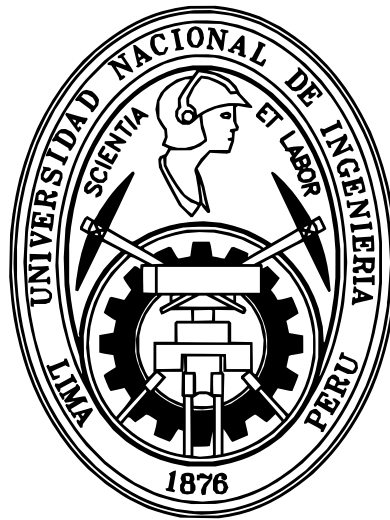


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA
ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL



TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO
EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

TITULO

**EVOLUCIÓN DINÁMICA DE UN MODELO
DE UNA NUBE INTERESTELAR**

Por

Zosimo Regulo Pozo Ccasani

Asesor

Mg. Edgard Vidalon Vidalon

LIMA - PERÚ

2014

Dedicado a:

A Dios, mi familia y mis hermanos en la fe.

Agradecimientos:

Agradezco infinitamente al profesor Edgard Vidalon mi asesor de tesis de maestría por todas las interesantes discusiones que me ayudaron a comprender la evolución dinámica de un elipsoide de revolución gaseoso así como también en la elaboración de los programas y redacción de la presente tesis. También agradezco al Mg. Freddy Loayza y al Lic. Angel Paredes por su ayuda en el desarrollo de esta tesis.

Mi reconocimiento al Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias - UNI por el apoyo para llevar a cabo la presente tesis.

ABSTRACT

In this work we find the differential equations for an isolated self-gravitating celestial body, which has an ellipsoidal form due to its rotation. These equations let us to know the time evolution of the ellipsoidal semi-axis (that is, the evolution of the fluid form) and of the body central temperature. We assume that the fluid satisfies the Van der Waals and the viscosity equations. This model can be applied to the study of interstellar clouds, such as the Barnard 68 hydrogen cloud localized at a distance of 500 light-years.

Índice analítico

Introducción	1
CAPÍTULO 1 EVOLUCIÓN DINÁMICA DE UN ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN GASEOSO	3
1.1 Introducción	4
1.2 Ecuación de estado	6
1.3 Ecuación de continuidad	7
1.4 Ecuación de Navier-Stokes	9
1.5 Ecuación de energía calorífica	13
CAPÍTULO 2 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES	16
2.1 Introducción	17
2.2 Transformación en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de variables adimensionales ..	17
2.3 Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales	20
2.4 Observaciones y conclusiones	52
CAPÍTULO 3 ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES	55
3.1 Introducción	56
3.2 Condiciones para la obtención de las soluciones estacionarias ..	56
3.3 Teoría de la estabilidad de las soluciones estacionarias	58
3.4 Análisis numérico de la estabilidad de las soluciones estacionarias	59
3.5 Observaciones y conclusiones	79
APÉNDICE A Ecuación de Navier-Stokes	81
APÉNDICE B Momento angular del elipsoide gaseoso	82

APÉNDICE C Demostración de las ecuaciones (1.34), (1.35) y (1.36)	84
APÉNDICE D Circulación de la velocidad	87
APÉNDICE E Códigos de programación	90
APÉNDICE F Nube molecular Barnard 68	93
APÉNDICE G Ecuación de estado de Van der Waals	94
APÉNDICE H Estrellas variables cefeidas	95
BIBLIOGRAFÍA	96
ÍNDICE DE SÍMBOLOS	97

Introducción

Se sabe que en el universo las galaxias contienen estrellas y nebulosas de gas y polvo. Generalmente las nebulosas de gas ocupan regiones de decenas de años luz, pero también hay otras más pequeñas como la Barnard 68 que es también una nube compuesta por hidrógeno molecular cuya temperatura promedio es menor que 10 K. Ciertas características de esta nube nos dicen que es posible que podría colapsar gravitacionalmente para convertirse en una protoestrella. El objetivo de esta tesis es analizar la evolución de las dimensiones de un elipsoide de revolución gaseoso y algunas de sus propiedades como la temperatura central. Para obtener las ecuaciones diferenciales de los semiejes del elipsoide se usarán diversas ecuaciones fundamentales de la física tales como la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de balance de energía (caso general de la ecuación de transporte). Un caso simple sería asumir que el fluido es un gas ideal (como se procedió en una tesis anterior) **pero en este presente trabajo se considera que el fluido es un gas de Van der Waals y se asume que el fluido es viscoso**. Para resolver las ecuaciones diferenciales obtenidas se aplicarán métodos numéricos. Las condiciones iniciales que se usarán serán las dimensiones y propiedades actuales de la nube Barnard 68, dando también valores a ciertos parámetros tal como el momento angular del elipsoide gaseoso para simular la evolución de este fluido como un modelo de dicha nube.

Por otra parte se hallarán las soluciones estacionarias de las ecuaciones de evolución y se analizará la estabilidad de dichas soluciones.

La importancia de este trabajo es que se puede aplicar a modelos simples de formación de estrellas y a la estabilidad de las estrellas cefeidas (estrellas cuya luminosidad varía rítmicamente con un período muy regular).

A continuación se muestra un resumen de los capítulos que presenta la tesis:

En el capítulo 1 se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acoplados que describe la evolución dinámica del elipsoide de revolución gaseoso empleando las ecuaciones de continuidad, de Navier-Stokes, de energía calorífica y de estado.

En el capítulo 2 se transforma el sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones de primer orden de variables adimensionales, se las resuelve numéricamente empleando una función de paso adaptativo del Matlab y se muestran las gráficas más importantes.

En el capítulo 3 se obtienen las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones diferenciales que describe la evolución del elipsoide de revolución gaseoso, se aplica la teoría de estabilidad de Lyapunov a las ecuaciones diferenciales linealizadas, se analiza la estabilidad de las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones diferenciales mediante

simulaciones al resolverlas numéricamente empleando también una función de paso adaptativo del Matlab y se muestran las gráficas más importantes.

1 EVOLUCIÓN DINÁMICA DE UN ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN GASEOSO

1.1 Introducción

1.2 Ecuación de estado

1.3 Ecuación de continuidad

1.4 Ecuación de Navier-Stokes

1.5 Ecuación de energía calorífica

1.1 Introducción

En este capítulo se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales que describe la evolución dinámica de un elipsoide de revolución gaseoso. Se considera que la interacción entre las partículas del fluido es solamente gravitacional.

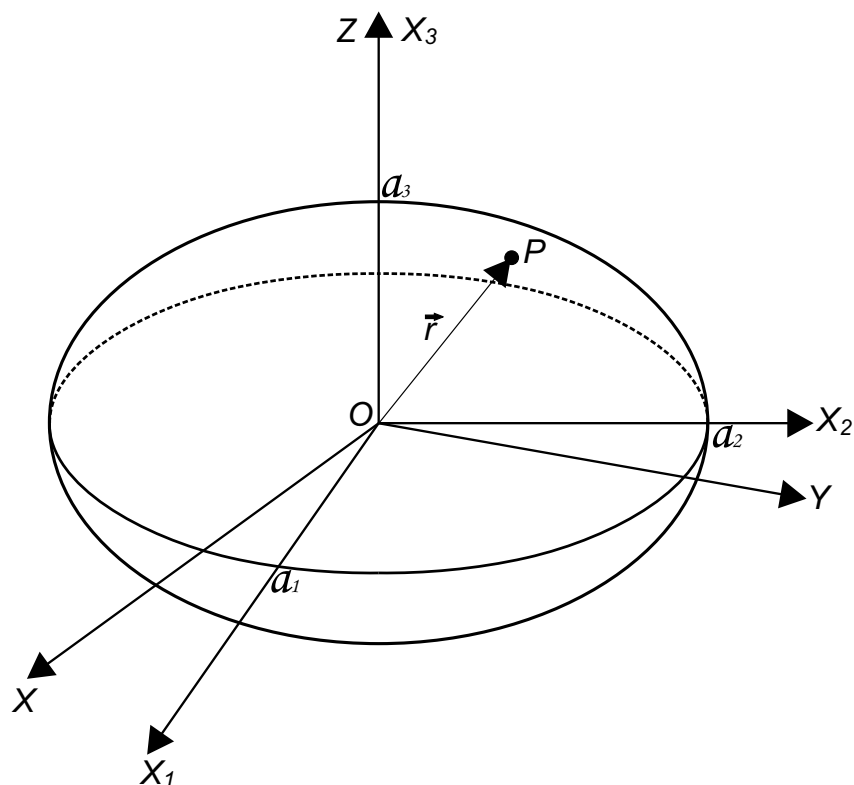


Figura 1.1: El elipsoide gaseoso

En el planteamiento del problema se asumirá lo siguiente:

- El gas está aislado, tiene una masa constante y está limitado por una superficie elipsoidal.
- El gas es un sistema que no se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico, por lo que se la divide en elementos de volumen cada uno lo suficientemente grande que contenga un gran número de partículas y lo suficientemente pequeño como para poder considerar que cada elemento de volumen se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico local.
- Se considera dos sistemas de referencia (ver fig. 1.1): un sistema de referencia inercial XYZ y un sistema de referencia no inercial $X_1X_2X_3$ con el mismo origen de coordenadas y los vectores ortonormales ligados a los sistemas inercial y no inercial

forman las bases $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ respectivamente. Los ejes X_1, X_2 y X_3 son los ejes del elipsoide y los ejes Z y X_3 coinciden.

- Los semiejes a_1, a_2 y a_3 del elipsoide dependen del tiempo, es decir $a_i = a_i(t)$ $i = 1, 2, 3$.
- El gas puede ser monoatómico (He) o diatómico (H_2).
- El gas tiene una densidad uniforme, es decir $\rho = \rho(t)$.
- El gas es viscoso¹.
- El gas tiene conductividad térmica, no se considera los efectos de la radiación térmica y no tiene tensión superficial en su superficie.
- El momento angular del elipsoide se conserva y su dirección siempre permanecerá paralelo al eje Z si el sistema de referencia no inercial rota alrededor de dicho eje.

El vector posición \vec{r} de un elemento de gas que está en el elemento de volumen $dx_1 dx_2 dx_3$ ubicado en el punto $P(x_1, x_2, x_3)$, expresada en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad (1.1)$$

donde x_1, x_2 y x_3 son las coordenadas de P en el sistema de referencia no inercial.

La velocidad \vec{u} de un elemento de gas que está en el elemento de volumen $dx_1 dx_2 dx_3$ ubicado en el punto $P(x_1, x_2, x_3)$, expresada en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3, \quad (1.2)$$

donde $u_i = dx_i/dt$ son las componentes de \vec{u} en el sistema de referencia no inercial.

El sistema de referencia no inercial rota alrededor del eje Z con una velocidad angular $\vec{\omega}$, de manera que

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3 = \omega \vec{k}, \quad (1.3)$$

donde la componente ω depende del tiempo, es decir $\omega = \omega(t)$.

La velocidad \vec{v} de un elemento de gas que está en el elemento de volumen $dx dy dz$ ubicado en el punto $P(x, y, z)$ (x, y y z son las coordenadas de P en el sistema de referencia inercial), esta relacionada con la velocidad \vec{u} mediante

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.4)$$

¹La viscosidad es la fricción interna entre las capas contiguas de un fluido que se mueven a diferente velocidad.

En el sistema de referencia no inercial la ecuación de la superficie elipsoidal está dada por

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1. \quad (1.5)$$

La evolución dinámica del elipsoide gaseoso estará sujeta a las siguientes ecuaciones:

- a) Ecuación de continuidad,
- b) Ecuación de Navier-Stokes,
- c) Ecuación de energía calorífica.

Con el empleo de ellas y la ecuación de estado se obtendrá en este capítulo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para los semiejes y la temperatura en el centro del elipsoide llamada temperatura central (el centro coincide con el origen de coordenadas), para el caso de un elipsoide de revolución (esferoide) gaseoso.

1.2 Ecuación de estado

La ecuación de estado de Van der Waals para un elemento de gas de densidad uniforme que está en un elemento de volumen en equilibrio termodinámico, detallada en el apéndice G (ver pag. 94), relaciona la presión p , la densidad ρ y la temperatura absoluta T de un elemento de volumen $dx_1 dx_2 dx_3$ ubicado en P :

$$p = \frac{\rho RT}{\bar{M} - \rho b} - a \left(\frac{\rho}{\bar{M}} \right)^2, \quad (1.6)$$

donde a y b son las constantes del gas, \bar{M} es la masa molar del gas y R es la constante universal de los gases cuyo valor es 8,314 J/(mol K). Esta ecuación es válida si el gas tiene baja densidad, por lo que se tiene que cumplir que $\rho \ll \bar{M}/b$.

Las constantes a y b pueden calcularse con los valores experimentales de la presión crítica p_{cr} y la temperatura crítica T_{cr} ¹ (ver pag. 581 de [3]) mediante las siguientes ecuaciones

$$a = \frac{27 R T_{cr}^2}{64 P_{cr}}, \quad b = \frac{1 R T_{cr}}{8 P_{cr}}. \quad (1.7)$$

Debido a la simetría del elipsoide es conveniente dividirla en cortezas elipsoidales concéntricas isotérmicas de espesor infinitésimo de modo que la temperatura T en el punto P de una de las cortezas tenga la forma:

$$T = T_c - (T_c - T_s) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}, \quad (1.8)$$

¹La temperatura crítica es la temperatura límite por encima de la cual un gas no puede ser licuado por compresión.

donde T_s es la temperatura constante en la superficie elipsoidal, T_c es la temperatura central que depende del tiempo, es decir $T_c = T_c(t)$ y por lo tanto $T = T(x_1, x_2, x_3, t)$.

Reemplazando la ecuación (1.8) en la ecuación (1.6), la presión p es

$$p = \frac{\rho R}{M - \rho b} (T_c - (T_c - T_s) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}) - a \left(\frac{\rho}{M}\right)^2. \quad (1.9)$$

1.3 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad respecto a un sistema de referencia no inercial, deducida a partir de la conservación de la masa, aplicada a un elemento de volumen fijo $dx_1 dx_2 dx_3$ ubicado en P (ver pag. 3-5 de [2]) es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0, \quad (1.10)$$

donde $\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \partial/\partial x_1 + \vec{e}_2 \partial/\partial x_2 + \vec{e}_3 \partial/\partial x_3$ es el operador gradiente con respecto a las coordenadas x_1, x_2 y x_3 .

Ensayando una relación de linealidad (se supone que no hay turbulencias u otros fenómenos similares) entre las componentes u_i de la velocidad \vec{u} y las coordenadas x_i del punto P :

$$u_1 = U_{11} x_1 + U_{12} x_2 + U_{13} x_3, \quad (1.11)$$

$$u_2 = U_{21} x_1 + U_{22} x_2 + U_{23} x_3, \quad (1.12)$$

$$u_3 = U_{31} x_1 + U_{32} x_2 + U_{33} x_3, \quad (1.13)$$

donde $U_{ij} = U_{ij}(t)$, son funciones aun por determinarse. Para encontrar dichas funciones se debe considerar que el movimiento de un elemento de masa del gas que está en la superficie del elipsoide permanecerá siempre en dicha superficie, entonces su trayectoria es la curva descrita por $x_i = x_i(t)$ que satisfacen la ecuación (1.5).

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (1.5) se obtiene

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} x_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^3} \frac{da_i}{dt} x_i^2, \quad (1.14)$$

como $dx_i/dt = u_i$, luego la ecuación anterior se transforma en

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} x_i u_i = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^3} \frac{da_i}{dt} x_i^2. \quad (1.15)$$

Al reemplazar las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13) en la ecuación (1.15) y agrupar los términos convenientemente:

$$\frac{U_{11}}{a_1^2} x_1^2 + \left(\frac{U_{12}}{a_1^2} + \frac{U_{21}}{a_2^2}\right) x_1 x_2 + \left(\frac{U_{13}}{a_1^2} + \frac{U_{31}}{a_3^2}\right) x_1 x_3 + \frac{U_{22}}{a_2^2} x_2^2 +$$

$$\left(\frac{U_{23}}{a_2^2} + \frac{U_{32}}{a_3^2}\right)x_2 x_3 + \frac{U_{33}}{a_3^2} x_3^2 = \frac{1}{a_1^3} \frac{da_1}{dt} x_1^2 + \frac{1}{a_2^3} \frac{da_2}{dt} x_2^2 + \frac{1}{a_3^3} \frac{da_3}{dt} x_3^2. \quad (1.16)$$

Es fácil comprobar que una de las soluciones de U_{ij} que se considera y satisface la ecuación (1.16) es

$$\begin{aligned} U_{ii} &= \frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3 \\ U_{12} &= -\lambda_3 a_1^2, \\ U_{13} &= \lambda_2 a_1^2, \\ U_{23} &= -\lambda_1 a_2^2, \\ U_{21} &= \lambda_3 a_2^2, \\ U_{31} &= -\lambda_2 a_3^2, \\ U_{32} &= \lambda_1 a_3^2, \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde $\lambda_i = \lambda_i(t)$ son funciones indeterminadas. Reemplazando (1.17) en (1.11), (1.12) y (1.13) se obtienen

$$u_1 = \frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - \lambda_3 a_1^2 x_2 + \lambda_2 a_1^2 x_3, \quad (1.18)$$

$$u_2 = \lambda_3 a_2^2 x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2 - \lambda_1 a_2^2 x_3, \quad (1.19)$$

$$u_3 = -\lambda_2 a_3^2 x_1 + \lambda_1 a_3^2 x_2 + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3. \quad (1.20)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20) en la ecuación (1.2) la velocidad \vec{u} , medida en el sistema de referencia no inercial, es

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \left(\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - \lambda_3 a_1^2 x_2 + \lambda_2 a_1^2 x_3\right)\vec{e}_1 + \left(\lambda_3 a_2^2 x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2 - \lambda_1 a_2^2 x_3\right)\vec{e}_2 \\ &\quad + \left(-\lambda_2 a_3^2 x_1 + \lambda_1 a_3^2 x_2 + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3\right)\vec{e}_3. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Si M es la masa y $V = 4\pi a_1 a_2 a_3/3$ es el volumen del elipsoide gaseoso, entonces la densidad del gas es

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi a_1 a_2 a_3}. \quad (1.22)$$

Al reemplazar las ecuaciones (1.21) y (1.22) en la ecuación (1.10) se verifica la ecuación de continuidad¹. Luego la solución de U_{ij} dada por (1.17) es consistente.

Reemplazando las ecuaciones (1.21), (1.3) y (1.1) en la ecuación (1.4) la velocidad \vec{v} , medida en el sistema de referencia inercial pero expresada en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - (\lambda_3 a_1^2 + \omega)x_2 + \lambda_2 a_1^2 x_3\right)\vec{e}_1 + \left((\lambda_3 a_2^2 + \omega)x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2 - \lambda_1 a_2^2 x_3\right)\vec{e}_2 \\ &\quad + \left(-\lambda_2 a_3^2 x_1 + \lambda_1 a_3^2 x_2 + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3\right)\vec{e}_3. \end{aligned} \quad (1.23)$$

¹Como el gas tiene una densidad uniforme entonces $\partial\rho/\partial t = d\rho/dt$. Antes de derivar con respecto al tiempo la ecuación (1.22) es conveniente tomar el logaritmo, derivarlo y luego entonces despejar $d\rho/dt$.

1.4 Ecuación de Navier-Stokes

La ecuación de movimiento respecto a un sistema de referencia no inercial aplicada a un elemento de volumen fijo $dx_1 dx_2 dx_3$ ubicado en P (ver pag. 523 de [5], 3-9 de [2] y pag. 4 de [6]) es

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 (\vec{e}_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}), \quad (1.24)$$

donde φ es el potencial gravitacional y σ_{ij} es el esfuerzo¹ debido a la viscosidad que actúa sobre cada cara perpendicular al eje i y en la dirección del eje j del elemento de volumen mostrado en la fig. 1.2 (el esfuerzo es normal si $j = i$ y cortante si $j \neq i$).

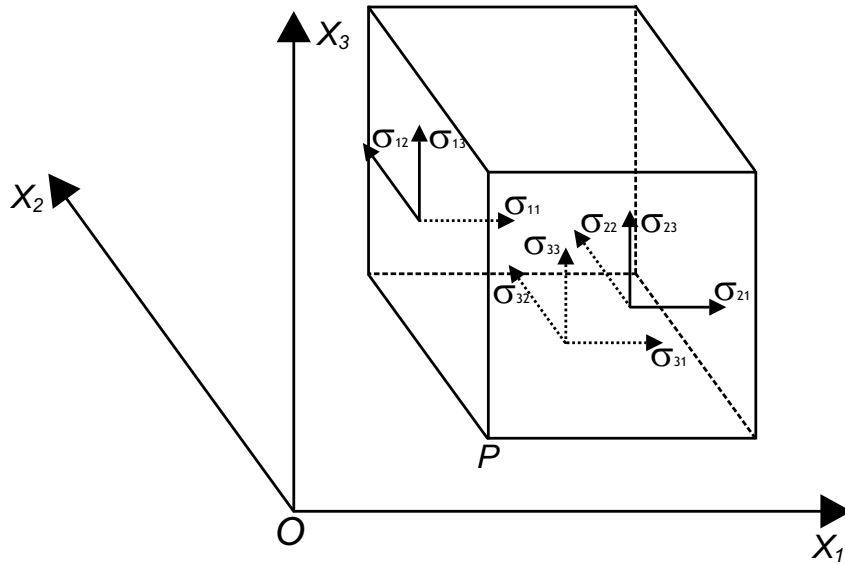


Figura 1.2: Esfuerzos sobre las caras del elemento de volumen del fluido que contienen al punto P

El potencial gravitacional φ en el punto P (ver pag. 43 de [1]) es

$$\varphi = -\pi G \rho (I - \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2), \quad (1.25)$$

donde

$$I = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}}, \quad (1.26)$$

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s) \sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}} \quad (1.27)$$

¹El esfuerzo puede ser normal o cortante. El esfuerzo normal es la componente perpendicular de la fuerza por unidad de área de la superficie sobre la que se aplica y el esfuerzo cortante es la componente tangencial de la fuerza por unidad de área de la superficie.

y G es la constante de gravitación universal cuyo valor es $6,673 \cdot 10^{-11} \text{N m}^2/\text{kg}^2$.

Un fluido viscoso puede ser newtoniano o no newtoniano¹, un fluido es newtoniano si (ver pag. 3-10 de [2]):

$$\sigma_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.28)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámico que depende del tiempo, es decir $\mu = \mu(t)$, y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Considerando una relación de linealidad entre μ y ρ , al definir $\nu = \mu/\rho$ como el coeficiente de viscosidad cinemático entonces dicha magnitud es constante.

Al reemplazar la ecuación (1.28) en la ecuación (1.24), se demuestra la ecuación de Navier-Stokes (ver pag. 81)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} - \frac{1}{3} \nu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{0}, \quad (1.29)$$

donde $\vec{\nabla}^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ es el operador laplaciano con respecto a las coordenadas x_1, x_2 y x_3 .

Antes de utilizar la ecuación de Navier-Stokes, se debe calcular el momento angular del elipsoide gaseoso en función de a_i, λ_3 y ω , este cálculo está realizado en el apéndice B (ver pag. 82). Una consecuencia de este cálculo es que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ por lo que al reemplazarlo en las ecuaciones (1.18), (1.19), (1.20) y (1.21) estas se reducen a

$$u_1 = \frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - \lambda_3 a_1^2 x_2, \quad (1.30)$$

$$u_2 = \lambda_3 a_2^2 x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2, \quad (1.31)$$

$$u_3 = \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3, \quad (1.32)$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - \lambda_3 a_1^2 x_2 \right) \vec{e}_1 + \left(\lambda_3 a_2^2 x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2 \right) \vec{e}_2 + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3 \vec{e}_3. \quad (1.33)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.1), (1.3), (1.33), (1.25) y (1.9) en la ecuación (1.29) (los cálculos de cada término son mostrados en el apéndice C, ver pag. 84) y agrupando convenientemente los términos de cada componente, se encuentra que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a_1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} - \lambda_3^2 a_1^2 a_2^2 - \omega^2 - 2\omega \lambda_3 a_2^2 + 2\pi G \rho A_1 - \frac{2R}{a_1^2} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b} \right) x_1 \\ & - \left(\lambda_3 \frac{a_1^2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + 3\lambda_3 a_1 \frac{da_1}{dt} + \frac{d\lambda_3}{dt} a_1^2 + \frac{2\omega}{a_2} \frac{da_2}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) x_2 = 0, \quad (1.34) \end{aligned}$$

¹Algunos de los fluidos newtonianos son el aire, el agua, la gasolina y el vino; mientras que algunos de los fluidos no newtonianos son la sangre, la miel, la pasta dentrífica y los geles.

$$\begin{aligned}
& (\lambda_3 \frac{a_2^2}{a_1} \frac{da_1}{dt} + 3\lambda_3 a_2 \frac{da_2}{dt} + \frac{d\lambda_3}{dt} a_2^2 + \frac{2\omega}{a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{d\omega}{dt}) x_1 \\
& + (\frac{1}{a_2} \frac{d^2 a_2}{dt^2} - \lambda_3^2 a_1^2 a_2^2 - \omega^2 - 2\omega \lambda_3 a_1^2 + 2\pi G \rho A_2 - \frac{2R}{a_2^2} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b}) x_2 = 0, \quad (1.35)
\end{aligned}$$

$$(\frac{1}{a_3} \frac{d^2 a_3}{dt^2} + 2\pi G \rho A_3 - \frac{2R}{a_3^2} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b}) x_3 = 0. \quad (1.36)$$

Como las ecuaciones (1.34), (1.35) y (1.36) son válidas para cualquier punto del espacio limitado por la superficie elipsoidal entonces los factores que multiplican a las coordenadas en cada uno de los términos de las ecuaciones se anulan. Al anularse el factor que multiplica a x_1 en la ecuación (1.34) y despejar $d^2 a_1/dt^2$ se obtiene

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} = \lambda_3^2 a_1^3 a_2^2 + \omega^2 a_1 + 2\omega \lambda_3 a_1 a_2^2 - 2\pi G \rho A_1 a_1 + \frac{2R}{a_1} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b}. \quad (1.37)$$

De manera semejante, al anularse el factor que multiplica a x_2 y x_3 en las ecuaciones (1.35) y (1.36) respectivamente, y despejar $d^2 a_2/dt^2$ y $d^2 a_3/dt^2$ se obtienen

$$\frac{d^2 a_2}{dt^2} = \lambda_3^2 a_1^2 a_2^3 + \omega^2 a_2 + 2\omega \lambda_3 a_1^2 a_2 - 2\pi G \rho A_2 a_2 + \frac{2R}{a_2} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b}, \quad (1.38)$$

$$\frac{d^2 a_3}{dt^2} = -2\pi G \rho A_3 a_3 + \frac{2R}{a_3} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b}. \quad (1.39)$$

Antes de resolver las ecuaciones diferenciales (1.37), (1.38) y (1.39) es necesario expresar ω , λ_3 y A_i en función de a_i . Se observa que A_i , según la ecuación (1.27), es una función de a_i .

Definiendo la magnitud del momento angular específico L_F como

$$L_F \equiv \frac{5L}{2M}, \quad (1.40)$$

donde L es la magnitud del momento angular del elipsoide gaseoso calculada en el apéndice B (ver pag. 82). Reemplazando la ecuación (B.11) en la ecuación (1.40) se obtiene

$$L_F = \lambda_3 a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega (a_1^2 + a_2^2) \quad (1.41)$$

y despejando ω de la ecuación (1.41) se encuentra que

$$\omega = \frac{2L_F - 2\lambda_3 a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (1.42)$$

Análogamente definiendo C_a como

$$C_a \equiv \frac{C}{2\pi}, \quad (1.43)$$

donde C es la circulación de la velocidad a lo largo del contorno del gas situado en el plano XY calculada en el apéndice D (ver pag. 87), en donde se muestra la definición de la circulación. Reemplazando la ecuación (D.14) en la ecuación (1.43) se obtiene

$$C_a = \frac{1}{2} a_1 a_2 (\lambda_3 (a_1^2 + a_2^2) + 2\omega) \quad (1.44)$$

y despejando ω de la ecuación (1.44) se encuentra que

$$\omega = \frac{2C_a - \lambda_3 a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)}{2a_1 a_2}. \quad (1.45)$$

Al igualar los miembros derechos de las ecuaciones (1.42) y (1.45)

$$\frac{2L_F - 2\lambda_3 a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{2C_a - \lambda_3 a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)}{2a_1 a_2} \quad (1.46)$$

y despejando λ_3 de la ecuación (1.46) se obtiene

$$\lambda_3 = \frac{2((a_1^2 + a_2^2)L_F - 2a_1 a_2 C_a)}{(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)^2}. \quad (1.47)$$

Si $a_2 = a_1$ se tiene un elipsoide de revolución (esferoide), que es el caso que nos interesa. Al reemplazarlo en la ecuación (1.46) se demuestra que $C_a = L_F$ y como el sistema está aislado entonces C_a se conserva. Reemplazándolo en la ecuación (1.47) y tomando el límite cuando a_2 tiende a a_1 esta se reduce a

$$\lambda_3 = \frac{L_F}{2a_1^4}. \quad (1.48)$$

Al reemplazar la ecuación (1.48) en la ecuación (1.42) esta se reduce a

$$\omega = \frac{L_F}{2a_1^2}, \quad (1.49)$$

donde es obvio que si $\omega = 0$ entonces $L_F = 0$.

Reemplazando las ecuaciones (1.48) y (1.49) en la ecuación (1.37) se obtiene

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} = -2\pi G\rho A_1 a_1 + \frac{2R}{a_1} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b} + \frac{L_F^2}{a_1^3}, \quad (1.50)$$

donde $\rho = 3M/(4\pi a_1^2 a_3)$ y las integrales que definen A_i (ver pag. 43 de [1]) son:

Si $a_3 < a_1$, es decir para un esferoide oblato, se obtiene

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsen(e) - \frac{1}{e^2} + 1, \\ A_3 &= \frac{2}{e^2} - \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsen(e), \end{aligned} \quad (1.51)$$

siendo

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2}, \quad (1.52)$$

la excentricidad del esferoide oblato.

Si $a_3 = a_1$ el esferoide es una esfera. Al tomar el límite a (1.51) cuando e tiende a 0, ya que a_3 tiende a a_1 , se reduce a

$$A_1 = A_2 = A_3 = 2/3. \quad (1.53)$$

Si $a_3 > a_1$, es decir para un esferoide prolato, se obtiene

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \text{Ln}\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right), \\ A_3 &= \frac{1 - e^2}{e^3} \text{Ln}\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right) - \frac{2}{e^2} + 2, \end{aligned} \quad (1.54)$$

siendo

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2}, \quad (1.55)$$

la excentricidad del esferoide prolato.

Como $a_2 = a_1$, ya no será necesario modificar la ecuación (1.38).

1.5 Ecuación de energía calorífica

La ecuación de energía calorífica respecto a un sistema de referencia no inercial, deducida a partir de la conservación de la energía, aplicada a un elemento de volumen fijo $dx_1 dx_2 dx_3$ ubicado en P (ver pag. 523 de [5], 10-7 y A-20 de [2]) es

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T \right) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - T \frac{\partial p}{\partial T} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}), \quad (1.56)$$

donde C_v es el calor específico a volumen constante y k es el coeficiente de conductividad térmica de un elemento de volumen del gas (ver pag. 8-5 de [2]).

En el segundo capítulo y parte del tercero de la presente tesis se considera que el gas esta formado por átomos de He o moléculas de H_2 a temperaturas muy bajas por lo que solo deben trasladarse, cumpliendose para ambos que (ver pag. 614 y 615 de [3])

$$C_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M}. \quad (1.57)$$

Puesto que ambos tienen baja densidad (ver pag. 8-18 de [2]) entonces

$$k = \frac{15}{4} \frac{R}{M} \mu, \quad (1.58)$$

donde se observa que si el gas no es viscoso entonces no hay conductividad térmica.

Como el gas es newtoniano, al reemplazar la ecuación (1.28) en el último término del lado derecho de la ecuación (1.56) (ver pag. 10-6 de [2]) esta se convierte en

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) &= -\mu \{ 2 [(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial x_3})^2] + (\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3})^2 \\ &\quad + (\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1})^2 - \frac{2}{3} (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3})^2 \}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.30), (1.31) y (1.32) en la ecuación (1.59) esta se reduce a

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = -\mu [2 \sum_{i=1}^3 (\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt})^2 + \lambda_3^2 (a_2^2 - a_1^2)^2 - \frac{2}{3} (\sum_{i=1}^3 (\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt}))^2]. \quad (1.60)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.57), (1.58), (1.60), (1.8), (1.9) y (1.33) en la ecuación (1.56), teniendo en cuenta que μ solo depende del tiempo, esta se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{R}{\bar{M}} \rho [(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}) \frac{dT_c}{dt} + 2(T_c - T_s) \sum_{i=1}^3 (\frac{x_i^2}{a_i^3} \frac{da_i}{dt}) - 2(T_c - T_s) \sum_{i=1}^3 (\frac{x_i u_i}{a_i^2})] = \\ - \frac{15}{2} \frac{R}{\bar{M}} \mu (T_c - T_s) \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} - \frac{\rho R}{\bar{M} - \rho b} (T_c - (T_c - T_s) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}) \sum_{i=1}^3 (\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt}) \\ + \mu [2 \sum_{i=1}^3 (\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt})^2 + \lambda_3^2 (a_2^2 - a_1^2)^2 - \frac{2}{3} (\sum_{i=1}^3 (\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt}))^2]. \end{aligned} \quad (1.61)$$

La ecuación (1.61) es valida para cualquier punto del fluido limitado por la superficie elipsoidal. Luego de evaluarlo en el origen de coordenadas, es decir $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, al despejar dT_c/dt se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dT_c}{dt} &= - \frac{5R}{\bar{M}} \frac{\mu}{\rho} (T_c - T_s) \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} - \frac{2}{3} \frac{\bar{M} T_c}{\bar{M} - \rho b} \sum_{i=1}^3 (\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt}) \\ &\quad + \frac{2}{3} \frac{\bar{M}}{R} \frac{\mu}{\rho} [2 \sum_{i=1}^3 (\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt})^2 + \lambda_3^2 (a_2^2 - a_1^2)^2 - \frac{2}{3} (\sum_{i=1}^3 (\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt}))^2]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Si $a_2 = a_1$, que es el caso que nos interesa, al reemplazarlo en la ecuación (1.62) teniendo en cuenta que $\nu = \mu/\rho$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dT_c}{dt} &= - \frac{5R}{\bar{M}} \nu (T_c - T_s) (\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2}) - \frac{2}{3} \frac{\bar{M} T_c}{\bar{M} - \rho b} (\frac{2}{a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt}) \\ &\quad + \frac{8}{9} \frac{\bar{M}}{R} \nu (\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt})^2. \end{aligned}$$

Resumiendo, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acoplados que describe la evolución dinámica del esferoide gaseoso es

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} = -2\pi G \rho A_1 a_1 + \frac{2R}{a_1} \frac{T_c - T_s}{\bar{M} - \rho b} + \frac{L_F^2}{a_1^3},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 a_3}{dt^2} &= -2\pi G\rho A_3 a_3 + \frac{2R}{a_3} \frac{T_c - T_s}{\bar{M} - \rho b}, \\
\frac{dT_c}{dt} &= -\frac{5R}{\bar{M}} \nu (T_c - T_s) \left(\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\bar{M} T_c}{\bar{M} - \rho b} \left(\frac{2}{a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} \right) \\
&\quad + \frac{8\bar{M}}{9R} \nu \left(\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} \right)^2,
\end{aligned} \tag{1.63}$$

donde $\rho = 3M/(4\pi a_1^2 a_3)$ y A_i en función de e cuando el esferoide sea oblató, esfera o prolato son las ecuaciones (1.51), (1.53) y (1.54).

Si el gas no es viscoso, $\nu = 0$, entonces el sistema de ecuaciones (1.63) se reduce a

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 a_1}{dt^2} &= -2\pi G\rho A_1 a_1 + \frac{2R}{a_1} \frac{T_c - T_s}{\bar{M} - \rho b} + \frac{L_F^2}{a_1^3}, \\
\frac{d^2 a_3}{dt^2} &= -2\pi G\rho A_3 a_3 + \frac{2R}{a_3} \frac{T_c - T_s}{\bar{M} - \rho b}, \\
\frac{dT_c}{dt} &= -\frac{2}{3} \frac{\bar{M} T_c}{\bar{M} - \rho b} \left(\frac{2}{a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} \right).
\end{aligned} \tag{1.64}$$

2 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES

2.1 Introducción

2.2 Transformación en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de variables adimensionales

2.3 Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales

2.4 Observaciones y conclusiones

2.1 Introducción

En este capítulo se muestran los resultados más interesantes hallados al resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales obtenidos en el capítulo I para diferentes valores de L_F y ν .

Para resolver las ecuaciones diferenciales se utilizará una función de paso adaptativo del Matlab, es decir el paso será variable, con el fin de minimizar los errores de cálculo. Previamente el sistema de ecuaciones debe ser transformado mediante cambios de variables a un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\frac{dx_k}{dt^*} = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad k = 1, 2, \dots, 5$$

donde $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ son funciones de la variable adimensional x_k que dependen del tiempo adimensional t^* .

Los parámetros del esferoide gaseoso, serán aquellos que sean consistentes con las propiedades de la nube Barnard 68.

2.2 Transformación en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de variables adimensionales

Para resolver los sistemas de ecuaciones (1.63) y (1.64) es necesario definir variables y constantes adimensionales que faciliten el cálculo numérico. Estas son:

a) Para los semiejes iguales a_1 y a_2

$$a_1^* = \frac{a_1}{a_1(0)}, \quad (2.1)$$

b) Para el semieje a_3

$$a_3^* = \frac{a_3}{a_1(0)}, \quad (2.2)$$

c) Para el tiempo t

$$t^* = \frac{t}{\tau}, \quad (2.3)$$

d) Para la temperatura central T_c

$$T_c^* = \frac{T_c}{\Theta}, \quad (2.4)$$

e) Para la temperatura en la superficie libre T_s

$$T_s^* = \frac{T_s}{\Theta}, \quad (2.5)$$

f) Para la constante del gas b

$$b^* = \frac{b}{B}, \quad (2.6)$$

g) Para el momento angular específico L_F

$$L_F^* = \frac{L_F}{\Lambda}, \quad (2.7)$$

h) Para el coeficiente de viscosidad cinemático ν

$$\nu^* = \frac{\nu}{v}, \quad (2.8)$$

donde se define las siguientes magnitudes como referencia

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \sqrt{\frac{4 a_1^3(0)}{3 GM}}, \\ \Theta &\equiv \frac{3 GM \bar{M}}{8 a_1(0) R}, \\ B &\equiv \frac{4\pi a_1^3(0) \bar{M}}{3 M}, \\ \Lambda &\equiv \sqrt{\frac{3}{4} GM a_1(0)}, \\ v &\equiv \frac{9}{32} \sqrt{3 GM a_1(0)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se emplean estas definiciones, porque son las que se usaron en una revista (ver pag. 526 de [5]).

Como $a_2 = a_1$, al reemplazarlo en la ecuación (1.22) (empleando las variables adimensionales (2.1) y (2.2)) esta se convierte en

$$\rho = \frac{3M}{4\pi a_1^3(0) a_1^{*2} a_3^*}. \quad (2.10)$$

Usando las variables y constantes adimensionales y la ecuación (2.10) en el sistema de ecuaciones diferenciales (1.63) esta se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_1^*}{dt^{*2}} &= -\frac{2A_1}{a_1^* a_3^*} + \frac{a_1^* a_3^*}{a_1^{*2} a_3^* - b^*} (T_c^* - T_s^*) + \frac{L_F^{*2}}{a_1^{*3}}, \\ \frac{d^2 a_3^*}{dt^{*2}} &= -\frac{2A_3}{a_1^{*2}} + \frac{a_1^{*2}}{a_1^{*2} a_3^* - b^*} (T_c^* - T_s^*), \\ \frac{dT_c^*}{dt^*} &= -\frac{45}{16} \nu^* \left(\frac{2}{a_1^{*2}} + \frac{1}{a_3^{*2}} \right) (T_c^* - T_s^*) - \frac{2}{3} \frac{a_1^{*2} a_3^*}{a_1^{*2} a_3^* - b^*} \left(\frac{2}{a_1^*} \frac{da_1^*}{dt^*} + \frac{1}{a_3^*} \frac{da_3^*}{dt^*} \right) T_c^* \\ &\quad + \nu^* \left(\frac{1}{a_1^*} \frac{da_1^*}{dt^*} - \frac{1}{a_3^*} \frac{da_3^*}{dt^*} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Recordemos que las integrales que definen A_i son:

Si $a_3^* < a_1^*$, es decir para un esferoide oblató, se obtiene

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsen(e) - \frac{1}{e^2} + 1, \\ A_3 &= \frac{2}{e^2} - \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsen(e), \end{aligned} \quad (2.12)$$

siendo

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a_3^*}{a_1^*}\right)^2}. \quad (2.13)$$

Si $a_3^* = a_1^*$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 2/3. \quad (2.14)$$

Si $a_3^* > a_1^*$, es decir para un esferoide prolato, se obtiene

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \text{Ln}\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right), \\ A_3 &= \frac{1 - e^2}{e^3} \text{Ln}\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right) - \frac{2}{e^2} + 2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

siendo

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a_1^*}{a_3^*}\right)^2}. \quad (2.16)$$

Ahora se transforma los sistemas de ecuaciones diferenciales (1.63) y (1.64) en sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden haciendo los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned} a_1^* &= x_1, \\ a_3^* &= x_2, \\ T_c^* &= x_3, \\ \frac{da_1^*}{dt^*} &= x_4, \\ \frac{da_3^*}{dt^*} &= x_5. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Empleando los cambios de variables (2.17) entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (2.11) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx_1}{dt^*} = x_4, \quad (2.18)$$

$$\frac{dx_2}{dt^*} = x_5, \quad (2.19)$$

$$\frac{dx_3}{dt^*} = -\frac{45}{16} \nu^* \left(\frac{2}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) (x_3 - T_s^*) - \frac{2}{3} \frac{x_1^2 x_2 x_3}{x_1^2 x_2 - b^*} \left(\frac{2x_4}{x_1} + \frac{x_5}{x_2}\right) + \nu^* \left(\frac{x_4}{x_1} - \frac{x_5}{x_2}\right)^2 \quad (2.20)$$

$$\frac{dx_4}{dt^*} = -\frac{2A_1}{x_1 x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2 - b^*} (x_3 - T_s^*) + \frac{L_F^{*2}}{x_1^3}, \quad (2.21)$$

$$\frac{dx_5}{dt^*} = -\frac{2A_3}{x_1^2} + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_2 - b^*} (x_3 - T_s^*). \quad (2.22)$$

Analogamente si el gas no es viscoso, $\nu^* = 0$, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (2.11) se transforma en:

$$\frac{dx_1}{dt^*} = x_4, \quad (2.23)$$

$$\frac{dx_2}{dt^*} = x_5, \quad (2.24)$$

$$\frac{dx_3}{dt^*} = -\frac{2}{3} \frac{x_1^2 x_2 x_3}{x_1^2 x_2 - b^*} \left(\frac{2x_4}{x_1} + \frac{x_5}{x_2} \right), \quad (2.25)$$

$$\frac{dx_4}{dt^*} = -\frac{2A_1}{x_1 x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2 - b^*} (x_3 - T_s^*) + \frac{L_F^{*2}}{x_1^3}, \quad (2.26)$$

$$\frac{dx_5}{dt^*} = -\frac{2A_3}{x_1^2} + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_2 - b^*} (x_3 - T_s^*). \quad (2.27)$$

2.3 Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales

Los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de un gas viscoso (del (2.18) al (2.22)) y de un gas no viscoso (del (2.23) al (2.27)) se resuelven numéricamente empleando dos programas hechos en Matlab llamados funciones y gasinterestelar cuyos códigos de programación se detallan en el apéndice E (ver pag. 90) y una función de paso adaptativo del Matlab llamado ode15s (la tolerancia del error relativo y absoluto que emplea el ode15s son 10^{-5} y 10^{-6} respectivamente).

En la tabla 2.1 se muestran los valores de la masa molar \bar{M} , la temperatura crítica T_{cr} , la presión crítica p_{cr} del He y del H₂ así como sus constantes a y b usadas en la simulación (estas dos últimas son calculadas empleando la ecuación (1.7)).

Tabla 2.1

Gas	\bar{M} (g/mol)	T_{cr} (K)	p_{cr} (atm)	a (Pa m ⁶ /mol ²)	b (m ³ /mol)
He	4,003	5,26	2,26	0,00352417	0,0000238774
H ₂	2,016	33,3	12,8	0,0249386	0,0000266898

En la tabla 2.2 se muestran los valores de la masa M^1 , el radio R , la temperatura central inicial $T_c(0)$ y la temperatura superficial T_s de la nube Barnard 68 detallada en el apéndice F (ver pag. 93), en la pag. 379 de [7] y en la pag. 1308 de [8].

Tabla 2.2

M (kg)	R (UA)	T_s (K)	$T_c(0)$ (K)
$4,1769 \cdot 10^{30}$	12500	6,50	10,0

Considerando que dos esferoides, uno de He y otro de H₂, tienen los mismos valores de masa, radio, temperatura central y temperatura superficial dados en la tabla 2.2. Haciendo $a_1(0)=R$ y empleando los valores de las tablas 2.1 y 2.2 se hallan los valores de las magnitudes características de los esferoides, dadas en (2.9), las cuales son mostrados en la tabla 2.3.

¹ $M = 2,1M_{\odot}$ (M_{\odot} :masa del sol= $1,989 \cdot 10^{30}$ kg)

Tabla 2.3

Gas	τ (años)	Θ (K)	B (m ³ /mol)	Λ (m ² /s)	ν (m ² /s)
He	177227	26,912	$2,62498 \cdot 10^{13}$	$6,25224 \cdot 10^{17}$	$3,51689 \cdot 10^{17}$
H ₂	177227	13,5535	$1,322 \cdot 10^{13}$	$6,25224 \cdot 10^{17}$	$3,51689 \cdot 10^{17}$

En la tabla 2.4 se presentan los valores adimensionales de las condiciones iniciales de los esferoides de He y de H₂ así como las constantes b^* y T_s^* . Estas serán usadas para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias, pero se tomaran valores diferentes de L_F^* y ν^{*1} .

Tabla 2.4

Gas	$a_1^*(0)$	$a_3^*(0)$	$T_c^*(0)$	$\frac{da_1^*}{dt^*}(0)$	$\frac{da_3^*}{dt^*}(0)$	b^*	T_s^*
He	1	0,99	0,371581	0	0	$9,09623 \cdot 10^{-19}$	0,241528
H ₂	1	0,99	0,737817	0	0	$2,01889 \cdot 10^{-18}$	0,479581

A continuación se presentan 12 casos, 6 son del He y 6 del H₂. Para cada caso que se va a analizar se muestran cinco figuras: la primera muestra el semieje a_1^* en función del tiempo t^* , la segunda el semieje a_3^* en función del tiempo t^* , la tercera la temperatura central T_c^* en función del tiempo t^* , la cuarta la razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^* y la quinta el semieje a_3^* en función del semieje a_1^* . Las observaciones y conclusiones se muestran en las paginas 52, 53 y 54.

En el primer caso de cada gas, se considera sin viscosidad y un movimiento de rotación inicialmente lento.

¹El orden de ν^* que se emplea es la razón entre el valor de ν dado en la pag. 132 de [9] y el valor de ν dado en la tabla 2.3.

Simulaciones para el gas de He

Caso 1 $L_F^* = 10^{-3}$ $\nu^* = 0$

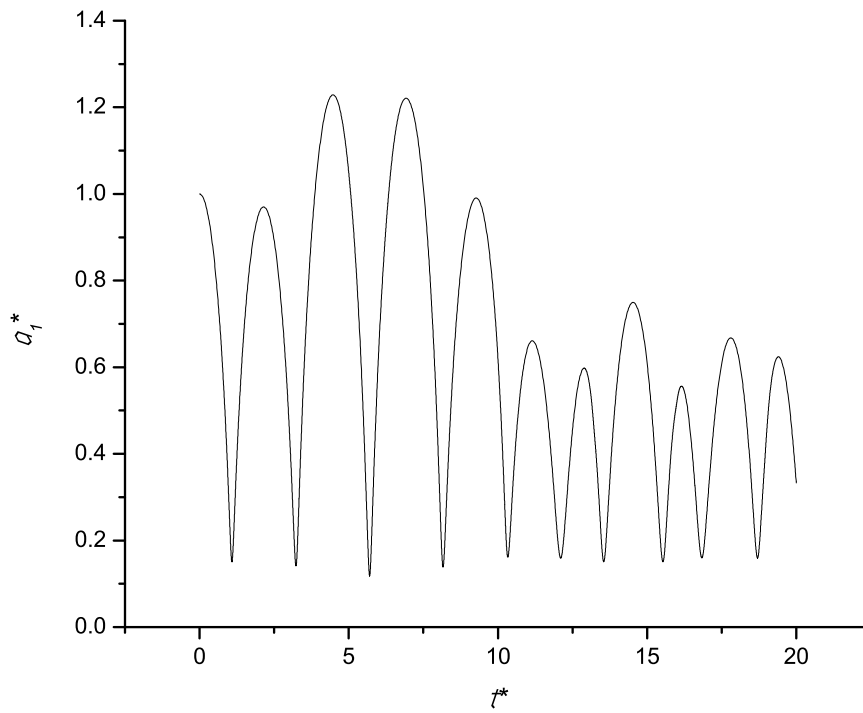


Figura 2.1: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

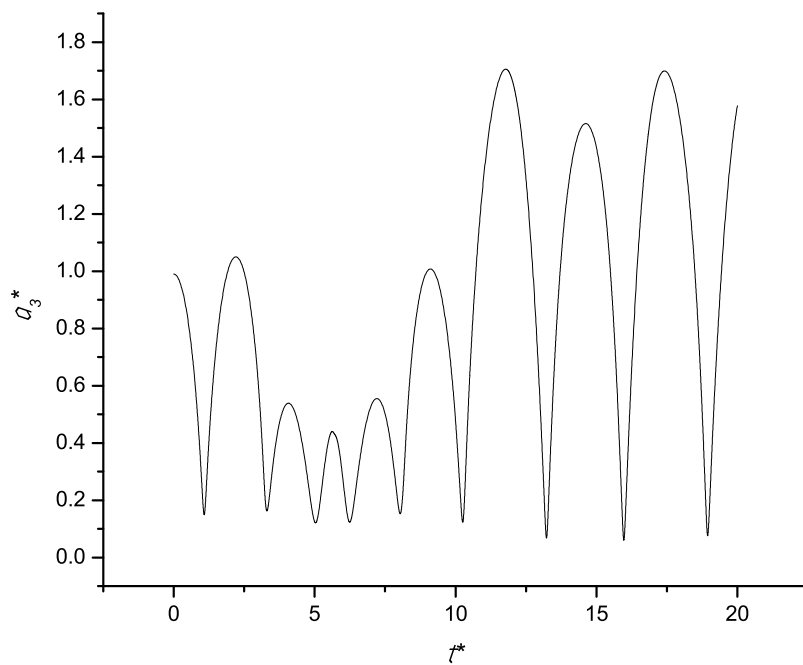


Figura 2.2: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

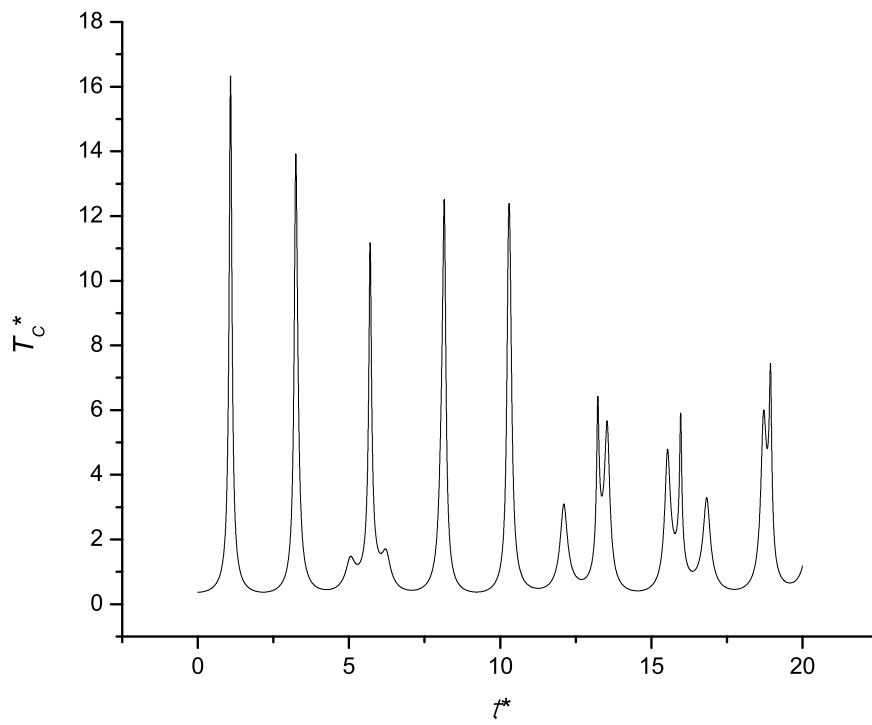


Figura 2.3: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

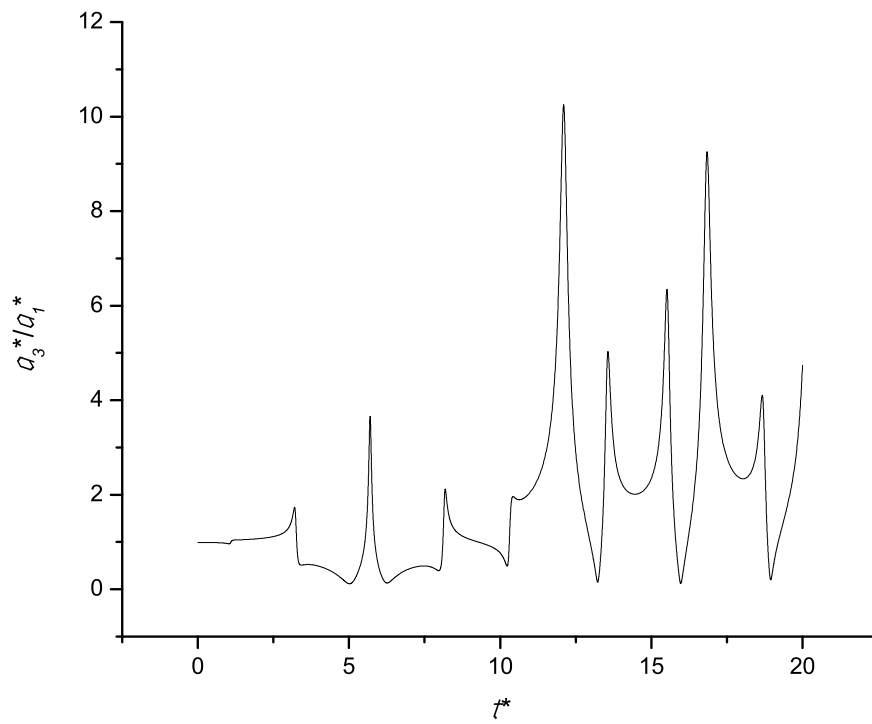


Figura 2.4: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

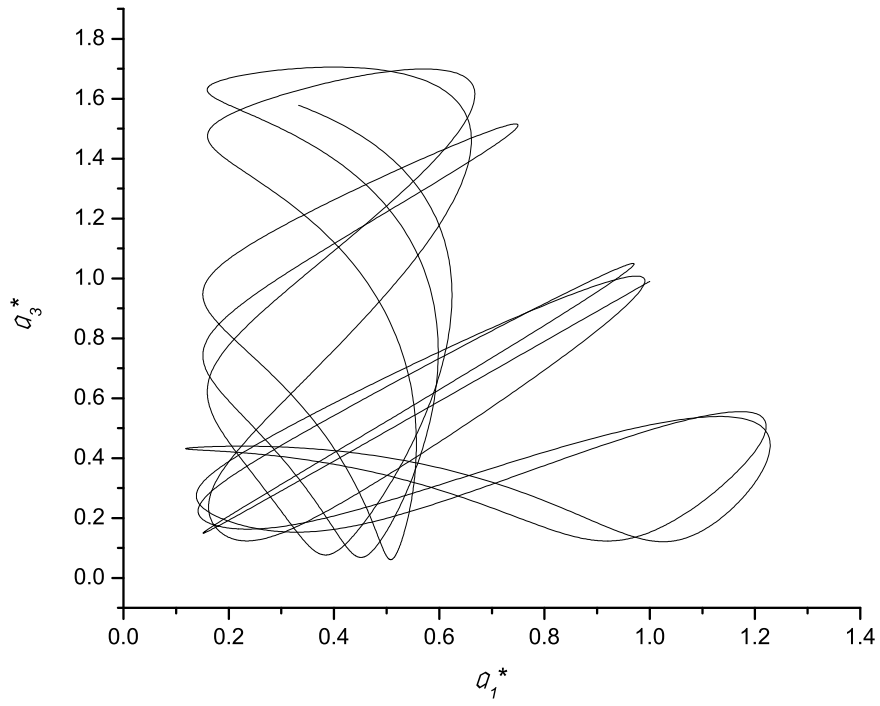


Figura 2.5: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 2 $L_F^*=1,5$ $\nu^*=0$

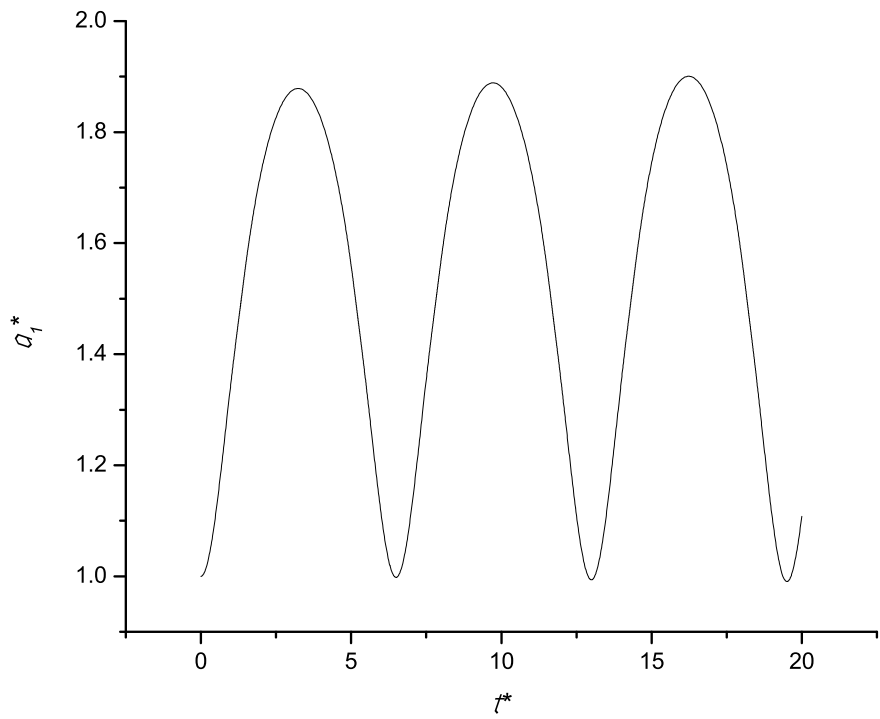


Figura 2.6: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

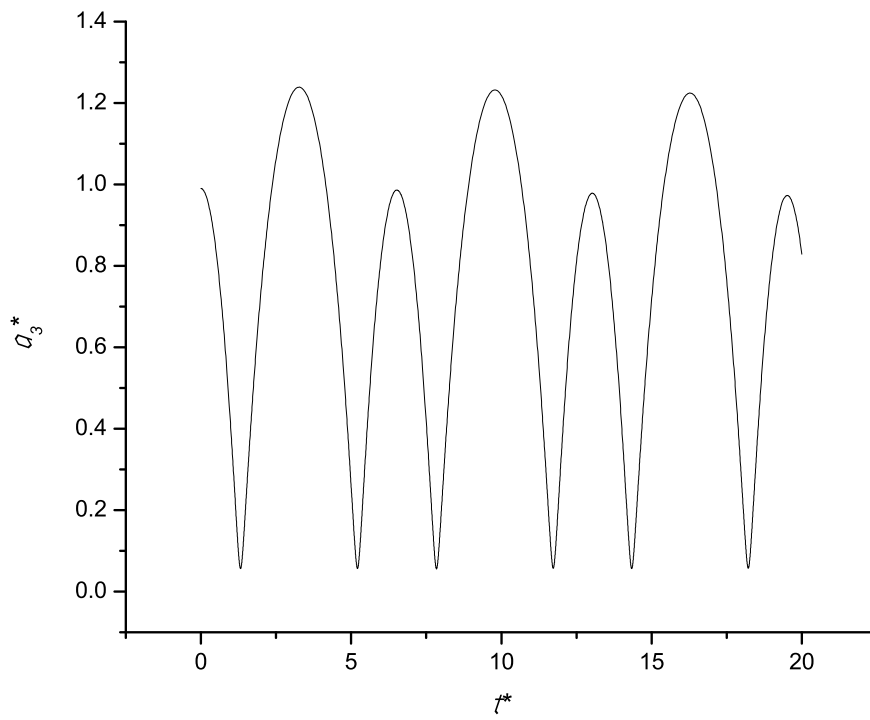


Figura 2.7: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

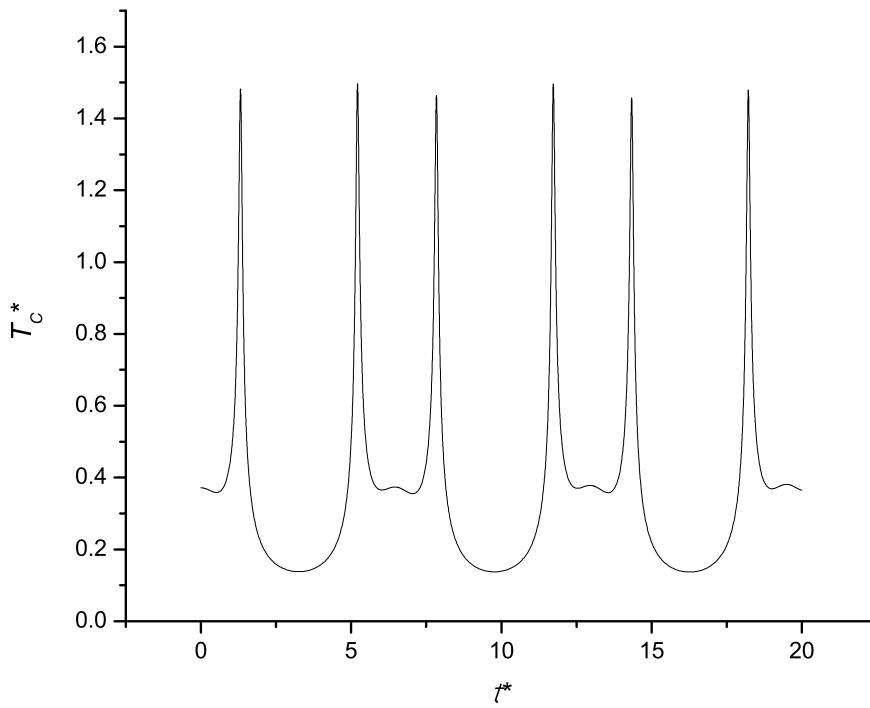


Figura 2.8: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

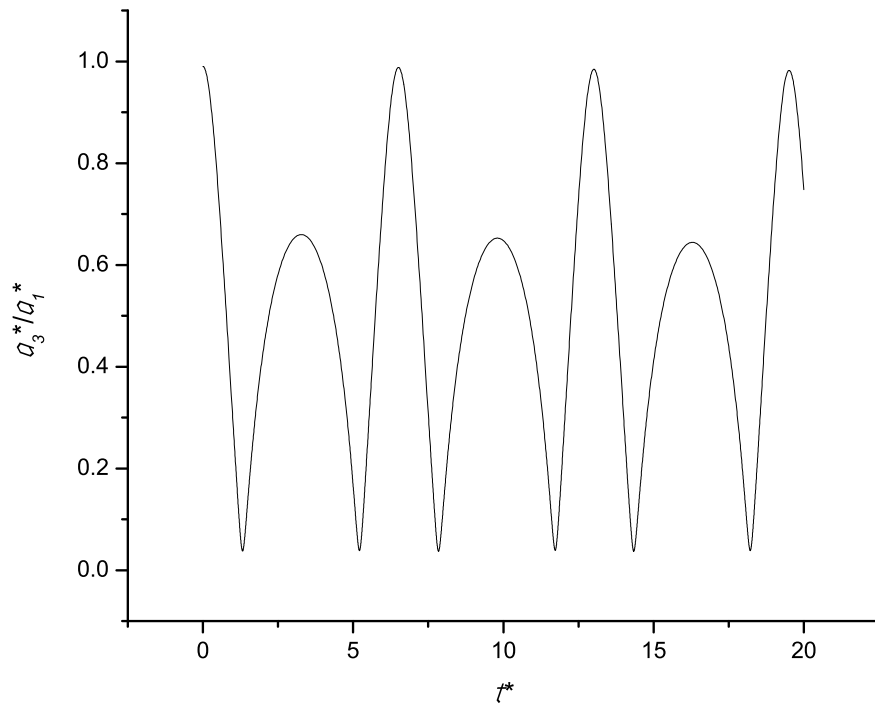


Figura 2.9: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

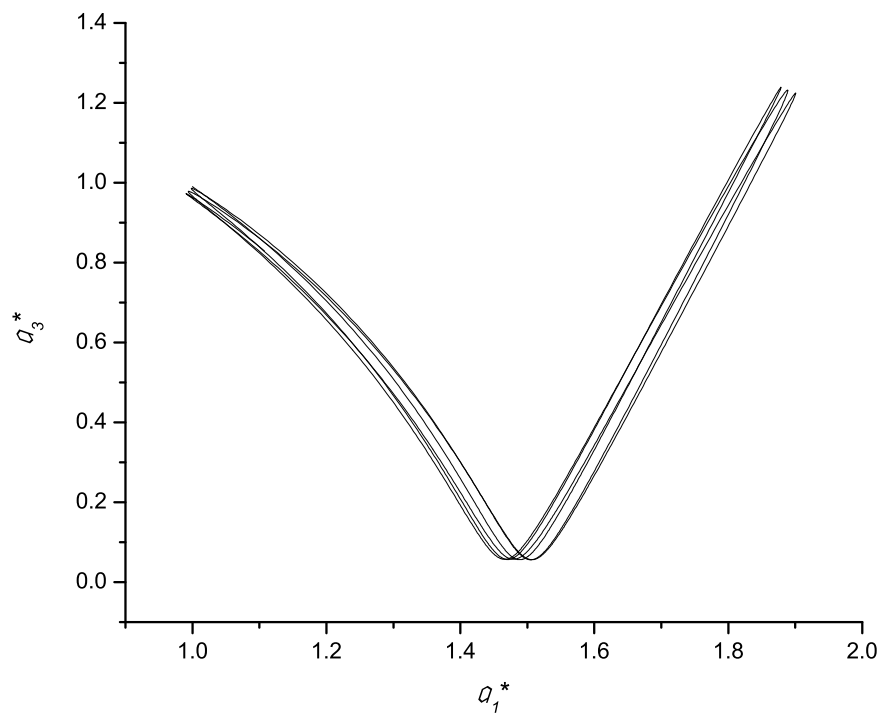


Figura 2.10: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 3 $L_F^*=3$ $\nu^*=0$

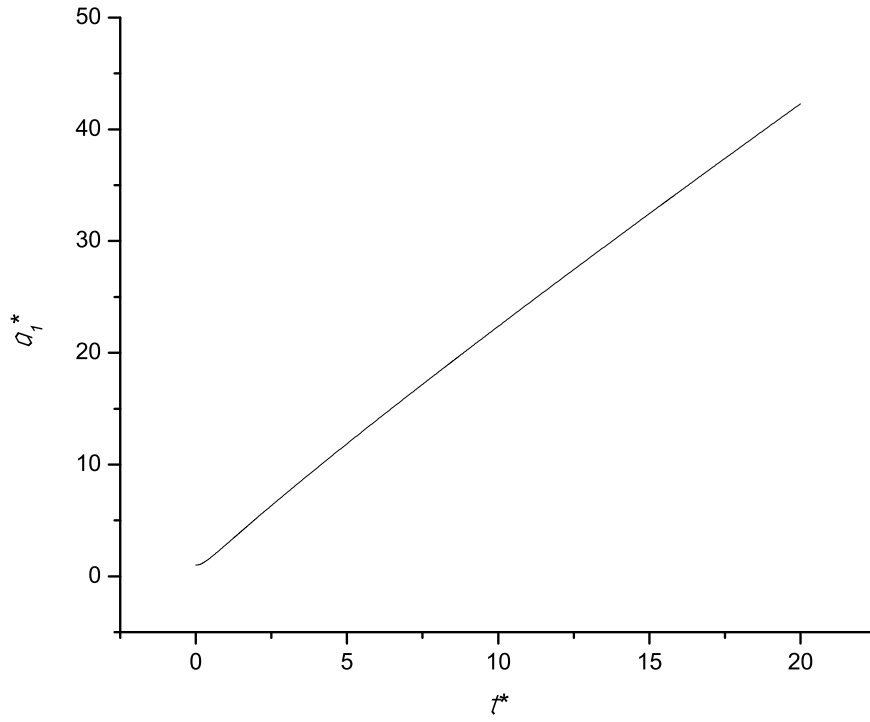


Figura 2.11: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

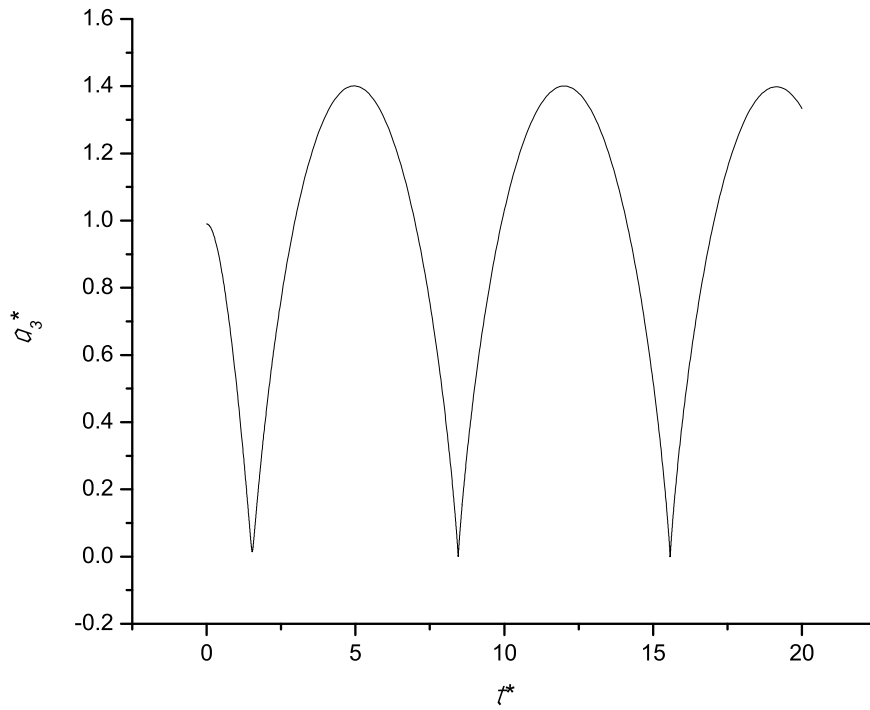


Figura 2.12: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

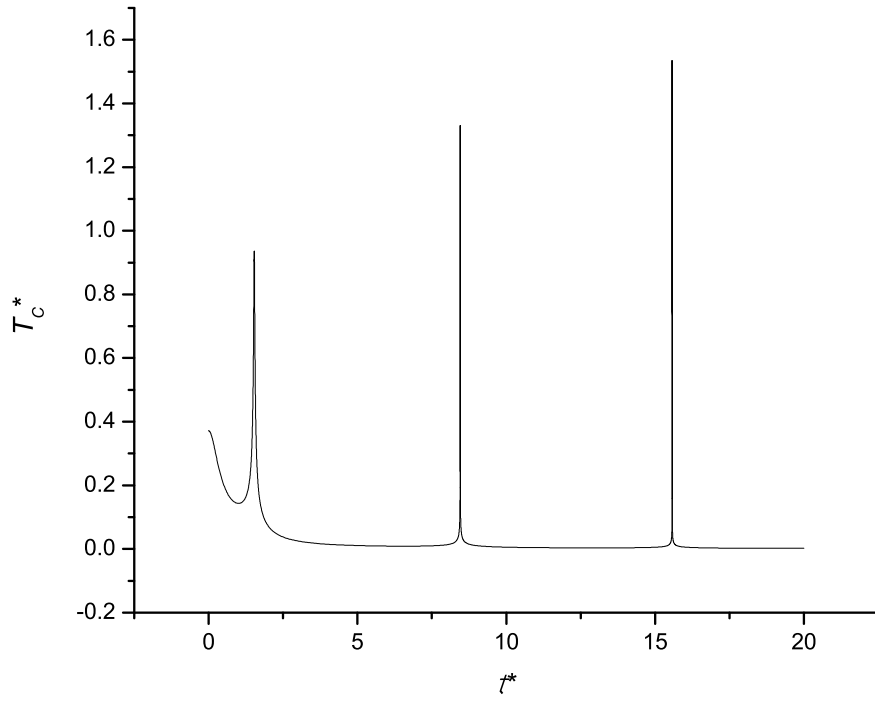


Figura 2.13: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

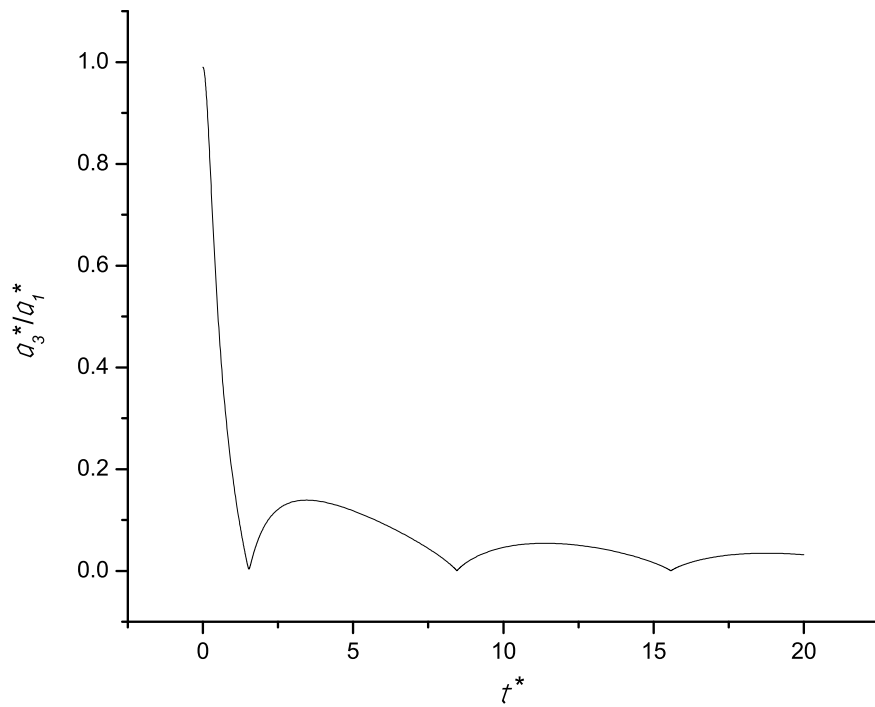


Figura 2.14: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

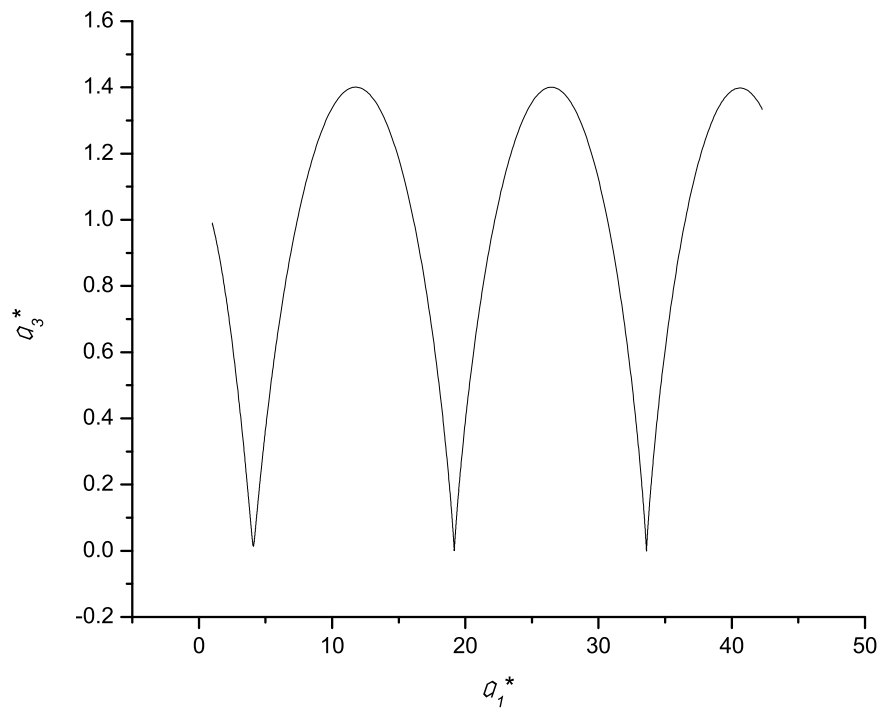


Figura 2.15: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 4 $L_F^* = 10^{-3}$ $\nu^* = 10^{-5}$

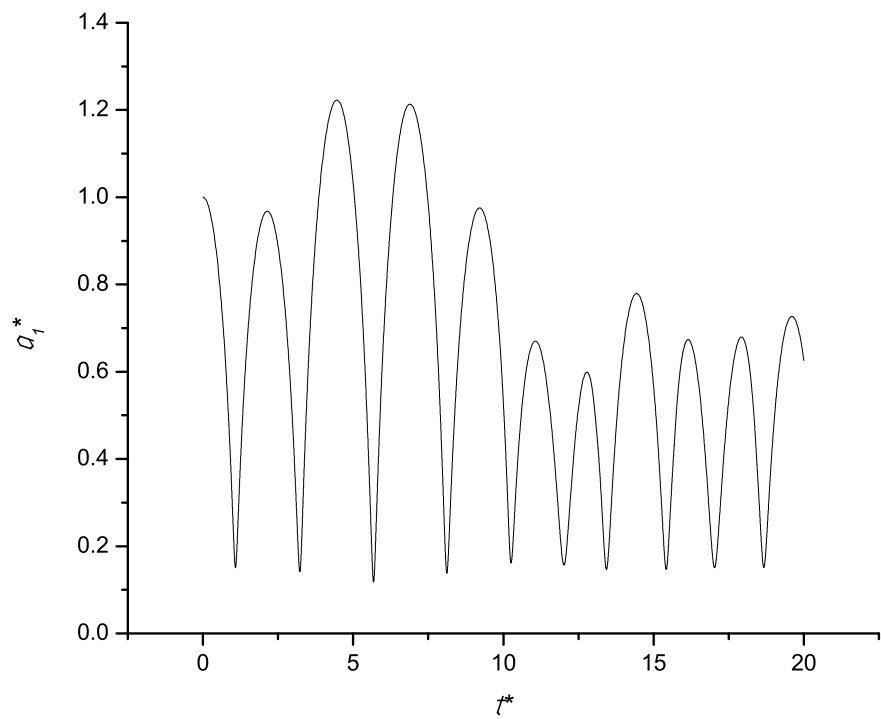


Figura 2.16: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

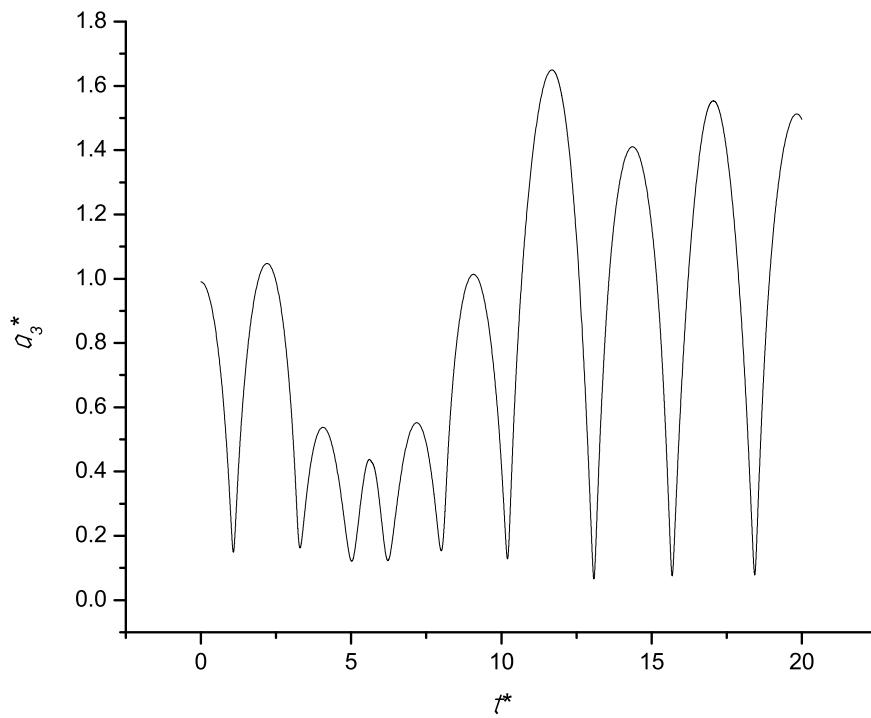


Figura 2.17: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

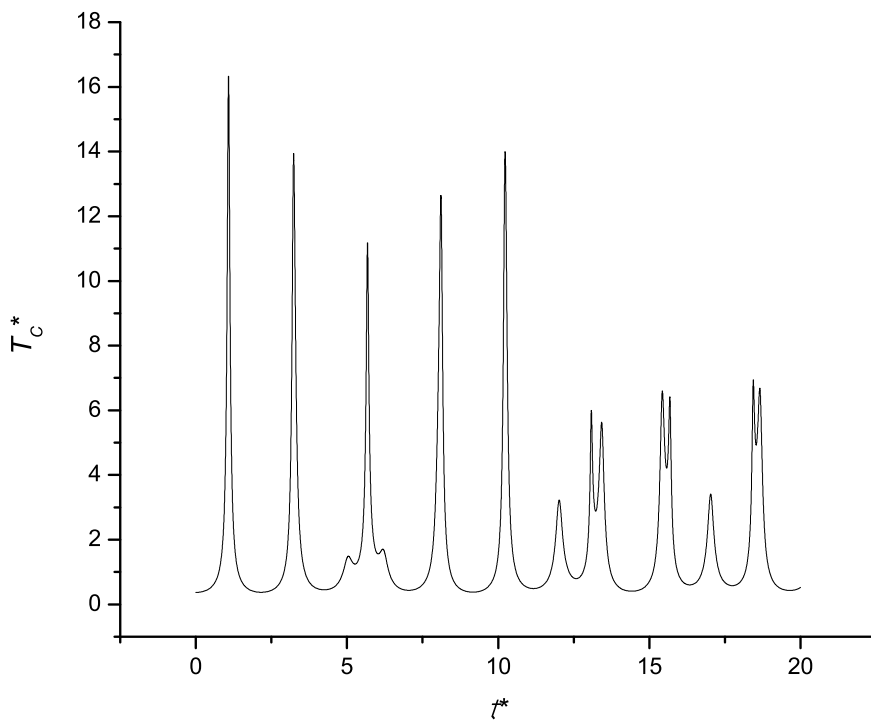


Figura 2.18: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

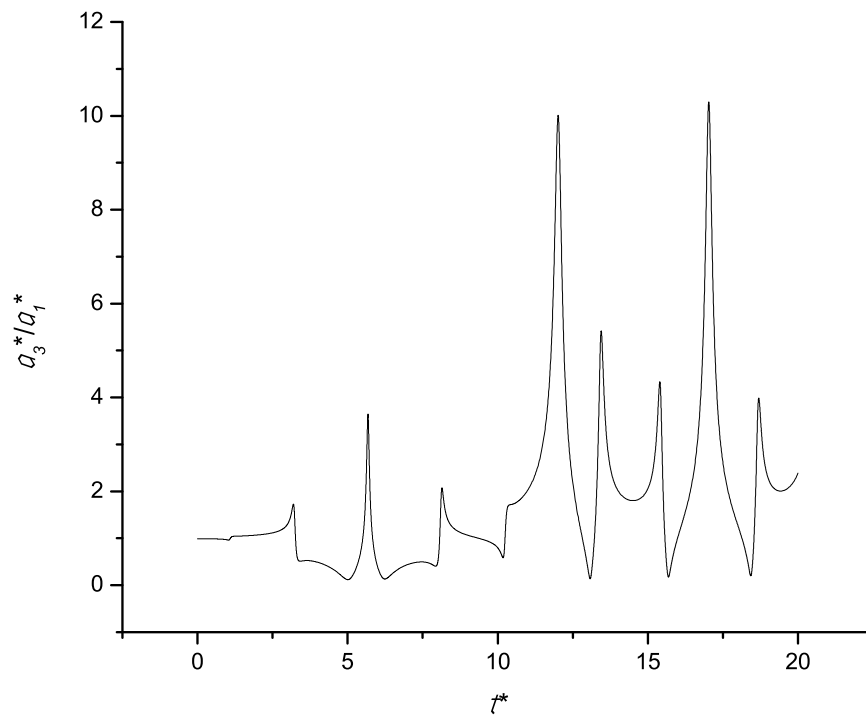


Figura 2.19: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

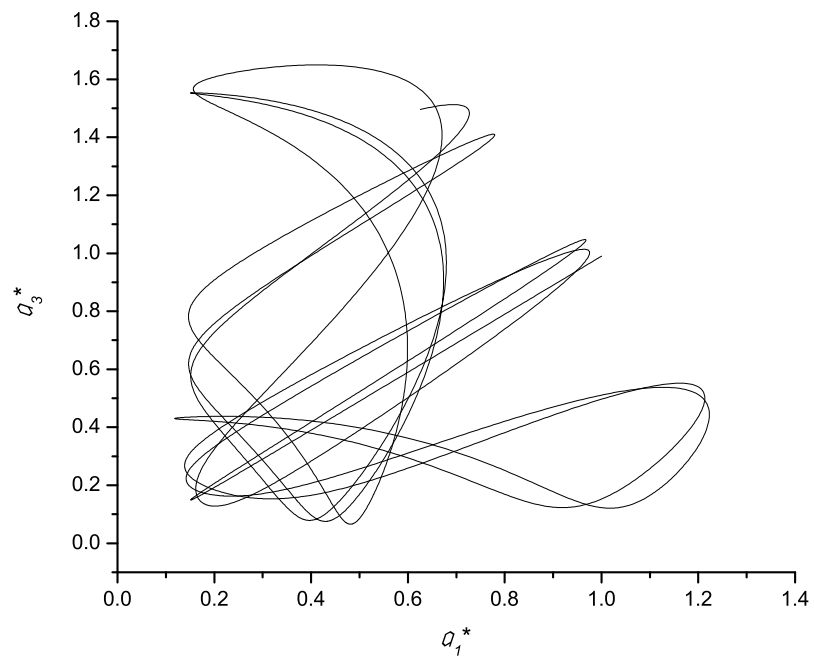


Figura 2.20: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 5 $L_F^*=1,5$ $\nu^*=10^{-5}$

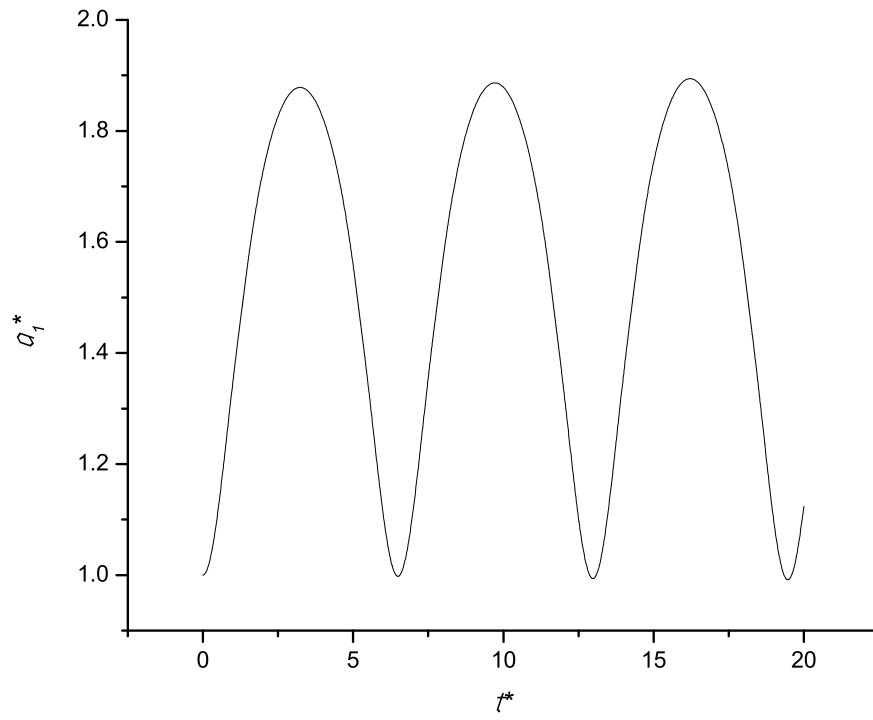


Figura 2.21: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

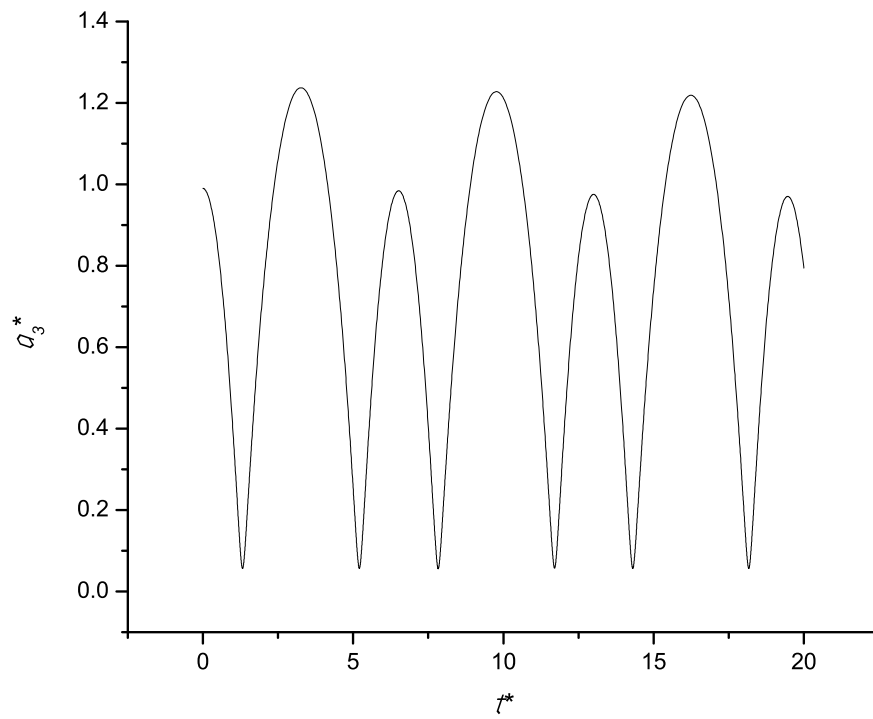


Figura 2.22: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

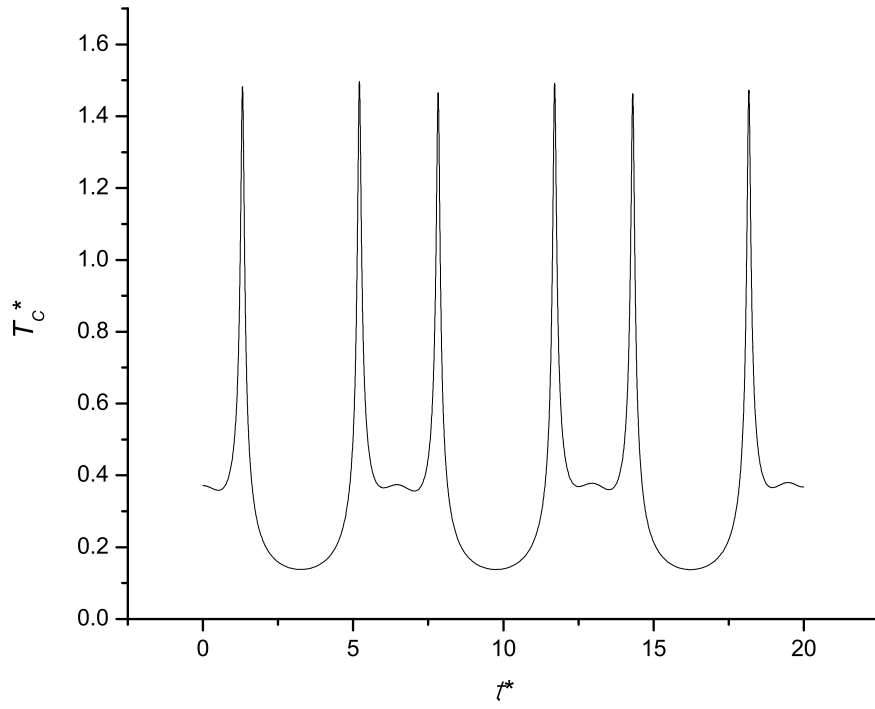


Figura 2.23: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

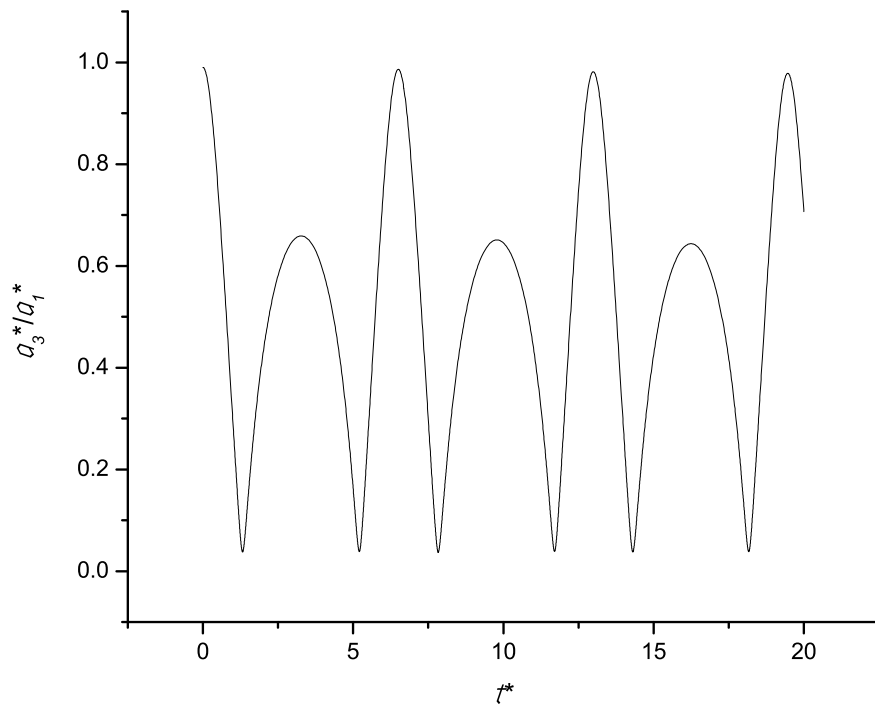


Figura 2.24: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

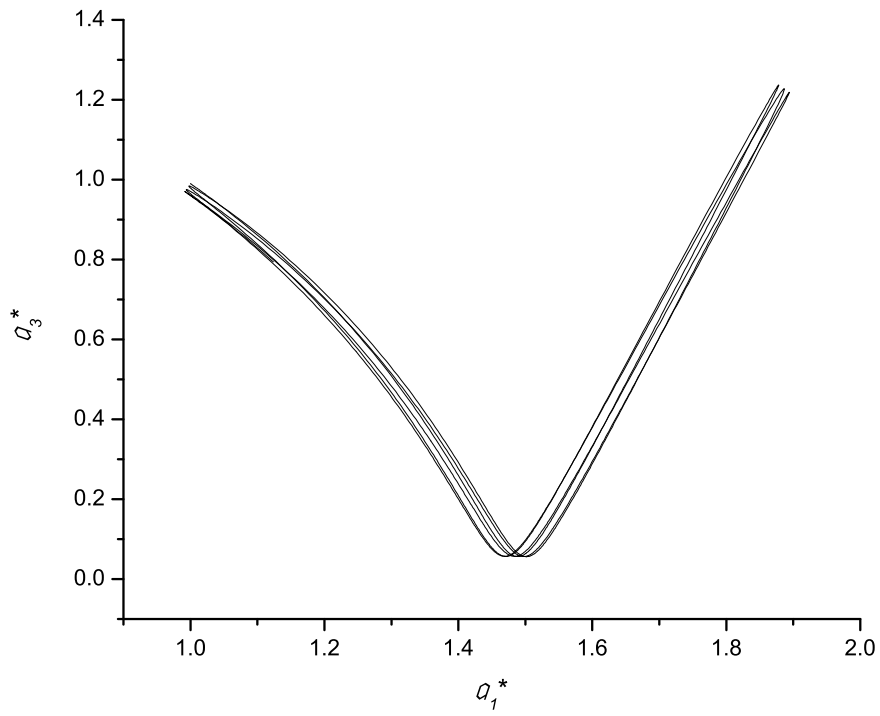


Figura 2.25: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 6 $L_F^*=3$ $\nu^*=10^{-5}$

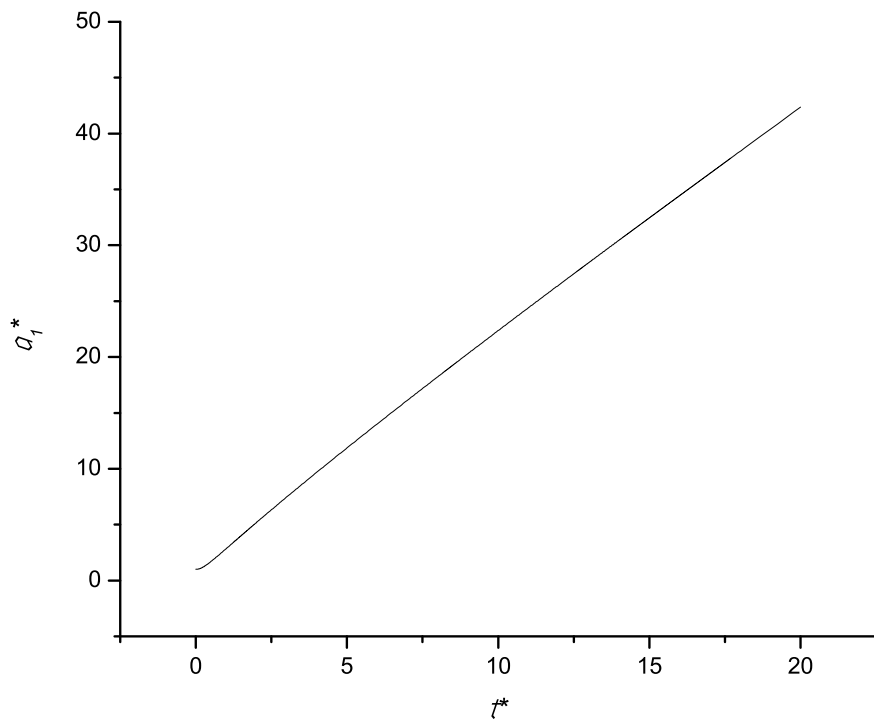


Figura 2.26: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

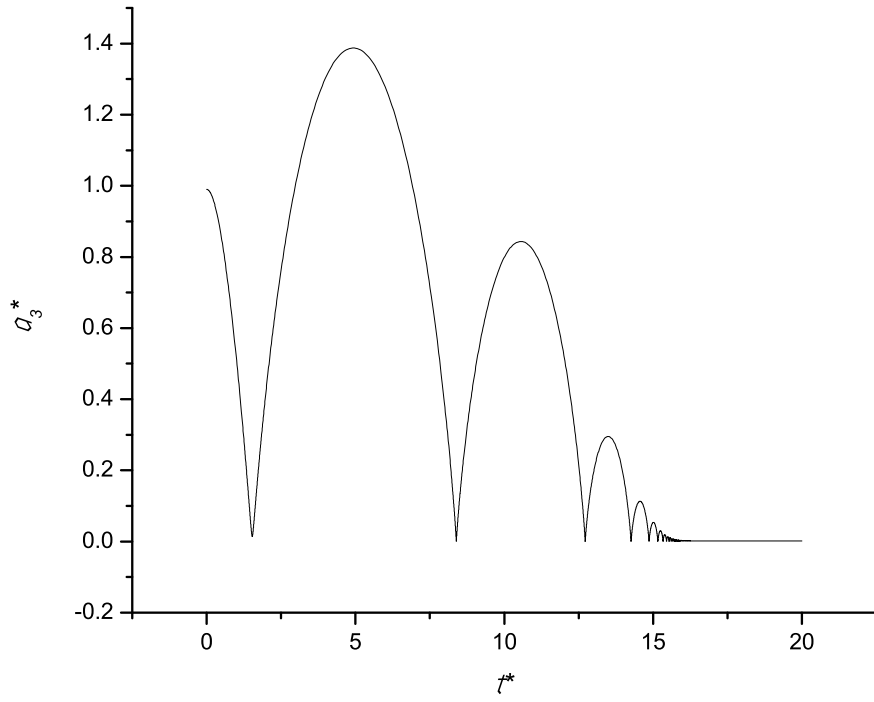


Figura 2.27: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

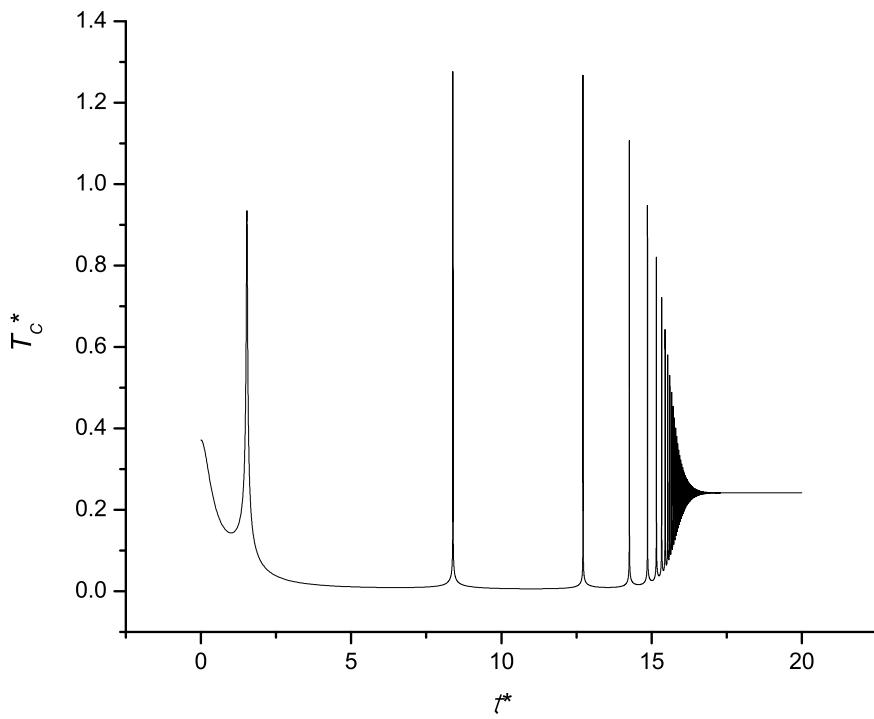


Figura 2.28: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

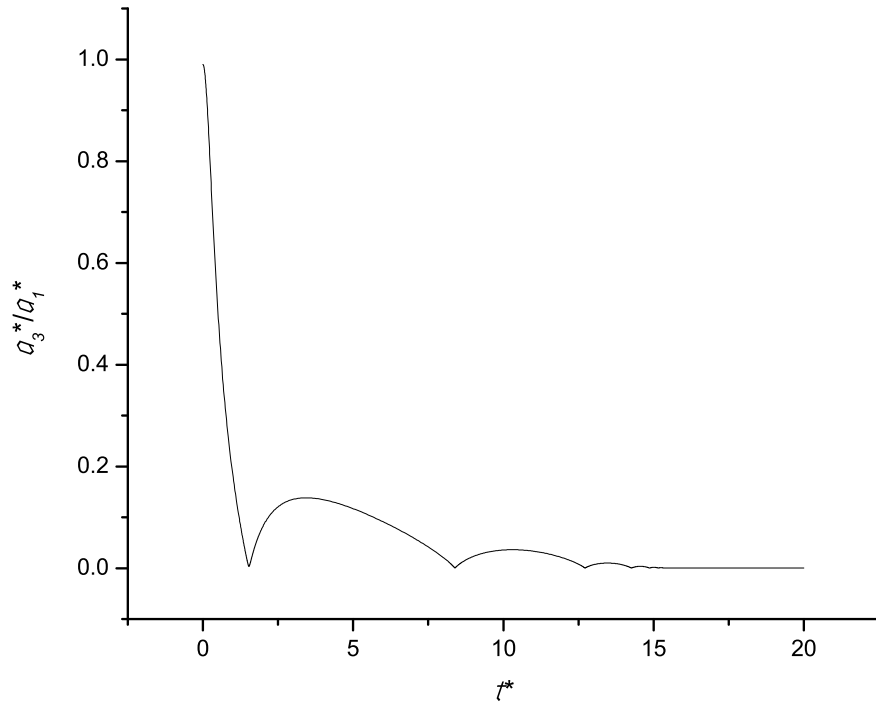


Figura 2.29: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

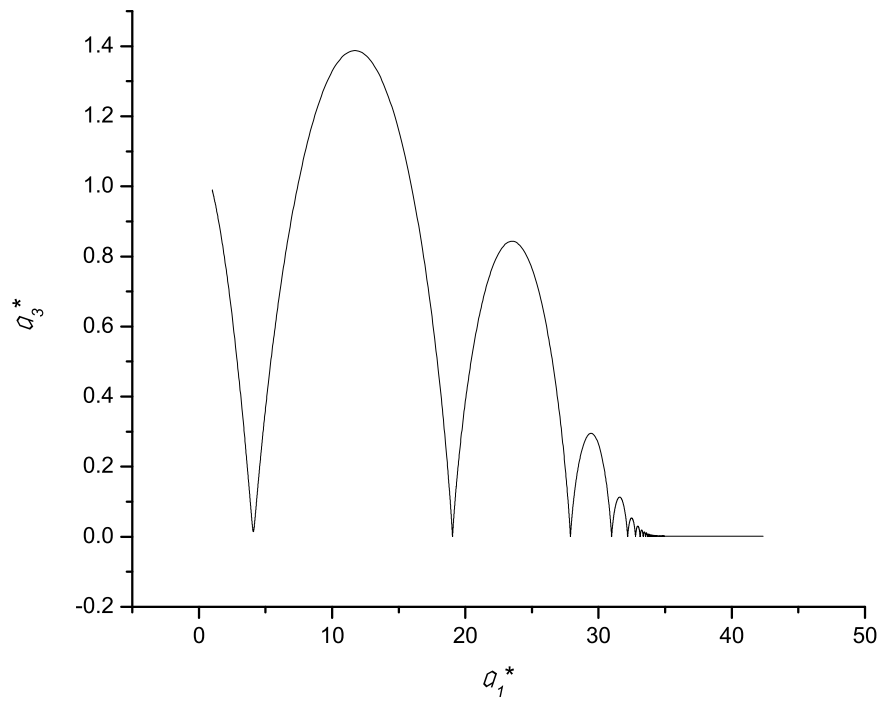


Figura 2.30: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Simulaciones para el gas de H₂

Caso 7 $L_F^* = 10^{-3}$ $\nu^* = 0$

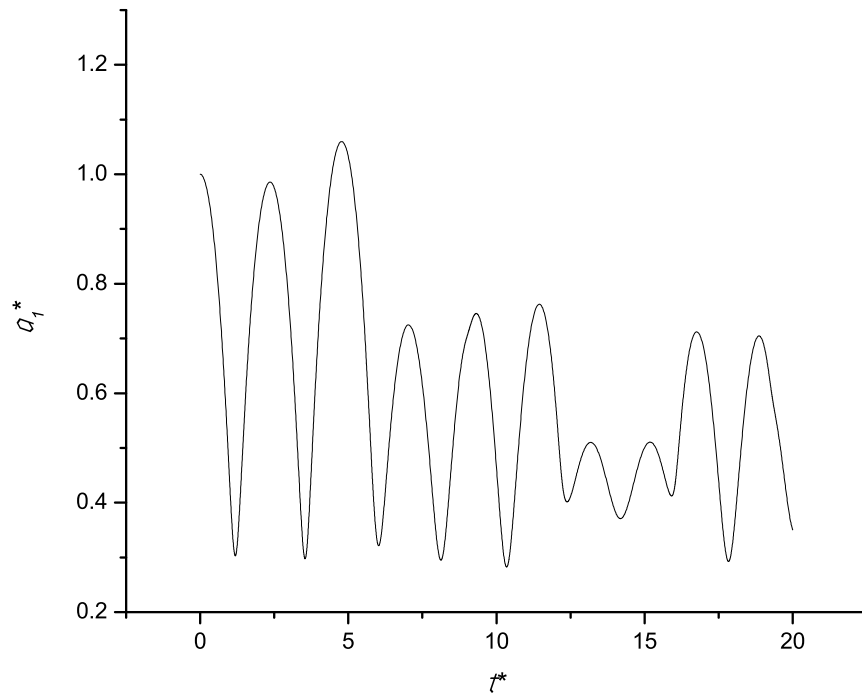


Figura 2.31: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

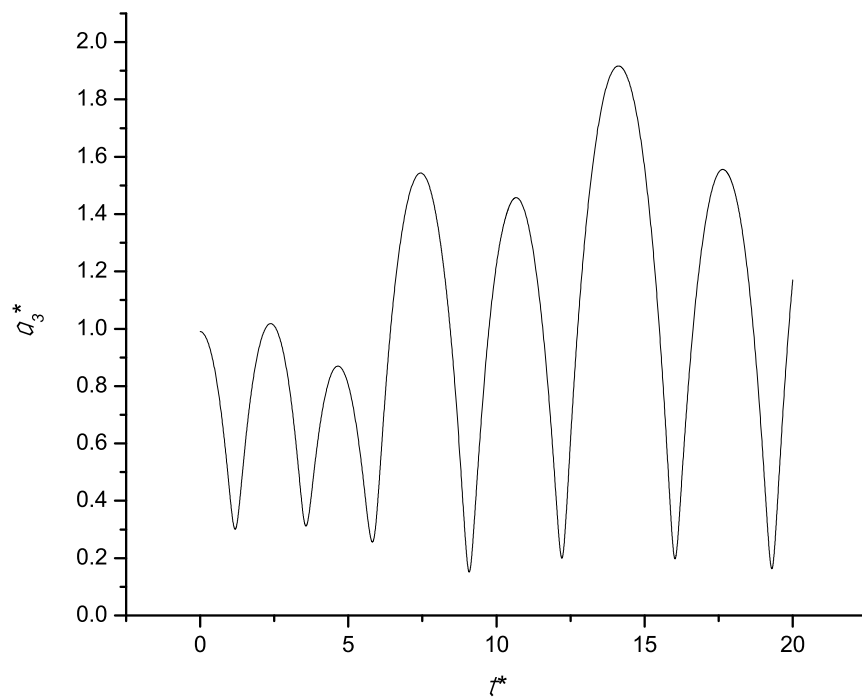


Figura 2.32: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

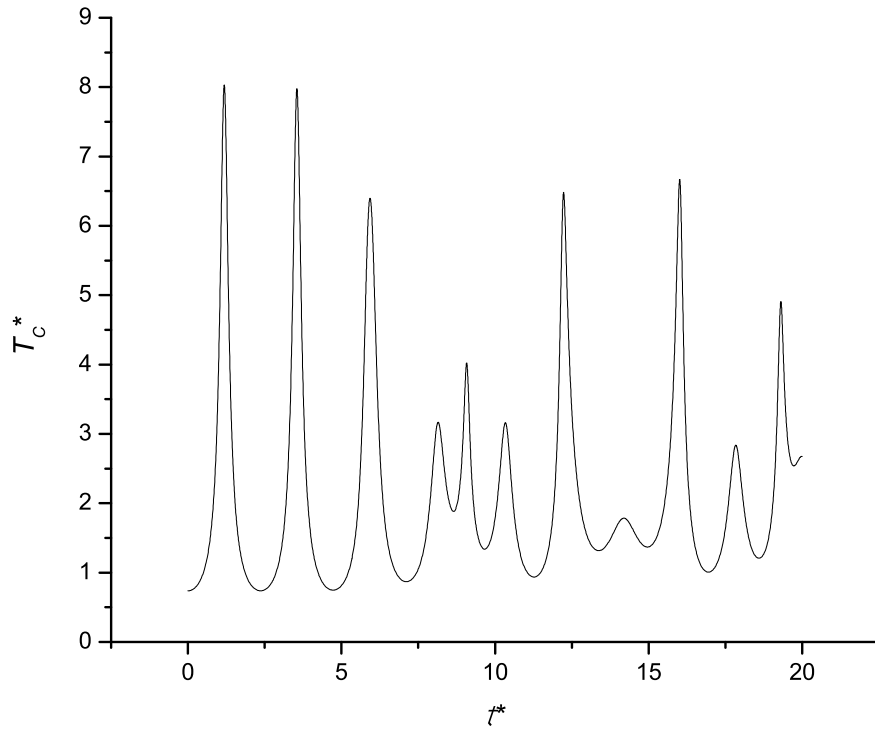


Figura 2.33: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

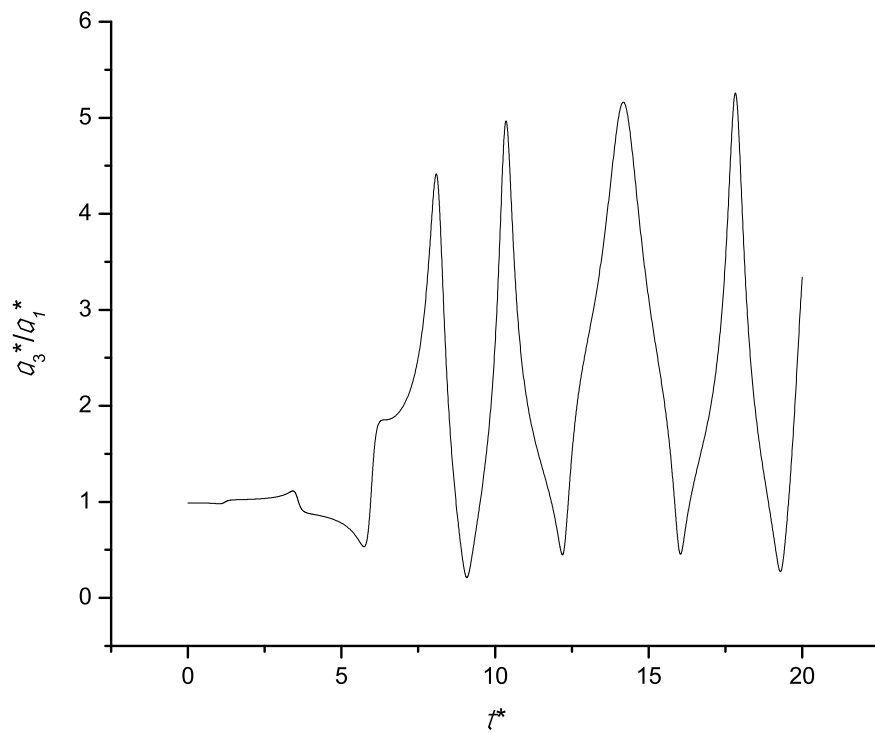


Figura 2.34: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

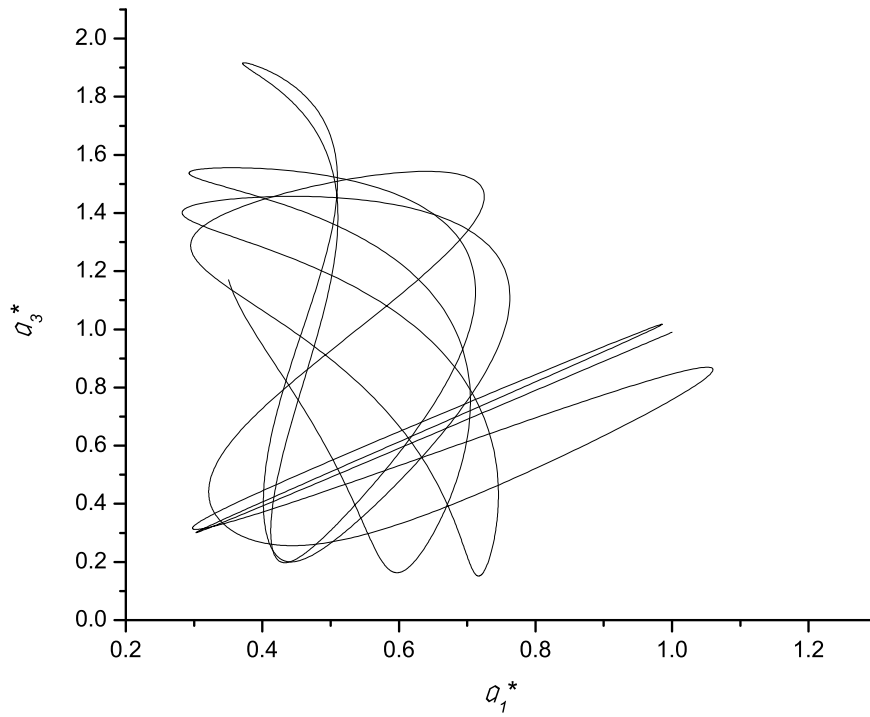


Figura 2.35: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 8 $L_F^*=1,5$ $\nu^*=0$

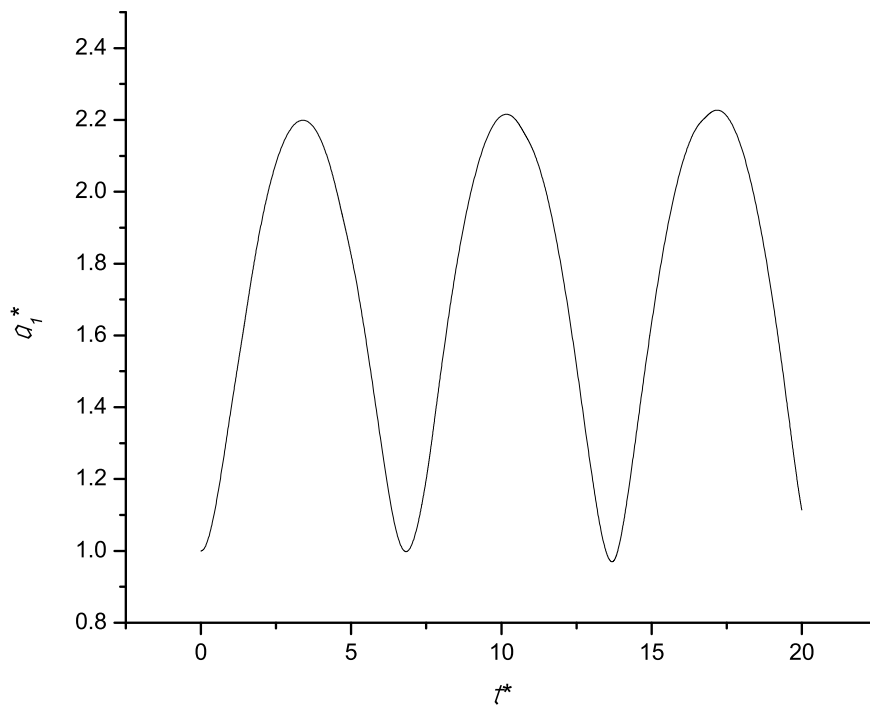


Figura 2.36: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

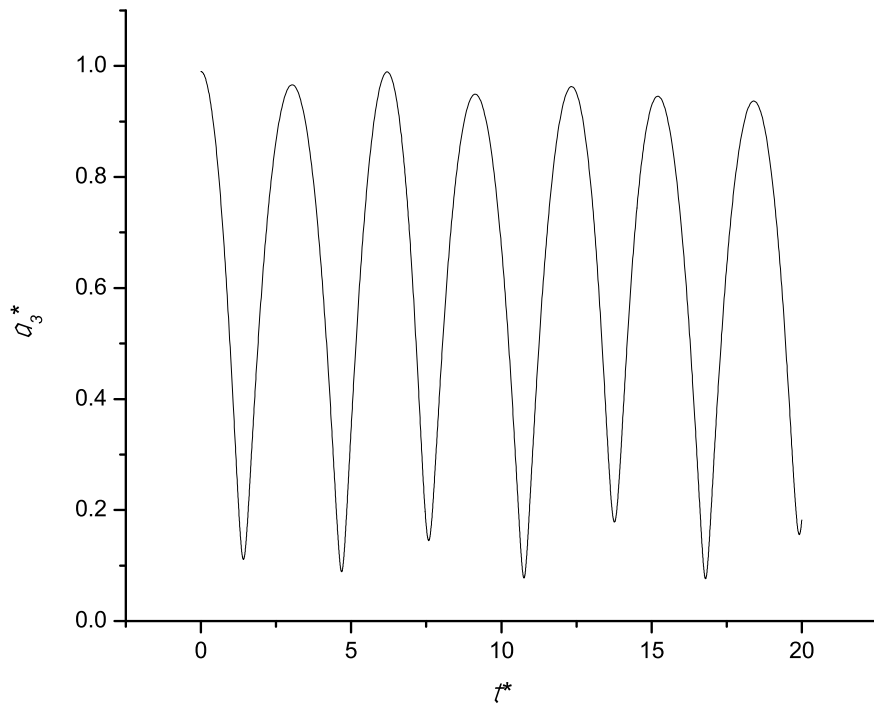


Figura 2.37: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

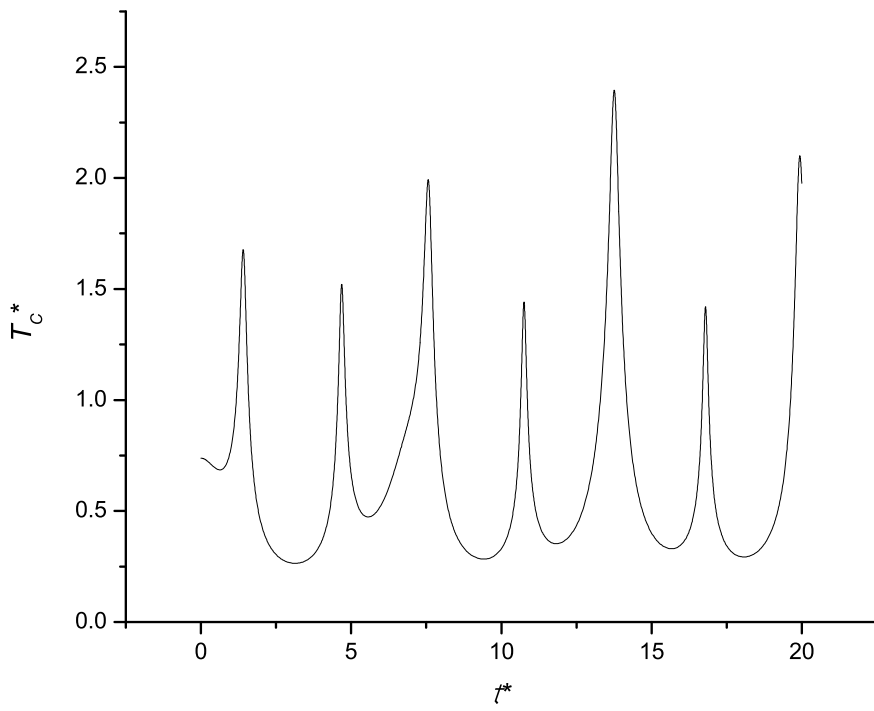


Figura 2.38: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

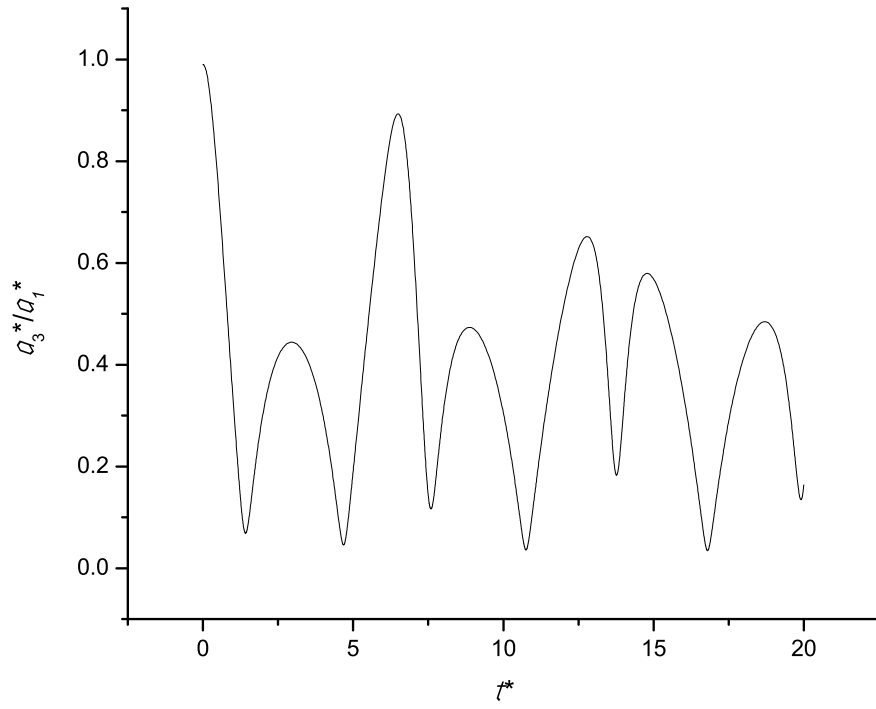


Figura 2.39: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

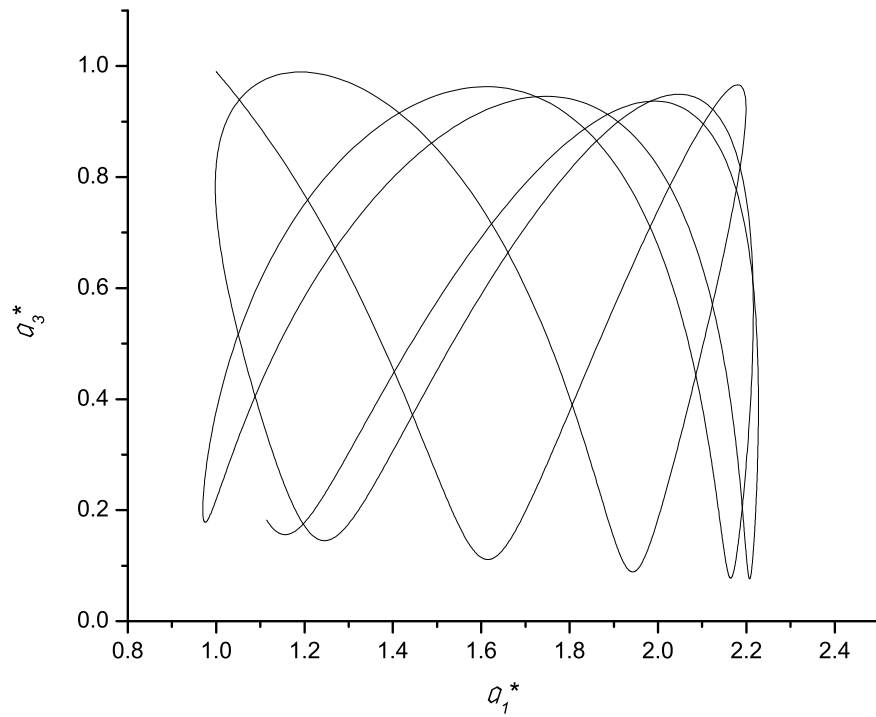


Figura 2.40: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 9 $L_F^*=3$ $\nu^*=0$

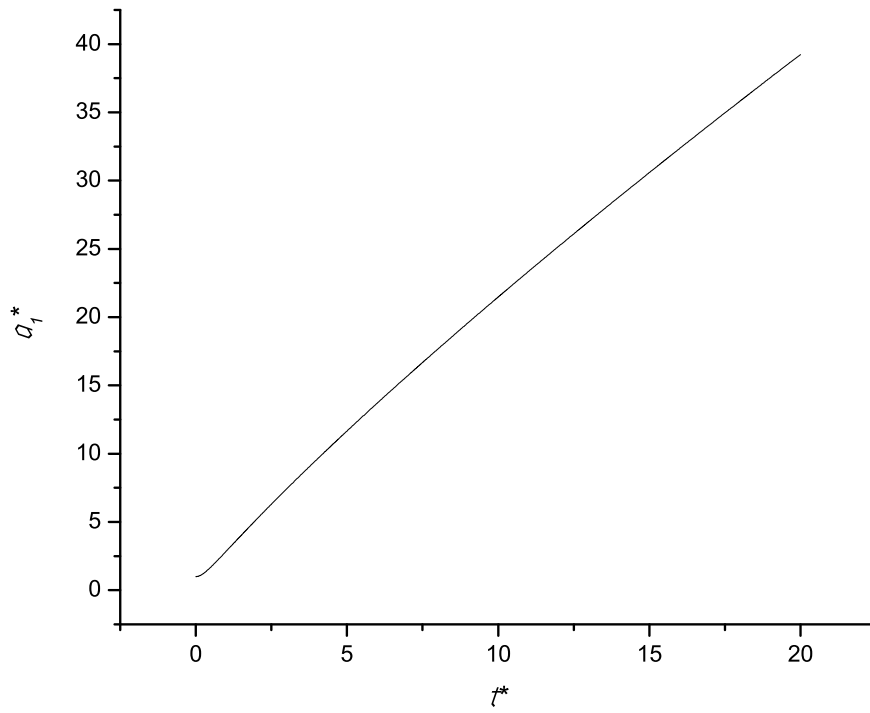


Figura 2.41: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

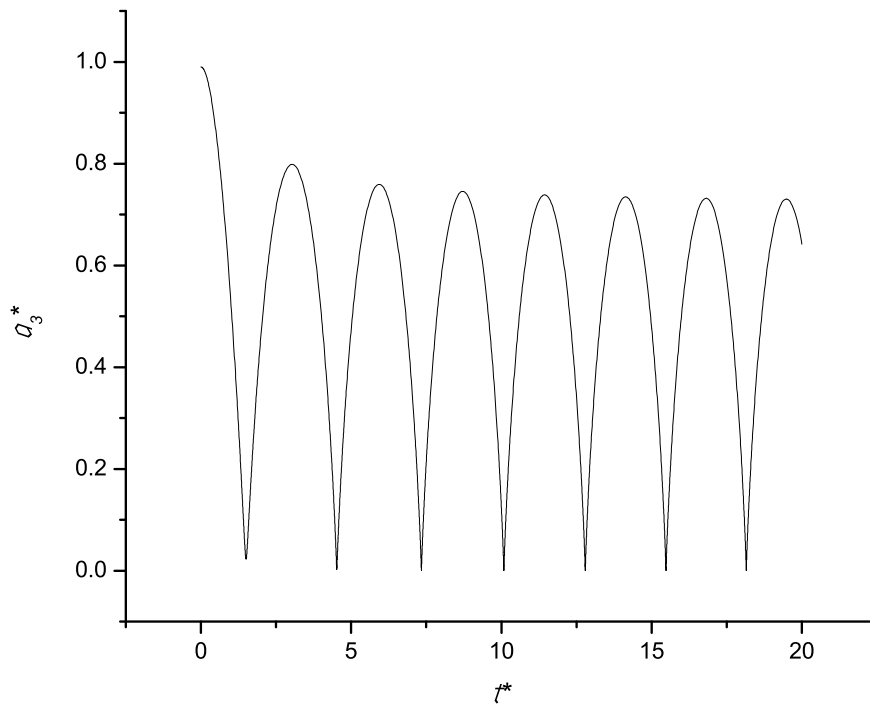


Figura 2.42: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

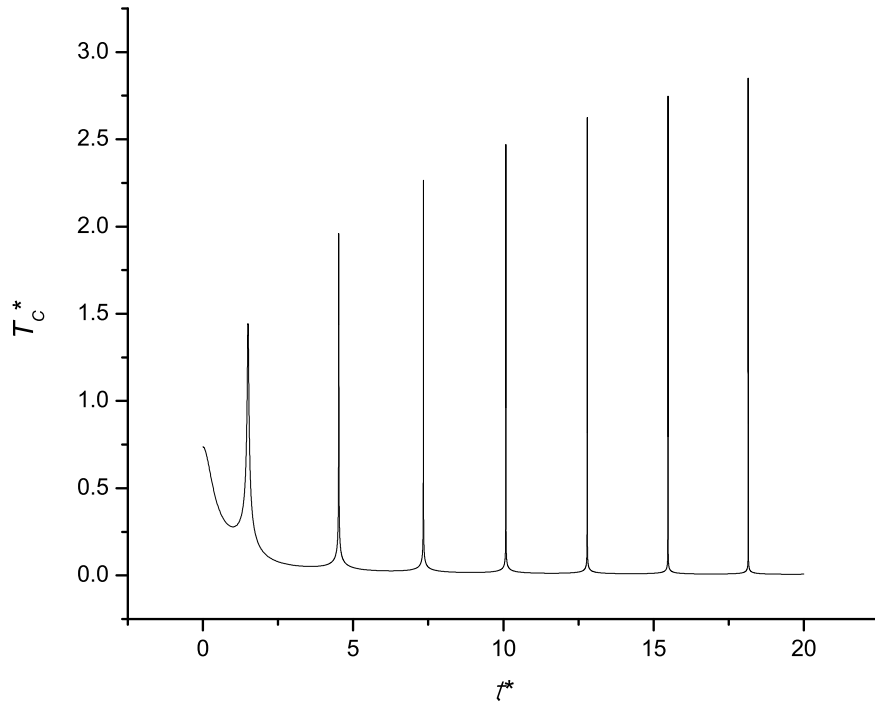


Figura 2.43: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

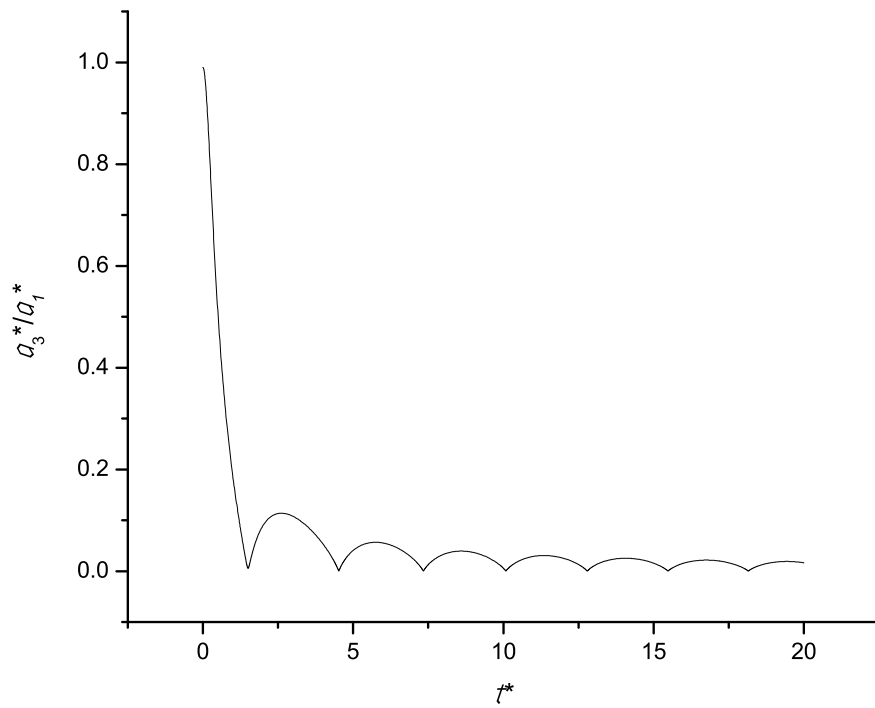


Figura 2.44: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

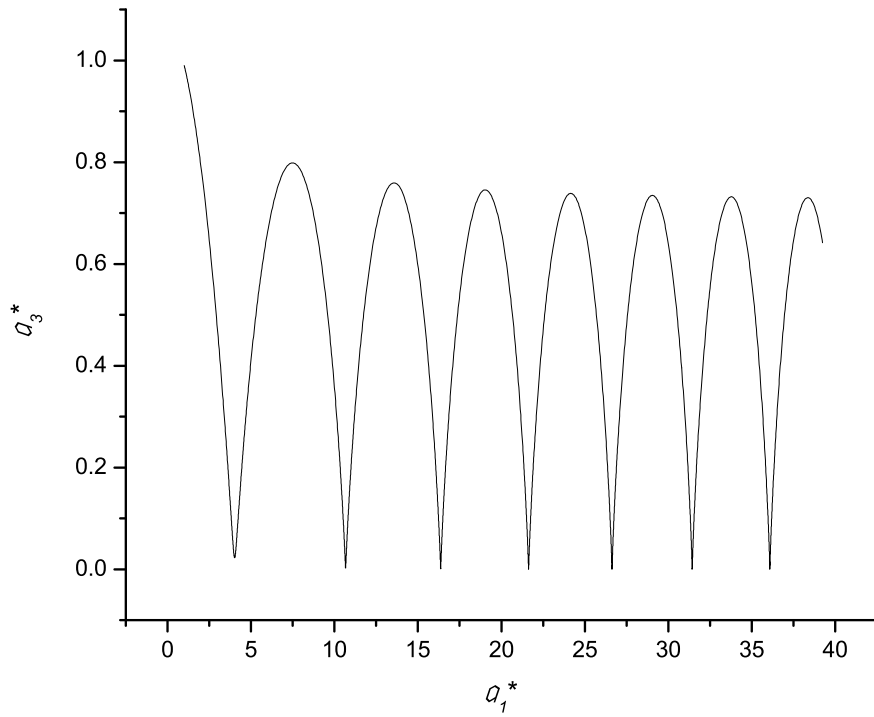


Figura 2.45: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 10 $L_F^* = 10^{-3}$ $\nu^* = 10^{-5}$

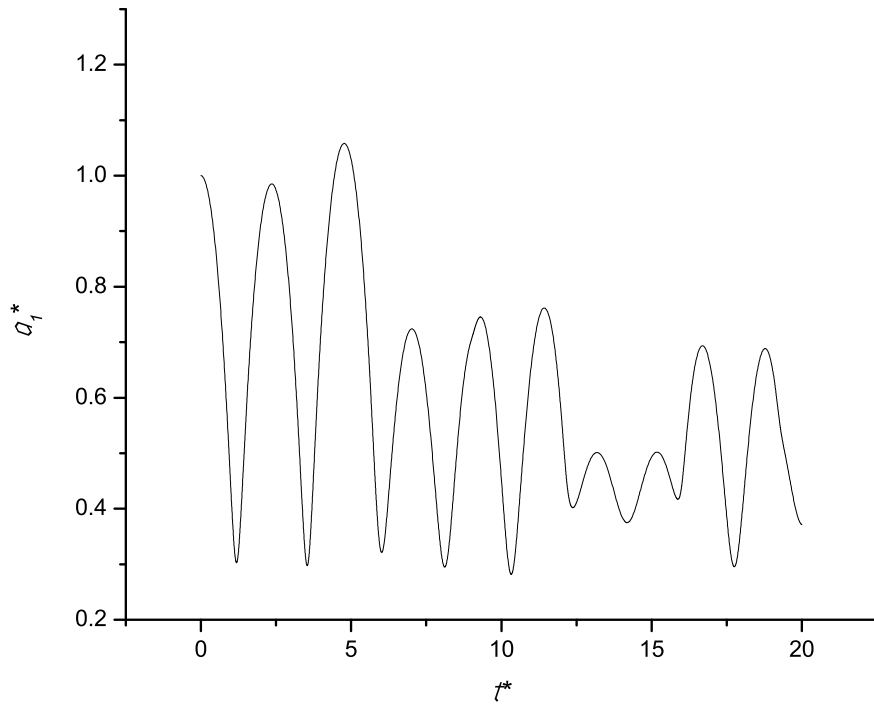


Figura 2.46: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

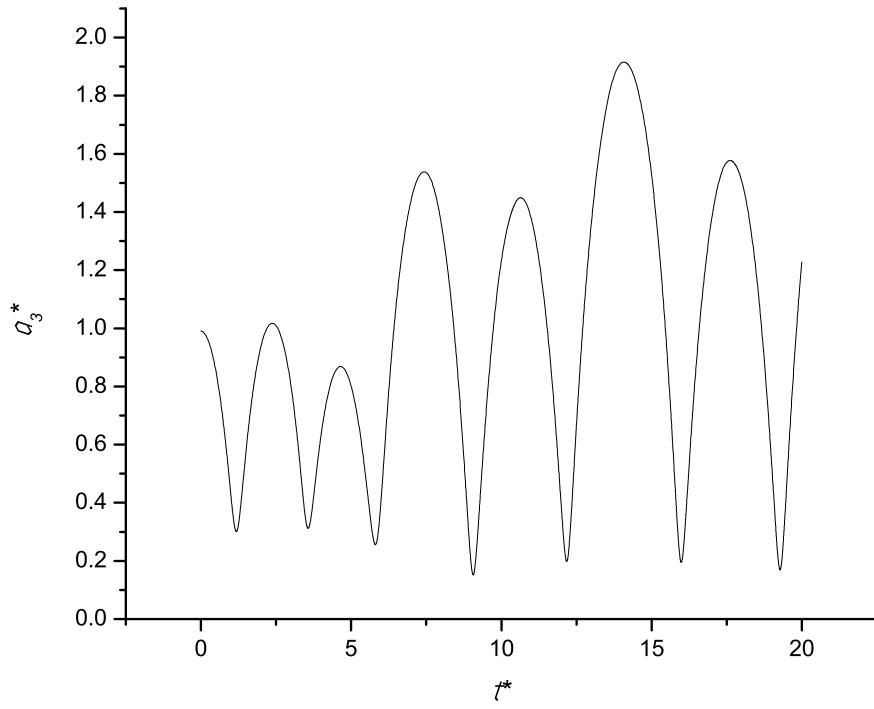


Figura 2.47: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

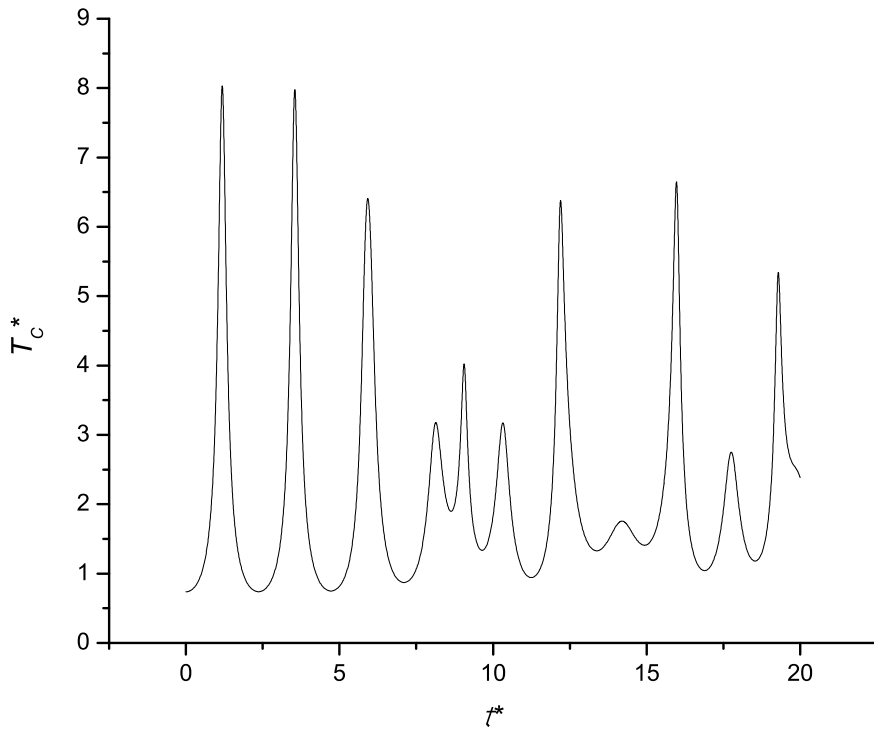


Figura 2.48: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

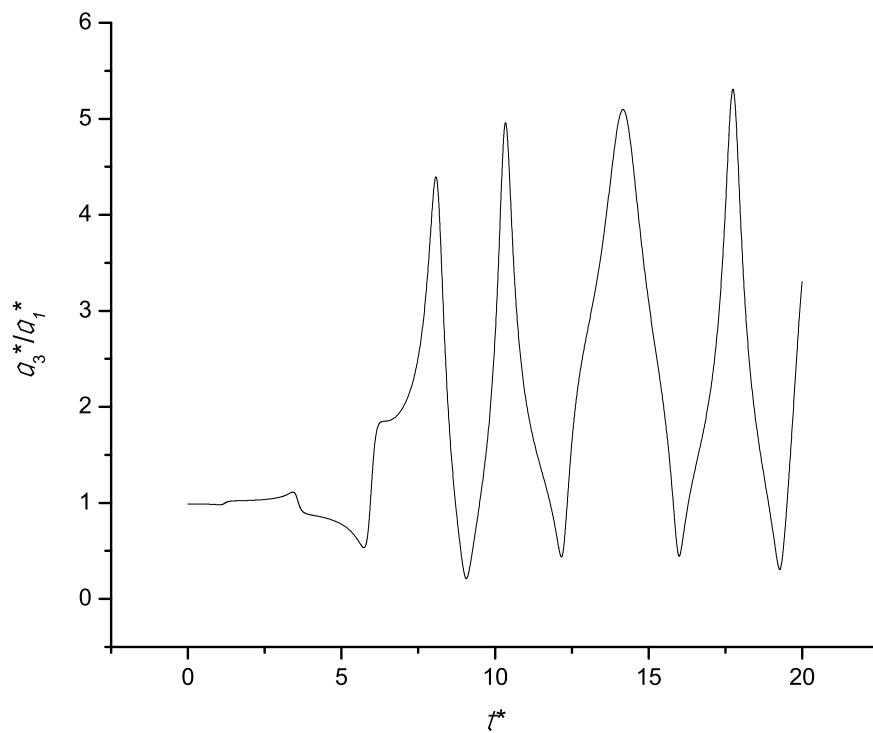


Figura 2.49: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

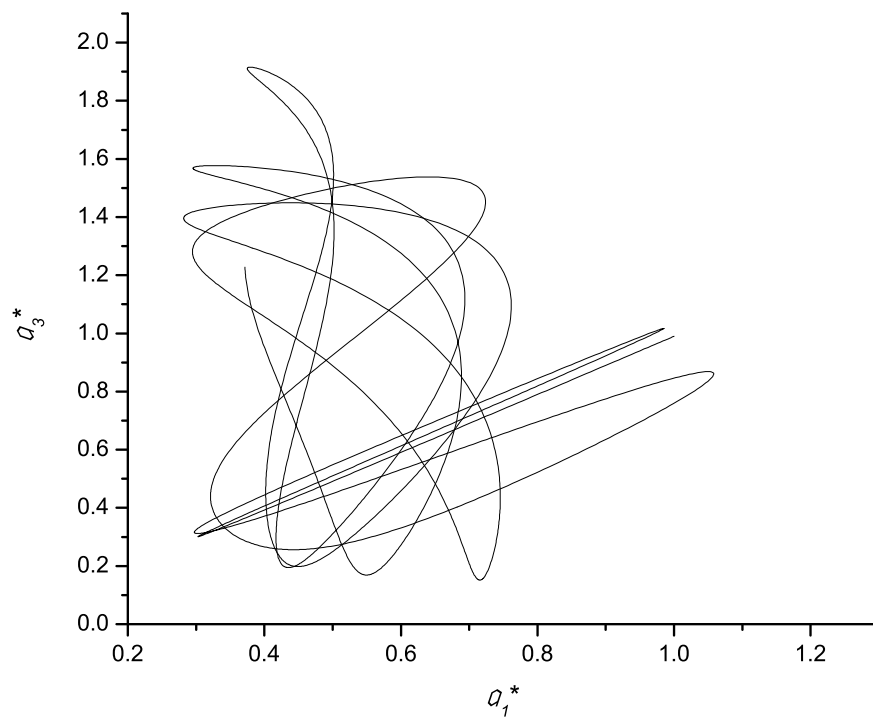


Figura 2.50: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 11 $L_F^*=1,5$ $\nu^*=10^{-5}$

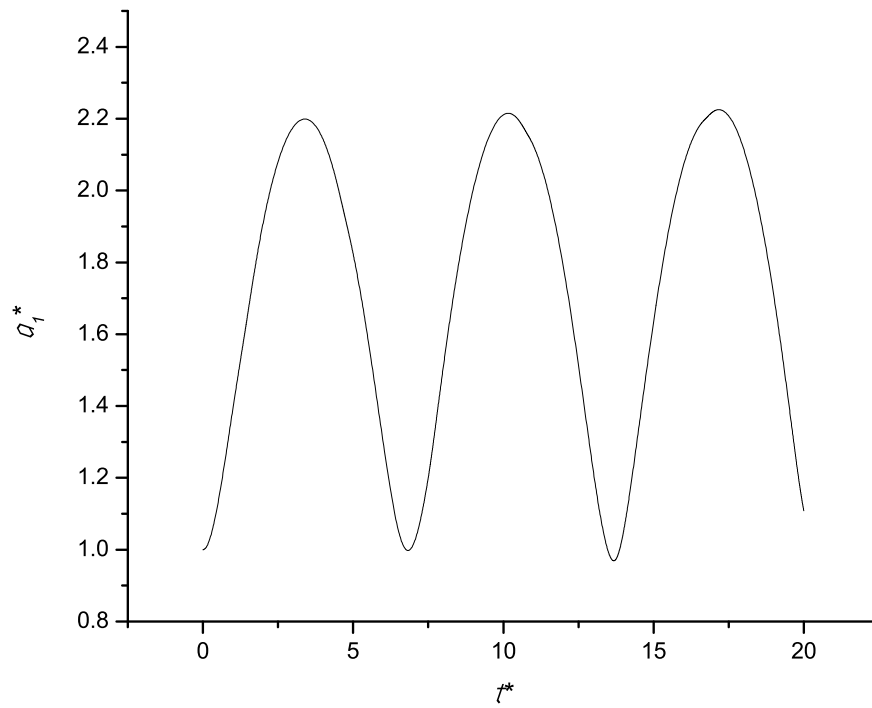


Figura 2.51: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

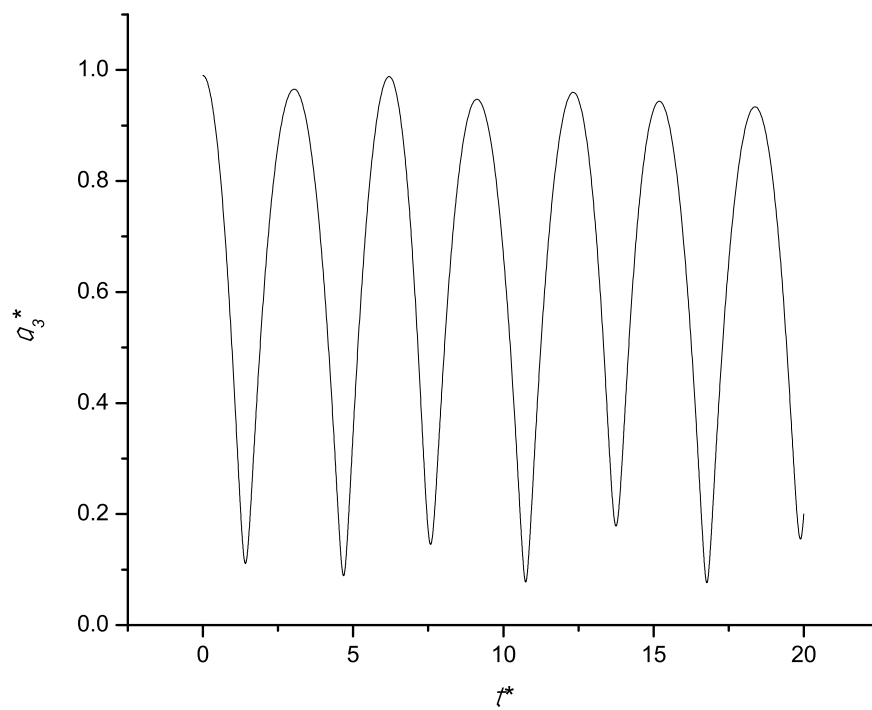


Figura 2.52: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

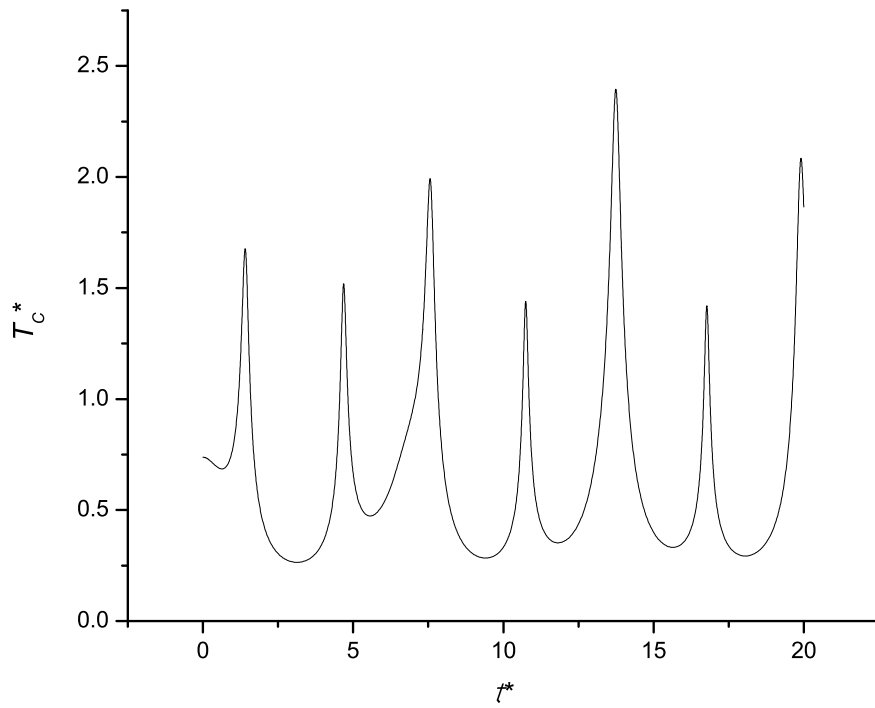


Figura 2.53: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

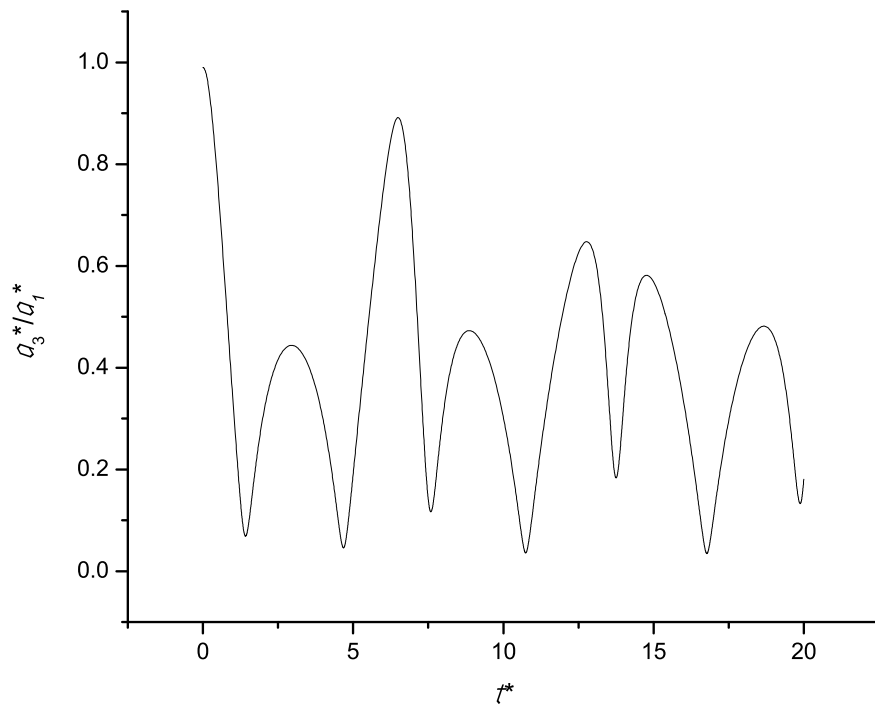


Figura 2.54: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

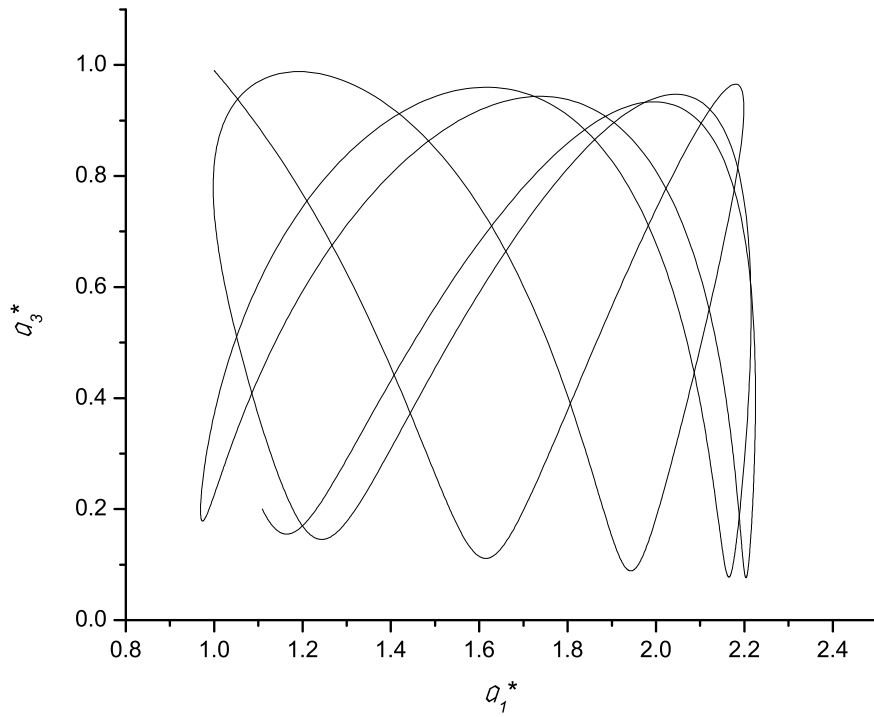


Figura 2.55: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 12 $L_F^*=3$ $\nu^*=10^{-5}$

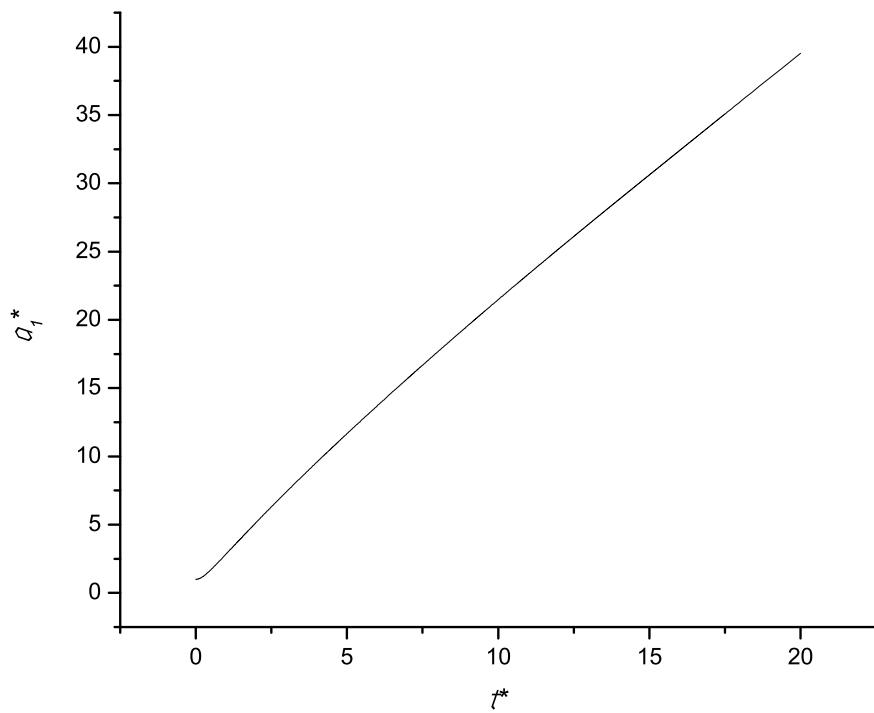


Figura 2.56: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

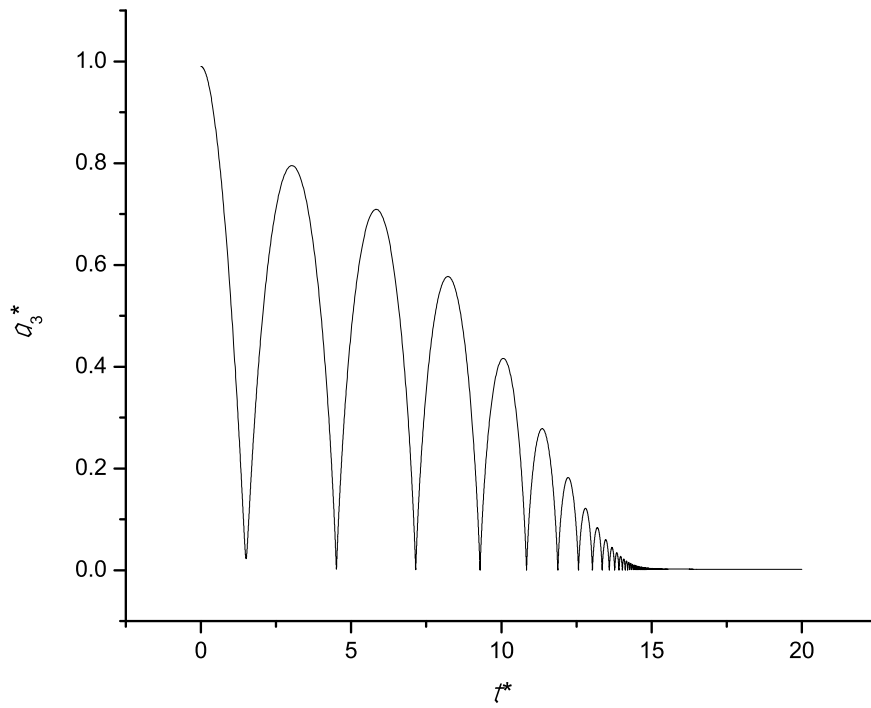


Figura 2.57: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

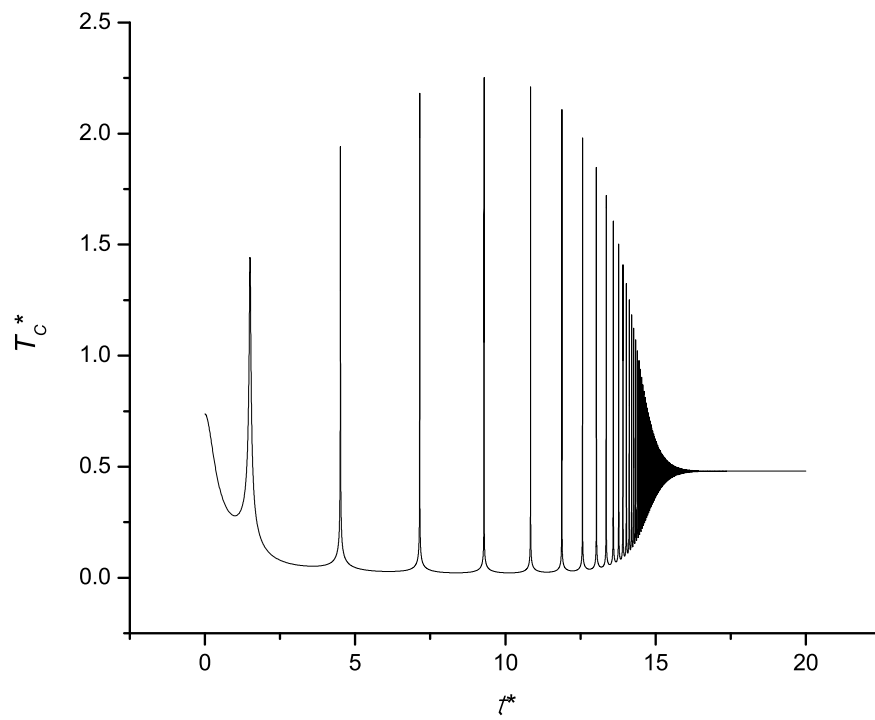


Figura 2.58: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

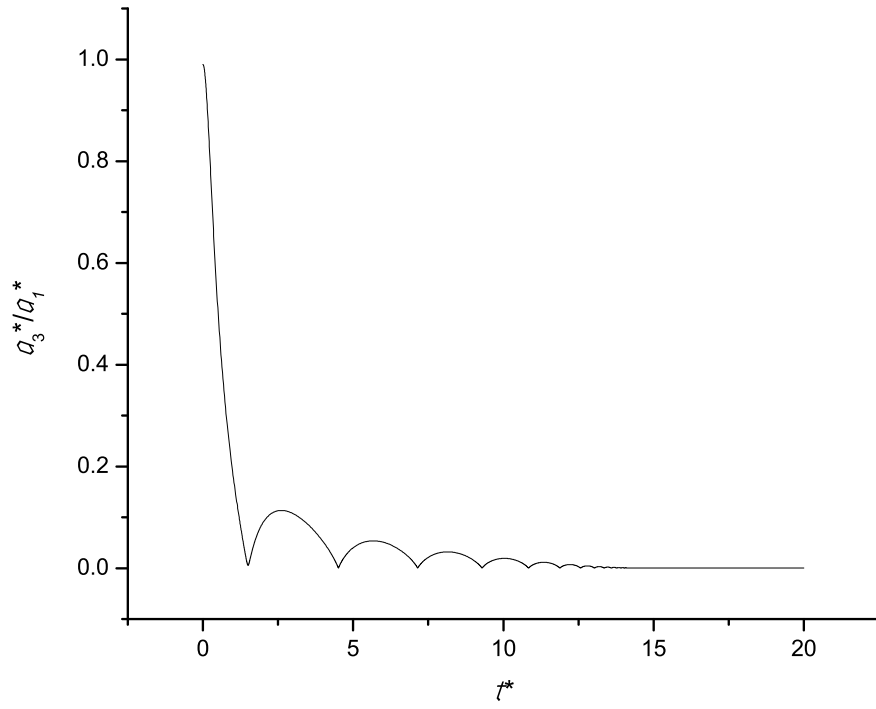


Figura 2.59: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

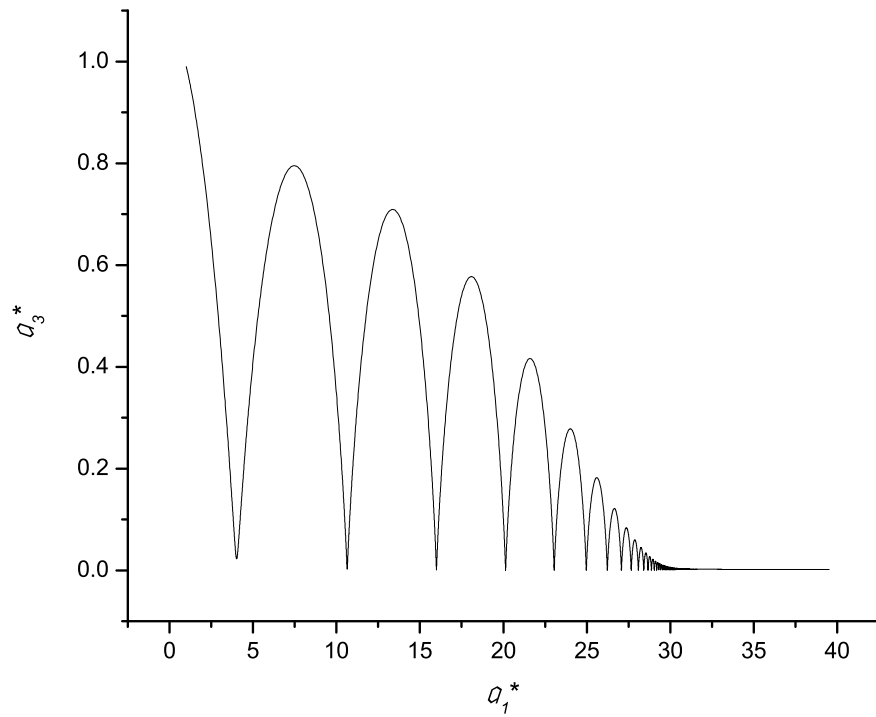


Figura 2.60: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

2.4 Observaciones y conclusiones

Observaciones:

De las figuras obtenidas tenemos las siguientes observaciones

Para el He

Caso 1 $L_F^*=10^{-3}$ $\nu^*=0$

- a) Los semiejes oscilan con respecto al tiempo (ver fig. 2.1 y 2.2).
- b) La temperatura central tiene varios valores máximos, el mayor de ellos es aproximadamente 441 K (ver fig. 2.3).
- c) El esferoide permanece más tiempo en el estado prolato (ver fig. 2.4).

Caso 2 $L_F^*=1,5$ $\nu^*=0$

- a) Los semiejes y la temperatura central son funciones oscilatorias respecto al tiempo y el intervalo de tiempo entre los máximos son casi iguales (ver fig. 2.6, 2.7 y 2.8).
- b) La temperatura central tiene un valor máximo cuando el semieje a_3^* tiene casi en el mismo instante un valor mínimo (ver fig. 2.7 y 2.8). Se observa también que la temperatura crece y decrece rápidamente en un intervalo pequeño de tiempo.
- c) La temperatura central tiene varios valores máximos, el mayor de ellos es aproximadamente 40,4 K (ver fig. 2.8).
- d) El esferoide permanece siempre en el estado oblato (ver fig. 2.9).

Caso 3 $L_F^*=3$ $\nu^*=0$

- a) El semieje a_1^* es una función creciente concava hacia abajo respecto al tiempo (ver fig. 2.11) y el semieje a_3^* es una función oscilatoria respecto al tiempo y el intervalo de tiempo entre los máximos son casi iguales (ver fig. 2.12).
- b) La temperatura central tiene un valor máximo cuando el semieje a_3^* tiene casi en el mismo instante un valor mínimo (ver fig. 2.12 y 2.13). Se observa también que la temperatura crece y decrece rápidamente en un intervalo pequeño de tiempo.
- c) Los valores máximos de la temperatura central crecen con el tiempo y tienden a un valor constante (ver fig. 2.13).
- d) El esferoide permanece siempre en el estado oblato (ver fig. 2.14).

Caso 4 $L_F^*=10^{-3}$ $\nu^*=10^{-5}$

- a) La evolución del fluido al transcurrir el tiempo es semejante al caso 1 hasta aproximadamente los 3100000 años.

Caso 5 $L_F^*=1,5$ $\nu^*=10^{-5}$

- a) La evolución del fluido al transcurrir el tiempo es semejante al caso 2.

Caso 6 $L_F^*=3$ $\nu^*=10^{-5}$

- a) El semieje a_1^* es una función creciente concava hacia abajo (ver fig. 2.26).

- b) La temperatura central tiene un valor máximo cuando el semieje a_3^* tiene casi en el mismo instante un valor mínimo (ver fig. 2.27 y 2.28). Se observa también que la temperatura crece y decrece rápidamente en un intervalo pequeño de tiempo.
- c) El semieje a_3^* tiende a cero y la temperatura central tiende a un valor constante igual a 6,5 K después de los 3010000 años (ver fig. 2.27 y 2.28).
- d) El esferoide permanece siempre en el estado oblató (ver fig. 2.29).

Para el H_2

Caso 7 $L_F^*=10^{-3}$ $\nu^*=0$

- a) Los semiejes oscilan al transcurrir el tiempo (ver fig. 2.31 y 2.32).
- b) La temperatura central tiene varios valores máximos, el mayor de ellos es aproximadamente 110 K (ver fig. 2.33).
- c) El esferoide permanece más tiempo en el estado prolato (ver fig. 2.34).

Caso 8 $L_F^*=1,5$ $\nu^*=0$

- a) Los semiejes y la temperatura central son funciones oscilatorias respecto al tiempo y el intervalo de tiempo entre los máximos son casi iguales (ver fig. 2.36, 2.37 y 2.38).
- b) La temperatura central tiene un valor máximo cuando el semieje a_3^* tiene casi en el mismo instante un valor mínimo (ver fig. 2.37 y 2.38). Se observa también que la temperatura crece y decrece rápidamente en un intervalo pequeño de tiempo.
- c) La temperatura central tiene varios valores máximos, el mayor de ellos es aproximadamente 32,5 K (ver fig. 2.38).
- d) El esferoide permanece siempre en el estado oblató (ver fig. 2.39).

Caso 9 $L_F^*=3$ $\nu^*=0$

- a) El semieje a_1^* es una función creciente cóncava hacia abajo respecto al tiempo (ver fig. 2.41) y el semieje a_3^* oscila con respecto al tiempo (ver fig. 2.42).
- b) La temperatura central tiene un valor máximo cuando el semieje a_3^* tiene casi en el mismo instante un valor mínimo (ver fig. 2.42 y 2.43). Se observa también que la temperatura crece y decrece rápidamente en un intervalo pequeño de tiempo.
- c) Los valores máximos de la temperatura central crecen con el tiempo y tienden a un valor constante (ver fig. 2.43).
- d) El esferoide permanece siempre en el estado oblató (ver fig. 2.44).

Caso 10 $L_F^*=10^{-3}$ $\nu^*=10^{-5}$

- a) La evolución del fluido al transcurrir el tiempo es semejante al caso 7.

Caso 11 $L_F^*=1,5$ $\nu^*=10^{-5}$

- a) La evolución del fluido al transcurrir el tiempo es semejante al caso 8.

Caso 12 $L_F^*=3$ $\nu^*=10^{-5}$

- a) El semieje a_1^* es una función creciente cóncava hacia abajo respecto al tiempo (ver fig.

2.56).

- b) La temperatura central tiene un valor máximo cuando el semieje a_3^* tiene casi en el mismo instante un valor mínimo (ver fig. 2.57 y 2.58). Se observa también que la temperatura crece y decrece rápidamente en un intervalo pequeño de tiempo.
- c) El semieje a_3^* tiende a cero y la temperatura central tiende a un valor constante igual a 6,5 K después de los 3010000 años (ver fig. 2.57 y 2.58).
- d) El esferoide permanece siempre en el estado oblató (ver fig. 2.59).

Conclusiones:

- a) Para diversas condiciones iniciales, los semiejes de los esferoides gaseosos de He y de H_2 son longitudes que oscilan con respecto al tiempo. En cambio, para otras condiciones iniciales, los esferoides colapsan hasta convertirse casi en un disco (modelo de la formación de un sistema planetario). Para el aplanamiento de los esferoides es importante el papel de la viscosidad; según este modelo esto ocurrirá cuando la magnitud del momento angular es $3,13380 \cdot 10^{48}$ kg m²/s (cuando el gas se aplane se deberá considerar otros tipos de interacciones). Esta conclusión es consistente con otros modelos que lo predicen (ver pag. 1308 de [8]).
- b) Que existen propiedades semejantes en varias simulaciones, por ejemplo la temperatura central crece y decrece rápidamente en un intervalo pequeño de tiempo comparado con el tiempo que demora en alcanzar el primer colapso, mientras que el semieje desigual decrece y crece pero no tan rápidamente para el mismo intervalo de tiempo.
- c) Que se han obtenido ecuaciones diferenciales para los semiejes y temperatura central de un esferoide gaseoso que simulan su evolución. Hemos aplicado a la nube Barnard 68, pero con esta experiencia se puede aplicar a otras nubes interestelares.

3 ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES

3.1 Introducción

3.2 Condiciones para la obtención de las soluciones estacionarias

3.3 Teoría de la estabilidad de las soluciones estacionarias

3.4 Análisis numérico de la estabilidad de las soluciones estacionarias

3.5 Observaciones y conclusiones viscoso

3.1 Introducción

En este capítulo se hallarán las condiciones que hagan posible la existencia de soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que describen la evolución del esferoide gaseoso. Si las soluciones estacionarias existen se aplicará la teoría de estabilidad de Lyapunov a las ecuaciones diferenciales linealizadas y luego para analizar la estabilidad de las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales se las resolverá numéricamente empleando también una función de paso adaptativo del Matlab.

3.2 Condiciones para la obtención de las soluciones estacionarias

a) Considerando que el gas no es viscoso

Tenemos dos posibles casos para analizar:

i) Solución: $x_1(t^*) = x_1(0)$, $x_2(t^*) = x_2(0)$ y $x_3(t^*) = x_3(0)$

Los semiejes y la temperatura central no cambian de valor, es decir, $x_1(t^*) = x_1(0)$, $x_2(t^*) = x_2(0)$ y $x_3(t^*) = x_3(0)$, entonces para hallar la solución se debe igualar a cero los lados derechos de las ecuaciones del (2.23) al (2.27), es decir:

$$x_4 = 0, \quad (3.1)$$

$$x_5 = 0, \quad (3.2)$$

$$-\frac{2}{3} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 x_2 - b^*} \left(\frac{2x_4}{x_1} + \frac{x_5}{x_2} \right) x_3 = 0, \quad (3.3)$$

$$-\frac{2A_1}{x_1 x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2 - b^*} (x_3 - T_s^*) + \frac{L_F^{*2}}{x_1^3} = 0, \quad (3.4)$$

$$-\frac{2A_3}{x_1^2} + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_2 - b^*} (x_3 - T_s^*) = 0. \quad (3.5)$$

Al reemplazar las ecuaciones (3.1) y (3.2) en la ecuación (3.3) esta se convierte en una identidad.

Al despejar x_3 de la ecuación (3.5) se obtiene

$$x_3 = T_s^* + 2A_3 \left(\frac{x_1^2 x_2 - b^*}{x_1^4} \right). \quad (3.6)$$

Al reemplazar la ecuación (3.6) en la ecuación (3.4) y despejar L_F^* se obtiene

$$L_F^* = \sqrt{2 \left(\frac{x_1^2}{x_2} A_1 - x_2 A_3 \right)}. \quad (3.7)$$

Empleando (2.17) en las ecuaciones (3.6) y (3.7), entonces las condiciones para obtener la solución estacionaria son

$$T_c^*(0) = T_s^* + 2A_3(0)\left(\frac{a_1^{*2}(0)a_3^*(0) - b^*}{a_1^{*4}(0)}\right), \quad (3.8)$$

$$L_F^* = \sqrt{2\left(\frac{a_1^{*2}(0)}{a_3^*(0)}A_1(0) - a_3^*(0)A_3(0)\right)}, \quad (3.9)$$

en función de $a_1^*(0)$ y $a_3^*(0)$ de modo que, según la ecuación (3.9), se debe cumplir que $a_1^*(0) \geq a_3^*(0)$. Es decir que el gas no puede estar estacionariamente en un estado prolato.

ii) Solución: $x_1(t^*) = x_1(0)$, $x_2(t^*) = x_2(0)$ y $x_3(t^*)$ es una función que depende de t^*

Para hallar la solución se debe igualar a cero los lados derechos de las ecuaciones (2.23) y (2.24), es decir:

$$x_4 = 0, \quad (3.10)$$

$$x_5 = 0. \quad (3.11)$$

Al reemplazar dichas ecuaciones en la ecuación (2.25) esta se reduce a

$$\frac{dx_3}{dt^*} = 0. \quad (3.12)$$

Al resolver la ecuación (3.12) se observa que x_3 no depende de t^* pero esta se contradice con la hipótesis de que x_3 depende de t^* . Por lo que en este caso no existe solución estacionaria.

b) Considerando que el gas es viscoso

Tenemos dos posibles casos:

i) Solución: $x_1(t^*) = x_1(0)$, $x_2(t^*) = x_2(0)$ y $x_3(t^*) = x_3(0)$

Para hallar la solución se debe igualar a cero los lados derechos de las ecuaciones del (2.18) al (2.22), es decir:

$$x_4 = 0, \quad (3.13)$$

$$x_5 = 0, \quad (3.14)$$

$$-\frac{45}{16}\nu^*\left(\frac{2}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right)(x_3 - T_s^*) - \frac{2}{3}\frac{x_1^2 x_2 x_3}{x_1^2 x_2 - b^*}\left(\frac{2x_4}{x_1} + \frac{x_5}{x_2}\right) + \nu^*\left(\frac{x_4}{x_1} - \frac{x_5}{x_2}\right)^2 = 0, \quad (3.15)$$

$$-\frac{2A_1}{x_1 x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2 - b^*}(x_3 - T_s^*) + \frac{L_F^{*2}}{x_1^3} = 0, \quad (3.16)$$

$$-\frac{2A_3}{x_1^2} + \frac{x_1^2}{x_1^2 x_2 - b^*}(x_3 - T_s^*) = 0. \quad (3.17)$$

Al reemplazar las ecuaciones (3.13) y (3.14) en la ecuación (3.15) esta se reduce a

$$-\frac{45}{16}\nu^*\left(\frac{2}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right)(x_3 - T_s^*) = 0. \quad (3.18)$$

Como $\nu^* \neq 0$ y $(2/x_1^2 + 1/x_2^2) \neq 0$ entonces $x_3 = T_s^*$. Pero como x_3 representa la temperatura central entonces en este caso no existe solución estacionaria.

ii) Solución: $x_1(t^*) = x_1(0)$, $x_2(t^*) = x_2(0)$ y $x_3(t^*)$ es una función que depende de t^*

Para hallar la solución se debe igualar a cero los lados derechos de las ecuaciones (2.18) y (2.19), es decir:

$$x_4 = 0, \quad (3.19)$$

$$x_5 = 0. \quad (3.20)$$

Al reemplazar la ecuación (3.20) en la ecuación (2.22) y despejar x_3 se obtiene

$$x_3 = T_s^* + 2A_3 \left(\frac{x_1^2 x_2 - b^*}{x_1^4} \right). \quad (3.21)$$

De la ecuación (3.21) se observa que x_3 no depende de t^* pero esta se contradice con la hipótesis de que x_3 depende de t^* .

Por lo que en este caso no existe solución estacionaria y se concluye que solo es posible encontrar solución estacionaria si el gas no es viscoso.

3.3 Teoría de la estabilidad de las soluciones estacionarias

Se estudia la estabilidad de las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden analizando previamente la estabilidad de las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Sea el sistema de N ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.22)$$

donde $f_k(x_1, x_2, \dots, x_N)$ son funciones reales de variable real x_k que dependen de t .

Sea $x_k = x_k(0)$ la solución estacionaria del sistema (punto de equilibrio), la cual es obtenida al igualar a cero el lado derecho del sistema (3.22), es decir

$$f_k(x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0)) = 0. \quad (3.23)$$

Se supondrá que las funciones f_k son derivables en la solución estacionaria una cantidad suficiente de veces. Desarrollando las funciones f_k por la fórmula de Taylor, según las x_k , en un entorno de la solución estacionaria $x_k = x_k(0)$ se obtiene

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0)) + \sum_{l=1}^N a_{kl}(x_l - x_l(0)) + R_k(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.24)$$

donde $a_{kl} = \frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0))$ y R_k son los términos infinitesimales de segundo orden con respecto a x_k . A la matriz $A = [a_{kl}]$ se le llama **matriz jacobiana**.

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$r_l = x_l - x_l(0). \quad (3.25)$$

Al reemplazar las ecuaciones (3.25) y (3.23) en la ecuación (3.24), despreciando R_k , se obtiene

$$\frac{dr_k}{dt^*} = \sum_{l=1}^N a_{kl} r_l \quad (3.26)$$

denominado sistema de ecuaciones diferenciales lineales para el sistema (3.22).

Una solución (local) es estable si se encuentra acotada en el espacio de fases cerca de la solución estacionaria, es asintóticamente estable si esta acotada y se aproxima a la solución estacionaria a lo largo del tiempo y es inestable si se aleja de la solución estacionaria a lo largo del tiempo.

Para averiguar la estabilidad de la solución estacionaria se aplicará la teoría de estabilidad de Lyapunov (ver pag. 192 de [4]):

- a) Si las partes reales de todos los autovalores de la matriz jacobiana son negativas entonces la solución estacionaria de los sistemas lineal y no lineal es asintóticamente estable.
- b) Si la parte real de al menos un autovalor de la matriz jacobiana es positiva entonces la solución estacionaria de los sistemas lineal y no lineal es inestable.
- c) Si las partes reales de todos los autovalores de la matriz jacobiana no son positivas, siendo igual a cero la parte real de al menos un autovalor entonces la solución estacionaria del sistema lineal es estable, pero como comienzan a influir los términos no lineales de R_k el proceso de linealización no proporciona información sobre la estabilidad de dicha solución para el sistema no lineal.

3.4 Análisis numérico de la estabilidad de las soluciones estacionarias

Los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de un gas viscoso (del (2.18) al (2.22)) y de un gas no viscoso (del (2.23) al (2.27)) se resuelven numéricamente empleando dos programas hechos en Matlab llamados funciones y gasinterestelar cuyos códigos de programación se detallan en el apéndice E (ver pag. 90) y una función de paso adaptativo del Matlab llamado ode15s (la tolerancia del error relativo y absoluto que emplea el ode15s son 10^{-5} y 10^{-6} respectivamente).

En la tabla 3.1 se muestra para cada caso la solución estacionaria y las condiciones que hacen posible su existencia: Los valores de $a_1^*(0)$, $a_3^*(0)$, $\frac{da_1^*}{dt^*}(0)$, $\frac{da_3^*}{dt^*}(0)$, $T_c^*(0)$ y L_F^* de un esferoide gaseoso de He para los dos primeros casos y de un esferoide gaseoso de H_2 para los dos últimos casos (las condiciones son los valores de $T_c^*(0)$ y L_F^* los cuales han

sido calculados empleando las ecuaciones (3.8) y (3.9)). Los esferoides gaseosos de He y H₂ tienen los mismos valores de $a_1(0)$, T_s y M mostrados en la tabla 2.2 por lo que para ambos los valores de b^* y T_s^* son los mostrados en la tabla 2.4.

Si el gas no es viscoso previamente se halla la matriz jacobiana, el sistema lineal y los autovalores de la matriz jacobiana empleando un programa hecho en Matlab llamado jacobiano cuyo código de programación se detalla en el apéndice E (ver pag. 91).

Tabla 3.1

Caso	Gas	$a_1^*(0)$	$a_3^*(0)$	$\frac{da_1^*}{dt^*}(0)$	$\frac{da_3^*}{dt^*}(0)$	$T_c^*(0)$	L_F^*	ν^*
1	He	1	0,99	0	0	1,57216	0,103687	0
2	He	1	0,99	0	0	1,57216	0,103687	10^{-5}
3	H ₂	1	0,99	0	0	1,81021	0,103687	0
4	H ₂	1	0,99	0	0	1,81021	0,103687	10^{-5}

Para el caso 1 (el gas no es viscoso) la matriz jacobiana es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2,09621 & -1,05869 \\ 0,51875 & 0,80922 & 1 & 0 & 0 \\ 1,61844 & -0,277142 & 1,0101 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el sistema lineal es

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt^*} &= r_4, \\ \frac{dr_2}{dt^*} &= r_5, \\ \frac{dr_3}{dt^*} &= -2,09621r_4 - 1,05869r_5, \\ \frac{dr_4}{dt^*} &= 0,51875r_1 + 0,80922r_2 + r_3, \\ \frac{dr_5}{dt^*} &= 1,61844r_1 - 0,277142r_2 + 1,0101r_3. \end{aligned}$$

Los autovalores de la matriz jacobiana son $\lambda_1 = 1.35396i$, $\lambda_2 = -1.35396i$, $\lambda_3 = 1,044i$, $\lambda_4 = -1,044i$ y $\lambda_5 = 0$.

Para el caso 3 (el gas no es viscoso) la matriz jacobiana es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2,41361 & -1,219 \\ 0,51875 & 0,80922 & 1 & 0 & 0 \\ 1,61844 & -0,277142 & 1,0101 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el sistema lineal es

$$\begin{aligned}\frac{dr_1}{dt^*} &= r_4, \\ \frac{dr_2}{dt^*} &= r_5, \\ \frac{dr_3}{dt^*} &= -2,41361r_4 - 1,219r_5, \\ \frac{dr_4}{dt^*} &= 0,51875r_1 + 0,80922r_2 + r_3, \\ \frac{dr_5}{dt^*} &= 1,61844r_1 - 0,277142r_2 + 1,0101r_3.\end{aligned}$$

Los autovalores de la matriz jacobiana son $\lambda_1 = 1.5207i$, $\lambda_2 = -1.5207i$, $\lambda_3 = 1.04441i$, $\lambda_4 = -1.04441i$ y $\lambda_5 = 0$.

En los casos 1 y 3 se observa que hay un autovalor nulo y dos pares de autovalores complejos conjugados con parte real nula por lo que al aplicar la teoría de estabilidad de Lyapunov entonces la solución estacionaria del sistema lineal es estable.

A continuación se analiza la estabilidad de la solución estacionaria resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de un gas con los valores modificados de $a_3^*(0)$ y $T_c^*(0)$ que resultan al añadirle 0,001 a cada uno de sus valores mostrados en la tabla 3.1 y luego se muestran cinco figuras: la primera muestra el semieje a_1^* en función del tiempo t^* , la segunda el semieje a_3^* en función del tiempo t^* , la tercera la temperatura central T_c^* en función del tiempo t^* , la cuarta la razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^* y la quinta el semieje a_3^* en función del semieje a_1^* . Las observaciones y conclusiones se muestran en las paginas 79 y 80.

Simulaciones para el gas de He

Caso 1 $a_3^*(0)=0,99+0,001$ $T_c^*(0)=1,57216+0,001$ $L_F^*=0,103687$ $\nu^*=0$

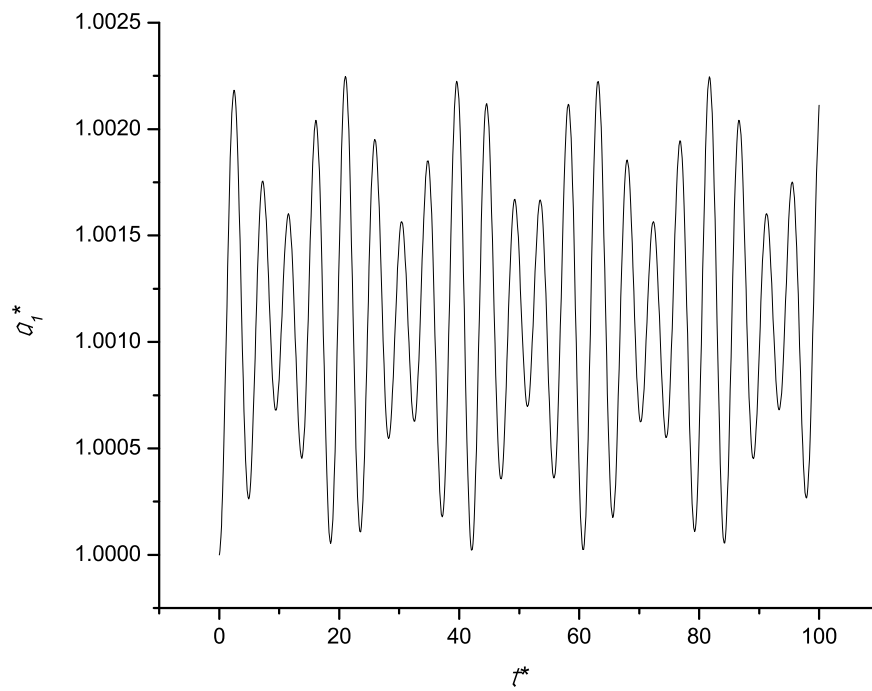


Figura 3.1: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

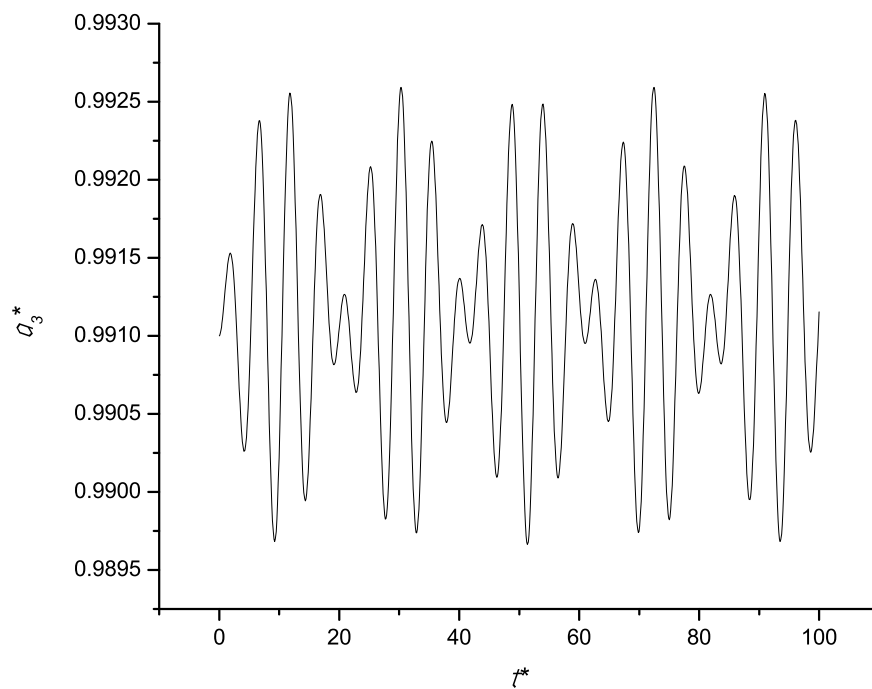


Figura 3.2: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

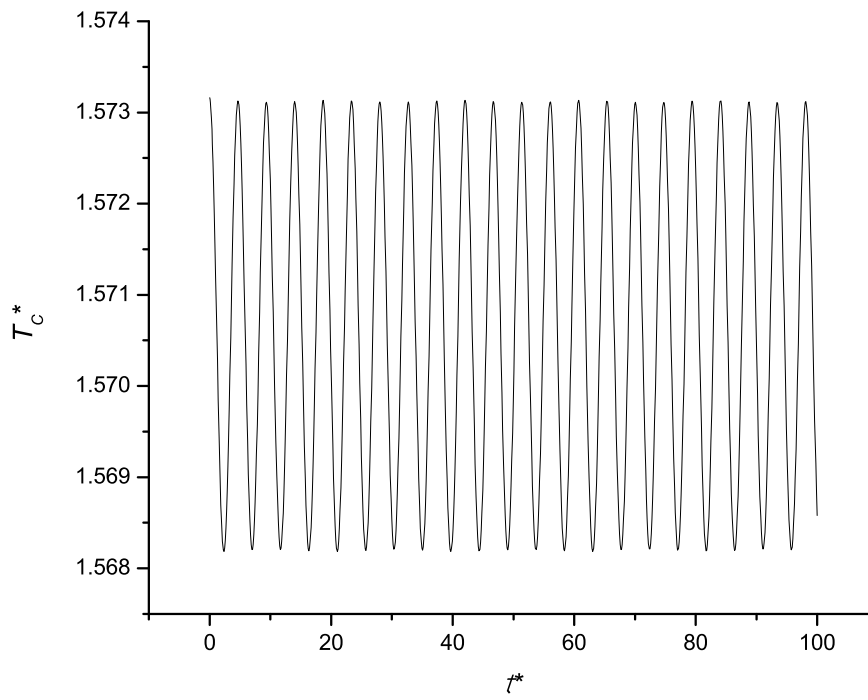


Figura 3.3: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

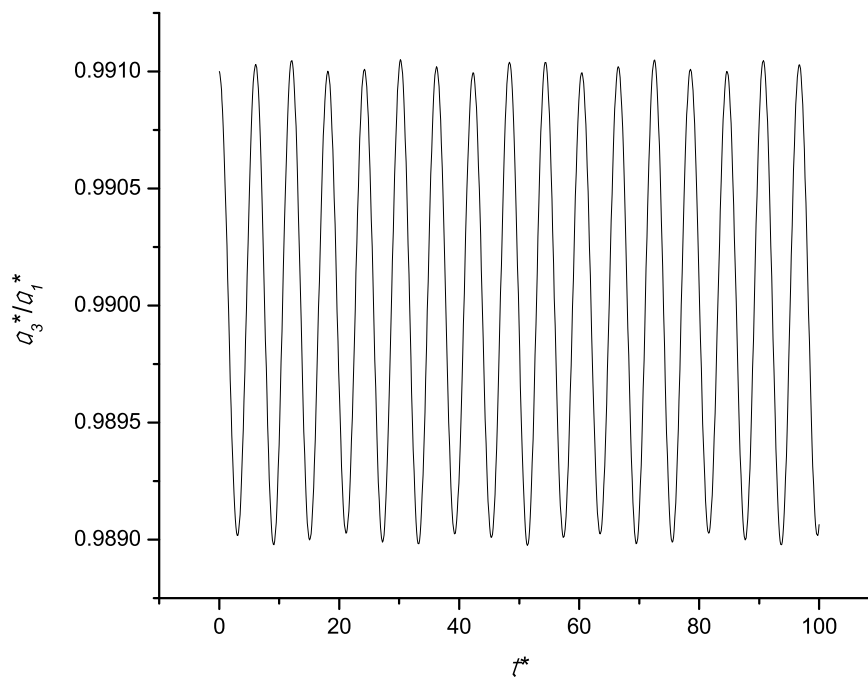


Figura 3.4: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

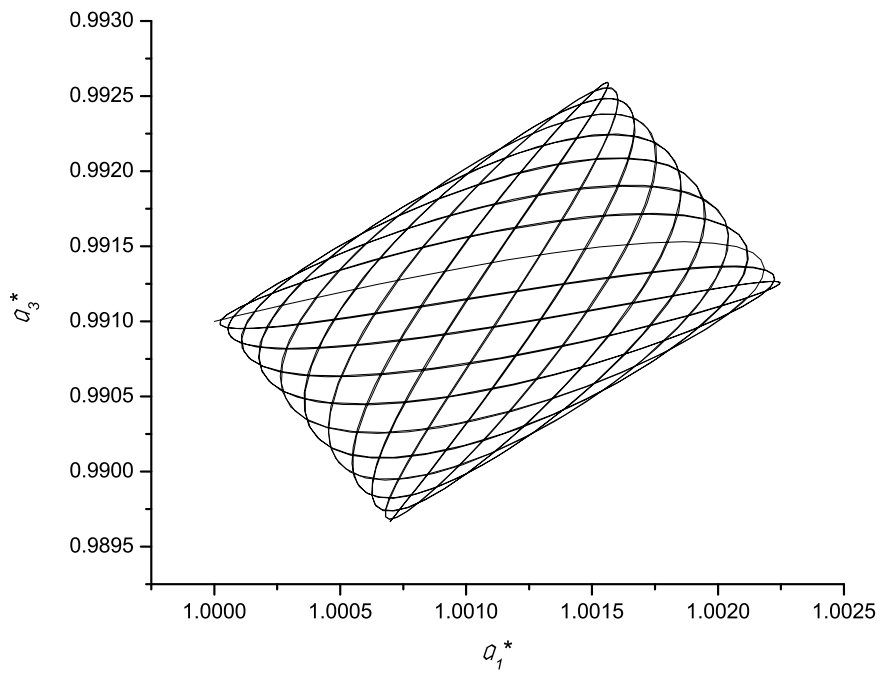


Figura 3.5: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 2 $a_3^*(0)=0,99+0,001$ $T_c^*(0)=1,57216+0,001$ $L_F^*=0,103687$ $\nu^*=10^{-5}$

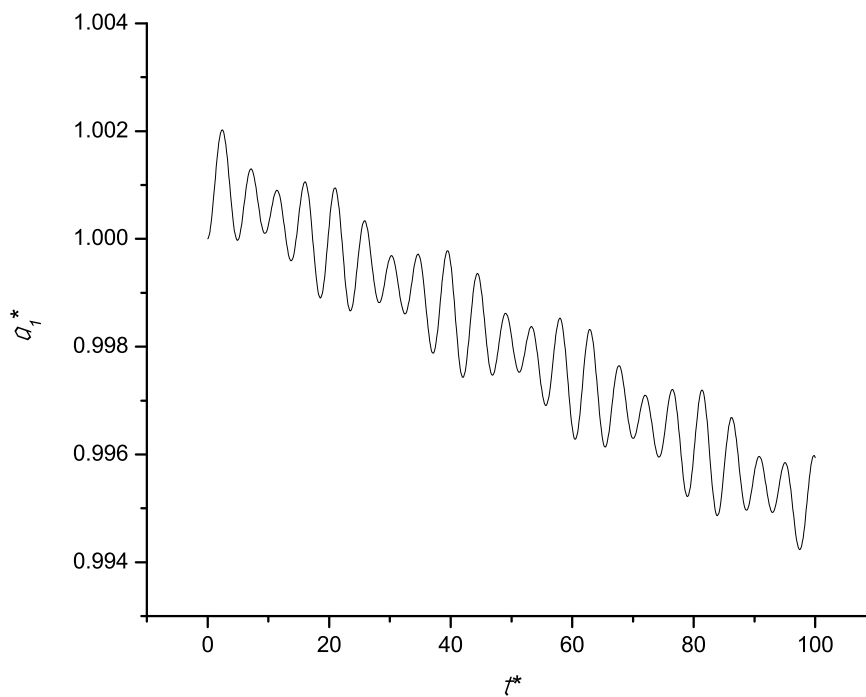


Figura 3.6: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

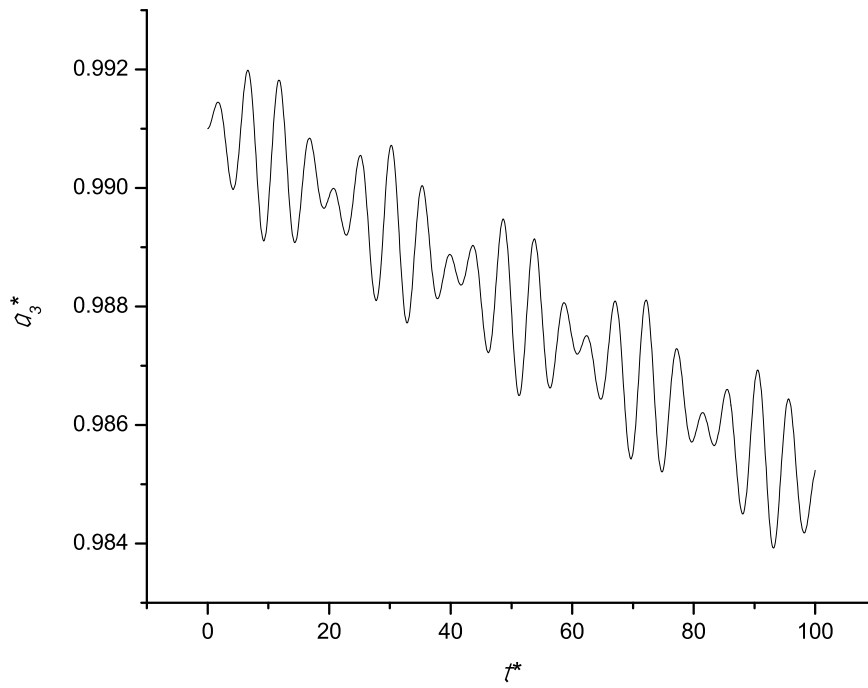


Figura 3.7: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

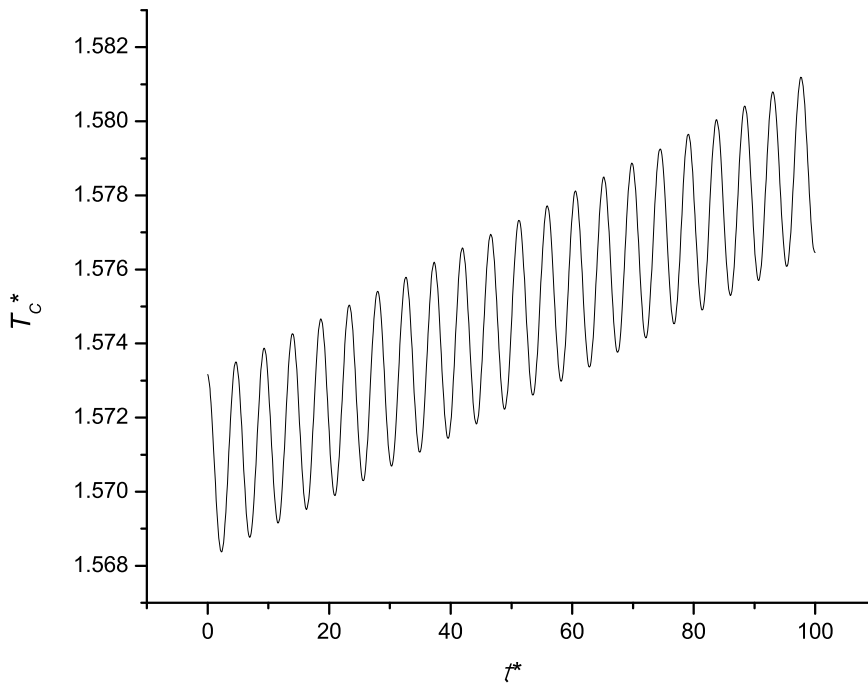


Figura 3.8: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

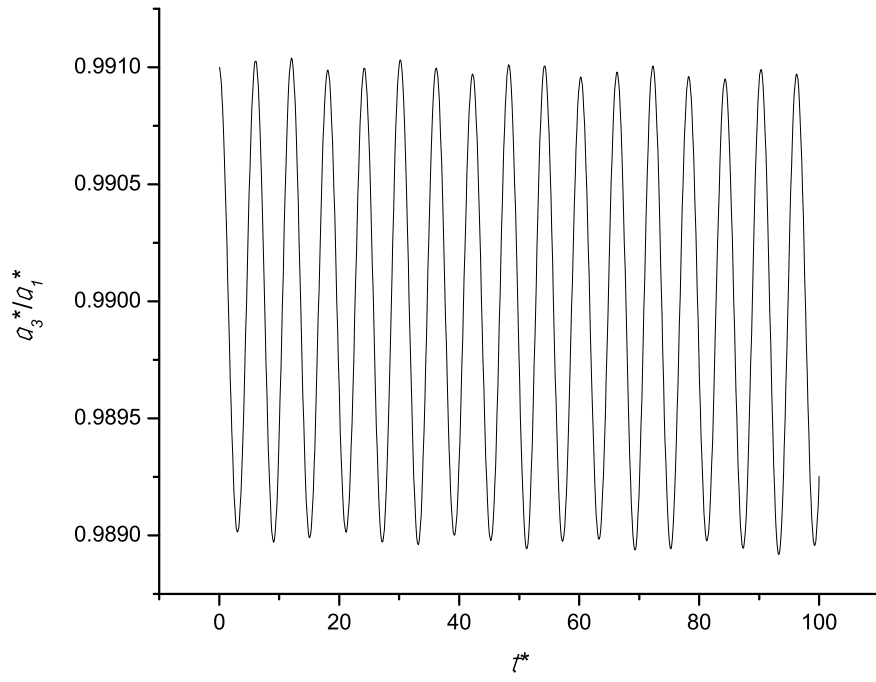


Figura 3.9: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

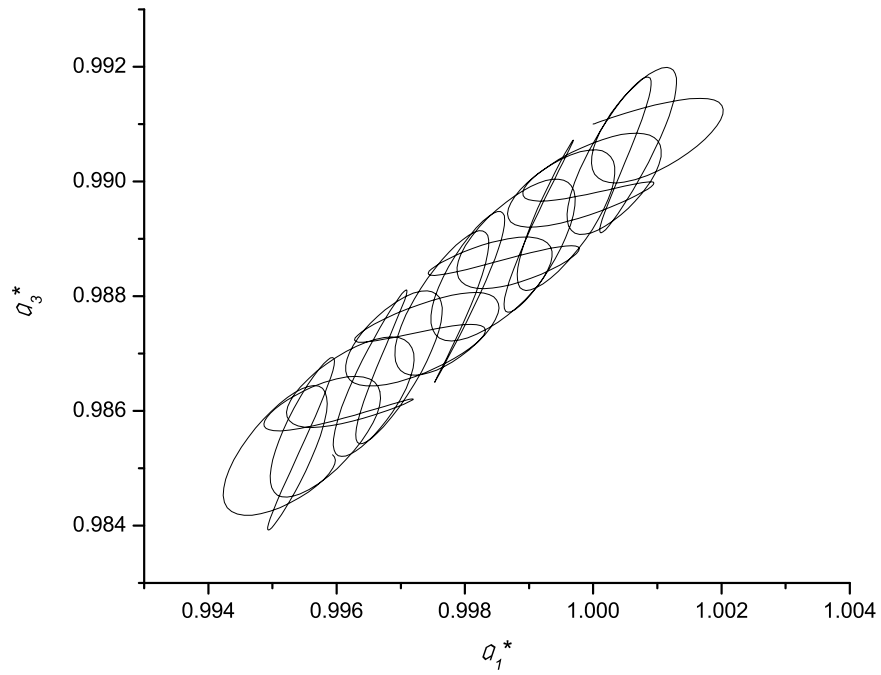


Figura 3.10: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Simulaciones para el gas de H₂

Caso 3 $a_3^*(0)=0,99+0,001$ $T_c^*(0)=1,81021+0,001$ $L_F^*=0,103687$ $\nu^*=0$

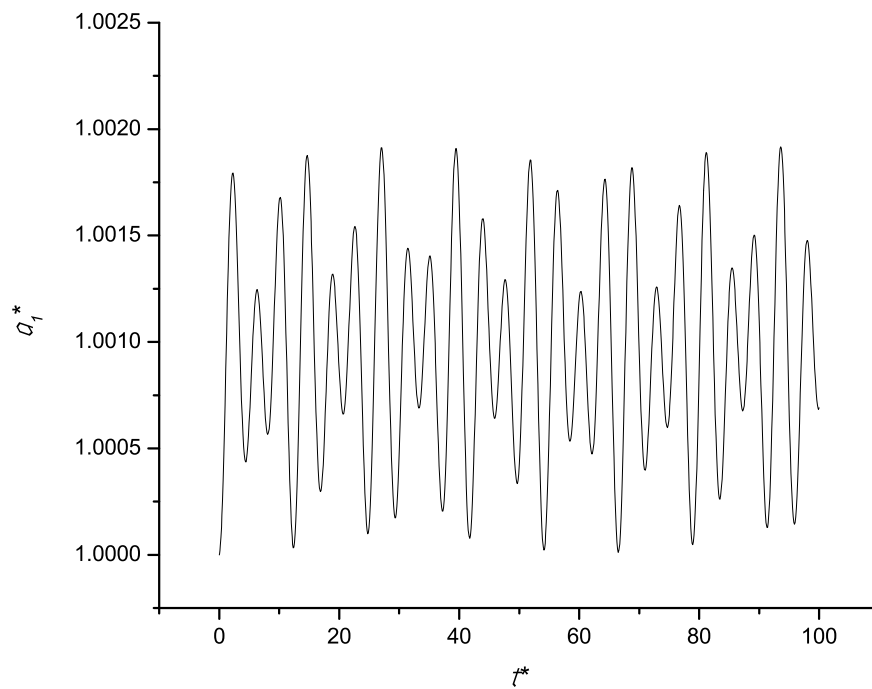


Figura 3.11: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

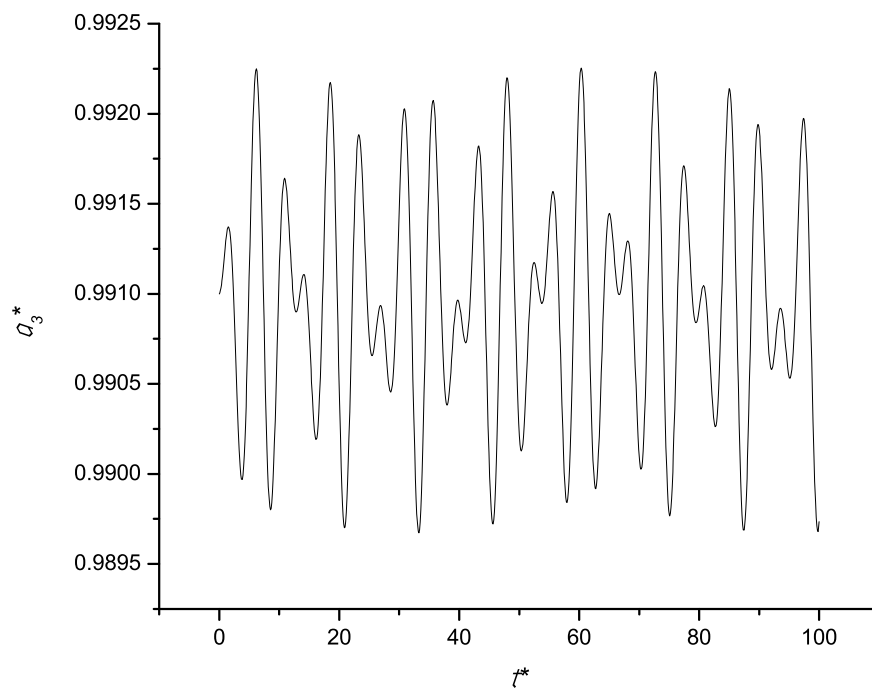


Figura 3.12: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

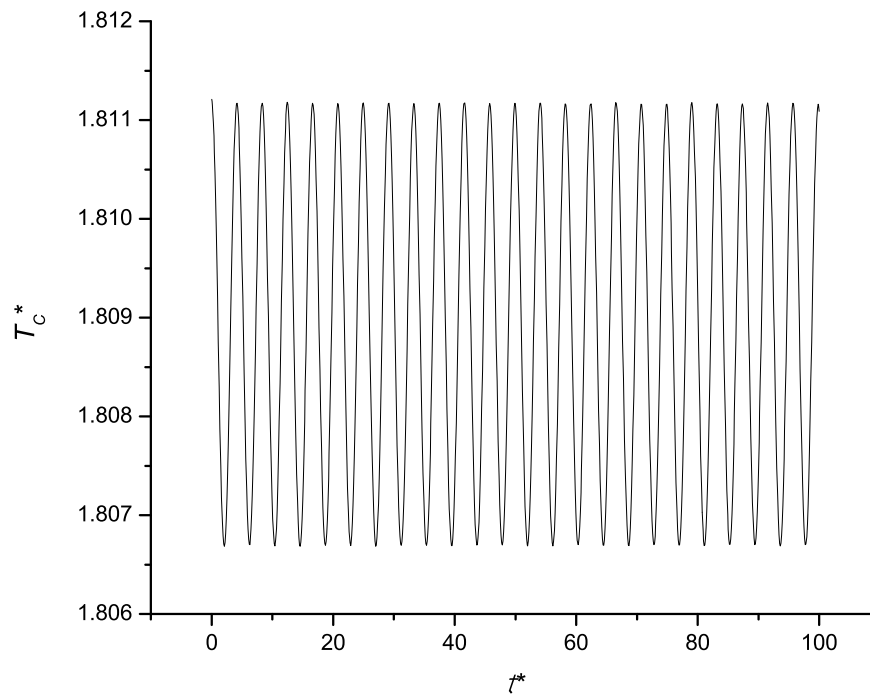


Figura 3.13: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

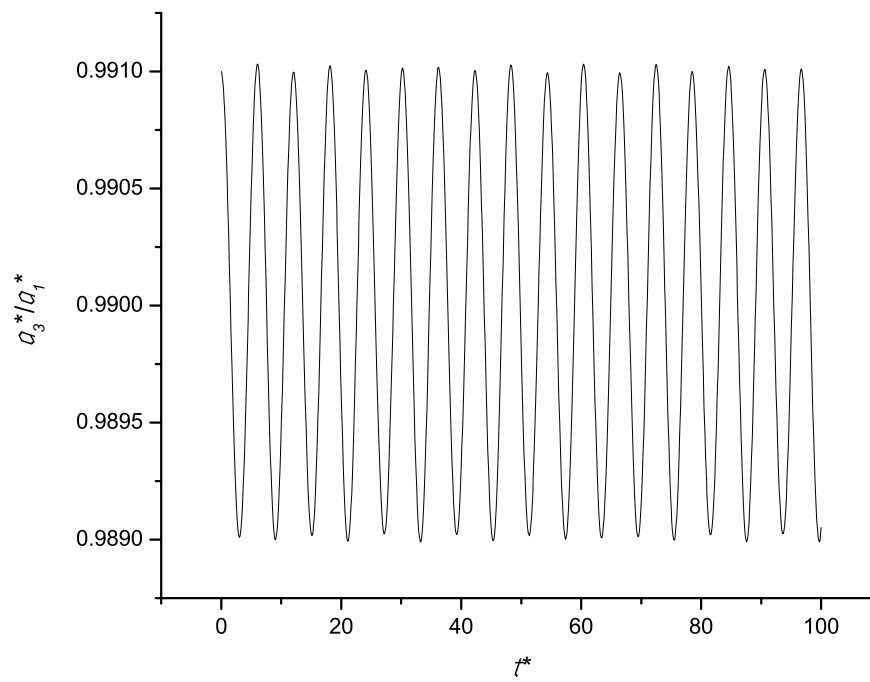


Figura 3.14: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

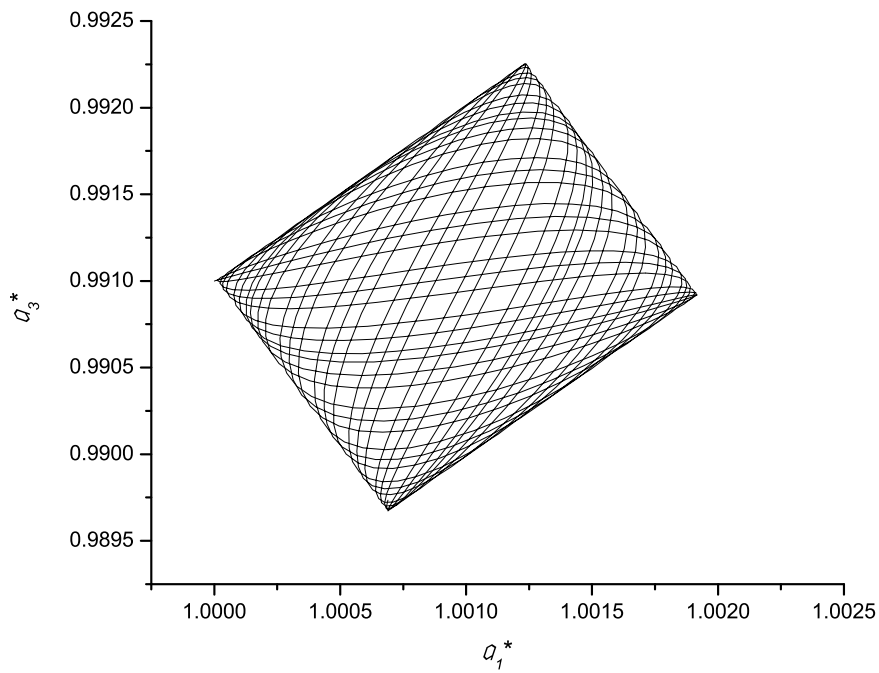


Figura 3.15: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Caso 4 $a_3^*(0)=0,99+0,001$ $T_c^*(0)=1,81021+0,001$ $L_F^*=0,103687$ $\nu^*=10^{-5}$

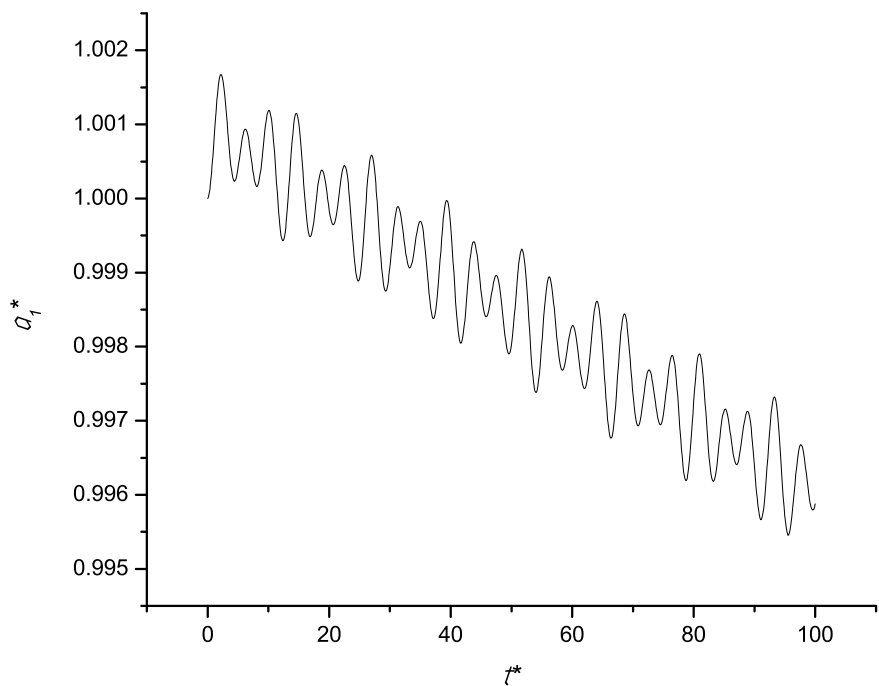


Figura 3.16: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

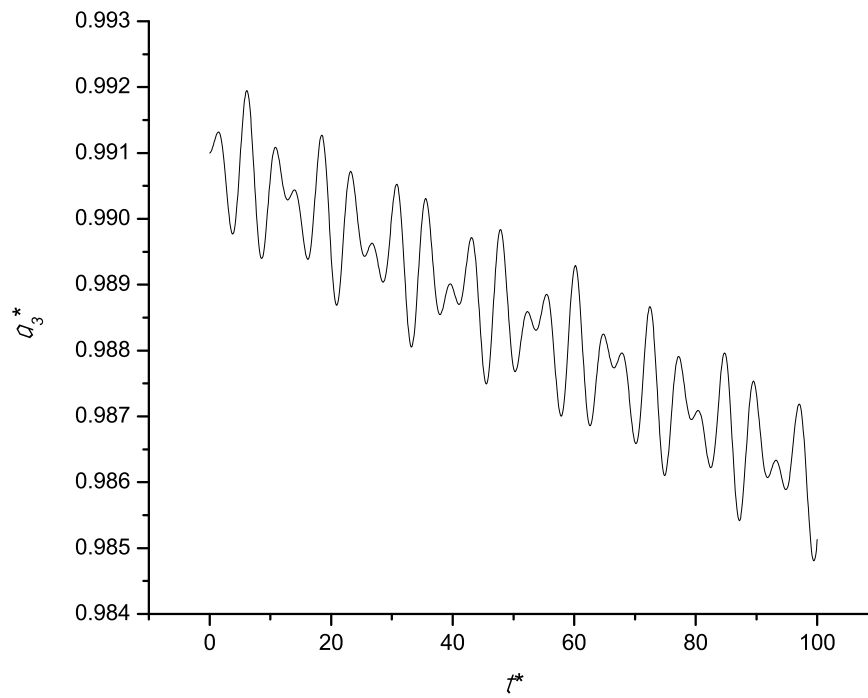


Figura 3.17: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

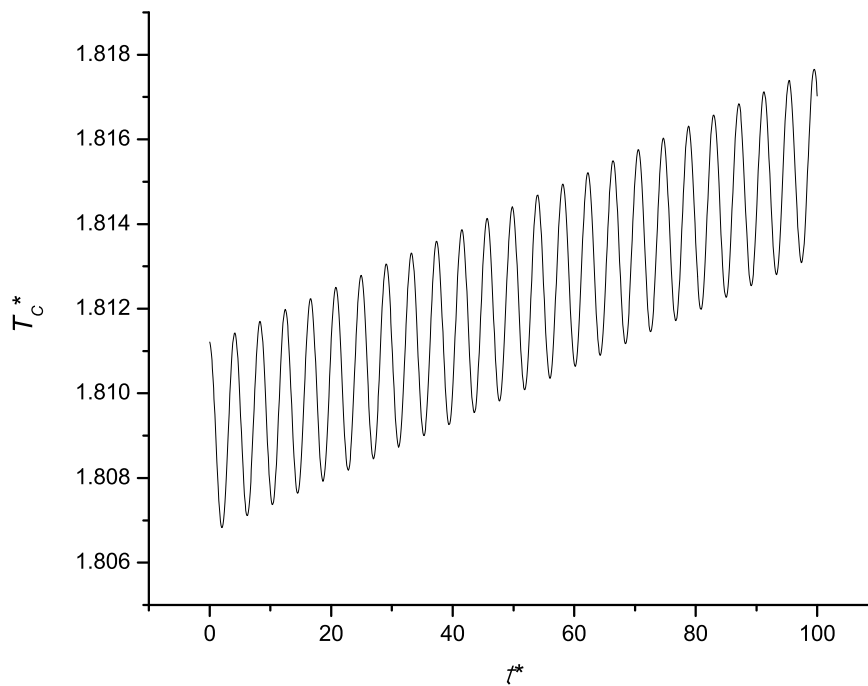


Figura 3.18: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

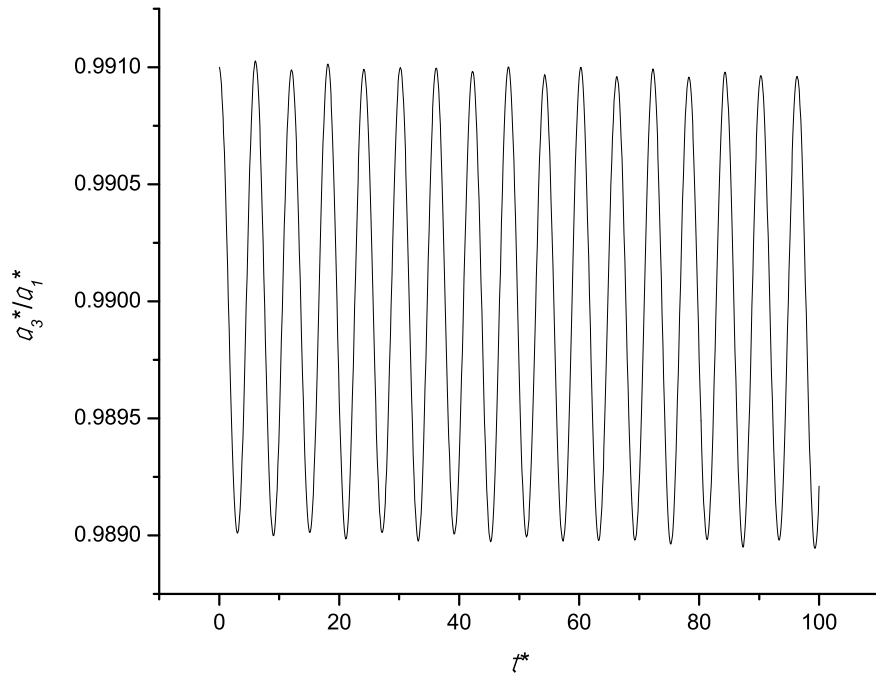


Figura 3.19: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

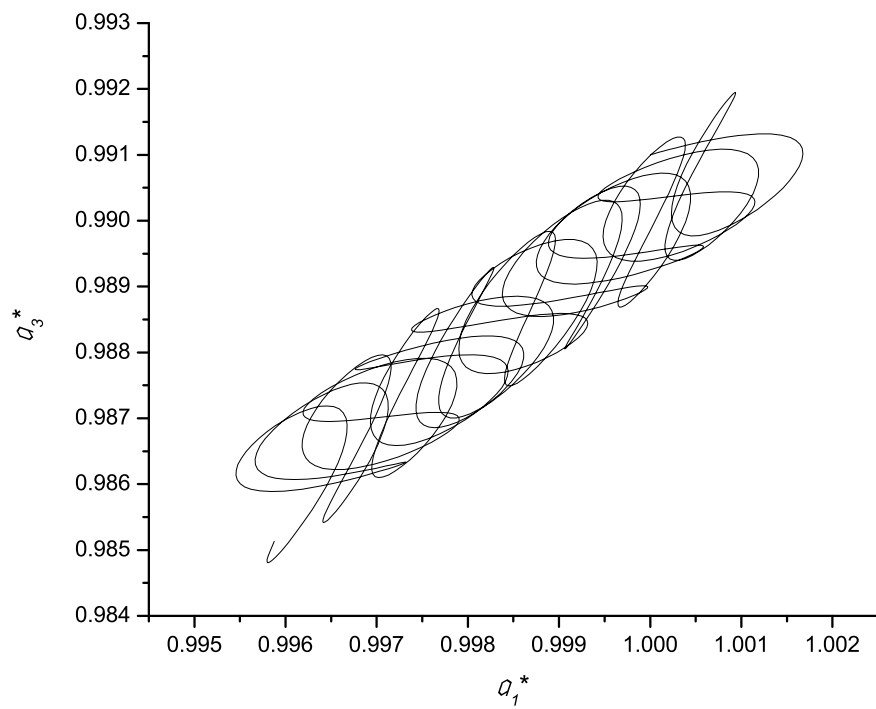


Figura 3.20: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Análisis numérico de la estabilidad de las soluciones estacionarias de las estrellas cefeidas

Ahora analizaremos la estabilidad de las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de un cierto tipo de estrellas llamadas cefeidas a las cuales se va a considerar como esferoides gaseosos no viscosos de He.

En la tabla 3.4 se muestran los valores de la masa M , el radio R , la temperatura superficial T_s y el período de pulsación Υ de las estrellas cefeidas Mekbuda y RT Aurigae (la masa y el radio de las cefeidas estan en función de la masa y el radio del sol¹ respectivamente). En el apéndice H se detalla las características y los mecanismos de pulsación de dichas estrellas (ver pag. 95).

Tabla 3.4

Cefeida	M	R	T_s (K)	Υ (días)
Mekbuda	$5,0M_{\odot}$	$65R_{\odot}$	5840	10,139
RT Aurigae	$4,7M_{\odot}$	$35,1R_{\odot}$	5640	3,7285

Haciendo $a_1(0)=R$ y empleando los valores de las tablas 2.1 y 3.4 se hallan los valores de las magnitudes características de las cefeidas, dadas en (2.9), las cuales son mostrados en la tabla 3.5.

Tabla 3.5

Cefeida	τ (días)	Θ (K)	B (m ³ /mol)	Λ (m ² /s)
Mekbuda	4,9920	$2,64856 \cdot 10^6$	0,156112	$4,7452 \cdot 10^{15}$
RT Aurigae	2,0432	$4,61046 \cdot 10^6$	0,0261511	$3,38077 \cdot 10^{15}$

Empleando los valores de la tabla 2.1, 3.4 y 3.5 se hallan los valores de b^* y T_s^* los cuales son mostrados en la tabla 3.6. En dicha tabla también se muestran los valores de $a_1^*(0)$, $a_3^*(0)$, $\frac{da_1^*}{dt^*}(0)$, $\frac{da_3^*}{dt^*}(0)$, b^* , T_s^* , $T_c^*(0)$ y L_F^* de ambas cefeidas (estas dos últimas son calculadas empleando las ecuaciones (3.8) y (3.9)).

Tabla 3.6

Cefeida	$a_1^*(0)$	$a_3^*(0)$	$\frac{da_1^*}{dt^*}(0)$	$\frac{da_3^*}{dt^*}(0)$	b^*	T_s^*	$T_c^*(0)$	L_F^*
Mekbuda	1	0,99	0	0	0,00015295	0,00220497	1,33263	0,103687
RT Aurigae	1	0,99	0	0	0,00091305	0,00122331	1,33062	0,103687

¹ M_{\odot} :masa del sol= $1,989 \cdot 10^{30}$ kg y R_{\odot} :radio del sol= $6,96 \cdot 10^8$ m

A continuación se analiza la estabilidad de las soluciones estacionarias resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de las cefeidas con los valores modificados de $a_3^*(0)$ y $T_c^*(0)$ que resultan al añadirle 0,001 a cada uno de sus valores mostrados en la tabla 3.6 y luego se muestran cinco figuras para cada una de las cefeidas: la primera muestra el semieje a_1^* en función del tiempo t^* , la segunda el semieje a_3^* en función del tiempo t^* , la tercera la temperatura central T_c^* en función del tiempo t^* , la cuarta la razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^* y la quinta el semieje a_3^* en función del semieje a_1^* . Las observaciones y conclusiones se muestran en las paginas 79 y 80.

Simulaciones para el gas de He

Cefeida Mekkuda $a_3^*(0)=0,99+0,001$ $T_c^*(0)=1,33263+0,001$ $L_F^*=0,103687$ $\nu^*=0$

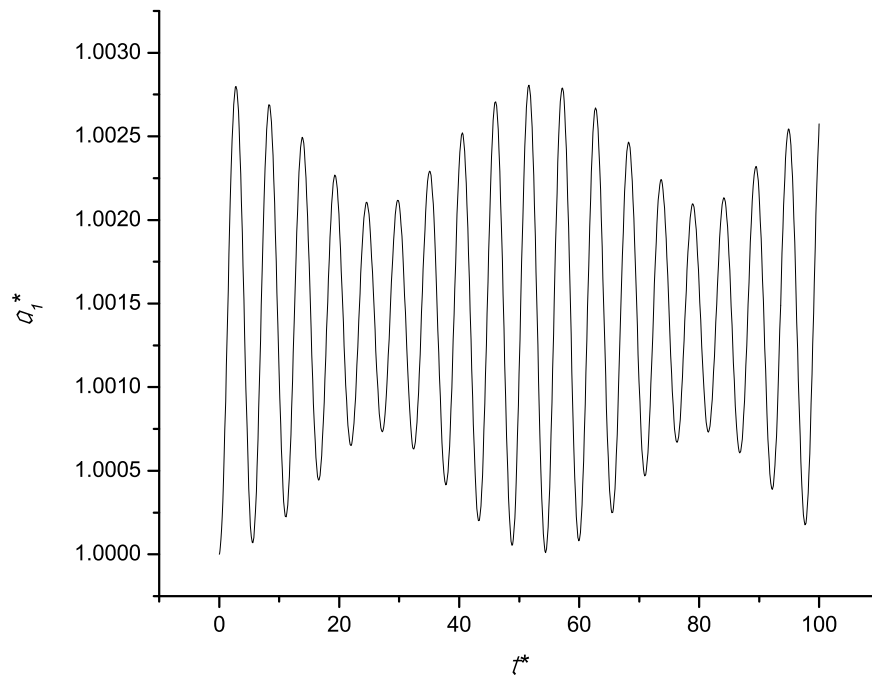


Figura 3.21: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

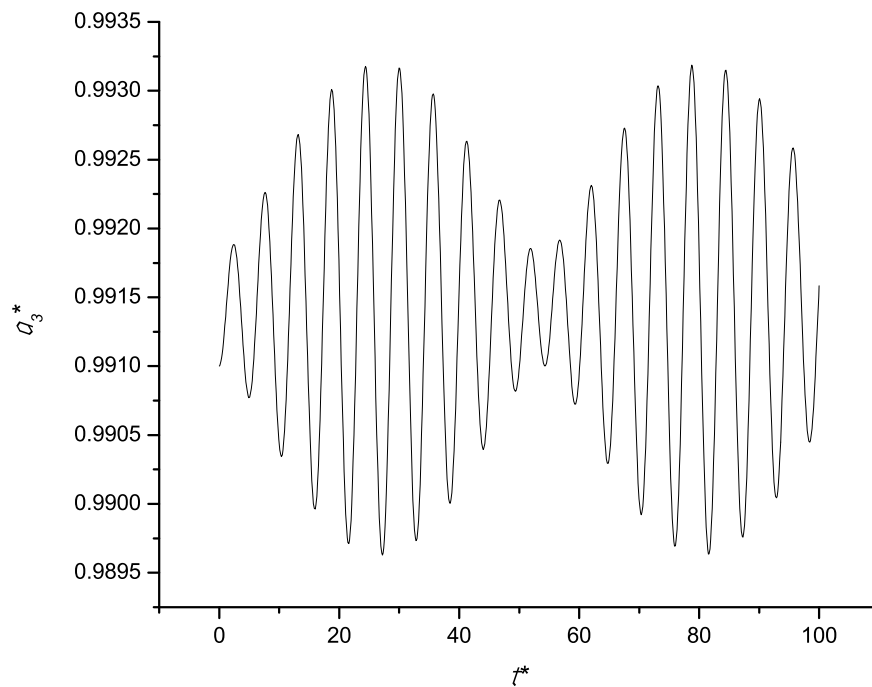


Figura 3.22: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

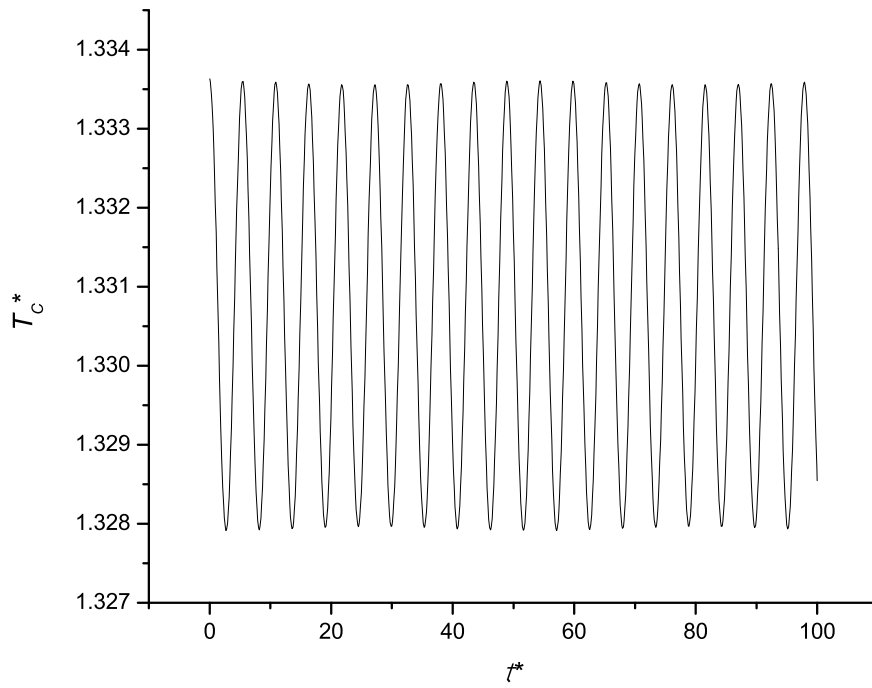


Figura 3.23: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

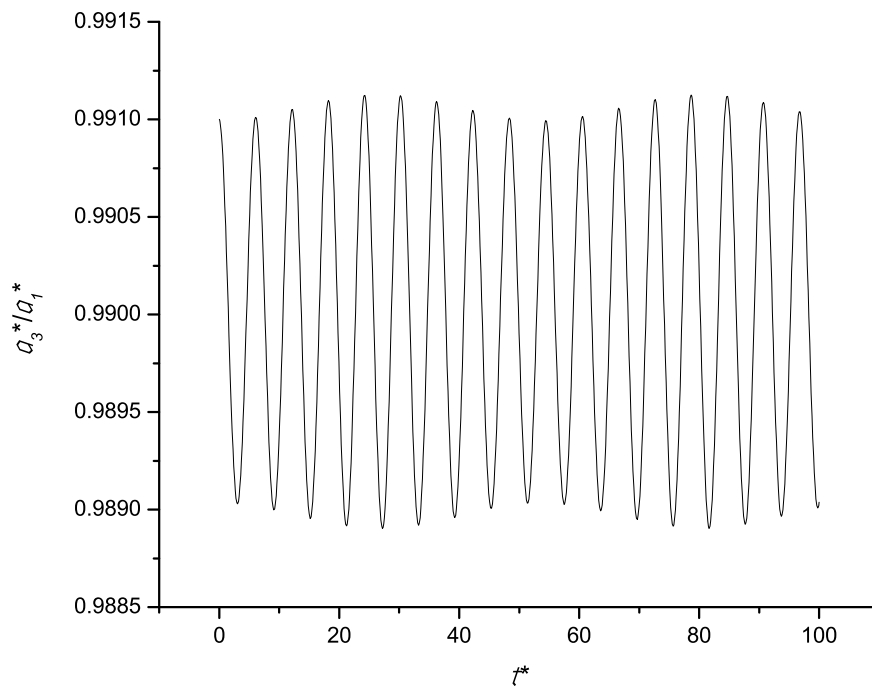


Figura 3.24: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

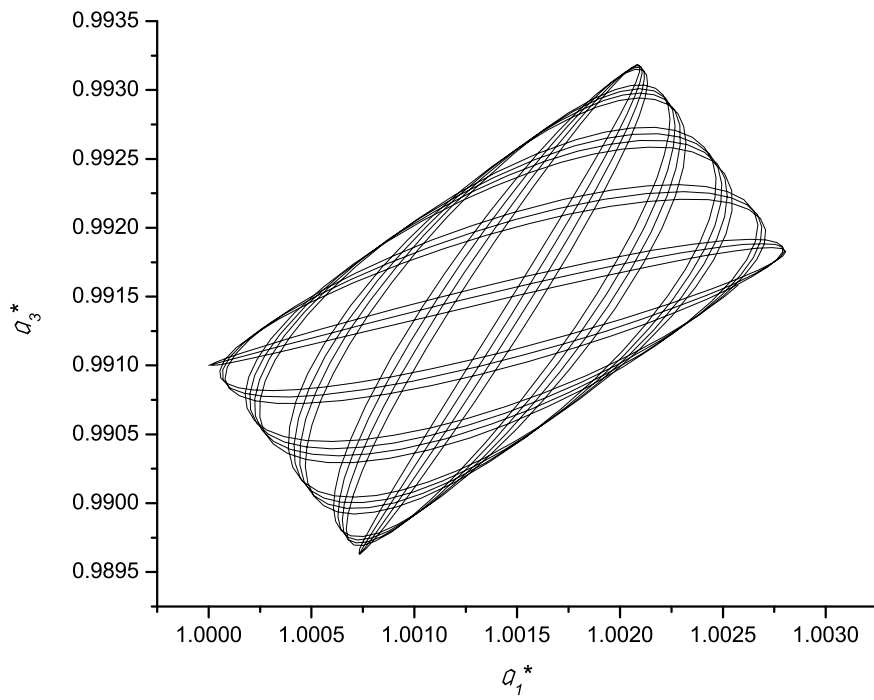


Figura 3.25: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

Cefeida RT Aurigae $a_3^*(0)=0,99+0,001$ $T_c^*(0)=1,57216+0,001$ $L_F^*=0,103687$ $\nu^*=0$

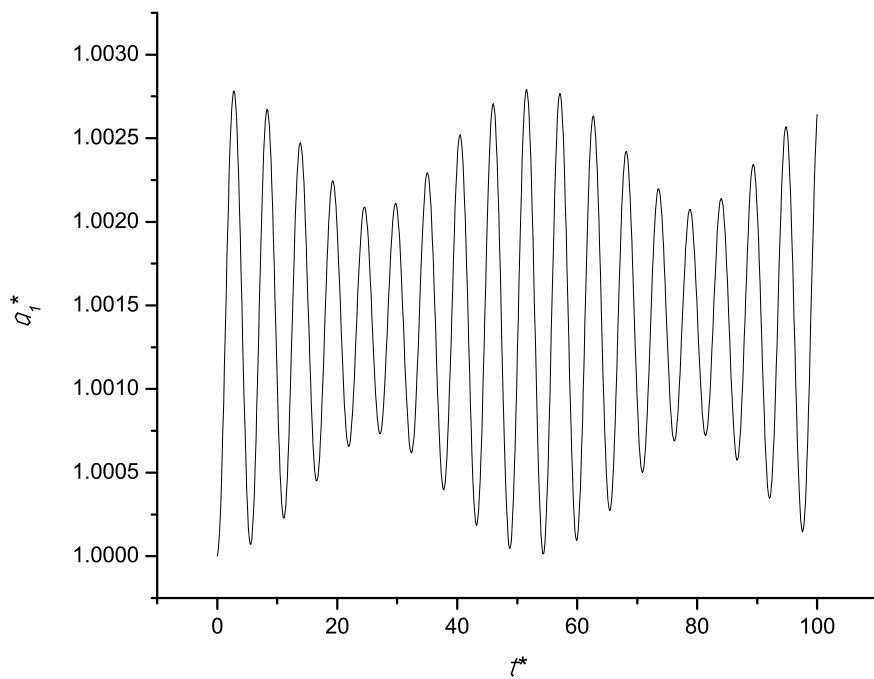


Figura 3.26: Semieje a_1^* en función del tiempo t^*

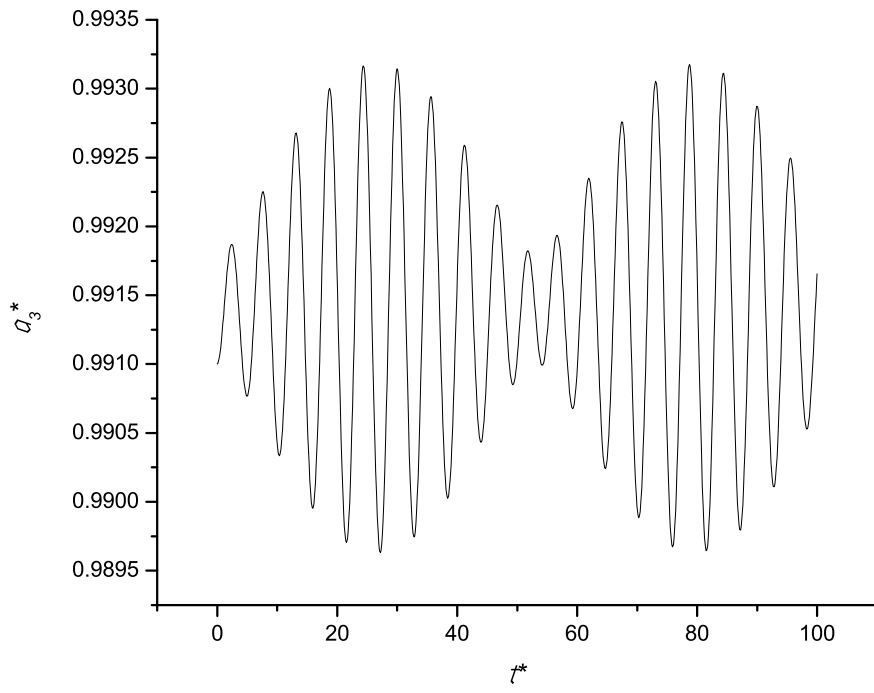


Figura 3.27: Semieje a_3^* en función del tiempo t^*

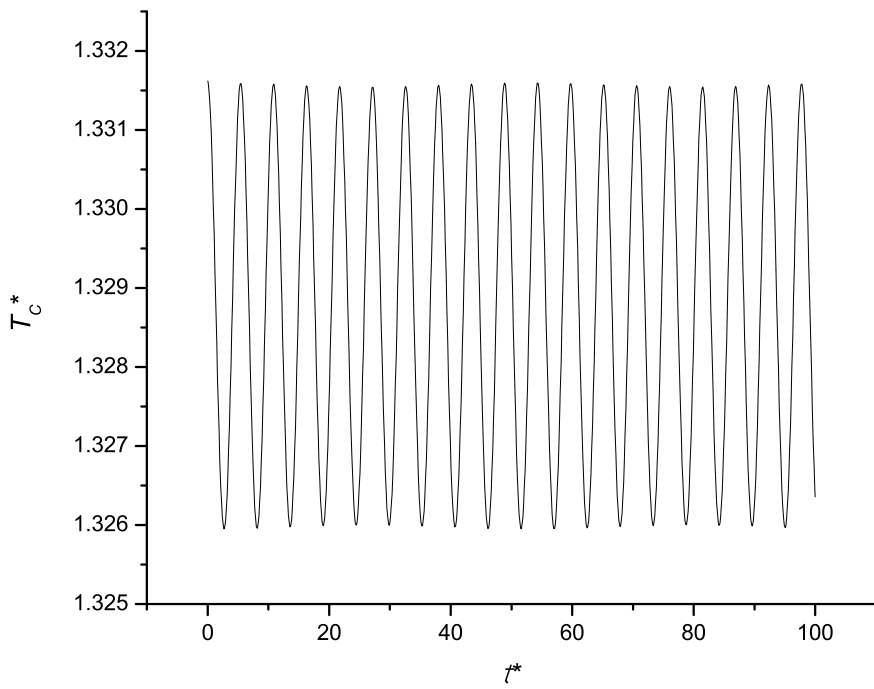


Figura 3.28: Temperatura central T_c^* en función del tiempo t^*

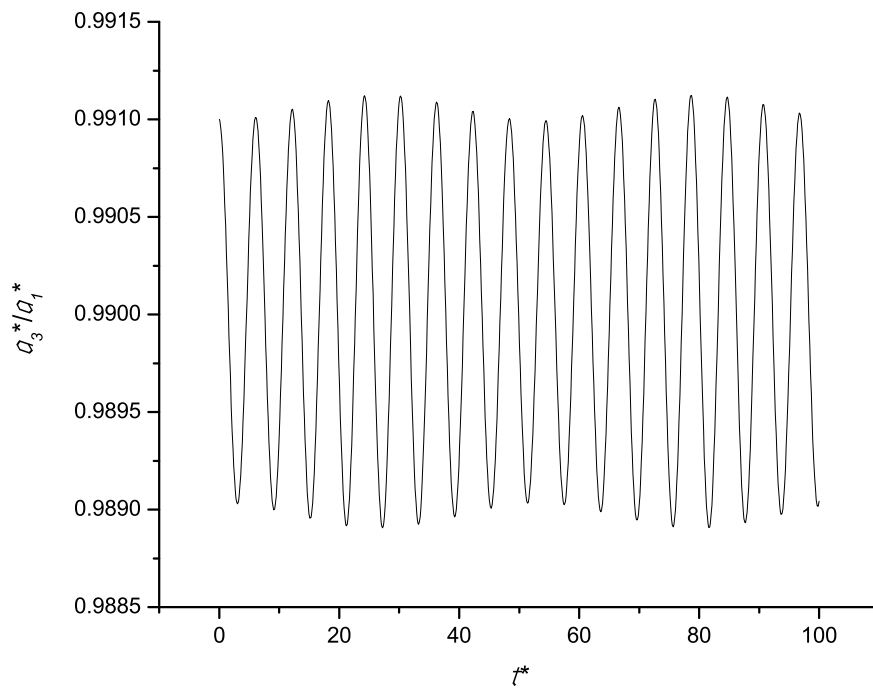


Figura 3.29: Razón de semiejes a_3^*/a_1^* en función del tiempo t^*

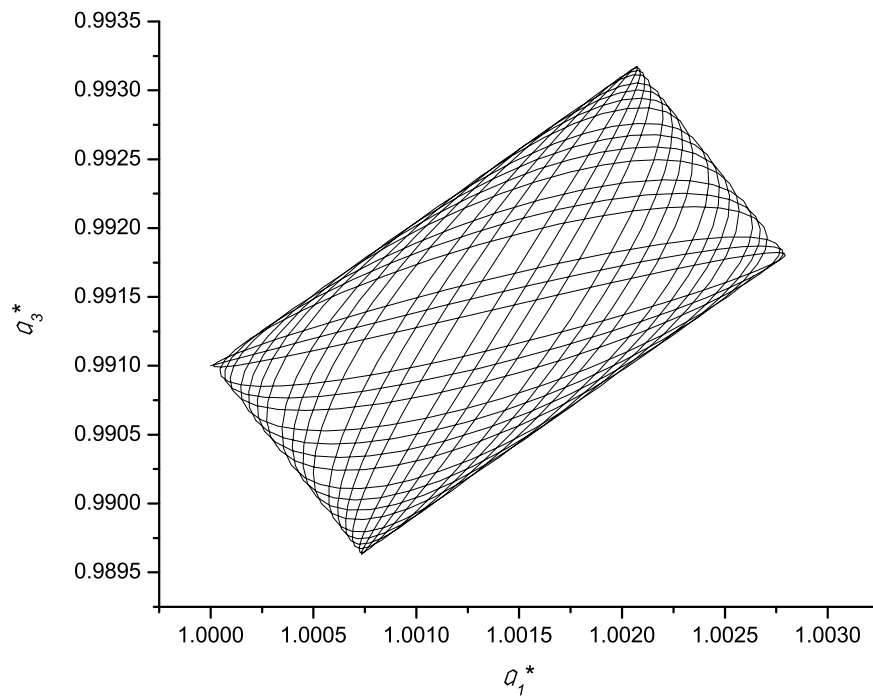


Figura 3.30: Semieje a_3^* en función del semieje a_1^*

3.5 Observaciones y conclusiones

Observaciones:

Para los casos 1 y 3

- a) Los semiejes y la temperatura central son funciones oscilatorias respecto al tiempo y el intervalo de tiempo entre dos máximos consecutivos son casi iguales (por ejemplo ver fig. 3.1, 3.2 y 3.3).
- b) Los semiejes oscilan cerca de sus respectivos valores de equilibrio (por ejemplo ver fig. 3.1 y 3.2).
- c) El esferoide permanece siempre en el estado oblató (por ejemplo ver fig. 3.4).
- d) La proyección de la solución del sistema no lineal, con las condiciones iniciales modificadas, en el plano de semiejes $a_3^*a_1^*$ se encuentra acotada cerca de la proyección de la solución estacionaria (por ejemplo ver fig. 3.5).

Para los casos 2 y 4

- a) Los semiejes son funciones oscilatorias respecto al tiempo, y al finalizar el tiempo empleado los semiejes disminuyen (por ejemplo ver fig. 3.6 y 3.7).
- b) La temperatura central es función oscilatoria respecto al tiempo, y al finalizar el tiempo empleado la temperatura central aumenta (por ejemplo ver fig. 3.8).
- c) El esferoide permanece siempre en el estado oblató (por ejemplo ver fig. 3.9).
- d) La proyección de la solución del sistema no lineal, con las condiciones iniciales modificadas, en el plano de semiejes $a_3^*a_1^*$ no se encuentra acotada (por ejemplo ver fig. 3.10).

Para las cefeidas

- a) Los semiejes y la temperatura central son funciones oscilatorias respecto al tiempo y el intervalo de tiempo entre dos máximos consecutivos son casi iguales (por ejemplo ver fig. 3.21, 3.22 y 3.23).
- b) Los semiejes oscilan cerca de sus respectivos valores de equilibrio (por ejemplo ver fig. 3.21 y 3.22).
- c) El esferoide permanece siempre en el estado oblató (por ejemplo ver fig. 3.24).
- d) La proyección de la solución del sistema no lineal, con las condiciones iniciales modificadas, en el plano de semiejes $a_3^*a_1^*$ se encuentra acotada cerca de la proyección de la solución estacionaria (por ejemplo ver fig. 3.25).
- e) El período de los semiejes (intervalo de tiempo entre dos máximos consecutivos) de las cefeidas Mekkuda y RT Aurigae son 27,733 y 11,351 días respectivamente.

Conclusiones:

- a) Si el gas es viscoso no es posible encontrar soluciones estacionarias.
- b) No existe un esferoide prolato gaseoso estacionario.
- c) La solución estacionaria del sistema de ecuaciones diferenciales linealizados es estable.
- d) La solución estacionaria del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales es estable al menos durante el tiempo empleado. Este resultado es consistente con el análisis de la estabilidad de la solución estacionaria del sistema linealizado.
- e) Puede existir una nube interestelar (formada por He o H_2) de forma elipsoidal tal que sus semiejes tengan pequeñas oscilaciones.
- f) Que el modelo de un gas de Van der Waals de forma elipsoidal, usando la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de balance de energía, se puede considerar como un modelo simple de las estrellas cefeidas, porque el período de pulsación de cada cefeida es del orden del período de sus semiejes hallados al resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales de los semiejes y la temperatura central.

APÉNDICE A

Ecuación de Navier-Stokes

Al reemplazar la ecuación (1.28) en el último término del lado derecho de la ecuación (1.24), se efectúan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 (\vec{e}_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}) &= \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \{ \vec{e}_j \sum_{i=1}^3 [\frac{\partial}{\partial x_i} (-\mu (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}))] \} \\
&= -\frac{\mu}{\rho} \sum_{j=1}^3 \{ \vec{e}_j [\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial u_j}{\partial x_i}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \} \\
&= -\nu \sum_{j=1}^3 \{ \vec{e}_j [\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{\partial u_i}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \} \\
&= -\nu \sum_{j=1}^3 \{ \vec{e}_j [\frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}) + \vec{\nabla}^2 u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \} \\
&= -\nu \sum_{j=1}^3 \{ \vec{e}_j [\frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla}^2 u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \} \\
&= -\nu \{ \sum_{j=1}^3 [\vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] + \sum_{j=1}^3 (\vec{e}_j \vec{\nabla}^2 u_j) - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 [\vec{e}_j \delta_{ij} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \} \\
&= -\nu \{ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla}^2 (\sum_{j=1}^3 u_j \vec{e}_j) - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 [\vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \} \\
&= -\nu (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla}^2 \vec{u} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})),
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 (\vec{e}_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}) = -\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} - \frac{1}{3} \nu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (\text{A.1})$$

Reemplazando la ecuación (A.1) en la ecuación (1.24) se obtiene la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (\text{A.2})$$

APÉNDICE B

Momento angular del elipsoide gaseoso

Debido a que el elipsoide gaseoso se encuentra aislado su momento angular se conserva. El momento angular con respecto al origen de coordenadas, designado por \vec{L} , es calculado empleando su definición:

$$\vec{L} = \int \rho(\vec{r} \times \vec{v}) dx dy dz \quad (\text{B.1})$$

donde la velocidad \vec{v} del fluido en el punto P , medida en el sistema de referencia inercial pero expresada en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es

$$\begin{aligned} \vec{v} = & \left(\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - (\lambda_3 a_1^2 + \omega)x_2 + \lambda_2 a_1^2 x_3 \right) \vec{e}_1 + \left((\lambda_3 a_2^2 + \omega)x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2 - \lambda_1 a_2^2 x_3 \right) \vec{e}_2 \\ & + \left(-\lambda_2 a_3^2 x_1 + \lambda_1 a_3^2 x_2 + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3 \right) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

y el vector posición \vec{r} , expresado en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (\text{B.3})$$

Expresando el elemento de volumen $dx dy dz$ en las coordenadas x_1, x_2 y x_3 mediante

$$dx dy dz = J dx_1 dx_2 dx_3, \quad (\text{B.4})$$

donde J es el jacobiano de transformación de coordenadas definido como

$$J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial x_1 & \partial x / \partial x_2 & \partial x / \partial x_3 \\ \partial y / \partial x_1 & \partial y / \partial x_2 & \partial y / \partial x_3 \\ \partial z / \partial x_1 & \partial z / \partial x_2 & \partial z / \partial x_3 \end{vmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Para hallar el valor del jacobiano se debe emplear la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta), \\ y &= x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta), \\ z &= x_3. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde θ es el ángulo formado por los ejes X_1 y X , luego $\theta = \int \omega(t) dt$.

Reemplazando (B.6) en la ecuación (B.5) se puede demostrar que $J = 1$.

Al reemplazar las ecuaciones (B.2), (B.3) y (B.4) en la ecuación (B.1) se consigue

$$\begin{aligned} \vec{L} = & (-\lambda_2 a_3^2 \int \rho x_2 x_1 dV + \lambda_1 a_3^2 \int \rho x_2^2 dV + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} \int \rho x_2 x_3 dV) \vec{e}_1 \\ & + (-\lambda_3 a_2^2 + \omega) \int \rho x_3 x_1 dV - \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} \int \rho x_3 x_2 dV + \lambda_1 a_2^2 \int \rho x_3^2 dV) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} \int \rho x_3 x_1 dV - (\lambda_3 a_1^2 + \omega) \int \rho x_3 x_2 dV + \lambda_2 a_1^2 \int \rho x_3^2 dV \right) \vec{e}_2 \\
& + \left(+\lambda_2 a_3^2 \int \rho x_1^2 dV - \lambda_1 a_3^2 \int \rho x_1 x_2 dV - \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} \int \rho x_1 x_3 dV \right) \vec{e}_2 \\
& + \left((\lambda_3 a_2^2 + \omega) \int \rho x_1^2 dV + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} \int \rho x_1 x_2 dV - \lambda_1 a_2^2 \int \rho x_1 x_3 dV \right) \vec{e}_3 \\
& + \left(-\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} \int \rho x_2 x_1 dV + (\lambda_3 a_1^2 + \omega) \int \rho x_2^2 dV - \lambda_2 a_1^2 \int \rho x_2 x_3 dV \right) \vec{e}_3, \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

recordemos que las magnitudes λ_i , a_i y ω dependen del tiempo.

Debido a la homogeneidad del gas se puede demostrar que (ver pag. 57 de [1])

$$\int \rho x_i x_j dV = \frac{1}{5} M a_i^2 \delta_{ij}. \quad (\text{B.8})$$

Al reemplazar la ecuación (B.8) en la ecuación (B.7) esta se reduce a

$$\vec{L} = \frac{2}{5} M (\lambda_1 a_2^2 a_3^2 \vec{e}_1 + \lambda_2 a_1^2 a_3^2 \vec{e}_2 + (\lambda_3 a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega (a_1^2 + a_2^2)) \vec{e}_3). \quad (\text{B.9})$$

Como el sistema de referencia no inercial rota alrededor del eje Z entonces el momento angular del elipsoide gaseoso siempre permanecerá paralelo a dicho eje por lo que la ecuación (B.9) se reduce a

$$\vec{L} = \frac{2}{5} M (\lambda_3 a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega (a_1^2 + a_2^2)) \vec{e}_3, \quad (\text{B.10})$$

es decir $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

La magnitud L del momento angular es

$$L = \frac{2}{5} M (\lambda_3 a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{2} \omega (a_1^2 + a_2^2)). \quad (\text{B.11})$$

APÉNDICE C

Demostración de las ecuaciones (1.34), (1.35) y (1.36)

A continuación se obtienen las ecuaciones (1.34), (1.35) y (1.36) considerando la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \nu \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{3} \nu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{0}. \quad (\text{C.1})$$

Recordemos que

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad (\text{C.2})$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3, \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3, \quad (\text{C.4})$$

$$u_1 = \frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - \lambda_3 a_1^2 x_2, \quad (\text{C.5})$$

$$u_2 = \lambda_3 a_2^2 x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2, \quad (\text{C.6})$$

$$u_3 = \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3, \quad (\text{C.7})$$

$$\varphi = -\pi G \rho \left(I - \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 \right), \quad (\text{C.8})$$

$$p = \frac{\rho R}{M - \rho b} (T_c - (T_c - T_s) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}) - a \left(\frac{\rho}{M} \right)^2. \quad (\text{C.9})$$

Para calcular $\partial \vec{u} / \partial t$ usamos

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \equiv \frac{\partial u_1}{\partial t} \vec{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} \vec{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial t} \vec{e}_3. \quad (\text{C.10})$$

Reemplazando las ecuaciones (C.5), (C.6) y (C.7) en la ecuación (C.10), esta se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = & \left[\left(\frac{1}{a_1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} - \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{da_1}{dt} \right)^2 \right) x_1 - \left(2\lambda_3 a_1 \frac{da_1}{dt} + a_1^2 \frac{d\lambda_3}{dt} \right) x_2 \right] \vec{e}_1 \\ & + \left[\left(2\lambda_3 a_2 \frac{da_2}{dt} + a_2^2 \frac{d\lambda_3}{dt} \right) x_1 + \left(\frac{1}{a_2} \frac{d^2 a_2}{dt^2} - \frac{1}{a_2^2} \left(\frac{da_2}{dt} \right)^2 \right) x_2 \right] \vec{e}_2 \\ & + \left[\left(\frac{1}{a_3} \frac{d^2 a_3}{dt^2} - \frac{1}{a_3^2} \left(\frac{da_3}{dt} \right)^2 \right) x_3 \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Como

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3),$$

luego

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} &= (u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3})\vec{e}_1 + (u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3})\vec{e}_2 \\
&\quad + (u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3})\vec{e}_3.
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Sustituyendo las ecuaciones (C.5), (C.6) y (C.7) en la ecuación (C.12), esta se convierte en

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} &= [(\frac{1}{a_1^2} (\frac{da_1}{dt})^2 - \lambda_3^2 a_1^2 a_2^2)x_1 - (\lambda_3 a_1 \frac{da_1}{dt} + \frac{a_1^2 \lambda_3}{a_2} \frac{da_2}{dt})x_2]\vec{e}_1 \\
&\quad + [(\lambda_3 a_2 \frac{da_2}{dt} + \frac{a_2^2 \lambda_3}{a_1} \frac{da_1}{dt})x_1 + (\frac{1}{a_2^2} (\frac{da_2}{dt})^2 - \lambda_3^2 a_1^2 a_2^2)x_2]\vec{e}_2 \\
&\quad + [\frac{1}{a_3^2} (\frac{da_3}{dt})^2 x_3]\vec{e}_3.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Por otra parte efectuando $\vec{\omega} \times \vec{u}$ mediante las ecuaciones (C.3) y (C.4):

$$\vec{\omega} \times \vec{u} = -\omega u_2 \vec{e}_1 + \omega u_1 \vec{e}_2. \tag{C.14}$$

Reemplazando las ecuaciones (C.5) y (C.6) en la ecuación (C.14), esta se convierte en

$$\vec{\omega} \times \vec{u} = -(\lambda_3 \omega a_2^2 x_1 + \frac{\omega}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2)\vec{e}_1 + (\frac{\omega}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - \lambda_3 \omega a_1^2 x_2)\vec{e}_2. \tag{C.15}$$

Empleando las ecuaciones (C.2) y (C.3) efectuamos $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ y obtenemos

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 x_1 \vec{e}_1 - \omega^2 x_2 \vec{e}_2. \tag{C.16}$$

Usando las ecuaciones (C.2) y (C.3) se deduce

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = -\frac{d\omega}{dt} x_2 \vec{e}_1 + \frac{d\omega}{dt} x_1 \vec{e}_2. \tag{C.17}$$

Hallando el $\vec{\nabla}\varphi$ empleando la ecuación (C.8)

$$\vec{\nabla}\varphi = 2\pi G\rho A_1 x_1 \vec{e}_1 + 2\pi G\rho A_2 x_2 \vec{e}_2 + 2\pi G\rho A_3 x_3 \vec{e}_3. \tag{C.18}$$

Calculando el $\vec{\nabla}p$ mediante la ecuación (C.9)

$$\vec{\nabla}p = -\frac{2R\rho}{a_1^2} \frac{T_c - T_s}{\overline{M} - \rho b} x_1 \vec{e}_1 - \frac{2R\rho}{a_2^2} \frac{T_c - T_s}{\overline{M} - \rho b} x_2 \vec{e}_2 - \frac{2R\rho}{a_3^2} \frac{T_c - T_s}{\overline{M} - \rho b} x_3 \vec{e}_3. \tag{C.19}$$

La definición del $\vec{\nabla}^2 \vec{u}$ es

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u} \equiv \vec{e}_1 \vec{\nabla}^2 u_1 + \vec{e}_2 \vec{\nabla}^2 u_2 + \vec{e}_3 \vec{\nabla}^2 u_3. \quad (\text{C.20})$$

Reemplazando las ecuaciones (C.5), (C.6) y (C.7) en la ecuación (C.20) se consigue

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u} = \vec{0}. \quad (\text{C.21})$$

Como

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = (\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \quad (\text{C.22})$$

al sustituir las ecuaciones (C.5), (C.6) y (C.7) en la ecuación (C.22), esta se reduce a

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{0}. \quad (\text{C.23})$$

Finalmente, reemplazando las ecuaciones (C.11), (C.13), (C.15), (C.16), (C.17), (C.18), (C.19), (C.21) y (C.23) en la ecuación (C.1) y agrupando convenientemente los términos de cada componente se encuentra que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a_1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} - \lambda_3^2 a_1^2 a_2^2 - \omega^2 - 2\omega \lambda_3 a_2^2 + 2\pi G\rho A_1 - \frac{2R}{a_1^2} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b} \right) x_1 \vec{e}_1 \\ & - \left(\lambda_3 \frac{a_1^2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + 3\lambda_3 a_1 \frac{da_1}{dt} + \frac{d\lambda_3}{dt} a_1^2 + \frac{2\omega}{a_2} \frac{da_2}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) x_2 \vec{e}_1 \\ & + \left(\lambda_3 \frac{a_2^2}{a_1} \frac{da_1}{dt} + 3\lambda_3 a_2 \frac{da_2}{dt} + \frac{d\lambda_3}{dt} a_2^2 + \frac{2\omega}{a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) x_1 \vec{e}_2 \\ & + \left(\frac{1}{a_2} \frac{d^2 a_2}{dt^2} - \lambda_3^2 a_1^2 a_2^2 - \omega^2 - 2\omega \lambda_3 a_1^2 + 2\pi G\rho A_2 - \frac{2R}{a_2^2} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b} \right) x_2 \vec{e}_2 \\ & + \left(\frac{1}{a_3} \frac{d^2 a_3}{dt^2} + 2\pi G\rho A_3 - \frac{2R}{a_3^2} \frac{T_c - T_s}{M - \rho b} \right) x_3 \vec{e}_3 = \vec{0}. \quad (\text{C.24}) \end{aligned}$$

De esta ecuación se consigue fácilmente las ecuaciones (1.34), (1.35) y (1.36).

APÉNDICE D

Circulación de la velocidad

La circulación de la velocidad, designado por C , se define como la integral de línea de la velocidad a lo largo de una curva cerrada (una curva cerrada puede ser geométrica o material formada por puntos físicos). En nuestro caso de un elipsoide gaseoso los puntos físicos están compuestos por elementos del gas que se mueven sobre una curva Γ que cambia con el tiempo, por lo que

$$C \equiv \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (\text{D.1})$$

donde la velocidad \vec{v} del fluido en el punto P , medida en el sistema de referencia inercial pero expresada en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es

$$\begin{aligned} \vec{v} = & \left(\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - (\lambda_3 a_1^2 + \omega)x_2 + \lambda_2 a_1^2 x_3 \right) \vec{e}_1 + \left((\lambda_3 a_2^2 + \omega)x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2 - \lambda_1 a_2^2 x_3 \right) \vec{e}_2 \\ & + \left(-\lambda_2 a_3^2 x_1 + \lambda_1 a_3^2 x_2 + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3 \right) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

y el vector posición \vec{r} , expresado en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (\text{D.3})$$

Recordemos que el sistema de referencia no inercial rota alrededor del eje Z . Se calculara la circulación de la velocidad a lo largo del contorno del gas situado en el plano XY , es decir la curva es una elipse que rota.

Empleando el teorema de Stokes en el lado derecho de la ecuación (D.1):

$$C = \int_{S_{\Gamma}} (\vec{\nabla}_r \times \vec{v}) \cdot dx dy \vec{k}, \quad (\text{D.4})$$

donde S_{Γ} es la superficie limitada por una elipse cuyas longitudes de sus semiejes son a_1 y a_2 y $\vec{\nabla}_r = \vec{i} \partial / \partial x + \vec{j} \partial / \partial y + \vec{k} \partial / \partial z$ es el operador gradiente con coordenadas x , y y z . Para calcular C se debe expresar \vec{v} en la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Usando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ en la ecuación (D.2), esta se reduce a

$$\begin{aligned} \vec{v} = & \left(\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 - (\lambda_3 a_1^2 + \omega)x_2 \right) \vec{e}_1 + \left((\lambda_3 a_2^2 + \omega)x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2 \right) \vec{e}_2 \\ & + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3 \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Por otra parte, los vectores ortonormales del sistema no inercial $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ están relacionados con los vectores ortonormales del sistema inercial $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ mediante (ver fig. D.1)

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos(\theta) \vec{i} + \text{sen}(\theta) \vec{j}, \\ \vec{e}_2 &= -\text{sen}(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j}, \\ \vec{e}_3 &= \vec{k}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned}
\vec{v} = & [\lambda_3(a_1^2 - a_2^2)\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta) + \frac{\text{cos}^2(\theta)}{a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{a_2} \frac{da_2}{dt}]x \vec{i} \\
& + [-\lambda_3(a_1^2 \text{cos}^2(\theta) + a_2^2 \text{sen}^2(\theta)) - \omega + (\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt})\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta)]y \vec{i} \\
& + [\lambda_3(a_1^2 \text{sen}^2(\theta) + a_2^2 \text{cos}^2(\theta)) + \omega + (\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} - \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt})\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta)]x \vec{j} \\
& + [\lambda_3(-a_1^2 + a_2^2)\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta) + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{\text{cos}^2(\theta)}{a_2} \frac{da_2}{dt}]y \vec{j}. \tag{D.9}
\end{aligned}$$

Efectuando operaciones

$$\vec{\nabla}_r \times \vec{v} = (\lambda_3(a_1^2 + a_2^2) + 2\omega)\vec{k}. \tag{D.10}$$

Al reemplazar la ecuación (D.10) en la ecuación (D.4) se consigue

$$\begin{aligned}
C &= \int (\lambda_3(a_1^2 + a_2^2) + 2\omega)\vec{k} \cdot dx dy \vec{k} \\
&= (\lambda_3(a_1^2 + a_2^2) + 2\omega) \int dx dy, \tag{D.11}
\end{aligned}$$

ya que λ_i , a_i y ω dependen del tiempo.

Como

$$dx dy = J dx_1 dx_2, \tag{D.12}$$

donde J es el jacobiano de transformación de coordenadas. Empleando (D.7) puede demostrarse facilmente que $J = 1$.

Al reemplazar la ecuación (D.12) en la ecuación (D.11) se obtiene

$$C = (\lambda_3(a_1^2 + a_2^2) + 2\omega) \int dx_1 dx_2. \tag{D.13}$$

Como $\int dx_1 dx_2 = \pi a_1 a_2$ entonces la ecuación (D.13) se convierte en

$$C = \pi a_1 a_2 (\lambda_3(a_1^2 + a_2^2) + 2\omega). \tag{D.14}$$

APÉNDICE E

Códigos de programación

funciones

```
function f=funciones(t,x)
global Lfa nua ba Tsa
x1 = x(1); x2 = x(2); x3 = x(3); x4 = x(4); x5 = x(5);
if x2 < x1
e = (1 - (x2/x1)^2)^(1/2);
A1 = (1 - e^2)^(1/2)/e^3 * asin(e) - 1/e^2 + 1;
A3 = 2/e^2 - 2 * ((1 - e^2)^(1/2))/e^3 * asin(e);
elseif x2 > x1
e = (1 - (x1/x2)^2)^(1/2);
A1 = 1/e^2 - (1 - e^2)/(2 * e^3) * log((1 + e)/(1 - e));
A3 = (1 - e^2)/e^3 * log((1 + e)/(1 - e)) - 2/e^2 + 2;
else
A1 = 2/3;
A3 = 2/3;
end
f1 = x4;
f2 = x5;
f3 = -45/16 * nua * (2/x1^2 + 1/x2^2) * (x3 - Tsa)
- 2/3 * x1^2 * x2/(x1^2 * x2 - ba) * (2 * x4/x1 + x5/x2) * x3 + nua * (x4/x1 - x5/x2)^2;
f4 = -2 * A1/(x1 * x2) + x1 * x2/(x1^2 * x2 - ba) * (x3 - Tsa) + Lfa^2/x1^3;
f5 = -2 * A3/x1^2 + x1^2/(x1^2 * x2 - ba) * (x3 - Tsa);
f = [f1; f2; f3; f4; f5];
```

gasinterestelar

```
clear t x V C E D W
global Lfa nua ba Tsa
R = 8.314; G = 6.673 * 10^(-11); M = 2.1 * 1.989 * 10^30;
Pcr = 2.26 * 101300; Tcr = 5.26; Mm = 4.003/1000;
a1i = 12500 * 149597870000; Ts = 6.5; Tci = 10; Lfa = 3; nua = 1 * 10^(-5);
Tsa = 8 * R * a1i * Ts / (3 * G * M * Mm); ba = 3 * M * R * Tcr / (32 * pi * a1i^3 * Mm * Pcr);
x10 = 1; x20 = 0.99; x30 = 8 * R * a1i * Tci / (3 * G * M * Mm); x40 = 0; x50 = 0;
options=odeset('RelTol',1e-5,'AbsTol',[1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 1e-6],'MaxOrder',2);
```



```

[t x]=ode15s(@funciones,[0 20],[x10 x20 x30 x40 x50],options);
for i=1:length(t)
if x(i,2) < x(i,1)
e = (1 - (x(i,2)/x(i,1))^2)^(1/2);
A1 = (1 - e^2)^(1/2)/e^3 * asin(e) - 1/e^2 + 1;
A3 = 2/e^2 - 2 * ((1 - e^2)^(1/2))/e^3 * asin(e);
elseif x(i,2) > x(i,1)
e = (1 - (x(i,1)/x(i,2))^2)^(1/2);
A1 = 1/e^2 - (1 - e^2)/(2 * e^3) * log((1 + e)/(1 - e));
A3 = (1 - e^2)/e^3 * log((1 + e)/(1 - e)) - 2/e^2 + 2;
else
A1 = 2/3;
A3 = 2/3;
end
V(i,1) = x(i,1)^2 * x(i,2)/ba;
C(i,1) = x(i,2)/x(i,1);
E(i,1) = -2 * x(i,4)^2 - x(i,5)^2 - 2 * Lfa^2/x(i,1)^2 + 8 * A1/x(i,2)
+ 4 * x(i,2) * A3/x(i,1)^2 - 3 * x(i,3);
D(i,1) = (x10/x(i,1))^2 * x20/x(i,2);
W(i,1) = (x10/x(i,1))^2;
end
tex1=['tref(a)=',num2str((4 * a1i^3/(3 * G * M))^(1/2)/(24 * 3600 * 365.25))]; disp(tex1);
tex2=['Tref(K)=',num2str(3 * G * M * Mm/(8 * R * a1i))]; disp(tex2);
tex3=['Ts*=',num2str(Tsa)]; disp(tex3);
tex4=['b*=',num2str(ba)]; disp(tex4);
fid=fopen('Helf3nu000001.dat','w');
fprintf(fid,' 12.6f 12.6f 12.6f 12.6f 12.6f 12.6f 12.6f 12.6f 12.6f 12.6f 12.6f\n',
[t x V C E D W]');
fclose(fid);

```

jacobiano

```

clear A A1 A3 A10 A30
R=8.314; G=6.673*10^(-11); M = 2.1 * 1.989 * 10^30;
Pcr = 2.26 * 101300; Tcr = 5.26; Mm = 4.003/1000;
a1i = 12500 * 149597870000; Ts = 6.5;
Tsa = 8 * R * a1i * Ts/(3 * G * M * Mm); ba = 3 * M * R * Tcr/(32 * pi * a1i^3 * Mm * Pcr);

```

```

x10 = 1; x20 = 0.99; x40 = 0; x50 = 0;
syms x1 x2 x3 x4 x5
e = (1 - (x2/x1)^2)^(1/2);
A1 = (1 - e^2)^(1/2)/e^3 * asin(e) - 1/e^2 + 1;
A3 = 2/e^2 - 2 * ((1 - e^2)^(1/2))/e^3 * asin(e);
A10=matlabFunction(A1); A30=matlabFunction(A3);
x30 = Tsa + 2 * A30(x10, x20) * (x20/x10^2 - ba/x10^4);
tex1=['Tc*(0)=',num2str(x30)]; disp(tex1);
Lfa = (2 * (x10^2/x20 * A10(x10, x20) - x20 * A30(x10, x20)))^(1/2);
tex2=['Lf*=',num2str(Lfa)]; disp(tex2);
f1 = x4;
f2 = x5;
f3 = -2/3 * x1^2 * x2/(x1^2 * x2 - ba) * (2 * x4/x1 + x5/x2) * x3;
f4 = -2 * A1/(x1 * x2) + x1 * x2/(x1^2 * x2 - ba) * (x3 - Tsa) + Lfa^2/x1^3;
f5 = -2 * A3/x1^2 + x1^2/(x1^2 * x2 - ba) * (x3 - Tsa);
f = [f1; f2; f3; f4; f5];
x = [x1, x2, x3, x4, x5];
A=matlabFunction(jacobian(f, x));
A(x10, x20, x30, x40, x50)
eig(A(x10, x20, x30, x40, x50))

```

APÉNDICE F

Nube molecular Barnard 68

Barnard 68 es una nube molecular pequeña y también una nebulosa oscura. Se encuentra hacia la constelación de Ofiuco (Ophiuchus), y está dentro de nuestra galaxia a una distancia de unos 500 años luz, tan cerca que la imagen no muestra ninguna estrella entre ella y nosotros. El astrónomo estadounidense Edward Emerson Barnard agregó esta nebulosa a su catálogo de nebulosas oscuras en 1919. Debido a su opacidad, su interior es extremadamente frío, la temperatura promedio es menor que 10 K. Su masa es unas dos veces la del Sol y mide alrededor de medio año luz de diámetro.

Como toda la materia interestelar, Barnard 68 está compuesta mayormente por hidrógeno gaseoso, pero también por una pequeña proporción de partículas sólidas que conforman el polvo cósmico. Cuando la temperatura de una nube es lo suficientemente baja, el hidrógeno se encuentra formando moléculas de dos átomos cada una (H_2). De allí la denominación de nube molecular. Barnard 68 es una nube muy pequeña, en comparación con las nubes moleculares gigantes que existen en nuestra galaxia. Su relativamente alta densidad de gas y polvo la vuelven opaca a la luz. Por ello entra también, como se dijo anteriormente, en la categoría de nebulosa oscura. Otros ejemplos conocidos de nebulosas oscuras son la nebulosa Cabeza de Caballo en la constelación de Orión, y la nebulosa Saco de Carbón que está junto a la Cruz del Sur, ambas de mayor tamaño que Barnard 68. Esta categoría de nebulosas es relevante debido a que podrían ser el antecesor inmediato en la formación de nuevas estrellas. El uso del telescopio VLT en Cerro Paranal, ha revelado la presencia de unas 3700 estrellas de fondo de la Vía Láctea bloqueadas por la nube, unas 1000 de las cuales son visibles en longitudes de onda infrarrojas. Cuidadosas mediciones del grado de oscurecimiento han permitido obtener una idea precisa de la distribución del polvo dentro de la nube. Si no es afectada mayormente por fuerzas externas, la nube de polvo está en equilibrio causado por la presión hacia fuera producida por los movimientos térmicos de las partículas de la nube, y la presión hacia el interior debida a las fuerzas gravitacionales generadas por las mismas partículas. Para que la nube se convierta en una estrella, la gravedad debe ser lo suficientemente alta como para provocar el colapso, y llegar a una temperatura y densidad tal que la fusión pueda ser sostenida. Cuando esto sucede, ha nacido una estrella de la secuencia principal del diagrama HR, que produce energía en un estado de equilibrio entre ambas presiones.

Como es evidente, la nube Barnard 68 no tiene una forma elipsoidal, pero se usa un elipsoide gaseoso como un modelo de dicha nube.

APÉNDICE G

Ecuación de estado de Van der Waals

La ley de gas ideal trata a las moléculas de un gas, como partículas puntuales con colisiones perfectamente elásticas. Esto funciona bien en muchas circunstancias experimentales, con gases diluidos. Pero las moléculas de gas no son masas puntuales, y hay circunstancias donde las propiedades de las moléculas, tienen un efecto medible experimentalmente. Johannes D. van der Waals en 1873 propuso una modificación de la ley de gas ideal, para tener en cuenta el tamaño molecular y las fuerzas de interacción moleculares. Se la refiere normalmente como la ecuación de estado de Van der Waals.

Van der Waals considera que las fuerzas de repulsión entre las moléculas a cortas distancias hacen que éstas se comporten como esferas pequeñas pero impenetrables, de volumen no nulo. El volumen no nulo de las moléculas implica que las mismas, en vez de moverse en el volumen V en que se encuentra confinado el gas, pueden hacerlo solo en un volumen menor $V - nb$, donde nb es el volumen ocupado por las moléculas mismas, n es la cantidad de sustancia del gas presente y b es una constante característica de cada gas. La presión p que ejerce el gas real se ve reducida por las fuerzas de atracción entre las moléculas a distancias intermedias, con respecto a la ejercida por el gas ideal en una magnitud proporcional al cuadrado de la concentración molar de éstas en la muestra: n/V . Si esta reducción de presión se expresa como $-a(n/V)^2$, donde a es una constante característica de cada gas, entonces el efecto combinado de las fuerzas de repulsión y atracción en la ecuación de estado del gas ideal permitiría obtener la ecuación:

$$(p + a(\frac{n}{V})^2)(V - nb) = nRT, \quad (\text{G.1})$$

donde $n = M/\bar{M}$, siendo M y \bar{M} la masa y masa molar del gas respectivamente.

Si la densidad ρ del gas es uniforme, entonces

$$n = \frac{M}{\bar{M}} = \frac{\rho V}{\bar{M}}. \quad (\text{G.2})$$

Reemplazando la ecuación (G.2) en la ecuación (G.1), y despejando p se obtiene

$$p = \frac{\rho RT}{\bar{M} - \rho b} - a\left(\frac{\rho}{\bar{M}}\right)^2. \quad (\text{G.3})$$

APÉNDICE H

Estrellas variables cefeidas

Las cefeidas son un clase particular de estrellas variables, cuya luminosidad varía rítmicamente con un período muy regular.

Características

Las cefeidas presentan modulaciones periódicas de luminosidad extremadamente regulares y, de las variables pulsantes, son las que presentan menores irregularidades en la duración del período de pulsación. Actualmente, se han observado más de 400 cefeidas en nuestra galaxia, en cúmulos globulares como M3, M13 (tres) o M92 (sólo una), y otras 1.000 se han identificado en las Nubes de Magallanes, las dos galaxias satélites de la nuestra. Además, se han observado un número significativo de cefeidas en otras galaxias próximas (por ejemplo Andrómeda o M31, M101, etc).

Las modulaciones de luminosidad que presenta durante todo el ciclo suelen estar comprendidas entre un mínimo de 0,35 y un máximo de 1,5 magnitudes, lo que corresponde a un incremento de cuatro veces el flujo de luz. Una de las características principales que permite distinguirlas de otras estrellas variables es que la amplitud de la curva de luz varía según la banda del espectro visual en la que se observa. Por lo que respecta a los períodos de las cefeidas, están comprendidos entre 0,2 y 100 días.

Mecanismos de pulsación

La luminosidad de una estrella depende, de su temperatura superficial, y de las dimensiones de la superficie emisora. Las variaciones periódicas de su temperatura, pueden producir las modulaciones de luminosidad observadas. En el caso de las cefeidas, las variaciones de temperatura pueden tener lugar a consecuencia de una serie de contracciones y expansiones radiales de la propia estrella en torno a un valor medio del radio. El período de pulsación de una cefeida sería proporcional al valor medio del radio que, a su vez, depende intrínsecamente de las características de la propia estrella. Según este modelo, la contracción de la estrella produce un aumento de temperatura en las regiones centrales y, por consiguiente, del número de reacciones nucleares, lo cual, a su vez, provoca un aumento global de la luminosidad. Luego, el aumento de energía liberada tiende a detener la contracción de la estrella y a producir una dilatación de las capas más externas. Después de la expansión, la estrella se enfría, con la consiguiente disminución de su luminosidad. Alcanzada cierta temperatura mínima, la expansión se detiene y el radio de la estrella se ajusta en torno a una posición de equilibrio. Así, pues, la luminosidad de una variable cefeida es inversamente proporcional a sus dimensiones, lo que significa que es máxima cuando el radio es mínimo, y viceversa.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] **S. Chandrasekhar**, Ellipsoidal Figures of Equilibrium, Dover Publications, Inc., New York, 1987.
- [2] **R. Byron Bird, Warren E. Stewart y Edwin N. Lightfoot**, Fenómenos de Transporte, Editorial Reverté S.A., 1992.
- [3] **Robert Resnick, David Halliday y Kenneth S. Krane**, Física Vol. 1, Tercera edición en español, Editorial Continental, 1993.
- [4] **A. Kiseliov, M. Krasnov y G. Makarenko**, Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Editorial Mir, 1979.
- [5] **Fujimoto, M.**, Gravitational Collapse of Rotating Gaseous Ellipsoids, The Astrophysical Journal, Volume 152, pp. 523-536, May 1968.
- [6] **Ian Dobbs-Dixon, Andrew Cumming, D.N.C Lin**, Radiative hydrodynamic simulations of HD209458b: Temporal variability, astro-ph.EP, pp. 1-30, 6 Jan. 2010.
- [7] **Bergin, Edwin A.; Maret, Sbastien; van der Tak, Floris F. S.; Alves, João; Carmody, Sean M.; Lada, Charles J.**, The Thermal Structure of Gas in Prestellar Cores: A Case Study of Barnard 68, The Astrophysical Journal, Volume 645, Issue 1, pp. 369-380, 2006 July 1.
- [8] **Burkert, Andreas; Alves, Joo**, The Inevitable Future of the Starless Core Barnard 68, The Astrophysical Journal, Volume 695, Issue 2, pp. 1308-1314, 2009 April 20.
- [9] **Kley, W.; Hensler, G.**, Two-dimensional numerical models of the boundary layer of accretion disks in cataclysmic variables, Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361), Volume 172, pp. 124-142, Jan. 1987.
- [10] **Vidalon Edgard**, Estabilidad dinámica de estrellas axisimetricas (tesis de maestría), UNI-FC, 2002.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

XYZ	Sistema de referencia inercial.
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Vectores ortonormales ligados al sistema inercial.
$X_1X_2X_3$	Sistema de referencia no inercial.
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	Vectores ortonormales ligados al sistema no inercial.
\vec{r}	Vector posición del fluido en el punto P .
\vec{v}	Velocidad del fluido en el punto P medida en el sistema inercial.
\vec{u}	Velocidad del fluido en el punto P medida en el sistema no inercial.
a_1, a_2, a_3	Semiejes del elipsoide.
$\vec{\omega}$	Velocidad angular del sistema no inercial.
V	Volumen del elipsoide gaseoso.
M	Masa del elipsoide gaseoso.
ρ	Densidad del gas.
p	Presión del gas.
T	Temperatura del gas.
a, b	Constantes del gas.
R	Constante universal de los gases.
\bar{M}	Masa molar del gas.
φ	Potencial gravitacional.
σ_{ij}	Esfuerzo debido a la viscosidad.
G	Constante de gravitación universal.
μ	Coefficiente de viscosidad dinámico.
ν	Coefficiente de viscosidad cinemático.
\vec{L}	Momento angular del elipsoide gaseoso.
C	Circulación de la velocidad.
e	Excentricidad del esferoide.
C_v	Calor específico a volumen constante.
k	Coefficiente de conductividad térmica.
Υ	Período de pulsación.