

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**



TESIS DE GRADO

**Estudio Experimental y Analítico
del Arco-Onda**

MAX FERNANDO CORDOVA ROMERO

PROMOCION 1963

LIMA - PERU

1966

INDICE

	Pag.
AGRADECIMIENTO	2
I. OBJETO Y ALCANCE DE LA TESIS	5
II. ANALISIS DE ARCOS CIRCULARES	9
- Arcos Empotrados.	
- Arcos Biarticulados.	
III. ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL ARCO-ONDA	19
- Descripción del Modelo.	
- Descripción del Equipo de Ensayo y de la Instrumentación.	
- Descripción de los Experimentos.	
- Estudio Comparativo de los Resultados.	
IV. RESUMEN	
APENDICE	
A.1. EL FIBERGLASS COMO MATERIAL DE MODELOS	50
- Historia.	
- Componentes del Fiberglass.	
- Propiedades Estructurales.	
- Procedimientos de Moldeo.	
- Aplicaciones en la Industria.	
A.2. DERIVACION DE FORMULAS PARA ARCOS CIRCULARES	59
- Arcos Empotrados.	
- Arcos Biarticulados.	
BIBLIOGRAFIA	76

ESTUDIO EXPERIMENTAL Y ANALITICO
DEL ARCO-ONDA

Capítulo I

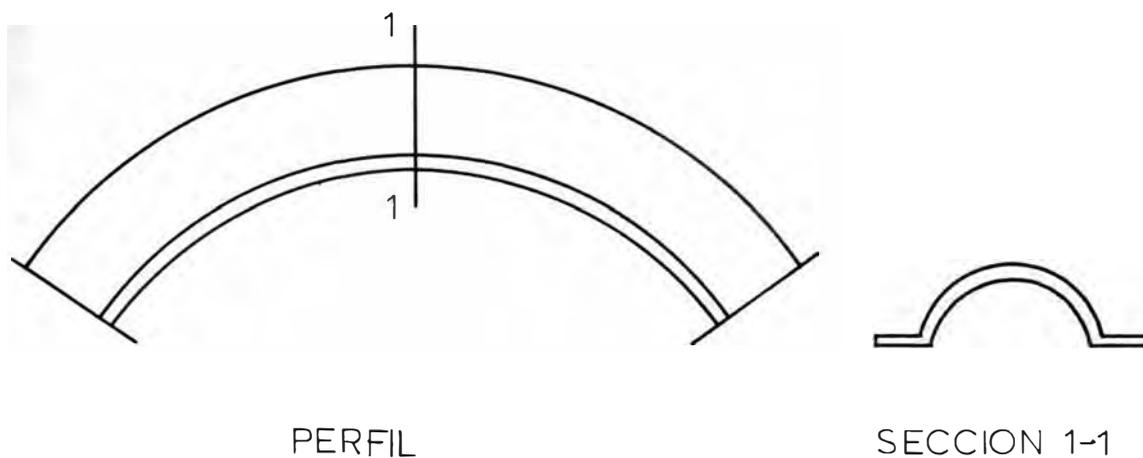
OBJETO Y ALCANCE DE LA TESIS

Uno de los principales problemas que se presentan a los ingenieros actualmente, es la construcción de cubiertas de grandes luces . Es por otro lado del todo conocido que el factor peso propio es el que limita a esta clase de estructuras el poder salvar grandes distancias.

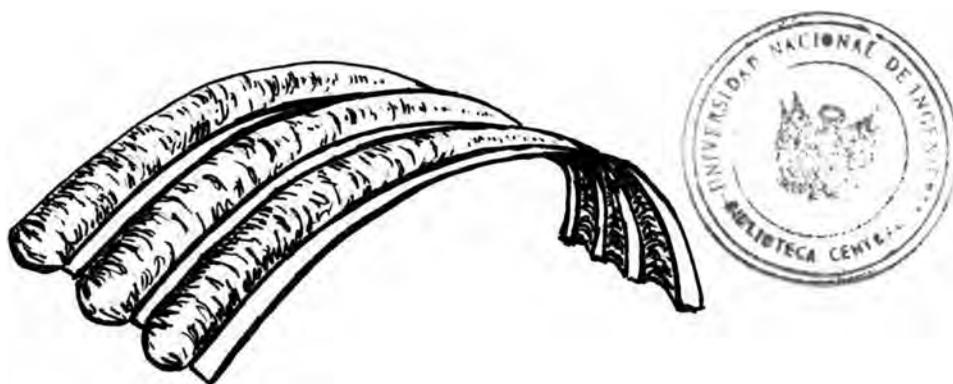
Por este motivo son merecedores de profunda admiración las construcciones de cubiertas laminares cerámicas realizadas por el ingeniero A. Sánchez del Río. Este ingeniero es pañol, de amplia trayectoria en el campo de las construcciones ha basado el proyecto de sus obras en la búsqueda de la "forma", que tanta influencia tiene en el acierto de soluciones racionales y bellas.

Las primeras aplicaciones en el campo de las bóvedas aligeradas las realizó el Ingeniero Sánchez del Río en el año 1934. Se trataba de bóvedas cilíndricas de directriz parabólica, salvando luces de 25 metros y con un espesor de 20 centímetros.

Frente al problema del pandeo presente en toda estructura laminar de curvatura simple, fue preciso ondular las bóvedas, es decir convertirlas en superficies de curvatura doble aprovechando el aumento de resistencia al pandeo que ofrecen estas estructuras por su forma.



El "arco-onda", como se muestra en la figura, presenta por sección longitudinal un arco de gran luz y por sección transversal otro arco que posee una luz que es una pequeña fracción de la luz total. Esta sección transversal tiene elementos rectos a los lados del arco lo que hace semejante a la letra griega omega (\sim). La adición de estos "arco-onda" dará lugar a una bóveda ondulada.



El objeto del presente trabajo es estudiar la posibilidad de aplicar el análisis convencional de arcos (que implícitamente consideran sólo las deformaciones longitudinales)

a los arcos-onda, cuyos esfuerzos longitudinales podrían estar influenciados por las deformaciones transversales del arco. El cálculo de la cubierta podría reducirse al de uno de sus elementos, desde que poseen estabilidad propia independiente.

El trabajo elástico se traducirá en deformaciones producidas, principalmente, por las compresiones normales y flexiones causadas por los momentos en cada sección.

Con la finalidad de estudiar el comportamiento del arco-onda, fue construido un modelo con plástico de fibra de vidrio. Este material que se presta a ser moldeado en varias formas, de bajo módulo de elasticidad y de cierta similitud con el concreto armado, se convierte en material sumamente conveniente para la construcción de modelos.

El modelo tiene como perfil longitudinal un arco de círculo de aproximadamente 2m. de luz y 0.40m. de flecha. Como sección transversal un arco-onda completo más medio arco-onda a cada-onda a cada lado, ésto para inducir en parte el efecto de los otros elementos arco-onda adyacentes. El espesor promedio resultó de 4.5mm.

Las experiencias a realizar fueron: primero, obtener la medida de los espesores en distintos puntos del arco. Segundo, hallar experimentalmente la líneas de influencia del modelo y compararlas con resultados analíticos. Finalmente, someter el modelo a estados de carga uniforme y carga concentrada, comparándolos con sus correspondientes valores analíticos.

En el capítulo siguiente se presentan las soluciones analíticas tanto para arcos empotrados como para arcos biarticulados. El desarrollo de las soluciones en forma detallada se encuentran en el Apéndice. En este capítulo fue de mucha utilidad el excelente libro de Parcel y Moorman, "Analysis of Statically Indeterminate Structures".

El capítulo tercero presenta lo referente a la construcción del modelo, instrumentación, descripción de los experimentos y sus resultados.

En el capítulo cuarto se hace un resumen de las experiencias realizadas y se presentan algunas conclusiones.

Finalmente y como material complementario se describe el Fiberglass como material de modelos y se desarrollan las fórmulas para arcos circulares: a) empotrados y b) biarticulados.

Capítulo II

ANÁLISIS DE ARCOS CIRCULARES.

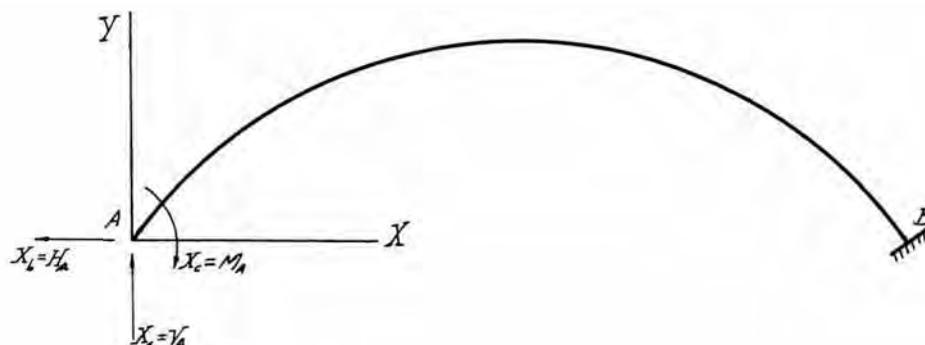
El presente capítulo está destinado a desarrollar las expresiones analíticas de las redundantes en el arco circular, que luego servirán de base comparativa a los resultados obtenidos experimentalmente.

Se presentan soluciones para las redundantes en el apoyo debido a cargas concentradas, repartidas y desplazamientos en el apoyo tanto para arcos empotrados como arcos biarticulados. Esto debido a que no se conocía exactamente el comportamiento del modelo en lo referente a sus apoyos.

Además de servir de base comparativa, éstos resultados tienen por finalidad mostrar la complejidad que en algunos casos se presenta en el desarrollo y en las expresiones finales de las redundantes, todo lo cual contribuye a hacer deseable el estudio e investigación experimental en modelos. Se ha considerado para el desarrollo de las expresiones analíticas, que se trata de un arco cuya directriz es circular y tanto su módulo de elasticidad E como momento de inercia I , son constantes.

A continuación se presentan las soluciones analíticas para las redundantes en arcos empotrados y luego las correspondientes al arco biarticulado.

Redundantes en el Arco Empotrado



La figura muestra un arco empotrado, bajo cualquier condición de carga, con las reacciones redundantes aplicadas en el apoyo A.

Las redundantes $X_a = V_A$, $X_b = V_B$ y $X_c = M_A$ deben cumplir las siguientes ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \delta'_a = 0 &= \delta'_a + X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} + X_c \delta_{ac} \\ \delta'_b = 0 &= \delta'_b + X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} + X_c \delta_{bc} \quad [I] \\ \delta'_c = 0 &= \delta'_c + X_a \delta_{ca} + X_b \delta_{cb} + X_c \delta_{cc} \end{aligned}$$

Calculando las deflexiones δ :

$$\delta'_a = \int \frac{M' m_a ds}{EI} = - \int \frac{M' x ds}{EI}$$

$$\delta'_b = \int \frac{M' m_b ds}{EI} = - \int \frac{M' y ds}{EI}$$

$$\delta'_c = \int \frac{M' ds}{EI}$$

sabiendo que $M_a = -X$, $M_b = -Y$, $M_c = 1$. Asimismo

$$\delta_{aa} = \int \frac{m_a^2 ds}{EI} = \int \frac{x^2 ds}{EI} \quad , \quad \delta_{bb} = \int \frac{y^2 ds}{EI} \quad , \quad \delta_{cc} = \int \frac{ds}{EI}$$

$$\delta_{ab} = \int \frac{x y ds}{EI}, \quad \delta_{ac} = -\int \frac{x ds}{EI}, \quad \delta_{bc} = -\int \frac{y ds}{EI}$$

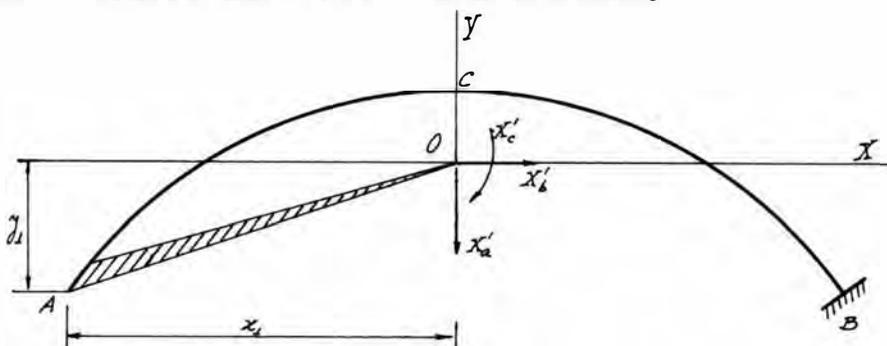
Resolviendo Eqs. I para las redundantes, obtenemos:

$$X_a = - \frac{\delta_a' (\delta_{bb} \delta_{cc} - \delta_{bc}^2) - \delta_b' (\delta_{ab} \delta_{cc} - \delta_{ac} \delta_{cb}) + \delta_c' (\delta_{ab} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bb})}{\delta_{aa} (\delta_{bb} \delta_{cc} - \delta_{bc}^2) - \delta_{ab} (\delta_{ba} \delta_{cc} - \delta_{ac} \delta_{cb}) + \delta_{ac} (\delta_{ab} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bb})}$$

$$X_b = \frac{\delta_a' (\delta_{ba} \delta_{cc} - \delta_{bc} \delta_{ca}) - \delta_b' (\delta_{aa} \delta_{cc} - \delta_{ac}^2) + \delta_c' (\delta_{aa} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{ba})}{\delta_{aa} (\delta_{bb} \delta_{cc} - \delta_{bc}^2) - \delta_{ab} (\delta_{ba} \delta_{cc} - \delta_{ac} \delta_{cb}) + \delta_{ac} (\delta_{ab} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bb})}$$

$$X_c = - \frac{\delta_a' (\delta_{ba} \delta_{cb} - \delta_{bb} \delta_{ca}) - \delta_b' (\delta_{aa} \delta_{cb} - \delta_{ab} \delta_{ca}) + \delta_c' (\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2)}{\delta_{aa} (\delta_{bb} \delta_{cc} - \delta_{bc}^2) - \delta_{ab} (\delta_{ba} \delta_{cc} - \delta_{ac} \delta_{cb}) + \delta_{ac} (\delta_{ab} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bb})}$$

Estas expresiones son complejas y requieren alguna simplificación. Por observación de las integrales que expresan δ_{ab} , δ_{ac} y δ_{bc} deducimos que una translación del origen coordinado al centro de gravedad del sistema de pesos elásticos $\frac{ds}{EI}$, hará nulas dichas integrales. Esto es lo que se conoce como " Centro Elástico " del sistema.



Tomando como origen O, las reacciones redundantes en A serán $V_a = X'_a = X_a$, $H_a = X'_b = X_b$, y $M_a = X'_c + V_o x_1 + H_o y_1$

Si el arco es simétrico, el centro elástico caerá en el eje de simetría que será a su vez eje principal y los pro-

ductos de inercia se desvanecerán.

Entonces: $\delta_{ab} = \delta_{ba} = \delta_{bc} = \delta_{cb} = \delta_{ac} = \delta_{ca} = 0$

Las redundantes en el centro elástico serán:

$$X_a = -\frac{\delta_a'}{\delta_{aa}}, \quad X_b = -\frac{\delta_b'}{\delta_{bb}}, \quad X_c = -\frac{\delta_c'}{\delta_{cc}}$$

Reemplazando δ por sus valores:

$$X_a = V_0 = -\frac{\int_c^A M'_L x \cdot ds - \int_c^B M'_R x \cdot ds}{\int_A^B x^2 ds}$$

$$X_b = H_0 = -\frac{\int_A^B M'_y ds}{\int_A^B y^2 ds}$$

$$X_c = M_0 = -\frac{\int_A^B M'_z ds}{\int_A^B ds}$$

Líneas de Influencia para las Redundantes del Arco Empotrado.

Las expresiones de las Líneas de Influencia (ver Apéndice) para las redundantes en el Centro Elástico vienen dadas por:

$$V_0 = \frac{\frac{1}{2}(\theta_k - \theta_i - \sin \theta_k \cos \theta_k + \sin \theta_i \cos \theta_i) + \sin \theta_i (\cos \theta_k - \cos \theta_i)}{\theta_k - \sin \theta_k \cos \theta_k}$$

$$H_0 = \frac{\frac{\sin^2 \theta_i}{2} - \frac{\sin^2 \theta_k}{2} + \sin \theta_i (\sin \theta_k - \sin \theta_i) + \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} (\cos \theta_i - \cos \theta_k) - \frac{\sin \theta_k \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i)}{\theta_k}}{\sin \theta_k \cos \theta_k + \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k}}$$

$$M_0 = \frac{r(\cos \theta_i - \cos \theta_k) - r \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i)}{2 \theta_k}$$

En la tabla siguiente se presentan los valores que asumen éstas expresiones, Corte, Empuje, Momento, en el Centro Elástico y para distintas posiciones de la carga unitaria.

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
θ_2	0.5665	0.4136	0.2717	0.1342	0.0000
V_0	0.0305	0.1096	0.2222	0.3559	0.5000
H_0	0.1763	0.5289	0.8804	1.1278	1.2159
M_0 [mt]	0.01142	0.04409	0.09632	0.16721	0.25640
M_0 [r]	0.00780	0.03011	0.06580	0.11421	0.17511

$$\frac{f}{L} = 0.1925$$

Las Líneas de Influencia Para las Redundantes en el apoyo pueden ser obtenidas como sigue:

$$V_2 = V_0 \quad 0 \leq P \leq \frac{L}{2}$$

$$H_2 = H_0 \quad 0 \leq P \leq L$$

$$M_2 = M_0 - \frac{V_0 L}{2} + H_0 y_2$$

$$\frac{f}{L} = 0.1925$$

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
V_2	0.0305	0.1096	0.2222	0.3559	0.5000	0.6441	0.7778	0.8904	0.9695
H_2	0.1763	0.5289	0.8804	1.1278	1.2159	1.1278	0.8804	0.5289	0.1763
M_2	0.01298	0.03489	0.04991	0.05058	0.03515	0.00652	-0.02793	-0.05551	-0.05651
M_2	0.01741	0.04680	0.06694	0.06783	0.04715	0.00875	-0.03746	-0.07446	-0.07580

Redundantes en el Arco Empotrado con carga uniforme.

Las redundantes aplicadas al Centro Elástico vienen expresadas por:

$$H_0 = \left[-\frac{8}{3} \theta_k \sin^2 \frac{\theta_k}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta_k}{2} + 2 \right) + \frac{4}{3} \theta_k \cos^4 \frac{\theta_k}{2} + \frac{8}{9} \sin \theta_k \left(\cos^2 \frac{\theta_k}{2} + 2 \right) + \frac{5}{2} \theta_k - \frac{5}{4} \sin 2\theta_k - 2 \theta_k \cos \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k} \right] \frac{wr}{\sin \theta_k \cos \theta_k + \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k}}$$

$$M_0 = -wr^2 \left[\theta_k \sin \theta_k - 2 + \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} + \cos \theta_k \right]$$

Reemplazando el valor θ_k del modelo:

$$H_0 = +0.90449 \, wt$$

$$M_0 = -0.14708 \, wt^2$$

El Momento de empotramiento en el apoyo es:

$$M_2 = H_0 y_2 + M_0 \qquad y_2 = r \sin \theta_k \left(\frac{1}{\theta_k} - \cot \theta_k \right)$$

$$M_1 = M_2 = +0.00715 \, wt^2$$

$$H_1 = H_2 = +0.90449 \, wt$$

$$V_1 = V_2 = +0.7351 \, wt$$

Deflecciones en el Arco Empotrado debidas a carga concentrada.

Las deflecciones debidas a una carga P aplicada en el centro de la luz del arco empotrado, vienen expresadas por:

$$EI \delta_c = -M_1 r^2 [(\cos \theta_k - \cos \theta_i) + \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i)] - V_1 r^3 [\sin \theta_k (\cos \theta_k - \cos \theta_i)$$

$$+ \sin \theta_k \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i) + \frac{\theta_k - \theta_i}{2} \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{2} + \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{2}$$

$$+ \sin \theta_i (\cos \theta_k - \cos \theta_i)] - H_1 r^3 \left[\frac{(\sin^2 \theta_k - \sin^2 \theta_i)}{2} - \sin \theta_i (\sin \theta_k - \sin \theta_i) + \right.$$

$$\left. + \cos \theta_k (\cos \theta_k - \cos \theta_i) + \cos \theta_k \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i) \right]$$

donde M_1 , V_1 , H_1 son los valores de las redundantes en el apoyo obtenidos de las Líneas de Influencia para la condición $k = 0.5$.

Reemplazando los siguientes valores:

$$M_1 = +0.04715 \, Pr$$

$$V_L = 0.5 P$$

$$H_L = 1.2159 P$$

$$\theta_k = 0.7351 \rho$$

Luego: $EI \delta_{0,1} = + 0.00029 P r^3$

$$EI \delta_{0,2} = + 0.00042 P r^3$$

$$EI \delta_{0,3} = + 0.00003 P r^3$$

$$EI \delta_{0,4} = - 0.00069 P r^3$$

$$EI \delta_{0,5} = - 0.00116 P r^3$$

Reacciones en el Arco Empotrado por desplazamiento de Apoyo.

a) Desplazamiento horizontal.

$$EI \delta_H = H_B r^3 \left[\theta_k + \sin \theta_k \cos \theta_k - \frac{2 \sin^2 \theta_k}{\theta_k} \right]$$

$$M_B = H_B r \left[\frac{\sin \theta_k}{\theta_k} - \cos \theta_k \right]$$

Reemplazando: $\theta_k = 0.7351 \rho$

$$EI \delta_H = 0.00890 H_B r^3$$

$$M_B = 0.17052 H_B r$$

b) Desplazamiento vertical.

$$EI \delta_V = V_B r^3 \left[\theta_k - \sin \theta_k \cos \theta_k \right]$$

$$M_B = -V_B r \sin \theta_k$$

Reemplazando: $\theta_k = 0.7351 \rho$

$$EI \delta_V = 0.23763 V_B r^3$$

$$M_B = -0.67064 V_B r$$

EL ARCO BIARTICULADO

Línea de Influencia del Empuje para el Arco Biarticulado.

El Empuje debida a una carga unitaria en cualquier punto de un arco biarticulado viene expresado por:

$$H = 1 - \sin \theta_k \sin \theta_i - \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_k - \theta_i) + \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_k - \sin^2 \theta_i) - \theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k$$

$$- \cos \theta_k \cos \theta_i + 2 \theta_i \sin \theta_k \sin \theta_i - 2 \theta_i \sin \theta_k \cos \theta_k$$

Tabulando:

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
H	0.25973	0.58993	0.87783	1.07009	1.13659	1.07009	0.87783	0.58993	0.25973

Empuje Horizontal en el Arco Biarticulado con carga uniforme.

El Empuje debido a carga uniforme estadado por:

$$H_w = -wr \left[-\frac{16}{3} \theta_k \cos \theta_k - \theta_k \sin^2 \theta_k - \frac{8}{9} \sin \theta_k (\cos^2 \frac{\theta_k}{2} + 2) + 4 \sin \theta_k + \theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k \right]$$

$$+ \frac{5}{2} \sin \theta_k \cos \theta_k - \frac{\theta_k}{2} + 2 \theta_k^2 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k$$

Reemplazando: $\theta_k = 0.7351 \rho$

$$H_w = 0.86912 wr$$

Deflecciones en el Arco Biarticulado debidas a Carga Concentrada. Las deflecciones en el arco circular biarticulado con una carga P en su línea de centro están expresadas por:

$$\begin{aligned}
EI \delta_i = & V_p r^3 \sin^2 \theta_k (\theta_i - \theta_k) - 2 V_p r^3 k \theta_i \sin^2 \theta_k + 2 V_p r^3 (1-k) \sin \theta_k (\cos \theta_i - \cos \theta_k) - \\
& - 2 V_p k r^3 \sin \theta_k (\cos \theta_k - 1) - V_p r^3 \left(\frac{\theta_k}{2} - \frac{\theta_i}{2} + \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{2} - \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{2} \right) - \\
& - [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \sin \theta_k (\sin \theta_i - \sin \theta_k) + (V_p H_i + H_p k) r^3 \sin \theta_k (\sin \theta_i + \sin \theta_k) + \\
& + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_i - \theta_k) - [V_p H_i + H_p k] r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_i + \theta_k) + \\
& + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{2} - \frac{\sin^2 \theta_k}{2} \right) - V_p H_i r^3 \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{2} + \frac{\sin^2 \theta_k}{2} \right) + \\
& + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \cos \theta_k (\cos \theta_i - \cos \theta_k) + V_p H_i r^3 \cos \theta_k (2 - \cos \theta_i - \cos \theta_k) - \\
& - H_p k r^3 \left(\frac{\sin^2 \theta_k}{2} - \frac{\sin^2 \theta_i}{2} \right) - H_p k r^3 \cos \theta_k (\cos \theta_k - \cos \theta_i) - H_p H_i r^3 (\theta_k + \sin \theta_k \cos \theta_k) + \\
& + 4 H_p H_i r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k - 2 H_p H_i r^3 \theta_k \cos^2 \theta_k
\end{aligned}$$

donde H son los valores de la Línea de Influencia del Empuje en los puntos \underline{i} donde se desea conocer la deflección; V_p , H_p son las reacciones debidas a la carga central P:

$$H_p = 1.13659 P$$

$$V_p = 0.5 P$$

$$EI \delta_{0,1} = + 0.00106 P r^3$$

$$EI \delta_{0,2} = + 0.00056 P r^3$$

$$EI \delta_{0,3} = - 0.00076 P r^3$$

$$EI \delta_{0.4} = -0.00223 P r^3$$

$$EI \delta_{0.5} = -0.00295 P r^3$$

Los gráficos correspondientes a las Líneas de Influencia y de flecciones se presentan en el capítulo siguiente, junto a las curvas obtenidas experimentalmente.

Capítulo III

ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL ARCO-ONDA

Descripción del Modelo. Para la fabricación del modelo se diseñó el molde y su encofrado de acuerdo a la medida requerida por aquél. En la primera fotografía se puede apreciar el encofrado y una forma metálica destinada a dar al molde de yeso, la sección transversal correspondiente. Se relleno el encofrado con barro a fin de usar la menor cantidad de yeso en el acabado. El molde se dejó fraguar, permitiéndose además su secado completo.

Para obtener el modelo de Fiberglass, el procedimiento fue el siguiente:

- Rociar el molde con un agente separador para evitar que la resina se pegue.
- Capa de GEL COAT.
- Capa de resina pura.
- Tela de fibra de vidrio de 260 gr/m².
- Tejido de fibra de vidrio de 450 gr/m².
- Tela de fibra de vidrio de 260 gr/m².
- Capa final de resina.

Este proceso se repite hasta que se obtiene el espesor deseado.

Finalmente, el modelo fue desmontado y se corrigie-

ron las pequeñas imperfecciones en su superficie. Generalmente, estos materiales son difíciles de trabajar en campo abierto. Debe ejercerse un control cuidadoso de temperatura y humedad cuando se trata de fabricar piezas especiales que requieren superficies muy suaves ó van a ser usados como elementos decorativos.

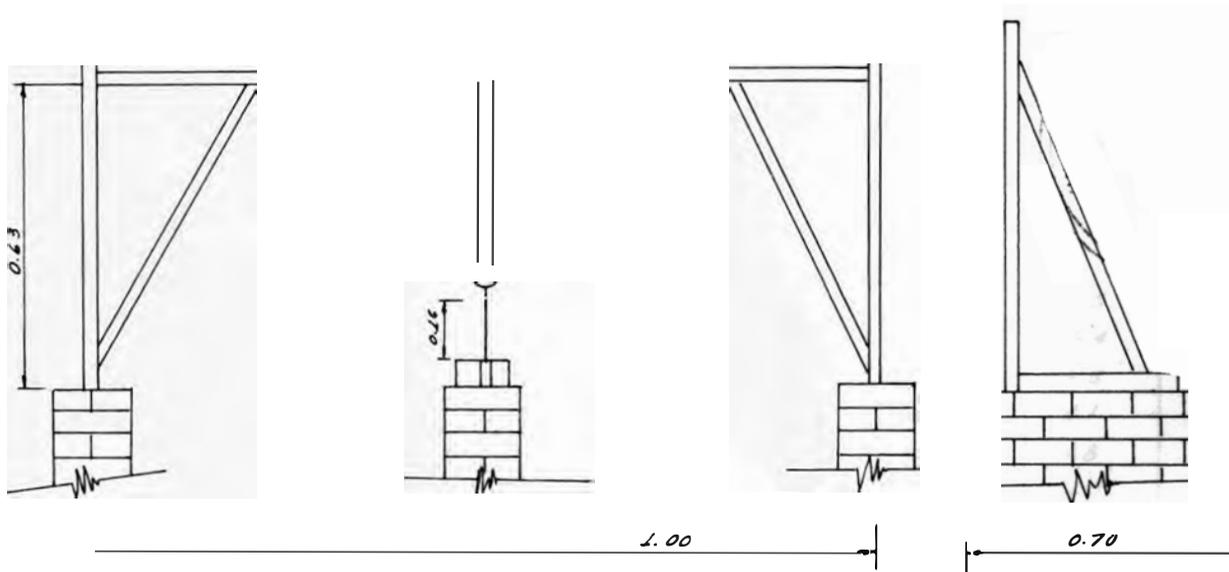
Equipo de ensayo. Para la medición de espesores de la lámina se construyó un castillo de angulares ranurados y un defleótometro con divisiones de 0.01 mm. Para hallar el valor experimental de las Líneas de Influencia fue preciso montar el arco en apoyos de concreto, como puede observarse en las fotografías. Además uno de los apoyos fue construído móvil a fin de proporcionar al arco, los desplazamientos que permitieran obtener las Líneas de Influencia. El Arco-Onda estaba "anclado" a los apoyos por medio de pernos cuyas cabezas estaban embebidas en el concreto.

Los instrumentos de precisión usados para la medida de las deflecciones verticales a décimos de la luz, fueron el Dial Indicator de la Federal Product Corporation con divisiones marcadas de 0.01 mm. y el Mauser 8H7 con divisiones también de 0.01 mm. Las máximas deflecciones medibles son de una pulgada y un centímetro respectivamente.

A continuación se describen los diversos experimentos a que fue sometido el modelo y se acompañan las fotografías obtenidas, así como las gráficas correspondientes a los resultados.

Medición del espesor del Arco-Onda.

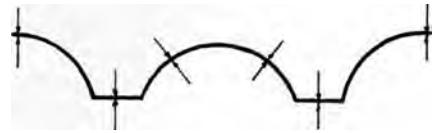
Para obtener los espesores de la lámina del modelo de "arco-onda", se montó un castillo de angulares ramurados como el mostrado en la figura. El muro central llevaba un clavo empotrado en la parte superior y del castillo pendía un deflectómetro coincidente con el extremo del clavo.



Este dispositivo permitía leer los espesores del arco-onda en cualquier punto; para esto bastaba pasar la lámina entre el deflectómetro y el clavo y tomar las lecturas correspondientes.

El modelo se dividió en dieciocho secciones y en cada sección se midieron seis puntos. Los espesores promedio se presentan en el siguiente Cuadro de Espesores (mm.). Estos resultados muestran variaciones que son debidas tanto a la construcción como a la forma de la sección transversal. El espesor promedio de toda la lámina fue de 4.5 mm.

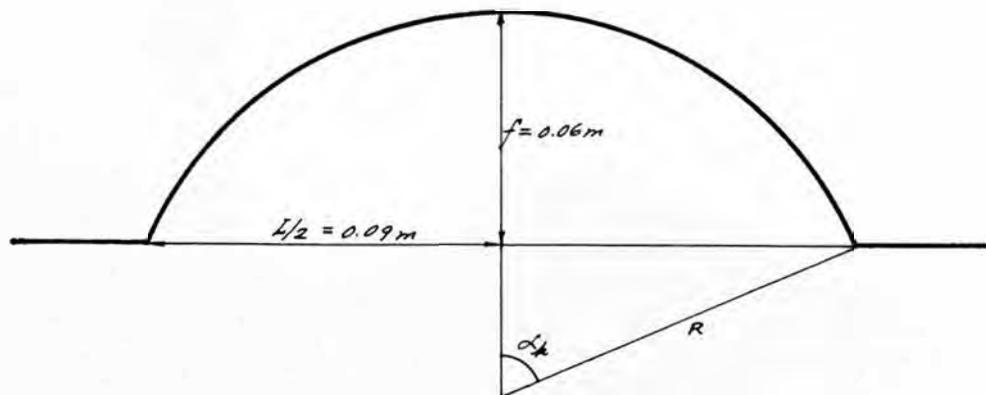
CUADRO DE ESPESORES



PUNTO	ESPEJOR	PUNTO	ESPEJOR	PUNTO	ESPEJOR
1	4.4	37	4.3	73	3.9
2	4.5	38	6.1	74	4.5
3	3.5	39	5.5	75	4.3
4	4.0	40	4.9	76	4.6
5	5.1	41	6.8	77	7.4
6	4.2	42	4.9	78	4.3
7	4.2	43	3.8	79	3.7
8	6.3	44	5.1	80	5.3
9	4.6	45	3.7	81	4.5
10	4.3	46	4.0	82	4.2
11	5.3	47	5.1	83	5.1
12	4.4	48	3.7	84	4.4
13	3.8	49	3.8	85	3.5
14	5.3	50	6.1	86	5.4
15	4.6	51	3.6	87	3.5
16	4.2	52	3.9	88	4.1
17	5.7	53	5.1	89	4.8
18	3.8	54	3.6	90	4.0
19	3.4	55	4.0	91	4.1
20	5.0	56	6.0	92	5.5
21	4.0	57	4.6	93	3.8
22	4.2	58	4.7	94	3.8
23	4.7	59	8.0	95	5.2
24	3.7	60	5.0	96	4.2
25	3.3	61	4.0	97	3.7
26	4.6	62	6.0	98	4.2
27	4.4	63	4.6	99	4.5
28	4.4	64	4.0	100	4.0
29	4.8	65	4.5	101	4.8
30	4.0	66	3.9	102	4.2
31	4.5	67	4.0	103	3.7
32	5.2	68	5.4	104	4.5
33	4.4	69	3.8	105	4.7
34	4.1	70	4.9	106	4.8
35	4.3	71	5.6	107	4.0
36	3.5	72	4.8	108	4.0

Propiedades de la Sección Transversal.

a) Dimensiones de la sección:



La sección transversal posee un arco de círculo de 6 cm. de flecha y 18 cm. de cuerda. Con estas dimensiones se procede al cálculo de R y α_k .

$$\frac{f}{L/2} = \frac{R(1 - \cos \alpha_k)}{R \sin \alpha_k} = \frac{0.06}{0.09} = \frac{2}{3}$$

$$3(1 - \cos \alpha_k) = 2 \sin \alpha_k$$

$$13 \sin^2 \alpha_k - 12 \sin \alpha_k = 0$$

$$\sin \alpha_k = \frac{12}{13} = 0.92308$$

$$\therefore \alpha_k = 67'23'' = 1.17606 \text{ rad}$$

$$R \sin \alpha_k = 0.09 \text{ m.}$$

$$\therefore R = 0.0974 \text{ m.}$$

b) Cálculo del Momento de Inercia:

El Momento de Inercia del Arco de Círculo está dado por:

$$I_a = \frac{2r^3 t}{315} (7\alpha_k^5 - \alpha_k^7)$$

$$\alpha_k = 67'23'' = 1.17606 \text{ rad}$$

$$\alpha_k^5 = 2.251$$

$$\alpha_k^7 = 3.1135$$

$$I_a = 7418 t \quad [\text{cm}^4]$$

$$\bar{y} = \frac{r \sin \alpha_k}{d_k} = -7.645 \text{ cm.}$$

El Centro de Gravedad de la Sección Completa:

$$y_{c.g.} = \frac{2R \alpha_k t = \bar{y} + 7t = 3.74}{2 \cdot 974 + 1176 t + 7t} = 6.73 \text{ cm.}$$

$$I_r = I_a + I_f + A_a (\bar{y} - y_{c.g.})^2 + A_f (\bar{y}_f - y_{c.g.})^2 = 155.95 t + 0.584 t^3$$

En el Modelo, la Sección transversal consta de 2 "omegas"

$$t = 0.45 \text{ cm.} \quad I_{\text{Mod.}} = 140.46 \text{ cm}^4$$

c) Cálculo del Area:

El área viene expresada por:

$$A_{\text{Mod.}} = 4R \alpha_k t + 14t = 26.92 \text{ cm}^2$$

d) Ubicación del Eje Neutro:

$$y_B = 6.73 - 3.74 = 2.99 \text{ cm.}$$

$$y_T = 6.00 - 2.99 = 3.01 \text{ cm.}$$

Dimensiones del Perfil Longitudinal.

De las medidas reales del Modelo obtenemos:

$$\frac{f}{L/2} = \frac{r(1 - \cos \theta_k)}{r \sin \theta_k} = \frac{0.378}{0.982} = 0.385$$

$$1 - \cos \theta_k = 0.385 \sin \theta_k$$

$$1.148225 \sin^2 \theta_k - 0.77 \sin \theta_k = 0$$

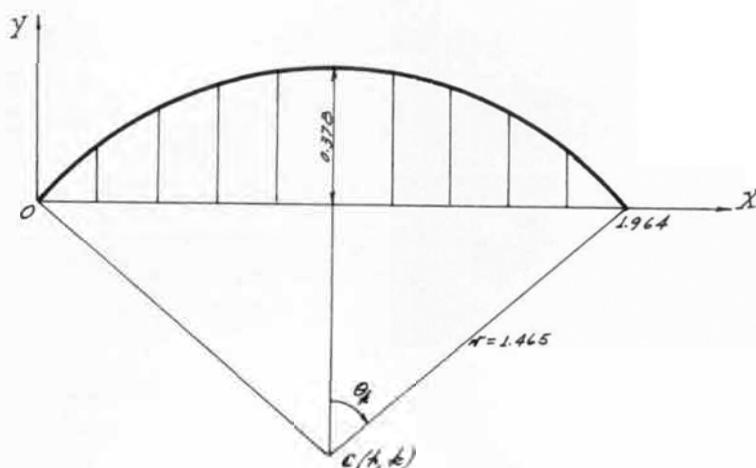
$$1.148225 \sin \theta_k = 0.77$$

$$\theta_k = 42'07'' = 0.7351 \text{ rad}$$

$$r \sin \theta_k = 0.982 \text{ m.}$$

$$r = 1.465 \text{ m.}$$

Equación de la Curva.



La Equación General de la Circunferencia es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

siendo $C(h,k)$ el centro de la circunferencia.

$$h = 0.982 \text{ m.}$$

$$k = -(1.465 - 0.370) = -1.087 \text{ m.}$$

$$(x-0.982)^2 + (y+1.087)^2 = 1.465^2 \quad (a)$$

Con el objeto de hallar el valor de la tangente en cualquier punto de la circunferencia derivamos la Eq.(a)

$$2(x-0.982) + 2(y+1.087) \frac{dy}{dx} = 0$$

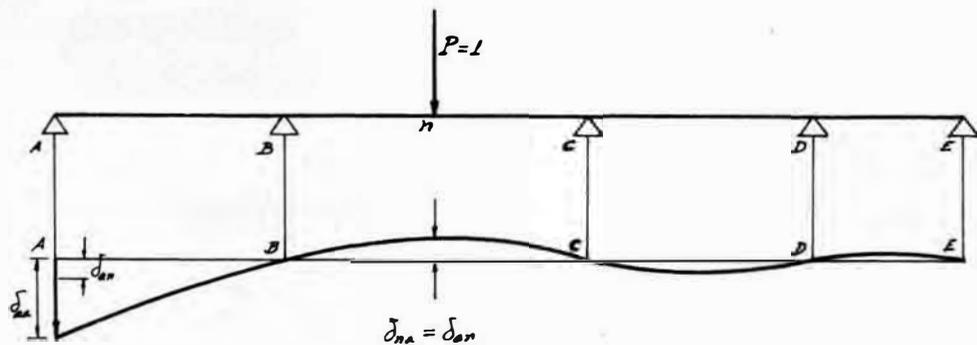
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan \theta = -\frac{(x-0.982)}{(y+1.087)} \quad (b)$$

Tabulando Eqs.(a) y (b).

X	Y	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	θ	$\Delta \theta$	ΔS	$\theta [p]$
0.000	0.000	0.90410	0.74178	0.67064	42°07'00"	9°39'37"	0.247	0.7351
0.196	0.149	0.63595	0.84380	0.53665	32°27'23"	8°45'35"	0.224	0.5665
0.393	0.255	0.43890	0.91568	0.40190	23°41'48"	8°07'44"	0.208	0.4136
0.589	0.324	0.27853	0.96331	0.26838	15°34'04"	7°52'46"	0.202	0.2717
0.786	0.365	0.13499	0.99101	0.13379	7°41'18"	7°41'18"	0.196	0.1342
0.982	0.378	0.00000	1.00000	0.00000	0°00'00"			0.0000

Construcción de Líneas de Influencia por Experimentación en Modelos. El problema de construcción de Líneas de Influencia en estructuras de alto grado de indeterminación se ve grandemente simplificado por el análisis mecánico de estructuras a escala reducida.

Considérese, por ejemplo, el caso de una viga continua de cuatro tramos:



For el Teorema de Reciprocidad de Maxwell:

$$\delta_{an} = \delta_{na}$$

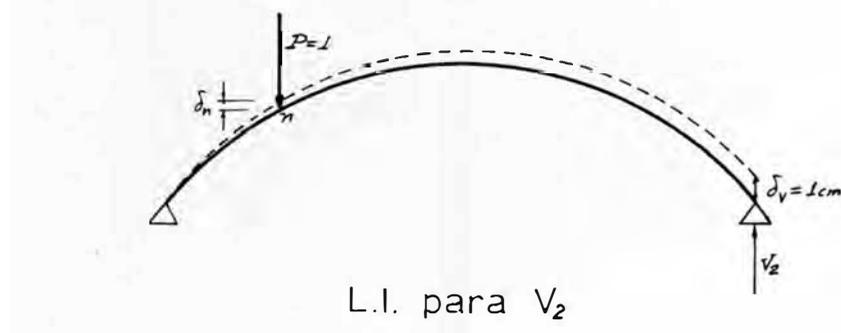
y por el Principio de Trabajos Virtuales:

$$R_A \delta_{aa} = -P \delta_{na}$$

$$= -P \frac{\delta_{na}}{\delta_{aa}}$$

Si queremos obtener la Línea de Influencia para la reacción en el apoyo A, bastará inducir una deformación vertical en dicho apoyo y la curva elástica resultante representará a cierta escala la L.I. para R_A .

Líneas de Influencia en el modelo de Arco-Onda.



Como aplicación del artículo precedente y a fin de hallar las Líneas de Influencia de la reacción vertical, reacción horizontal y momento, se construyó uno de los apoyos con libertad para desplazarse vertical y horizontalmente y además posibilidad de giro.

Si se proporciona al apoyo móvil un desplazamiento unitario (1 cm) las lecturas en los defleómetros colocados a décimos de la luz darán directamente los coeficientes de influencia en dichos puntos. Este procedimiento es válido tanto para la Línea de Influencia de V_2 como para la del empuje H.

Para la Línea de Influencia de M_2 las deflecciones leídas se dividen entre el giro (en radianes) inducido al apoyo. El Momento que se obtiene de este diagrama tendrá las mismas dimensiones que las deflecciones y la carga ficticia unitaria aplicada.

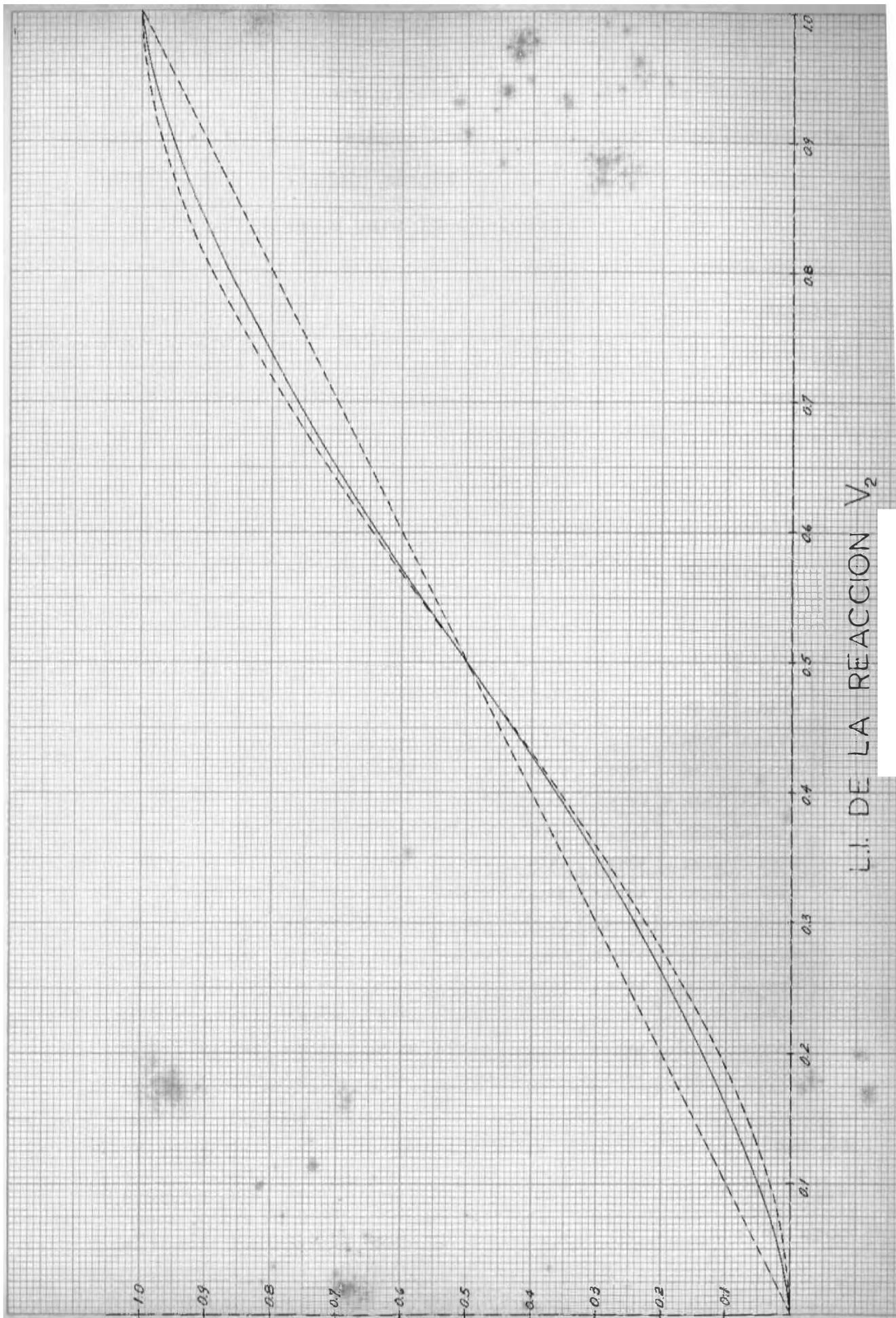
Línea de Influencia para la Reacción Vertical.

Como ha sido explicado, para la obtención de la Línea de Influencia de la reacción vertical, se procedió a desplazar verticalmente 1 cm. el apoyo móvil. Las lecturas en los deformómetros colocados a décimos de la luz antes y después de dicho desplazamiento, permiten obtener las deflexiones relativas que representan la Línea de Influencia para V.

La Tabla a continuación, muestra los valores normalizados (en este caso 0.5 en la línea de centros) obtenidos de nueve ciclos completos en el Modelo.

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0512	0.1367	0.2384	0.3614	0.5000	0.6386	0.7616	0.8633	0.9488
0.0536	0.1377	0.2328	0.3520	0.5000	0.6480	0.7662	0.8623	0.9464
0.0492	0.1331	0.2323	0.3500	0.5000	0.6500	0.7677	0.8669	0.9508
0.0510	0.1429	0.2509	0.3740	0.5000	0.6260	0.7491	0.8571	0.9490
0.0593	0.1511	0.2559	0.3783	0.5000	0.6217	0.7441	0.8489	0.9407
0.0541	0.1411	0.2448	0.3686	0.5000	0.6314	0.7552	0.8589	0.9459
0.0502	0.1374	0.2366	0.3560	0.5000	0.6440	0.7634	0.8626	0.9498
0.0555	0.1481	0.2534	0.3751	0.5000	0.6249	0.7466	0.8519	0.9495
0.0573	0.1493	0.2561	0.3796	0.5000	0.6204	0.7439	0.8506	0.9427
0.0492	0.1335	0.2379	0.3607	0.5000	0.6393	0.7621	0.8665	0.9508
0.0444	0.1303	0.2286	0.3476	0.5000	0.6524	0.7714	0.8697	0.9556
0.0353	0.1185	0.2236	0.3448	0.5000	0.6552	0.7764	0.8815	0.9637
0.0416	0.1291	0.2300	0.3489	0.5000	0.6511	0.7700	0.8709	0.9584
0.0424	0.1302	0.2330	0.3527	0.5000	0.6473	0.7670	0.8698	0.9576
0.0544	0.1414	0.2429	0.3631	0.5000	0.6369	0.7571	0.8586	0.9456
0.0539	0.1416	0.2448	0.3673	0.5000	0.6327	0.7552	0.8584	0.9461
0.0475	0.1339	0.2368	0.3565	0.5000	0.6435	0.7632	0.8661	0.9525
0.0462	0.1316	0.2332	0.3535	0.5000	0.6465	0.7668	0.8684	0.9538
0.0498	0.1371	0.2396	0.3606	0.5000	0.6394	0.7604	0.8629	0.9502

La última fila muestra los valores promedio de la Línea de



L.I. DE LA REACCION V₂

Influencia de V_2 para el Modelo. Esta Línea de Influencia está graficada juntamente con las obtenidas analíticamente para el arco circular empotrado y el biarticulado.

Línea de Influencia para la Reacción Horizontal.

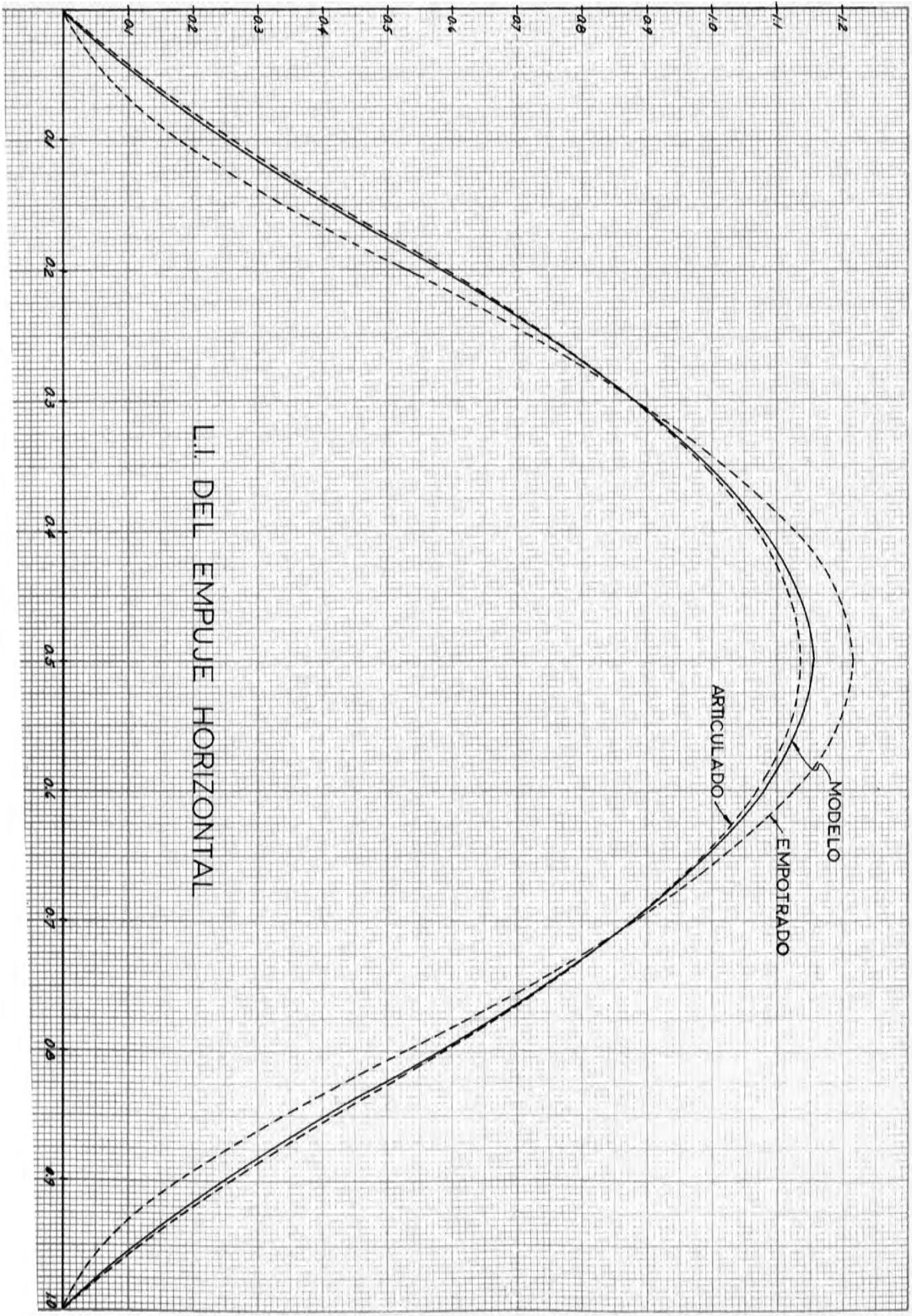
Para la obtención de la Línea de Influencia de la reacción horizontal ó Empuje, se procedió a dar un desplazamiento horizontal de 1 cm. al apoyo móvil. Las deflecciones relativas entre el arco inicial y su deformada determinan la Línea de Influencia. Estos valores fueron medidos por medio de deformómetros colocados a décimos de luz.

La Tabla siguiente muestra los valores normalizados obtenidos de seis ciclos completos en el Modelo.

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.2450	0.5801	0.8794	1.0816	1.1591	1.0816	0.8794	0.5801	0.2450
0.2460	0.5807	0.8794	1.0808	1.1580	1.0808	0.8794	0.5807	0.2460
0.2455	0.5813	0.8794	1.0832	1.1610	1.0832	0.8794	0.5813	0.2455
0.2496	0.5831	0.8794	1.0800	1.1579	1.0800	0.8794	0.5831	0.2496
0.2512	0.5825	0.8794	1.0795	1.1564	1.0795	0.8794	0.5825	0.2512
0.2513	0.5838	0.8794	1.0791	1.1551	1.0791	0.8794	0.5838	0.2513
0.2503	0.5824	0.8794	1.0798	1.1573	1.0798	0.8794	0.5824	0.2503
0.2516	0.5837	0.8794	1.0811	1.1585	1.0811	0.8794	0.5837	0.2516
0.2509	0.5848	0.8794	1.0807	1.1581	1.0807	0.8794	0.5848	0.2509
0.2525	0.5867	0.8794	1.0787	1.1542	1.0787	0.8794	0.5867	0.2525
0.2514	0.5873	0.8794	1.0785	1.1537	1.0785	0.8794	0.5873	0.2514
0.2522	0.5860	0.8794	1.0794	1.1555	1.0794	0.8794	0.5860	0.2522
0.2499	0.5835	0.8794	1.0802	1.1571	1.0802	0.8794	0.5835	0.2499

La última fila muestra los valores promedio de la Línea de Influencia del Empuje H. Esta Línea de Influencia se halla graficada juntamente con sus correspondientes para el arco

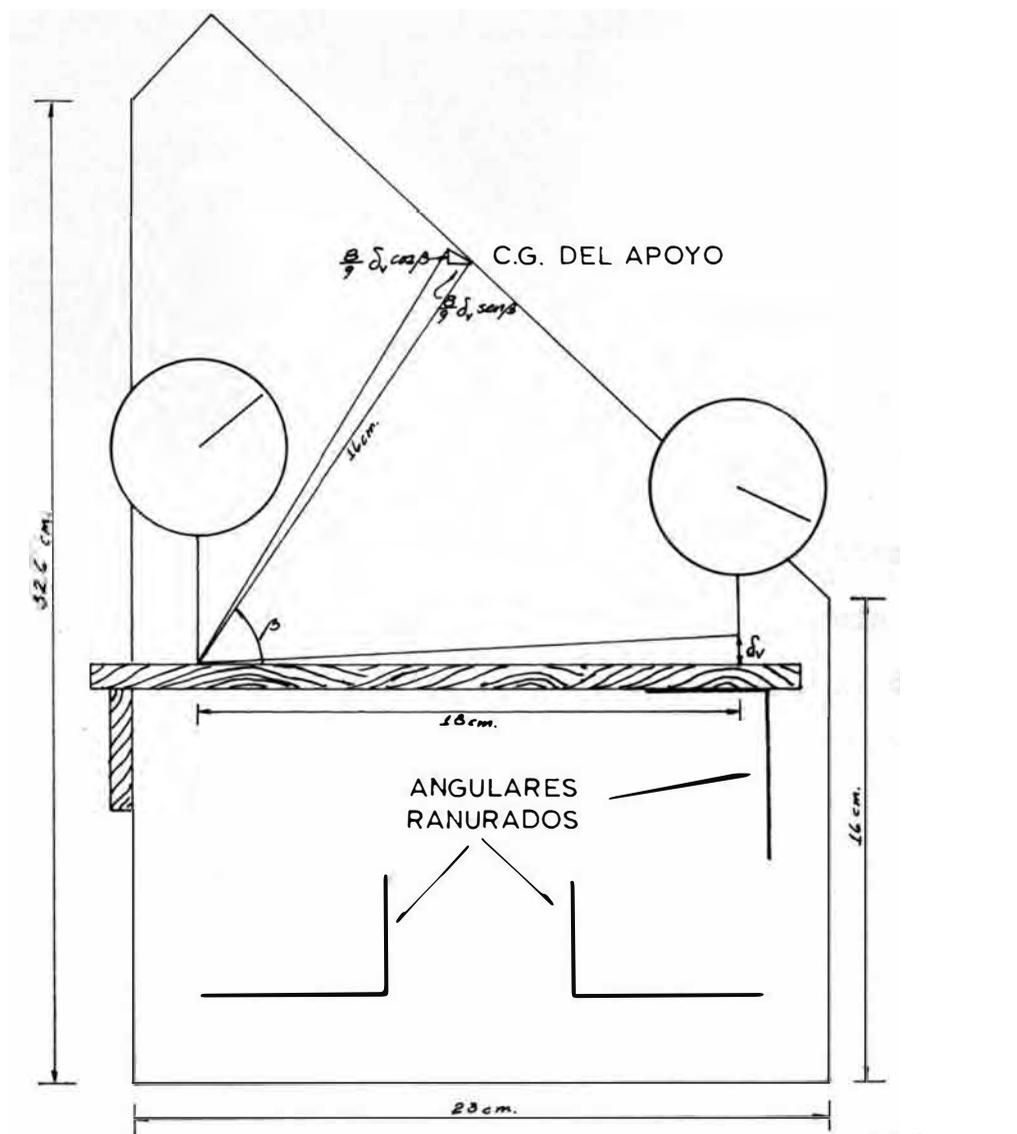
L.I. DEL EMPUJE HORIZONTAL



doblemente articulado y el arco empotrado.

Deflecciones debidas a Rotación en el Apoyo.

El tercer movimiento a realizar con el apoyo móvil es el de rotación. Con esto se obtendría la Línea de Influencia para el Momento en el apoyo en caso de ser el arco empotrado. Sinembargo, como se ha observado en las Líneas de Influencia para la reacción vertical y Empuje, el arco del Modelo se encuentra en una posición intermedia entre articu



ESC. 1:2.5

ESQUEMA DEL APOYO MOVIL

lado y empotrado, consecuentemente las lecturas relativas de las deflecciones en el Modelo representarán tan solo deflecciones debidas a una rotación en el apoyo.

Para la medición del giro en el apoyo móvil se colocaron dos deflectómetros a cada lado del apoyo móvil, sobre un plano paralelo al de la base. Los deformómetros estaban distanciados 18 cm.

Para obtener la deflección debida únicamente a rotación se deben descontar las deflecciones causadas por los desplazamiento vertical y horizontal que acompañan al giro dado al apoyo, como se puede observar en la figura esquemática del apoyo móvil.

Las correcciones que se deben hacer son:

$$v = \frac{8}{9} \delta_v \cos \beta (L.I.V_2) = 0.510 \delta_v (L.I.V_2)$$

$$h = \frac{8}{9} \delta_v \sin \beta (L.I.H) = 0.726 \delta_v (L.I.H)$$

Al multiplicar el desplazamiento, sea vertical ú ho rizontal, por su correspondiente Línea de Influencia se obtiene la deflección en cada punto (décimo de la luz) debido a dichos desplazamientos.

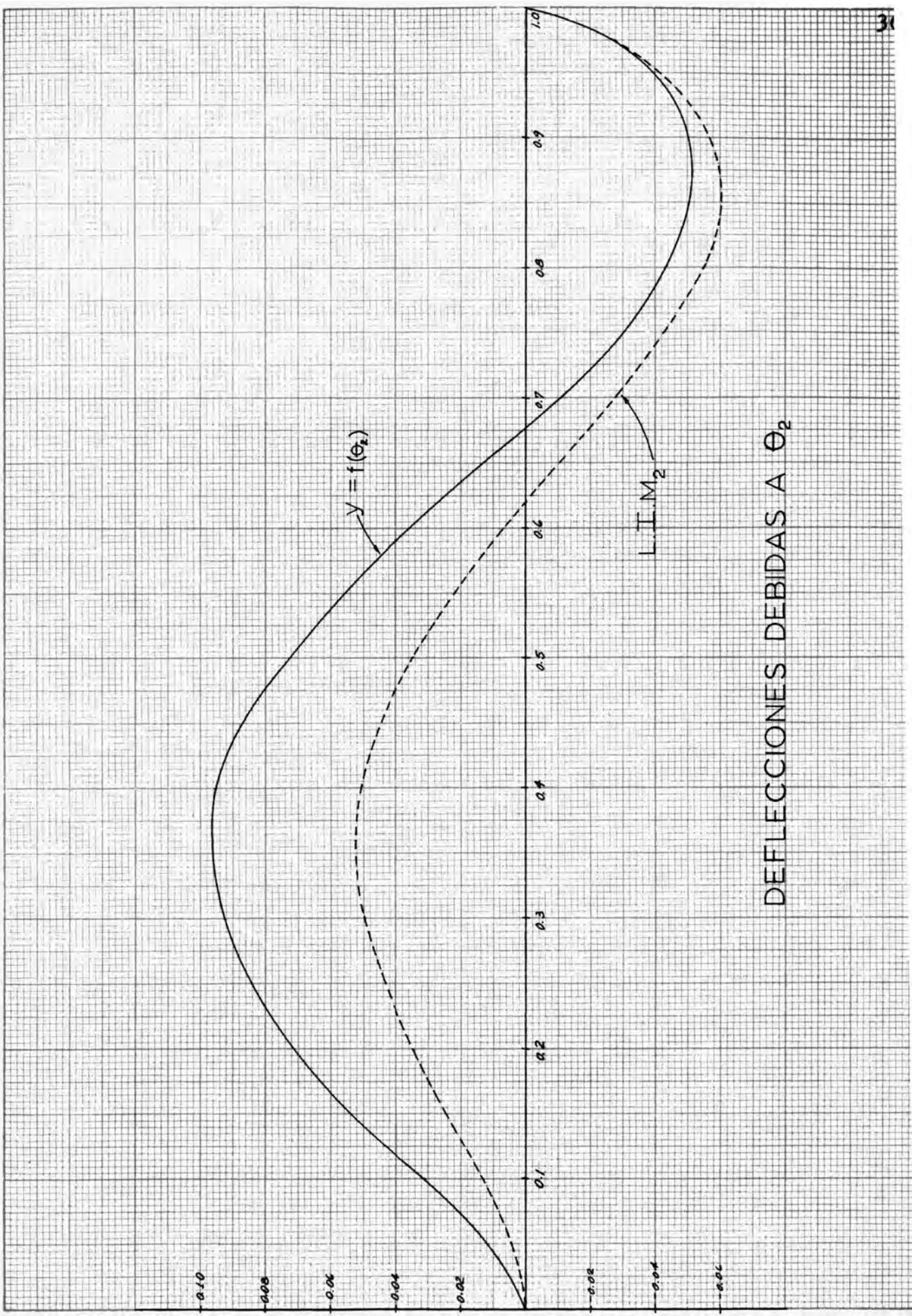
La Tabla a continuación muestra los valores de las deflecciones leídas en el Modelo (y'), las correcciones v y h , las deflecciones (y) debidas al giro sólomente y las deflecciones debidas a un giro en el apoyo equivalente a un radián. Las medidas de las deflecciones tomadas del Modelo se encuentran en centímetros.

DEFLECCIONES DEBIDAS A GIRO EN EL APOYO

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
y_n^I	0.0509	0.1253	0.1744	0.1964	0.1828	0.1445	0.0868	0.0359	0.0089	0.0946
v	0.0024	0.0066	0.0115	0.0174	0.0242	0.0309	0.0367	0.0416	0.0458	δ_v
λ	0.0172	0.0400	0.0604	0.0743	0.0794	0.0743	0.0604	0.0400	0.0172	
γ_n	0.0313	0.0787	0.1025	0.1047	0.0792	0.0393	-0.0103	-0.0457	-0.0541	0.00526
γ_n/θ	5.955	14.974	19.503	19.921	15.077	7.469	-1.960	-8.695	-10.292	θ
y_n^I	0.0587	0.1382	0.1927	0.2182	0.2042	0.1621	0.0937	0.0361	0.0107	0.1135
v	0.0029	0.0080	0.0139	0.0209	0.0290	0.0370	0.0441	0.0500	0.0550	δ_v
λ	0.0206	0.0480	0.0724	0.0890	0.0952	0.0890	0.0724	0.0480	0.0206	
γ_n	0.0352	0.0822	0.1064	0.1083	0.0800	0.0361	-0.0228	-0.0619	-0.0649	0.00631
γ_n/θ	5.582	13.072	16.874	17.175	12.688	5.725	-3.616	-9.817	-10.292	θ
y_n^I	0.0549	0.1340	0.1882	0.2158	0.2077	0.1677	0.1068	0.0492	0.0182	0.1104
v	0.0028	0.0077	0.0135	0.0203	0.0282	0.0360	0.0429	0.0486	0.0535	δ_v
λ	0.0200	0.0467	0.0705	0.0866	0.0926	0.0866	0.0705	0.0467	0.0200	
γ_n	0.0321	0.0796	0.1042	0.1089	0.0869	0.0451	-0.0066	-0.0461	-0.0553	0.00613
γ_n/θ	5.234	12.979	16.989	17.757	14.164	7.350	-1.076	-7.516	-9.015	θ
y_n^I	0.0546	0.1277	0.1799	0.2022	0.1898	0.1504	0.0907	0.0405	0.0118	0.1012
v	0.0026	0.0070	0.0123	0.0186	0.0258	0.0330	0.0393	0.0446	0.0491	δ_v
λ	0.0184	0.0429	0.0646	0.0794	0.0850	0.0794	0.0646	0.0429	0.0184	
γ_n	0.0336	0.0778	0.1030	0.1042	0.0790	0.0380	-0.0132	-0.0470	-0.0557	0.00562
γ_n/θ	5.976	13.838	18.320	18.533	14.044	6.762	-2.348	-8.359	-9.907	θ
y_n^I	0.0606	0.1396	0.1943	0.2179	0.2032	0.1614	0.0939	0.0380	0.0105	0.1116
v	0.0029	0.0079	0.0137	0.0205	0.0285	0.0364	0.0432	0.0491	0.0541	δ_v
λ	0.0202	0.0472	0.0717	0.0875	0.0935	0.0875	0.0717	0.0472	0.0202	
γ_n	0.0375	0.0845	0.1089	0.1099	0.0812	0.0375	-0.0210	-0.0583	-0.0638	0.00620
γ_n/θ	6.049	13.629	17.564	17.726	13.099	6.051	-3.387	-7.470	-10.290	θ
y_n^I	0.0705	0.1549	0.2198	0.2482	0.2321	0.1859	0.1135	0.0490	0.0173	0.1234
v	0.0031	0.0086	0.0151	0.0227	0.0315	0.0403	0.0479	0.0544	0.0599	δ_v
λ	0.0224	0.0523	0.0788	0.0968	0.1036	0.0968	0.0788	0.0523	0.0224	
γ_n	0.0450	0.0940	0.1259	0.1287	0.0970	0.0488	-0.0132	-0.0577	-0.0650	0.00686
γ_n/θ	6.564	13.712	18.365	18.773	14.152	7.119	-1.926	-8.417	-9.481	θ

DEFLECCIONES DEBIDAS A GIRO EN EL APOYO
(Continuación)

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
y_n^I	0.0522	0.1309	0.1837	0.2104	0.1999	0.1587	0.1035	0.0488	0.0168	0.1028
v	0.0026	0.0072	0.0126	0.0189	0.0262	0.0335	0.0399	0.0452	0.0499	δ_v
A	0.0186	0.0435	0.0655	0.0805	0.0862	0.0805	0.0655	0.0435	0.0186	
y_n	0.0310	0.0802	0.1056	0.1110	0.0875	0.0447	-0.0019	-0.0399	-0.0517	0.00571
y_n/θ	5.427	14.042	18.490	19.437	15.320	7.830	-0.333	-6.987	-9.051	θ
y_n^I	0.0616	0.1442	0.1999	0.2242	0.2073	0.1655	0.0985	0.0411	0.0127	0.1043
v	0.0027	0.0074	0.0128	0.0192	0.0266	0.0341	0.0405	0.0449	0.0506	δ_v
A	0.0189	0.0442	0.0666	0.0819	0.0876	0.0819	0.0666	0.0442	0.0189	
y_n	0.0400	0.0926	0.1205	0.1231	0.0931	0.0485	-0.0086	-0.0480	-0.0568	0.00579
y_n/θ	6.903	15.979	20.794	21.241	16.066	8.370	-1.484	-8.282	-9.802	θ
y_n^I	0.0526	0.1289	0.1812	0.2050	0.1916	0.1507	0.0926	0.0381	0.0100	0.0991
v	0.0025	0.0069	0.0121	0.0182	0.0253	0.0324	0.0375	0.0436	0.0480	δ_v
A	0.0180	0.0419	0.0633	0.0777	0.0831	0.0777	0.0633	0.0419	0.0180	
y_n	0.0321	0.0801	0.1058	0.1091	0.0832	0.0406	-0.0082	-0.0474	-0.0560	0.00551
y_n/θ	5.830	14.550	19.218	19.816	15.107	7.382	-1.489	-8.609	-10.171	θ
y_n^I	0.0555	0.1283	0.1799	0.2040	0.1916	0.1532	0.0927	0.0414	0.0129	0.1002
v	0.0026	0.0070	0.0122	0.0185	0.0256	0.0326	0.0389	0.0441	0.0486	δ_v
A	0.0182	0.0424	0.0640	0.0786	0.0841	0.0786	0.0640	0.0424	0.0182	
y_n	0.0347	0.0789	0.1037	0.1069	0.0819	0.0420	-0.0102	-0.0451	-0.0539	0.00557
y_n/θ	6.233	14.172	18.630	19.204	14.704	7.536	-1.832	-8.101	-9.681	θ
y_n^I	0.0592	0.1388	0.1944	0.2184	0.2023	0.1564	0.0950	0.0440	0.0165	0.1106
v	0.0029	0.0078	0.0135	0.0203	0.0282	0.0361	0.0428	0.0487	0.0536	δ_v
A	0.0200	0.0468	0.0705	0.0867	0.0927	0.0867	0.0705	0.0468	0.0200	
y_n	0.0363	0.0842	0.1104	0.1114	0.0814	0.0336	-0.0183	-0.0515	-0.0571	0.00615
y_n/θ	5.907	13.704	17.968	18.130	13.248	6.885	-2.366	-8.381	-9.291	θ
y_n^I	0.0670	0.1464	0.2050	0.2303	0.2117	0.1675	0.0944	0.0324	0.0062	0.1159
v	0.0030	0.0081	0.0142	0.0212	0.0296	0.0377	0.0449	0.0509	0.0561	δ_v
A	0.0210	0.0490	0.0739	0.0908	0.0971	0.0908	0.0739	0.0490	0.0210	
y_n	0.0430	0.0893	0.1169	0.1183	0.0850	0.0390	-0.0244	-0.0675	-0.0709	0.00644
y_n/θ	6.679	13.870	18.165	18.372	13.200	6.050	-3.789	-10.483	-11.011	θ



DEFLECCIONES DEBIDAS A θ_2

Deflecciones promedio debidas al giro θ_2 .

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\theta_2 = 1^\circ$	6.028	14.044	18.406	18.841	14.239	7.069	-2.134	-8.427	-9.858
$\theta_2 = \frac{f}{L}$	0.03070	0.07151	0.09371	0.09594	0.07249	0.03599	-0.01087	-0.04291	-0.05020

Línea de Influencia para M_2 en el Arco Empotrado.

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
iPL	0.01298	0.03489	0.04991	0.05058	0.03515	0.00652	-0.02793	-0.05551	-0.05651
iP	2.549	6.851	9.801	9.932	6.903	1.271	-5.485	-10.901	-11.098

$$\frac{f}{L} = 0.1925$$

$$L = 196.4 \text{ cm.}$$

Estudio Comparativo de los Resultados.

a) Línea de Influencia para V_2 . En este caso el gráfico muestra que para el Modelo la Línea de Influencia se aproxima más a la del arco empotrado que a la del arco articulado. Este comportamiento del Modelo puede explicarse si se observa que al desplazar el apoyo móvil verticalmente hacia arriba, el extremo del arco se adhiere más a la superficie del concreto produciendo mayor grado de empotramiento.

Los valores dados en la Tabla han sido "normalizados" esto es se ha considerado un valor conocido de la curva (0.50) en la línea de centros, eliminando de esta forma las variaciones que se pueden derivar de un mayor ó menor desplazamiento vertical en el apoyo.

b) Línea de Influencia para la Reacción Horizontal. Se observa en este caso que el Modelo se comporta más como arco articulado que arco empotrado. Es probable que esto se deba al

hecho que al desplazar el arco 1 cm. hacia adentro, los apoyos tuvieran mayor posibilidad de giro libre.

Para la "normalización de los valores obtenidos del Modelo, se sacó un valor apropiado del gráfico de las Líneas de Influencia del arco empotrado y articulado (0.8794 para 0.3 y 0.7 de la Luz).

c) Deflecciones debidas a Rotación en el Apoyo. Como ya se ha hecho notar las deflecciones leídas para el caso de giro en el apoyo móvil del Modelo no representan ninguna Línea de Influencia, desde que un arco articulado no tiene Momentos en los apoyos, sino mas bien las deflecciones producidas en el arco por un Momento aplicado en uno de sus apoyos. Sin embargo, por observación del gráfico que muestra las deflecciones debidas al giro en el apoyo móvil del Modelo y la Línea de Influencia de M_2 para el arco empotrado se puede deducir que existe cierta similitud entre ambas curvas.

Modelo de Arco-Onda sometido a Carga Concentrada Central.

La prueba de carga concentrada en el Modelo se llevó a cabo con tres cilindros de concreto colocados en la corona del arco.

Los deflectómetros se hallaban colocados en el intradós del arco a décimos de la luz.

Los tres cilindros de concreto producían una carga de:

$$P = 40.290 \text{ Kg.}$$

Esta prueba tenía por finalidad principal determinar en forma experimental el Módulo de Elasticidad del material.

Se efectuaron varios ciclos completos de carga y des carga cuyos valores se presentan tabulados a continuación.

DEFLECCIONES DEBIDAS A P

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
-0.0073	-0.0018	0.0126	0.0306	0.0398	0.0306	0.0126	-0.0018	-0.0073	
-0.0066	-0.0012	0.0126	0.0309	0.0404	0.0309	0.0126	-0.0012	-0.0066	
-0.0074	-0.0008	0.0143	0.0334	0.0413	0.0334	0.0143	-0.0008	-0.0074	
-0.0069	-0.0007	0.0142	0.0332	0.0402	0.0332	0.0142	-0.0007	-0.0069	
-0.0072	-0.0012	0.0151	0.0340	0.0405	0.0340	0.0151	-0.0012	-0.0072	
-0.0071	-0.0012	0.0148	0.0335	0.0401	0.0335	0.0148	-0.0012	-0.0071	
-0.0063	-0.0015	0.0117	0.0255	0.0372	0.0255	0.0117	-0.0015	-0.0063	
-0.0068	-0.0010	0.0132	0.0303	0.0386	0.0303	0.0132	-0.0010	-0.0068	
-0.0066	-0.0015	0.0138	0.0327	0.0429	0.0327	0.0138	-0.0015	-0.0066	
-0.0070	-0.011	0.0140	0.0329	0.0417	0.0329	0.0140	-0.0011	-0.0070	
-0.0069	-0.012	0.0136	0.0317	0.0403	0.0317	0.0136	-0.0012	-0.0069	cm.
-0.0035	-0.0000	0.00070	0.00162	0.00206	0.00162	0.00070	-0.0000	-0.0035	$\frac{P^3}{EI}$

Cálculo del Módulo de Elasticidad. Para obtener el valor experimental y aproximado del Módulo de Elasticidad, se asumirá que el modelo de Arco-Onda se comporta en la posición media entre arco biarticulado y arco empotrado.

Del capítulo anterior se tiene,

$$\text{Arco Biarticulado} \quad \delta_{0.5} = 0.00295 \frac{Pr^3}{EI}$$

$$\text{Arco Empotrado} \quad \delta_{0.5} = 0.00116 \frac{Pr^3}{EI}$$

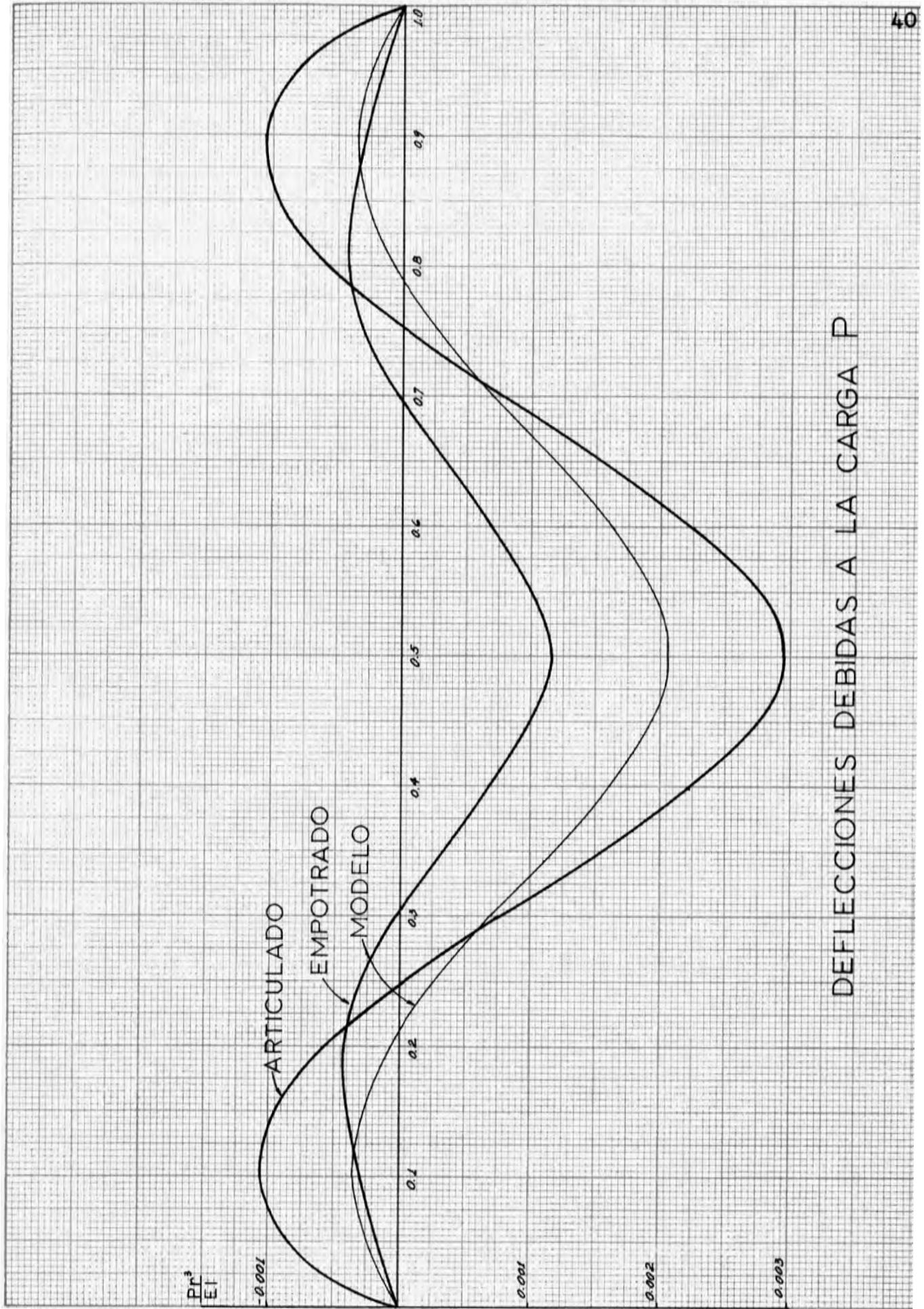
En el caso del Modelo se tiene(ver Tabla):

$$\delta_{0.5}^P = 0.00206 \frac{Pr^3}{EI}$$

donde

$$\delta_{0.5}^P = 0.0403 \text{ cm.} \quad P = 40.290 \text{ Kg.}$$

$$I = 140.46 \text{ cm}^4 \quad r = 146.5 \text{ cm.}$$



DEFLECCIONES DEBIDAS A LA CARGA P

$$E = \frac{0.00206 \times 40.290 \times 146.5^3}{0.0403 \times 140.46} = 46,090 \text{ kg/cm}^2$$

$$= 655,250 \text{ psi.}$$

Este valor medio del Módulo de la Elasticidad aunque bastante aproximado representa un límite inferior, si el comportamiento del arco ha sido mas cercano al de un arco articulado.

El valor del Módulo de Elasticidad es una incógnita difícil de predecir en un material como el Fiberglass donde entran componentes, tales como fibra de vidrio y resina, en diversa cantidad y proporción. Ya se ha explicado en el proceso constructivo del Modelo, que dependiendo del espesor resulta el número de capas de tela de vidrio y resina por aplicar.

Se pensó al inicio de las pruebas obtener del Modelo una muestra que luego se sometería a tracción ó flexión con el fin de determinar el Módulo de Elasticidad E con mayor rapidez y facilidad, sin embargo, una muestra de algunos escasos centímetros de largo y de una sección reducida requeriría de instrumentos súmamente sensibles para obtener un valor aceptable. Estos factores decidieron el uso del Modelo mismo como medio de hallar el valor de E.

Modelo de Arco-Onda sometido a carga uniforme.

El modelo de Arco-Onda, como se puede apreciar en las fotografías, fue sometido a carga uniforme. La carga la producían veintiún cilindros de concreto acomodados en tres

filas a lo largo del arco. La carga fue de 282.50 Kg.

$$w = \frac{282.50}{2.154} = 131.16 \text{ Kg/m. arco}$$

Tabulando las deflecciones (cm.) obtenidas en varios ciclos de carga y descarga.

DEFLECCIONES DEBIDAS A w

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
-0.0221	-0.0072	0.0336	0.0735	0.0999	0.0735	0.0336	-0.0072	-0.0221	
-0.0207	-0.0180	0.0393	0.0735	0.0996	0.0735	0.0393	-0.0180	-0.0207	
-0.0222	-0.0066	0.0321	0.0690	0.0978	0.0690	0.0321	-0.0066	-0.0222	
-0.0240	-0.0147	0.0120	0.0420	0.0756	0.0420	0.0120	-0.0147	-0.0240	
-0.0207	-0.0003	0.0381	0.0732	0.0909	0.0732	0.0381	-0.0003	-0.0207	
-0.0216	-0.0033	0.0366	0.0693	0.0930	0.0693	0.0366	-0.0033	-0.0216	
-0.0201	+0.0027	0.0441	0.0747	0.0906	0.0747	0.0441	+0.0027	-0.0201	
-0.0249	-0.0129	0.0201	0.0555	0.0873	0.0555	0.0201	-0.0129	-0.0249	
-0.0207	+0.0039	0.0366	0.0612	0.0771	0.0612	0.0366	+0.0039	-0.0207	
-0.0216	-0.0090	0.0276	0.0642	0.0909	0.0642	0.0276	-0.0090	-0.0216	
-0.0219	-0.0065	0.0320	0.0656	0.0903	0.0656	0.0320	-0.0065	-0.0219	cm.
-0.000235	-0.000070	0.000343	0.000704	0.000968	0.000704	0.000343	-0.000070	-0.000235	$\frac{wt^4}{EI}$

En la última fila de la Tabla se presentan las deflecciones expresadas como coeficientes de $\frac{wr^4}{EI}$.

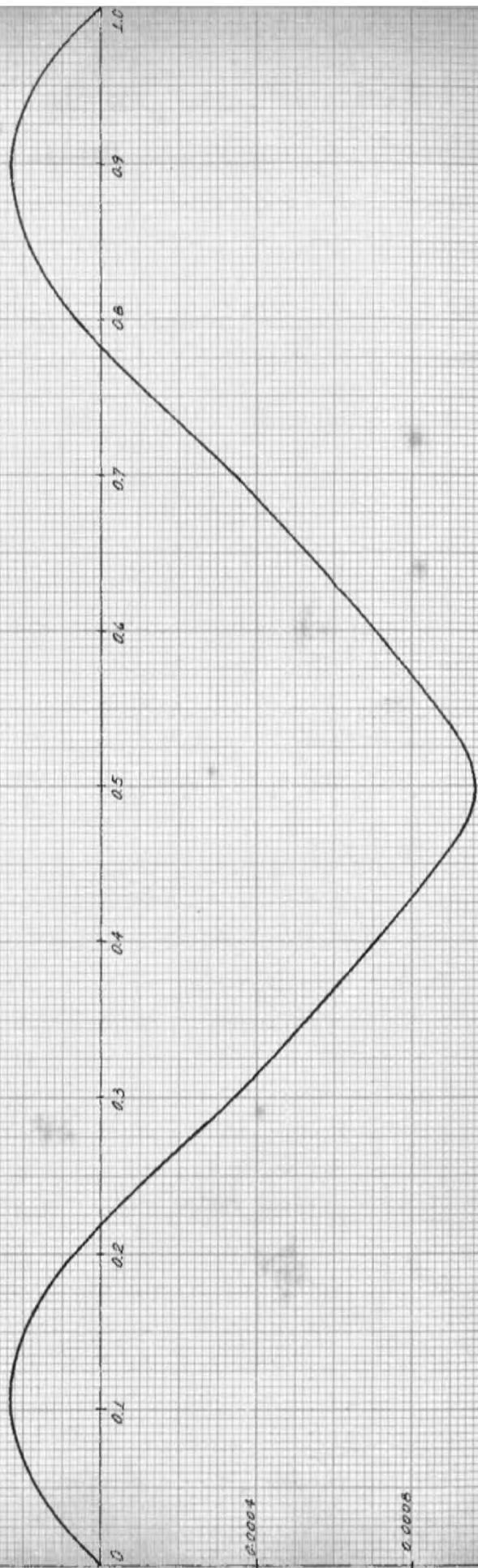
Usando el valor hallado del Módulo de Elasticidad:

$$\frac{C wt^4}{EI} = \delta_{0.5} = 0.0903 \text{ cm.}$$

$$C = \frac{0.0903 \times 46,090 \times 140.46}{1.3116 \times 146.5^4} = 0.000968$$

Los demás coeficientes se obtienen por proporción lineal con sus respectivas deflecciones en centímetros.

$\frac{wI^4}{EI}$
-0.0004



DEFLECCIONES DEBIDAS A LA CARGA W
EN EL MODELO

Análisis del Arco-Onda con Carga Uniforme.

Con la finalidad de ilustrar el procedimiento simplificado de análisis del Arco-Onda, se presenta a continuación el cálculo de esfuerzos a que está sometido el Modelo debidos a carga uniformemente repartida a lo largo del arco.

Asumiendo que el Modelo se comporta como articulado las redundantes son:

$$H_A = 0.86912 \text{ wr}$$

$$V_A = 0.7351 \text{ wr}$$

El Momento en cualquier sección del arco está dado por:

$$M = V_A x - H_A y + M'_w$$

$$M'_w = -wr^2(\theta_k - \theta) \left[\sin\left(\frac{\theta_k + \theta}{2}\right) - \sin\theta \right]$$

Tabulando para las condiciones del Modelo:

$$w = 1.3116 \text{ kg/cm} \cdot$$

$$r = 146.5 \text{ cm}.$$

k	x	y	$\sin \theta$	$(\theta_k - \theta)$	$\sin\left(\frac{\theta_k + \theta}{2}\right)$	$M [\text{kg}\cdot\text{cm}]$
0.0	0.0	0.0	0.67064	0.0000	0.67064	0
0.1	19.6	14.9	0.53665	0.1686	0.60581	-48.04
0.2	39.3	25.5	0.40190	0.3215	0.54327	+13.20
0.3	58.9	32.4	0.26838	0.4634	0.48239	+117.13
0.4	78.6	36.5	0.13379	0.6009	0.42108	+147.14
0.5	98.2	37.8	0.00000	0.7351	0.35932	+122.72

Las fuerzas normales en cualquier sección del arco son:

$$N_\theta = H_A \cos \theta + V_A \frac{\theta}{\theta_k} \sin \theta$$

$$V_\theta = V_A \frac{\theta}{\theta_k} \cos \theta - H_A \sin \theta$$

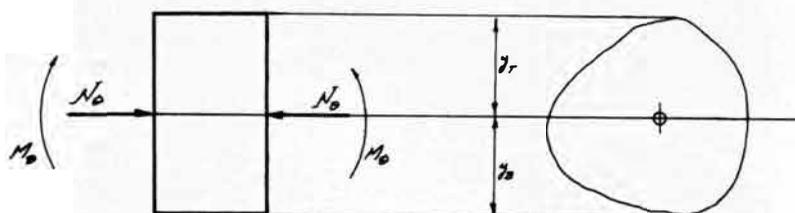
donde:

$$H_A = 167.00 \text{ Kg.} \quad V_A = 141.25 \text{ Kg.}$$

COMPONENTES DEL ARCO

θ	$\cos \theta$	$\sin \theta$	N_0	V_0	M_0
0.7351	0.74178	0.67064	218.61	-7.22	0
0.5665	0.84380	0.53665	199.33	+2.23	-48.04
0.4136	0.91568	0.40190	184.86	+5.65	+13.20
0.2717	0.96331	0.26838	174.88	+5.47	+117.13
0.1342	0.99101	0.13379	168.95	+3.21	+147.14
0.0000	1.00000	0.00000	167.00	0	+122.72
			Kg.	Kg.	Kg-cm.

Cálculo de los esfuerzos unitarios.



En el elemento de arco dibujado se tiene:

$$f_r = \frac{N_0}{A} + \frac{M_0 \cdot y_r}{I}$$

$$f_b = \frac{N_0}{A} - \frac{M_0 \cdot y_b}{I}$$

Las características del Modelo son:

$$A = 26.92 \text{ cm}^2$$

$$I = 140.46 \text{ cm}^4$$

$$y = 2.99 \text{ cm}$$

$$y = 3.01 \text{ cm}$$

Tabulando:

θ	0.7351	0.5665	0.4136	0.2717	0.1342	0.0000	
f_r	+8.12	+9.34	+7.15	+9.12	+9.43	+8.83	Kg/cm ²
f_b	+8.12	+6.39	+6.59	+4.12	+3.15	+3.59	Kg/cm ²

ARCO ONDA CON CARGA UNIFORME

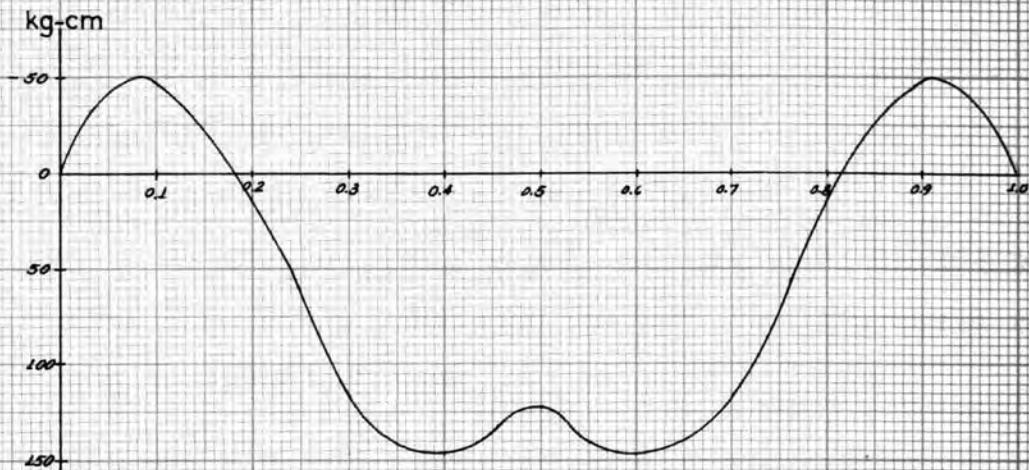
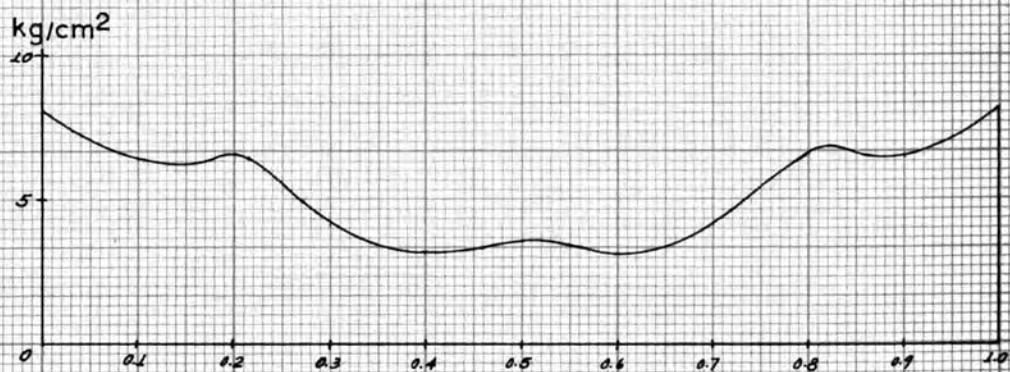


Diagrama de Momentos



Esfuerzos en la fibra superior



Esfuerzos en la fibra inferior

Se puede observar que esos esfuerzos todos en compresión, están muy por debajo del esfuerzo último del material del Modelo. Se podría por tanto, aumentar la sobrecarga ya que ésta varía linealmente con los esfuerzos.

El gráfico muestra el diagrama de esfuerzos para el Arco-Onda en la condición de carga uniformemente repartida a lo largo del arco.

Capítulo IV

RESUMEN

La finalidad del presente trabajo fue ilustrar la aplicabilidad del cálculo convencional de arcos al Arco-Onda que es una estructura laminar y la posibilidad del uso de modelos en la investigación de Líneas de Influencia de sistemas hiperestáticos.

En el primer capítulo se hace una breve introducción acerca del objeto y alcance de la Tesis. En el segundo capítulo se presentan las soluciones analíticas para arcos empotrados y biarticulados, aquí se puede observar la complejidad que tienen las soluciones analíticas, que justifican y hacen deseable el estudio en modelo a escala reducida de una estructura dada. El capítulo tercero muestra los diversos aspectos de la etapa experimental, desde la construcción del modelo, descripción del equipo de ensayo, experimentos realizados, hasta la comparación de resultados experimentales y teóricos. Asimismo se investiga el Módulo de Elasticidad del modelo (fiberglass) por medio de pruebas de carga, valor que se encuentra bastante aproximado al dado en otras investigaciones. Finalmente, en el mismo capítulo se presenta el cálculo de Arcos-Onda aplicando los principios del arco de alma

llena. Los resultados que se presentan de esfuerzos y deformaciones muestran que el asumir al Arco-Onda como estructura en dos dimensiones es aceptable para los fines de Ingeniería.

Una observación interesante es que la preparación del modelo para los experimentos, demoró varias veces más que las pruebas en sí, sin embargo, este hecho es corriente en las investigaciones de modelos.

Es un deseo del autor, que el presente trabajo sirva de base ó referencia para investigaciones futuras con, posiblemente mejor instrumentación y equipo de ensayo. Una extensión del presente trabajo sería el estudio del Arco-Onda considerado como estructura espacial ó laminar, esto es, teniendo en cuenta los momentos y esfuerzos transversales a lo largo del arco.

Apéndice

A.I. EL FIBERGLASS COMO MATERIAL DE MODELOS.

Aspectos históricos. Los plásticos reforzados son empleados en considerable volumen en diversas aplicaciones. Combinando la resistencia de las fibras y la elasticidad y adhesión de los plásticos, es posible obtener materiales estructurales con únicas y valiosas propiedades compuestas. Estos materiales pueden ser moldeados a intrincadas formas por procesos rápidos y económicos.

Las artes de emplear fuertes fibras como refuerzos de resinas orgánicas moldeadas y convirtiendo estos plásticos reforzados moldeados en productos útiles fue conocido en la antigüedad. El arco compuesto de variadas clases ha sido encontrado en China, Turqía y en el resto de Asia. Estos arcos muestran una clara similitud en el diseño, en la selección de materiales y en el moldeo que deben haber sido usados en su construcción. Algunos historiadores atribuyen la invención de estos arcos a los Mongoles nómadas en el Este central del Asia. De hecho, se cree actualmente que el rápido ascenso y continuado éxito de los imperios Mongoles que fueron establecidos por Ganghis Khan y sus hijos, pueden atribuirse en parte al uso de arcos laminados y plásticos reforzados de fibra de excepcional elasticidad y compactación, con los cuales los nómadas de la caballería vencieron a sus mejores armados ad-

versarios.

El arco reflexivo asiático fue bastante corto y consistía de un conjunto de materiales un modo complejo por medio de pegamentos. Estos arcos con adornos de seda y oro eran guardados como posesión personal. Representaba el arma mas potente hasta la invención de las armas de fuego.

Sin embargo, el arco de los nómadas tenía algunas imperfecciones. Requería protección especial para prevenir la perdida de elasticidad, putrefacción y laminación debido a la absorción de humedad. Era costumbre en ellos guardar sus arcos cerca de fuego para restaurar su flexibilidad. Además, los nómadas llevaban consigo a la guerra un arco de repuesto envuelto en seda húmeda en aceite. Con la llegada de las armas de fuego, los plásticos reforzados cayeron en desuso, ya que sus propiedades especiales no fueron necesarias para la sobre-vivencia.

El desarrollo en este siglo de resinas sintéticas con mayor resistencia a la humedad y al deterioro, conjuntamente con el desarrollo en 1938 de procesos comerciales para el hilado de fibras contínuas de vidrio, ha estimulado el resurgimiento del uso de plásticos reforzados de fibra y de adhesivos para el ensamblaje de piezas de plásticos reforzados en la fabricación de productos útiles. Este resurgimiento está todavía en relativa infancia y es actualmente utilizado donde es posible desde una base científica.

Estado Presente. El resurgimiento de las artes del refuerzo de fibra y adhesivos, ha determinado el desarrollo en

años recientes de muchos productos de calidad superior. Nadie parece interesarse en desarrollar el arco de reflexión de los asiáticos de la antigüedad. Sin embargo, arcos de plástico reforzado de excelente calidad se están produciendo. También, cañas de pescar, esquíes, botes, partes de carros y aviones, materiales arquitecturales y muchos implementos militares se producen en cantidad creciente.

El plástico reforzado consiste de una multiplicidad de fuertes fibras unidas rígidamente por medio de una sustancia resinosa para formar un cuerpo fuerte y rígido. Si el porcentaje de resina es alto, las fibras pueden ser vistas como refuerzos para la resina en el mismo sentido que las barras de acero son vistas como refuerzo del concreto. Si el porcentaje de fibras es alto, la resina puede ser vista como un pegamento para las mismas. Las resinas pueden ser sintéticas ó de origen natural. Las fibras pueden ser orgánicas. Las fibras de algodón y de vidrio son las dos mas comunmente usadas en plásticos reforzados. Las fibras de Nylon ó Rayón y fibras de asbestos son también usadas como refuerzos para plásticos.

Los materiales plásticos como elementos en la construcción de estructuras laminares requieren de consideración puesto que combinan propiedades estructurales así como favorables cualidades arquitecturales y pueden ser fácilmente moldeables en variadas formas. Entre los materiales plásticos hasta hoy desarrollados, el reforzado con fibra de vidrio es el que tiene mayores posibilidades de uso en construcciones laminares. Pueden ser usados en laminares de espesor uniforme ó variable.

Componente del Fiberglass. Se trata de un material

hecho de fibra de vidrio y un componente de resina líquida que fragua fuertemente. El vidrio contribuye a darle resistencia y rigidez a la lámina. La resina da al vidrio la forma estructural además es el medio a través del cual la carga aplicada es transferida de fibra a fibra.

La fibra de vidrio, componente principal de compuesto, tiene respetables propiedades mecánicas. El módulo de elasticidad de la fibra de vidrio es de 10×10^6 lb/in². La resistencia de una fibra es usualmente 100,000 lb/in² ó mas, dependiendo del ambiente y fatiga a la cual ha sido sometida.

Desafortunadamente, la exposición de las fibras de vidrio al agua y vapor de agua pueden causar marcadas reducciones en resistencia.

La fragua del plástico reforzado se consigue por medio de resinas, "epoxy" ó acrílicos.

Propiedades Estructurales. Las láminas de fibra de vidrio son relativamente materiales de alta resistencia comparadas con su peso. Sin embargo, el módulo de elasticidad es relativamente bajo comparado con otros materiales de resistencia comparable.

Para un tipo dado de plástico reforzado, las propiedades estructurales pueden ser cambiadas por:

1. Tipo de esfuerzo - tensión, compresión ó flexión.
2. Técnica de fabricación y control de calidad-contenido de vidrio.
3. Método de moldeo - valor de la presión aplicada.
4. Espesor de la lámina.
5. Fórmula de la resina - grado de flexibilidad, ti-

po de resina.

6. Creep.
7. Temperatura.
8. Ambiente - seco ó húmedo, grado de exposición a la luz ultravioleta.
9. Ciclo de carga - la fatiga disminuye la resistencia significativamente.
10. Tipo de prueba, detalles del procedimiento usado para evaluación de resistencia.

La Tabla I ilustra las propiedades estructurales de un tipo común de lámina de fibra de vidrio.

TABLA I

	TENSION	COMPRESION	FLEXION	CORTE	
Esfuerzo	11.6	16.9	20.5	9.9	10^3 psi
Módulo E	0.91	0.93	0.85	----	10^6 psi
Poisson	0.32	0.42	----	----	

Como material arquitectural el plástico de fibra de vidrio es importante porque provee una combinación de estructura cerrada con transmisión de luz. Además, pueden tener variedad de colores y acabados.

Las resinas poliéster no saturadas, cuando están reforzadas con fibra de vidrio, son la base para algunas de las mas espectaculares aplicaciones de los plásticos tales como carrocerías plásticas de automóviles y cabinas plásticas de cruceros. Varios factores contribuyeron a este desarrollo,

uno de los más importantes es la formación en unión cruzada del tipo de polimerización vinil, sin volátiles que escapen y no siendo requerida una fuerte contrapresión es posible moldear estos plásticos en piezas muy grandes. Un factor adicional es que la resina poliéster puede ser usada en empañar superficies de tela de vidrio, permitiendo de esta manera utilizar la fenomenal resistencia de las fibras de vidrio, hasta 30,000 lb/pulg², en estos plásticos. También es importante la habilidad de fabricar estos materiales a costo razonable.

Los poliésteres reforzados con fibra de vidrio son plásticos muy útiles y pueden tener resistencias a la flexión hasta 75,000 lb/pulg² cuando son fabricados cuidadosamente. También son los menos sensitivos de los plásticos en cuanto a temperatura se refiere. Ellos son inmunes a la oxidación y corrosión, pero el componente de resina puede ser atacado por solventes clorinados ó fuertes álcalis y el componente de vidrio por ácido fluorídrico.

Hay muchas variaciones en la técnica para la preparación de grandes piezas de poliéster reforzado con vidrio. Para propósitos de estudio, todos estos pueden ser agrupados dentro de una de las cuatro clases generales siguientes:

- (1) El moldeo a mano en molde abierto;
- (2) moldeo de bolsa;
- (3) método de impregnación utilizando el vacío y
- (4) moldeo a presión en matrices.

El mas simple de éstos es el moldeo a mano. El

molde empleado es relativamente barato y puede ser de yeso, madera y aún de resina poliéster. Piezas previamente cortadas de tela de vidrio fibroso son acomodadas sobre ó dentro del molde. Es vidrio así acomodado es luego rociado con resina. Esta operación se realiza ya sea con brocha ó con pistolas rociadoras que mezclan la cantidad apropiada de catalizador y acelerador. La polimerización es cuestión de minutos; primero la resina se torna gelatinosa, luego se endurece, después de lo cual la pieza puede ser sacada del molde.

La misma clase de molde sirve también para el moldeo de bolsa, pero aquí la presión es aplicada a una plancha flexible ó saco. El vidrio y la resina pueden ser colocados a mano ó mojando la tela de vidrio en la resina. Luego se comprime esta mezcla entre el saco flexible y el molde durante todo el curado. Este método tiene la ventaja de ser un proceso menos crítico, así como productor de piezas suaves de casi uniforme espesor y relativamente alto contenido de vidrío.

El método de impregnación usa dos moldes emparejados. Estos dos moldes son ensamblados con un material que evita el pegado y la tela de vidrio en su interior. La resina catalizada es succionada alrededor de las fibras de vidrio en el espacio entre las dos moldes. El endurecimiento de la resina ocurre en cuestión de minutos, después de los cuales el molde es desarmado y la parte moldeada retenida. Este método tiene la ventaja de ser fácil en el manipuleo de los materiales, producción razonablemente rápida y fácil control sobre condi-

ciones tales como el factor vidrio-resina.

En el método de moldes a presión la tela de vidrio es impregnada separadamente con resina y catalizador por un proceso continuo que es seco al tacto y fácilmente manipulable. Las piezas son cortadas a su forma y ensambladas en moldes que tienen las dimensiones exactas de las piezas acabadas. La producción que se obtiene por éste método es alrededor de veinte veces más rápida que el moldeo de bolsa ó el de impregnación por vacío, por esto es preferido para producciones masivas. Su desventaja es que requiere no sólo de grandes prensas sino también matrices como cuatro ú ocho veces más costosas que las empleadas por otros métodos. Hay también un tamaño límite encima del cual es mejor encima del cual es mejor ensamblar pequeñas piezas.

Puede observarse que la elección del método de moldes depende grandemente del tamaño del lote a ser producido. El moldeo a mano es mejor cuando el lote comprende 20 ó 50 unidades. Aquí el molde barato compensa con creces al incremento en la labor manual. Para lotes de tamaño intermedio, moldeo de bolsas ó impregnación por vacío son los más económicos. Para lotes mayores de quinientas unidades, molde a presión en matrices es el más económico, ya que por unidad el costo del molde resulta razonable.

El plástico reforzado es utilizado en la manufactura de carrocerías de coches sport, pequeños botes, tanques de almacenamiento especialmente para petróleo dada su resistencia a los hidrocarburos de parafina.

El factor favorable resistencia por peso para poliesteres reforzados, lo hacen deseable para equipos móviles tales como camiones tanques, carrocería de trailers y para artículos aereotransportados. Los tanques plásticos de cuatro mil galones para camiones pesan dos toneladas menos que los convencionales de acero.

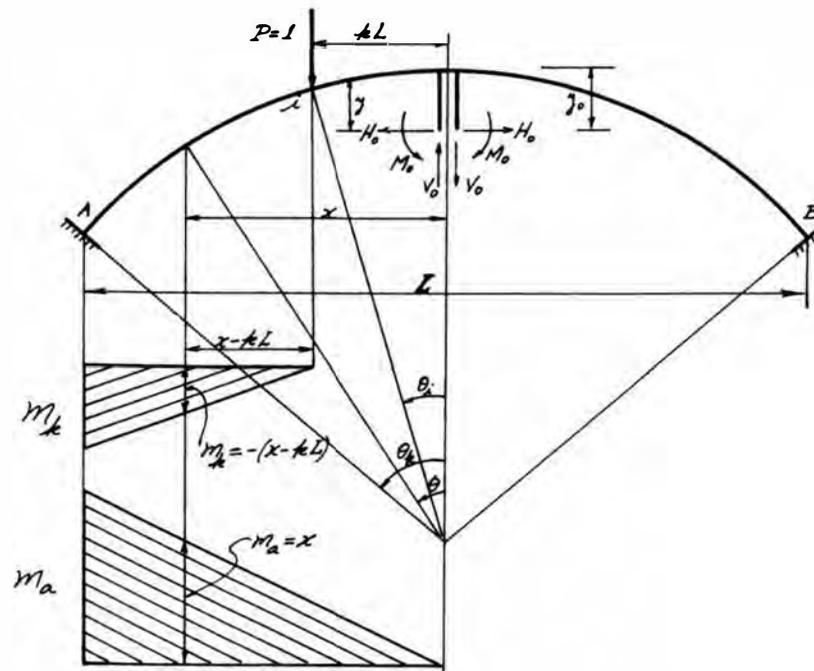
Las aplicaciones del plástico poliester reforzado con vidrio en la aviación hasta el momento han sido de carácter experimental, por ejemplo en cajas para equipos magnéticos de detección.

Las aplicaciones eléctricas para los plásticos poliesteres incluyen cubiertas para transformadores, aquí la capacidad aislante, resistencia al aceite y posibilidades estructurales del material reforzado son todas utilizadas.

Un importante uso estructural de la resina poliester reforzada con vidrio es la de paneles traslúcidos. Son encontrados en tamaños estándar para la construcción y con las mismas corrugaciones que el acero galvanizado ó aluminio. Estos paneles son de 1/16" de espesor contra 1/40" de los de acero galvanizado, pesan media libra por pié cuadrado contra una lb/pié² del acero.

Una lista de artículos que están siendo fabricados de plástico reforzado con fibra de vidrio incluye cañas de pescar, tuberías, maniqués, maletas de carga liviana, chaquetas a prueba de balas y recipientes para el desarrollo de fotografías. Nuevas aplicaciones aparecen diariamente utilizando una ó más de las importantes propiedades del material.

A.2. DERIVACION DE FORMULAS PARA ARCOS CIRCULARES

Líneas de Influencia para las Redundantes del Arco Empotrado.

Para la construcción de Líneas de Influencia se puede usar una variación del Método de la Viga Conjugada. Dada la simetría sólo es necesario considerar la mitad del arco.

El Corte viene dado por:

$$V_0 = \frac{-\delta_{ak}'}{\delta_{aa}} = \frac{\text{deflección vertical en k debido a } V_0 = 1}{\text{deflección vertical en O debido a } V_0 = 1}$$

Desde que δ_{aa} es una constante del arco, la Línea de Influencia para V_0 es en alguna escala igual al diagrama de deformación del arco en voladizo.

De la figura obtenemos:

$$V_0 = \frac{-\int_a^b m_a \cdot m_k \cdot ds}{2 \int_0^a x^2 \cdot ds}$$

donde $m_a = x = r \cdot \text{sen } \theta$

$$m_k = -(x - kL) = -(r \cdot \text{sen } \theta - r \cdot \text{sen } \theta_i)$$

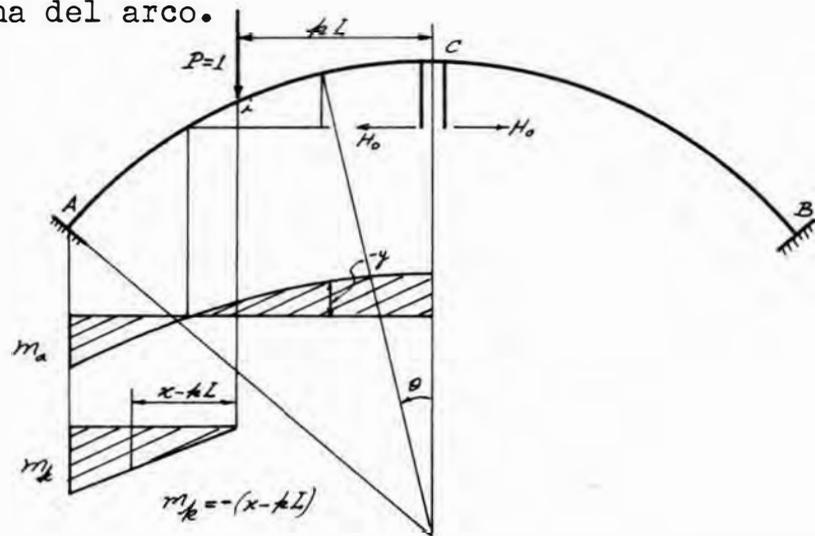
$$ds = r \cdot d\theta$$

$$V_o = \frac{\int_{\theta_i}^{\theta_k} r \cdot \text{sen } \theta (r \cdot \text{sen } \theta - r \cdot \text{sen } \theta_i) r \cdot d\theta}{2 \int_0^{\theta_k} r^2 \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot d\theta} =$$

$$= \frac{r^3 \int_{\theta_i}^{\theta_k} \text{sen}^2 \theta \cdot d\theta - r^3 \int_{\theta_i}^{\theta_k} \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \theta_i \cdot d\theta}{2r^3 \int_0^{\theta_k} \text{sen}^2 \theta \cdot d\theta}$$

$$V_o = \frac{\frac{1}{2} (\theta_k - \theta_i - \text{sen } \theta_k \text{ca } \theta_k + \text{sen } \theta_i \text{ca } \theta_i) + \text{sen } \theta_i (\text{ca } \theta_k - \text{ca } \theta_i)}{\theta_k - \text{sen } \theta_k \text{ca } \theta_k}$$

Que es la expresión de la Línea de Influencia del Corte en la corona del arco.



Para el Empuje , se tiene la siguiente fórmula:

$$H_o = - \frac{\delta_{b'k}}{\delta_{bb}} = \frac{- \int_0^{\theta} y (x - kL) da}{2 \int_0^{\theta} y^2 da}$$

donde

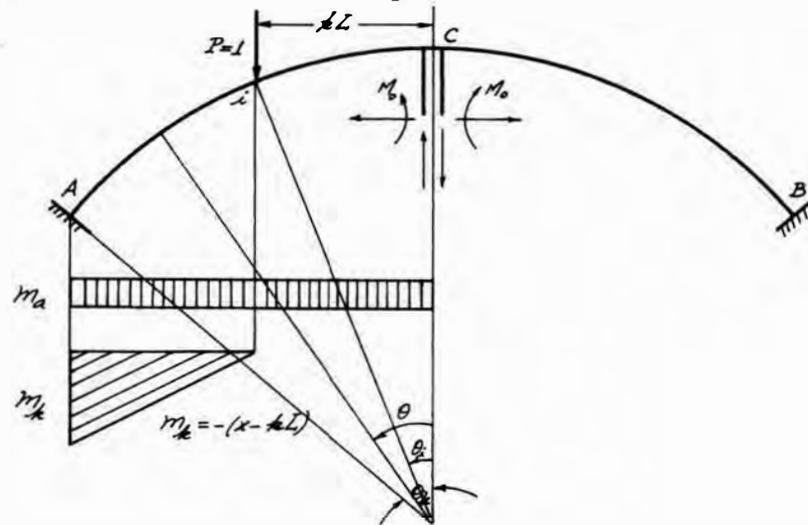
$$y = r \text{ca } \theta - \frac{r \text{sen } \theta_k}{\theta_k}$$

$$H_o = \frac{- \int_0^{\theta} r \left(\text{ca } \theta - \frac{\text{sen } \theta_k}{\theta_k} \right) (r \text{sen } \theta - r \text{sen } \theta_i) r \cdot d\theta}{2 \int_0^{\theta} \left(r^2 \text{ca}^2 \theta - \frac{2r^2 \text{ca } \theta \text{sen } \theta_k}{\theta_k} + \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta_k}{\theta_k^2} \right) r \cdot d\theta} =$$

$$= \frac{-\int_{\theta_i}^{\theta_k} ca \theta \sin \theta d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta_i ca \theta d\theta + \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta d\theta - \frac{\sin \theta_k \sin \theta_i}{\theta_k} \int_{\theta_i}^{\theta_k} d\theta}{2 \int_0^{\theta_k} ca^2 \theta d\theta - 4 \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \int_0^{\theta_k} ca \theta d\theta + 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k} \int_0^{\theta_k} d\theta}$$

$$H_o = \frac{\frac{\sin^2 \theta_i}{2} - \frac{\sin^2 \theta_k}{2} + \sin \theta_i (\sin \theta_k - \sin \theta_i) + \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} (\cos \theta_i - \cos \theta_k) - \frac{\sin \theta_k \sin \theta_i}{\theta_k} (\theta_k - \theta_i)}{\sin \theta_k \cos \theta_k + \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k}}$$

Que es la expresión de la Línea de Influencia para el Empuje en el arco doblemente empotrado.



La Línea de Influencia para el Momento en el "centro elástico está expresado por:

$$M_o = - \frac{\delta_{ck}}{\delta_{cc}} = \frac{\int_a^A (x - kL) da}{2 \int_c^A da}$$

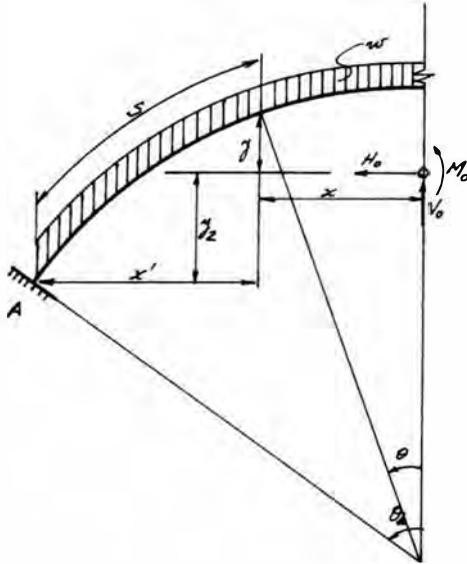
Reemplazando

$$M_o = \frac{\int_{\theta_i}^{\theta_k} (r \sin \theta - r \sin \theta_i) r d\theta}{2r \theta_k} = \frac{r^2 \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta d\theta - r^2 \sin \theta_i \int_{\theta_i}^{\theta_k} d\theta}{2r \theta_k}$$

$$M_o = \frac{r (\cos \theta_i - \cos \theta_k) - r \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i)}{2 \theta_k}$$

Que es la expresión de la Línea de Influencia para el Momento M_o en el arco doblemente empotrado.

Redundantes en el arco empotrado con carga uniforme.



Las redundantes en el Centro Elástico son:

$$H_0 = \frac{-\int_A^B M' y ds}{\int_A^B y^2 ds}$$

$$M_0 = \frac{-\int_A^B M' ds}{\int_A^B ds}$$

$$y = r \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \right)$$

$$ds = r d\theta$$

$$M' = \frac{w L_s x'}{2} - w r^2 (\theta_k - \theta) \left[\sin \left(\frac{\theta_k + \theta}{2} \right) - \sin \theta \right] = w r^2 \theta_k \sin \theta_k -$$

$$- w r^2 \left(\theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \theta \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \theta \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \theta \sin \theta \right)$$

$$H_0 = \frac{\int_{\theta_k}^{-\theta_k} \left[w r^2 \left(\theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \theta_k \sin \theta_k - \theta \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \right. \right.}{r^3 \left(\sin \theta_k \cos \theta_k + \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k} \right)}$$

$$\left. \left. - \theta \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \theta \sin \theta \right) \right] r \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 - \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \right) + d\theta}{r^3 \left(\sin \theta_k \cos \theta_k + \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k} \right)}$$

$$H_0 = \left[2 \theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \cos^3 \frac{\theta}{2} d\theta + 2 \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta - \right.$$

$$\left. - 2 \theta_k \sin \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta - 2 \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \cos^3 \frac{\theta}{2} d\theta - 2 \cos \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta + \right.$$

$$\left. + 4 \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} d\theta - \theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \cos \frac{\theta}{2} d\theta - \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \sin \frac{\theta}{2} d\theta + \right.$$

$$\left. + \theta_k \sin \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_k} d\theta + \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta + \cos \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \sin \theta d\theta - \sin \frac{\theta_k}{2} \sin \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \cos \frac{\theta}{2} d\theta - \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \sin \frac{\theta}{2} d\theta + \\
& + \sin^2 \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_k} d\theta + \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{\sin \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2}}{\theta_k} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\
& - \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \sin \theta d\theta \Big] \frac{w r}{\sin \theta_k \cos \theta_k + \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k}}
\end{aligned}$$

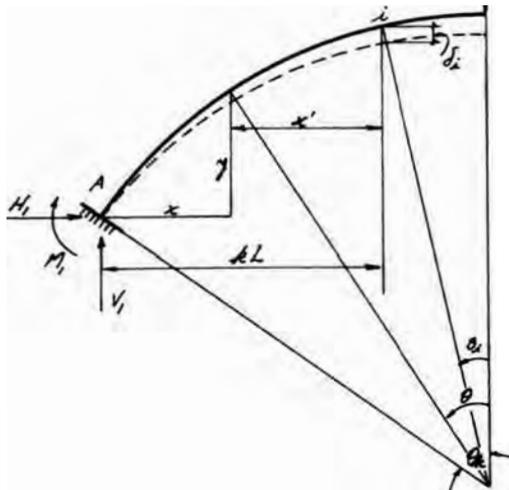
$$\begin{aligned}
H_0 = & \left[-\frac{8}{3} \theta_k \sin^2 \frac{\theta_k}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta_k}{2} + 2 \right) + \frac{4}{3} \theta_k \cos^4 \frac{\theta_k}{2} + \frac{8}{9} \sin \theta_k \left(\cos^2 \frac{\theta_k}{2} + 2 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{5}{2} \theta_k - \frac{5}{4} \sin 2\theta_k - 2 \theta_k \cos \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k} \right] \frac{w r}{\sin \theta_k \cos \theta_k + \theta_k - 2 \frac{\sin^2 \theta_k}{\theta_k}}
\end{aligned}$$

Que es la expresión del Empuje para el arco empotrado con carga uniforme.

El momento M_0 está dado por:

$$\begin{aligned}
M_0 = & \frac{- \int_a^b M' da}{\int_a^b da} = \frac{+ \int_{\theta_k}^{-\theta_k} w r^2 \left(\theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \right.}{\int_{\theta_k}^{-\theta_k} r d\theta} \\
& \left. - \theta_k \sin \theta_k - \theta \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \theta \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \theta \sin \theta \right) r d\theta}{=} \\
= & - \frac{w r^2}{2 \theta_k} \left[\theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \cos \frac{\theta}{2} d\theta + \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \sin \frac{\theta}{2} d\theta - \right. \\
& \left. - \theta_k \sin \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_k} d\theta - \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta - \cos \frac{\theta_k}{2} \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta + \int_{\theta_k}^{-\theta_k} \theta \sin \theta d\theta \right] \\
= & - \frac{w r^2}{2 \theta_k} \left[-4 \theta_k + 2 \theta_k^2 \sin \theta_k + 2 \sin \theta_k + 2 \theta_k \cos \theta_k \right] \\
M_0 = & - w r^2 \left[\theta_k \sin \theta_k - 2 + \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} + \cos \theta_k \right]
\end{aligned}$$

Deflecciones en el arco empotrado debidas a carga concentrada.



P

En el presente caso, es posible usar el Principio de Momento de Areas para el cálculo de deflecciones. La deflección en el punto i está dada por:

$$\delta_i = \int_0^{kL} \frac{M dx}{EI}$$

$$x' = r(\sin \theta - \sin \theta_i)$$

$$M = M_1 + V_1 x - H_1 y \quad (k \leq 0.5)$$

$$EI \delta_i = \int_{\theta_i}^{\theta_k} [M_1 + V_1 r(\sin \theta_k - \sin \theta) - H_1 r(\cos \theta - \cos \theta_k)] r(\sin \theta - \sin \theta_i) r d\theta$$

$$= M_1 r^2 \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta d\theta - M_1 r^2 \sin \theta_i \int_{\theta_i}^{\theta_k} d\theta + V_1 r^3 \sin \theta_k \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta d\theta -$$

$$- V_1 r^3 \sin \theta_k \sin \theta_i \int_{\theta_i}^{\theta_k} d\theta - V_1 r^3 \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin^2 \theta d\theta + V_1 r^3 \sin \theta_i \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta d\theta -$$

$$- H_1 r^3 \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta \cos \theta d\theta + H_1 r^3 \sin \theta_i \int_{\theta_i}^{\theta_k} \cos \theta d\theta + H_1 r^3 \cos \theta_k \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta d\theta$$

$$- H_1 r^3 \cos \theta_k \sin \theta_i \int_{\theta_i}^{\theta_k} d\theta$$

$$EI \delta_i = -M_1 r^2 [(\cos \theta_k - \cos \theta_i) + \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i) - V_1 r^3 [\sin \theta_k (\cos \theta_k - \cos \theta_i) +$$

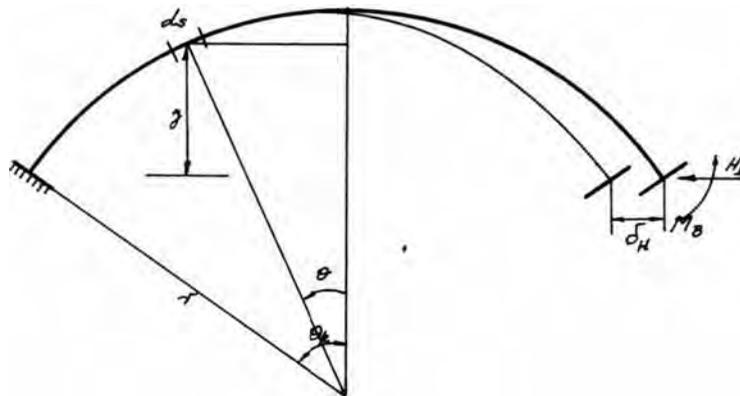
$$\left\{ + \sin \theta_k \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i) + \frac{\theta_k - \theta_i}{2} - \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{2} + \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{2} + \right.$$

$$\left\{ + \sin \theta_i (\cos \theta_k - \cos \theta_i) \right\} - H_1 r^3 \left[\left(\frac{\sin^2 \theta_k - \sin^2 \theta_i}{2} \right) - \sin \theta_i (\sin \theta_k - \sin \theta_i) + \right. \\ \left. + \cos \theta_k (\cos \theta_k - \cos \theta_i) + \cos \theta_k \sin \theta_i (\theta_k - \theta_i) \right]$$

Esta fórmula expresa las deflecciones en el arco circular empotrado debidas a carga concentrada en la Línea de Centros.

Reacciones en el arco empotrado por desplazamiento de apoyo.

a) Desplazamiento Horizontal.



La Energía de deformación acumulada por un sistema elástico viene expresada por:

$$U = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI}$$

$$M = H_2 \gamma - M_0 = H_2 r (\cos \theta - \cos \theta_k) - M_0$$

De acuerdo al 1º Teorema de Castigliano:

$$\delta_H = \frac{\partial U}{\partial H_2} = \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H_2} ds$$

$$\frac{\partial M}{\partial H_2} = r (\cos \theta - \cos \theta_k) \quad ds = r d\theta$$

$$\delta_H = \frac{H_2 r^3}{EI} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \theta_k + \cos^2 \theta_k) d\theta - \frac{M_0 r^2}{EI} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} (\cos \theta - \cos \theta_k) d\theta$$

$$\delta_H = \frac{H_D r^3}{EI} \left[\theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k \right] - \frac{2 M_D r^2}{EI} \left[\sin \theta_k - \theta_k \cos \theta_k \right]$$

$$\theta_D = \frac{\partial V}{\partial M_D} = \int_0^{\theta_k} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_D} d\theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_D} = -1$$

$$\theta_D = - \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \frac{\theta_k H_D r^2}{EI} (\cos \theta - \cos \theta_k) d\theta + \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \frac{M_D}{EI} r d\theta$$

$$\theta_D = - \frac{2 H_D r^2}{EI} \left[\sin \theta_k - \theta_k \cos \theta_k \right] + \frac{2 M_D r \theta_k}{EI}$$

Pero: $\theta_D = 0$ $M_D = H_D r \left[\frac{\sin \theta_k}{\theta_k} - \cos \theta_k \right]$

$$\delta_H = \frac{H_D r^3}{EI} \left[\theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k \right] - \frac{2 H_D r^3 \theta_k}{EI} \left[\frac{\sin \theta_k}{\theta_k} - \cos \theta_k \right]^2$$

$$\delta_H = \frac{H_D r^3}{EI} \left[\theta_k + \sin \theta_k \cos \theta_k - \frac{2 \sin^2 \theta_k}{\theta_k} \right]$$

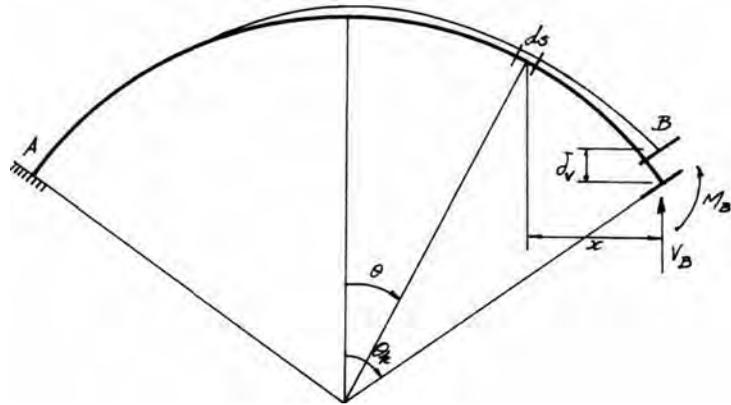
Esta fórmula nos relaciona el Empuje con el desplazamiento horizontal y la fórmula de M_D el momento con el Empuje, que son las dos redundantes para el caso de desplazamiento horizontal.

Desplazamiento Vertical.

La Energía por flexión es:

$$U = \int_0^{\theta_k} \frac{M^2 d\theta}{2EI}$$

$$M = V_D x + M_D = V_D r (\sin \theta_k - \sin \theta) + M_D$$



$$\delta_V = \frac{\partial U}{\partial V_B} = \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} ds$$

$$\frac{\partial M}{\partial V_B} = r(\sin \theta_k - \sin \theta) \quad ds = r d\theta$$

$$\delta_V = \frac{V_B r^3}{EI} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} (\sin^2 \theta_k - 2 \sin \theta_k \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta + \frac{M_B r^2}{EI} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} (\sin \theta_k - \sin \theta) d\theta$$

$$\delta_V = \frac{V_B r^3}{EI} [\theta_k - \cos \theta_k \sin \theta_k + 2 \theta_k \sin^2 \theta_k] + \frac{2 M_B r^2}{EI} [\theta_k \sin \theta_k]$$

$$\delta_\theta = \frac{\partial U}{\partial M_B} = \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} ds$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_B} = 1 \quad ds = r d\theta$$

$$\delta_\theta = \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \frac{V_B r^2}{EI} (\sin \theta_k - \sin \theta) d\theta + \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \frac{M_B}{EI} r d\theta$$

$$\delta_\theta = \frac{V_B r^2}{EI} [2 \theta_k \sin \theta_k] + \frac{2 M_B r \theta_k}{EI}$$

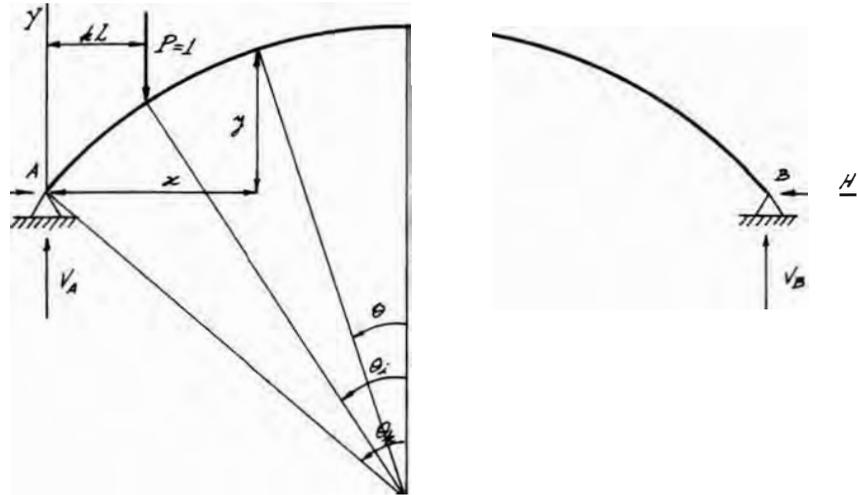
Pero: $\delta_\theta = 0 \quad M_B = -V_B r \sin \theta_k$

$$\delta_V = \frac{V_B r^3}{EI} [\theta_k - \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \sin^2 \theta_k] - \frac{2 V_B r^3}{EI} [\theta_k \sin^2 \theta_k]$$

$$\delta_V = \frac{V_B r^3}{ET} [\theta_k - \sin \theta_k \cos \theta_k]$$

Esta ecuación y la de M_B resuelven las reacciones incógnitas para el caso de desplazamiento vertical del apoyo B.

Línea de Influencia del Empuje en el Arco Biarticulado.



El Empuje viene expresado por:

$$H = \frac{\int_A^B M' y ds}{\int_A^B y^2 ds}$$

$$M' = (1-k)x \Big|_0^{kL}, \quad = k(L-x) \Big|_{kL}^L$$

$$y = r(\cos \theta - \cos \theta_k)$$

$$M' = (1-k)r(\sin \theta_k - \sin \theta) \Big|_{\theta_k}^{\theta_i}, \quad = kr(\sin \theta_k + \sin \theta) \Big|_{-\theta_i}^{\theta_k}$$

$$H = \frac{\int_{-\theta_k}^{-\theta_i} (1-k)r(\sin \theta_k - \sin \theta) + r(\cos \theta - \cos \theta_k) r d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_k} kr(\sin \theta_k + \sin \theta) + r(\cos \theta - \cos \theta_k) r d\theta}{\int_{-\theta_k}^{\theta_k} r^2(\cos \theta - \cos \theta_k)^2 r d\theta}$$

$$= \frac{(1-k) \left[\sin \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_i} \cos \theta d\theta - \sin \theta_k \cos \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_i} d\theta - \int_{\theta_k}^{-\theta_i} \sin \theta \cos \theta d\theta + \cos \theta_k \int_{\theta_k}^{-\theta_i} \sin \theta d\theta \right] +}{\theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k}$$

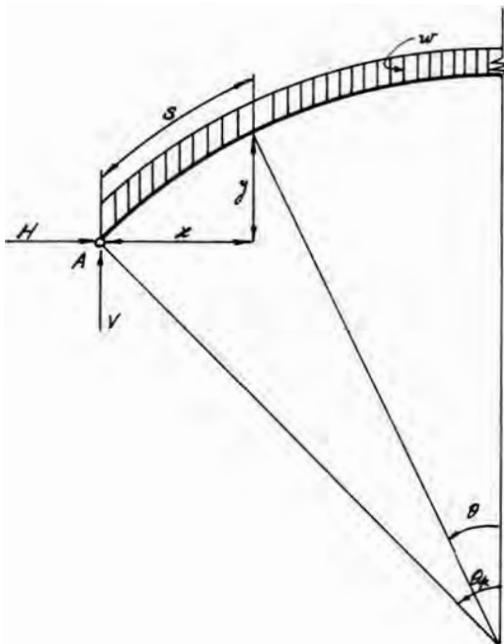
$$+ k \left[\sin \theta_k \int_{\theta_i}^{\theta_k} \cos \theta d\theta - \sin \theta_k \cos \theta_k \int_{\theta_i}^{\theta_k} d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta \cos \theta d\theta - \cos \theta_k \int_{\theta_i}^{\theta_k} \sin \theta d\theta \right] =$$

$$= \frac{(1-k)[\sin \theta_k (-\sin \theta_i + \sin \theta_k) - \sin \theta_k \cos \theta_k (-\theta_i + \theta_k) - \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_k) - \cos \theta_k (\cos \theta_i - \cos \theta_k)] + k[\sin \theta_k (\sin \theta_k + \sin \theta_i) - \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_k + \theta_i) + \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_k - \sin^2 \theta_i) + \cos \theta_k (\cos \theta_k - \cos \theta_i)]}{\theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k}$$

$$H = \frac{[1 - \sin \theta_k \sin \theta_i - \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_k - \theta_i) + \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_k - \sin^2 \theta_i) - \cos \theta_k \cos \theta_i + 2k \sin \theta_k \sin \theta_i - 2k \theta_i \sin \theta_k \cos \theta_k]}{\theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k}$$

Que es la expresión de la Línea de Influencia del Empuje para el Arco Biarticulado.

Empuje Horizontal en el Arco Biarticulado con carga w.



El Empuje H viene expresado

$$H = \frac{\int_A^B M' y ds}{\int_A^B y^2 ds}$$

donde:

$$y = r(\cos \theta - \cos \theta_k)$$

$$M' = \frac{w s x}{2} - w r^2 (\theta_k - \theta) x$$

$$x [\sin \left(\frac{\theta_k + \theta}{2} \right) - \sin \theta] =$$

$$= w r^2 \theta_k (\sin \theta_k - \sin \theta) -$$

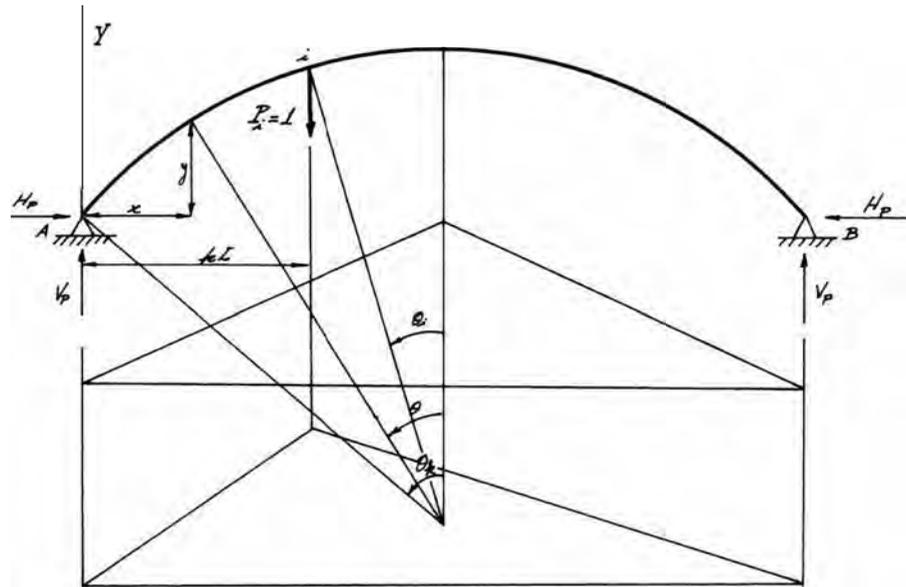
$$- w r^2 (\theta_k - \theta) \left[\sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \sin \theta \right]$$

$$\begin{aligned}
H_w &= \frac{-\int_{-\theta_k}^{\theta_k} \omega r^2 \left[\theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \theta_k \sin \theta_k - \right. \\
&\quad \left. - \theta \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \theta \cos \frac{\theta_k}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \theta \sin \theta \right] r (\cos \theta - \cos \theta_k) r d\theta}{=} \\
&= \left\{ -\omega r^2 \left[\theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta d\theta + \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta d\theta - \right. \right. \\
&\quad - \theta_k \sin \theta_k \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \cos \theta d\theta - \sin \frac{\theta_k}{2} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \theta \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta - \cos \frac{\theta_k}{2} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \theta \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta d\theta \\
&\quad + \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \theta \sin \theta \cos \theta d\theta - \theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \theta_k \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \cos \frac{\theta}{2} d\theta - \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \cos \theta_k \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\
&\quad + \theta_k \sin \theta_k \cos \theta_k \int_{-\theta_k}^{\theta_k} d\theta + \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \theta_k \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta + \cos \frac{\theta_k}{2} \cos \theta_k \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\
&\quad \left. - \cos \theta_k \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \theta \sin \theta d\theta \right\} \frac{1}{\int_{-\theta_k}^{\theta_k} \cos^2 \theta d\theta - 2 \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \cos \theta_k \cos \theta d\theta + \cos^2 \theta_k \int_{-\theta_k}^{\theta_k} d\theta} \\
&= -\omega r^2 \left[\theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \left(4 \sin \frac{\theta_k}{2} - \frac{8}{3} \sin^3 \frac{\theta_k}{2} \right) - \theta_k \sin \theta_k (2 \sin \theta_k) - \right. \\
&\quad - \cos \frac{\theta_k}{2} \left[-\frac{8}{3} \theta_k \cos^3 \frac{\theta_k}{2} + \frac{16}{9} \sin \frac{\theta_k}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta_k}{2} + 2 \right) - 8 \sin \frac{\theta_k}{2} + \right. \\
&\quad \left. + 4 \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \right] + \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{1}{2} \sin \theta_k \cos \theta_k - \frac{\theta_k}{2} - \theta_k \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \theta_k \left(4 \sin \frac{\theta_k}{2} \right) \\
&\quad + \theta_k \sin \theta_k \cos \theta_k (2 \theta_k) + \cos \frac{\theta_k}{2} \cos \theta_k \left(8 \sin \frac{\theta_k}{2} - 4 \theta_k \cos \frac{\theta_k}{2} \right) \\
&\quad \left. - \cos \theta_k (2 \sin \theta_k - 2 \theta_k \cos \theta_k) \right\} \frac{1}{\theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k}
\end{aligned}$$

Finalmente, la expresión para H se reduce a:

$$H_w = -wr \left[-\frac{16}{3} \theta_k \cos \theta_k - \theta_k \sin^2 \theta_k - \frac{8}{3} \sin \theta_k (\cos^2 \frac{\theta_k}{2} + 2) + 4 \sin \theta_k + \theta_k - 3 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k \right. \\ \left. + \frac{5 \sin \theta_k \cos \theta_k}{2} \quad \frac{\theta_k}{2} + 2 \theta_k^2 \sin \theta_k \cos \theta_k + 2 \theta_k \cos^2 \theta_k \right]$$

Deflecciones en el Arco Biarticulado con Carga Concentrada.



La deflección vertical en un arco viene expresada como:

$$\delta_i = \int_A^B \frac{M m_i}{EI} ds$$

donde M y m_i son los Momentos verdaderos en cualquier punto del arco debidos a la carga actual y la unitaria, respectivamente. Los valores de las redundantes debidas a la carga unitaria se obtienen de las Líneas de Influencia previamente halladas.

$$M \Big|_0^{L/2} = V_p x - H_p y = V_p r (\sin \theta_k - \sin \theta) - H_p r (\cos \theta - \cos \theta_k)$$

$$m_i \Big|_0^{kL} = (1-k)x - H_p y \quad m_i \Big|_{kL}^L = k(L-x) - H_p y$$

$$M = V_p(L-x) - H_p \cdot y$$

$$\begin{aligned}
 EI \delta_i &= \int_{\theta_k}^{\theta_i} [V_p r (\sin \theta_k - \sin \theta) - H_p r (\cos \theta - \cos \theta_k)] [(1-k) r (\sin \theta_k - \sin \theta) - \\
 &\quad - H_p r (\cos \theta - \cos \theta_k)] r d\theta + \int_{\theta_k}^0 [V_p r (\sin \theta_k - \sin \theta) - H_p r (\cos \theta - \cos \theta_k)] \times \\
 &\quad \times [k r (\sin \theta_k + \sin \theta) - H_p r (\cos \theta - \cos \theta_k)] r d\theta + \int_0^{-\theta_k} [V_p r (\sin \theta_k + \sin \theta) - \\
 &\quad - H_p r (\cos \theta - \cos \theta_k)] \times [k r (\sin \theta_k + \sin \theta) - H_p r (\cos \theta - \cos \theta_k)] r d\theta = \\
 &= V_p r^3 (1-k) \sin^2 \theta_k \int_{\theta_k}^{\theta_i} d\theta - 2 V_p r^3 (1-k) \sin \theta_k \int_{\theta_k}^{\theta_i} \sin \theta d\theta + V_p r^3 (1-k) \int_{\theta_k}^{\theta_i} \sin^2 \theta d\theta \\
 &\quad - [V_p H_p r^3 + H_p r^3 (1-k)] \sin \theta_k \int_{\theta_k}^{\theta_i} \cos \theta d\theta + [V_p H_p r^3 + H_p r^3 (1-k)] \sin \theta_k \cos \theta_k \int_{\theta_k}^{\theta_i} d\theta + \\
 &\quad + [V_p H_p r^3 + H_p r^3 (1-k)] \int_{\theta_k}^{\theta_i} \sin \theta \cos \theta d\theta - [V_p H_p r^3 + H_p r^3 (1-k)] \cos \theta_k \int_{\theta_k}^{\theta_i} \sin \theta d\theta + \\
 &\quad + H_p H_p r^3 \int_{\theta_k}^{\theta_i} \cos^2 \theta d\theta - 2 H_p H_p r^3 \cos \theta_k \int_{\theta_k}^{\theta_i} \cos \theta d\theta + H_p H_p r^3 \cos^2 \theta_k \int_{\theta_k}^{\theta_i} d\theta + \\
 &\quad + V_p k r^3 \sin^2 \theta_k \int_{\theta_k}^0 d\theta - V_p k r^3 \int_{\theta_k}^0 \sin^2 \theta d\theta - V_p H_p r^3 \sin \theta_k \int_{\theta_k}^0 \cos \theta d\theta + \\
 &\quad + V_p H_p r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k \int_{\theta_k}^0 d\theta + V_p H_p r^3 \int_{\theta_k}^0 \sin \theta \cos \theta d\theta - V_p H_p r^3 \cos \theta_k \int_{\theta_k}^0 \sin \theta d\theta - \\
 &\quad - H_p k r^3 \sin \theta_k \int_{\theta_k}^0 \cos \theta d\theta - H_p k r^3 \int_{\theta_k}^0 \sin \theta \cos \theta d\theta + H_p k r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k \int_{\theta_k}^0 d\theta + \\
 &\quad + H_p k r^3 \cos \theta_k \int_{\theta_k}^0 \sin \theta d\theta + H_p H_p r^3 \int_{\theta_k}^0 \cos^2 \theta d\theta - 2 H_p H_p r^3 \cos \theta_k \int_{\theta_k}^0 \cos \theta d\theta + H_p H_p r^3 \cos^2 \theta_k \int_{\theta_k}^0 d\theta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + V_p k r^3 \sin^2 \theta_k \int_0^{-\theta_k} d\theta + 2 V_p k r^3 \sin \theta_k \int_0^{-\theta_k} \sin \theta d\theta + V_p k r^3 \int_0^{-\theta_k} \sin^2 \theta d\theta - \\
& - V_p H_i r^3 \sin \theta_k \int_0^{-\theta_k} \cos \theta d\theta + V_p H_i r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k \int_0^{-\theta_k} d\theta - V_p H_i r^3 \int_0^{-\theta_k} \sin \theta \cos \theta d\theta + \\
& + V_p H_i r^3 \cos \theta_k \int_0^{-\theta_k} \sin \theta d\theta - H_p k r^3 \sin \theta_k \int_0^{-\theta_k} \cos \theta d\theta - H_p k r^3 \int_0^{-\theta_k} \sin \cos \theta d\theta + \\
& + H_p k r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k \int_0^{-\theta_k} d\theta + H_p k r^3 \cos \theta_k \int_0^{-\theta_k} \sin \theta d\theta + H_p H_i r^3 \int_0^{-\theta_k} \cos^2 \theta d\theta - \\
& - 2 H_p H_i r^3 \cos \theta_k \int_0^{-\theta_k} \cos \theta d\theta + H_p H_i r^3 \cos^2 \theta_k \int_0^{-\theta_k} d\theta = \\
& = V_p r^3 (1-k) \sin^2 \theta_k (\theta_i - \theta_k) + 2 V_p r^3 (1-k) \sin \theta_k (\cos \theta_i - \cos \theta_k) + V_p r^3 (1-k) \times \\
& \times \left(\frac{\theta_i}{2} - \frac{\theta_k}{2} - \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{2} + \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{2} \right) - [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \sin \theta_k (\sin \theta_i - \sin \theta_k) \\
& + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_i - \theta_k) + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{2} - \frac{\sin^2 \theta_k}{2} \right) + \\
& + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \cos \theta_k (\cos \theta_i - \cos \theta_k) + H_p H_i r^3 \left(\frac{\theta_i}{2} - \frac{\theta_k}{2} + \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{2} - \right. \\
& \left. \left[- \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{2} \right] - 2 H_p H_i r^3 \cos \theta_k (\sin \theta_i - \sin \theta_k) + H_p H_i r^3 \cos^2 \theta_k (\theta_i - \theta_k) - \right. \\
& - V_p k r^3 \sin^2 \theta_k (\theta_i) - V_p k r^3 \left(\frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{2} - \frac{\theta_i}{2} \right) + V_p H_i r^3 \sin \theta_k (\sin \theta_i) - \\
& - V_p H_i r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_i) + V_p H_i r^3 \left(- \frac{\sin^2 \theta_i}{2} \right) + V_p H_i r^3 \cos \theta_k (1 - \cos \theta_i) - \\
& - H_p k r^3 \sin \theta_k (-\sin \theta_i) - H_p k r^3 \left(- \frac{\sin^2 \theta_i}{2} \right) + H_p k r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k (-\theta_i) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -H_p k r^3 \cos \theta_k (1 - \cos \theta_i) + H_p H_i r^3 \left(-\frac{\theta_i}{2} - \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{2} \right) - 2H_p H_i r^3 \cos \theta_k (-\sin \theta_i) + \\
& + H_p H_i r^3 \cos^2 \theta_k (-\theta_i) + V_p k r^3 \sin^2 \theta_k (-\theta_k) - 2V_p k r^3 \sin \theta_k (\cos \theta_k - 1) + V_p k r^3 \times \\
& \times \left(\frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{2} - \frac{\theta_k}{2} \right) - V_p H_i r^3 \sin \theta_k (-\sin \theta_k) + V_p H_i r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k (-\theta_k) - V_p H_i r^3 \times \\
& \times \left(\frac{\sin^2 \theta_k}{2} \right) - V_p H_i r^3 \cos \theta_k (\cos \theta_k - 1) - H_p k r^3 \sin \theta_k (-\sin \theta_k) - H_p k r^3 \left(\frac{\sin^2 \theta_k}{2} \right) + \\
& + H_p k r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k (-\theta_k) - H_p k r^3 \cos \theta_k (\cos \theta_k - 1) + H_p H_i r^3 \left(-\frac{\theta_k}{2} - \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{2} \right) \\
& - 2H_p H_i r^3 \cos \theta_k (-\sin \theta_k) + H_p H_i r^3 \cos^2 \theta_k (-\theta_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI \delta_i &= V_p r^3 \sin^2 \theta_k (\theta_i - \theta_k) - 2V_p r^3 k \theta_i \sin^2 \theta_k + 2V_p r^3 (1-k) \sin \theta_k (\cos \theta_i - \cos \theta_k) \\
& - 2V_p k r^3 \sin \theta_k (\cos \theta_k - 1) - V_p r^3 \left(\frac{\theta_k}{2} - \frac{\theta_i}{2} + \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{2} - \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{2} \right) - \\
& - [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \sin \theta_k (\sin \theta_i - \sin \theta_k) + (V_p H_i + H_p k) r^3 \sin \theta_k (\sin \theta_i + \sin \theta_k) \\
& + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_i - \theta_k) - [V_p H_i + H_p k] r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k (\theta_i + \theta_k) + \\
& + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{2} - \frac{\sin^2 \theta_k}{2} \right) - V_p H_i r^3 \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{2} + \frac{\sin^2 \theta_k}{2} \right) + \\
& + [V_p H_i r^3 + H_p r^3 (1-k)] \cos \theta_k (\cos \theta_i - \cos \theta_k) + V_p H_i r^3 \cos \theta_k (2 - \cos \theta_i - \cos \theta_k) - \\
& - H_p k r^3 \left(\frac{\sin^2 \theta_k}{2} - \frac{\sin^2 \theta_i}{2} \right) - H_p k r^3 \cos \theta_k (\cos \theta_k - \cos \theta_i) - H_p H_i r^3 (\theta_k + \sin \theta_k \cos \theta_k)
\end{aligned}$$

$$+ 4H_p H_i r^3 \sin \theta_k \cos \theta_k - 2H_p H_i r^3 \theta_k \cos^2 \theta_k$$

Esta es la expresión general de las deflecciones producidas en un arco circular biarticulado por una carga concentrada en su Línea de Centros.

La presente fórmula y su similar para Arcos Empotrados permitieron determinar el valor del Módulo de Elasticidad en el modelo.

BIBLIOGRAFIA

- Higer, F.J., R.E. Chambers, A.G.H. Dietz, "On the use of plastic and other composite materials for shell roof structures", World Conference on Shell Structures. 1962, California.
- Hurd, M.K., Formwork for Concrete. American Concrete Institution, Special Publication Number 4. 1963, Detroit.
- Kinney, Gilbert F., Engineering properties and applications of Plastics. John Wiley and Sons, Inc. 1957 New York.
- Parcel, John I. y Robert B. Moorman. Analysis of Statically Indeterminate Structures. John Wiley & Sons, Inc. 1955, New York.
- Perry, Henry A. Adhesive Bonding of Reinforced Plastics. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1959, New York.
- A. Sánchez del Río, A. "Cubiertas Laminares Cerámicas". Informes de la Construcción N°119. Marzo 1960, Madrid.