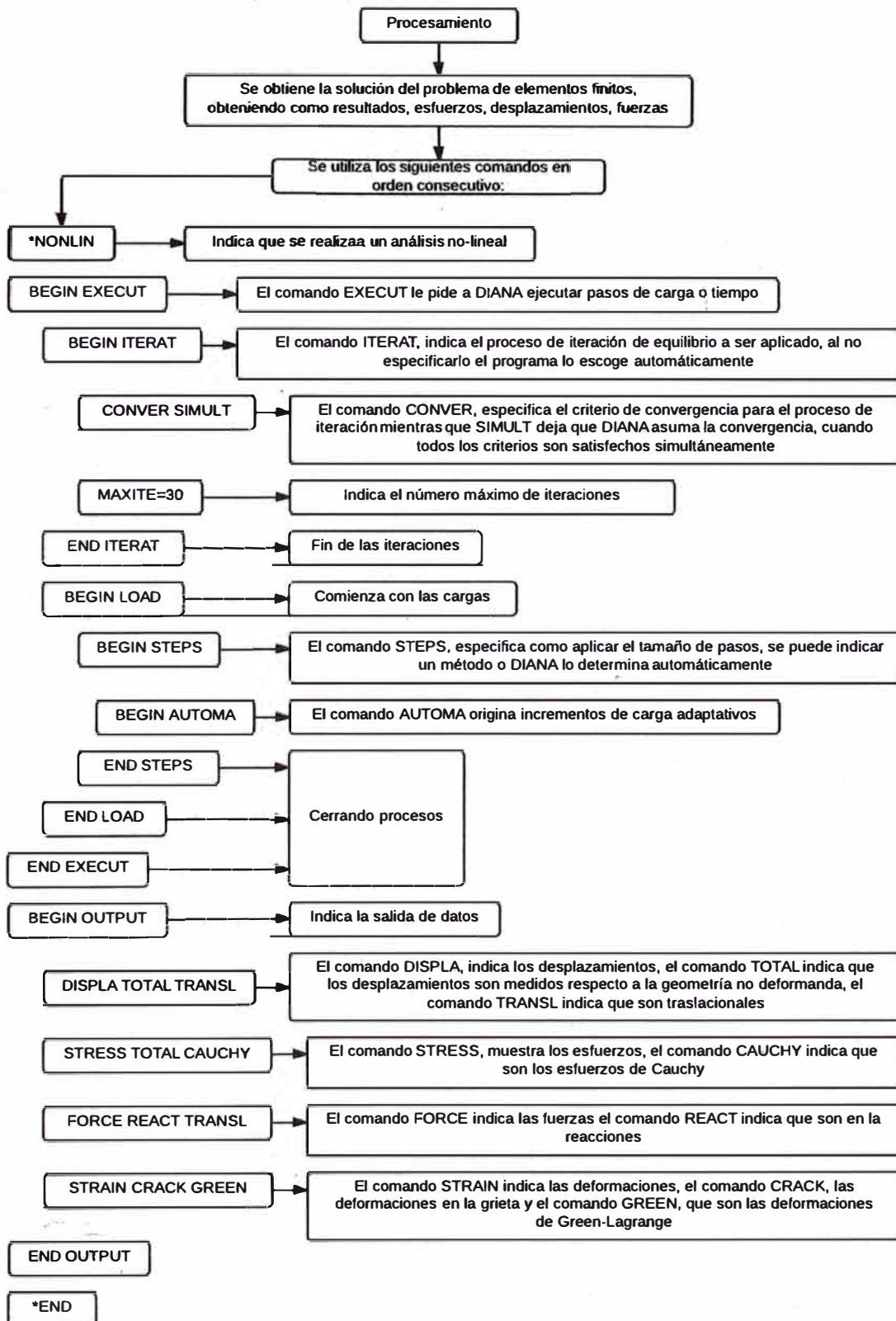
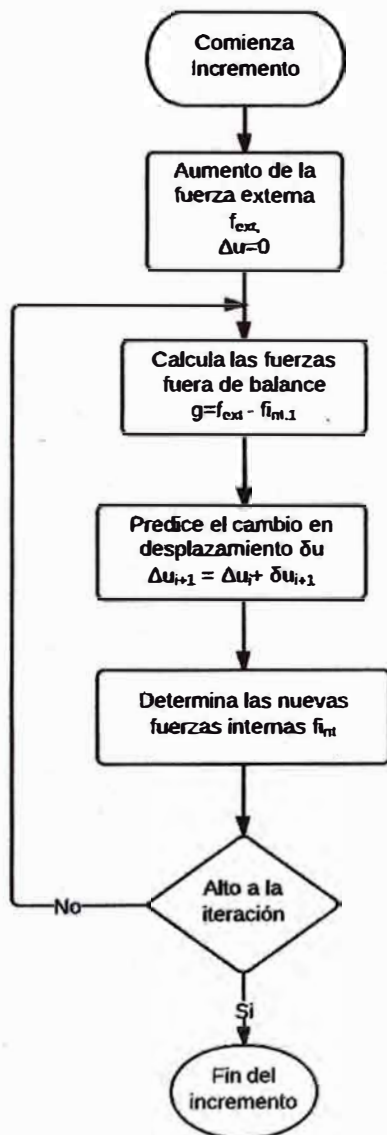


FIGURA N° 4.5 .- Esquema de procesamiento con los comandos del programa DIANA, para el análisis no lineal

Proceso Iterativo General utilizado por el programa DIANA



Δu , es adaptado iterativamente por incrementos δu , hasta que se alcanza el equilibrio es alcanzado, o se cumpla la tolerancia.

Los incrementos iterativos son calculados usando la matriz de rigidez, que puede variar en cada iteración.

Diana presenta los siguientes métodos de iteración:

- Método de Newton-Raphson
- Método de Quasi Newton
- Método de Rigidez Constante
- Método de Longitud de Arco

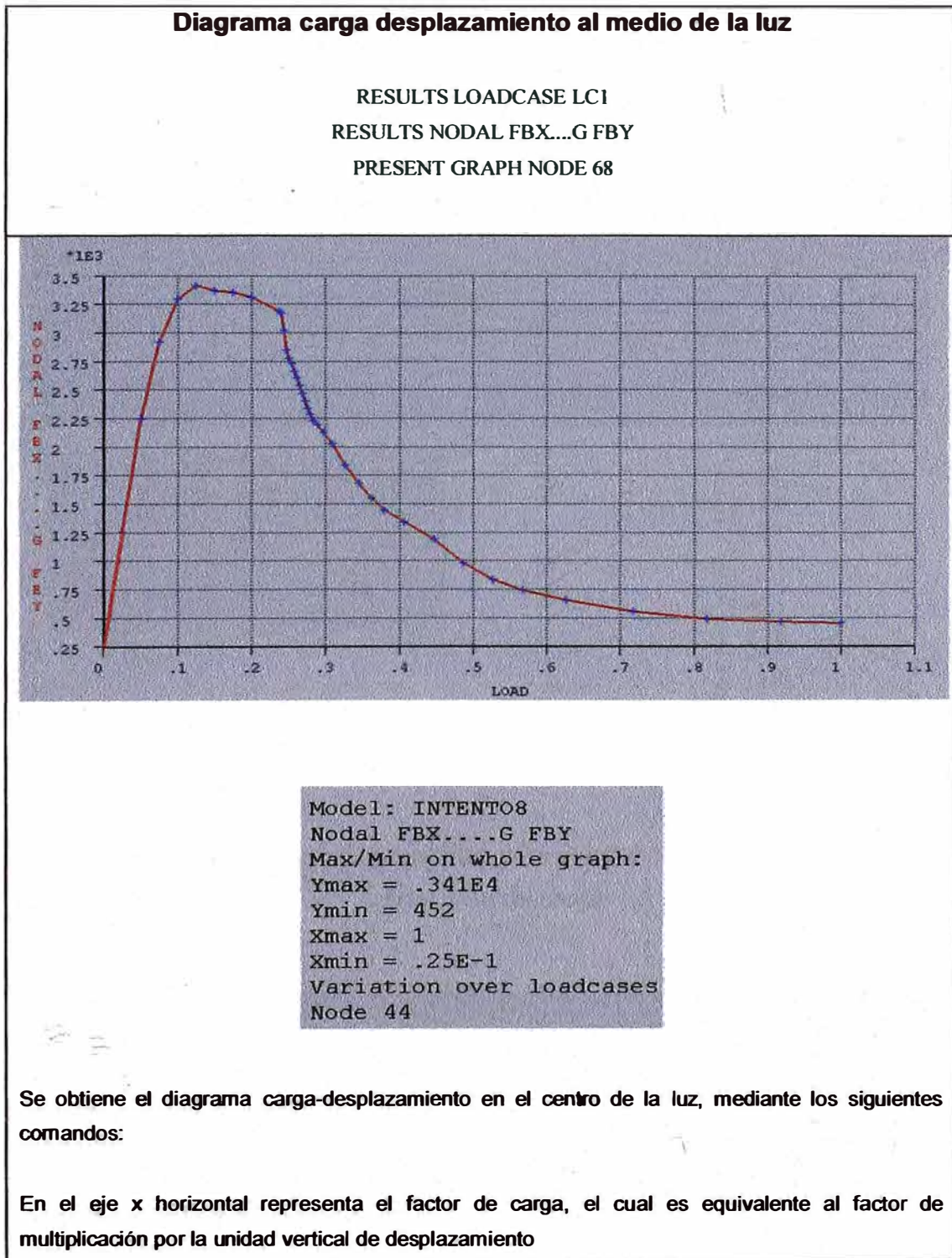
La diferencia entre los procedimientos es como se calcula δu .

FIGURA N° 4.6.- Esquema general del proceso de análisis iterativo

4.1.3 Post-procesamiento

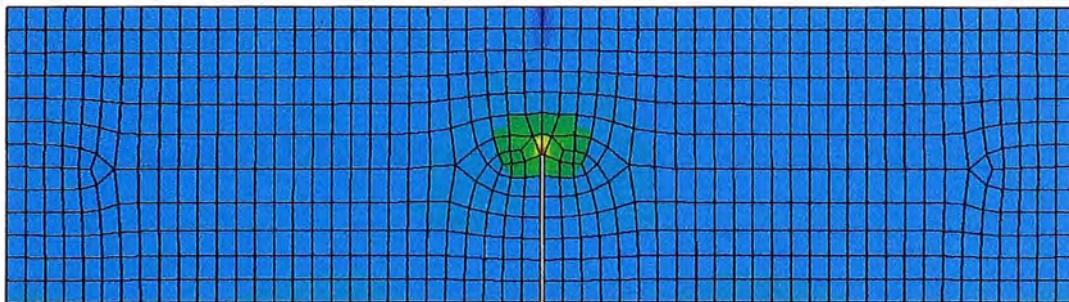
Diagrama de carga desplazamiento al centro de la luz

TABLA N° 4.1 .- Resultados del Post-procesamiento

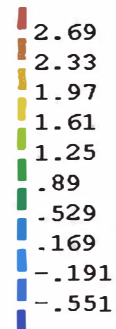


Esfuerzos principales en las etapas de cargamiento

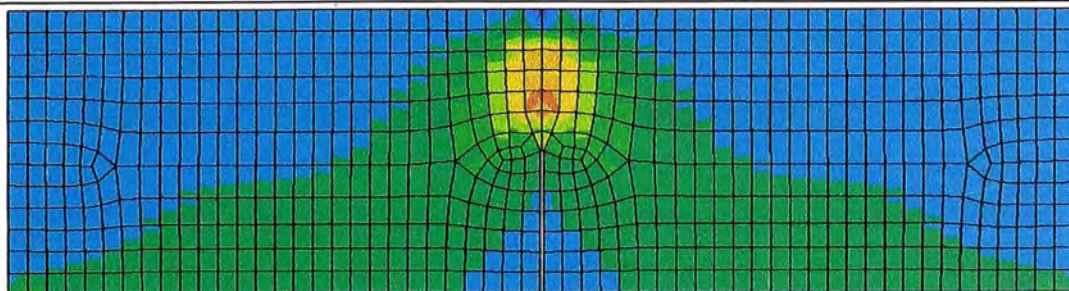
VIEW MESH
VIEW EDGES
EYE FRAME
LABEL MESH NODES OFF
RESULTS LOADCASE LC1 1
RESULTS ELEMEN EL.SXX.G SXX
RESULTS CALCULATE P-STRESS P1 2DSORT
PRESENT CONTOUR LEVELS
RESULTS LOADCASE LC1 48
DRAWING DISPLAY



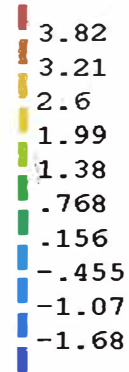
```
Model: INTENT08  
LC1: Load Case 1  
Step: 1 LOAD: 1.25E-1  
Element PRINC STRESS P1MAX  
Calculated from: EL.SXX.G  
Max = 3.05 Min = -.911
```



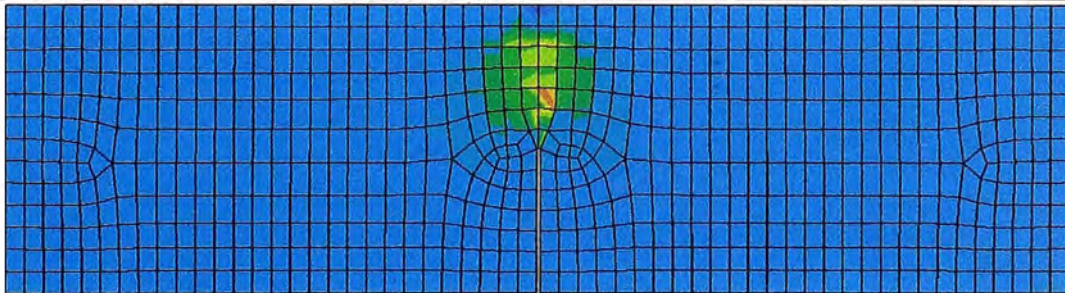
Se observan los esfuerzos principales para el paso 1: LOAD CASE 1 es el primer caso de carga



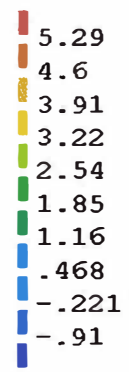
```
Model: INTENTOS  
LC1: Load case 1  
Step: 10 LOAD: .24  
Element PRINC STRESS PMAX  
Calculated from: EL.SXX.G  
Max = 4.43 Min = -2.29
```



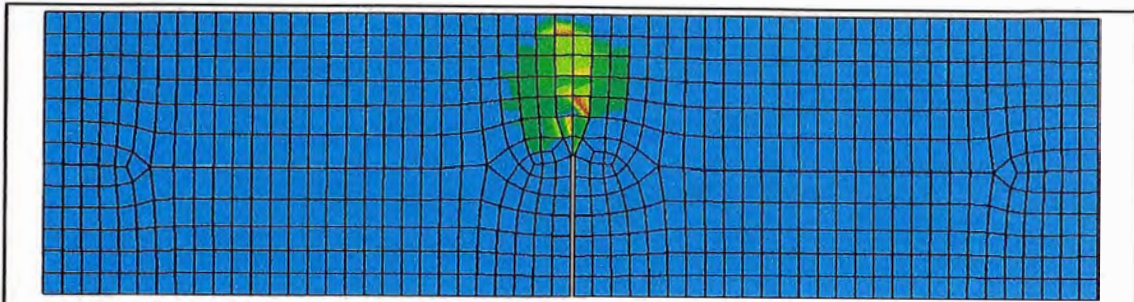
Se observan los esfuerzos principales para el paso 10: LOAD CASE



```
Model: INTENTOS  
LC1: Load case 1  
Step: 20 LOAD: .275  
Element PRINC STRESS PMAX  
Calculated from: EL.SXX.G  
Max = 5.98 Min = -1.6
```



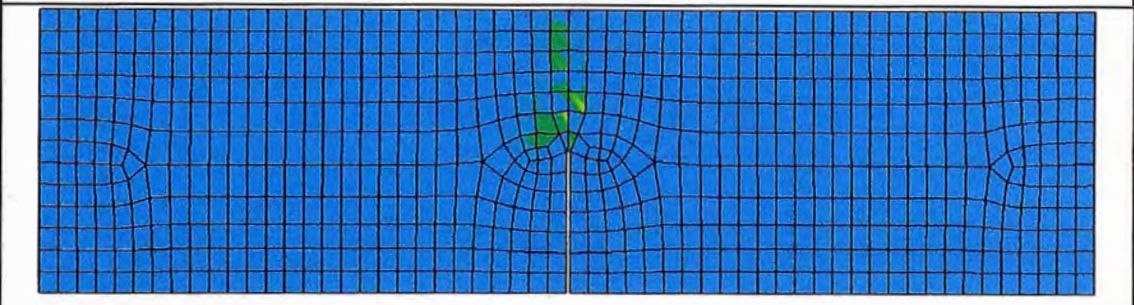
Se observa los esfuerzos principales para el paso 20: LOAD CASE



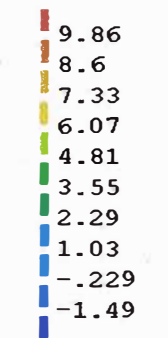
```
Model: INTENT08  
LC1: Load case 1  
Step: 30 LOAD: .407  
Element PRINC STRESS PMAX  
Calculated from: EL.SXX.G  
Max = 6.45 Min = -2.53
```



Se observan los esfuerzos principales para el paso 30: LOAD CASE 1



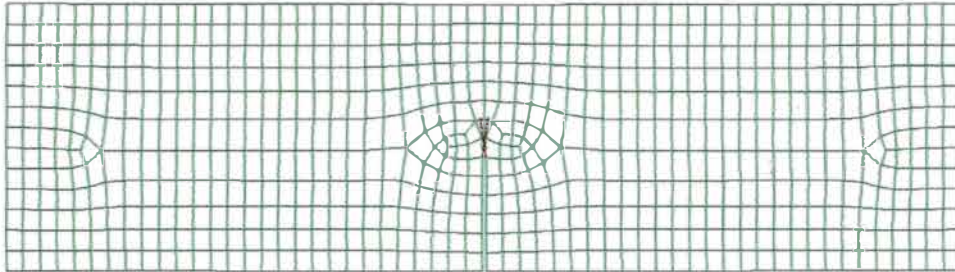
```
Model: INTENT08  
LC1: Load case 1  
Step: 58 LOAD: 1  
Element PRINC STRESS PMAX  
Calculated from: EL.SXX.G  
Max = 11.1 Min = -2.75
```



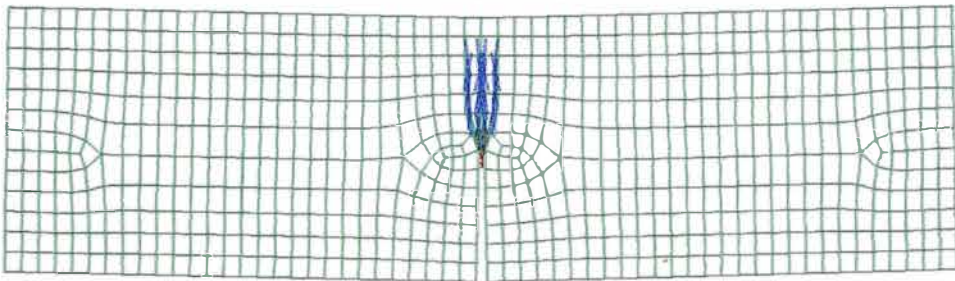
Se observa los esfuerzos principales para el paso 58: LOAD CASE 1

Patrones de grieta

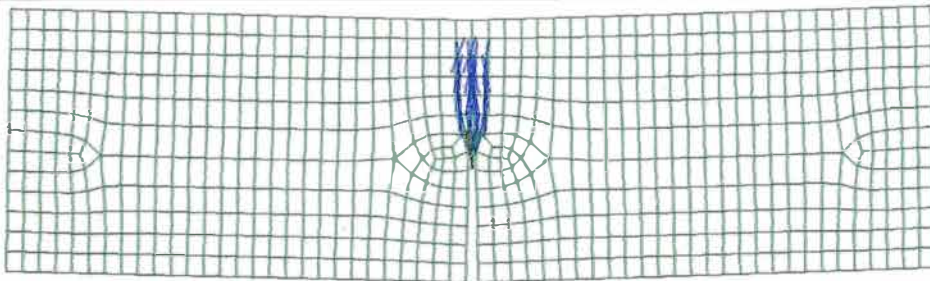
RESULTS GAUSSIAN EL.EKNN1 EKNN
PRESENT DISC 0.2
VIEW OPTIONS DEFORM USING TDTX...G RESTDT



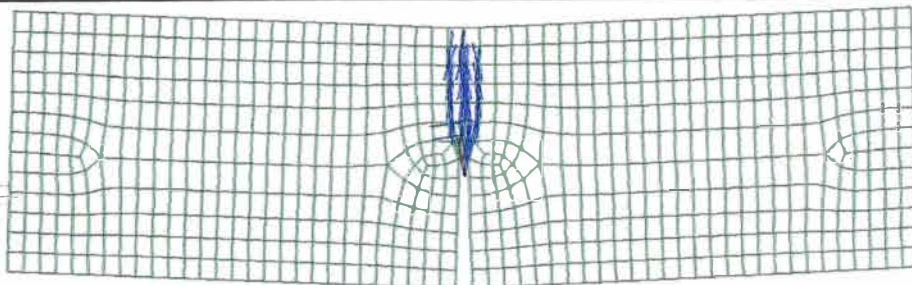
LOAD CASE 1 PASO 1



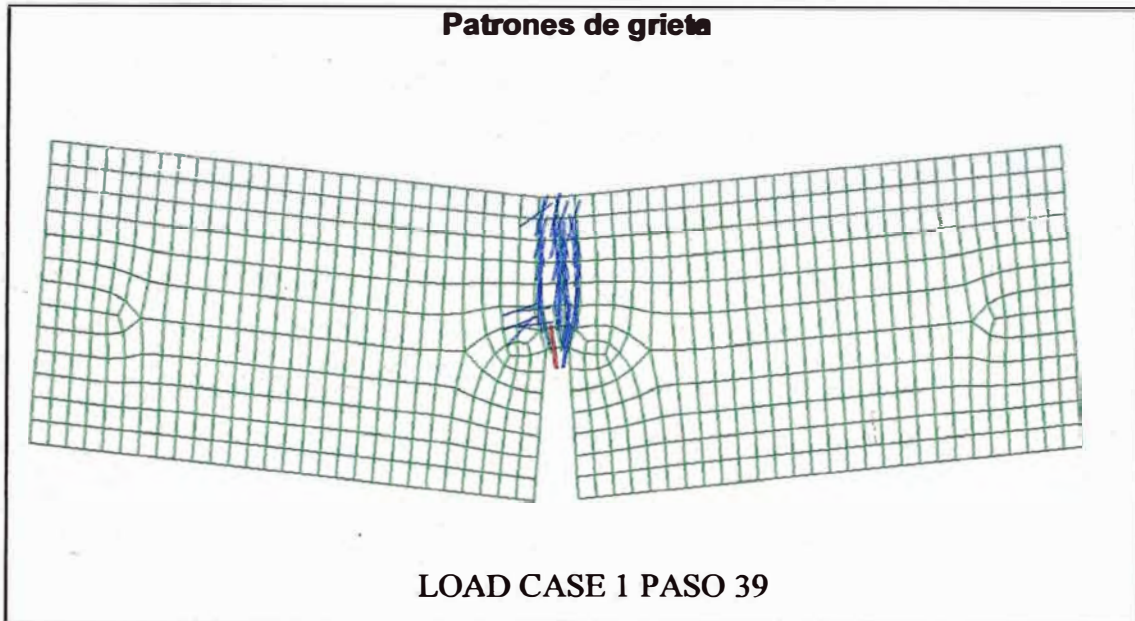
LOAD CASE 1 PASO 10



LOAD CASE 1 PASO 20



LOAD CASE 1 PASO 30



4.1.4. Validación experimental

El proceso de validación consiste en comparar los resultados numéricos obtenidos con los que se encuentran en la literatura. Se compara el diagrama carga desplazamiento al centro de la luz con los resultados experimentales obtenidos por Ting [119].

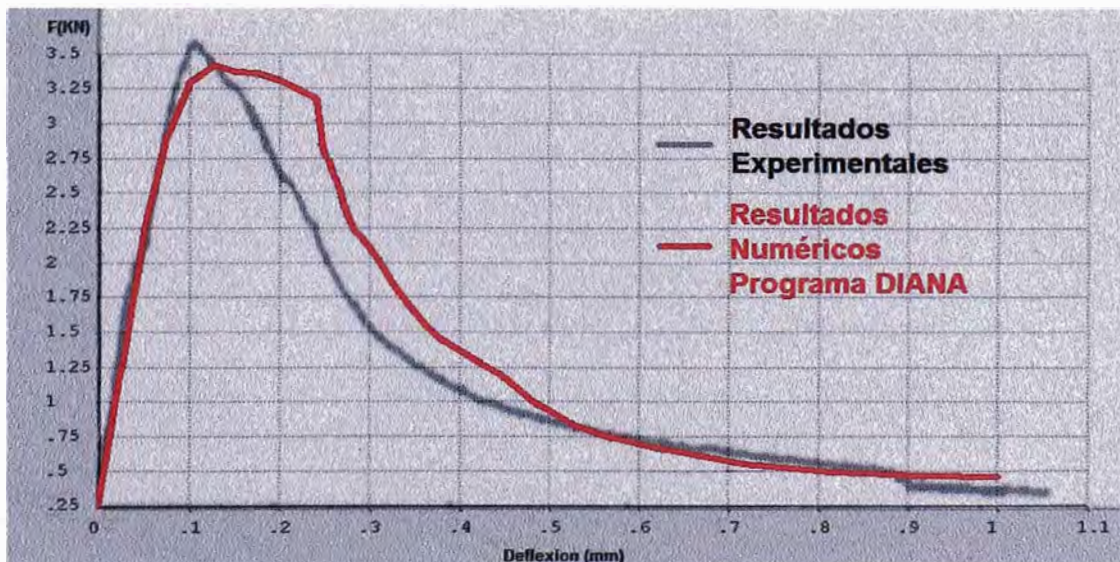


FIGURA N° 4.7 .. Comparación entre resultados numéricos y experimentales.

Los valores obtenidos en la simulación, se encuentran próximos a los experimentales. La diferencia entre los valores pico es de 0.16 KN. El máximo error local es de 0.93 KN, mientras que el error total resultó 16%, lo que indica que existe una comparación satisfactoria con los resultados experimentales. Los errores se pueden deber a varios factores, como la variación en la posición de punto exacto donde se toma la medición, la calibración correcta del ancho de banda y errores de aproximación durante el proceso de análisis. Finalmente se puede concluir que el análisis reproduce correctamente el resultado experimental.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

El estudio de los conceptos de la mecánica de fractura, proporciona una manera global de analizar las estructuras considerando la presencia de grietas y defectos, los cuales no son considerados en los análisis cotidianos y pueden ocasionar un análisis inadecuado por parte del diseñador estructural.

Se presenta una tabla con todos los modelos encontrados, autores, años, fuentes, software, aplicaciones y bibliografía recomendada, dándose a conocer la amplia gama de aplicaciones y el carácter evolutivo de la mecánica de fractura. Dependiendo del tipo de material, el detalle de análisis, el tiempo y la capacidad de los micro-procesadores y la practicidad, se puede escoger el modelo más adecuado. Además sirve como punto de partida en el conocimiento de los mismos hacia una mayor comprensión, siguiendo las referencias.

Cuando el comportamiento es gobernado por la fractura, los conceptos de la mecánica de fractura se hacen necesarios e imprescindibles. Actualmente se han desarrollado numerosos programas de cómputo que han implementado correctamente muchos de los modelos de la mecánica de fractura. Sólo si la estructura no es sensible a la fractura se debería usar los métodos convencionales.

La simulación del fracturamiento, por el modelo de fracturamiento distribuido multidireccional fijo, utilizando la herramienta de los elementos finitos, con el modelo constitutivo de ablandamiento lineal, se ha mostrado eficiente para materiales cuasi-frágiles como el concreto, resultando que el programa DIANA es un programa fiable en la modelación de estructuras de concreto que presentan fractura.

5.2 RECOMENDACIONES

El presente trabajo presenta conceptos básicos de la mecánica de fractura, los cuales han tomado aceptación en la enseñanza y práctica profesional mundial, siendo nuestra realidad ajena a la misma y al avance de mecánica de fractura. Se recomienda estudiar, investigar y desarrollar los modelos mencionados en el presente trabajo, para lo cual se sugiere comenzar con la bibliografía recomendada, ya que se amplía la forma de enfocar el análisis estructural dado que es un tema que influye en el sector industrial y académico.

Se recomienda desarrollar también el desarrollo de técnicas de monitoreo a fractura, principalmente de estructuras esenciales, lo que ayudaría a evitar colapsos inesperados, los cuales pueden ser precedidos por la mecánica de fractura.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ABAQUS Version 6.10 online documentation, SIMULIA Inc, 30 de noviembre del 2003, 2:10 h <http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/overview/>
- [2] ABU, T., VOYIADJIS, G. "Plasticity Damage Model for Concrete under Cyclic Multiaxial Loading", 23 de octubre de 2003, 12.00 h en: http://csmlab.lsu.edu/pdppapers/1993_plasticity-damage_model.pdf.
- [3] ADINA, Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis, ADINA R&D, 30 de noviembre del 2003, 3:30 h <http://www.adina.com/n900.shtml>.
- [4] AFGROW. Fracture Mechanics and Fatigue Crack Growth Analysis software tool, 27 de diciembre del 2003, 1:10 <http://www.afgrow.net/>.
- [5] ALESSI, R., MARIGO, J., VIDOLI, S., "Gradient Damage Models Coupled with Plasticity: Variational Formulation and Main Properties". *Journal Mechanics of Materials*, 2014.
- [6] ANDERSON, T., *Fracture Mechanics*, CRC Press, Miami, 2005.
- [7] ANSYS. Software de Simulación Numérica en Ingeniería, Ansys Inc, 12 de enero del 2014, 12:20 <http://www.ansys.com/>.
- [8] ATENA, Advanced Tool for Engineering Analysis, Cervenka Consulting, 30 de noviembre del 2003, 13:30 h <http://www.cervenka.cz/products/atena/>.
- [9] BARENBLATT, G., "The Mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture", *Journal Advances in Applied Mechanics*, V.7, pp.55-129, 1962.
- [10] BAZANT, Z., PIJADIER-CABOT, G. "Nonlocal damage theory", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 113, pp. 1512–1533, 1987.

- [11] BAZANT, Z., LIN, F. "Non-local Yield Limit Degradation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 1805-1823, 1988.
- [12] BAZANT, Z., Mechanics of Fracture and Progressive Cracking in Concrete Structures, 23 de febrero del 2014, 12:00 h
<http://www.civil.northwestern.edu/people/bazant/PDFs/Papers/S14.pdf>
- [13] BAZANT, Z., OH, B., "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", *Journal of Materials and Structures*, vol. 16, pp.155-157, 1983.
- [14] BAZANT, P., OZBOLT, J. "Non local microplane model for fracture, damage, and size effect in Structures", *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116, pp. 2485-2505, 1990.
- [15] BAZANT, Z., PIJADIER-CABOT, G. "Nonlocal Damage, Localization, Instability and Convergence", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55, pp. 287-293, 1988.
- [16] BHARDWAJ, G., SINGH, I. Numerical Simulation of Static Cracks using Extended Isogeometric Analysis, 21 de febrero del 2014, 23:20 h
http://www.nacomm2013.org/Papers/031-inacomm2013_submission_274.pdf
- [17] BINA, K. y AKHAVAN M. Stability Assessment of Concrete Gravity Dams Using Fracture Mechanics Criteria; Case Study Zavin Dam, 12 de febrero del 2013, 3:10 h <http://7thsastech.khi.ac.ir/uploads/Papers/Civ-and-Geo/42.pdf>
- [18] BOURDIN, B., FRANCFORT, G., MARIGO J., *The Variational Approach to Fracture*, Springer, Paris, 2008.
- [19] BORST R., MUELHAUS H. "Gradient-Dependent Plasticity: Formulation and Algorithmic Aspects" *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 521-539, 1992.
- [20] BROEK, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. , Sijthoff & Noordhoff International Publishers, Dordrecht, 1978.

[21] BROUMAND, P., KHOEI, A. "The extended finite element method for large deformation ductile fracture problems with a non-local damage-plasticity model", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 112, pp. 97-125, 2013.

[22] CAST3M, Código de Elementos Finitos, 23 noviembre del 2013, 1:20 h
<http://www-cast3m.cea.fr/index.php?xml=presentation>.

[23] CARPINTERI A. "Fractal Nature of Material Microstructure and size effect of concrete on apparent mechanical properties," *Journal of Mechanics Materials*, vol. 18, pp. 89-101, 1994.

[24] CARPINTERI, A., SPAGNOLI, A., VANTADORI S., "Some Applications of Fractal Fracture Mechanics to Describe the Fatigue Behaviour of Materials" *Journal de Engineering Materials*, vol 378, pp. 350-378, 2008.

[25] CARPINTERI, A., INVERNIZZI, S., LACIDOGNA, G. "Cracking simulation of brick-masonry elements subjected to the double flat-jack test", *Structural Analysis of Historic Construction*, vol. 1, pp. 367-374, 2008.

[26] CERVENKA, J. "Discrete Crack Modeling in Concrete Structures". PhD thesis, University of Colorado, Boulder, 1994.

[27] CHAKRABORTY, A., RAHMAN S. "Stochastic multiscale fracture analysis of three-dimensional functionally graded composites" *Journal of Fracture Mechanics*, vol. 78, pp. 27-46, 2011.

[28] CHEN, W. *Plasticity in reinforced concrete*. McGraw-Hill, Nueva York, 1982.

[29] CHOW, C., MAO, J., SHEN, J. Nonlocal Damage Gradient Model for Fracture Characterization of Aluminum, 1 de enero del 2014 12:23 h
https://www.academia.edu/1923337/Nonlocal_Damage_Gradient_Model_for_Fracture_Characterization_of_Aluminum_Alloy

- [30] COSMOSM. Programa de Investigación Estructural y Análisis, 23 de noviembre de 2012, 13:23 h <http://www2.htw-dresden.de/~fem/Docs/COSMOSM/UsersGuide.pdf>
- [31] CRACKS2000. Programa de Análisis de Integridad Estructural, 13 noviembre de 2013, 20:09 h <http://cracks.udri.udayton.edu/PurchasingInfo.htm>
- [32] CREAZZA, G., SAETTA, A., MATEAZZI, R., VITALINI, R. Analysis of Masonry Structures Reinforced by FRP, 13 de enero de 2014, 2:23 h http://civil.uminho.pt/masonry/Publications/Historical%20constructions/page%20539-546%20_40_.pdf.
- [33] CRUSE, T. *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [34] CUNDALL, P. "A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems." *International Symposium on Rock Fracture*, ISRM, Nancy, 1971.
- [35] DE BORST, R., NAUTA, P. "Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model", *Engineering and Computation*, vol. 2, pp. 35-46, 1985.
- [36] DEL PIERO, G., *A Variational Approach to Fracture and Other Inelastic Phenomena*, Springer, Ferrara, 2014.
- [37] DIANA V.9.4.4, Displacement Analyser, TNO Research, 12 de noviembre de 2013 23:21 h <http://tnodiana.com/>.
- [38] DOMINIQUE, F., ANDRE P., ANDRE Z., "Mechanical Behaviour of Materials" en *Mechanics of Fracture and Damage*, vol. 2, Springer, Ontario, 2013.
- [39] DOMINIQUE, P. *Fracture Mechanics*, Springer, Nueva York, 1998.

[40] DUGDALE, D., "Yielding of Steel Sheets Containing Slits" en *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, pp.100-104, 1960.

[41] EBRAHIMIAN B., NOORZAD, A., ALSALEH M., "Modeling Shear Localization along Granular Soil-Structure Interfaces using Elasto-Plastic Cosserat Continuum", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, pp. 257-278, 2012.

[42] ELICES, M., GUINEA G., GOMEZ J., PLANAS J. " The Cohesive Zone model: Advantages, Limitations and Challenges", *Journal de Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, pp. 137-163, 2002.

[43] ERNST, H., POLLITZ, E. Modelling Elasto-Plastic Crack Growth with the Dugdale Model, 26 de octubre de 2013, 12:23 h <http://www.structuralintegrity.eu/pdf/esis/Documents/Conference/ECF/9/art17.pdf>

[44] FASTERAN, Programa de Análisis estructural de Agrietamiento por Fatiga, 3 de noviembre de 2013, 23:34 h <http://nix.nasa.gov/search.jsp?R=19940002843&qs=N%3D4294414925%2B4294966508%2B4294966513>

[45] FEAPpv. Programa Multipropósito de Elementos Finitos, 9 de enero de 2014, 23:56 h <http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/feappv/>

[46] FEMAP. Software para Análisis Estructural, 2 de enero de 2014, 12:12 h <http://www.nenastran.com/engineeringsoftware/femap.php>

[47] FRANC2D , Software de fractura, Cournell Fracture Group, 21 de enero de 2014, 4:56 h http://www.cfg.cornell.edu/software/franc2d_casca.htm.

[48] GONZÁLEZ, J. *Mecánica de Fractura*, Editorial Limusa, Ciudad de México, 2004.

[49] GONZALES, C., LLORCA J., "Multiscale Modeling of Fracture in Fiber-Reinforced Composites", *Acta Materialia*, vol. 54, pp. 4171-4181, 2006.

- [50] GHOSH, A., CHAUDHURI, P., "Computational Modeling of Fracture in Concrete Using a Meshfree Meso-macro-multiscale Method", *Journal of Materials Science*, vol. 69, pp. 204-215, 2013.
- [51] GUERRERO, M., BETEGON, A. Análisis a Fractura de Recipientes a Presión Fabricados en Aceros de Alta Resistencia HSS, 23 de septiembre del 2013, 3:21 h <http://www.gef.es/Congresos/23/pdf/3-10.pdf>
- [52] GRAHAM, T., TETELMAN, A., "The Use of Crack Size Distribution and Crack Detection for Determining the Probability of Fatigue Failure", *Journal Structural Dynamics Materials*, pp. 74-393, 1974.
- [53] GRIFFITH, A., "The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids", *Journal de la Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, V.221, pp.163-198, 1920.
- [54] HILLERBORG, A., MODÉER, M. y PETERSSON, P. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", en *Journal Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp.773-782, 1976.
- [55] INGLIS, C.E., "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp comers", *Transactions of the Institute of Naval Architects*, pp.219-241, 1913.
- [56] INGRAFFEA, A., WAWRZYNEK P., "Finite Element Methods for Linear Elastic Fracture Mechanics", Capítulo 3.1 en *Comprehensive Structural Integrity*, R. de Borst y H. Mang (eds), Elsevier Science Ltd., Oxford, 2003.
- [57] IRWIN, G., "Handbuch der Physik," Vol. 6, pp. 551-590. Springer, Berlin, 1958.
- [58] JIRASEK, M., GRASSL, P. (2014, Ene. 23). Nonlocal Plastic Models for Cohesive-Frictional Materials, 23 de enero de 2014, 12:12 h <http://userweb.eng.gla.ac.uk/peter.grassl/tempFiles/jirgra04.pdf>

- [59] KAPLAN, M., "Crack propagation and the fracture concrete", *Journal of ACI*, vol. 58, pp. 591-610, 1961.
- [60] KOTOUSOV, A., WANG, C. Strip Yield Model for a Crack in a Plate of Arbitrary Thickness, 24 de enero de 2014, 23:22 h <http://www.gruppofrattura.it/ocs/index.php/esis/ECF14/paper/viewFile/6774/5154>
- [61] KARIHALOO, B. *Fracture Mechanics & Structural Concrete*, Logman Scientific & Technical, Harlow, 1995.
- [62] KURT, C., SCHULZ, G., YAHR T. Preliminary Fracture Analysis of the Core Pressure Boundary Tube for the Advanced Neutron Source Research Reactor, 22 de febrero de 2014, 22:22 h <http://www.osti.gov/scitech/biblio/205046>
- [63] LIU, Q., HAMEL, P., SHARP, P., LAHOUSSE, A. y CLARCK G. Modeling of Stable Tearing in Aircraft Structures, 18 de diciembre de 2013, 2:21 h <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a433497.pdf>
- [64] LOFTI. H., SHING, P. "An Appraisal of Smeared Crack Models for Masonry Shear Wall Analysis", *Journal of Computer y Structures*, vol. 41, pp. 413-425, 1991.
- [65] LUSAS, Engineering Analysis Software, 21 de enero de 2013, 21:21 h <http://www.lusas.com/>
- [66] LS-DYNA, A Combined Solver, 11 de febrero del 2014, 11:11 h <http://www.ls-dyna.com/>
- [67] MAEKAWA, A., PIMANMAS, A., OKAMURA, H. *Non Linear Mechanics of Reinforced Concrete*, Spon Spress, New York, 2003.
- [68] MAHANTH, A., "Fracture analyses of aging aircraft structures and human aorta", Tesis de maestría, Universidad de Nebraska, Lincoln, 2011.

[69] MALJAARS J., STEENBERGEN A., VROUWENVELDER W. Probabilistic model for fatigue crack growth and fracture of welded joints in civil engineering structures”, *International Journal of Fatigue*, vol. 38, pp. 108-117, 2012.

[70] MEJIA, L. Aplicación del modelo de elementos discretos (Dem) en el modelamiento de la propagación y coalescencia de fracturas en taludes de gran altura, 10 de enero de 2014, 3:34 h http://www.youtube.com/watch?v=nk_J8qJ-4RA

[71] MERLIN, Manual de software, Universidad de Colorado, 21 de enero de 2014, 23:34 h http://e-pub.uni-weimar.de/opus4/frontdoor/deliver/index/docId/335/file/M_94.pdf.

[72] MOHAMMADI, S. *XFEM Fracture Analysis of composites*, John Wiley & Sons, Chichester, 2012.

[73] MOSTOFINEJA, D., TALAEITABA S. “Nonlinear Modeling of RC Beams Subjected to Torsion using Smeared Crack Model” *Procedia Engineering*, vol. 14, pp. 1447-1454, 2011.

[74] MSC FATIGUE, Programa de Elementos Finitos de Fatiga y Fractura, 21 de enero de 2014, 23:55 h <http://www.mssoftware.com/product/msc-fatigue>

[75] NAIM, J., MATSUMOTO, N. Fracture Modeling of Crack Propagation in Wood and Wood Composites Including Crack Tip Processes and Fiber Bridging Mechanics, 1 de marzo de 2014, 21:22 h <http://www.cof.orst.edu/cof/wse/faculty/Nairn/papers/icf12Paper.pdf>.

[76] NASGRO, Fracture Mechanics and Fatigue Crack Growth Analysis Software, 12 de febrero de 2014, 3:34 h <http://www.swri.org/4org/d18/mateng/matint/nasgro/default.htm>.

[77] NEWMAN J., “FASTRAN II – A Fatigue Crack Growth. *Structural Analysis Program*, NASA TM 104159, 1992.

[78] NGUYEN, V., CHAN, A. Comparisons of smeared crack models for RC bridge pier under cyclic loading, 30 de agosto de 2013, 3:12 h
http://www.acmeuk.org/13_Conference/paper_26.pdf

[79] NGUYEN V., Interface Element Generator: software para generación de elementos de interface, 30 de diciembre de 2013, 23:32 h
<https://sites.google.com/site/phuvinhnguyensite/home/programs>.

[80] NGUYEN, V., BORDAS S. Extended Isogeometric Analysis for Strong and Weak Discontinuities, 21 de febrero del 2014, 22:45 h
<http://ie.archive.ubuntu.com/disk1/disk1/download.sourceforge.net/pub/sourceforge/c/cm/cmcodes/xiga-udine.pdf>.

[81] NIJENHUIS, W. *De Verplaatsingsmethode: Toegepast voor de Berekening van (staaf) Constructies*, Agon-Elsevier, Amsterdam, 1973.

[82] NOGUEIRA, T., "Faturamento do Concreto Estrutural: Aspectos Teóricos, Computacionais e Experimentais, e suas Aplicações," Tesis para concurso de docencia, Escuela Politécnica de la Universidad de São Paulo, São Paulo, 1999.

[83] OÑATE, E. Desarrollo y Aplicaciones de Modelos de Fractura en la Escuela de Caminos de Barcelona, 23 de septiembre de 2013, 23:54 h
<http://www.cimne.com/eoOld/publicaciones/files/PI201.pdf>

[84] OOFEM, Object Oriented Finite Element Solver, 12 de enero de 2014, 4:54 h
<http://www.oofem.org/en/oofem.html>.

[85] OSSES, C. "Advances in Disturbed Stress Field Model". Tesis de Maestría, Universidad de Washington, Washington, 2007.

[86] OTTONI, F. "From geometrical and crack survey to static analysis method: The case study of Santa Maria del Quartiere dome in Parma (Italy)", *Structural Analysis of Historic Construction*, vol. 1, pp. 697-704, 2008.

[87] PAPOULIA, K., SAM, C., VAVASIS S., "Time continuity in cohesive finite element modeling," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, no. 5, pp. 679–701, 2003.

[88] PARIS, P., GOMEZ, M., ANDERSON, W. "A Rational Analytical Theory of Fatigue", *The Trend in Engineering*, vol. 13, pp. 9-14, 1961.

[89] PALUSZNY, A., ZIMMERMAN, R. NURBS-based geometric fracture growth representation, 3 de febrero de 2011, 4:45 h
<http://www.gruppofrattura.it/pdf/cp/CP2012/095.pdf>

[90] PEREZ, N., *Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.

[91] PEREZ, L., VALDIVIA F., OLLER S. Regularización de la Energía de Fractura utilizando un Modelo de Fisura Distribuida de Hillerborg y Daño Isotrópico mediante un Método sin Malla de Puntos finitos, 23 de enero de 2013, 3:32 h <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/4155/4081>

[92] PIJAUDIER, G., MAZARS J., *Damage Models of Concrete*, 2 de enero de 2014, 4:55 h http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~dube/TRAV_RECH/ERT_RDO/pages-html/articles.pdf/handbook.pdf.

[93] PROVAN, J. *Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability*, Springer, Dordrecht, 1987.

[94] RAINA, A., LINDER, C. "Modeling Quasi-Static Crack Growth with the Embedded Finite Element Method on Multiple Levels", *Journal Proceeding in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 12, pp. 135-136, 2012.

[95] RAO, B., RAHMAN S. "An Efficient Meshless Method for Fracture Analysis of Cracks", *Computer Mechanics*, vol. 26, pp. 398-408, 2000.

[96] RAMESH, K. *Course of Engineering Fracture Mechanics*, 30 de octubre de 2013, 3:21 h <http://nptel.iitm.ac.in/courses/112106065/>

- [97] RASHID, Y. "Analysis of prestressed concrete pressure vessels", *Journal of Nuclear Engineering of Design*, vol. 7, pp. 334-344, 1968.
- [98] REPORTE ACI 446.3R-97. "Finite Element Analysis of Fracture in Concrete Structures: State-of-the-Art". Reporte del Committee ACI 446, 1997.
- [99] RONCA,P., FRANCHI, A., CRESPI,P. "Masonry Fatigue Test for an Interpretation Model", *Structural Analysis of Historical Construction*, vol. 1, pp. 273-279, 2005.
- [100] ROTS G., "Computacional Modeling of Concrete Fracture". Tesis presentada en Delf University of Technology, Delft, 1988.
- [101] ROTS, J., INVERNIZZI, S. "Prevision of Settlement-Induced Cracking in Historical Building Masonry Facades" *Structural Analysis of Historical Construction*, vol. 2, pp. 687-694, 2005.
- [102] ROUSSELIER, G., "Finite Deformation Constitutive Relations Including Ductile Fracture Damage," in *Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*, S. Nemat-Nasser ed., North-Holland Publishing, Holanda, pp. 331-355, 1981.
- [103] SADRNEJAD, S., LABIBZADEH, M. "Crack Analysis of Concrete Arch Dams Using Micro-Planes Damage Based Constitutive Relations", *American Journal of Applied Sciences* vol. 4, pp. 197-202, 2007.
- [104] SANTONU, G., RAO, A. Dugdale-Barenblatt model, 12 de enero de 2014, 3:54 h http://www.academia.edu/179112/Dugdale-Barenblatt_model
- [105] SAUOMA, V., *Fracture Mechanics*, en notas de Lectura de la Universidad de Colorado, Colorado, 2000.
- [106] SBB-ISB, Modeling Software, 23 de enero de 2014, 3:45 h <http://www.sbbinc.com/software.htm>

[107] SEINDENFUSS, M., SAMAL, M., ROOS, E. "On critical assessment of the use of local and nonlocal damage models for prediction of ductile crack growth and crack path in various loading and boundary conditions", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, pp. 3365-3381, 2011.

[108] SHET, C., CHANDRA N., "Analysis of Energy Balance When Using Cohesive Zone Models to Simulate Fracture Processes" *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 124, pp. 440-450, 2002.

[109] SHI, Z. Numerical Analysis of Mixed Mode Cracking in Concrete., 4 de enero de 2014, 3:54 h
<http://www.gruppofrattura.it/ocs/index.php/esis/ECF16/paper/viewFile/7324/3803>

[110] Sin autor, Mecánica de Fractura Lineal Elástica, 20 de diciembre de 2013, 8:43 h http://materias.fi.uba.ar/6716/Mecanica%20de%20fractura%20lineal%20-%20elastica_1.pdf

[111] Sin autor, Multiscale Mechanics of Nanocomposites, 12 de enero de 2013, 8:54 h <http://www.docin.com/p-671382522.html>

[112] STERN, P., HEMEZ, F. "RCFem: A Research Code for Finite Element Methodologies User's Manual", Center of Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, 1995.

[113] STRAUSS, A., BERGMEISTER, K. Non Destructive Reliability Analysis of Concrete Structures Numerical concepts and material models for existing concrete structures, 4 de enero de 2013, 6:43 h
<http://www.ndt.net/article/ndtce03/papers/p055/p055.htm>

[114] SUKUMAR, N., PREVOST, J. "Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation", en *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp 7513-7537, 2003.

- [115] SWENSON, D., INGRAFFEA, A., "The collapse of the Schoharie Creek Bridge: A Case Study in Concrete Fracture Mechanics," *International Journal of Fracture*, vol. 51, pp. 73-92., 1991.
- [116] TADA, H., PARIS, P., IRWIN G. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research, Pennsylvania, Estados Unidos, 1973.
- [117] TAHOE. Manual Programa Microscale Modeling Simulation, 23 de septiembre de 2014, 3:56 h <http://prod.sandia.gov/techlib/access-control.cgi/2001/013675.pdf>.
- [118] THOULESS, M. y PARMIGIANI J. Mixed mode cohesive zone for delamination and deflection in composites, 30 de enero de 2014, 23:43 h [http://www-personal.umich.edu/~thouless/Riso\(2007\).pdf](http://www-personal.umich.edu/~thouless/Riso(2007).pdf).
- [119] TING, YU. "Bond between New and Old Concrete", Capítulo 16 en *Analysis of Concrete Structures by Fracture Mechanics*. ELFGREN, L. y SHAH, S. (eds), Chapman and Hall, Abisco, 1989.
- [120] ULLAH, Z., AUGARDE C., "Finite Deformation Elasto-Plastic Modelling Using and Adaptive Meshless Method", *Journal of Computer and Structures*, vol. 118, pp. 39-52, 2013.
- [121] ULRICH, K. *Fatigue Crack Propagation in Metals and Alloys*, Wiley-VCH, Weinheim, 2007.
- [122] VALENTE, G. "Fracture Mechanics for the Reconstruction of Noto Cathedral", *Journal of Construction and Building Materials*, vol. 17, pp. 579-593, 2003.
- [123] VASHID, L., ESPANDAR, R. "Seismic analysis of concrete arch dams by combined discrete crack and non-orthogonal smeared crack technique", *Engineering Structures*, vol. 26, pp. 27-37, 2004.

[124] VECCHIO, F., WONG, P. , VecTor2 and Formworks Manual, Publication No. 2002-02, Department of Civil Engineering Publication, Universidad de Toronto, 2002.

[125] VECCHIO, F. Disturbed Stress Field Model [online]. Disponible: http://www.civ.utoronto.ca/vector/journal_publications/jp34.pdf.

[126] VGEST. Virtual Geoscience Simulation Tools, 12 de enero de 2014, 5:56 h <http://vgest.net/applications/geomechanics/fracture-modelling/>.

[127] VIDA, Code Fatigue Damage Calculator, 23 de agosto de 2013, 3:54 h <https://web.tecgraf.puc-rio.br/vida/>

[128] WANG, Z., ZHANG, L., GUO, L., "A viscoelastic fracture mechanics model for a functionally graded materials strip with general mechanical properties", *European Journal of Mechanics*, 2013.

[129] WESTERGAARD, H., "Bearing pressures and cracks", *Journal of Applied Mechanics*, v. 6, pp. A49-A53, 1939.

[130] WHITTMANN, F. Crack Formation and Fracture Energy of Normal and High strength concrete, 30 de enero de 2014, 4:56 h <http://www.ias.ac.in/sadhana/Pdf2002Aug/Pe1049.pdf>.

[131] WNUK, M., YAVARI, A. Discrete Fractal Fracture Mechanics, 29 de septiembre de 2013, 4:54 h <http://imechanica.org/files/DFFM.pdf>

[132] WUCHAO. Y. "Mixed Mode Ductile Fracture in Metal Materials for Offshore Applications", Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Singapur, Singapur, 2012.

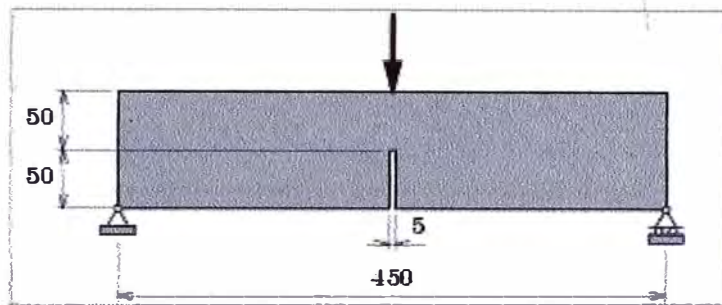
[133] WU, J., RU, C., "A Speed-Dependent Cohesive Zone Model for Moving Cracks with Non-Uniform Traction Force", *Journal Engineering Fracture Mechanics*, vol. 117, pp. 12-27, 2014.

- [134] XIANG, Z., TJHEN, S., WANG, B., CEN, Z., "A Simulation of Fatigue Crack Propagation in a Welded T-joint using 3D Boundary Element Method", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 80, pp. 111-120, 2003.
- [135] YONG. J. "Smoothed Methods for Fracture Problems and Application to Composite Material", Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Singapur, Singapur, Singapur, 2013.
- [136] ZEBULON, Programa de No-linealidad y Fractura, 23 de noviembre de 2013, 9:43 h <http://www.zset-software.com/products/zebulon/>.
- [137] ZERGUA, A., MOHAMED N. Elastic-plastic Fracture Analysis of structural columns, 25 de diciembre de 2013, 8:54 h http://www.ebiblioteka.lt/resursai/Mokslai/VGTU/JCEM/2006_2/zergua%20and%20naimi.pdf
- [138] ZIHAI, S., MASAACKI, N., YUKARI, N., CUIPING, L., "Discrete Crack Analysis of Concrete Gravity Dams based on the Known Inertia Force Field of Linear Response Analysis" *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 115, pp. 122-136, 2014.
- [139] ZHAO, B. "A Dynamic Fracture Simulation Based on Embedded Finite Element Method", Tesis de maestría, Duke University, Durham, 2012.
- [140] ZSET. Programa de Análisis Meso-Macro Escala, 24 de diciembre de 2013, 21:34 h <http://www.zset-software.com/products/zebulon/>

ANEXOS

ANEXO I: PROCEDIMIENTO PARA EL MODELO DISTRIBUIDO MULTIDIRECCIONAL EN UNA VIGA CON MUESCA EN EL PROGRAMA DE CÓMPUTO DIANA

1. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS



Para construir el modelo en elementos finitos, se comienza con iDIANA e ingresamos el entorno de diseño con el modelo denominado NOTCH.

iDIANA

FEMGEN NOTCH

Analysis and Units

Analysis Selection

Model Type: ▶Structural 2D

Units Definition

Length: ▶Millimeter

Mass: ▶Kilogram

Force: ▶Newton

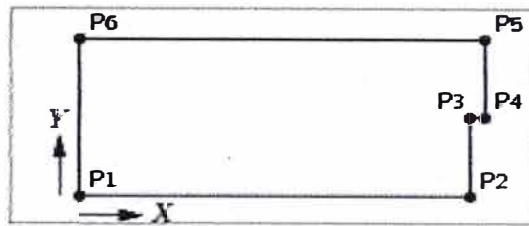
Time: ▶Second

Temperature: ▶Celsius

En el cuadro de Analysis and Units, se especifica que el modelo es para un análisis estructural bi-dimensional de esfuerzo plano. También se indica que adoptamos las unidades: mm, kg, s, °C.

A. DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

Para definir la geometría se aplica seis puntos: de P1 a P6, como se muestra en la figura:



Points (notch.fgc)

```

GEOMETRY POINT COORD 0
GEOMETRY POINT COORD 222.5
GEOMETRY POINT COORD 222.5 50
GEOMETRY POINT COORD 225 50
GEOMETRY POINT COORD 225 100
GEOMETRY POINT COORD 0 100
EYE FRAME
LABEL GEOMETRY POINTS
    
```

Se especifica las coordenadas de los puntos en el sistema XY, note que las coordenadas no especificadas son cero por defecto y que iDIANA automáticamente llamará a los puntos secuencialmente: P1, P2, ..., P6. Se muestra los puntos etiquetados con sus nombres apropiados en la pantalla.

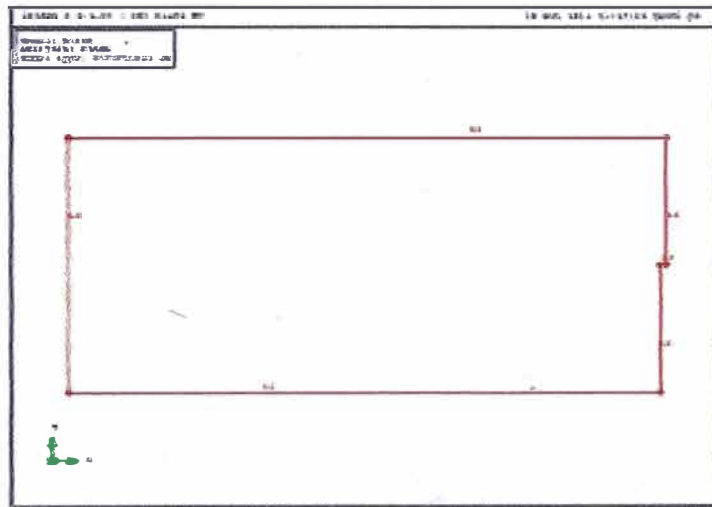
Lines and surface (notch.fgc)

```

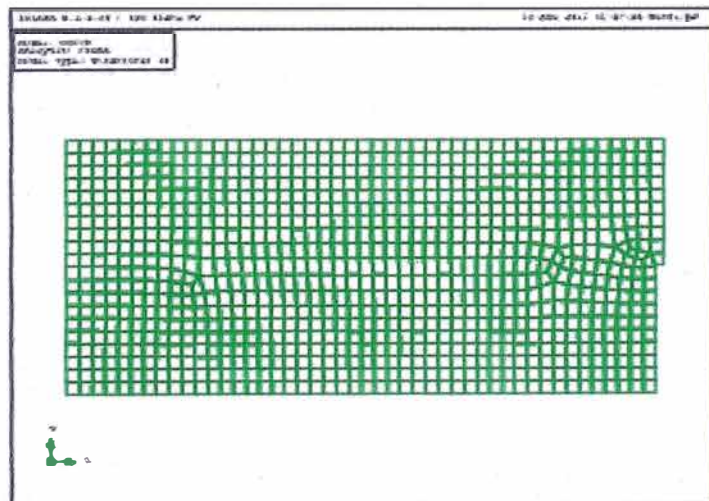
GEOMETRY LINE STRAIGHT L1 P1 P2
GEOMETRY LINE STRAIGHT L2 P2 P3
GEOMETRY LINE STRAIGHT L3 P3 P4
GEOMETRY LINE STRAIGHT L4 P4 P5
GEOMETRY LINE STRAIGHT L5 P5 P6
GEOMETRY LINE STRAIGHT L6 P6 P1
    
```

CONSTRUCT SET LEFT APPEND LINES ALL
GEOMETRY SURFACE REGION S1 LEFT
VIEW GEOMETRY CURRENT RED
LABEL GEOMETRY LINES ALL RED

Construimos sucesivamente seis líneas. Luego se construye un conjunto llamado LEFT, que contiene todas las líneas del modelo de la parte de la mano izquierda. Se fija la geometría y etiqueta de líneas en rojo.



a) Geometría



b) Malla

Mitad del modelo (parte izquierda)

B. MALLADO

Ahora se crea la malla de elementos finitos, con la geometría definida

(notch.fgc)

```
MESHING OPTIONS ALGORITHM PAVING S1  
MESHING DIVISION ELSIZE ALL 5  
MESHING TYPES ALL QU4 Q8MEM  
MESHING DIVISION AUTOMATIC  
MESHING GENERATE  
VIEW MESH
```

Se selecciona el elemento genérico de tipo QU4 y el Q8BEM. Son elementos de esfuerzo lineal plano para el conjunto LEFT de el modelo. Con la opción ELSIZE, se requiere de elemento promedio de 5mm. El algoritmo de mallado PAVING puede crear una malla cuadrilateral sobre algún tipo de superficie y así es adecuado para mallar la superficie izquierda del modelo. Se genera el mallado y se fija en el estilo de defecto de los alambres de la malla.

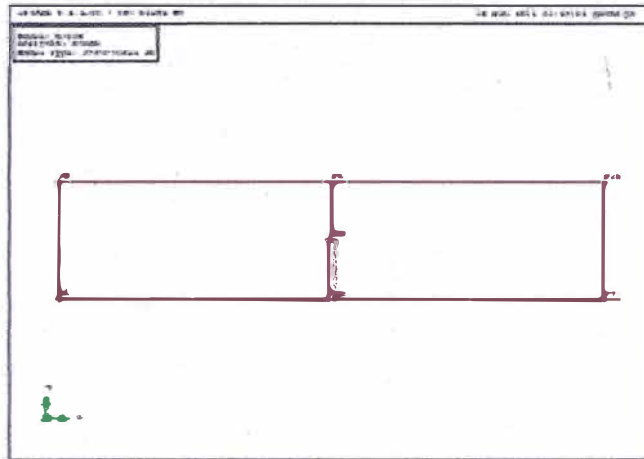
C. TÉCNICA DE ESPEJO A TODO EL MODELO

Ahora se coloca el modelo con la opción espejo

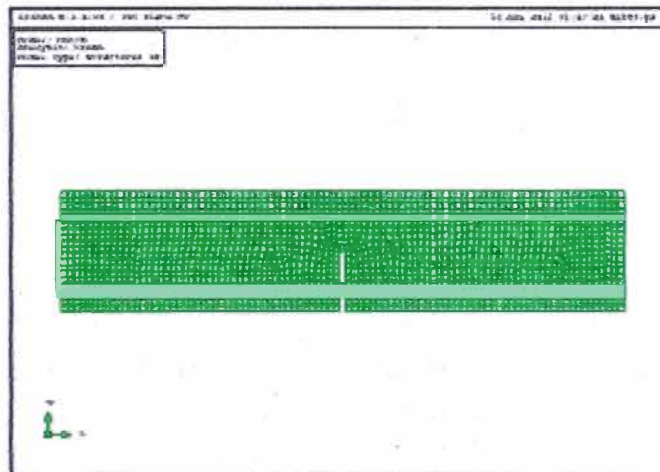
(notch.fgc)

```
GEOMETRY COPY S1 MIRROR X 225  
VIEW GEOMETRY ALL RED  
LABEL GEOMETRY POINTS ALL BLUE  
EYE FRAME  
MESHING GENERATE  
VIEW MESH
```

Utilizamos el commando mirror, para la superficie con respecto a la línea vertical a $X= 225$ mm (por ejemplo el eje central del modelo), Se introduce una pequeña imperfección por modificar la localización del punto P3 para asegurar que el fracturamiento sea iniciado, en el lado izquierdo del modelo simétrico. La geometría ahora cubre el modelo completo (gráfica a)). Finalmente se regenera y fija la malla (gráfica b)).



a) Geometría



b) Malla Final

2. PROPIEDADES FÍSICAS Y MATERIAL

Se abre el diálogo de Property Manager para definir el material y propiedades físicas del modelo.

(iDIANA)

▲View ▶Property Manager...

Property Manager

...

Concreto (nonlinear) (iDIANA)

Property Manager

▲Materials Material Name: MACONCRE

▲Linear Elasticity ▶Isotropic

▲Static Nonlinearity ▶Concrete and Brittle Materials ▶Multi-directional Fixed Crack

▶Constant Stress Cut-off ▶Linear Tension Softening

▶Ultimate Strain Based ▶Constant Shear Retention ▶No Plasticity

Se definen las propiedades del concreto por ejemplo MACONCRE. Para elasticidad lineal especificamos el módulo de Young $E = 31000$ MPa y módulo de Poisson $\nu = 0.15$. Para las propiedades del material no lineal se llenan con parámetros para el esfuerzo de tensión $f_t = 2.4$ MPa, la deformación última del diagrama $\varepsilon_{ux} = 0.013$ y un factor constante de corte de retención $\beta = 0.001$.

Concrete (linear) (iDIANA)

Property Manager

▲Materials Material Name: MACONLIN

▲Linear Elasticity ▶Isotropic

Desde que se sabe donde la grietas van a ir a aparecer, se va limitando el material no lineal a la región relevante de su utilización. Esto se hace para reducir el tiempo de cálculo, se necesita un segundo material con propiedades sólo lineales. Se define las propiedades del concreto en un material como MACONLIN. Para la elasticidad lineal se especifica un módulo de Young $E = 31000$ MPa y módulo de Poisson $\nu = 0.15$.

Thickness (iDIANA)

Property Manager

▲Physical Properties Physical Property Name: PHCONCRE

▲Geometry ▶Plane Stress ▶Regular

Para el espesor del concreto, se define una propiedad física por ejemplo PHCONCRE, para el cual especificamos un valor de espesor $t=100$ mm.

Assignment (notch.fgc)

```
PROPERTY ATTACH ALL MACONLIN PHCONCRE
CONSTRUCT PMODIFIER CENTROID CUBOID 214 49 -1 236 101 1
PROPERTY ATTACH MO1 MACONCRE PHCONCRE
```

Primero se asigna el material lineal y las propiedades de ejemplo a la geometría del modelo entero. Luego se modifica las propiedades las propiedades a la región no lineal relevante del modelo. Se nota que el comando PMODIFIER, también cambia las asignaciones de las propiedades físicas, las cuales no se desean cambiar, es por lo tanto especificado de nuevo en el segundo comando PROPERTY ATTACH.

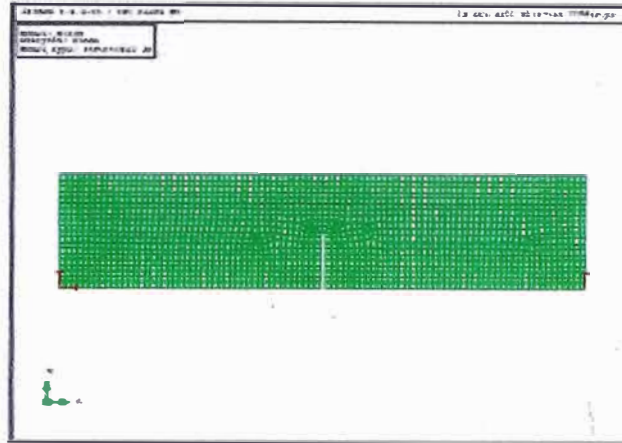
3. APOYOS Y CARGAS

Para definir los apoyos y cargas con respecto a las partes geométricas, se leen los puntos apropiados del gráfico de geometría.

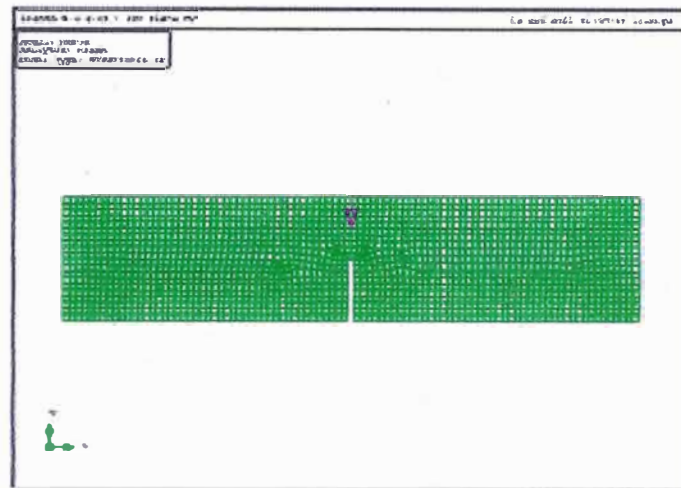
Supports (notch.fgc)

```
PROPERTY BOUNDARY CONSTRAINT CO1 P1 X Y
PROPERTY BOUNDARY CONSTRAINT CO2 P7 Y
LABEL MESH CONSTRNT
```

Se apoya la esquina baja izquierda en dirección, X e Y y en la esquina baja derecha en dirección Y. Las restricciones en los apoyos se muestran como barras rojas.



a) apoyos



b) Cargas

Fig 3.1 Condiciones de Borde

Load (notch.fgc)

PROPERTY LOADS DISPLACE LO1 P5 -1.0 Y

LABEL MESH OFF

LABEL MESH LOADS

Las cargas definidas corresponden a una unidad de desplazamiento aplicado en la parte superior de la viga, justo encima de la muesca. Esta carga se presenta como una flecha vertical violeta (Fig 3.1b).

4. ANÁLISIS LINEAL PRELIMINAR

Primero, se ejecutará un análisis lineal a fin de revisar el modelo. Así, se escribe el recientemente creado modelo de elementos finitos a un archivo de datos de entrada en el formato batch de DIANA.

(iDIANA)

```
UTILITY WRITE DIANA
yes
FILE CLOSE
yes
Smearred cracking of a notched beam
ANALYSE NOTCH
Analysis Setup
***
```

Mediante el diálogo de Analysis Setup, se activa el siguiente comando batch

(linsta.dcf)

```
*FILOS
INITIA
*INPUT
*LINSTA
*END
```

Por defecto DIANA escribirá los resultados del análisis a una base de datos para el entorno de resultados iDIANA. Tan pronto como el trabajo haya terminado, se ingresa el entorno con el nombre del modelo.

(linsta.fvc)

```
FEMVIEW LINSTA
VIEW MESH
VIEW OPTIONS EDGES OUTLINE
EYE FRAME
```

Los comandos VIEW y EYE, muestran delineada la malla no deformada en verde.

4.1 DEFORMACIÓN

Para obtener la malla deformada, se sigue los siguientes comandos:

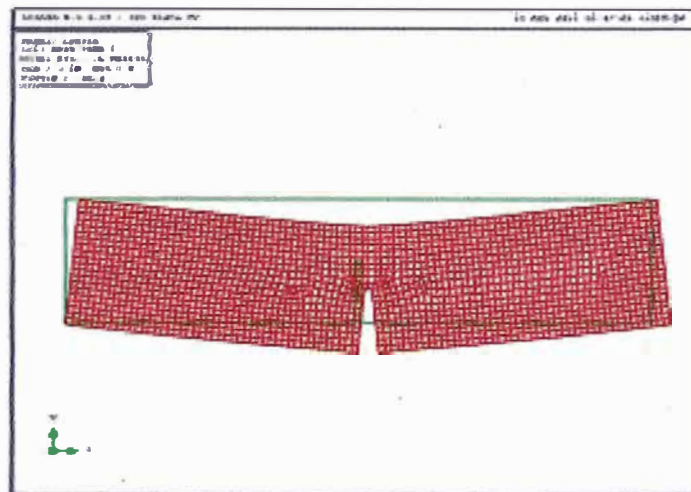
(insta.fvc)

RESULTS LOADCASE LC1

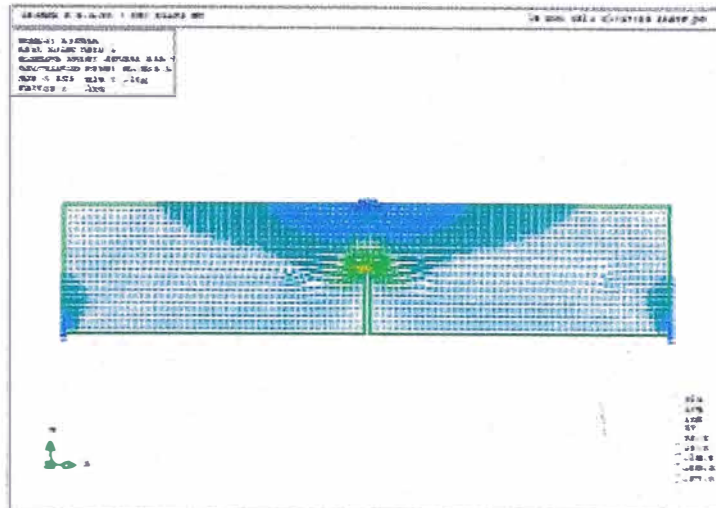
RESULTS NODAL DTX...G RESDTX

PRESENT SHAPE

Se selecciona el caso de carga LC1 (el único). Se selecciona y al resultado se le atribuye RESDTX, el cual representa el desplazamiento nodal. Se fija la forma deformada de la malla (Fig 4.6^a). Note que iDIANA escoge un color rojo y un apropiado factor de multiplicación en este caso, 22 x.



a) Deformación (x22)



b) Esfuerzos principales

Figura 4.1: Resultados de Análisis Linear

4.2 ESFUERZOS PRINCIPALES DE CAUCHY

Los esfuerzos principales en la viga pueden dar un mayor entendimiento del comportamiento del modelo.

(linsta.fvc)

```
RESULTS ELEMENT EL.SXX.G SXX
RESULTS CALCULATE P-STRESS ALL
PRESENT OPTIONS VECTORS MODULATE 10
PRESENT VECTORS
```

Se selecciona el atributo SXX, el cual representa los esfuerzos de Cauchy en los nodos de los elementos. Tan pronto los esfuerzos son almacenados, se pregunta a iDIANA para calcular los esfuerzos principales mediante la opción P-STRESS. Así iDIANA siempre fijará los esfuerzos con un tamaño proporcional a su valor, los esfuerzos pico son más convincentes cuando los vectores son modulados con colores de acuerdo a sus valores. Así se da la opción VECTORS

MODULATE y se pide una modulación de 10 colores. Finalmente se fija los vectores de esfuerzo (Fig. 4.1b). Se nota que los vectores rojos indican los esfuerzos de tensión más altos y los vectores azul oscuro, los esfuerzos de compresión mayores.

5. ANÁLISIS NO LINEAL

Para realizar el analizar el análisis no-lineal se ingresa al entorno iDIANA

(iDIANA)

```
INDEX  
ANALYSE NOTCH  
Analysis Setup
```

Mediante la ventana de Analysis Setup, se escoge para un análisis estructural no lineal y se crean los siguientes comandos batch:

(nonlin.dcf)

```
*NONLIN  
BEGIN EXECUT  
BEGIN ITERAT  
    CONVER SIMULT  
    MAXITE=30  
END ITERAT  
BEGIN LOAD  
    BEGIN STEPS  
        BEGIN AUTOMA  
            SIZE=1.0  
            MAXSIZ=0.1  
            MINSIZ=0.001  
        END AUTOMA  
    END STEPS  
END LOAD  
END EXECUT
```

```
BEGIN OUTPUT
DISPLA TOTAL TRANSL
STRESS TOTAL CAUCHY
FORCE REACTI TRANSL
STRAIN CRACK GREEN
END OUTPUT
*END
```

Se puede también directamente correr el análisis en modo batch, con la entrada de datos y los archivos comando:

```
diana notch.dat nonlin
```

Cuando el análisis es completado, se puede ingresar los resultados del entorno iDIANA, con el modelo llamado NONLIN, con el nombre del modelo llamado NONLIN, para evaluar los resultados del análisis.

```
(nonlin.fvc)
```

```
FEMVIEW NONLIN
UTILITY TABULATE LOADCASES
```

En el caso de tabulación de carga muestra los casos de carga disponible, con su factor de carga y los items con resultado disponible. Aquí solamente se muestra el primer y último paso de la tabulación

```
(nllc.tb)
```

```
;
;
; Model: NONLIN
;
;
; LOADCASE DATA
;
;
; Name      Details and results stored
; -----
;
;
; MODEL     STATIC "Model Properties"
```

```
;      Element : THICKNES* CRKBANDW*
;
;
; LC1  1  LOAD = .25E-1 "Load case 1"
;      Nodal   : TDTX...G FBX...G
;      Element : EL.SXX.G
;      Gauss   : EL.EKNN1
;
;
; ... lines skipped
;
;      Nodal   : TDTX...G FBX...G
;      Element : EL.SXX.G
;      Gauss   : EL.EKNN1 EL.EKNN2
;
;
; LC1  54  LOAD = 1 "Load case 1"
;      Nodal   : TDTX...G FBX...G
;      Element : EL.SXX.G
;      Gauss   : EL.EKNN1 EL.EKNN2
; * Indicates loads data
;
```

En todos los pasos se ve los atributos de los elementos EL.SXX.G, representa el total de los esfuerzos en los elementos y los atributos Gausiano. EL.EKNN1 y EL.EKNN2, representan las deformaciones de grieta en los puntos de integración, es decir muestran la información de las grietas del modelo.

5.1 DIAGRAMA CARGA-DESPLAZAMIENTO

Se presenta primero el diagrama de carga-desplazamiento para la parte de arriba de la parte central de la viga, se requiere el número del nodo a esa localización

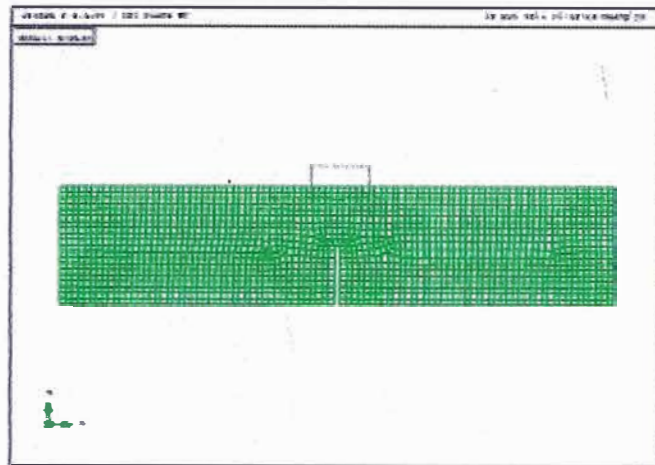
(nonlin.fvc)

VIEW MESH

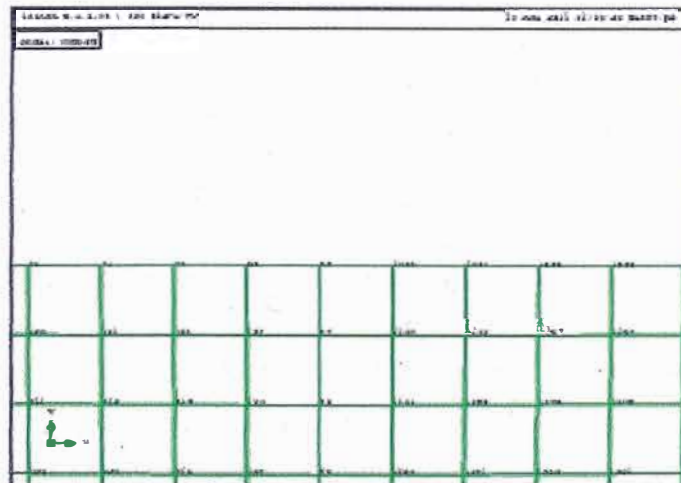
EYE ZOOM /CURSOR

LABEL MESH NODES

Se fija la malla y se arrastra una ventana zoom alrededor de la parte superior central del modelo (Fig 5.1a).



a) Vista general y ventana zoom



b) En zoom

Fig 5.1 Malla con el número de nodos

Luego se etiqueta la malla con los números de nodo y se ve que el nodo apropiado es el número 68 (Fig 5.1b). Se puede expedir comando para dibujar el diagrama de carga-desplazamiento.

(nonlin.fvc)

```
RESULTS LOADCASE LC1  
RESULTS NODAL FBX....G FBY  
PRESENT GRAPH NODE 68
```

Primero se selecciona todos los casos de carga disponibles, es decir los pasos de carga. Luego se selecciona el atributo nodal resultante FBY, el cual representa la fuerza de reacción vertical. El comando PRESENT fija el diagrama de carga desplazamiento (Fig 5.2).

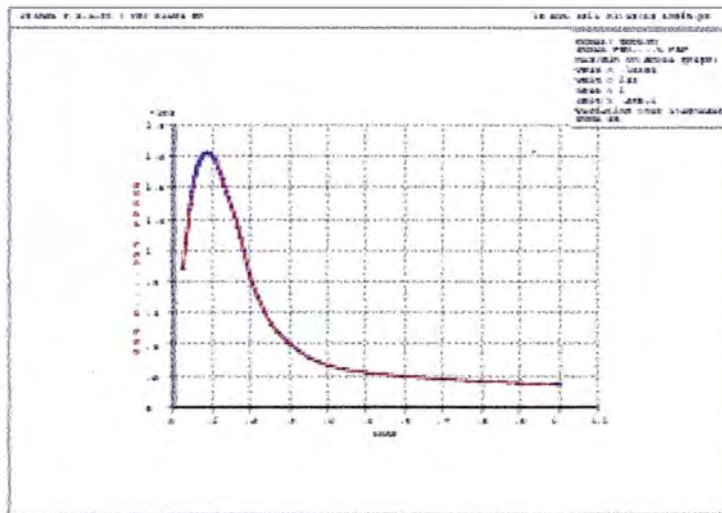


Fig 5.2. Diagrama de carga-desplazamiento al medio de la luz

Se nota que el eje horizontal del gráfico representa el factor de carga, el cual es equivalente al factor de multiplicación por la unidad vertical del desplazamiento aplicado en la parte central superior. El diagrama muestra claramente que al final la estructura siempre colapsa, es decir el análisis ha alcanzado el estado de límite último.

5.2 ESFUERZOS PRINCIPALES DE CAUCHY

Para evaluar los resultados en la malla, primero se hace fijación de toda la mala sin los números de nodo.

(nonlin.fvc)

VIEW MESH

VIEW EDGES

EYE FRAME

LABEL MESH NODES OFF

RESULTS LOADCASE LC1 1

RESULTS ELEMEN EL.SXX.G SXX

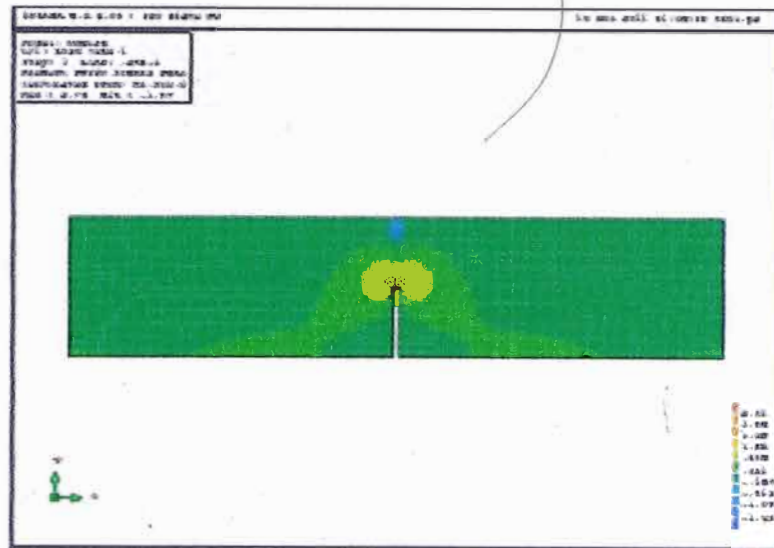
RESULTS CALCULATE P-STRESS P1 2DSORT

PRESENT CONTOUR LEVELS

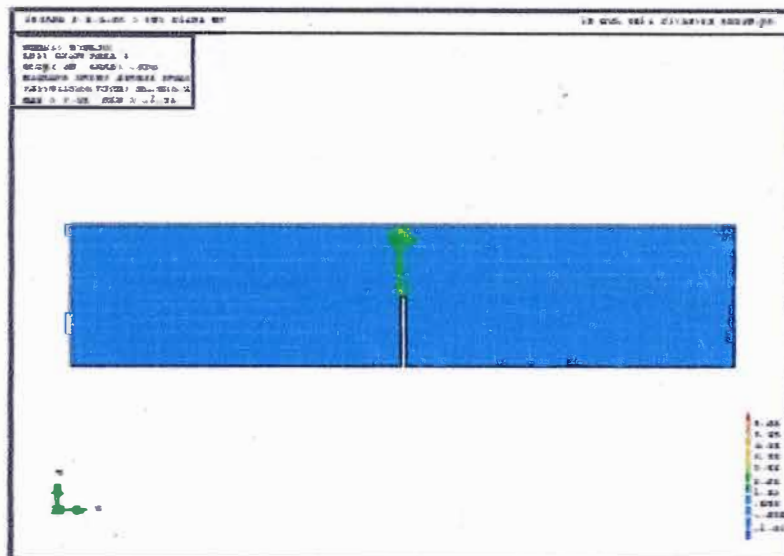
RESULTS LOADCASE LC1 48

DRAWING DISPLAY

Se selecciona el caso de carga LC1 1 , el cual representa los resultados del análisis del primer paso. Luego se selecciona los esfuerzos de Cauchy, son los cuales se deja que iDIANA, calcule los esfuerzos principales. Debido a la opción de ordenamiento 2DSORT, los primeros esfuerzos representan el máximo de los dos esfuerzos principales. Se fija los esfuerzos máximos en el contorno mostrado (Fig 5.3a).



a) Primer paso de carga



b) Cerca al estado último de esfuerzo

Fig 5.3 Máximos esfuerzos principales

Se selecciona también el paso 48, el cual representa la situación justo antes de estado de límite último. Solo el comando DRAWING DISPLAY, hará la fijación de los resultados en el paso seleccionado (Fig 5.3 b).

5.3 PATRONES DE GRIETA

Se muestra ahora los patrones de grieta para los pasos de carga corrientes, es decir cerca del estado de límite último.

(nonlin.fvc)

RESULTS GAUSSIAN EL.EKNN1 EKNN

PRESENT DISC 0.2

VIEW OPTIONS DEFORM USING TDTX...G RESTDT

Se selecciona el atributo del resultado Gaussiano EKNN, el cual representa las deformaciones de grieta en los puntos de integración. Se muestra los bordes del modelo en su forma deformada y presenta las deformaciones mediante la opción DISC. Esta opción muestra las deformaciones como discos en el espacio tridimensional; en una vista bi-dimensional, son vistas perpendiculares al modelo. En estos discos aparecen como líneas las cuales claramente indican el patrón de grieta. (Fig 4.10).

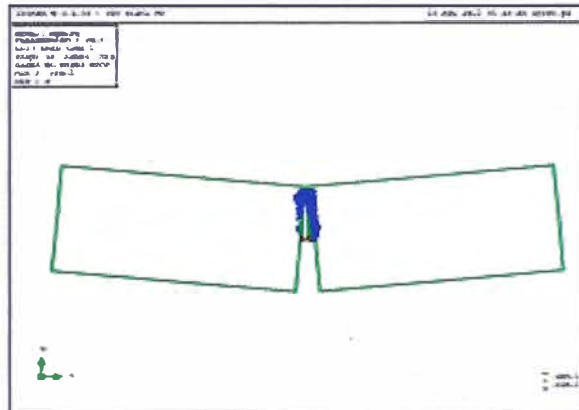


Fig 5.4: Patrones de grieta cerca al estado límite de esfuerzos

5.3.1 Animación

Es muy instructivo ver el contorno de las deformaciones de grieta desarrollarse con el aumento de carga. Así se puede producir una secuencia de animación (video), con los siguientes comandos.

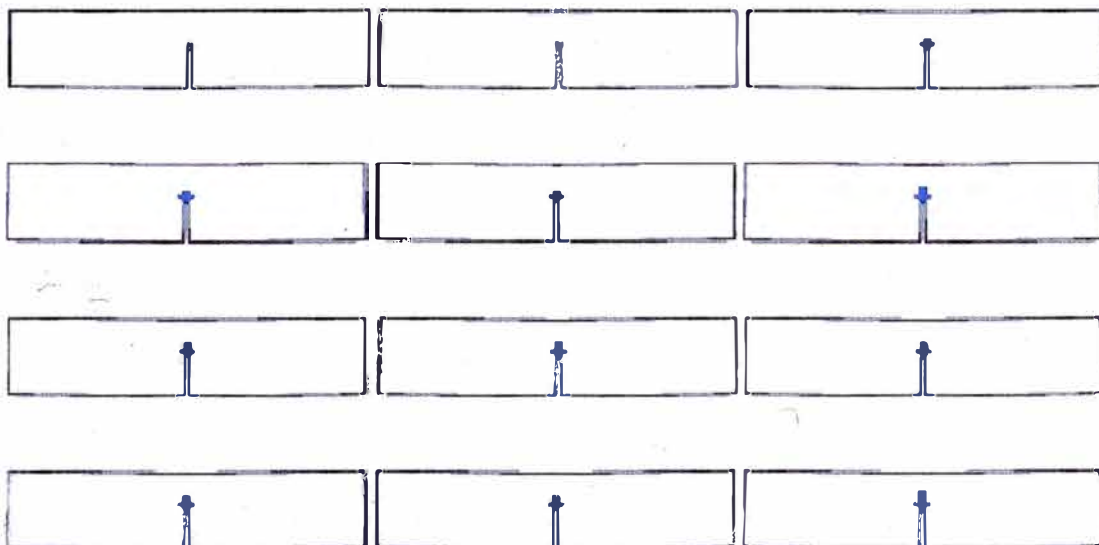
(nonlin.fvc)

RESULTS LOADCASE LC1

PRESENT CONTOUR FROM 0 TO 0.08 LEVELS 10

DRAWING ANIMATE LOADCASES PLOTFILE anecr

Primero se selecciona los casos para los cuales la deformación de grieta ha desarrollado, es decir, sin la carga del caso 1. Estar pendiente que en una secuencia de contorno de animación se muestra los marcos de la animación. Todos usan el mismo color para representar un cierto valor. Por lo tanto explícitamente se especifica los valores del primero y último contorno y los números de los niveles de contorno, El comando DRAWING, comienza la animación. Debido a la opción PLOTFILE, se puede mostrar los marcos de animación en un documento. La Figura 5.5, muestra un subconjunto de los marcos.



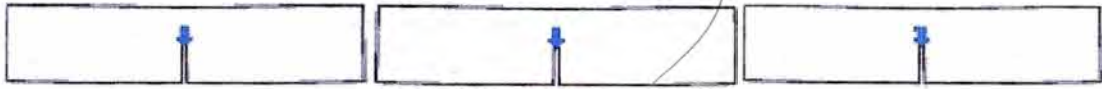
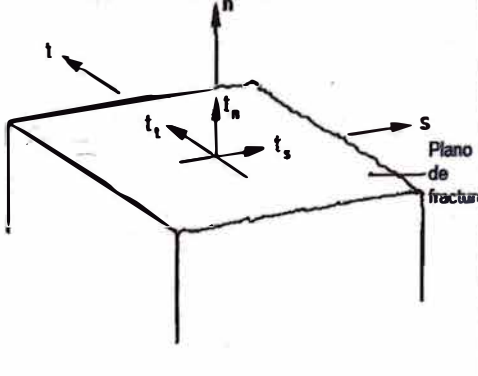


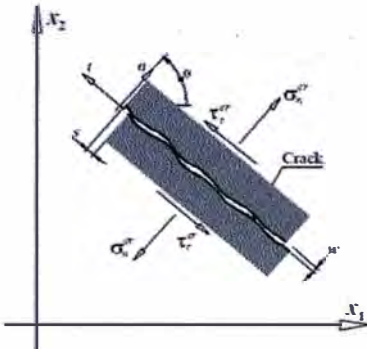
Fig 5.5: Desarrollo de las deformaciones de grieta (fracturamiento)-porticos de animación

ANEXO II

FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO DISTRIBUIDO MULTIDIRECCIONAL FIJO

Básicamente la formulación matemática del modelo distribuido multidireccional fijo es el del modelo distribuido fijo convencional, con la diferencia que se descomponen los esfuerzos de fracturamiento en sus componentes de fracturamiento por cada grieta, es decir cada grieta tiene su vector de deformación, su vector de esfuerzos y su matriz de transformación.

| FORMULAS | DESCRIPCIÓN |
|---|---|
| Formulación Estándar del Método Distribuido | |
| $\Delta \epsilon^{cr} = \left[\Delta \epsilon_{xx}^{cr} \quad \Delta \epsilon_{yy}^{cr} \quad \Delta \epsilon_{zz}^{cr} \quad \Delta \gamma_{xy}^{cr} \quad \Delta \gamma_{yz}^{cr} \quad \Delta \gamma_{zx}^{cr} \right]^T$ | Vector incremento de deformación en coordenadas globales |
| $\Delta e^{cr} = \left[\Delta \epsilon_{ms}^{cr} \quad \Delta \gamma_{ns}^{cr} \quad \Delta \gamma_{nt}^{cr} \right]^T$ | Vector incremento de deformación en coordenadas locales |
| $N = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z \\ m_x^2 & m_x m_y & m_x m_z \\ n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x & l_x m_z + l_z m_x \\ 2m_x n_x & m_x n_y + m_y n_x & m_x n_z + m_z n_x \\ 2n_x l_x & n_x l_y + n_y l_x & n_x l_z + n_z l_x \end{bmatrix}$ | Matriz de transformación de refleja la orientación de la grieta |
|  | Cosenos directores en el plano de fractura en 3 dimensiones |

| | | |
|---|--|--|
|  | <p>Esquema de una grieta en dos dimensiones, desplazándose en el eje local t</p> | |
| $\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^{cr} + \Delta \epsilon^{co} \quad (1)$ | <p>Se descompone el vector deformación incremental en dos componentes (Litton, 1974): $\Delta \epsilon^{co}$, representa la deformación de la parte sólida (concreto), $\Delta \epsilon^{cr}$ representa la deformación de la parte fracturada</p> | |
| $\Delta \sigma = D^{co} \Delta \epsilon^{co} \quad (2)$ | <p>Representa la relación entre esfuerzos incrementales-deformaciones incrementales</p> | |
| $\Delta t^{cr} = D^{cr} \Delta e^{cr} \quad (3)$ | <p>Representa la relación esfuerzos incrementales-deformaciones incrementales de la parte fracturada, en coordenadas locales</p> | |
| $\Delta e^{cr} = N \Delta \epsilon^{cr} \quad (4)$ | <p>Representa la transformación de la deformación de coordenadas locales en globales</p> | |
| $\Delta t^{cr} = N^T \Delta \sigma \quad (5)$ | <p>Relación entre el incremento de esfuerzo local y global</p> | |
| $\Delta \sigma = D^{co} [\Delta \epsilon - N \Delta e^{cr}] \quad (6)$ | <p>Se obtiene de reemplazar (1) y (4), en (2)</p> | |
| $\Delta e^{cr} = [D^{cr} + N^T D^{co} N]^{-1} N^T D^{co} \Delta \epsilon \quad (7)$ | <p>Se obtiene al pre-multiplicar por N^T, reemplazando (3), luego (5) en (6) y ordenando.</p> | |
| $\Delta \sigma = [D^{co} - D^{co} N [D^{cr} + N^T D^{co} N]^{-1} N^T D^{co}] \Delta \epsilon \quad (8)$ | <p>Se obtiene al reemplazar (7) en (6)</p> | |

| | |
|--|---|
| $\Delta\sigma = D^{cco} \Delta\epsilon \quad (9)$ | (8) se escribe simplificadamente |
| Particularidades del modelo distribuido | |
| $\Delta\epsilon^{cr} = \Delta\epsilon_1^{cr} + \Delta\epsilon_2^{cr} + \dots \quad (10)$ | Se sub-descompone la deformación por fractura, en deformaciones de cada grieta i , en los puntos de integración |
| $\Delta\epsilon^{cr} = \left[\Delta\epsilon_1^{cr} \ \Delta\epsilon_2^{cr} \ \dots \right]^T \quad (11)$ | Ensamble de los incrementos de deformaciones locales de cada grieta i |
| $\Delta\epsilon^{cr} = \left[\Delta\epsilon_1^{cr} \ \Delta\epsilon_2^{cr} \ \dots \right]^T \quad (12)$ | Ensamble de los incrementos de esfuerzo de cada grieta i en coordenadas locales |
| $\hat{N} = \left[N_1 \ N_2 \ \dots \right] \quad (13)$ | Ensamble de las matrices de transformación en cada grieta i |
| $\Delta\epsilon^{cr} = \hat{N} \Delta\epsilon^{cr} \quad (14)$ | Se forma el vector $\Delta\epsilon^{cr}$, para las matrices ensambladas, al igual que (4) |
| $\Delta\epsilon^{cr} = \hat{D}^{cr} \Delta\epsilon^{cr} \quad (15)$ | Se relaciona la matrices ensambladas al igual que (3) |
| $\Delta\sigma = [D^{co} - D^{co} \hat{N} [D^{cr} + \hat{N}^T D^{co} \hat{N}]^{-1} \hat{N}^T D^{co}] \Delta\epsilon \quad (16)$ | Se obtiene con el mismo procedimiento de (8) |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> Grieta en proceso de: 1. Iniciación 2. Abrimiento 3. Cerramiento 4. Cerrada 5. Re-abrimento 6. Totalmente abierta </div> | Estados de la grieta y proceso de carga/descarga |

| | |
|---|---|
| $\Delta\sigma = \hat{D}_i^{crco} \Delta\epsilon^a + \hat{D}_{i+1}^{crco} \Delta\epsilon^b \quad (17)$ | Estado de cambio en la iniciación, de una nueva grieta, o re-abrimiento de una grieta cerrada, donde $\Delta\epsilon^a$ es la deformación en la pre-transición y $\Delta\epsilon^b$, en la post-transición |
| $\Delta\sigma = \hat{D}_i^{crco} \Delta\epsilon^a + \hat{D}_{i-1}^{crco} \Delta\epsilon^b \quad (18)$ | Estado de cambio en el cerramiento de una grieta |

TABLA .- Formulación matemática del modelo distribuido fijo multidireccional

Fuente: Adaptado de ROTS G., "Computational Modeling of Concrete Fracture". Tesis presentada en Delft University of Technology, Delft-Holanda, 1988

3.3 ASPECTOS ADICIONALES

3.3.1 Criterio de Iniciación de grieta

Para la iniciación se utiliza el criterio de Rankine y el del máximo ángulo permitido es decir que si en algún punto de Gauss, es decir que sólo se permiten la formación de fisuras en los puntos de Gauss cuando estos sobrepasen el valor del ángulo permitido y a su vez hayan alcanzado el esfuerzo de tensión del material el cual generalmente el ángulo varía entre 30° y 60°.

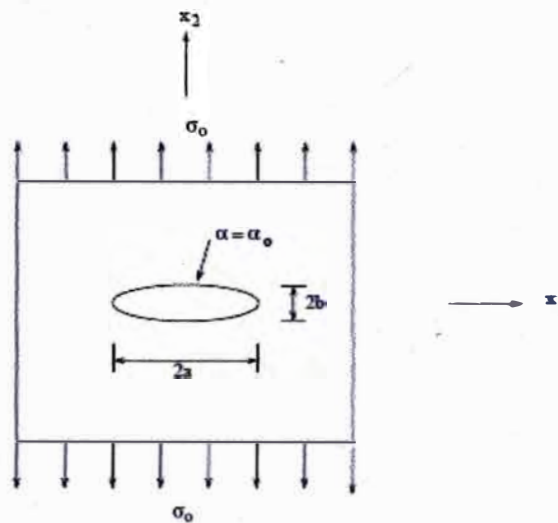
3.3.2 Formación de la matriz D

Se supone la matriz D como una matriz banda, por lo que el acoplamiento entre cortante y normal es ignorado, basado en datos experimentales (Walt, 1980), donde su aporte no es significativo, dado que es un ensayo cuasi-estático, siendo diferente de los ensayos dinámicos.

ANEXO III DEMOSTRACIONES DE LOS CONC PTOS BÁSICOS

1. FÓRMULA DE INGLIS (1913)

Para considerar el problema de un agujero elíptico en una placa infinita, bajo esfuerzo uniforme, se adopta un sistema de coordenadas curvilíneas. Es decir que dada la variable compleja $z = x_1 + i x_2$, se expresa en el sistema curvilíneo como: $p = \alpha + i \beta$, la relación entre z y p está dada por: $z = c \cosh p$, donde c es una constante.



Sabiendo que:

$$\begin{aligned} \cosh \alpha &= \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \\ \sinh \alpha &= \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \\ e^{i\beta} &= \cos \beta + i \sin \beta \end{aligned}$$

Reemplazando en z

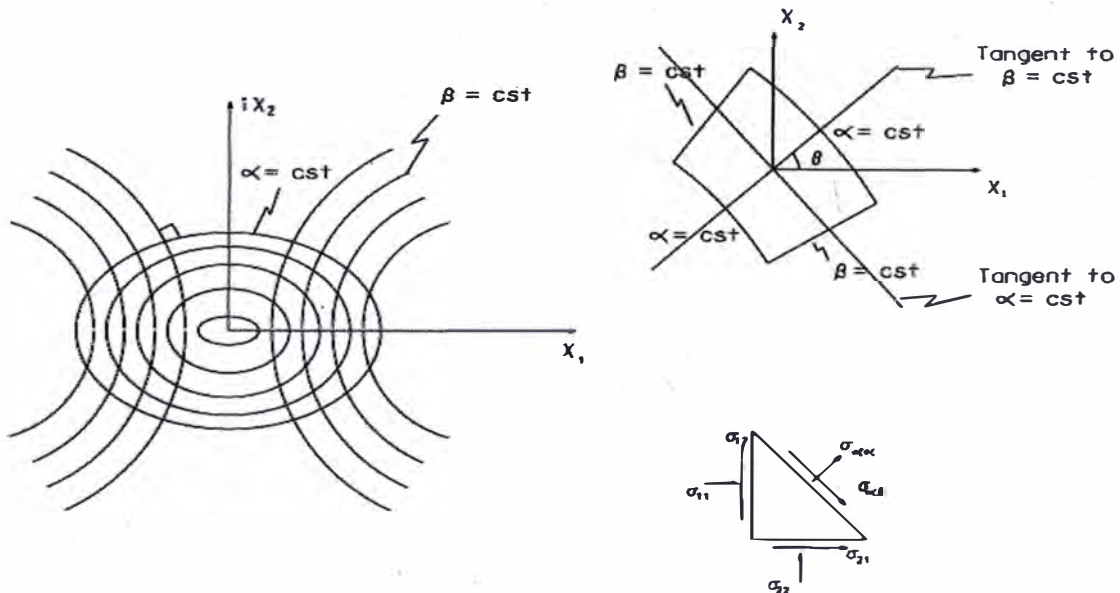
$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= \frac{c}{2} (e^{\alpha+i\beta} + e^{-\alpha-i\beta}) \\ &= \frac{c}{2} \left(\underbrace{e^{\alpha} \cos \beta + ie^{\alpha} \sin \beta}_{2 \cosh \alpha} + \underbrace{e^{-\alpha} \cos \beta - ie^{-\alpha} \sin \beta}_{2 \sinh \alpha} \right) \\ &= \cos \beta \underbrace{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})}_{2 \cosh \alpha} + i \sin \beta \underbrace{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}_{2 \sinh \alpha} \\ &= c(\cosh \alpha \cos \beta + i \sinh \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

Resulta:

$$x_1 = c \cosh \alpha \cos \beta = \frac{c}{2} \cos \beta (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \quad (1)$$

$$x_2 = c \sinh \alpha \sin \beta = \frac{c}{2} \sin \beta (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \quad (2)$$

Definimos a y b , como a el mayor semieje y b el menor. El agujero elíptico es definido a lo largo de $\alpha = \alpha_0$, y la elipse β que varía de 0 a 2π .



Evaluando en $\beta = 0$ y $\beta = \pi/2$ en (1) y (2), tenemos:

$$x_1|_{\beta=0} = a = c \cosh \alpha \cos \beta = c \cosh \alpha_0 \Rightarrow a = c \cosh \alpha_0 \quad (3)$$

$$x_2|_{\beta=\pi/2} = b = c \sinh \alpha \sin \beta = c \sinh \alpha_0 \Rightarrow b = c \sinh \alpha_0 \quad (4)$$

Ecuaciones de Airy

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5)$$

Se puede mostrar que la función de esfuerzos puede ser expresada como:

$$\Phi = \text{Re}[(x_1 - ix_2)\psi(z) + \chi(z)] \quad (6)$$

Donde ψ y χ son funciones armónicas es decir $\nabla^2(\psi) = \nabla^2(\chi) = 0$

Si:

$f(z) = \alpha + i\beta$, con α y β reales, luego la función conjugada es definida como:

$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta$ y la ecuación (6), puede ser escrita como:

$$\Phi = \text{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)] \quad (7)$$

Substituyendo en las ecuaciones de (5), resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\text{Re}\psi'(z) \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \end{aligned} \quad (8)$$

En función de coordenadas curvilíneas

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} &= 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4\text{Re}\psi'(z) \\ \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} &= 2e^{2i\theta}[\bar{z}\psi''(z) + \psi''(z)] \end{aligned} \quad (9)$$

Aplicando las condiciones de borde:

1. En el infinito tenemos que $\sigma_{22} = \sigma_0$, σ_{11} y $\sigma_{12} = 0$, reemplazando en la ecuaciones de Airy

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\text{Re}\psi'(z) = \sigma_0 \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] = \sigma_0 \end{aligned} \quad (10)$$

2. Alrededor del agujero elíptico ($\alpha = \alpha_0$), y se tiene que:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (11)$$

Inglis encontró que las siguientes funciones satisfacen las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} 4\psi(z) &= \sigma_0 c \left[(1 + e^{2\alpha_0}) \sinh p - e^{2\alpha_0} \cosh p \right] \\ 4\chi(z) &= -\sigma_0 c^2 \left[(\cosh 2\alpha_0 - \cosh \pi) p + \frac{1}{2} e^{2\alpha_0} - \cosh 2 \left(p - \alpha_0 - i\frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Como $\sigma_{\alpha\alpha}=0$ para $\alpha=\alpha_0$

Se puede resolver $\alpha_{\beta\beta}$, de la ecuación (9)

$$\underbrace{\sigma_{\alpha\alpha}}_0 + \sigma_{\beta\beta} = 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})]$$

Derivando las ecuaciones de (12)

$$(\sigma_{\beta\beta})_{\alpha=\alpha_0} = \frac{\sinh 2\alpha_0 - 1 + e^{2\alpha_0} \cos 2\beta}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} \sigma_0 \quad (13)$$

El máximo valor de $\sigma_{\beta\beta}$, ocurre cuando $\beta=0$ o $\beta=\pi$, para esos puntos $\cos 2\beta=1$ y la tangente a la elipse es paralelo a x_2 .

$$(\sigma_{\beta\beta})_{\alpha=\alpha_0}^{\beta=0,\pi} = \sigma_{22} = \frac{\sinh 2\alpha_0 - 1 + e^{2\alpha_0}}{\cosh 2\alpha_0 - 1} \sigma_0 \quad (14)$$

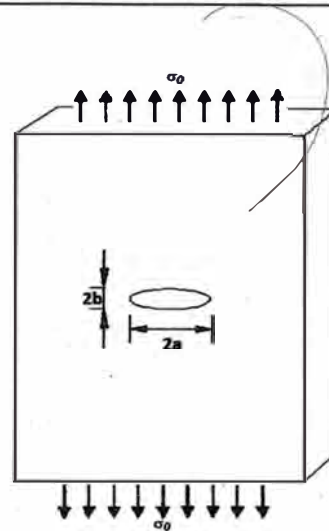
Tenemos el esfuerzo en la punta de la elipse en coordenadas curvilíneas, finalmente colocándolo en términos de a y b , se obtiene la solución de Inglis

$$(\sigma_{\beta\beta})_{\alpha=\alpha_0}^{\beta=0,\pi} = \sigma_0 \left(1 + 2\frac{a}{b} \right) \quad (15)$$

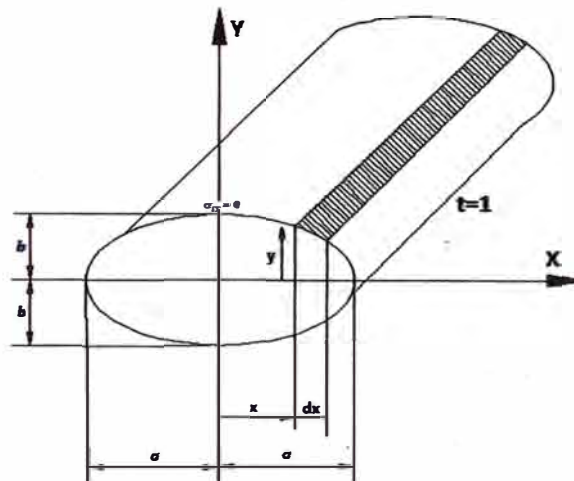
2. FORMULA DE GRIFFITH (1921)

Establece que un cuerpo sometido a una condición arbitraria de carga, que se comporte de manera totalmente elástica y que contenga una fisura, se da la propagación de la fisura cuando la disminución de energía potencial elástica que experimente el cuerpo por unidad de espesor y por unidad de longitud de avance del vértice de la fisura, sea igual o mayor al incremento de energía superficial por unidad de espesor y por unidad de longitud de avance de la fisura, que produce como consecuencia la creación de nuevas superficies.

Para encontrar una expresión matemática de este criterio, se considera una placa de espesor unitario y dimensiones planares suficientemente grandes para que puedan ser consideradas infinitas



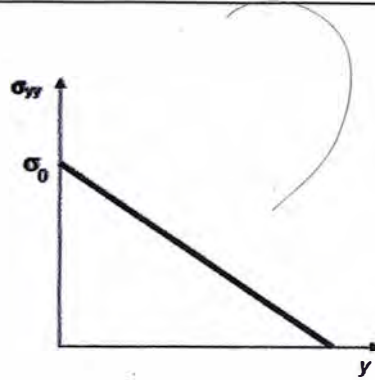
Se calcula el trabajo necesario para producir un elemento de longitud dx de la fisura.



Si llamamos, σ_{yy} a la tensión que actúa sobre la superficie del elemento dx de la fisura en dirección vertical, el trabajo para la producción del elemento de fisura de altura y será:

$$dU = \int_0^y \sigma_{yy} dx dy = dx \int_0^y \sigma_{yy} dy \quad (16)$$

Como se supone comportamiento elástico del material entre $y=0$ y $y=y$, la tensión σ_{yy} variará linealmente entre $\sigma_{yy} = 0$ y $\sigma_{yy} = \sigma_0$.



La integral en la ecuación (16), está dada por:

$$dU = \frac{dx\sigma_y y}{2} \quad (17)$$

El trabajo necesario para producir la semifisura superior está dada por:

$$U = \int_{-a}^a dU = \sigma_0 \int_{-a}^a \frac{y dx}{2} = \frac{\sigma_0 \pi a b}{4} \quad (18)$$

En la fisura completa:

$$2U = \frac{\sigma_0 \pi a b}{2} \quad (19)$$

Es posible demostrar que:

$$b = 2\sigma_0 a / E \quad (20)$$

Donde E es el módulo de Young

Con ello la expresión (20) resulta:

$$2U = \frac{\sigma_0^2 \pi a^2}{E} \quad (21)$$

La reducción de energía potencial elástica, por unidad de longitud y por unidad de grieta:

$$\frac{d(2U)}{d(2a)} = \frac{dU}{da} = \frac{d(\sigma_0^2 \pi a^2 / 2E)}{da} = \frac{\sigma_0^2 \pi a}{E} \quad (22)$$

De acuerdo con el criterio de Griffith la fisura comenzará cuando esta disminución de energía, sea igual al incremento requerido para la formación de nuevas superficies de fractura.

$$\frac{d(4\gamma a)}{d(2a)} = \frac{d(2\gamma a)}{da} = 2\gamma \quad (23)$$

Donde γ es la energía superficial por unidad de área de superficie, $4a\gamma$ representa la energía superficial total de la fisura.

La condición de propagación se da entonces cuando:

$$\frac{\sigma_i^2 \pi a}{E} = 2\gamma \quad (24)$$