Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

TESIS

CONSTRUCCIÓN DE UNA PRO-CATEGORÍA ABELIANA

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR:

JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

ASESOR:

Dr. JOE ALBINO PALACIOS BALDEON

CO-ASESOR:

Dr. CHRISTIAN HOLGER VALQUI HAASE

LIMA-PERÚ

2018

Dedicatoria

A la memoria de mi Padre Maximiliano Felix y a mi amada madre Margarita.
A mis hijos Margaret, Enzo, María José y Maximiliano por ser la razón de mi ser.
Y mi amada esposa Yenida por su paciencia y comprensión.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al profesor Christian Valqui por todas sus indicaciones en el desarrollo de esta tesis, su infinita paciencia en su guía e incondicional apoyo.

Por otra parte, agradezco las valiosas observaciones y sugerencias del, Dr. Joe Palacios, así como las palabras de anímo y apoyo del Dr. Eladio Ocaña.

También quiero agradecer al director del Instituto de Matemática Pura y Aplicada IMCA, Felix Escalante por su apoyo y disposición de ayudarme en temas administrativos tan necesarios para poder cristalizar mi sueño.

Finalmente, y no menos importante, quiero agradecer a Yenida que me apoyó con su paciencia y comprensión en el transcurso de esta aventura que ha sido elaborar mi tesis.

Además no puedo dejar pasar a mis hijos quienes han alegrado mi vida y son la razón para el desarrollo del presento texto.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Nombre del Tesista : Juan Carlos Broncano Torres.

Código : 20026175-G

Título de la Tesis : Construcción de una Pro-categoría abeliana.

RESUMEN

En matemática es común organizar los contenidos en estructuras como espacios vectoriales, grupos, anillos, módulos, espacios de medida, variedades diferenciables y muchas otras. El interés principal de esta riqueza topográfica del pensamiento matemático es comprender de manera detallada el comportamiento, las propiedades y los resultados más generales sobre las clases de objetos (entendidos como redes y procesos) pertinentes a una misma estructura.

Por ejemplo, si analizamos el objeto matemático grupo, este aparece y captura información dispar (bajo los más diversos teoremas de representación) en los ámbitos más distantes de la matemática: grupos de homología y cohomología, grupos de Galois, acciones de grupos, grupos abelianos, grupos de homotopía, grupos algebraicos, grupo de Grothendieck-Teichmuller, grupos de Lie, grupos cuánticos, grupos de Zilber, grupos hiperbólicos, etc. Aquí no nos enfrentemos, ontológicamente, con una estructura universal de grupo que se someta a propiedades suplementarias en cada supuesto nivel de lectura (lógico, algebraico, topológico, diferencial, etc.), sino, sucede que las diversas redes de información matemática codificadas bajo la estructura de grupo se traslapan (pre-síntesis) y se componen (síntesis) para transmitir coherentemente la información.

No existe un objeto matemático sólido que pueda cobrar vida independientemente de los demás, en un supuesto universo primordial, sino existen (pluralmente) redes que evolucionan incesantemente a medida que se conectan con nuevos universos de interpretación matemática.

En este sentido la teoría de categoría desarrollada por Samuel Eilenberg y Saunders MacLane en 1945, busca axiomatizar diversas estructuras matemáticas como una sola con ayuda de un lenguaje común y su objetivo es estudiar las propiedades de un objeto insertándolo en una clase (categoría) de objetos similares con la finalidad de construir transmisores de información para las propiedades del objeto, luego compararlos con

comportamientos similares en otras categorías, y reutilizar toda la información pendular acumulada y poder capturar con nuevos ojos el objeto inicial.
En esa dirección en los años 60 en el Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois-Marie desarrollado en París. Alexander Grothendieck y otros matemáticos desarrollan la categoría de pro-objetos de una categoría. En "Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)" se reúnen parte de las notas de estos seminarios.

En esta tesis, se construye una pro-categoría abeliana denotada por $pro(\mathfrak{C})$ adjunta a una categoría abeliana $\mathfrak{C}$, cuyos objetos son sistemas inversos indexados por conjuntos directos y sus morfismos son clases de equivalencia sobre $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}$. Así mismo, se definen algunas morfismos notables, como por ejemplo los monomorfismos y los epimorfismos. Finalmente se hacen algunas construcciones categóricas, como por ejemplo, el producto, con la finalidad de demostrar el siguiente resultado:
Si $\mathfrak{C}$ es una categoría abeliana, entonces $pro(\mathfrak{C})$ es una categoría abeliana.
Una de las tantas aplicaciones que se pueden dar a las pro-categorías, esta relacionada con el Teorema de Escisión de Cuntz y Quillen, por la enorme simplificación de su demostración; algunos otros usos van, desde la geometría algebraica (ver [3], [4], [16]); la teoría de formas (ver [10], [13], [30]); la topología geométrica [8] hasta las matemáticas aplicadas (ver [10]).

Lima, 11 de diciembre del 2018.

Contenido

Introducción **1**

1 Preliminares **2**

1.1 ¿Cómo inició todo? 2
1.2 Categorías vs Conjuntos 3
1.2.1 Conjunto, Sistema, Estructura y Categoría 4
1.2.2 Problemas en la teoría intuitiva de conjuntos: la paradoja de Russell 5
1.2.3 Solución de las paradojas 6
1.2.4 ¿De qué trata la teoría de categorías? 6
1.2.5 ¿Es la teoría de categorías parasitaria de la teoría de conjuntos? 7
1.3 Categoría. 7
1.3.1 Definición de categoría 7
1.4 Principio de Dualidad y Propiedad Universal 12
1.5 Estructuras Abstractas 14
1.5.1 Tipos de objetos. 14
1.5.2 Clasificación de Morfismos 16
1.6 Construcciones Categóricas 26
1.6.1 Núcleo y Conúcleo 26
1.6.2 Equalizador y Coequalizador 31
1.6.3 Pushout y Pullback 33
1.6.4 Producto y Coproducto 38

2 Categoría Abeliana **46**

2.1 Categoría Pre-aditiva 46
2.1.1 Biproducto 49

2.2 Categoría Aditiva 51
2.3 Categoría Normal y conormal 55
2.4 Categoría Abeliana 55

3 Pro-Categoría **67**
3.1 Sistemas inversos. 67
3.1.1 Sistema inverso. 70
3.1.2 Morfismo entre sistemas inversos. 71
3.2 Equivalencia entre morfismos. 75
3.3 Pro-Categoría 79
3.3.1 Pro-categoría. 79
3.3.2 Objeto Cero. 83
3.3.3 Tipos de Morfismos. 83
3.4 Construcciones Pro-categóricas. 87
3.4.1 Núcleo y Conúcleo. 87
3.4.2 Imagen y Coimagen. 89
3.4.3 Producto y Coproducto. 91
3.4.4 Pre-aditividad y Aditividad. 94
3.4.5 Abelianidad. 95
3.5 Consideraciones finales. 96

Introducción

En el presente trabajo se estudia si la categoría $pro(\mathfrak{C})$ asociada a la categoría $\mathfrak{C}$, hereda algunas propiedades de la categoría que proviene, por ejemplo el poseer núcleo, conúcleo, el ser aditiva y el ser abeliana; de manera específica se desarrollarán los siguientes objetivos:

1. Caracterizar los objetos y los morfismos de $pro(\mathfrak{C})$ con ayuda de la teoría de categorías.

2. Verificar que $pro(\mathfrak{C})$ es una categoría abeliana, si $\mathfrak{C}$ es abeliana.

A continuación se presenta la descripción del contenido por capítulos:

Se inicia el **Capítulo 1** presentando un marco teórico general dedicado exclusivamente a fundamentar la teoría de categorías. En la sección 1, se incia con una introducción, donde se describe el problema que motivó la concretización de la teoría de categorías y se hace una breve incursión a la teoría axiomática de conjuntos y las clases. Luego se revisa nociones teóricas necesarias para familiarizar con la teoría y simbología al lector. En la sección 2, se define el principio de dualidad, como una herramienta para trasladar resultados de una categoría a su opuesta. Es de utilidad para establecer resultados duales. En tanto, en la sección 3, se define la estructura abstracta de la teoría de categorías y por último en la sección 4, se definen algunas construcciones categóricas importantes como, el núcleo y el conúcleo, equalizador y coequalizador, pushout y pullback, producto y coproducto.

El **Capítulo 2** está dedicado al estudio de las categorías abelianas. En la sección 1, se introduce el concepto de categoría pre-aditiva así como el de biproducto; en la sección 2, se define la categoría aditiva; en la sección 3, se define la categoría normal y conormal y se dan algunos resultados importantes y en la sección 4, se define la categoría abeliana, la imagen y la coimagen de un morfismo.

El **Capítulo 3** expone el desarrollo de los dos objetivos de la tesis. Se introducen los sistemas inversos, los morfismos entre sistemas inversos, la pro-categoría y finalmente se establece el resultado principal en el Teorema 3.4.12.

Capítulo 1

Preliminares

> La Categoría enmarca una posible plantilla para cualquier teoría matemática:
> Toda teoría tiene sustantivos y verbos, es decir, objetos y morfismos, además tiene una noción explícita de composición relacionada con los morfismos.
>
> **Barry Mazur.**

1.1 ¿Cómo inició todo?

En 1942, Eilenberg y MacLane, iniciaron su investigación conjunta mediante la aplicación de métodos de cálculos de grupos, los cuales fueron desarrollados por MacLane, para un problema de topología algebraica formulada anteriormente por Borsuk y Eilenberg. El problema era:
Dado el solenoide $\sum \subset S^3$ determinar el número de clases de homotopía de $S^3 - \sum$ en S^2.
Eilenberg mostró que estas clases de homotopía estaban en correspondencia bionívoca con los elementos de un grupo de homología específica, que no podía calcular.
Steenrod descubrió un método diferente de calcular varios grupos relevantes, pero los cálculos eran bastante intrincados. Por esta razón se establece la colaboración entre Eilenberg y MacLane, dando origen al descubrimiento de los grupos de Steenrod, los cuales eran isomorfos a las extensiones de grupos, siendo estos utilizados para calcular grupos de homología. En el proceso, se hizo evidente que muchos homomorfismos de grupos eran naturales. Cabe resaltar que la expresión isomorfismo natural ya era

usada por Eilenberg.
MacLane basó su trabajo en la definición de la naturalidad. El fenómeno al que ellos se refieren como naturalidad era muy común y aparece en diferentes contextos. Por ello, decidieron escribir una nota corta en la que se establecieron la base para una teoría general apropiada. En esta nota, se introducen las nociones de funtor y la de isomorfismo natural. Estas dos nociones fueron usadas para dar un significado preciso a todos los casos de isomorfismos naturales.
Al final de la nota, Eilenberg y MacLane escribieron que el marco axiomático requerido para presentar isomorfismos naturales en otras áreas, como los espacios topológicos, aplicaciones continuas, complejos simpliciales, espacios de Banach y transformaciones lineales, serían estudiados en un artículo posterior.
Este artículo apareció en 1945 bajo el título Teoría general de equivalencias naturales y marca el nacimiento oficial de la teoría de categorías. El objetivo era dar un marco axiomático general en el que la noción de isomorfismo natural podría ser definido y utilizado para capturar lo que se comparte en diversas estructuras matemáticas.
En palabras de MacLane podemos señalar el orden de sus descubrimientos: primero; tuvimos que descubrir la noción de transformación natural, luego funtores y finalmente las categorías.
Eilenberg y MacLane, argumentaban que el concepto de categoría es esencialmente uno auxiliar; pues los conceptos de funtor y transformación natural requieren el precepto de tener definido un dominio y rango.

1.2 Categorías vs Conjuntos

> La teoría de conjuntos es el lenguaje oficial de las matemáticas, de la misma forma que las matemáticas son el lenguaje oficial de la ciencia.
> **Y. Moschovakis.**

El Matemático alemán George Cantor(1845-1918) y el italiano Giuseppe Peano (1858-1932) desarrollaron la teoría de conjuntos con la finalidad de una fundación logicista para formular y desarrollar los fundamentos de las matemáticas.
La teoría de categorías fue creada por el matemático polaco Samuel Einlenberg y Saunders MacLane en 1945 como base fundamental para axiomatizar diversas estructuras matemáticas como una sola.

En 1963 F. William Lawvere afirmó en su tesis doctoral que la teoría de conjuntos debe ser entendida como un caso particular de la teoría de categorías.
No obstante la filosofía de la teoría de conjuntos y la filosofía de la teoría de categoría son opuestas. Existe una diferencia fundamental entre ellas. En teoría de conjuntos partimos de la estructura interna del conjunto para deducir sus relaciones externas entre otros conjuntos. En teoría de categorías se busca deducir la estructura interna de los objetos a partir de sus relaciones externas con otros objetos. En otras palabras, en teoría de conjuntos las relaciones externas se deducen a partir de las estructuras internas de los conjuntos, mientras que en teoría de categorías la estructura interna de los objetos se deduce a partir de las relaciones externas que tiene este con otros objetos.

1.2.1 Conjunto, Sistema, Estructura y Categoría

Conjunto.
Georg Cantor desarrolló la teoría de conjuntos en base a la siguiente definición, dada por él en 1895:
Se entiende por conjunto a la agrupación de objetos bien diferenciados de nuestra percepción o de nuestro pensamiento, reunidos en un todo.
La noción cantoriana de conjunto está ligada a la noción de propiedad. Frege fue uno de los admiradores de la nueva teoría de Cantor, y dio su primera axiomatización. En 1903 B. Russell demostraría que esta era inconsistente y cuestionaría la definición de conjunto en la teoría de Cantor. Pero pronto Zermelo (1908) presenta una nueva axiomatización corregida (donde propone de manera notable el axioma de elección), la cual posteriormente es completada y refinada por Fraenkel (1922), Skolem (1923) y von Newman (1925).
Sistema.
Un sistema matemático es un constructo mental complejo que tiene tres aspectos internos:

1. Uno material, el cual representa el sustrato del sistema ($Conj$) y es una colección de conjuntos, o tal vez clases. Esta colección no puede ser vacía.

2. Uno activo o práctico, el cual representa la dinámica o actividad interna del sistema ($Trans$) y es una colección de transformaciones, operaciones o funciones sobre ($Conj$). Esta colección puede ser vacía.

3. Uno teórico, el cual representa la estática o estructura interna del sistema (Rel) y es una colección de relaciones definidas en ($Conj$), que puede estar vacía.

   Observación 1.2.1 Si $Rel = \emptyset$, entonces el sistema se llama álgebra abstracta y cuando $Trans = \emptyset$ se llama sistema relacional.

Estructura.
Una estructura matemática es la red de relaciones de un sistema. Se debe subrayar que esta red no es solo un agregado arbitrario, sino, a su vez, un nuevo sistema de orden superior con esas relaciones del sistema inicial como componentes.

Categoría.
Una categoría es una estructura que satisface ciertos axiomas los cuales fijan el conjunto de condiciones básicas que lo caracterizan. En el mundo de las categorías se pueden pensar fácilmente que los objetos de la categoría son los sistemas, y que el nombre de la categoría denota la estructura mínima que deben tener todos los sistemas que habitan en ella.

1.2.2 Problemas en la teoría intuitiva de conjuntos: la paradoja de Russell

En 1893 el filósofo alemán Gottlob Frege dio en el primer volumen de su obra Grundgesetze der Arithmetik un sistema de axiomas para la teoría de conjuntos ideada por Georg Cantor, con la intención de proveer una base lógica para la matemática. Entre dichos axiomas había uno que (en lenguaje moderno) decía:
Axioma de comprehensión: Para toda propiedad P existe un conjunto M_P que contiene a todos y exclusivamente a todos los conjuntos que satisfacen la propiedad P. Actualmente escribiríamos:

$$M_P = \{X/X \ es \ un \ conjunto \ y \ satisface \ P\}$$

¿Qué sucede cuando uno elije P como la propiedad: no ser un elemento de sí mismo?.
De acuerdo con el axioma de comprehensión existiría un conjunto:

$$M_P = \{X/X \ es \ un \ conjunto \ y \ X \notin X\}$$

¿Es M_P un elemento de sí mismo? Si respondemos afirmativamente, es decir si $M_P \in M_P$ entonces por definición M_P es un conjunto y $M_P \notin M_P$.

Si respondemos negativamente, dado que M_P es un conjunto y $M_P \notin M_P$, por definición tenemos $M_P \in M_P$; es decir, llegamos en ambos casos a que:

$$M_P \in M_P \Longleftrightarrow M_P \notin M_P \text{ (una contradicción)}$$

Fue Bertrand Russell quien en 1901 descubrió esta inconsistencia del axioma de comprehensión y a la que usualmente se le conoce como paradoja de Russell. Como se puede apreciar el concepto de conjunto no es sencillo e identificarlo sin mayor investigación con el de colección resulta problemático. Para evitar la paradoja de Russell, y otras de esta naturaleza, es necesario tener más cuidado en la definición de conjunto. Otras paradojas, de hecho las primeras en descubrirse, afectaban a colecciones grandes, como por ejemplo la de los ordinales, o la de todos los conjuntos.

1.2.3 Solución de las paradojas

Una solución radical al problema fue propuesta en 1903 por Russell, con su Teoría de Tipos. En ella observa que en las paradojas conocidas hay una componente de reflexividad y de circularidad. Técnicamente se evitan estas al eliminar del lenguaje las formaciones circulares. La primera propuesta de solución se debe a Zermelo, Fraenkel y Skolem (ZFC). Básicamente establecen que la paradoja de Russell muestra que no es admisible asignarle a cualquier propiedad lógicamente bien definida un conjunto como su extensión.

Una segunda propuesta se debe esencialmente a Von Neumann, Bernays y Gödel (GBN). En esta teoría se sigue creyendo en el axioma de abstracción, pero se introducen algunos cambios. Aquí la noción primitiva corresponde a la idea intuitiva de una colección de objetos, que se denomina clase. Los axiomas especifican el comportamiento de las clases y un conjunto es por definición una clase que es miembro de alguna clase.

De estos hechos se desprende una consecuencia filosófica muy interesante, si estamos dispuestos a admitir que la palabra conjunto significa algo, hemos de tener claro que no significa colección de objetos.

1.2.4 ¿De qué trata la teoría de categorías?

Según Steve Awodey (ver [2]), la teoría de categorías busca caracterizar una cierta estructura, pues especifica un entorno estructural, no como el lugar donde ella habita, sino como el esquema formal que permite definir las condiciones de dicha estructura. Por lo tanto, la teoría de categorías sólo precisa de esquemas que responden a la necesidad interna de caracterizar formas, estructuras, estructuras de estructuras, etc., es decir; fundamenta las matemáticas como una realidad en sí misma.

1.2.5 ¿Es la teoría de categorías parasitaria de la teoría de conjuntos?

Según Geoffrey Hellman(ver [17]) la teoría de categorías no logra una independencia total de la teoría de conjuntos en la medida en que su base teórica presume ciertas nociones conjuntistas de manera arbitraria, y en este sentido es parasitaria, opinión que reafirma la crítica de Feferman (ver [15]), según la cual, para definir la noción de categoría o para establecer relaciones entre categorías a través de morfismos y funtores, se apela de manera informal a nociones como operación y colección, las cuales juegan el rol de nociones primitivas.

1.3 Categoría.

1.3.1 Definición de categoría

> Al principio, no consideramos a la teoría de categoría como un campo para nuevos esfuerzos de investigación, sino solo como un lenguaje y una orientación. Tal limitación duró solo una docena de años hasta el advenimiento de funtores adjuntos.
>
> **Saunders Mac Lane.**

La teoría de categoría es un estudio matemático que trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola, mediante el uso de objetos y morfismos. Al mismo tiempo muestra una nueva forma de ver las matemáticas sin incluir las nociones de elementos y pertenencia. Por lo tanto provee un contexto dentro de la cual podemos analizar sistemas estructurados, con independencia de su estructura o lugar-estructura o, más en general, independientemente de lo que sus clases abstractas son.

Definición 1.3.1 (Categoría). Una categoría es una estructura que consiste de una clase de objetos, $obj(\mathfrak{C})$, cuyos elementos(Sistemas) son denotados por A, B,

C,...etc., y una clase de relaciones entre ellos, Hom , a los que llamaremos morfismos, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Una doble asignación que a cada morfismo le asocia un objeto origen (dominio) y un objeto destino (imagen o codominio), de tal manera que, si $(A; B)$ es un par ordenado de objetos de esa categoría, entonces existe una clase de morfismos con dominio A y codominio B que será notada por $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$(posiblemente vacío), luego si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$, entonces será representado por el esquema $f : A \longrightarrow B$.

2. Existe una asignación que asocia a cada $A \in obj(\mathfrak{C})$ un morfismo I_A, llamado identidad el cual será representado por el esquema $I_A : A \longrightarrow A$. Este morfismo preserva la información estructural de un objeto en sí mismo.

3. Para toda terna ordenada (A, B, C) de objetos de $\mathfrak{C}$ y todo par de morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C)$, existe un morfismo asociado h que se denomina composición de f y g; $h = g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; C)$ definido por:

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; C).$$

   Además toda categoría ha de satisfacer los siguientes axiomas:

   Axioma 1.

   $Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$ y $Hom_{\mathfrak{C}}(C; D)$, son disjuntos, a menos que $A = C$ y $B = D$.

   Axioma 2.

   $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

   Axioma 3.

   Para cualesquiera $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow A$ se cumple $f \circ I_A = f$ y $I_A \circ g = g$.

La presentación oficial de la teoría de categorías es algebraica y por lo tanto se hace a través de axiomas, cuyo rol es definir las condiciones bajo las cuales se puede asegurar que una estructura es de cierto tipo. De manera más precisa, podemos decir que los axiomas de la teoría de categorías no cumplen el papel de los axiomas de la Teoría de Conjuntos, pues no son asertóricos. Es decir los axiomas son vacíos de contenido ontológico, no afirman nada en particular de un supuesto objeto.

Observación 1.3.2 Una categoría $\mathfrak{C}$ se llama pequeña si $obj(\mathfrak{C})$ es un conjunto y se dice localmente pequeña si para cualesquiera $A, B \in obj(\mathfrak{C})$; $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ es un conjunto. Algunos autores llaman categoría solamente a las categorías localmente pequeñas.

Ejemplo 1.3.3 Categoría de conjuntos. Si definimos.

1. $obj(Set)$, como la clase formada por todos los conjuntos.
2. $Hom_{Set}(A; B)$, como el conjunto formado por las funciones de A en B, y
3. la composición usual de funciones.

y denotamos por Set a dicha estructura, entonces Set cumple los axiomas de categoría.

Axioma 1.

Dado $f \in \mathrm{Hom}_{Set}(A; B) \cap \mathrm{Hom}_{Set}(C; D)$, demostraremos que $A = C$, $B = D$.

En efecto; como $f \in \mathrm{Hom}_{Set}(A; B)$, se deduce que $Dom(f) = A$ y $Ran(f) = B$, pero también $f \in \mathrm{Hom}_{Set}(C; D)$, luego $Dom(f) = C$ y $Ran(f) = D$. Por lo tanto $A = C$ y $B = D$.

Axioma 2.

Para cualesquiera $f \in \mathrm{Hom}_{Set}(A; B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{Set}(B; C)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{Set}(C; D)$ demostraremos $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

En efecto; dado $a \in A$ (arbitrario), por definición de composición se tiene.

$\Big(h\circ\Big(g\circ f\Big)\Big)(a) = h\Big(\Big(g\circ f\Big)(a)\Big) = h\Big(g\Big(f(a)\Big)\Big) = \Big(h\circ g\Big)\,(f(a)) = \Big(\Big(h\circ g\Big)\circ f\Big)(a).$

Es decir $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Axioma 3.

Demostraremos para cada $A \in obj(Set)$ la existencia de I_A de manera que $f \circ I_A = f$ y $I_A \circ g = g$.

En efecto; es evidente que I_A existe por definición de la aplicación identidad y además verifica $(f \circ I_A)(a) = f\,(I_A(a)) = f(a)$, para todo $a \in A$, $(I_A \circ g)(c) = I_A\,(g(c)) = g(c)$, para todo $c \in C$.

Ejemplo 1.3.4 Categoría de Λ- módulos izquierdos.
Si definimos.

1. $obj(\mathfrak{M}^{\mathfrak{l}}_{\Lambda})$, como la clase formada por todos los Λ- módulos izquierdos.

2. $Hom_{\mathfrak{M}^{\mathfrak{l}}_{\Lambda}}(A; B)$, como el conjunto formado por los homomorfismos de Λ- módulos izquierdos y

3. la composición es la composición usual entre homomorfismos.

y denotamos $\mathfrak{M}^{\mathfrak{l}}_{\Lambda}$ a dicha estructura, entonces $\mathfrak{M}^{\mathfrak{l}}_{\Lambda}$ cumple los axiomas de categoría.

Ejemplo 1.3.5 Categoría de módulos graduados (por los enteros).
Un módulo graduado (por los enteros) denotado por $A = \{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de Λ- módulos A_n. Un morfismo entre módulos graduados de grado k es una familia de homomorfismos de Λ- módulos $\varphi := \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\varphi_n : A_n \longrightarrow B_{n+k}$.
Además la composición de morfismos entre módulos graduados de grado cero $\varphi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow C$ se define como $\psi \circ \varphi : A \longrightarrow C$ de manera que $(\psi \circ \varphi)_n = \psi_n \circ \varphi_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Luego si denotamos por $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_{\Lambda}$ a dicha estructura y definimos,

1. $obj(\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_{\Lambda})$, como la clase formada por los módulos graduados por los enteros.

2. $Hom_{\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_{\Lambda}}(A; B)$, como el conjunto formado por los morfismos de grado cero de dichos módulos graduados y

3. la composición es la misma que $\mathfrak{M}^{\mathfrak{l}}_{\Lambda}$.

entonces $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_{\Lambda}$ cumple los axiomas de categoría.

Ejemplo 1.3.6 Categoría de los complejos de cadenas sobre un módulo Λ.
Una sucesión de Λ-módulos y Λ-módulo homomorfismos:

$$A : \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta^{n}} A_{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} \cdots$$

es denominado complejo de cadenas, si $im(\delta^{n+1}) \subset ker(\delta^n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y en tal caso, será denotado por $A = (A, \delta)$.
Un morfismo entre dos complejos de cadenas $A = (A, \delta)$ y $B = (B, \gamma)$ es una familia

de Λ-módulo homomorfismos $\{f_n : A_n \longrightarrow B_n\}$ tal que $\gamma_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \delta_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"'] & A_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ B_n \arrow[r, "\gamma_n"'] & B_{n-1} \end{tikzcd}$$

Luego, si denotamos a dicha estructura por $\mathfrak{C}_{\Lambda}^{\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}}$ y definimos,

1. $obj(\mathfrak{C}_{\Lambda}^{\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}})$, como la clase formada por los complejos de cadena sobre un anillo Λ.

2. $Hom_{\mathfrak{C}_{\Lambda}^{\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}}}(A; B)$, como el conjunto formado por los morfismos de complejos de cadena.

3. La composición de dos morfismos de cadenas $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $g = \{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ será definida como la composición componente a componente de cada aplicación, esto es $g \circ f = \{g_n \circ f_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

entonces $\mathfrak{C}_{\Lambda}^{\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}}$ cumple los axiomas de categoría.

Ejemplo 1.3.7 Categoría cociente.
Dada la categoría localmente pequeña $\mathfrak{C}$ y cierta relación de equivalencia $\sim$ definida sobre $Hom_{\mathfrak{C}}$ que verifica las siguientes condiciones.

1. Si $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ y $f \sim g$ entonces $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$

2. Si $f \sim f'$ y $g \sim g'$ entonces $f \circ g \sim f' \circ g'$.

Luego, si definimos

a) $obj(\mathfrak{C}/\sim) = obj(\mathfrak{C})$.

b) $Hom_{\mathfrak{C}/\sim}(A, B) := Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)/\sim = \Big\{[f] \ /f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)\Big\}$.

c) La composición es inducida por la composición de $\mathfrak{C}$ y es definida por:

$$\begin{gathered} \circ : Hom_{\mathfrak{C}/\sim}(A; B) \times Hom_{\mathfrak{C}/\sim}(B; C) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{C}/\sim}(A; C) \\ \Big([f], [g]\Big) \longrightarrow [g] \circ [f] = [g \circ f]. \end{gathered}$$

Si denotamos por $\mathfrak{C}/\sim$ a dicha estructura, entonces $\mathfrak{C}/\sim$ cumple los axiomas de categoría.

1.4 Principio de Dualidad y Propiedad Universal

Cuanto más avanzas en matemáticas, especialmente en matemáticas puras, más propiedades universales conocerás.
Tom Leinster.

La teoría de dualidad aplicada a la axiomática categórica permite estudiar sólo un aspecto de los problemas planteados, pues los resultados que se obtengan serán ciertos si y sólo si lo son sus respectivos duales.

Definición 1.4.1 (Sentencia categórica). Una sentencia categórica, es cualquier afirmación $\mathcal{P}$ que se exprese usando los conceptos de, objeto; morfismo; identidad; composición; dominio y codominio. Todos ellos relacionados con ayuda de partículas conectivas y cuantificadores lógicos.

Ejemplo 1.4.2 El objeto A, es un objeto inicial si para cada $B \in obj(\mathfrak{C})$ existe un único morfismo entre A y B.

Definición 1.4.3 (Sentencia categórica dual). Una sentencia categórica dual, es una sentencia categórica denotada por $\mathcal{P}^{op}$ y se obtiene invirtiendo la dirección de cada morfismo. Para indicar dicha sentencia se antepone el conectivo "co" a $\mathcal{P}$. Es decir "co-$\mathcal{P}$".

Ejemplo 1.4.4 La sentencia categórica referida al producto se tiene que su sentencia dual es la referida al coproducto.

Definición 1.4.5 (Sentencia categórica auto-dual). Una sentencia $\mathcal{P}$ es auto-dual, si su dual coincide consigo misma. Es decir $\mathcal{P}^{op} = \mathcal{P}$.

Ejemplo 1.4.6 La sentencia categórica "f es un isomorfismo" es auto-dual; es decir, f es un isomorfismo en $\mathfrak{C}$ si y sólo si f es isomorfismo en $\mathfrak{C}^{op}$.

Proposición 1.4.7 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría, entonces $\mathfrak{C}^{op}$ es una categoría, llamada dual, donde*

1. *$obj(\mathfrak{C}^{op}) := obj(\mathfrak{C})$. Luego $A^{op} := A$ para $A \in obj(\mathfrak{C})$.*

2. *$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(B; A) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$. Luego diremos que $f^{op} : B^{op} \to A^{op}$ es un morfismo en $\mathfrak{C}^{op}$ si y sólo si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$.*

3. La composición es inducida por la de $\mathfrak{C}$ y se define por:

$$f^{op} \circ g^{op} := (g \circ f)^{op} \text{ para todo } f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B) \text{ y todo } g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C).$$

Demostración: *Se verificará cada uno los tres axiomas de categoría.*

Axioma 1.

Si $f^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B) \cap \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(C; D)$, entonces $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A) \cap \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(D; C)$ y como $\mathfrak{C}$ es una categoría, se tiene $A = C$ y $B = D$.

Axioma 2.

Por definición de composición en $\mathfrak{C}^{op}$ y la asociatividad de la composición en $\mathfrak{C}$, se tiene.

$$h^{op} \circ (g^{op} \circ f^{op}) = h^{op} \circ (f \circ g)^{op} = \Big((f \circ g) \circ h\Big)^{op} = \Big(f \circ (g \circ h)\Big)^{op} = (h^{op} \circ g^{op}) \circ f^{op}$$

Axioma 3.

Como $\mathfrak{C}$ es una categoría, para todo $A \in obj(\mathfrak{C}^{op})$, $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; C)$ existe $I_A \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A)$ tal que $I_A \circ f = f$ y $g \circ I_A = g$, luego $(I_A \circ f)^{op} = f^{op}$, $(g \circ I_A)^{op} = g^{op}$, $I_A^{op} \circ f^{op} = f^{op}$ y $g^{op} \circ I_A^{op} = g^{op}$. $\square$

Observación 1.4.8 Por definición de categoría opuesta es evidente que $(\mathfrak{C}^{op})^{op} = \mathfrak{C}$.

Metateorema 1.4.9 Principio de Dualidad. *Dada cualquier categoría $\mathfrak{C}$, si la sentencia categórica $\mathcal{P}$ es valida en $\mathfrak{C}$, entonces su enunciado dual $\mathcal{P}^{op}$ también es valida en $\mathfrak{C}$.*

Ejemplo 1.4.10 Si $\mathcal{P}$ es una propiedad categórica asociada a cada $A \in obj(\mathfrak{C})$ mediante la expresión $\mathcal{P}_{\mathfrak{C}}(A) : \forall B \in obj(\mathfrak{C}), \exists! f : B \longrightarrow A$, entonces para obtener la propiedad dual $\mathcal{P}_{\mathfrak{C}}^{op}(A)$, se debe escribir $\mathcal{P}(A)$ en términos de $\mathfrak{C}^{op}$, como sigue: $\forall B^{op} \in obj(\mathfrak{C}^{op}), \exists! f^{op} : B^{op} \longrightarrow A^{op}$ y finalmente se invierte el sentido del morfismo, para obtener la propiedad dual: $\mathcal{P}_{\mathfrak{C}}^{op}(A) : \forall B \in obj(\mathfrak{C}), \exists! f : A \longrightarrow B$.

Definición 1.4.11 (Propiedad universal). Una propiedad universal es una propiedad que posee cierto objeto y es valida en cualquier categoría, su naturaleza se describe en términos de morfismos, diciendo que hay exactamente un único morfismo que satisface la o las condiciones dadas.

1.5 Estructuras Abstractas

> Quizás el propósito del álgebra categórica es mostrar que lo formal es formalmente formal.
> **J. Peter.**

En está sección se caracterizan algunas propiedades de los objetos y los morfismos, exclusivamente en términos de otros objetos y morfismos, es decir, sólo en el lenguaje de la teoría de categoría, tales definiciones son abstractas, estructurales, operacionales o relacionales. La idea es que los objetos y los morfismos se encuentren determinados por su relación con los demás objetos y morfismos y no por lo que ellos son. A esta propiedad se le llama caracterización abstracta y una forma básica de proporcionar caracterización es a través de una asignación universal o propiedad universal.

1.5.1 Tipos de objetos.

Definición 1.5.1 (Objeto inicial). En toda categoría, un objeto A es un objeto inicial si para cada objeto B existe un único morfismo entre A y B.

Ejemplo 1.5.2 En la categoría Set, A es un objeto inicial si y sólo si $A = \emptyset$.
En primer lugar, demostraremos que si $A = \emptyset$, entonces A es un objeto inicial.
En efecto; si $A = \emptyset$ y B es un conjunto cualquiera, entonces por el axioma de especificación existe $f \subset A \times B = \emptyset$. Pero como el único subconjunto de $A \times B$ es el conjunto $\emptyset$ se tiene $f = \emptyset$ (función vacía). Por lo tanto existe una única función $f : A \longrightarrow B$.

De manera recíproca, demostraremos que si A es un objeto inicial, entonces $A = \emptyset$. Para tal efecto, usaremos la demostración por contradicción. Es decir; si asumimos que $A \neq \emptyset$ y es un objeto inicial, entonces llegaremos a una contradicción.
Como $A \neq \emptyset$ admite por lo menos un elemento, es decir $A = \{z, ...\}$, luego para cierto conjunto $B = \{x, y, ...\}$ con $x \neq y$ es posible definir las funciones $f, g : A \longrightarrow B$ como $f(z) = x$ y $g(z) = y$ para todo $z \in A$; los cuales obviamente son diferentes pues $x \neq y$. Por lo tanto bajo estas condiciones A no puede ser un objeto inicial.

Definición 1.5.3 (Objeto final). En toda categoría, un objeto B es un objeto final si para cada objeto A existe un único morfismo entre A y B.

Ejemplo 1.5.4 En la categoría Set, B es un objeto final si y sólo si B es un conjunto unitario.
En primer lugar, demostraremos que si $B = \{*\}$ es un conjunto unitario y A cualquier conjunto, entonces B es un objeto final. Para tal efecto, consideremos los siguientes casos.

a) si $A = \emptyset$, entonces existe una única función $f : A \longrightarrow B$ que es la función vacía.

b) si $A \neq \emptyset$, entonces existe una única función $f : A \longrightarrow B$ que es la función constante $f(z) = *$; para todo $z \in A$.

Por lo tanto B es un objeto final.

De manera recíproca, demostraremos que si B es un objeto final, entonces B es un conjunto unitario. Para tal efecto, usaremos la afirmación contrapositiva. Es decir, si B no es un conjunto unitario, entonces no es un objeto final. Para tal fin, consideremos los siguientes casos.

a) si $B = \emptyset$, entonces no existe $f \subset A \times \emptyset$, pues cada elemento de A no tendría imagen en B. Por lo tanto B no es un objeto final.

b) si existen $x, y \in B$ tal que $x \neq y$, dado cualquier conjunto $A \neq \emptyset$, es posible definir por lo menos dos funciones distintas $f, g : A \longrightarrow B$. Por lo tanto B no es un objeto final.

Definición 1.5.5 (Objetos isomorfos). En toda categoría $\mathfrak{C}$ dos objetos A, B son isomorfos si existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ tal que $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$.

Lema 1.5.6 *Si A y B son objetos finales, entonces son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración: En efecto; si A y B son objetos finales, entonces existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ y un único $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$, de manera tal que $h \circ h' : B \longrightarrow B$ y $h' \circ h : A \longrightarrow A$. Luego por unicidad se tiene $h \circ h' = I_B$ y $h' \circ h = I_A$. $\square$

Lema 1.5.7 *Si A y B son objetos iniciales, entonces son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración: El resultado es consecuencia directa del principio de Dualidad aplicado al Lema 1.5.6. □

Definición 1.5.8 (Objeto cero). Un objeto que es simultáneamente inicial y final se denomina objeto cero y es denotado por 0.

Observación 1.5.9 Existen categorías $\mathfrak{C}$ que no tienen objeto cero, como el caso de la categoría Set y existen categorías que si lo tienen y cuando esto ocurre para cualquier par de objetos $(A; B)$, $Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$ nunca es vacío, pues siempre existe el morfismo composición.

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$$

Además, la noción de objeto cero es autodual, es decir; $\mathfrak{C}$ tiene objeto 0 si, sólo si $\mathfrak{C}^{op}$ tiene objeto cero y el cero de $\mathfrak{C}$ sirve como cero de $\mathfrak{C}^{op}$.

Lema 1.5.10 *Si una categoría $\mathfrak{C}$ tiene objeto cero entonces es único salvo isomorfismo.*

Demostración: El resultado se obtiene por definición de objeto cero y Lema 1.5.6. □

1.5.2 Clasificación de Morfismos

Definición 1.5.11 (Factorización de un morfismo). Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es factorizable a través de $h : A \longrightarrow C$ (se acostumbra a decir que f es factorizable a través del objeto C), si existe $h' : C \longrightarrow B$ tal que $f = h' \circ h$, es decir el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, dotted, "h'"] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Definición 1.5.12 (Morfismo cero a izquierda). El morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo cero a izquierda si hace cumplir la igualdad $f \circ g = f \circ h$, para cualquier $C \in obj(\mathfrak{C})$ y cualesquiera $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$.

Definición 1.5.13 (Morfismo cero a derecha). El morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo cero a derecha si hace cumplir la igualdad $g \circ f = h \circ f$, para cualquier $C \in obj(\mathfrak{C})$ y cualesquiera $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C)$.

Observación 1.5.14 En toda categoría, por definición, si A es un objeto inicial entonces todo morfismo con dominio A es un morfismo cero a derecha y si B es un objeto final, entonces todo morfismo con codominio B es un morfismo cero a izquierda.

Definición 1.5.15 (Morfismo cero). Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es morfismo cero si es simultáneamente morfismo cero a izquierda y morfismo cero a derecha, o equivalentemente f es morfismo cero si se factoriza a través del objeto cero.

Proposición 1.5.16 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría con objeto cero, entonces para cada par de objetos $A, B \in obj(\mathfrak{C})$ existe un único morfismo cero en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$; denotado por 0_A^B.*

Demostración: Con la finalidad verificar la afirmación se demostrará la existencia y la unicidad.

Existencia.

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; 0)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(0; B)$, entonces se demostrará que $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ es un morfismo cero.

En efecto; por la observación 1.5.14, f es cero a izquierda y g cero a derecha. Además para $h, h' : B \longrightarrow C$ se tiene,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = (h' \circ g) \circ f = h' \circ (g \circ f).$$

Por lo tanto $g \circ f$ es un morfismo cero a izquierda; de manera análoga se logra establecer que $g \circ f$ es un morfismo cero a derecha. Por lo tanto existe un morfismo cero en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ denotado por 0_A^B.

Unicidad.

Con la finalidad de demostrar que existe un único morfismo cero en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$. Verificaremos que cualquier morfismo cero $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ es factorizable a través del objeto cero.

En efecto; como existe $0_A^B = g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$. Consideremos el diagrama,

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & B \arrow[r, shift left, "0_B^B"] \arrow[r, shift right, "I_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

dado que 0_B^B es morfismo cero, se tiene $0_B^B \circ f' = 0_B^B \circ (g \circ f)$. También, como f' es morfismo cero, se tiene $0_B^B \circ f' = I_B \circ f'$, puesto que f y g son morfismos únicos en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;0)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(0;B)$ respectivamente; de las igualdades anteriores se deduce $0_B^B \circ (g \circ f) = f'$. Pero como g es morfismo cero a derecha se tiene $0_B^B \circ g = I_B \circ g$; luego $f' = g \circ f$. Por lo tanto f' es factorizable a través del objeto cero, es decir $f' = 0_A^B$. $\square$

Definición 1.5.17 (Categoría con morfismo cero). Toda categoría $\mathfrak{C}$ posee morfismos cero si para cualesquier par de objetos $A, B \in obj(\mathfrak{C})$, existe el morfismo $0_A^B : A \longrightarrow B$ que verifica cada uno de los siguientes ítems.

a) $h \circ 0_A^B = 0_A^C$, para todo $C \in obj(\mathfrak{C})$ y $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(B;C)$;

b) $0_A^B \circ h' = 0_C^B$, para todo $C \in obj(\mathfrak{C})$ y $h' \in Hom_{\mathfrak{C}}(C;A)$.

Observación 1.5.18 En toda categoría $\mathfrak{C}$ con morfismos cero la colección de morfismos cero $\{0_A^B\}$ es única.

Proposición 1.5.19 *Toda categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero es una categoría con morfismos cero.*

Demostración: Para cada par $A, B \in obj(\mathfrak{C})$, demostraremos que existe el morfismo $0_A^B : A \longrightarrow B$, tal que verifica cada uno los siguientes ítems.

a) $h \circ 0_A^B = 0_A^C$, para todo $C \in obj(\mathfrak{C})$ y $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(B;C)$.

b) $0_A^B \circ h' = 0_C^B$, para todo $C \in obj(\mathfrak{C})$ y $h' \in Hom_{\mathfrak{C}}(C;A)$.

Verificaremos solo el ítem *a*), pues para el caso *b*) el razonamiento es totalmente análogo.
En efecto; por la Proposición 1.5.16, existe un único $0_A^B \in Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$ tal que $0_A^B = g \circ f$ para cierto $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A;0)$ y $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(0;B)$. Luego del diagrama conmutativo adjunto,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "0_A^B"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[r, "h"] & C \\
& 0 \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "h\circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

se tiene, $h \circ 0_A^B = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Por lo tanto $h \circ 0_A^B$ es factorizable a través del objeto cero. $\square$

Observación 1.5.20 Es posible que una categoría posea morfismos cero sin tener objeto cero. Tal es el caso de la categoría Nat, determinada por el conjunto numérico $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ cuyo único objeto es 0 donde $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Nat}}(0, 0) = \{\mathrm{n} : 0 \longrightarrow 0, \mathrm{n} \in \mathbb{N}_0\}$ y la composición entre morfismos es dado por el producto usual de números naturales es decir, si $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \circ m = n \times m$. Está categoría no posee objeto cero pero sí posee morfismo cero y es determinado por $0 : 0 \longrightarrow 0$ pues $n \times 0 = 0 \times n = 0$ para todo $n \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Nat}}(0, 0)$.

Definición 1.5.21 (Retracción). El morfismo $f : A \longrightarrow B$ es una retracción, si existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ tal que $g \circ f = I_A$ (es decir f tiene inverso a izquierda).

Definición 1.5.22 (Coretracción). El morfismo $f : A \longrightarrow B$ es una coretracción, si existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ tal que $f \circ g = I_B$ (es decir f tiene inverso a derecha).

Observación 1.5.23 En algunas categorías la noción de ser invertible a izquierda es asociada a la inyectividad pero en general esto es falso, por ejemplo en la categoría de los $\mathbb{Z}$-módulos esto no se cumple.
En efecto; si consideramos el homomorfismo inclusión $i : 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $i(2k) = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$ es inyectivo, pero i no tiene inverso a izquierda pues si fuera el caso existiría un homomorfismo $g : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$, tal que $g \circ i = I_{2\mathbb{Z}}$ y en tal caso se tendría que $g(1) = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ y $g(2) = 4m = g\Big(i(2)\Big) = 2$, lo cual es absurdo.

Definición 1.5.24 (Monomorfismo). El morfismo $f : A \longrightarrow B$ es monomorfismo, si es cancelable por izquierda; es decir, cuando para todo $C \in obj(\mathfrak{C})$ y para todo par de morfismo $g, h : C \longrightarrow A$, la igualdad $f \circ h = f \circ g$ implica $h = g$.

Observación 1.5.25 A partir de la definición de monomorfismo se deduce,

1. $I_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; A)$ es un monomorfismo para todo $A \in obj(\mathfrak{C})$.
2. Toda retracción es un monomorfismo.

Ejemplo 1.5.26 En la categoría Set los monomorfismos son las funciones inyectivas. Es decir; una función $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva si, solamente si, para todo par de funciones $g, h : C \longrightarrow A$, la igualdad $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$.
En primer lugar, demostraremos que si f es una función inyectiva, entonces es un monomorfismo. Para tal efecto; consideremos las funciones $g, h \in \mathrm{Hom}_{Set}(C; A)$

tales que $(f \circ h)(x) = (f \circ g)(x) = f\Big(g(x)\Big) = f\Big(h(x)\Big)$ para todo $x \in C$. Como f es inyectiva de la expresión anterior se tiene $g(x) = h(x)$, es decir $g = h$.

De manera recíproca, demostraremos que si $f : A \longrightarrow B$ es monomorfismo, entonces es una función inyectiva. Es decir; si $x, y \in A$ y $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.
En efecto; si consideramos $C = \{*\}$ y definimos las funciones $g(*) = x$, $h(*) = y$; se tiene $(f \circ g)(*) = f(x) = f(y) = (f \circ g)(*)$. Luego $f \circ g = f \circ h$, como f es monomorfismo se deduce $h = g$, es decir $x = h(*) = g(*) = y$.

Proposición 1.5.27 *Si $h = g \circ f$ es monomorfismo entonces f es un monomorfismo.*

Demostración: En efecto; Si h', h'' son morfismos tales que $f \circ h' = f \circ h''$ entonces,

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ h') &= g \circ (f \circ h'') \\ (g \circ f) \circ h' &= (g \circ f) \circ h'' \\ h \circ h' &= h \circ h'' \\ h' &= h'' \end{aligned}$$

Por lo tanto f es monomorfismo. □

Observación 1.5.28 El siguiente ejemplo muestra que la noción de monomorfismo no siempre coincide con la noción de inyectividad. Por ejemplo en la categoría formada por los grupos abelianos divisibles (un grupo abeliano G es divisible si para cada $g \in G$ y cada, entero $r \neq 0$ existe un elemento $g' \in G$ tal que $rg' = g$). Un monomorfismo no necesariamente es inyectivo.
En efecto; si consideramos los grupos abelianos divisibles $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se demuestra que la proyección al cociente $\pi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un monomorfismo que no es inyectivo.
Para verificar tal afirmación consideremos un grupo abeliano divisible G y dos homomorfismos $f, g : G \longrightarrow \mathbb{Q}$, de modo que si suponemos que $f \neq g$, entonces demostraremos que necesariamente $\pi \circ f \neq \pi \circ g$.
En efecto, como $f \neq g$, existe $x \in G$, tal que $f(x) - g(x) = r/s$, con $r, s \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y como G es divisible, existe $x' \in G$ tal que $rx' = x$, intercambiando x por x' podemos suponer que $r = 1$ y por un argumento análogo, el elemento x puede siempre elegirse de manera tal que $s \neq \pm 1$, la clase $1/s \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es distinta de cero, es decir $(\pi \circ f)(x) \neq (\pi \circ g)(x)$ para todo $x \in G$. Luego $\pi \circ f \neq \pi \circ g$, lo cual demuestra que π es un monomorfismo.

Definición 1.5.29 (Epimorfismo). El morfismo $f : A \longrightarrow B$ es epimorfismo, si es cancelable por derecha; es decir, cuando para todo $C \in obj(\mathfrak{C})$ y para todo par de morfismos $g, h : B \longrightarrow C$ la igualdad $h \circ f = g \circ f$ implica $h = g$.

Observación 1.5.30 De la definición de epimorfismo se deduce.

1. $I_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; A)$ es un epimorfismo para todo $A \in obj(\mathfrak{C})$.

2. Toda coretracción es un epimorfismo.

Ejemplo 1.5.31 En la categória *Set*, los epimorfismos son las funciones sobreyectivas. Es decir; una función $f : A \longrightarrow B$ es sobreyectiva si y sólo si, para todo par de funciones $g, h : B \longrightarrow C$, la igualdad $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$.
En primer lugar, demostraremos que si f es epimorfismo, entonces es una función sobreyectiva.
En efecto; sea $f \in \mathrm{Hom}_{Set}(A; B)$ y $g, h \in \mathrm{Hom}_{Set}(B; D)$ con $D = \{0, 1\}$. Si definimos,

$$g(b) = \begin{cases} 1 & si\ b \in im(f) \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

y $h(b) = 1$ para todo $b \in B$, por construcción se tiene $g \circ f = h \circ f$, por lo tanto $g = h$ y en consecuencia, $im(f) = B$. Luego f es una función sobreyectiva.

En segundo lugar, si f una función sobreyectiva, dados $g, h \in \mathrm{Hom}_{Set}(B; C)$ con $h \circ f = g \circ f$, entonces demostraremos que $h = g$.
Tomemos $b \in B$. La sobreyectividad de f implica la existencia de $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Luego de la igualdad $g\Big(f(a)\Big) = h\Big(f(a)\Big)$ se tiene $g(b) = h(b)$ y como b es elegido arbitrariamente en B, se tiene $g = h$. Por lo tanto f es un epimorfismo.

Observación 1.5.32 El siguiente ejemplo muestra que la noción de epimorfismo no siempre coincide con la noción de sobreyectividad. La inclusión $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es un homomorfismo no sobreyectivo que es un epimorfismo en la categoría formada por todos los dominios de integridad.
En efecto, es evidente que no es sobreyectivo. Verificaremos que es un epimorfismo. Sea M un dominio de integridad y $f, h : \mathbb{Q} \longrightarrow M$ homomorfismos tales que $f \circ i = h \circ i$. Para todo número racional $\frac{1}{q}$ con $q \neq 0$ se cumple.

$$q \times f(\tfrac{1}{q}) = \overbrace{f(\frac{1}{q}) + f(\frac{1}{q}) + ... + f(\frac{1}{q})}^{q-veces} = f\underbrace{\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q}\right)}_{q-veces} = f(1)$$

$$q \times h(\tfrac{1}{q}) = \overbrace{h(\frac{1}{q}) + h(\frac{1}{q}) + ... + h(\frac{1}{q})}^{q-veces} = h\underbrace{\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q}\right)}_{q-veces} = h(1)$$

Luego, $q \times f(\frac{1}{q}) - q \times h(\frac{1}{q}) = q \times \Big(f(\frac{1}{q}) - h(\frac{1}{q})\Big) = 0$.
Cuando $\mathbb{Z} \subset M$ se tiene $f(\frac{1}{q}) = h(\frac{1}{q})$, por lo tanto para todo número racional $\frac{p}{q}$ se cumple,

$$f(\tfrac{p}{q}) = f\left(\tfrac{p}{1} \times \tfrac{1}{q}\right) = f\left(\tfrac{p}{1}\right) \times f\left(\tfrac{1}{q}\right) = h\left(\tfrac{p}{1}\right) \times h\left(\tfrac{1}{q}\right) = h\left(\tfrac{p}{q}\right).$$

Es decir $f = h$.
Cuando $\mathbb{Z} \not\subset M$, se tiene $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Q}; M) = \{0\}$, por lo tanto $f = g,\ \forall f; g$.

Proposición 1.5.33 *Dada la categoría $\mathfrak{C}$, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

a) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ *es un monomorfismo si y sólo si* $f^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(B; A)$ *es un epimorfismo.*

b) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ *es un epimorfismo si y sólo si* $f^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(B; A)$ *es un monomorfismo.*

Demostración: Sólo demostraremos el ítem $a)$ porque el ítem $b)$ es completamente análogo. En efecto; si $h^{op}, g^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; C)$ son tales que $h^{op} \circ f^{op} = g^{op} \circ f^{op}$, entonces demostraremos que $h^{op} = g^{op}$.
En efecto; de $h^{op} \circ f^{op} = g^{op} \circ f^{op}$ se obtiene $(f \circ h)^{op} = (f \circ g)^{op}$, es decir $f \circ h = f \circ g$ en la categoría $\mathfrak{C}$ y como f es un monomorfismo se concluye $h = g$. Por lo tanto $h^{op} = g^{op}$.
De manera recíproca; si $h, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(D; A)$ son tales que $f \circ h = f \circ g$, entonces demostraremos que $h = g$.
En efecto, de la igualdad $f \circ h = f \circ g$ se tiene $h^{op} \circ f^{op} = g^{op} \circ f^{op}$ y como f^{op} es un epimorfismo en $\mathfrak{C}^{op}$ se concluye $h^{op} = g^{op}$. Por lo tanto $h = g$. $\square$

Proposición 1.5.34 *Si $h = g \circ f$ es epimorfismo entonces g es un epimorfismo.*

Demostración: El resultado se verifica por un razonamiento análogo a la demostración de la Proposición 1.5.27. $\square$

Proposición 1.5.35 *Si f y g son monomorfismos (epimorfismos) entonces $f \circ g$ es monomorfismo (respectivamente epimorfismo).*

Demostración: El resultado se obtiene por la definición de monomorfismo y epimorfismo. $\square$

Definición 1.5.36 (Isomorfismo). En toda categoría $\mathfrak{C}$, un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo, si existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$. Tal morfismo es llamado inversa de f y será denotado por f^{-1}.

Observación 1.5.37 Por las observaciones 1.5.25 y 1.5.30 es evidente que todo isomorfismo es simultáneamente monomorfismo y epimorfismo pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, si consideramos la categoría $\mathfrak{C}$ donde $obj(\mathfrak{C}) = \mathbb{N}$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \mathbb{N}$ y la composición es el producto usual de números naturales, entonces se tiene para cierto $c \neq 1 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ y $m, n \in \mathbb{N}$ que $c \times m = c \times n$ ó $(m \times c = n \times c)$ implica $m = n$. Es decir, c es simultáneamente un epimorfismo y un monomorfismo porque es cancelable a derecha e izquierda pero no es un isomorfismo pues no existe $c' \in \mathbb{N}$ tal que $c \times c' = 1$ o $(c' \times c = 1)$.

Proposición 1.5.38 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría, un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ es un isomorfismo si y sólo si es simultáneamente retracción y correctracción.*

Demostración: En efecto, si f es un isomorfismo, entonces por definición es una retracción y una correctracción.
De manera recíproca, si f es simultáneamente una retracción y una correctracción, entonces existen morfismos $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ tales que $f \circ g = I_B$ y $g' \circ f = I_A$. Además $g = I_A \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ I_B = g'$. Es decir el morfismo inverso es único. $\square$

Proposición 1.5.39 *En toda categoría* $\mathfrak{C}$ *el morfismo identidad* $I_A \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;A)$ *es un isomorfismo y* $I_A^{-1} = I_A$.

Demostración: El resultado se obtiene de manera inmediata por definición de isomorfismo. $\square$

Proposición 1.5.40 *Si* $f : A \longrightarrow B$ *es isomorfismo, entonces* $f^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;A)$ *es isomorfismo y además se cumple* $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Demostración: En efecto; como existe $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que $f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$ se concluye que f^{-1} es retracción y coretracción. Por lo tanto es un isomorfismo y además $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. $\square$

Proposición 1.5.41 *Sea* $\mathfrak{C}$ *una categoría, si* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$ *y* $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;C)$ *son isomorfismos, entonces* $g \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;C)$ *es un isomorfismo y además se cumple,* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Demostración: En efecto, como f y g son isomorfismos, existen $f^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;A)$ y $g^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C;B)$ tales que $f^{-1} \circ f = I_A; f \circ f^{-1} = I_B;\ g^{-1} \circ g = I_B$ y $g \circ g^{-1} = I_C$. Si definimos $h = f^{-1} \circ g^{-1} : C \longrightarrow A$ se tiene,

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ h &= g \circ (f \circ h) \\
&= g \circ \Big(f \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)\Big) \\
&= g \circ \Big(\left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1}\Big) \\
&= g \circ \left(I_B \circ g^{-1}\right) \\
&= g \circ g^{-1} \\
&= I_C.
\end{aligned}$$

De manera análoga se deduce $h \circ (g \circ f) = I_A$. Por lo tanto $g \circ f : A \longrightarrow C$ es retracción y corretracción, es decir es un isomorfismo. Por definición de inversa se concluye $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. $\square$

Teorema 1.5.42 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría, si B es un objeto final y existe un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$, entonces $A \in obj(\mathfrak{C})$ es un objeto final.*

Demostración: Como B es un objeto final, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; B)$ es único y al ser f un isomorfismo existe $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$. Por lo tanto, se demostrará que $f^{-1} \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$ es único.
En efecto; si existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$, entonces $f \circ h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; B)$. Por lo tanto $g = f \circ h$, es decir $h = f^{-1} \circ g$.
De otro lado; si suponemos que $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$, por el argumento anterior se obtiene $g = f \circ h'$ y en consecuencia $h' = h$. Por lo tanto A es un objeto final. □

Teorema 1.5.43 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría, si A es un objeto inicial y existe un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$, entonces B es un objeto inicial.*

Demostración: El resultado se verifica por un razonamiento análogo a la demostración del Teorema 1.5.42 . □

Proposición 1.5.44 *En toda categoría $\mathfrak{C}$, si $f : A \longrightarrow B$ es retracción y epimorfismo, entonces es un isomorfismo.*

Demostración: En efecto; como f es una retracción existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ tal que $g \circ f = I_A$. Luego de la igualdad $(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ I_A = f = I_B \circ f$ y como f es epimorfismo se tiene $f \circ g = I_B$. Por lo tanto f es un isomorfismo. □

Proposición 1.5.45 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Si $f : A \longrightarrow B$ es coretracción y monomorfismo, entonces es un isomorfismo.*

Demostración: El resultado se obtiene por un razonamiento análogo a la demostración de la Proposición 1.5.44. □

Definición 1.5.46 (Bimorfismo). El morfismo $f : A \longrightarrow B$ se llama bimorfismo, si es monomorfismo y epimorfismo.

Lema 1.5.47 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría, si $f : A \longrightarrow B$ es isomorfismo, entonces es bimorfismo.*

Demostración: El resultado es consecuencia directa de la definición de isomorfismo. □

Definición 1.5.48 (Categoría Balanceada). Una categoría $\mathfrak{C}$, se llama balanceada, si todo bimorfismo es isomorfismo.

1.6 Construcciones Categóricas

Muchas propiedades sobre construcciones matemáticas se pueden representar por propiedades universales de diagramas.
Saunders MacLane.

1.6.1 Núcleo y Conúcleo

Definimos a continuación dos elementos cuyos nombres resultan familiares de otras ramas de las matemáticas (especialmente, el álgebra abstracta). Una vez estudiemos sus propiedades veremos que no son más que generalizaciones de conceptos conocidos:

Definición 1.6.1 (Núcleo). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero. El par $\Big(K; ker(f)\Big)$ es un núcleo del morfismo $f : A \longrightarrow B$, si el morfismo $ker(f) : K \longrightarrow A$ satisface $f \circ ker(f) = 0$ y el objeto K es universal respecto de esta propiedad:
Para todo morfismo $h \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(D; A)$ que también satisface $f \circ h = 0$, existe un único morfismo $h' \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(D; K)$ que hace conmutar al diagrama.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "ker(f)"] & & \\
& A \arrow[r, "f"] & B \\
D \arrow[uu, dotted, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.6.2 Si el par $\Big(K, ker(f)\Big)$ es un núcleo del morfismo $f : A \longrightarrow B$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K'; K)$ es un isomorfismo entonces $\Big(K', ker(f) \circ h\Big)$ es un núcleo para f.

Teorema 1.6.3 *Si* $\Big(K, ker(f)\Big)$ *es un núcleo de* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$, *entonces el morfismo* $ker(f) : K \longrightarrow A$ *es un monomorfismo.*

Demostración: Si $ker(f) \circ h = ker(f) \circ g$ para ciertos morfismos $h, g : C \longrightarrow K$, entonces se demostrará que $h = g$.
En efecto, como $ker(f) \circ g = ker(f) \circ h$, se deduce $f \circ \Big(ker(f) \circ h\Big) = f \circ \Big(ker(f) \circ g\Big) = 0$. Luego por la propiedad universal del objeto K respecto del morfismo $ker(f)$ existe un único $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; K)$ tal que $ker(f) \circ h' = ker(f) \circ g = ker(f) \circ h$ y como h' es único se concluye $h = g$. $\square$

Teorema 1.6.4 *Si* $\Big(K, ker(f)\Big)$ *y* $\Big(K', ker'(f)\Big)$ *son núcleos de* $f : A \longrightarrow B$, *entonces* K *es isomorfo a* K' *y el isomorfismo conmuta con* $ker(f)$ *y* $ker'(f)$.

Demostración: Como $f \circ ker'(f) = 0$ por la propiedad universal de K respecto al morfismo $ker(f)$ existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K'; K)$ tal que $ker(f) \circ h = ker'(f)$.
Por un argumento análogo respecto al morfismo $ker'(f)$ existe un único $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; K')$ tal que $ker'(f) \circ g = ker(f)$, finalmente de.

$$\begin{aligned}
\Big(ker'(f) \circ g\Big) \circ h &= ker(f) \circ h \\
ker'(f) \circ (g \circ h) &= ker(f) \circ h \\
&= ker'(f) \circ I_{K'} \\
g \circ h &= I_{K'}.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Big(ker(f) \circ h\Big) \circ g &= ker'(f) \circ g \\
ker(f) \circ (h \circ g) &= ker'(f) \circ g \\
&= ker(f) \circ I_K \\
h \circ g &= I_K.
\end{aligned}$$

Se concluye que K es isomorfo a K'; además el isomorfismo conmuta con $ker(f)$ y $ker'(f)$. $\square$

Lema 1.6.5 *Si* $\Big(K, ker(h)\Big)$ *es un núcleo de* $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;C)$ *y* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$, $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C,D)$ *son isomorfismos, entonces* $\Big(K, f \circ ker(h)\Big)$ *es un núcleo del morfismo* $g \circ h \circ f^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;D)$.

Demostración: Es evidente que $(g \circ h \circ f^{-1}) \circ \Big(f \circ ker(h)\Big) = 0$ y además, si existe $h' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(K';B)$ tal que $(g \circ h \circ f^{-1}) \circ h' = 0$, entonces $h \circ f^{-1} \circ h' = 0$ pues por el Lema 1.5.47, g es un epimorfismo. Luego, por la propiedad universal de K respecto al morfismo $ker(h)$ existe un único morfismo $h'' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(K';K)$ tal que $ker(h) \circ h'' = f^{-1} \circ h'$ es decir $\Big(f \circ ker(h)\Big) \circ h'' = h'$. Por lo tanto $\Big(K, f \circ ker(h)\Big)$ es un núcleo de $g \circ h \circ f^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;D)$. □

Definición 1.6.6 (Conúcleo). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero. $\Big(coker(f); D\Big)$ es un conúcleo para $f : A \longrightarrow B$, si el morfismo $coker(f) : B \longrightarrow D$ satisface $coker(f) \circ f = 0$ y el objeto D es universal respecto de esta propiedad:
Para todo morfismo $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;C)$ tal que $h \circ f = 0$, existe un único morfismo $h' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(D;C)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[dd, dotted, "h'"] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "coker(f)"] \arrow[dr, "h"'] & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.6.7 *En toda categoría con morfismos cero, el morfismo* $0_A^B \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$ *tiene por núcleo a* (A, I_A) *y como conúcleo a* (B, I_B).

Demostración: La afirmación se deduce del diagrama conmutativo adjunto.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "I_A"] & A \arrow[r, "0_A^B"] & B \arrow[r, "I_B"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dotted, "g"] \\
C \arrow[u, dotted, "f"] \arrow[ur, "f"'] & & D &
\end{tikzcd}$$

□

Teorema 1.6.8 *Si* $\Big(coker(f); D\Big)$ *es un conúcleo de* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$*, entonces el morfismo* $coker(f) : B \longrightarrow D$ *es un epimorfismo.*

Demostración: El resultado se verifica por el Principio de Dualidad aplicado al Teorema 1.6.3. $\square$

Teorema 1.6.9 *Si* $\Big(coker(f), D\Big)$ *y* $\Big(coker'(f); D'\Big)$ *son conúcleos de* $f : A \longrightarrow B$*, entonces* D *es isomorfo a* D'*.*

Demostración: El resultado es consecuencia directa del Principio de Dualidad aplicado al Teorema. 1.6.4 $\square$

Teorema 1.6.10 *En toda categoría* $\mathfrak{C}$ *con objeto cero, si el morfismo* $f : A \longrightarrow B$ *es monomorfismo, entonces el morfismo* $ker(f) = 0$ *y si es un epimorfismo, entonces el morfismo* $coker(f) = 0$*.*

Demostración: Demostraremos solo el primer caso; es decir que $\Big(0, 0_0^A\Big)$ es un núcleo de f. El otro resultado se obtiene por un razonamiento análogo.
En efecto; por Proposición 1.5.16, $\mathfrak{C}$ tiene morfismo cero, por lo tanto $f \circ 0_0^A = 0_0^B$.
Suponemos que existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$ tal que $f \circ g = 0_C^B = f \circ 0_C^A$, entonces $g = 0_C^A$ pues la hipótesis índica que f es un monomorfismo. Luego por definición de morfismo cero existe un único morfismo $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; 0)$, tal que $0_0^A \circ h' = g$. Es decir $\Big(0, 0_0^A\Big)$ es un núcleo para f. $\square$

Proposición 1.6.11 *Si* $\mathfrak{C}$ *es una categoría con kernel y cokernel, entonces para todo morfismo* $f : A \longrightarrow B$ *el par* $\Bigg(ker\Big(coker\Big(ker(f)\Big)\Big), K'\Bigg)$ *es un núcleo de* f*.*

Demostración: En efecto; si definimos el morfismo $g = coker\Big(ker(f)\Big) : A \longrightarrow C$; entonces como $f \circ ker(f) = 0$, por la propiedad universal de A respecto al morfismo g existe un único morfismo $h : C \longrightarrow B$ tal que $h \circ g = f$.
Por otro lado; como $f \circ ker(g) = (h \circ g) \circ ker(g) = 0$, por la propiedad universal de K respecto al morfismo $ker(f)$ existe un único $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K'; K)$ que verifica $ker(f) \circ h' = ker(g)$. Finalmente de la igualdad $g \circ ker(f) = 0$ y la propiedad

universal de K' respecto al morfismo $ker(g)$ existe un único $h'' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; K')$ tal que $ker(g) \circ h'' = ker(f)$. De $ker(g) \circ h'' \circ h' = ker(g)$ y $ker(f) \circ h' \circ h = ker(f)$ usando la Proposición 1.6.3 se sigue $h' \circ h'' = I_K$ y $h'' \circ h' = I_{K'}$. Luego por la observación 1.6.2 se concluye que $\Big(ker\Big(coker\Big(ker(f)\Big)\Big), K'\Big)$ es un núcleo de f. $\square$

Proposición 1.6.12 *Un morfismo $g : B \longrightarrow D$ es un morfismo $coker(f)$ si, sólo si el morfismo $g^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(C; B)$ es un morfismo $ker(f^{op})$ de $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B)$.*

Demostración: En primer lugar demostraremos que si $g : B \longrightarrow D$ es un morfismo $coker(f)$, entonces el morfismo $g^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(C; B)$ es un morfismo $ker(f^{op})$ de $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B)$.
En efecto; si definimos $g = coker(f)$, entonces $g \circ f = 0$ y si existe $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C)$ tal que $h \circ f = 0$, luego por la propiedad universal de D respecto al morfismo $coker(f)$ existe un único $\tilde{h} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(D; C)$, que verifica $\tilde{h} \circ g = h$. De la igualdad $g \circ f = 0$ y gracias al Principio de Dualidad se obtiene:

$$\begin{aligned} g \circ f &= 0 \\ (g \circ f)^{op} &= 0^{op} \\ f^{op} \circ g^{op} &= 0 \end{aligned}$$

y como $g^{op} \circ \tilde{h}^{op} = h^{op}$, se concluye $g^{op} = ker(f^{op})$. El recíproco se logra verificar por un razonamiento totalmente análogo. $\square$

Proposición 1.6.13 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría con kernel y cokernel, entonces para todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ el par $\Big(coker\Big(ker\Big(coker(f)\Big)\Big), D\Big)$ es un conúcleo de f.*

Demostración: El resultado se obtiene al definir el morfismo $g = ker\Big(coker(f)\Big)$ y aplicar la Proposición 1.6.11 y la Proposición 1.6.12. $\square$

Teorema 1.6.14 *En toda categoría $\mathfrak{C}$ con kernel y cokernel el morfismo $g : C \longrightarrow A$ es un morfismo ker si y sólo si $g = ker\Big(coker(g)\Big)$.*

Demostración: En primer lugar demostraremos que si $g : C \longrightarrow A$ es un morfismo ker, entonces $g = ker\Big(coker(g)\Big)$.

En efecto; si $g = ker(f)$ para cierto morfismo $f : A \longrightarrow B$ por la Proposición 1.6.11 se concluye $g = ker\Big(coker(g)\Big)$ pues (g, C) es un núcleo de f.
De manera recíproca; si $g = ker\Big(coker(g)\Big)$, entonces por definición g es un morfismo ker . $\square$

Proposición 1.6.15 *$\Big(D, g\Big)$ es un conúcleo del morfismo $f : A \longrightarrow B$ si y sólo si $\Big(D, g^{op}\Big)$ es núcleo del morfismo $f^{op} : B \longrightarrow A$.*

Demostración: En primer lugar demostraremos que si $\Big(D, g\Big)$ es un conúcleo del morfismo $f : A \longrightarrow B$, entonces $\Big(D, g^{op}\Big)$ es núcleo del morfismo $f^{op} : B \longrightarrow A$.
En efecto; como $\Big(D, g\Big)$ es el conúcleo del morfismo $f : A \longrightarrow B$ se cumple los siguientes ítems.

a) $g \circ f = 0$,

b) si el morfismo $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C)$ cumple la igualdad $h \circ f = 0$, entonces existe $h' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; C)$ tal que $h = h' \circ g$

Al aplicar el Principio de Dualidad a cada una de las afirmaciones anteriores se verifica la afirmación. El recíproco se demuestra de manera totalmente análoga a la demostración anterior. $\square$

1.6.2 Equalizador y Coequalizador

Si consideramos intuitivamente los núcleos como los objetos formados por elementos que verifican una igualdad, y los conúcleos como cocientes, resulta natural generalizar estas construcciones a otras categorías donde la noción de cero no exista pero si una noción de **igualdad**. Por este motivo se define el equalizador y coequalizador.

Definición 1.6.16 (Equalizador). El Equalizador de $f, g : A \longrightarrow B$ es el par (D, h), donde, el morfismo $h : D \longrightarrow A$ satisface $f \circ h = g \circ h$ y el objeto D es universal respecto de esta propiedad. Para todo morfismo $f' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$ que satisface $f \circ f' = g \circ f'$, existe un único $h' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; D)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[u, dotted, "h'"] \arrow[ur, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.6.17 *Si* $\Big(D, h\Big)$ *y* $\Big(D', h'\Big)$ *son equalizadores de* $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ *entonces* D *es isomorfo a* D' *y el isomorfismo conmuta con los morfismo* h *y* h'.

Demostración: El resultado es consecuencia de la definición de equalizador. $\square$

Proposición 1.6.18 *Si* (D, h) *es el equalizador de* $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$*, entonces* h *es un monomorfismo.*

Demostración: Sean $f', g' \in \mathrm{Hom}\,(E; D)$; *si* $h \circ f' = h \circ g'$ entonces demostraremos $f' = g'$. En efecto; a partir de la igualdad,

$$\begin{aligned}
f \circ (h \circ g') &= f \circ (h \circ g') \\
&= (f \circ h) \circ g' \\
&= (g \circ h) \circ g' \\
&= g \circ (h \circ g').
\end{aligned}$$

y la propiedad universal del equalizador, existe un único morfismo $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(E; D)$ tal que $h \circ h' = h \circ g'$ pero como g' también lo cumple, se deduce $h' = g'$. De manera análoga se verifica $h' = f'$. Por lo tanto $f' = g'$. $\square$

Proposición 1.6.19 *Si* $f' : D' \longrightarrow D$ *es isomorfismo y* $\Big(D, h\Big)$ *es un equalizador de* $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ *entonces* $(D', h \circ f')$ *es un equalizador para* f *y* g.

Demostración: En efecto; como $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D; A)$ satisface $f \circ h = g \circ h$ se tiene $(f \circ h) \circ f' = (g \circ h) \circ f'$. Luego del diagrama adjunto,

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend left, "h \circ f'"] & D \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
& C \arrow[ul, dotted, "h''"] \arrow[u, dotted, "h'"'] \arrow[ur, "g'"'] & &
\end{tikzcd}$$

y la Propiedad universal de D respecto al morfismo h existe un único $h' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C;D)$ tal que $h \circ h' = g'$. Luego si definimos $h'' = f'^{-1} \circ h' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C;D')$, es evidente que $(h \circ f') \circ h'' = g'$. La unicidad queda determinada pues h es monomorfismo y f' es isomorfismo. $\square$

Proposición 1.6.20 *En toda categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero el núcleo $\Big(ker(f), K\Big)$ del morfismo $f : A \longrightarrow B$ es el equalizador de $f, 0 \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$.*

Demostración: El resultado se obtiene por la propiedad universal de K respecto del morfismo $ker(f)$. $\square$

Lema 1.6.21 *Toda categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero si tiene equalizador, entonces tiene núcleos.*

Demostración: El resultado se deduce por la Proposición 1.6.20. $\square$

Definición 1.6.22 (Coequalizador). El coequalizador de $f, g : A \longrightarrow B$ es el par (E, h), donde el morfismo $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;E)$ satisface la igualdad $h \circ f = h \circ g$ y el objeto E es universal respecto de esta propiedad. Para todo $h' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;C)$ con $h' \circ f = h' \circ g$ existe un único $f' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(E;C)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & E \arrow[d, dotted, "f'"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Proposición 1.6.23 *Si (E, h) es el coequalizador de los morfismos $f, g : A \longrightarrow B$, entonces el morfismo h es un epimorfismo.*

Demostración: El resultado se deduce por el Principio de Dualidad aplicado a la Proposición 1.6.18. $\square$

1.6.3 Pushout y Pullback

Existen diversas nociones matemáticas que se usan con frecuencia para construir un objeto a partir de otras dos partes relacionadas. La noción categórica que envuelve la situación descrita es la de Pullback.

Definición 1.6.24 (Pullback). Un Pullback para los morfismos $g : A \longrightarrow B$ y $f : C \longrightarrow B$ ocurre si y sólo si, los morfismos f' y g' satisfacen las siguientes propiedades:

a) Conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

b) Para todo $g'' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P'; A)$ y $f'' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P'; C)$ si $f \circ f'' = g \circ g''$, existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P'; P)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\ & P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Es decir $g'' = f' \circ h$ y $f'' = g' \circ h$.

Lema 1.6.25 *Dado el Pullback para $g : A \longrightarrow B$ y $f : C \longrightarrow B$*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

si

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

es otro Pullback para f y g, entonces existe un único isomorfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P; P')$ tal que $f' = f'' \circ h$ y $g' = g'' \circ h$.

Demostración: Como f', g', f'', g'' satisfacen el ítem $b)$ de la definición de Pullback existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P; P')$ y $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P'; P)$ tales que los siguientes diagramas conmutan.

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dotted, "h'"] \arrow[drr, bend left, "g''"] \arrow[ddr, bend right, "f''"'] & & \\
& P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "f'"'] & & \\
& P' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & C \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
$$

luego, se deduce las siguientes igualdades:

$$a)\ f' \circ (h' \circ h) = (f' \circ h') \circ h = f'' \circ h = f' = f' \circ I_P.$$

$$b)\ g' \circ (h' \circ h) = (g' \circ h') \circ h = g'' \circ h = g' = g' \circ I_P.$$

Por otro lado; de los diagramas conmutativos adjuntos, las igualdades en $a)$ y $b)$ respectivamente,

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dotted, "I_P"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "f'"'] & & \\
& P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dotted, "I_{P'}"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "f'"'] & & \\
& P' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & C \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
$$

se sigue $h' \circ h = I_P$ y $h \circ h' = I_{P'}$, por unicidad del morfismo en la definición del Pullback. $\square$

Proposición 1.6.26 *Dado el Pullback para $g : A \longrightarrow B$ y $f : C \longrightarrow B$.*

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
$$

a) Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ es un monomorfismo entonces $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P; C)$ es un monomorfismo.

b) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C;B)$ es un monomorfismo entonces $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P;A)$ es un monomorfismo.

Demostración:

a) Demostraremos que, si existen $h', h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D;P)$ tal que $g' \circ h' = g' \circ h$, entonces $h' = h$.
En efecto; de la igualdad $f \circ (g' \circ h') = f \circ (g' \circ h)$ y como $g \circ f' = f \circ g'$, se tiene $(g \circ f') \circ h' = (g \circ f') \circ h$ lo que implica $f' \circ h' = f' \circ h$ pues g es un monomorfismo. Luego, por la unicidad de la factorización a través del Pullback (aplicado al par de morfismos $f' \circ h' = f' \circ h$ y $g' \circ h' = g' \circ h$) se obtiene $h' = h$.

b) La demostración es análoga al ítem anterior. $\square$

Proposición 1.6.27 *Dado el diagrama adjunto.*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{h}'"'] & D' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{h}"'] & C \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "f"'] & D \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

si cada recuadrado es un Pullback y $h : C \longrightarrow B$ es un monomorfismo, entonces el siguiente diagrama es un Pullback.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\tilde{g}\circ\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{h}'"'] & C \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "g\circ f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración: Si existen los morfismos $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C';A)$ y $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C';C)$ que satisfacen la igualdad $(g \circ f) \circ f' = h \circ g'$ entonces demostraremos que existe un único $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C';P)$ con $\tilde{h}' \circ h' = f'$ y $\left(\tilde{g} \circ \tilde{f}\right) \circ h' = g'$.
En efecto; como los diagramas conmutativos adjuntos son pullback, existen f'' y h' respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[dr, dotted, "f''"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "f\circ f'"'] & & \\
& D' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{h}"'] & C \arrow[d, "h"] \\
& D \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C' \arrow[dr, dotted, "h'"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "f'"'] & & \\
& P \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{h}'"] & D' \arrow[d, "\tilde{h}"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & D
\end{tikzcd}$$

Se deduce, $\tilde{g} \circ \left(\tilde{f} \circ h'\right) = \left(\tilde{g} \circ \tilde{f}\right) \circ h' = \tilde{g} \circ f'' = g'$; luego aplicamos dos veces la Proposición 1.6.26 y se concluye que $\tilde{h'}$ es monomorfismo. Por lo tanto en la igualdad $\tilde{h'} \circ h' = f'$ el morfismo h' es único. $\square$

Definición 1.6.28 (Pushout). Un Pushout para los morfismos $g : A \longrightarrow C$ y $f : A \longrightarrow B$ ocurre si y sólo si, los morfismos f' y g' satisfacen las siguientes propiedades.

a) Conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & P \end{tikzcd}$$

b) Para todo $f'' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; P')$ y $g'' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P')$ si $f'' \circ f = g'' \circ g$, entonces existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P; P')$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, bend left, "f''"] & \\ C \arrow[r, "f'"] \arrow[drr, bend right, "g''"'] & P \arrow[dr, dotted, "h"] & \\ & & P' \end{tikzcd}$$

Lema 1.6.29 *Dado el Pushout para los morfismos $g : A \longrightarrow C$ y $f : A \longrightarrow B$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & P \end{tikzcd}$$

si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g''"] \\ C \arrow[r, "f''"'] & P' \end{tikzcd}$$

también es Pushout de f y g, entonces existe un único isomorfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P'; P)$ tal que $g' = h \circ g''$ y $f' = h \circ f''$.

Demostración: El resultado se obtiene por el Principio de Dualidad aplicado al Lema 1.6.25. $\square$

Proposición 1.6.30 *Dado el Pushout para $g : A \longrightarrow C$ y $f : A \longrightarrow B$*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "f'"'] & P
\end{tikzcd}$$

a) Si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ es un epimorfismo, entonces $f' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P)$ es un epimorfismo.

b) Si $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; C)$ es un epimorfismo, entonces $g' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; P)$ es un epimorfismo.

Demostración: El resultado se obtiene por el Principio de Dualidad aplicado a la Proposición 1.6.26. $\square$

1.6.4 Producto y Coproducto

En esta sección presentaremos los conceptos de producto y coproducto. Para tal fin sugerimos las nociones de la teoría de conjuntos como el producto cartesiano y la unión disjunta.

Definición 1.6.31 (Producto). El producto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$ (si existe escribiremos $P = A \times B$), es un triplete (P, π_A, π_B), formado por el objeto $P \in obj(\mathfrak{C})$ y los morfismos $\pi_A \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(P; A)$ y $\pi_B \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(P; A)$, llamados proyecciones canónicas, que satisfacen la siguiente propiedad universal respecto del objeto P. Dado $C \in obj(\mathfrak{C})$ si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$ y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; B)$ entonces existe un único $h = \langle f, g\rangle \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P)$ tal que $\pi_A \circ h = f$, $\pi_B \circ h = g$. Es decir el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
& & A \\
C \arrow[urr, "f"] \arrow[r, dotted, "h"'] \arrow[drr, "g"'] & P \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.6.32 *Si* (P, π_A, π_B) *es el producto de* $A, B \in obj(\mathfrak{C})$ *y existe un isomorfismo* $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P'; P)$*, entonces* $(P'; \pi_A \circ \tilde{h}, \pi_B \circ \tilde{h})$ *también es un producto de* A *y* B*.*

Demostración: Dado el objeto $C \in obj(\mathfrak{C})$ y los morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; B)$, demostraremos que existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P')$ tal que $\left(\pi_A \circ \tilde{h}\right) \circ h = f$ y $\left(\pi_B \circ \tilde{h}\right) \circ h = g$.
En efecto; como (P, π_A, π_B) es el producto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$ existe un único morfismo $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P)$ que hace cumplir la igualdad $\pi_A \circ g' = f$ y $\pi_B \circ g' = g$.
Por otro lado; como $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P'; P)$ es un isomorfismo existe $\tilde{h}^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P; P')$.
Luego, si definimos $h = \left(\tilde{h}^{-1} \circ g'\right) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P')$, entonces existe un único morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P')$ tal que $\left(\pi_A \circ \tilde{h}\right) \circ h = f$ y $\left(\pi_B \circ \tilde{h}\right) \circ h = g$. □

Proposición 1.6.33 *Si* $(P, \pi_{A_1}, \pi_{A_2})$ *es un producto de* A_1 *y* A_2*, entonces para cada* $i \in \{1, 2\}$ *los morfismos* $\pi_{A_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P; A_i)$ *son coretracción si, y sólo si, la colección* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i; A_j) \neq \emptyset$*; para cada* $i, j \in \{1, 2\}$*.*

Demostración: En primer lugar, demostraremos que si los morfismos π_{A_i} son coretracción, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i; A_j) \neq \emptyset$; para cada $i, j \in \{1, 2\}$.
En efecto; como para cada $i \in \{1, 2\}$ los morfismos π_{A_i} son coretracción existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i; P)$ tal que $\pi_{A_i} \circ h = I_{A_i}$. Luego $\pi_{A_j} \circ h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i; A_j)$ por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i; A_j) \neq \emptyset$ para cada $i, j \in \{1, 2\}$.
De manera recíproca; como para cada $i \in \{1, 2\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i; A_j) \neq \emptyset$, al hacer $f_{ii} = I_{A_i}$ y fijar f_{ij} arbitrario, por la propiedad universal del producto existe un único $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i; P)$ tal que $\pi_{A_j} \circ f = f_{ij}$ para cada $j \in \{1, 2\}$. En particular, $\pi_{A_i} \circ f = f_{ii} = I_{A_i}$, luego π_{A_i} es una coretracción. □

Proposición 1.6.34 *En toda categoría con morfismos cero las proyecciones del producto son epimorfismos.*

Demostración: El resultado se deduce por la Proposición 1.6.33 y la observación 1.5.30. □

Teorema 1.6.35 *Si* (P, π_A, π_B) *y* (P', π'_A, π'_B) *son productos de los objetos* A *y* B*, entonces* P *es isomorfo a* P'*.*

Demostración: Del diagrama conmutativo adjunto,

$$\begin{tikzcd}
& P' \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] \arrow[d, dotted, "f'"'] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dotted, "f"'] & B \\
& P' \arrow[ul, "\pi'_A"] \arrow[ur, "\pi'_B"'] &
\end{tikzcd}$$

se deduce:

$$(\pi'_A \circ f) \circ f' = \pi'_A \circ (f \circ f') = \pi_A \circ f' = \pi'_A \circ I_{P'}$$

$$(\pi'_B \circ f) \circ f' = \pi'_B \circ (f \circ f') = \pi_B \circ f' = \pi'_B \circ I_{P'}$$

Como $I_{P'}$ y $f \circ f'$ hacen conmutar el diagrama, por la unicidad en la definición del producto se deduce $f \circ f' = I_{P'}$. Simétricamente $f' \circ f = I_P$. Por lo tanto, P es isomorfo a P'. $\square$

Observación 1.6.36 Los productos (P, π_A, π_B) y (P', π'_A, π'_B) de los objetos A, B son canónicamente equivalentes si P' es isomorfo a P por medio de h y $\pi_A \circ h = \pi'_A$, $\pi_B \circ h = \pi'_B$.

Lema 1.6.37 *En toda categoría con objeto cero, el diagrama es un Pullback para los morfismos* $\pi_A : P \longrightarrow A$ *y* $\pi_B : P \longrightarrow B$ *si y sólo si* $P = A \times B$*.*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostración: En efecto; sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; B)$ tales que $0 \circ f = 0 \circ h = 0$ (es decir, no hay restricciones sobre f y h), si $P = A \times B$, entonces por la propiedad universal del producto, existe un único $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P)$ tal que $\pi_B \circ g = h$ y $\pi_A \circ g = f$. Por lo tanto el diagrama propuesto es un Pullback.
De manera recíproca, si existen los morfismos $f : C \longrightarrow A$ y $h : C \longrightarrow B$ tal que $0 \circ f = 0 \circ h = 0$ entonces por la propiedad universal del Pullback existe un único morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; P)$ tal que $\pi_A \circ g = f$ y $\pi_B \circ g = g$ es decir $P = A \times B$. $\square$

Lema 1.6.38 *En toda categoría con objeto cero y producto, si definimos los morfismos* $\delta_{jk} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_j; A_k)$ *para cada* $j, k \in \{1, 2\}$ *tal que* $\delta_{jk} = 0$ *cuando* $j \neq k$ *y* $\delta_{jj} = I_{A_j}$*, entonces existen* $i_{A_j} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_j; A_1 \times A_2)$ *llamados inclusiones, tales que* $\pi_{A_k} \circ i_{A_j} = \delta_{jk}$, $\forall j, k$.

Demostración: En efecto; de los diagramas conmutativos y la propiedad universal de producto, se logra verificar $\pi_{A_k} \circ i_{A_j} = \delta_{jk}$, $\forall j, k \in \{1, 2\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1 \\
A_1 \arrow[r, dotted, "i_1"'] \arrow[urr, "I_{A_1}"] \arrow[drr, "0"'] & A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_{A_1}"] \arrow[dr, "\pi_{A_2}"] & \\
 & & A_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & A_1 \\
A_2 \arrow[r, dotted, "i_2"'] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "I_{A_2}"'] & A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_{A_1}"] \arrow[dr, "\pi_{A_2}"] & \\
 & & A_2
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 1.6.39 *Si* $\mathfrak{C}$ *es una categoría con productos binarios, entonces dado los morfismos* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; C)$ *y* $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; D)$*, existe un único morfismo* $f \times g$ *definido por* $f \times g = \langle f \circ \pi_A, g \circ \pi_B \rangle \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A \times B; C \times D)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "f"] & & C \\
A \times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] \arrow[rr, dotted, "f \times g"'] & & C \times D \arrow[ur, "\pi_C"'] \arrow[dr, "\pi_D"] & \\
 & B \arrow[rr, "g"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Demostración: El resultado se obtiene por definición de producto. □

Observación 1.6.40 Por definición de producto, se cumple cada una de las siguientes proposiciones.

a) $I_A \times I_B = I_{A\times B}$.

b) $\langle f, g\rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h\rangle$.

c) $(f \times g) \circ (h \times f') = (f \circ h) \times (g \circ f')$.

d) $(f \times g) \circ \langle h, f'\rangle = \langle f \circ h, g \circ f'\rangle$.

Teorema 1.6.41 *En toda categoría, si existe $A \times (B \times C)$ y $(A \times B) \times C$, entonces son isomorfos.*

Demostración: De los morfismos mostrados en el diagrama adjunto,

$$\begin{tikzcd}
& & (A\times B)\times C \arrow[dl, "\pi_{A\times B}"'] \arrow[drr, "\pi_C"] & & \\
& A\times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & & & C \\
A & & B & &
\end{tikzcd}$$

y por la propiedad universal de $B \times C$ existe un único $h : A \times (B \times C) \longrightarrow B \times C$ definido por $h = \langle \pi_B \circ \pi_{A\times B}, \pi_C\rangle$, que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& & B \\
(A\times B)\times C \arrow[r, dotted, "h"'] \arrow[urr, "\pi_B\circ\pi_{A\times B}"] \arrow[drr, "\pi_C"'] & B\times C \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[dr, "\pi_C"] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Luego, por la propiedad universal del producto $(A \times B)\times C$ existe un único morfismo $h' : (A \times B)\times C \longrightarrow A\times(B \times C)$ definido por $h' = \langle \pi_A \circ \pi_{A\times B}, h\rangle$ que hace conmutar al diagrama adjunto.

$$\begin{tikzcd}
& & A \\
(A\times B)\times C \arrow[r, dotted, "h'"'] \arrow[urr, "\pi_A\circ\pi_{A\times B}"] \arrow[drr, "h"'] & A\times(B\times C) \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_{B\times C}"] & \\
& & B\times C
\end{tikzcd}$$

Por simetría, intercambiando $(A \times B) \times C$ por $A \times (B \times C)$ se obtiene los siguientes morfismos, tal cual se pueden observar en el diagrama adjunto.

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \times (B \times C) \arrow[dl, "\pi_{B\times C}"'] \arrow[dr, "\pi_A"] & \\
 & B \times C \arrow[dl, "\pi_B"'] \arrow[dr, "\pi_C"] & & A \\
B & & C &
\end{tikzcd}
$$

Luego por propiedad universal de $A \times B$ existe un único $\tilde{h} : A \times (B \times C) \longrightarrow A \times B$ definido por $\tilde{h} = \langle \pi_A, \pi_b \circ \pi_{B\times C} \rangle$, que hace conmutar al siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & & B \\
A \times (B \times C) \arrow[rru, "\pi_B \circ \pi_{B\times C}"] \arrow[rrd, "\pi_A"'] \arrow[r, dotted, "\tilde{h}"'] & A \times B \arrow[ru, "\pi_B"'] \arrow[rd, "\pi_A"] & \\
 & & A
\end{tikzcd}
$$

Luego, por propiedad universal del producto $A \times (B \times C)$ existe un único morfismo $\tilde{h}' : A \times (B \times C) \longrightarrow (A \times B) \times C$ definido por $\tilde{h}' = \left\langle \tilde{h}, \pi_C \circ \pi_{B\times C} \right\rangle$, que hace conmutar al siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & & C \\
A \times (B \times C) \arrow[rru, "\pi_C \circ \pi_{B\times C}"] \arrow[rrd, "\tilde{h}"'] \arrow[r, dotted, "\tilde{h}'"'] & (A \times B) \times C \arrow[ru, "\pi_C"'] \arrow[rd, "\pi_{A\times B}"] & \\
 & & A \times B
\end{tikzcd}
$$

Para verificar que $A \times (B \times C)$ y $(A \times B) \times C$ son isomorfos, basta con demostrar que h' y $\tilde{h}'$ son inversas una de la otra. En efecto, por observación 1.6.40, se tiene.

$$
\begin{aligned}
h' \circ \tilde{h}' &= \langle \pi_A \circ \pi_{A\times B}, h \rangle \circ \tilde{h}' \\
&= \left\langle \pi_A \circ \pi_{A\times B} \circ \tilde{h}', h \circ \tilde{h}' \right\rangle \\
&= \left\langle \pi_A \circ \tilde{h}, \langle \pi_B \circ \pi_{A\times B}, \pi_C \rangle \circ \tilde{h}' \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \pi_A, \left\langle \pi_B \circ \pi_{A\times B} \circ \tilde{h}', \pi_C \circ \tilde{h}' \right\rangle \right\rangle \\
&= \left\langle \pi_A, \left\langle \pi_B \circ \tilde{h}, \pi_C \circ \pi_{B\times C} \right\rangle \right\rangle \\
&= \langle \pi_A, \langle \pi_B \circ \pi_{B\times C}, \pi_C \circ \pi_{B\times C} \rangle \rangle \\
&= \langle \pi_A, \langle \pi_B, \pi_C \rangle \circ \pi_{B\times C} \rangle \\
&= \langle \pi_A, I_{B\times C} \circ \pi_{B\times C} \rangle \\
&= \langle \pi_A, \pi_{B\times C} \rangle \\
&= I_{A\times(B\times C)}
\end{aligned}
$$

De manera análoga se logra verificar $\tilde{h}' \circ h' = I_{(A\times B)\times C}$. □

Teorema 1.6.42 *En toda categoría si existen los productos binarios, entonces existe el producto para un número finito de objetos de dicha categoría.*

Demostración: La demostración utiliza el principio de inducción matemática y el Teorema 1.6.41 . □

Definición 1.6.43 (Coproducto). El coproducto de los objetos $A, B \in obj(\mathfrak{C})$ (si existe escribiremos $Q = A \coprod B$), es un triplete $(Q; i_A, i_B)$, formado por un objeto $Q \in obj(\mathfrak{C})$ y los morfismos $i_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, Q)$ e $i_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, Q)$, llamados inclusiones canónicas, que satisfacen la siguiente propiedad universal. Dado $C \in obj(\mathfrak{C})$ y los morfismos $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C)$, existe un único $f = g \coprod h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Q, C)$ tal que $f \circ i_A = g$, $f \circ i_B = h$. Es decir el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
& Q \arrow[r, dotted, "f"'] & C \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Proposición 1.6.44 *Dado el coproducto (Q, i_A, i_B) de los objetos $A, B \in obj(\mathfrak{C})$, si existe un isomorfismo $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(Q; Q')$, entonces $(Q'; h \circ i_A, h \circ i_B)$ también es un coproducto para A y B.*

Demostración: El resultado se sigue por el Principio de Dualidad aplicado a la Proposición 1.6.32. $\square$

Proposición 1.6.45 *En toda categoría con morfismo cero las inclusiones canónicas del coproducto son monomorfismos.*

Demostración: El resultado se sigue por el Principio de Dualidad aplicado a la Proposición 1.6.34. $\square$

Proposición 1.6.46 *Si (Q, i_A, i_B) y (Q', i'_A, i'_B) son coproductos de los objetos A; B, entonces Q es isomorfo a Q'.*

Demostración: El resultado se sigue por el Principio de Dualidad aplicado al Teorema 1.6.35. $\square$

Teorema 1.6.47 *En toda categoría si existen $A \coprod (B \coprod C)$ y $(A \coprod B) \coprod C$, entonces son isomorfos.*

Demostración: El resultado se sigue por el Principio de Dualidad aplicado al Teorema 1.6.41. $\square$

Lema 1.6.48 *En toda categoría con objeto cero y coproductos, si para cada $j, k \in \{1, 2\}$, definimos $\delta_{jk} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_j; A_k)$ tal que $\delta_{jk} = 0$ cuando $j \neq k$ y $\delta_{jj} = I_{A_j}$, entonces existen $\pi_{A_j} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_1 \coprod A_2; A_j)$, llamados proyecciones, tales que $\pi_k \circ i_{A_j} = \delta_{jk}$, $\forall j, k$.*

Demostración: El resultado se sigue por el Principio de Dualidad aplicado al Lema 1.6.38. $\square$

Teorema 1.6.49 *En toda categoría $\mathfrak{C}$ si existen los coproductos binarios, entonces existe el coproducto para un número finito de objetos de dicha categoría.*

Demostración: El resultado se obtiene por el Principio de Dualidad aplicado al Teorema 1.6.42. $\square$

Capítulo 2

Categoría Abeliana

El concepto de categoría abeliana fue introducido por Buchsbaum en el año 1955 (con el nombre de categorías exactas) y en 1957 A. Grothendiek, en su artículo titulado Sur quelques points d'algebré homologique (Algunos puntos sobre álgebra homológica), definió la categoría abeliana generalizando algunas de las propiedades de la categoría de grupos abelianos. Tal formalización, tiene su fundamento en la búsqueda de analogías entre la teoría de cohomologías con coeficientes en un haz y la teoría de funtores derivados sobre funtores en categorías de módulos.

2.1 Categoría Pre-aditiva

Definición 2.1.1 (Categoría pre-aditiva). Una categoría $\mathfrak{C}$ se llama pre-aditiva si verifica las siguientes condiciones.

a) Para cada par objetos A y B, $\Big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B);+\Big)$ tiene estructura de grupo abeliano determinado por la operación:

$$+ : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$$

b) La composición:

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;C)$$

es bilineal respecto a la operación $+$.
Es decir:

$$f \circ (g+h) \;=\; f \circ g + f \circ h.$$

$$(g+h)\circ f \;=\; g\circ f + h\circ f.$$

Observación 2.1.2 La existencia de la estructura de grupo abeliano sobre $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$ es una propiedad muy importante que implica el isomorfismo entre el producto y el coproducto finito.

Proposición 2.1.3 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría pre-aditiva, entonces tiene morfismos cero y estos son los elementos neutros de los grupos abelianos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$ para todo par de objetos $A, B \in obj(\mathfrak{C})$.*

Demostración: Verificaremos, para cada $A, B, C \in obj(\mathfrak{C})$ que $0_A^B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$; $0_A^C \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;C)$ y $0_C^B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C;B)$ satisfacen las siguientes dos condiciones:

a) $f\circ 0_A^B = 0_A^C$, con $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;C)$

b) $0_A^B \circ g = 0_C^B$, con $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C;A)$.

En efecto; como $f\circ 0_A^B;\ 0_A^C \in \Big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;C);+\Big)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
f\circ 0_A^B + 0_A^C &= f\circ 0_A^B \\
f\circ 0_A^B + 0_A^C &= f\circ\left(0_A^B + 0_A^B\right) = f\circ 0_A^B + f\circ 0_A^B \\
0_A^C &= f\circ 0_A^B
\end{aligned}$$

Por un razonamiento análogo se concluye el ítem (b). □

Proposición 2.1.4 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría pre-aditiva y $B \in obj(\mathfrak{C})$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) B es un objeto inicial.

b) B es un objeto final.

c) B es un objeto cero.

d) $I_B = 0_B^B : B \longrightarrow B$

e) el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B,B)$ es el grupo cero.

Demostración: A continuación se verifican las siguientes implicaciones.

a) $\Rightarrow$ *d)*

Como $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;B)$ es un unitario y como $\Big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;B);+\Big)$ tiene estructura de grupo abeliano, $I_B = 0_B^B$.

d) $\Rightarrow$ *a)*

Si $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;A)$ entonces $f = f\circ I_B$ y $g = g\circ I_B$, luego $f-g = (f-g)\circ I_B = 0_B^A$. Por lo tanto $f = g$. Es decir B es un objeto inicial.

d) $\Leftrightarrow$ *b)*

De manera análoga a los ítems anteriores.

a), b) $\Leftrightarrow$ *c)*

Por definición de objeto cero.

d) $\Rightarrow$ *e)*

Para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;B)$, $f = f\circ I_B = f\circ 0_B^B = 0_B^B$. Luego $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;B)$ es el grupo cero.

e) $\Rightarrow$ *d)*

Como $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;B)$ es el grupo cero, $I_B = 0_B^B$. $\square$

Lema 2.1.5 *Si i_A, i_B, π_A y π_B son las inclusiones y las proyecciones definidas en el Lema 1.6.38, entonces en toda categoría pre-aditiva, se cumple $i_A\circ\pi_A + i_B\circ\pi_B = I_{A\times B}$.*

Demostración: Del diagrama,

$$\begin{tikzcd}
A & A\times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\
 & A\times B \arrow[ul, bend left, "\pi_A"] \arrow[u, dotted, "\langle\pi_A,\pi_B\rangle"'] \arrow[ur, bend right, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}$$

y la unicidad del morfismo $\langle\pi_A,\pi_B\rangle$ se deduce $\langle\pi_A,\pi_B\rangle = I_{A\times B}$. Por otro lado, como $i_A\circ\pi_A,\ i_B\circ\pi_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A\times B, A\times B)$ y $\Big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A\times B; A\times B);+\Big)$ es un grupo abeliano, $(i_A\circ\pi_A + i_B\circ\pi_B) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A\times B, A\times B)$. Luego, por el Lema 1.6.38, $\pi_B\,(i_A\circ\pi_A + i_B\circ\pi_B) = \pi_B$ y $\pi_A\,(i_A\circ\pi_A + i_B\circ\pi_B) = \pi_A$. Como $\langle\pi_A,\pi_B\rangle$ es único, se concluye $\langle\pi_A,\pi_B\rangle = i_A\circ\pi_A + i_B\circ\pi_B$. Es decir $i_A\circ\pi_A + i_B\circ\pi_B = I_{A\times B}$. $\square$

2.1.1 Biproducto

Definición 2.1.6 (Biproducto). El biproducto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$, es una quíntupla $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ donde, $C = A \oplus B \in obj(\mathfrak{C})$; π_A, π_B, i_A, i_B son las las proyecciones y las inclusiones respectivamente y es representado por el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend right, "i_A"'] & C \arrow[l, bend right, "\pi_A"'] \arrow[r, bend left, "\pi_B"] & B \arrow[l, bend left, "i_B"] \end{tikzcd}$$

el que será llamado diagrama biproducto. Además se cumple.

$$\pi_A \circ i_A = I_A,\ \pi_B \circ i_B = I_B \text{ e } i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B = I_C.$$

Observación 2.1.7 Si $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ es el biproducto de los objetos A, B en la categoría $\mathfrak{C}$ entonces $(C, i_A^{op}, i_B^{op}, \pi_A^{op}, \pi_B^{op})$ es el biproducto de A, B en la categoría $\mathfrak{C}^{op}$.

Proposición 2.1.8 *Sea la categoría pre-aditiva* $\mathfrak{C}$.

a) Si $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ *es el biproducto de los objetos* A, B, *entonces para todo* $D \in obj(\mathfrak{C})$ *y todo par de morfismos* $f_A : A \longrightarrow D$, $f_B : B \longrightarrow D$, *existe un único* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; D)$ *que hace conmutar al siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f_A"] & & \\ & C \arrow[r, dotted, "f"'] & D \\ B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & & \end{tikzcd}$$

b) Si $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ *es el biproducto de los objetos* A, B, *entonces para todo* $E \in obj(\mathfrak{C})$ *y todo par de morfismos* $g_A : E \longrightarrow A$, $g_B : E \longrightarrow B$, *existe un único* $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(E; C)$ *que hace conmutar al siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} & & A \\ E \arrow[r, dotted, "g"'] \arrow[urr, "g_A"] \arrow[drr, "g_B"'] & C \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

Demostración: A continuación se verificará cada uno de los ítems indicados.

a) Si definimos $f = f_A \circ \pi_A + f_B \circ \pi_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; D)$, entonces f satisface las siguientes igualdades.

   (a) $f \circ i_A = (f_A \circ \pi_A + f_B \circ \pi_B) \circ i_A = f_A$.

   (b) $f \circ i_B = (f_A \circ \pi_A + f_B \circ \pi_B) \circ i_A = f_B$.

   Ahora demostraremos que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; D)$ es único. En efecto; supongamos que existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; D)$ que hace conmutar el diagrama, entonces

$$\begin{aligned} g &= g \circ I_C \\ &= g \circ (i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B) \\ &= (g \circ i_A) \circ \pi_A + (g \circ i_B) \circ \pi_B \\ &= f_A \circ \pi_A + f_B \circ \pi_B \\ &= f \end{aligned}$$

b) de manera análoga al ítem anterior. □

Proposición 2.1.9 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría pre-aditiva y (C, π_A, π_B) el producto de los objetos $A, B \in obj(\mathfrak{C})$ entonces existen los morfismos $i_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; A \times B)$ e $i_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A \times B)$ tal que $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ es biproducto de A y B.*

Demostración: El resultado se logra verificar por el Lema 2.1.5 y el Lema 1.6.38. □

Proposición 2.1.10 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría pre-aditiva y $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ es el biproducto de los objetos A, B entonces:*

a) (C, π_A, π_B) es el producto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$.

b) (C, i_A, i_B) es el coproducto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$.

Demostración: El resultado se logra verificar por la Proposición 2.1.8. □

Teorema 2.1.11 *En toda categoría pre-aditiva, dos objetos tienen producto si y sólo si tienen biproducto.*

Demostración: El resultado es consecuencia directa del ítem (a) de la Proposición 2.1.10 y Proposición 2.1.9 . $\square$

Corolario 2.1.12 *En toda categoría, si* $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ *y* $(C', \pi'_A, \pi'_B, i'_A, i'_B)$ *son biproductos de los objetos* A *y* B *entonces* C *es isomorfo a* C'*.*

Demostración: El resultado es consecuencia del Teorema 2.1.11. $\square$

Proposición 2.1.13 *Si* $\mathfrak{C}$ *es una categoría pre-aditiva y* (C, i_A, i_B) *es el coproducto de los objetos* $A, B \in obj(\mathfrak{C})$*, entonces existen los morfismos* $\pi_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A \times B; A)$, $\pi_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A \times B; B)$ *tal que* $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ *es biproduto.*

Demostración: El resultado se logra verificar por la observación 2.1.7 y el Principio de Dualidad aplicado a la Proposición 2.1.9. $\square$

Teorema 2.1.14 *En toda categoría pre-aditiva dos objetos tienen coproducto si y sólo si tienen biproducto.*

Demostración: El resultado es consecuencia directa de la Proposición 2.1.10 ítem (b) y la Proposición 2.1.13 . $\square$

Observación 2.1.15 Los Teoremas 2.1.11 y 2.1.14 implican que en toda categoría pre-aditiva el producto de dos objetos coincide con su coproducto.

2.2 Categoría Aditiva

Definición 2.2.1 (Categoría Aditiva). Una categoría se llama aditiva si:

a) es pre-aditiva,

b) tiene objeto cero,

c) contiene a todos los productos y los coproductos binarios.

Proposición 2.2.2 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría aditiva, entonces $\mathfrak{C}^{op}$ es una categoría aditiva.*

Demostración: La categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$ es aditiva ya que se verifica las siguientes condiciones.

a) Como $\mathfrak{C}$ es una categoría aditiva y $obj(\mathfrak{C}^{op}) := obj(\mathfrak{C})$ se sigue que $\mathfrak{C}^{op}$ tiene objeto cero.

b) Para todo $A, B \in obj(\mathfrak{C}^{op})$ es evidente que $A \times B, A \coprod B \in obj(\mathfrak{C}^{op})$ puesto que $A \times B, A \coprod B \in obj(\mathfrak{C})$.

c) Si $A, B \in obj(\mathfrak{C}^{op})$ entonces demostraremos que $\Big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B), +\Big)$ es un grupo abeliano aditivo.
En efecto; si $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B)$ entonces $f^{op}; g^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ y como $\mathfrak{C}$ es una categoría aditiva $f^{op} + g^{op} \in \Big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A), +\Big)$.
Luego, si definimos $f + g = (f^{op} + g^{op})^{op}$ se concluye que $f + g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B)$.
Y de manera análoga se verifica cada uno de los axiomas de grupo abeliano.
Por lo tanto $\Big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B), +\Big)$ es un grupo abeliano aditivo.

d) La composición es bilineal. Esta afirmación consiste de las dos siguientes partes:

   (a) Si $h, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(B; C)$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B)$, entonces demostraremos $(h + g) \circ f = h \circ f + g \circ f$. En efecto; por la bilinealidad de la composición en $\mathfrak{C}$.

$$\begin{aligned}
(h+g)\circ f &= (h^{op} + g^{op})^{op} \circ (f^{op})^{op} \\
&= [f^{op} \circ (h^{op} + g^{op})] \\
&= (f^{op} \circ h^{op} + f^{op} \circ g^{op})^{op} \\
&= [(h \circ f)^{op} + (g \circ f)^{op}]^{op} \\
&= h \circ f + g \circ f
\end{aligned}$$

   (b) De manera análoga, se verifica la igualdad $h \circ (g + f) = h \circ g + h \circ f$ para todo $g, f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(B; C)$. $\square$

Teorema 2.2.3 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría aditiva, si $(C, \pi_A, \pi_B, i_A, i_B)$ es el biproducto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$, entonces (C, i_A) es un núcleo del morfismo $\pi_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; B)$ y (C, π_A) es un conúcleo para el morfismo $i_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C)$.*

Demostración: Demostraremos el primer caso, pues el segundo caso es totalmente análogo.
Por el Lema 1.6.38 se tiene $\pi_B \circ i_A = 0$. Si suponemos que $K \in obj(\mathfrak{C})$ y $f : K \longrightarrow C$ con $\pi_B \circ f = 0_K^B$, entonces demostraremos que existe de único $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; A)$ tal que $i_A \circ g = f$.
En efecto; como $i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B = I_C$ se tiene,

$$f = I_C \circ f = (i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B) \circ f = (i_A \circ \pi_A) \circ f + (i_B \circ \pi_B) \circ f = i_A \circ \pi_A \circ f.$$

luego, si definimos $g = \pi_A \circ f$, cumple con lo exigido. Finalmente la unicidad de $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; A)$ en $i_A \circ g = f$ se cumple por la Proposición 1.6.45. $\square$

El siguiente teorema nos permite caracterizar monomorfismos y epimorfismos a partir de morfismos cero.

Teorema 2.2.4 *En toda categoría aditiva $\mathfrak{C}$; se cumplen cada una de las siguientes proposiciones.*

a) El morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo si y sólo si para cada morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$ que cumple la igualdad $f \circ h = 0_C^B$ se tiene $h = 0_C^A$.

b) El morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo si y sólo si para cada morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C)$ que cumple la igualdad $h \circ f = 0_A^C$ se tiene $h = 0_B^C$.

Demostración: Demostraremos sólo la primera afirmación, la segunda se sigue por dualidad. Supongamos que f es monomorfismo y que el morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; A)$ es tal que $f \circ h = 0_C^B$. Como $f \circ h = 0_C^B = f \circ 0_C^B$, en virtud de nuestra hipótesis, se concluye $h = 0_C^A$.
De manera recíproca, si $g; g' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D; A)$ y $f \circ g = f \circ g'$, entonces $f \circ (g - g') = f \circ g - f \circ g' = 0_D^B$. Luego por la hipótesis se obtiene $g - g' = 0_D^A$, esto es $g = g'$. Por lo tanto f es un monomorfismo. $\square$

Teorema 2.2.5 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría aditiva donde todo morfismo tiene núcleos y conúcleos, entonces se cumplen cada una de las siguientes proposiciones.*

a) *El morfismo* $f : A \longrightarrow B$ *es un monomorfismo si y sólo si* $(0; 0_0^A)$ *es el núcleo de* f.

b) *El morfismo* $f : A \longrightarrow B$ *es un epimorfismo si y sólo si* $(0_B^0, 0)$ *es el conúcleo de* f.

Demostración: Verificaremos sólo la primera afirmación, la segunda se consigue por dualidad. Si f es monomorfismo entonces demostraremos que $(0; 0_0^A)$ es el núcleo de f. En efecto; como $f \circ 0_0^A = 0_0^B$, supongamos que existe un morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; A)$ tal que $f \circ g = 0_K^B$. Por el teorema anterior ítem a) se deduce $g = 0_K^A$. Luego si hacemos $h = 0_K^0$ entonces existe un morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; 0)$ tal que $0_0^A \circ h = g$ y es único pues 0 es objeto final.
De manera recíproca, si $(0; 0_0^A)$ el núcleo de f, entonces demostraremos que f es monomorfismo. Para tal fín consideremos los morfismos $h; h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; A)$ tal que $f \circ h = f \circ h'$. Como $\mathfrak{C}$ es una categoría aditiva se tiene $f \circ (h - k) = 0_K^B$ y en virtud de la hipótesis supuesta, existe un único $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; 0)$ tal que $0_0^A \circ g = h - k$, es decir, $h = k$. Por lo tanto f es monomorfismo. □

Teorema 2.2.6 *Si* $\mathfrak{C}$ *es una categoría aditiva tal que, todo morfismo tiene núcleo y conúcleo, entonces tiene igualadores y coigualadores.*

Demostración: Se verificará sólo la primera afirmación pues la segunda se obtendrá por dualidad. Si consideramos los morfismos $f; g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$, entonces demostaremos que existe el par $(K; h)$ tal que el morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K; A)$ verifica las siguientes condiciones:

a) $f \circ h = g \circ h$.

b) Si $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K'; A)$ satisface la igualdad $f \circ h' = g \circ h'$, entonces existe un morfismo $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K'; K)$ tal que $h \circ g' = h'$.

Claramente el par $\Big(K''; ker(f - g);\Big)$ satisface las condiciones requeridas. □

2.3 Categoría Normal y conormal

Definición 2.3.1 (Categoría Normal y conormal). Una categoría pre-aditiva se llama normal si:

a) tiene objeto cero,

b) todo monomorfismo es el morfismo kernel de algún morfismo.

Dualmente, se llama conormal si:

a) tiene objeto cero,

b) todo epimorfismo es el morfismo cokernel de algún morfismo.

Proposición 2.3.2 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría normal, entonces es balanceada (ver def. 1.5.48).*

Demostración: Demostraremos que todo monomorfismo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$ que es epimorfismo es un isomorfismo. En efecto; por Teormea 1.6.14, $f = ker\Big(coker(f)\Big)$, luego $\Big(K', ker\Big(coker(f)\Big)\Big)$ es un núcleo para $coker(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;C)$ y a partir de los argumentos expuestos en el Teorema 1.6.4 se deduce que A es isomorfo a K'.
Como f es un epimorfismo por Teorema 1.6.10, $coker(f) = 0_B^C$ y gracias a la Proposición 1.6.7 se concluye que (B, I_B) es un núcleo para el morfismo $coker(f)$. Por lo tanto; existe un isomorfismo $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$ tal que $I_B \circ g = g = f$. $\square$

2.4 Categoría Abeliana

Las categorías abelianas son el marco usual para el estudio del álgebra homológica, pues ellas unifican varias propiedades de homología mediante construcciones algebraicas caracterizadas por ciertas propiedades universales de muy alta relevancia en álgebra en general así como en la topología algebraica en particular.

Definición 2.4.1 (Categoría Abeliana). Una categoría es abeliana, si es una categoría aditiva que además satisface las siguientes propiedades:

I. todo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$ tiene núcleo y conúcleo.

II. todo monomorfismo es morfismo ker y todo epimorfismo es morfismo coker.

Si una categoría aditiva satisface solo I, se dice que es pre-abeliana.

Lema 2.4.2 *Si $\mathfrak{C}$ es categoría abeliana, entonces es normal.*

Demostración: El resultado es consecuencia directa de la definición de categoría abeliana. $\square$

Teorema 2.4.3 *Si $\mathfrak{C}$ es categoría abeliana, entonces es balanceada.*

Demostración: El resultado se logra verificar por Lema 2.4.2 y Proposición 2.3.2. $\square$

Definición 2.4.4 (Imagen y Coimagen). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría abeliana y el morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$. Supongamos que $\Big(K, ker(f)\Big)$ y $\Big(D, coker(f)\Big)$ son el núcleo y el conúcleo de f respectivamente.

1. La imagen de f, es el par $\Big(Im(f); im(f)\Big)$, donde $im(f) := ker\Big(coker(f)\Big)$ e $Im(f) \in obj(\mathfrak{C})$ es el dominio de $Im(f)$.

2. La coimagen de f, es el par $\Big(Coim(f); coim(f)\Big)$, donde $coim(f) := coker\Big(ker(f)\Big)$ y $Coim(f) \in obj(\mathfrak{C})$ es el codominio de $Coim(f)$.

Proposición 2.4.5 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathfrak{C}^{op}$ es una categoría abeliana.*

Demostración: Por Proposición 2.2.2, $\mathfrak{C}^{op}$ es aditiva. Solo falta verificar las dos condiciones siguientes:

1. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B)$, entonces demostraremos que existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(K; A)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(B; C)$ tales que $h = ker(f)$ y $g = coker(f)$.
   En efecto; dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A; B)$, $f^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; A)$ y como $\mathfrak{C}$ es una categoría abeliana existen los morfismos $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C; B)$, $\tilde{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; K)$ tales que $\tilde{h} = ker(f^{op})$ y $\tilde{g} = coker(f^{op})$ y por la Proposición 1.6.15 se tiene $\tilde{h}^{op} = coker(f)$ y $\tilde{g}^{op} = ker(f)$. Luego si definimos $h = \tilde{h}^{op}$ y $g = \tilde{g}^{op}$ se concluye lo pedido.

2. Si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(A;B)$ es un monomorfismo y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(C;D)$ es un epimorfismo, entonces demostraremos que $f = ker\Big(coker(f)\Big)$ y $g = coker\Big(ker(f)\Big)$. En efecto; por la Proposición 1.5.33, $f^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B;A)$ es un epimorfismo y $g^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(D;C)$ es un monomorfismo, luego como $\mathfrak{C}$ una categoría abeliana se tiene $f^{op} = coker\Big(ker(f)\Big)$, $g^{op} = ker\Big(coker(f)\Big)$ y por la Proposición 1.6.15, se concluye que $f = ker\Big(coker(f)\Big)$ y $g = coker\Big(ker(f)\Big)$. □

Proposición 2.4.6 *Dado el diagrama en la categoría pre-abeliana $\mathfrak{C}$.*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "ker(f)"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "h"'] & & B \arrow[r, "coker(f)"] & D \\
 & Coim(f) \arrow[rr, dotted, "g"] & & Im(f) \arrow[u, "g''"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $g'' = im(f)$ y $h = coim(f)$ entonces existe un único $g \in \Big(Coim(f), Im(f)\Big)$ que hace conmutar al diagrama.

Demostración: En efecto, como $\Big(Im(f), g''\Big)$ es un núcleo del morfismo $coker(f)$, por la propiedad universal de $Im(f)$ respecto del morfismo $ker\Big(coker(f)\Big)$ existe un único morfismo $h' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}\Big(A; Im(f)\Big)$ tal que $g'' \circ h' = f$. Por otro lado, como el conúcleo de $ker(f)$ es $\Big(Coim(f), h\Big)$ y g'' es un monomorfismo, de la igualdad:

$$\begin{aligned}
g'' \circ h' &= f \\
\Big(g'' \circ h'\Big) \circ ker(f) &= f \circ ker(f) \\
g'' \circ \Big(h' \circ ker(f)\Big) &= 0 = g'' \circ 0
\end{aligned}$$

se deduce $h' \circ ker(f) = 0$. Luego por la propiedad universal de $Coim(f)$ respecto del morfismo $coker\Big(ker(f)\Big)$ existe un único $g \in \Big(Coim(f), Im(f)\Big)$ tal que $g \circ h = h'$. Por lo tanto $g'' \circ \Big(g \circ h\Big) = g'' \circ h' = f$. La unicidad de g se sigue de manera inmediata por que g'' es monomorfismo y h es epimorfismo. □

Proposición 2.4.7 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría abeliana. Si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A;B)$ es epimorfismo, entonces $coim(f) = f$ y si f monomorfismo, entonces $im(f) = f$.*

Demostración: El resultado se verifica por Proposición 1.6.11 y Proposición 1.6.13. □

Proposición 2.4.8 *Dado el diagrama, en una categoría abeliana $\mathfrak{C}$.*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g'"] & A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & Coim(f) \arrow[d, dotted, "g"] \\ K' & B \arrow[l, "h''"'] & Im(f) \arrow[l, "g''"'] \end{tikzcd}$$

si $(g';K)$ y $(h'';K')$ es un núcleo y un conúcleo de f respectivamente con $g'' = im(f)$ y $h = coim(f)$, entonces existe un único isomorfismo $g : Coim(f) \longrightarrow Im(f)$ que hace conmutar al diagrama.

Demostración: Por la Proposición 2.4.6 existe un único $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}\Big(Coim(f); Im(f)\Big)$ que hace conmutar al diagrama indicado.
A continuación demostraremos que el morfismo g es un isomorfismo. Para esto debemos verificar que es un monomorfismo y un epimorfismo pues el Teorema 2.4.3 garantiza que si eso ocurre entonces es un isomorfismo. Para tal fín demostraremos primero que $h' = g'' \circ g$ es un monomorfismo (ver diagrama).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\ Coim(f) \arrow[r, "g"'] & Im(f) \arrow[u, "g''"'] \end{tikzcd}$$

Para verificar tal afirmación, se debe demostrar que, si existe $f'' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}\Big(D; Coim(f)\Big)$ y verifica la igualdad $h' \circ f'' = 0$, entonces $f'' = 0$.
En efecto; del diagrama adjunto y la propiedad universal de D' respecto al morfismo $coker(f'')$ existe un único $f''' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(D';B)$ tal que $f''' \circ coker(f'') = h'$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f''"] & Coim(f) \arrow[r, "coker(f'')"] \arrow[dr, "h'"'] & D' \arrow[d, dotted, "f'''"] \\ & & B \end{tikzcd}$$

Por otro lado, como $coker(f'') \circ h$ es un epimorfismo, este es un morfismo *coker* de cierto morfismo, digamos $g''' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D''; A)$ es decir $coker(g''') = coker(f'') \circ h$. Luego de la igualdad.

$$f \circ g''' = (h' \circ h) \circ g''' = \Big(f''' \circ coker(f'')\Big) \circ (h \circ g''') = f''' \circ \Big(coker(g''') \circ g'''\Big) = 0$$

y la propiedad universal de K respecto del morfismo $ker(f)$ existe un único morfismo $h''' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D''; K)$ tal que $g' \circ h''' = g'''$ tal cual se aprecia en el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} D'' \arrow[d, dotted, "h'''"'] \arrow[dr, "g'''"] & & \\ K \arrow[r, "g'"'] & A \arrow[r, "coker(g''')"'] & D' \end{tikzcd}$$

Así mismo a partir de la igualdad, $h \circ g''' = h \circ (g' \circ h''') = (h \circ g') \circ h''' = 0 \circ h''' = 0$ y la propiedad universal de D' respecto al morfismo $coker(g''')$ existe un único morfismo $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\Big(D'; Coim(f)\Big)$ tal que $\tilde{f} \circ coker(g''') = h$. como se indica en el diagrama conmutativo adjunto.

$$\begin{tikzcd} D'' \arrow[r, "g'''"] & A \arrow[r, "coker(g''')"] \arrow[dr, "h"'] & D' \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\ & & Coim(f) \end{tikzcd}$$

Pero como $\tilde{f} \circ coker(g''') = \tilde{f} \circ coker(f'') \circ h = h = I_{Coim(f)} \circ h$ y h es un epimorfismo $\tilde{f} \circ coker(f'') = I_{Coim(f)}$, luego a partir de la observación 1.5.25 y la Proposición 1.5.27, $coker(f'')$ es monomorfismo.
De la igualdad $coker(f'') \circ f'' = 0 = coker(f'') \circ 0$ se obtiene $f'' = 0$. Por consiguiente $ker(h') = 0$ y gracias al Teorema 2.2.5, h' es un monomorfismo, luego por la Proposición 1.5.27, g es un monomorfismo.

Finalmente se debe verificar que el morfismo $g \circ h : A \longrightarrow Im(f)$ es un epimorfismo. Para tal efecto; si definimos $\tilde{h} = g \circ h$ y suponemos que existe $\tilde{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\Big(Im(f); E\Big)$ tal que $\tilde{g} \circ \tilde{h} = 0$, entonces demostraremos que $\tilde{g} = 0$.
En efecto; por la propiedad universal de G respecto del morfismo $ker(\tilde{g})$ existe un único morfismo $\tilde{f}' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; G)$ que hace cumplir la igualdad $ker(\tilde{g}) \circ \tilde{f}' = \tilde{h}$. Tal

como se puede observar en el diagrama conmutativo adjunto,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[dr, dotted, "\tilde{f}'"'] & Im(f) \arrow[r, "\tilde{g}"] & E \\
& G \arrow[u, "ker(\tilde{g})"'] &
\end{tikzcd}$$

y como $g'' \circ ker(\tilde{g})$ es un monomorfismo, este es un morfismo ker de cierto morfismo, digamos $\tilde{h}' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B; C)$ es decir $ker(\tilde{h}') = g'' \circ ker(\tilde{g})$. Luego de la igualdad.

$$\tilde{h}' \circ f = \tilde{h}' \circ (g'' \circ g \circ h) = \left(\tilde{h}' \circ g''\right) \circ \tilde{h} = \left(\tilde{h}' \circ g''\right) \circ \left(ker(\tilde{g}) \circ \tilde{f}'\right) = 0$$

y por la propiedad universal de K' respecto del morfismo $coker(f)$ existe un único $\tilde{g}' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K'; C)$ tal que $\tilde{g}' \circ coker(f) = \tilde{h}'$ como se puede apreciar en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "coker(f)"] \arrow[dr, "\tilde{h}'"'] & K' \arrow[d, dotted, "\tilde{g}'"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

De la igualdad, $\tilde{h}' \circ g'' = \left(\tilde{g}' \circ coker(f)\right) \circ g'' = \tilde{g}' \circ \left(coker(f) \circ g''\right) = 0$ y la propiedad universal de K'' respecto del morfismo $ker(\tilde{h}')$ existe un único $\tilde{f}'' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\left(Im(f); K''\right)$ tal que $ker(\tilde{h}') \circ \tilde{f}'' = g''$,

$$\begin{tikzcd}
K'' \arrow[r, "ker(\tilde{h}')"] & B \arrow[r, "\tilde{h}'"] & C \\
Im(f) \arrow[u, dotted, "\tilde{f}''"] \arrow[ur, "g''"'] & &
\end{tikzcd}$$

y a partir de ello se sigue.

$$\left(g'' \circ ker(\tilde{g})\right) \circ \tilde{f}'' = g'' \circ \left(ker(\tilde{g}) \circ \tilde{f}''\right) = g'' = g'' \circ I_{Im(f)}.$$

y como el morfismo g'' es un monomorfismo $ker(\tilde{g}) \circ \tilde{f}'' = I_{Im(f)}$ pero por el ítem $a)$ de la observación 1.5.30 y la Proposición 1.5.34, $ker(\tilde{g})$ es un epimorfismo. Luego de la igualdad $ker(\tilde{g}) \circ \tilde{g} = 0$, se obtiene $\tilde{g} = 0$. Por lo tanto $\tilde{h}$ es epimorfismo y por Proposición 1.5.34 se concluye que g es epimorfismo. $\square$

Proposición 2.4.9 *Todo morfismo f en una categoría abeliana se expresa de forma única como $f = im(f) \circ h \circ coim(f)$; donde h es isomorfismo.*

Demostración: El resultado se logra verificar por la Proposición 2.4.6 y la Proposición 2.4.8. □

Corolario 2.4.10 *Todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ en una categoría abeliana $\mathfrak{C}$ se expresa como $f = g \circ h$; de modo que g es epimorfismo y h' es monomorfismo.*

Demostración: El resultado es consecuencia directa de la Proposición 2.4.9 al definir $h' = im(f)$ y $g = h \circ coim(f)$. □

Observación 2.4.11 Buchsbaum en [6] y Grothendieck en [3], definen una categoría abeliana como aquella categoría pre-abeliana que cumple la siguiente condición.
Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$, entonces $Coim(f)$ e $Im(f)$ son canónicamente isomorfos.

Proposición 2.4.12 *La definición de categoría abeliana en la observación 2.4.12 es equivalente a la definición de categoría abeliana 2.4.1.*

Demostración: En efecto; es evidente que la condición I) de la definición 2.4.1 implica que la categoría es pre-abeliana; el ítem II) de la definición 2.4.1 y la Proposición 2.4.8 implican la condición impuesta en la observación 2.4.12.

De manera recíproca asumimos que la categoría es pre-abeliana y que $Coim(f)$ e $Im(f)$ son canónicamente isomorfos. Es evidente que se cumple la condición I) de la definición 2.4.1.
Ahora, demostraremos que si f es un monomorfismo, entonces es un morfismo ker. En efecto; por Teorema 2.2.5, $ker(f) = 0$ y por la Proposición 1.6.7 el par (A, I_A) es su conúcleo. Por hipótesis existe un isomorfismo g entre $Coim(f)$ e $Im(f)$. Luego del diagrama conmutativo adjunto, se deduce que el objeto A es isomorfo al objeto $Im(f)$ y por la observación 1.6.2, f es un morfismo ker.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "I_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, dotted, "g"] \\
K' & B \arrow[l, "coker(f)"] & Im(f) \arrow[l, "im(f)"']
\end{tikzcd}$$

Por un argumento análogo, se logra verificar que, si f es epimorfismo, entonces es un morfismo coker. $\square$

Con la finalidad de ilustrar el concepto de categoría abeliana, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.13 Sea $\Lambda \in Ani$ y denotemos por Λ-Mod a la categoría de Λ-módulos izquierdos (ver ejemplo 1.3.4). Afirmamos que Λ-Mod es una categoría abeliana. Para verificar nuestra afirmación se demostrará que se cumple la definición 2.4.1.

I. Aditividad.

Para tal efecto, verificaremos los siguientes ítems.

a) **Pre-aditividad.** Es evidente que para cada par de Λ-módulos izquierdos A, B; $\Big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B), +\Big)$ respecto a la operación $(f+g)(a) = f(a) + g(a), a \in A$ es un grupo abeliano. Además, se cumple $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$ y $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

b) **Existencia de objeto cero.** Como $0 = \{0\}$ es la identidad aditiva de todo Λ-módulo izquierdo es evidente que Λ-Mod tiene objeto cero.

c) **Existencia de producto y coproducto binario.** Si $A; B \in obj(\Lambda\text{-Mod})$, entonces demostremos que $A \times B \in obj(\Lambda\text{-Mod})$.
En efecto; si definimos la operación interna $(a_1; b_1) + (a_2; b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$ y la operación externa $r(a; b) = (ra; rb)$, para todo $r \in \Lambda$ y todo $A; B \in obj(\Lambda\text{-Mod})$, entonces con estas operaciones $A \times B$ satisface los axiomas de Λ-módulo izquierdo. Por lo tanto, $A \times B \in obj(\Lambda\text{-Mod})$. Por otro lado, por Proposición 2.1.9, existe el biproducto. Por lo tanto por Teorema 2.1.14 existe el coproducto.

II. Existencia de núcleo y conúcleo.

Debemos verificar que todo morfismo en Λ-módulo tiene núcleo y conúcleo. Esta afirmación se verifica con ayuda de los siguientes ítems.

a) El núcleo del morfismo $f : A \longrightarrow B$, será denotado como $\Big(K; ker(f)\Big)$; donde $K = \{a \in A/f(a) = 0\}$ y el morfismo $ker(f) : K \longrightarrow A$ es definido por $\Big(ker(f)\Big)(x) = x,\ \forall x \in K$. Demostraremos que $\Big(K; ker(f)\Big)$ así definido satisface las siguientes condiciones de núcleo.

   i) $f \circ ker(f) = 0$.

ii) Si $f \circ g = 0$, entonces existe un único morfimo $h \in \operatorname{Hom}_{\Lambda-Mod}(E; K)$ tal que $g = ker(f) \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "ker(f)"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& A \arrow[r, "f"] & B \\
E \arrow[uu, dotted, "h"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

En efecto.

i) Como $\Big(f \circ ker(f)\Big)(x) = f(x)$ se tiene $\Big(f \circ ker(f)\Big)(x) = 0,\ \forall x \in K$, por lo tanto $f \circ ker(f) = 0$.

ii) La existencia del morfismo $h : E \longrightarrow K$ es consecuencia de la inclusión $Im(g) \subseteq K$. Luego, si definimos $h : E \longrightarrow K$ como $h(e) = g(e),\ \forall e \in E$ de la igualdad $\Big(ker(f)\Big)h(e) = g(e)$ se obtiene $ker(f) \circ h(e) = g(e),\ \forall e \in E$; por lo tanto $g = ker(f) \circ h$.

b) El conúcleo del morfismo $f : A \longrightarrow B$ será denotado por $\Big(D; coker(f)\Big)$, donde $D = B/Im(f)$ y el morfismo $coker(f) : B \longrightarrow D$ es definido por $\Big(coker(f)\Big)(x) = x + Im(f),\ \forall x \in B$. Demostraremos que $\Big(D; coker(f)\Big)$ así definido satisface las siguientes condiciones de conúcleo.

i) $coker(f) \circ f = 0$.

ii) Si $g \circ f = 0$ existe un único morfismo de $h' \in \operatorname{Hom}_{\Lambda-Mod}(D; C)$ tal que $g = h' \circ coker(f)$.

$$\begin{tikzcd}
& & D \arrow[dd, dotted, "h'"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & B \arrow[ur, "coker(f)"] \arrow[dr, "g"'] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

En efecto.

i) Como $coker(f) \circ f(a) = f(a) + Im(f) = Im(f)$ se tiene $coker(f) \circ f(a) = 0$; en $D = B/Im(f)$, $\forall a \in A$; por lo tanto $coker(f) \circ f = 0$.

ii) De la igualdad, $g \circ f = 0$ se deduce que $Im(f) \subseteq Ker(g)$, luego definimos el morfismo $h' : D \longrightarrow C$ por $h'(q) = g(b)$. Si $q = \Big(coker(f)\Big)(b)$, entonces demostraremos que h' está bien definida.
Es decir si $q = (coker(f))\,(b) = (coker(f))\,(b')$, entonces demostraremos que $g(b) = g(b')$.
En efecto; por definición, $coker(f)$ es sobreyectiva; luego existe $b \in B$ tal que $q = \Big(coker(f)\Big)(b)$. Luego como $q = (coker(f))\,(b) = (coker(f))\,(b')$ se tiene $b + Im(f) = b' + Im(f)$, es decir $b - b' = f(a) \in Ker(g)$ para algún $a \in A$; por lo tanto $g(b) = g(b')$. Además h' es un morfismo de Λ-Mod, por estar definido en términos de g, y como $h' \circ \Big(coker(f)\Big)(b) = g(b)$, $\forall b \in B$, se concluye $h' \circ coker(f) = g$.

III. Los monomorfismo(epimorfismos) son morfismos ker(respectivamente, coker).

Antes de demostrar que cada monomorfismo es un morfismo ker y cada epimorfismo es un morfismo coker, se verificará en primer lugar que en $\Lambda - Mod$ los monomorfismos (epimorfismos) son los homomorfismos inyectivos (sobreyectivos) respectivamente.
En efecto, sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo inyectivo y $g, h : C \longrightarrow A$ homomorfismos tales que $f \circ g = f \circ h$. Para cada $c \in C$ se cumple $f(g(c)) = f(h(c))$, es decir $g(c) = h(c)$, por lo tanto, $g = h$.
Ahora, supongamos que $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de $\Lambda - Mod$ y sean $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$. Si C el sub-módulo cíclico de A generado por $x - y$ y consideremos los homomorfismos $i, h' : C \longrightarrow A$, inclusión y nulo respectivamente, entonces se tiene $f \circ i = f \circ h$, luego $i = h$. En particular, $i(x - y) = x - y = h(x - y) = 0$, implica $x = y$.

En segundo lugar se verificará que, en $\Lambda - Mod$ los epimorfismos son los homomorfismos sobreyectivos.
En efecto, sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo sobreyectivo, y sean $g, h : B \longrightarrow C$ homomorfismos tales que $g \circ f = h \circ f$. Dado $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; luego $g(b) = (g \circ f)(a) = (h \circ f)(a) = h(b)$, es decir, $g = h$.
Por otro lado, sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo y $C := B/Im(f)$ el módulo cociente de B por la imagen del homomorfismo f. Si consideremos los homomorfismos

$g, h : B \longrightarrow C$ definidos por $g(b) := b + Im(f)$ y $h(b) := 0 + Im(f)$, $\forall b \in B$, entonces $g \circ f = h \circ f$, por lo tanto $g = h$, y de aquí $b \in Im(f)$ para cada $b \in B$, es decir, f es sobreyectiva.

Retomando la propuesta de demostración, cada monomorfismo es un morfismo ker y cada epimorfismo es un morfismo coker. se verificará los siguientes ítems.

a) Si $f \in \operatorname{Hom}_{\Lambda-Mod}(A; B)$ es un monomorfismo, entonces demostraremos que $f = ker\Big(coker(f)\Big)$. Para tal fin, se verificará que f satisface las condiciones de núcleo para $coker(f)$. Es decir,

   i) $coker(f) \circ f = 0$.

   ii) Si $coker(f) \circ h = 0$, existe un único morfismo $g \in \operatorname{Hom}_{\Lambda-Mod}(E; A)$ tal que $h = f \circ g$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& B \arrow[r, "coker(f)"] & B/Im(f) \\
E \arrow[uu, dotted, "g"] \arrow[ur, "h"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

En efecto.

   i) Por definición de $coker(f)$ se tiene $coker(f) \circ f = 0$.

   ii) Como $h : E \longrightarrow B$ y $coker(f) \circ h(e) = 0$ se tiene $h(e) = f(a)$ para algún $a \in A$. Por lo tanto, si definimos $g(e) = a$ se tiene,
   $(f \circ g)(e) = f\Big(g(e)\Big) = f(a) = h(e)$, el cual se encuentra bien definido pues si f es monomorfismo, entonces es inyectivo. Luego, se deduce que $h = f \circ g$.

b) Si el morfismo $f \in \operatorname{Hom}_{\Lambda-Mod}(A; B)$ es un epimorfismo, entonces demostraremos $f = coker\Big(ker(f)\Big)$. Para tal fin, se verificará que f satisface las siguientes condiciones de conúcleo para $ker(f)$:

   i) $f \circ ker(f) = 0$.

ii) Si $h \circ ker(f) = 0$, entonces existe un único morfismo $g \in \text{Hom}_{\Lambda-Mod}(B; C)$ tal que $h = g \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dd, dotted, "g"] \\
K \arrow[r, "ker(f)"] \arrow[urr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

En efecto.

i) Por definición $f \circ ker(f) = 0$.

ii) Como $h \circ ker(f) = 0$ se tiene $K \subseteq Ker(h)$. Luego si definimos el morfismo $g : B \longrightarrow C$ por $g(b) = h(a)$ con $f(a) = b$. entonces demostraremos que se encuentra bien definida.
Si $f(a) = f(a')$, entonces $a - a' \in Ker(f) = K$ y $h(a - a') = 0$, es decir $h(a) = h(a')$. Por lo tanto g se encuentra bien definida y se implica que $h = g \circ f$.

Capítulo 3

Pro-Categoría

Las pro-categorías han encontrado varios usos en las últimas décadas, desde la geometría algebraica [3], [4], [16]; la teoría de formas [10], [13], [30]; la topología geométrica [8] y las matemáticas aplicadas [10]. De ahí la importancia de su estudio y formalización.

3.1 Sistemas inversos.

La noción de sistema inverso aparece por primera vez en los siguientes artículos de P.S. Aleksandrov, al considerar secuencias inversas de complejos (Espectros de proyección):

1. Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque, C.R. Acad. Sci. Paris 184 (1927) 317-319.

2. Untersuchungen uber Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, Ann. of Math. 30 (1929) 101-187.

A continuación definimos las bases teóricas para posteriormente definir los sistemas inversos.

Definición 3.1.1 (Pre-orden). Toda relación binaria definida sobre un conjunto, es una relación de pre-orden, si es reflexiva y transitiva.

Ejemplo 3.1.2 Toda relación de equivalencia $\sim$ definida sobre un grupo $(G, *)$, que satisface la condición, $(\forall x, x', y, y' \in G)(x \sim x' \wedge y \sim y' \Rightarrow x * y \sim x' * y')$; es una relación de pre-orden.

Definición 3.1.3 (Conjunto preordenado). Todo conjunto equipado con una relación de pre-orden se llama conjunto preordenado.

Ejemplo 3.1.4 Si para cada par $(x_1, x_2); (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_+$, definimos la relación binaria: $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \geq y_1$, entonces $(\mathbb{R}^2_+, \leq)$ es un conjunto preordenado.

Definición 3.1.5 (Conjunto parcialmente ordenado). Todo conjunto equipado con una relación de pre-orden antisimétrica (es decir. $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$) se llama conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 3.1.6 Sea el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la relación $\leq^*$, definida para todo $n, m \in \mathbb{N}$, como $n \leq^* m \Leftrightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{N}$, entonces $(\mathbb{N}, \leq^*)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Observación 3.1.7 Todo subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado es también un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 3.1.8 (Conjunto directo). *Todo conjunto no vacío $\mathcal{I}$ con una relación de pre-orden $\leq$ que cumple la siguiente condición:*

$$\textit{Dados } \lambda, \mu \in \mathcal{I} \textit{ existe } \nu \in \mathcal{I} \textit{ tal que } \lambda \leq \nu \textit{ y } \mu \leq \nu.$$

Se llama conjunto directo.

Ejemplo 3.1.9 Sea A un conjunto no vacío. Si definimos el conjunto $\mathcal{I}$ de todos los subconjuntos finitos de A y la relación binaria $\leq$ para cada par $\lambda, \lambda' \in \mathcal{I}$ como $\lambda \leq \lambda' \Leftrightarrow \lambda \subseteq \lambda'$, entonces $(\mathcal{I}, \leq)$ es un conjunto directo.

Definición 3.1.10 (Conjunto cofinal). Dado el conjunto preordenado $\mathcal{I}$, el subconjunto preordenado $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$, es llamado cofinal en $\mathcal{I}$ si para cada $\lambda \in \mathcal{I}$ existe $\lambda' \in \mathcal{J}$ tal que $\lambda \leq \lambda'$.

Ejemplo 3.1.11 Dado el conjunto preordenado $(\mathcal{I}, \leq)$. Si definimos la relación $\sim$ como, $\lambda_1 \sim \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \wedge \lambda_2 \leq \lambda_1$, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia.
Por otro lado, si definimos $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ como un conjunto que contiene un elemento de cada clase de equivalencia, entonces es evidente que $\mathcal{J}$ es un subconjunto preordenado de $\mathcal{I}$ bajo la relación $\leq$, el cual también es antisimétrico. Por lo tanto $\mathcal{J}$ es cofinal en $\mathcal{I}$.

Definición 3.1.12 (Conjunto cofinito). Todo conjunto preordenado $\mathcal{I}$ es cofinito, si para cada $\lambda \in \mathcal{I}$ el conjunto de predecesores de λ es un conjunto finito.

Ejemplo 3.1.13 Si consideramos el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y la relación de orden usual $\leq$, entonces $\mathbb{N}$ es un conjunto cofinito.

Observación 3.1.14 La ventaja de usar subconjuntos cofinitos radica principalmente en poder usar el principio de inducción sobre el cardinal del conjunto de predecesores.

Definición 3.1.15 (Preservación de orden). Una función entre conjuntos preordenados $\varphi : (\mathcal{J}, \leq'') \longrightarrow (\mathcal{I}, \leq)$ se dice que preserva orden, si para cada $\mu, \mu' \in \mathcal{J}$ verifica la siguiente condición, $\mu <'' \mu' \Rightarrow \varphi(\mu) \leq \varphi(\mu')$.

Ejemplo 3.1.16 La función $f : (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq^*)$ definida por $f(n) = n!$, es una función que preserva orden.

Lema 3.1.17 *Sea $(\mathcal{J}, \leq)$ un conjunto preordenado y cofinito. Si $(\mathcal{I}, \leq)$ es un conjunto directo entonces para cada función $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ existe una función que preserva orden $\phi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ tal que $\varphi(\mu) \leq \phi(\mu)$ para todo $\mu \in \mathcal{J}$.*

Demostración: Se definirá la función ϕ por inducción sobre el número de predecesores de $\mu \in \mathcal{J}$ distintos de μ.
En efecto; si μ no tiene predecesores distintos de μ, entonces $\varphi(\mu) = \phi(\mu)$. Caso contrario, supongamos que ϕ ha sido definido para todo $\mu \in \mathcal{J}$ con cierta cantidad de predecesores menores a una cantidad $k \geq 1$ distintos de μ, de tal manera que si $\mu \leq \mu'$ entonces $\phi(\mu) \leq \phi(\mu')$ y $\varphi(\mu) \leq \phi(\mu)$.
Si suponemos que $\mu \in \mathcal{J}$ tiene k predecesores $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ distintos de μ, entonces cada μ_i tiene un número menor que k predecesores distintos de μ_i, por lo tanto $\phi(\mu_i)$ se encuentra definido, luego elegimos para $\phi(\mu)$ un elemento de $\mathcal{I}$ mayor que $\phi(\mu_1), \phi(\mu_2), ...\phi(\mu_k), \varphi(\mu)$. $\square$

3.1.1 Sistema inverso.

La definición de sistema inverso, usada en esta tesis aparece en los siguientes artículos de S. Lefschetz:

1. On compact spaces, Ann. of Math. 32 (1931) 521-538.
2. Algebraic Topology, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 27, New York, 1942. MR 484.

Un tratamiento detallado se puede apreciar en el artículo de S. Eilenberg y N.E. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton Univ. Press, 1952. MR 14398.

Definición 3.1.18 (Sistema inverso o sistema proyectivo). Un sistema inverso, denotado por $\mathcal{A}$ en cierta categoría $\mathfrak{C}$ es un triplete $\Big((A_\lambda), \delta_{\lambda\lambda'}, (\mathcal{I}, \leq)\Big)$, abreviado por $\Big(A_\lambda, \delta_{\lambda\lambda'}, \mathcal{I}\Big)$ donde:

a) $(\mathcal{I}, \leq)$ es un conjunto directo, llamado conjunto índice.

b) para cada $\lambda \in \mathcal{I}$, $A_\lambda \in obj(\mathfrak{C})$, es llamado término.

c) Para cada $\lambda \leq \lambda'$ en $\mathcal{I}$, el $\mathfrak{C}$-morfismo $\delta_{\lambda\lambda'} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_{\lambda'}; A_\lambda)$ es llamado mapeo estructural del sistema inverso y cumple las siguientes condiciones:

   I. $\delta_{\lambda\lambda} = I_{A_\lambda}$ para todo λ

   II. $\delta_{\lambda\lambda'} \circ \delta_{\lambda'\lambda''} = \delta_{\lambda\lambda''}$ toda vez que $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$.

Ejemplo 3.1.19 Dada la categoría de grupos Grp. Una relación de equivalencia $\sim$ definida sobre un grupo $(G, *)$ es llamada congruencia si,

$$(\forall x, x', y, y' \in G)(x \sim x' \wedge y \sim y' \Rightarrow x * y \sim x' * y').$$

Además; si $\sim$ es una relación de congruencia, entonces la clase del elemento elemento neutro denotada por $N = [e]$ es un subgrupo normal de G. De otro lado; como cualquier subgrupo normal N de G bajo la relación $\sim_N$ de equivalencia.

$$(\forall x, y \in G)(x \sim_N y' \Leftrightarrow x * y^{-1} \in N),$$

es una relación de congruencia, se tiene $N = [e]_{\sim_N}$ y además el conjunto cociente $G/\sim = G/\sim_{[e]} = G/N$ es, en ambos casos, un grupo cociente.
Luego, si denotamos el homomorfismo proyección entre G y G/N por $\delta : G \longrightarrow G/N$ y definimos el conjunto de índices $\mathcal{I}$ como el conjunto de todas las congruencias $\sim_N \equiv \lambda$ entonces al definir la relación binaria: $\lambda \leq \lambda' \Leftrightarrow N_{\lambda'} \subset N_\lambda$ (subgrupos) sobre $\mathcal{I}$ y al tener en cuenta que la intersección de un par de subgrupos normales es un subgrupo normal, entonces $(\mathcal{I}, \leq)$ es un conjunto directo.
Finalmente, si definimos $G/N_{\lambda'} \equiv G_{\lambda'}$ y $G/N_\lambda \equiv G_\lambda$ con $\lambda \leq \lambda'$, entonces existe único homomorfismo $\delta_{\lambda\lambda'} : G_{\lambda'} \longrightarrow G_\lambda$ definido por $\delta_{\lambda\lambda'}([x]_\lambda) = [x]_{\lambda'}$ que cumple los siguientes ítems.

I. $\delta_{\lambda\lambda} = I_{G_\lambda}$ para todo λ

II. $\delta_{\lambda\lambda'} \circ \delta_{\lambda'\lambda''} = \delta_{\lambda\lambda''}$ toda vez que $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$.

Por lo tanto $(G_\lambda, \delta_{\lambda\lambda'}, \mathcal{I})$ es un sistema inverso.

Definición 3.1.20 (Sub-sistema inverso). El sistema inverso $\mathcal{A}' := \Big(A_\lambda, \delta_{\lambda\lambda'}, \mathcal{J}\Big)$ es llamado sub-sistema de $\mathcal{A} := \Big(A_\lambda, \delta_{\lambda\lambda'}, \mathcal{I}\Big)$ si $\mathcal{J}$ es un subconjunto directo de $\mathcal{I}$.

Definición 3.1.21 (Sistema inverso constante). Un sistema inverso constante (denotado por $\lfloor A \rfloor$) es aquel sistema inverso $\Big(A_\lambda, \delta_{\lambda\lambda'}, \mathcal{I}\Big)$ donde el conjunto de índices es unitario y $\delta_{\lambda\lambda'} = I_A$.

3.1.2 Morfismo entre sistemas inversos.

El estudio de los morfismos entre sistemas inversos aparece por primera vez en H. Freundenthal en Entwicklungen von Räurnen und ihren Gruppen, Compositio Math. 4 (1937), 145-234.

Definición 3.1.22 (Morfismo entre sistemas inversos). Un morfismo entre sistemas inversos es denotado por $(f_\mu, \varphi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} = \Big(B_\mu, \delta'_{\mu\mu'}, \mathcal{J}\Big)$ y consiste de una función que preserva orden $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$, así como de $\mathfrak{C}$-morfismos $f_\mu : A_{\varphi(\mu)} \longrightarrow B_\mu$, para cada $\mu \in \mathcal{J}$, de manera que para todo $\mu \leq \mu'$ existe $\lambda \in \mathcal{I}$ con $\varphi(\mu), \varphi(\mu') \leq \lambda$ tal que.

$$f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda} = \delta'_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'} \circ \delta_{\varphi(\mu')\lambda}$$

Es decir, el diagrama adjunto conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A_{\varphi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & A_\lambda \arrow[l, "\delta_{\varphi(\mu)\lambda}"'] \arrow[r, "\delta_{\varphi(\mu')\lambda}"] & A_{\varphi(\mu')} \arrow[d, "f_{\mu'}"] \\
B_\mu & & B_{\mu'} \arrow[ll, "\delta'_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd}$$

Observación 3.1.23 A continuación se presentan los esquemas asociados a los posibles morfismos entre sistemas inversos.

a) Para el caso del morfismo $(f_\mu, \varphi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ se tiene.

$$\begin{tikzcd}
& A_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & & A_{\lambda'} \arrow[dl] \arrow[dr] & & ... \arrow[dl] & \\
A_{\varphi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & & A_{\varphi(\mu')} \arrow[d, "f_{\mu'}"] & & A_{\varphi(\mu'')} \arrow[d, "f_{\mu''}"] & & \cdots \\
B_\mu & & B_{\mu'} \arrow[ll] & & B_{\mu''} \arrow[ll] & & \cdots \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

b) El morfismo $(f_\mu, \varphi) : \mathcal{A} \longrightarrow \lfloor B \rfloor$, queda determinado por cierto $\lambda_0 \in \mathcal{I}$ fijo y un $\mathfrak{C}$-morfismo $f : A_{\lambda_0} \longrightarrow B$, tal como se puede observar.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_0} \arrow[d, "f"'] \\
B
\end{tikzcd}$$

c) Para el caso del morfismo $(f_\mu, \varphi) : \lfloor A \rfloor \longrightarrow \mathcal{B}$ se tiene.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f_\mu"'] \arrow[dr, "f_{\mu'}"'] \arrow[drr, "f_{\mu''}"] & & & \\
B_\mu & B_{\mu'} \arrow[l] & B_{\mu''} \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Definición 3.1.24 (Composición de morfismos entre sistemas inversos). Dados los morfismos $(f_\mu, \varphi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $(g_\nu, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} = (C_\nu, \delta''_{\nu\nu'}, \Lambda)$, definimos $(g_\nu, \psi) \circ (f_\mu, \varphi) = (h_\nu, \chi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$, como:

$$h_\nu = g_\nu \circ f_{\psi(\nu)} : A_{\chi(\nu)} \longrightarrow C_\nu \text{ y } \chi = \varphi \circ \psi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{I},$$

es decir;

$$
\begin{tikzcd}
A_{\chi(\nu)} = A_{(\varphi\circ\psi)(\nu)} \arrow[r, "f_{\psi(\nu)}"] \arrow[rr, bend right, "g_\nu \circ f_{\psi(\nu)}"'] & B_{\psi(\nu)} \arrow[r, "g_\nu"] & C_\nu
\end{tikzcd}
$$

y queda representado por el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & & A_{\lambda''} \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
A_{\chi(\nu)} \arrow[d, "f_{\psi(\nu)}"'] & A_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & A_{\varphi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] & A_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & A_{\chi(\nu')} \arrow[d, "f_{\psi(\nu')}"] \\
B_{\psi(\nu)} \arrow[d, "g_\nu"'] & & B_\mu \arrow[ll] \arrow[rr] & & B_{\psi(\nu')} \arrow[d, "g_{\nu'}"] \\
C_\nu & & & & C_{\nu'} \arrow[llll]
\end{tikzcd}
$$

Lema 3.1.25 *La composición de morfismos entre sistemas inversos es asociativa.*

Demostración: Con la finalidad de evitar el uso excesivo de la simbología en la demostración escribiremos, $(g_\nu, \psi) \circ (f_\mu, \varphi) = g \circ f = (h_\nu, \chi) = h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ donde $h_\nu = \Big(\big(g_\nu \circ f_{\psi(\nu)}\big), \chi \Big)$, $\chi = \varphi \circ \psi$. Luego si $(f_\mu, \varphi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $(g_\nu, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ y $\big(h'_\eta, \phi\big) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} = \big(D_\eta, \delta'''_{\eta\eta'}, \mathcal{L}\big)$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
h' \circ (g \circ f) &= h' \circ h = (h' \circ h)_\eta \\
&= \Big(\big(h'_\eta \circ h_{\phi(\eta)}\big), \chi \circ \phi \Big) \\
&= \Big(h'_\eta \circ \Big(g_{\phi(\eta)} \circ f_{\psi(\phi(\eta))} \Big), (\varphi \circ \psi) \circ \phi \Big) \\
&= \Big(\Big(h'_\eta \circ g_{\phi(\eta)} \Big) \circ f_{\psi(\phi(\eta))}, \varphi \circ (\psi \circ \phi) \Big) \\
&= \Big(\Big(h' \circ g \Big)_\eta \circ f_{\psi(\phi(\eta))}, \varphi \circ (\psi \circ \phi) \Big) \\
&= \Big(\Big((h \circ g) \circ f \Big)_\eta, \varphi \circ (\psi \circ \phi) \Big) \\
&= (h \circ g) \circ f
\end{aligned}
$$

Como se observa en el diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
A_{\varphi(\psi(\phi(\eta)))} \arrow[r, "f_{\psi(\phi(\eta))}"] \arrow[rr, bend left, "(g \circ f)_{\phi(\eta)}"] & B_{\psi(\phi(\eta))} \arrow[r, "g_{\phi(\eta)}"] \arrow[rr, bend right, "(h' \circ g)_{\eta}"'] & C_{\phi(\eta)} \arrow[r, "h'_{\eta}"] & D_{\eta}
\end{tikzcd}
$$

□

Definición 3.1.26 (Morfismo identidad para sistemas inversos). El morfismo identidad $I_{\mathcal{A}}$ asociado al sistema inverso $\mathcal{A}$ es el par $(I_{A_\lambda}, id_{\mathcal{I}})$ donde $I_{A_\lambda} : A_\lambda \longrightarrow A_\lambda$ es el $\mathfrak{C}$-morfismo identidad para cada $\lambda \in \mathcal{I}$ e $id_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ es la aplicación identidad.

Definición 3.1.27 (Morfismo restricción). Si $\mathcal{A}'$ es sub-sistema inverso de $\mathcal{A}$ entonces el morfismo $(I_\lambda, id_{\mathcal{I}}) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ definido por $I_\lambda := I_{A_\lambda} : A_\lambda \longrightarrow A_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathcal{J}$ es llamado morfismo restricción.

Definición 3.1.28 (Categoría de sistemas inversos). Dada cualquier categoría $\mathfrak{C}$, si definimos la estructura inv-$\mathfrak{C} = \langle obj, \operatorname{Hom} \rangle$, donde.

a) $obj(\mathfrak{C})$, es la clase formada por todas los sistemas inversos sobre $\mathfrak{C}$,

b) Hom, es el conjunto formado por los morfismos entre los sistemas inversos.

c) la composición es la definida en 3.1.24.

Entonces inv-$\mathfrak{C}$ satisface los axiomas de categoría y es llamada categoría de los sistemas inversos de $\mathfrak{C}$.

Definición 3.1.29 (Morfismo a nivel). Dado los sistemas inversos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ indexados por el mismo conjunto $\mathcal{L}$. El inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $(f_\mu, \varphi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es llamado morfismo a nivel si $\varphi = id_{\mathcal{I}}$ y para todo $\mu \leq \mu'$ el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
A_\mu \arrow[d, "f_\mu"'] & A_{\mu'} \arrow[l, "\delta_{\mu\mu'}"'] \arrow[d, "f_{\mu'}"] \\
B_\mu & B_{\mu'} \arrow[l, "\delta'_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd}
$$

3.2 Equivalencia entre morfismos.

Proposición 3.2.1 *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in obj\,(inv - \mathfrak{C})$. Si definimos la relación $\sim$ para cada par $(f_\mu, \varphi), \left(f'_\mu, \varphi'\right) \in \operatorname{Hom}_{inv-\mathfrak{C}}(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ como $(f_\mu, \varphi) \sim \left(f'_\mu, \varphi'\right)$ si, y sólo si cada $\mu \in \mathcal{J}$, admite un $\lambda \in \mathcal{I}$ con $\lambda \geq \varphi(\mu), \varphi'(\mu)$ tal que el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd}
A_{\varphi(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & A_\lambda \arrow[l, "\delta_{\varphi(\mu)\lambda}"'] \arrow[r, "\delta_{\varphi'(\mu)\lambda}"] & A_{\varphi'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"] \\
& B_\mu &
\end{tikzcd}$$

entonces es una relación de equivalencia.

Demostración: Demostraremos que la relación $\sim$ cumple las siguientes condiciones:

a) **Reflexividad.**

Para todo $(f_\mu, \varphi) \in \operatorname{Hom}_{inv-\mathfrak{C}}(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ se cumple $f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda} = f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda}$, por lo tanto $(f_\mu, \varphi) \sim (f_\mu, \varphi)$.

b) **Simétria.**

Como $(f_\mu, \varphi) \sim \left(f'_\mu, \varphi'\right)$, $f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda} = f'_\mu \circ \delta_{\varphi'(\mu)\lambda} \Longleftrightarrow f'_\mu \circ \delta_{\varphi'(\mu)\lambda} = f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda}$ $\left(f'_\mu, \varphi'\right) \sim (f_\mu, \varphi)$.

c) **Transitividad.**

Si $(f_\mu, \varphi) \sim \left(f'_\mu, \varphi'\right)$, $\left(f'_\mu, \varphi'\right) \sim \left(f''_\mu, \varphi''\right)$ entonces del diagrama adjunto como $\varphi(\mu), \varphi'(\mu) \leq \lambda$ y $\varphi'(\mu), \varphi''(\mu) \leq \lambda'$ son elegidos de tal manera que los diagramas inferiores conmutan,

$$\begin{tikzcd}
& & A_{\lambda''} \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
A_{\varphi(\mu)} \arrow[drr, "f_\mu"'] & A_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & A_{\varphi'(\mu)} \arrow[d, "f'_\mu"'] & A_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & A_{\varphi''(\mu)} \arrow[dll, "f''_\mu"] \\
& & B_\mu & &
\end{tikzcd}$$

existe $\lambda', \lambda \leq \lambda''$ tal que $(f_\mu, \varphi) \sim \left(f''_\mu, \varphi''\right)$. $\square$

Proposición 3.2.2 *Para todo inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $(f_\mu, \varphi), \left(f'_\mu, \varphi'\right) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y todo inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $(g_\nu, \psi), (g'_{\nu'}, \psi') : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ se verifica las siguientes proposiciones.*

a) Si $(f_\mu, \varphi) \sim \left(f'_\mu, \varphi'\right)$, entonces $(g_\nu, \psi) \circ (f_\mu, \varphi) \sim (g_\nu, \psi) \circ \left(f'_\mu, \varphi'\right)$.

b) Si $(g_\nu, \psi) \sim (g'_{\nu'}, \psi')$, entonces $(g_\nu, \psi) \circ (f_\mu, \varphi) \sim (g'_{\nu'}, \psi') \circ (f_\mu, \varphi)$.

c) Si $(g_\nu, \psi) \sim (g'_{\nu'}, \psi')$ y $(f_\mu, \varphi) \sim \left(f'_\mu, \varphi'\right)$, entonces:

$$(g_\nu, \psi) \circ (f_\mu, \varphi) \sim (g'_{\nu'}, \psi') \circ \left(f'_\mu, \varphi'\right)$$

Demostración: Demostraremos la validez de cada uno de los siguientes ítems:
a) El resultado se deduce de la conmutatividad del diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A_{\varphi(\psi(\nu))} \arrow[dr, "f_{\psi(\nu)}"'] & A_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & A_{\varphi'(\psi(\nu))} \arrow[dl, "f'_{\psi(\nu)}"] \\
& B_{\psi(\nu)} \arrow[d, "g_\nu"'] & \\
& C_\nu &
\end{tikzcd}$$

b) El resultado se deduce a partir del siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& & A_{\lambda''} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
A_{\varphi(\psi(\nu))} \arrow[d, "f_{\psi(\nu)}"'] & A_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & A_{\varphi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] & A_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & A_{\varphi(\psi'(\nu))} \arrow[d, "f_{\psi'(\nu)}"] \\
B_{\psi(\nu)} \arrow[drr, "g_\nu"'] & & B_\mu \arrow[ll] \arrow[rr] & & B_{\psi'(\nu)} \arrow[dll, "g'_\nu"] \\
& & C_\nu & &
\end{tikzcd}$$

c) Es consecuencia directa de los dos ítems anteriores. □

Proposición 3.2.3 *Dado el sistema inverso $\mathcal{A}$ y una función que preserva orden $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$. Si definimos el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $\delta_{\mathcal{A}}$ asociado a $\mathcal{A}$ como el par $\left(\delta_{\lambda\varphi(\lambda)}, \varphi\right)$ entonces $\delta_{\mathcal{A}} \sim I_{\mathcal{A}}$.*

Demostración: Basta con observar que el siguiente diagrama es conmutativo para cada $\lambda \in \mathcal{I}$.

$$\begin{tikzcd}
A_{\varphi(\lambda)} \arrow[dr, "\delta_{\lambda\varphi(\lambda)}"'] & A_{\lambda'} \arrow[l, "\delta_{\varphi(\lambda)\lambda'}"'] \arrow[r, "\delta_{\lambda\lambda'}"] & A_{\lambda} \arrow[dl, "I_{A_\lambda}"] \\
& A_{\lambda} &
\end{tikzcd}$$

□

Lema 3.2.4 *Dado el inv-$\mathfrak{C}$ morfismo $(f_\mu, \varphi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Si $(\mathcal{J}, \leq)$ es un conjunto cofinito y directo, entonces existe un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $(g_\mu, \phi)\, \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que la función de índices $\phi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ preserva orden y para $\mu \leq \mu'$ el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd}
A_{\phi(\mu)} \arrow[d, "g_\mu"'] & A_{\phi(\mu')} \arrow[l, "\delta_{\phi(\mu)\phi(\mu')}"'] \arrow[d, "g_{\mu'}"] \\
B_\mu & B_{\mu'} \arrow[l, "\delta'_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd}$$

además; $(g_\mu, \phi) \sim (f_\mu, \varphi)$.

Demostración: En efecto, para $\mu \leq \mu' \in \mathcal{J}$ existe $\lambda \geq \varphi(\mu), \varphi(\mu') \in \mathcal{I}$ tal que,

$$f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda} = \delta'_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'} \circ \delta_{\varphi(\mu')\lambda}.$$

Como $\mathcal{J}$ es un conjunto cofinito, cada μ' tiene un número finito de predecesores, luego es posible elegir para μ', $\lambda \in \mathcal{I}$ de modo que para todo $\mu \leq \mu'$ también es valida la igualdad anterior; de esta manera se ha definido una función $\varphi' : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$. Por el Lema 3.1.17 existe una función $\phi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ que preserva orden tal que $\varphi'(\mu) \leq \phi(\mu)$. Por lo tanto, $f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\phi(\mu')} = \delta'_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'} \circ \delta_{\varphi(\mu')\phi(\mu')}$, $\mu \leq \mu'$.
Finalmente, si definimos el $\mathfrak{C}$-morfismo $g_\mu = f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\phi(\mu)} : A_{\phi(\mu)} \longrightarrow B_\mu$, entonces $(g_\mu, \phi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un inv-$\mathfrak{C}$ morfismo que hace conmutar el diagrama dado y además $(g_\mu, \phi) \sim (f_\mu, \varphi)$. □

Teorema 3.2.5 *Cada sistema inverso $\mathcal{A}$ indexado por un conjunto directo $\mathcal{I}$ admite un sistema inverso isomorfo $\mathcal{B}$ indexado por un conjunto Λ; directo, cofinito y parcialmente ordenado, de manera tal que $card(\Lambda) \leq card(\mathcal{I})$.*

Demostración: Dado el sistema inverso $\mathcal{A} = \Big(A_\lambda, \delta_{\lambda\lambda'}, \mathcal{I}\Big)$ es suficiente considerar el caso $\mathcal{I}$ infinito. La estrategia para verificar el teorema, consiste en asociar un nuevo sistema inverso $\mathcal{B} = \big(B_\mu, \delta'_{\mu\mu'}, \Lambda\big)$ al sistema $\mathcal{A}$ para luego definir los inv-$\mathfrak{C}$-morfismos $(f_\mu, \phi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $(g_\lambda, \chi) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ de manera que $(f_\mu, \phi) \circ (g_\lambda, \chi) \sim I_\mathcal{B}$ y $(g_\lambda, \chi) \circ (f_\mu, \phi) \sim I_\mathcal{A}$. Tal construcción se justifica en los siguientes ítems:

a) Definimos el conjunto Λ como aquel que tiene por elementos a los subconjuntos finitos μ de $\mathcal{I}$ que tienen un elemento maximal(cuando lo tiene es único) denotado por $max\,\{\mu\}$. Es claro que $card(\Lambda) = card(\mathcal{I})$.
Si definimos la relación binaria $\leq$ sobre Λ como, $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 \subseteq \mu_2$, entonces afirmamos que $(\Lambda, \leq)$ es un conjunto directo, parcialmente ordenado y cofinito. En efecto; es ordenado puesto que $\leq$ es una relación antisimétrica. Por otro lado; si $\mu_1, \mu_2 \in \Lambda$, entonces elegimos $\lambda \in \mathcal{I}$ tal que $max\,\{\mu_1\}, max\,\{\mu_2\} \leq \lambda$. Luego para $\mu = \mu_1 \cup \mu_2 \cup \{\lambda\} \in \Lambda$ es claro que $\mu_1, \mu_2 \leq \mu$. Por lo tanto es directo. Finalmente como todo subconjunto finito de $\mathcal{I}$ tiene subconjuntos finitos se concluye que λ es cofinito.

b) Para cada $\mu \in \Lambda$ definimos el $\mathfrak{C}$-objeto, $B_\mu = A_{max\{\mu\}}$.

c) Como para $\mu \leq \mu'$ se tiene $max\,\{\mu\} \leq max\,\{\mu'\}$, definimos el $\mathfrak{C}$-morfismo $\delta'_{\mu\mu'} = \delta_{max\{\mu\}max\{\mu'\}} \in \mathrm{Hom}_{\,\mathfrak{C}}(B_{\mu'}; B_\mu)$ el cual cumple las siguientes condiciones:

   I. $\delta'_{\mu\mu} = I_{B_\mu}$ para todo μ.

   II. $\delta'_{\mu\mu'} \circ \delta'_{\mu'\mu''} = \delta'_{\mu\mu''}$.

   Por lo tanto; de los ítems a),b) y c) se concluye que $\mathcal{B} = \big(B_\mu, \delta'_{\mu\mu'}, \Lambda\big)$ es un sistema inverso.

d) Si definimos el $\mathfrak{C}$-morfismo $f_\mu = I_{A_{max\{\mu\}}} : A_{max\{\mu\}} \longrightarrow B_\mu$ y la función entre índices $\phi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{I}$ por $\phi(\mu) = max\,\{\mu\}$, entonces $(f_\mu, \phi) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo, porque $\mu \leq \mu'$ implica $\delta'_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'} = \delta_{max\{\mu\}\ max\{\mu'\}} = f_\mu \circ \delta_{\phi(\mu)\phi(\mu')}$.

e) Si definimos el $\mathfrak{C}$-morfismo $g_\lambda = I_{A_\lambda} : B_{\{\lambda\}} = A_\lambda \longrightarrow A_\lambda$ y la función entre índices $\chi : \mathcal{I} \longrightarrow \Lambda$ por $\chi(\lambda) = \{\lambda\}$, entonces (g_λ, χ) es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo, porque si $\lambda \leq \lambda'$, entonces $\{\lambda, \lambda'\} \in \Lambda$ y $max\,\{\lambda, \lambda'\} = \lambda'$. Por lo tanto $\delta_{\lambda\lambda'} \circ g_{\mu'} \circ \delta'_{\{\lambda'\}\{\lambda,\lambda'\}} = \delta_{\lambda\lambda'} = g_\lambda \circ \delta'_{\{\lambda\}\{\lambda,\lambda'\}}$.

f) Finalmente, como $g_\lambda \circ f_{\chi(\lambda)} = I_{A_\lambda} : A_{(\phi\circ\chi)(\lambda)} = A_\lambda \longrightarrow A_\lambda$, $(g_\lambda, \chi) \circ (f_\mu, \phi) = I_{\mathcal{A}}$. Es decir $(g_\lambda, \chi) \circ (f_\mu, \phi) \sim I_{\mathcal{A}}$. Por otro lado; para $(\chi \circ \phi)(\lambda) = \{max\,\{\mu\}\} \leq \mu$ se concluye $f_\mu \circ g_{\phi(\mu)} \circ \delta_{\{max\{\mu\}\}\mu} = I_{A_{max\{\mu\}}} = I_{B_\mu}$ es decir, $(f_\mu, \phi) \circ (g_\lambda, \chi) \sim I_{\mathcal{B}}$.

Por lo tanto; de los ítems (d), (e) y (f) se concluye que los sistemas inversos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos. □

3.3 Pro-Categoría

La teoría de pro-categorías indexadas por categorías cofiltrantes pequeñas fue introducida en los años 60 en el Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois-Marie llevado a cabo por Alexander Grothendieck.
S. Mardešić y J. Segal demuestran (ver [30],pp. 14–15) que los pro-objetos indexados por categorías cofiltrantes pequeñas son isomorfos a pro-objetos indexados por conjuntos directos, por tal razón se presta detallada atención a las categorías indexadas por estos conjuntos.

3.3.1 Pro-categoría.

Proposición 3.3.1 (Pro-categoría). *Si $\sim$ es la relación de equivalencia definida en la proposición 3.2.1 sobre* $\operatorname{Hom}_{inv-\mathfrak{C}}$ *entonces inv-$\mathfrak{C}/\sim$ es una categoría, que será denotada por pro($\mathfrak{C}$) y la llamaremos pro-categoría de la categoría localmente pequeña $\mathfrak{C}$. De manera explícita $pro(\mathfrak{C}) = \langle obj, \operatorname{Hom}\rangle$ queda definido por los siguientes componentes:*

a) $obj\Big(pro(\mathfrak{C})\Big) = obj(inv - \mathfrak{C})$.

b) Para cada par $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in obj\Big(pro(\mathfrak{C})\Big)$ se define:

$$\operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \operatorname{Hom}_{inv-\mathfrak{C}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})/\sim := \Big\{[f]\ /(f_\mu, \varphi) \in \operatorname{Hom}_{inv-\mathfrak{C}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\Big\}.$$

El pro($\mathfrak{C}$)-morfismo $[f] : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una clase de equivalencia respecto a la relación $\sim$ y por abuso de notación es denotado por f.

c) La composición,

$$\circ : \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B}) \times \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{B};\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{C})$$
$$\Big([f],[g]\Big) \longrightarrow [g]\circ[f] = [g\circ f]$$

es inducida por la de inv-$\mathfrak{C}$ y es una clase de equivalencia que encuentra bien definida por el ítem (c) de la Proposición 3.2.2, además contiene al inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $(g_\nu,\psi)\circ(f_\mu,\varphi)$.

d) Para cada $\mathcal{A}\in obj\Big(pro(\mathfrak{C})\Big)$ definimos el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $[I_{\mathcal{A}}] : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ el cual por proposición 3.2.3 es una clase de equivalencia no vacía que contiene al inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $(I_{\mathcal{A}}, id_{\mathcal{I}})$.

Demostración: El resultado se verifica por la Proposición 3.2.1 el ejemplo 1.3.7 y la Proposición 3.2.2. $\square$

Observación 3.3.2 Dado el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $f : \mathcal{A} \longrightarrow \lfloor B\rfloor$, por el ítem (b) de la observación 3.1.23; los $(g_\lambda,\varphi)\,,(h_{\lambda'},\varphi')\in f$, son iguales si y sólo si existe $\lambda''\in\mathcal{I}$ con $\lambda',\lambda\leq\lambda''$ tal que $g_\lambda\circ\delta_{\lambda\lambda''} = h_{\lambda'}\circ\delta_{\lambda'\lambda''}$.
Además, para el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $f : \lfloor A\rfloor \longrightarrow \mathcal{B}$, por el ítem c) de la observación 3.1.23; si $(g_\mu,\varphi)\,,(h_\mu,\varphi')\in f$, entonces $\varphi=\varphi'$ es la única función entre los conjuntos de índices y $g_\mu = h_\mu$ para todo $\mu\in\mathcal{J}$. En consecuencia, todos los $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $f : \lfloor A\rfloor \longrightarrow \mathcal{B}$ coinciden con los inv-$\mathfrak{C}$-morfismos $(f_\mu,\varphi) : \lfloor A\rfloor \longrightarrow \mathcal{B}$.

Teorema 3.3.3 *Si $\mathcal{J}$ es un conjunto cofinal en $\mathcal{I}$, entonces el morfismo restricción $(I_\lambda, id_{\mathcal{I}}) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ es un isomorfismo en $pro(\mathfrak{C})$.*

Demostración: Como $\mathcal{J}$ es cofinal en $\mathcal{I}$, existe una función $\gamma : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ tal que $\gamma(\lambda)\geq\lambda$ para cada $\lambda\in\mathcal{I}$. Luego si definimos $\gamma_\lambda : A_{\gamma(\lambda)} \longrightarrow A_\lambda$ como $\gamma_\lambda = \delta_{\lambda\varphi(\lambda)}$ entonces afirmamos que (γ_λ,γ) es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo entre $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}$. En efecto; si $\lambda\leq\lambda''\in\mathcal{I}$ entonces existe $\lambda'\in\mathcal{J}$ tal que $\gamma(\lambda),\gamma(\lambda'')\leq\lambda'$. Por lo tanto.

$$\gamma_\lambda\circ\delta_{\gamma(\lambda)\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda''}\circ\gamma_{\lambda''}\circ\delta_{\gamma(\lambda'')\lambda'}.$$

Por la Proposición 3.2.3 se sigue $(\varphi_\lambda,\varphi)\circ(I_\lambda,id_{\mathcal{I}})\sim I_{\mathcal{A}}$. De manera totalmente análoga se concluye $(I_\lambda,id_{\mathcal{I}})\circ(\varphi_\lambda,\varphi)\sim I_{\mathcal{A}'}$. Es decir $(I_\lambda,id_{\mathcal{I}})$ es un isomorfismo en $pro(\mathfrak{C})$. $\square$

Observación 3.3.4 El Teorema indica que cada sistema inverso contiene un subsistema inverso isomorfo a el.

Proposición 3.3.5 *Si $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un $pro(\mathfrak{C})$-morfismo, entonces existen sistemas inversos $\tilde{\mathcal{A}}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ indexados por el mismo conjunto $\mathcal{L}$, cofinito, parcialmente ordenado y directo isomorfos a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente y un $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $f' : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \tilde{\mathcal{A}} \arrow[d, "f'"] \\ \mathcal{B} \arrow[r] & \tilde{\mathcal{B}} \end{tikzcd}$$

Ademas, f' admite como representante al inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel $(f'_\nu, id_{\mathcal{L}})$.

Demostración: Por el Teorema 3.2.5, no hay pérdida de generalidad en suponer que $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son sistemas inversos indexados por conjuntos cofinitos, parcialmente ordenados y directos. Según el Lema 3.2.4 existe un representante (f_μ, φ) de f tal que $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ es una función que preserva orden, tal que para $\mu \leq \mu'$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A_{\varphi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & A_{\varphi(\mu')} \arrow[l] \arrow[d, "f'_{\mu'}"] \\ B_\mu & B_{\mu'} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Si definimos el conjunto $\mathcal{L} = \{\nu / \nu = (\lambda, \mu) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}; \varphi(\mu) \leq \lambda\}$ y la relación binaria $\nu = (\lambda, \mu) \leq \nu' = (\lambda', \mu')$ si, solo si $\lambda \leq \lambda'$ y $\mu \leq \mu'$ entonces es evidente que $(\mathcal{L}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, dirigido y además cofinito. Por lo tanto si definimos $\tilde{A}_\nu = A_\lambda$, $\tilde{B}_\nu = B_\mu$, $\sigma_{\nu\nu'} = \delta_{\lambda\lambda'}$ y $\sigma'_{\nu\nu'} = \delta'_{\mu\mu'}$ es claro que $\tilde{\mathcal{A}} = \left(\tilde{A}_\nu, \sigma_{\nu\nu'}, \mathcal{L}\right)$ y $\tilde{\mathcal{B}} = \left(\tilde{B}_\nu, \sigma'_{\nu\nu'}, \mathcal{L}\right)$ son sistemas inversos indexados por $\mathcal{L}$.
Luego, si definimos $id_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ y $f'_\nu = f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda} : \tilde{A}_\nu = A_\lambda \longrightarrow B_\mu = \tilde{B}_\nu$, entonces para $\nu \leq \nu'$ se tiene,

$$f'_\nu \circ \sigma_{\nu\nu'} = f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda} \circ \delta_{\lambda\lambda'} = f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\varphi(\mu')} \circ \delta_{\varphi(\mu')\lambda'} = \delta'_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'} \circ \delta_{\varphi(\mu')\lambda'} = \sigma'_{\nu\nu'} \circ f'_{\nu'}.$$

Por lo tanto $(f'_\nu, id_{\mathcal{L}}) : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nvel.
De manera análoga, si definimos $\gamma : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{I}$ por $\gamma(\nu) = \lambda$ y $g_\nu = I_{A_\lambda} : A_\lambda \longrightarrow A_\lambda = \tilde{A}_\nu$, entonces para $\nu \leq \nu'$ se tiene,

$$g_\nu \circ \delta_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} = \sigma_{\nu\nu'} \circ g_{\nu'}.$$

Por lo tanto $(g_\nu, \gamma) : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo y denotaremos por g a su correspondiente $pro(\mathfrak{C})$-morfismo.
Finalmente, si definimos $\gamma' : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{J}$ como $\gamma'(\nu) = \mu$ y $h_\nu = I_{B_\mu} : B_\mu \longrightarrow B_\mu = \tilde{B}_\nu$, entonces $(h_\nu, \gamma') : \mathcal{B} \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo y denotaremos por h a su correspondiente $pro(\mathfrak{C})$-morfismo.

La conmutatividad del diagrama, se deduce a partir de $f'_{\nu'} \circ g_{\nu'} = f_{\nu'} \circ \delta_{\varphi(\mu')\lambda'}$ y $h_{\nu'} \circ f_{\mu'} = f_{\mu'}$ pues se verifica $\left(f'_\mu, id_{\mathcal{L}}\right) \circ (g_\nu, \gamma) \sim (h_\nu, \gamma') \circ (f_\mu, \varphi)$.
Por último se verificará en los siguientes dos apartados que $\mathcal{A}$ y $\tilde{\mathcal{A}}$ (respectivamente $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$) son $pro(\mathfrak{C})$-objetos isomorfismos.

a) **Apartado 01**
Si elegimos un $\mu_0 \in \mathcal{J}$ fijo y aplicamos el Lema 3.1.17, entonces podemos elegir una función que preserva orden $\chi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ tal que $\lambda, \varphi(\mu_0) \leq \chi(\lambda)$ para cada λ. Luego al definir la función $\psi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{L}$ como $\psi(\lambda) = \Big(\chi(\lambda), \mu_0\Big)$ es claro que preserva orden. Por otro lado. si definimos el $\mathfrak{C}$-morfismo $g'_\lambda : \tilde{A}_{\psi(\lambda)} = A_{\chi(\lambda)} \longrightarrow A_\lambda$ como $g'_\lambda = \delta_{\lambda\chi(\lambda)}$, para cada $\lambda \leq \lambda'$ se tiene, $\psi(\lambda) \leq \psi(\lambda')$, $g'_\lambda \circ \sigma_{\psi(\lambda)\psi(\lambda')} = \delta_{\lambda\chi(\lambda)} \circ \delta_{\chi(\lambda)\chi(\lambda')} = \delta_{\lambda\chi(\lambda')}$ y $\delta_{\lambda\lambda'} \circ g'_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \circ \delta_{\lambda'\chi(\lambda')} = \delta_{\lambda\chi(\lambda')}$.
Es decir $(g'_\lambda, \psi) : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo.
Si denotamos por g' a su correspondiente $pro(\mathfrak{C})$-morfismo, entonces de la igualdad $g'_\lambda \circ g_{\psi(\lambda')} = \delta_{\lambda\chi(\lambda)}$ y la Proposición 3.2.3 se concluye $g' \circ g = I_{\mathcal{A}}$. Además para $\mu, \mu_0 \leq \mu'$ y $\chi(\lambda), \varphi(\mu') \leq \lambda'$ se cumple,

$$g_{(\lambda,\mu)} \circ g'_{\gamma(\lambda,\mu)} \circ \sigma_{(\chi(\lambda),\mu_0)(\lambda',\mu')} = \delta_{\lambda\lambda'} = \sigma_{(\lambda,\mu)(\lambda',\mu')}$$

por lo tanto por Proposición 3.2.3, se concluye que $g \circ g' = I_{\tilde{\mathcal{A}}}$.

b) **Apartado 02**
Si definimos la función que preserva orden $\tau : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$ como $\tau(\mu) = (\varphi(\mu), \mu)$ y el $\mathfrak{C}$-morfismo $h'_\mu : \tilde{B}_{\tau(\mu)} = B_\mu \longrightarrow B_\mu$ como $h'_\mu = I_{B_\mu}$, entonces para $\mu \leq \mu'$ se tiene $\tau(\mu) \leq \tau(\mu')$, $h'_\mu \circ \sigma'_{\tau(\mu)\tau(\mu')} = \delta'_{\mu\mu'}$ y $\delta'_{\mu\mu'} \circ h'_{\mu'} = \delta'_{\mu\mu'}$. Por lo tanto $\left(h'_\mu, \tau\right) : \tilde{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo.
Finalmente de la igualdad $h'_\mu \circ h_{\tau(\mu)} = I_{B_\mu}$ y $h_{(\lambda,\mu)} \circ h'_{\gamma'(\lambda,\mu)} = \sigma'_{(\varphi(\mu),\mu)(\lambda,\mu)}$ y la Proposición 3.2.3 se concluye $h' \circ h = I_{\mathcal{B}}$ y $h \circ h' = I_{\tilde{\mathcal{B}}}$. □

Observación 3.3.6 Como $f \in \operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ no siempre se encuentra definido nivel a nivel, al aplicar la proposición anterior se reindexa el dominio de f y este queda representado por el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel $(f_\mu, id_{\mathcal{L}})$.

3.3.2 Objeto Cero.

Proposición 3.3.7 *Si la categoría $\mathfrak{C}$ tiene objeto cero, entonces $pro(\mathfrak{C})$ tiene como objeto cero al sistema inverso $\lfloor 0 \rfloor$.*

Demostración: Con la finalidad de verificar que $\lfloor 0 \rfloor$ es el objeto cero, demostraremos en primer lugar que para todo $\mathcal{A} \in pro(\mathfrak{C})$. $\text{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A}; \lfloor 0 \rfloor)$ es unitario.
Para tal efecto; si suponemos que $f, g \in \text{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A}; \lfloor 0 \rfloor)$ y $(f_\mu, \varphi) \in f$, $(g_\mu, \phi) \in g$, entonces existe $\lambda \in \mathcal{I}$, con $\varphi(\mu), \phi(\mu) \leq \lambda$ tal que $f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda}$; $g_\mu \circ \delta_{\phi(\mu)\lambda} \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_\lambda; 0)$; pero como para todo $\lambda \in \mathcal{I}$, $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_\lambda; 0)$ es unitario, $f_\mu \circ \delta_{\varphi(\mu)\lambda} = g_\mu \circ \delta_{\phi(\mu)\lambda}$. Luego por la observación 3.3.2, $f = g$.

En segundo lugar, demostraremos que para todo $\mathcal{B} \in pro(\mathfrak{C})$, $\text{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\lfloor 0 \rfloor; \mathcal{B})$ es unitario.
En efecto; según la observación 3.3.2, los $pro(\mathfrak{C})$-morfismos coinciden con los inv-$\mathfrak{C}$-morfismos. Luego, si $(f_\mu, \varphi), (g_\mu, \phi) \in \text{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\lfloor 0 \rfloor; \mathcal{B})$, $f_\mu = g_\mu$ para todo $\mu \in \mathcal{J}$. Es decir $\text{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\lfloor 0 \rfloor; \mathcal{B})$ es unitario. Por lo tanto $\lfloor 0 \rfloor$ es objeto inicial y final por consiguiente es el objeto cero de $pro(\mathfrak{C})$. □

3.3.3 Tipos de Morfismos.

En esta sección a menos que se indique lo contrario, $\mathfrak{C}$ es una categoría arbitraria.

Definición 3.3.8 (Pro-morfismo a nivel). El $pro(\mathfrak{C})$-morfismo a nivel es un morfismo en $pro(\mathfrak{C})$ cuyo representante es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel.

Proposición 3.3.9 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos sistemas inversos indexados por $\mathcal{L}$ y el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ representado por el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel $(f_\nu, id_{\mathcal{L}}) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. f es un isomorfismo si, sólo si, cumple la siguiente condición:*
Cada $\nu \in \mathcal{L}$ admite $\nu \leq \nu'$ y un $\mathfrak{C}$-morfismo $g_\nu : B_{\nu'} \longrightarrow A_\nu$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A_{\nu'} \arrow[r, "f_{\nu'}"] \arrow[d, "\delta_{\nu\nu'}"'] & B_{\nu'} \arrow[d, "\delta'_{\nu\nu'}"] \arrow[dl, dotted, "g_\nu"'] \\
A_\nu \arrow[r, "f_\nu"'] & B_\nu
\end{tikzcd}$$

Demostración: Demostraremos que si f es un isomorfismo, entonces verifica la condición indicada.

En efecto; si el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $h \in \operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{B};\mathcal{A})$ representado por $(h_\nu, \chi) \in \operatorname{Hom}_{inv-\mathfrak{C}}(\mathcal{B};\mathcal{A})$ es la inversa de f, entonces para cada $\nu \in \mathcal{L}$ existe $\nu, \chi(\nu) \leq \nu'$ tal que $f_\nu \circ h_\nu \circ \delta'_{\chi(\nu)\nu'} = \delta'_{\nu\nu'}$ y $h_\nu \circ f_{\chi(\nu)} \circ \delta_{\chi(\nu)\nu'} = \delta_{\nu\nu'}$. Además como f es representado por el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel $(f_\nu, id_{\mathcal{L}})$; se obtiene la igualdad $\delta'_{\chi(\nu)\nu'} \circ f_{\nu'} = f_{\chi(\nu)} \circ \delta_{\chi(\nu)\nu'}$, del cual se infiere.

$$
\begin{aligned}
h_\nu \circ \left(\delta'_{\chi(\nu)\nu'} \circ f_{\nu'}\right) &= h_\nu \circ \left(f_{\chi(\nu)} \circ \delta_{\chi(\nu)\nu'}\right) \\
h_\nu \circ \left(\delta'_{\chi(\nu)\nu'} \circ f_{\nu'}\right) &= \delta_{\nu\nu'}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto; si definimos el $\mathfrak{C}$-morfismo $g_\nu = h_\nu \circ \delta'_{\chi(\nu)\nu'} : B_{\nu'} \longrightarrow A_\nu$, entonces satisface la condición indicada.

De manera recíproca, si para cada $\nu \in \mathcal{L}$ elegimos $\nu \leq \nu' = \varphi(\nu)$ y un $\mathfrak{C}$-morfismo g_ν que satisface la condición, entonces demostrare que $(g_\nu, \varphi) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo.
En efecto; observe que para cada $\varphi(\nu) \leq \nu''$ del diagrama conmutativo adjunto,

$$
\begin{tikzcd}
 & B_{\varphi(\nu'')} \arrow[dl, "g_{\nu''}"'] \arrow[d, "\delta'_{\nu''\varphi(\nu'')}"] \\
A_{\nu''} \arrow[r, "f_{\nu''}"'] \arrow[d, "\delta_{\varphi(\nu)\nu''}"'] & B_{\nu''} \arrow[d, "\delta'_{\varphi(\nu)\nu''}"] \\
A_{\varphi(\nu)} \arrow[r, "f_{\varphi(\nu)}"] \arrow[d, "\delta_{\nu\varphi(\nu)}"'] & B_{\varphi(\nu)} \arrow[dl, "g_\nu"] \\
A_\nu &
\end{tikzcd}
$$

se tiene $g_\nu \circ \delta'_{\varphi(\nu)\varphi(\nu'')} = \delta_{\nu\nu''} \circ g_{\nu''}$. Luego, si $\nu \leq \nu'$ y elegimos $\varphi(\nu), \varphi(\nu') \leq \nu''$, entonces se obtiene una expresión análoga a la anterior; $g_{\nu'} \circ \delta'_{\varphi(\nu')\varphi(\nu'')} = \delta_{\nu'\nu''} \circ g_{\nu''}$. Por lo tanto $g_\nu \circ \delta'_{\varphi(\nu')\varphi(\nu'')} = \delta_{\nu\nu'} \circ \delta_{\nu'\nu''} \circ g_{\nu''} = \delta_{\nu\nu'} \circ g_{\nu'} \circ \delta'_{\varphi(\nu')\varphi(\nu'')}$. Es decir (g_ν, φ) es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo y si denotamos por g a su correspondiente $pro(\mathfrak{C})$-morfismo entonces afirmamos que $f \circ g = I_{\mathcal{B}}$ y $g \circ f = I_{\mathcal{A}}$; pues por la condición se tiene $f_\nu \circ g_\nu = \delta_{\nu\varphi(\nu)}$, $g_\nu \circ f_{\varphi(\nu)} = \delta_{\nu\varphi(\nu)}$ y gracias a la Proposición 3.2.3 se concluye lo indicado. $\square$

Teorema 3.3.10 *Dada una categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero, $\mathcal{A}$ es un $pro(\mathfrak{C})$-objeto cero si y sólo si para cada $\lambda \in \mathcal{I}$ existe $\lambda \leq \lambda'$ tal que $\delta_{\lambda\lambda'}$ es un cero $\mathfrak{C}$-morfismo, es decir $\delta_{\lambda\lambda'} = 0$.*

Demostración: En primer lugar demostraremos que si $\mathcal{A}$ es un objeto cero de $pro(\mathfrak{C})$, entonces $\delta_{\lambda\lambda'} = 0$.
En efecto; por el Lema 1.5.10, $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\lfloor 0 \rfloor$, por lo tanto existe un isomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\lfloor 0 \rfloor; \mathcal{A})$, tal que para todo $\lambda, \lambda' \in \mathcal{I}$, $0_\lambda = 0$ es el $\mathfrak{C}$-objeto cero y además $\sigma_{\lambda\lambda'} = I_0 : 0_{\lambda'} \longrightarrow 0_\lambda$ es el morfismo identidad asociado al $\mathfrak{C}$-objeto cero. Luego $(f_\lambda, id_{\mathcal{I}}) : (0_\lambda, \sigma_{\lambda\lambda'}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{A}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel representante del isomorfismo f. Por otro lado, de la Proposición 3.3.9, para cada $\lambda \in \mathcal{I}$, con $\lambda' \geq \lambda$ existe el $\mathfrak{C}$-morfismo $g_\lambda : A_{\lambda'} \longrightarrow 0_\lambda$ que verifica $f_\lambda \circ g_\lambda = \delta_{\lambda\lambda'}$. Es decir $\delta_{\lambda\lambda'}$ es factorizable a través del $\mathfrak{C}$-objeto cero. Por lo tanto $\delta_{\lambda\lambda'} = 0$.
En segundo lugar, demostraremos que, si $\mathcal{A} \in obj\Big(pro(\mathfrak{C})\Big)$ satisface las condiciones del teorema, entonces $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\lfloor 0 \rfloor$.
Para tal efecto; consideramos los únicos $pro(\mathfrak{C})$-morfismos $g \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A}; \lfloor 0 \rfloor)$ y $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\lfloor 0 \rfloor; \mathcal{A})$, los cuales por la Proposición 3.3.5 quedan representados por sus $pro(\mathfrak{C})$-morfismos a nivel respectivamente.
Si $(f_\lambda, id_{\mathcal{I}}) \in \mathrm{Hom}_{inv-\mathfrak{C}}(0; A_\lambda)$ es el representante del $pro(\mathfrak{C})$-morfismo a nivel de f y tenemos en cuenta la Observación 3.1.23 ítem (b) el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo a nivel de g queda determinado por un $\lambda_0 \in \mathcal{I}$ y el $\mathfrak{C}$-morfismo $g : A_{\lambda_0} \longrightarrow 0$, entonces para un $\lambda \in \mathcal{I}$ arbitrario existe $\lambda' \geq \lambda$ tal que $\delta_{\lambda\lambda'} = 0$ y para cualquier $\lambda', \lambda_0 \leq \lambda''$ se sigue que $\delta_{\lambda\lambda''} = 0 \circ \delta_{\lambda'\lambda''} = 0$ es un cero $\mathfrak{C}$-morfismo y como la composición $f_\lambda \circ g \circ \delta_{\lambda_0\lambda''} : A_{\lambda''} \xrightarrow{g \circ \delta_{\lambda_0\lambda''}} 0 \xrightarrow{f_\lambda} A_\lambda$ es factorizable a través del $\mathfrak{C}$-objeto cero, se tiene $f_\lambda \circ (g \circ \delta_{\lambda_0\lambda''}) = 0 = \delta_{\lambda\lambda''}$ es decir $f_\lambda \circ g \sim I_{A_\lambda}$. Luego por la Proposición 3.2.3 se concluye $f \circ g = I_{\mathcal{A}}$. Además como I_0 es el único morfismo de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(0; 0)$ se tiene $g \circ f_{\lambda_0} = I_0$, es decir $g \circ f = I_{\lfloor 0 \rfloor}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\lfloor 0 \rfloor$. $\square$

Proposición 3.3.11 *Cada epimorfismo (monomorfismo) de la categoría $\mathfrak{C}$ es un epimorfismo (respectivamente, monomorfismo) en la categoría $pro(\mathfrak{C})$.*

Demostración: Verificaremos la afirmación para el caso del monomorfismo. Sea el monomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A; B)$ y los $pro(\mathfrak{C})$-morfismos $g, h \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{C}; \lfloor A \rfloor)$ tales que $f \circ g = f \circ h$. Por la observación 3.1.23 ítem b) los inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel representantes de g y h son determinados por $\nu_0 \in \Lambda$ y $\nu_0' \in \Lambda$ y los $\mathfrak{C}$-morfismos

$g : C_{\nu_0} \longrightarrow A$, $h : C_{\nu'_0} \longrightarrow A$; como existe $\nu'' \geq \nu_0, \nu'_0 \in \Lambda$ de la igualdad $f \circ g = f \circ h$ se sigue $f \circ \left(g \circ \delta''_{\nu''\nu_0}\right) = f \circ \left(h \circ \delta''_{\nu'_0\nu''}\right)$ y como f es un $\mathfrak{C}$-monomorfismo, $g \circ \delta''_{\nu''\nu_0} = h \circ \delta''_{\nu'_0\nu''}$. Finalmente por la observación 3.3.2 se concluye $g = h$.
Respecto al caso del epimorfismo se logra verificar dicha afirmación por la observación 3.1.23 ítem (c). □

Teorema 3.3.12 *En toda categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero, $f \in \operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$ es morfismo cero si y sólo si, para cada $\varphi' : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ el morfismo $(0_\mu, \varphi')$ es representante de f, donde $0_\mu : A_{\varphi'(\mu)} \longrightarrow B_\mu$ es el $\mathfrak{C}$-morfismo cero.*

Demostración: En primer lugar demostraremos que, si $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo cero, entonces $(0_\mu, \varphi')$ es representante de f.
Como f es un morfismo cero entonces por definición 1.5.15 existen $g \in \operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A}; \lfloor 0 \rfloor)$ y $g' \in \operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\lfloor 0 \rfloor; \mathcal{B})$ tal que $f = g' \circ g$. Pero según la Observación 3.1.23 ítem $b)$ el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel representante de g es determinado por un $\lambda_0 \in \mathcal{I}$ y el $\mathfrak{C}$-morfismos $g : A_{\lambda_0} \longrightarrow 0$. Además el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo g' es representado por el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel $\left(g'_\mu, id_{\mathcal{J}}\right)$.
Luego; $(f_\mu, \varphi) = \left(g'_\mu, id_{\mathcal{J}}\right) \circ g$ es el representante de f cuando $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$, $\varphi(\mu) = \lambda_0$ y $f_\mu = g'_\mu \circ g : A_{\lambda_0} \longrightarrow B_\mu$ es un $\mathfrak{C}$-morfismo cero para cada $\mu \in \mathcal{J}$.
Por otro lado, si $\varphi' : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ es una función de índice arbitraria y $0_\mu : A_{\varphi'(\mu)} \longrightarrow B_\mu$ es el $\mathfrak{C}$-morfismo cero para cada $\mu \in \mathcal{J}$, entonces $(0_\mu, \varphi') : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo tal que para cada $\mu \in \mathcal{J}$ y $\lambda \in \mathcal{I}$ con $\lambda \geq \varphi'(\mu), \lambda_0$ se tiene siempre la igualdad $f_\mu \circ \delta_{\lambda_0\lambda} = 0 = 0_\mu \circ \delta_{\varphi'(\mu)\lambda}$; es decir $(0_\mu, \varphi') \sim (f_\mu, \varphi)$. Por lo tanto $(0_\mu, \varphi')$ es un representante del $pro(\mathfrak{C})$-morfismo f.

En segundo lugar, demostraremos que, si $(0_\mu, \varphi')$ es representante de f, entonces $f \in \operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ es morfismo cero.
Si consideramos el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $(0_\mu, \varphi)$, donde $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ es la función de índice constante como representante de f, entonces dado cualquier $\mu \in \mathcal{J}$; para el $\mathfrak{C}$-morfismo cero $0_\mu : A_\mu \longrightarrow B_\mu$ existen los $\mathfrak{C}$-morfismos $g : A_\mu \longrightarrow 0$ y $g'_\mu : 0 \longrightarrow B_\mu$ tal que $0_\mu = g'_\mu \circ g$. Luego $g : \mathcal{A} \longrightarrow \lfloor 0 \rfloor$ y $\left(g'_\mu, id_{\mathcal{J}}\right) : \lfloor 0 \rfloor \longrightarrow \mathcal{B}$ son inv-$\mathfrak{C}$-morfismos tales que $(0_\mu, \varphi') = \left(g'_\mu, id_{\mathcal{J}}\right) \circ g$; es decir $f = [(0_\mu, \varphi')]$ es un $pro(\mathfrak{C})$-morfismo cero. □

3.4 Construcciones Pro-categóricas.

3.4.1 Núcleo y Conúcleo.

Proposición 3.4.1 *Si la categoría $\mathfrak{C}$ tiene objeto cero y todo $\mathfrak{C}$-morfismo tiene núcleo entonces todo $pro(\mathfrak{C})$-morfismo tiene núcleo.*

Demostración: En efecto; dado $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$ por la Proposición 3.3.5 y el Lema 1.6.5 se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{A} = (A_\nu, \delta_{\nu\nu'}, \mathcal{L})$ y $\mathcal{B} = (B_\nu, \delta'_{\nu\nu'}, \mathcal{L})$ tienen el mismo conjunto de índice $\mathcal{L}$ y que f admite como representante al inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel $(f_\nu, I_\mathcal{L})$.
Por otro lado, si $\Big(K_\nu, ker(f_\nu)\Big)$ un núcleo de $f_\nu : A_\nu \longrightarrow B_\nu$ en $\mathfrak{C}$, entonces para cada $\nu \leq \nu' \in \mathcal{L}$, se verifica la siguiente igualdad,

$$f_\nu \circ (\delta_{\nu\nu'} \circ ker(f_{\nu'})) = (f_\nu \circ \delta_{\nu\nu'}) \circ ker f_{\mu'}) = (\delta'_{\nu\nu'} \circ f_{\nu'}) \circ ker(f_{\nu'}) = \delta'_{\nu\nu'} \circ 0 = 0,$$

luego por la propiedad universal de K_ν respecto del $\mathfrak{C}$-morfismo $ker(f_\nu)$ existe un único $\mathfrak{C}$-morfismo $\tilde{\delta}_{\nu\nu'} : K_{\nu'} \longrightarrow K_\nu$ tal que $ker(f_\nu) \circ \tilde{\delta}_{\nu\nu'} = \delta_{\nu\nu'} \circ ker(f_{\nu'})$, tal como se puede observar en el diagrama conmutativo adjunto.

$$\begin{tikzcd}
K_{\nu'} \arrow[r, "ker(f_{\nu'})"] \arrow[d, dotted, "\tilde{\delta}_{\nu\nu'}"'] & A_{\nu'} \arrow[r, "f_{\mu'}"] \arrow[d, "\delta_{\nu\nu'}"] & B_{\nu'} \arrow[d, "\delta'_{\nu\nu'}"] \\
K_\nu \arrow[r, "ker(f_\nu)"'] & A_\nu \arrow[r, "f_\nu"'] & B_\nu
\end{tikzcd}$$

En general, para todo $\nu', \nu, \nu'' \in \mathcal{L}$, $\nu' \leq \nu \leq \nu''$ se tiene,

$$ker(f_\nu) \circ \tilde{\delta}_{\nu\nu'} \circ \tilde{\delta}_{\nu'\nu''} = \delta_{\nu\nu'} \circ ker(f_{\nu'}) \circ \tilde{\delta}_{\nu'\nu''} = \delta_{\nu\nu'} \circ \delta_{\nu'\nu''} \circ ker(f_{\nu''}) = \delta_{\nu\nu''} \circ ker(f_{\nu''})$$

y por la unicidad del $\mathfrak{C}$-morfismo $\tilde{\delta}_{\nu\nu'}$ respecto al objeto K_ν, $\tilde{\delta}_{\nu\nu''} = \tilde{\delta}_{\nu\nu'} \circ \tilde{\delta}_{\nu'\nu''}$. Es decir $\mathcal{K} = \Big(K_\nu, \tilde{\delta}_{\nu\nu'}, \mathcal{L}\Big)$ es un sistema inverso en $\mathfrak{C}$ y $(ker(f_\nu), I_\mathcal{L}) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel.

A continuación, demostraremos que $\Big(\mathcal{K}, ker(f)\Big)$, con $[(ker(f_\nu), I_\mathcal{L})] : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un núcleo de f en $pro(\mathfrak{C})$.
En efecto; como para todo $\nu \in \mathcal{L}$, $f_\nu \circ ker(f_\nu) = 0$, por el Teorema 3.3.12 se sigue $f \circ ker(f) = 0$. Por lo tanto, es suficiente demostrar que, si $g : \mathcal{C} = \Big(C_\eta, \delta''_{\eta\eta'}, \Lambda\Big) \longrightarrow \mathcal{A}$ es tal que $f \circ g = 0$, entonces existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{C};\mathcal{K})$ que verifica

$ker(f) \circ h = g$.
Si g es representado por el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo (g_ν, ϕ) de la igualdad $f \circ g = 0$ y el Teorema 3.3.12 se concluye para cada $\nu \in \mathcal{L}$ existe $\phi(\nu) \leq \eta \in \Lambda$ tal que $0 = f_\nu \circ g_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta}$.
Por lo tanto; no hay pérdida de generalidad en asumir que $0 = f_\nu \circ g_\nu : C_{\phi(\nu)} \longrightarrow B_\nu$.
Por la propiedad universal de K_ν respecto del $\mathfrak{C}$-morfismo $ker(f_\nu)$ en $\mathfrak{C}$, para cada $\nu \in \mathcal{L}$ existe un único $\mathfrak{C}$-morfismo $h_\nu : C_{\phi(\nu)} \longrightarrow K_\nu$ tal que $ker(f_\nu) \circ h_\nu = g_\nu$.

Demostremos que $(h_\nu, \phi) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ es un inv-$\mathfrak{C}$ morfismo.
En efecto; como para cada $\nu \leq \nu' \in \mathcal{L}$ existe un índice $\eta \in \Lambda$ tal que:

$$\delta_{\nu\nu'} \circ g_{\nu'} \circ \delta''_{\phi(\nu')\eta} = g_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta}.$$

Si consideremos el $\mathfrak{C}$-morfismo $g_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta} : C_\eta \longrightarrow A_\nu$, se tiene $f_\nu \circ \left(g_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta}\right) = 0$ y por la propiedad universal de K_ν respecto del $\mathfrak{C}$-morfismo $ker(f_\nu)$, existe un único $\mathfrak{C}$-morfismo $\alpha : C_\eta \longrightarrow k_\nu$ tal que $ker(f_\nu) \circ \alpha = g_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta}$. Luego de la igualdad $ker(f_\nu) \circ h_\nu = g_\nu$ se tiene $ker(f_\nu) \circ \left(h_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta}\right) = \left(g_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta}\right)$ y por la unicidad de α se tiene $\alpha = h_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta}$. Finalmente, del diagrama adjunto,

$$\begin{tikzcd}
K_\nu \arrow[rr, "ker(f_\nu)"] & & A_\nu \arrow[r, "f_\nu"] & B_\nu \\
& C_{\phi(\nu)} \arrow[ul, "h_\nu"'] \arrow[ur, "g_\nu"'] & & \\
K_{\nu'} \arrow[uu, "\tilde{\delta}_{\nu\nu'}"] \arrow[rr, "ker(f_{\nu'})"'] & & A_{\nu'} \arrow[uu, "\delta_{\nu\nu'}"'] \arrow[r, "f_{\nu'}"'] & B_{\nu'} \arrow[uu, "\delta'_{\nu\nu'}"'] \\
& C_{\phi(\nu')} \arrow[ul, "h_{\nu'}"] \arrow[ur, "g_{\nu'}"'] \arrow[uu, "\delta''_{\phi(\nu)\phi(\nu')}"] & & \\
& C_\eta \arrow[u, "\delta''_{\phi(\nu')\eta}"] & &
\end{tikzcd}$$

se infiere,

$$ker(f_\nu) \circ \tilde{\delta}_{\nu\nu'} \circ h_{\nu'} \circ \delta''_{\phi(\nu')\eta} = \delta_{\nu\nu'} \circ ker(f_{\nu'}) \circ h_{\nu'} \circ \delta''_{\phi(\nu')\eta} = \delta_{\nu\nu'} \circ g_{\nu'} \circ \delta''_{\phi(\eta)\eta} = g_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu')\eta}.$$

Por lo tanto $\tilde{\delta}_{\nu\nu'} \circ h_{\nu'} \circ \delta''_{\phi(\nu')\eta} = \alpha = h_\nu \circ \delta''_{\phi(\nu)\eta}$. Luego (h_ν, ϕ) es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo representante del $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ con la propiedad requerida. $\square$

Proposición 3.4.2 *Si la categoría $\mathfrak{C}$ tiene objeto cero y todo $\mathfrak{C}$-morfismo tiene conúcleo entonces todo $pro(\mathfrak{C})$-morfismo tiene conúcleo.*

Demostración: El resultado se verifica por un razonamiento análogo a la demostración de la Proposición 3.4.1. □

Lema 3.4.3 *Dada una categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero donde todo morfismo tiene núcleo. Si $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$ es un monomorfismo y admite como representante al $pro(\mathfrak{C})$-morfismo a nivel f, entonces $(f_\mu, id_{\mathcal{J}})$ satisface la siguiente propiedad:*

$$\textit{Para cada } \mu \in \mathcal{J}, \textit{ existe } \mu' \geq \mu \textit{ tal que } \delta_{\mu\mu'} \circ ker(f_{\mu'}) = 0.$$

Demostración: Según la Proposición 3.4.1 todo $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$ tiene núcleo, por lo tanto; si $\Big(\mathcal{K}, ker(f)\Big)$ es el núcleo del monomorfismo f, entonces por el Teorema 1.6.10 se concluye $ker(f) = 0$. Además por el Teorema 3.3.12 para cierto $\mu \in \mathcal{J}$ se tiene que $(0_\mu, id_{\mathcal{J}})$ es un representante de $ker(f)$. Luego para algún $\mu' \in \mathcal{J}$ con $\mu \leq \mu'$ se obtiene $\delta_{\mu\mu'} \circ ker(f_{\mu'}) = 0_\mu \circ \tilde{\delta}_{\mu\mu'} = 0$. □

Lema 3.4.4 *Dada una categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero donde todo morfismo tiene conúcleo. Si $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$ es un epimorfismo y admite como representante al $pro(\mathfrak{C})$-morfismo a nivel f, entonces $(f_\mu, id_{\mathcal{J}})$ satisface la siguiente propiedad:*

$$\textit{Para cada } \mu \in \mathcal{J}, \textit{ existe } \mu' \geq \mu \textit{ tal que } coker(f_{\mu'}) \circ \delta'_{\mu\mu'} = 0.$$

Demostración: El resultado se verifica por un razonamiento análogo a la demostración del Lema 3.4.3. □

3.4.2 Imagen y Coimagen.

Observación 3.4.5 Por Definición 2.4.4, Proposición 3.4.1; y Proposición 3.4.2. Si $\mathfrak{C}$ es una categoría abeliana y $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, entonces existe el pro-objeto $\mathcal{I}m(f) = \Big(Im(\tilde{f}_\nu), \tilde{\delta}'_{\nu\nu'}, \mathcal{L}'\Big)$ y el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $im(f) \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}\Big(\mathcal{I}m(f), \mathcal{B}\Big)$; así como el $\mathcal{C}oim(f) := \Big(Coim(f_\tau), \delta^*_{\tau\tau'}, \mathcal{V}\Big) \in obj\Big(pro(\mathfrak{C})\Big)$ y el $pro(\mathfrak{C})$-morfismo $coim(f) \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}\Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}oim(f)\Big)$.

Proposición 3.4.6 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría abeliana y $f \in \operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$, entonces $\mathcal{I}m(f)$ y $\mathcal{C}oim(f)$ son $pro(\mathfrak{C})$-objetos isomorfos.*

Demostración: En efecto; dado $f \in \operatorname{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$ por la Proposición 3.3.5 se puede asumir, sin pérdida de generalidad que $\mathcal{A} = (A_\nu, \delta_{\nu\nu'}, \mathcal{L})$ y $\mathcal{B} = (B_\nu, \delta'_{\nu\nu'}, \mathcal{L})$ tienen el mismo conjunto de índice $\mathcal{L}$ y que f admite como representante al inv-$\mathfrak{C}$-morfismo a nivel $(f_\nu, I_{\mathcal{L}})$. Como $\mathfrak{C}$ es una categoría abeliana, por la Proposición 2.4.8 para cada $\nu \in \mathcal{L}$ existe un único $\mathfrak{C}$-isomorfismo $g_\nu : Coim(f_\nu) \longrightarrow Im(f_\nu)$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
K_\nu \arrow[r, "ker(f_\nu)"] & A_\nu \arrow[rr, "f_\nu"] \arrow[d, "coim(f_\nu)"'] & & B_\nu \arrow[r, "coker(f_\nu)"] & D_\nu \\
& Coim(f_\nu) \arrow[rr, dotted, "g_\nu"] & & Im(f_\nu) \arrow[u, "im(f_\nu)"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, para $\nu \leq \nu' \in \mathcal{L}$ se tiene el diagrama conmutativo adjunto.

$$\begin{tikzcd}
& A_{\nu'} \arrow[rr, "f_{\nu'}"] \arrow[dl, "coim(f_{\nu'})"'] \arrow[dd, "\delta_{\nu\nu'}"'] & & B_{\nu'} \arrow[dd, "\delta'_{\nu\nu'}"] \\
Coim(f_{\nu'}) \arrow[rr, dotted, "g_{\nu'}"] \arrow[dd, "\delta^*_{\nu\nu'}"'] & & Im(f_{\nu'}) \arrow[ur, "im(f_{\nu'})"] \arrow[dd, "\tilde{\delta}'_{\nu\nu'}"] & \\
& A_\nu \arrow[rr, "f_\nu"] \arrow[dl, "coim(f_\nu)"'] & & B_\nu \\
Coim(f_\nu) \arrow[rr, dotted, "g_\nu"] & & Im(f_\nu) \arrow[ur, "im(f_\nu)"'] &
\end{tikzcd}$$

A partir del diagrama se deduce $g_\nu \circ \delta^*_{\nu\nu'} = \tilde{\delta}'_{\nu\nu'} \circ g_{\nu'}$.
Por lo tanto, $\Big(g, id_{\mathcal{L}}\Big) : \mathcal{C}oim(f) \longrightarrow \mathcal{I}m(f)$ es un inv-$pro(\mathfrak{C})$-morfismo. Por otro lado, como para cada $\nu \in \mathcal{L}$, g_ν es un $\mathfrak{C}$-isomorfismo, existe el $\mathfrak{C}$-morfismo inverso $g_{\nu'}^{-1} : Im(f_{\nu'}) \longrightarrow Coim(f_{\nu'})$, luego si definimos para $\nu' \geq \nu \in \mathcal{L}$ el $\mathfrak{C}$-morfismo $g'_\nu = \delta^*_{\nu\nu'} \circ g_{\nu'}^{-1} : Im(f_{\nu'}) \longrightarrow Coim(f_\nu)$ se cumple $g'_\nu \circ g_\nu = \delta^*_{\nu\nu'}$ y $g_\nu \circ g'_\nu = \tilde{\delta}'_{\nu\nu'}$ es decir, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
Coim(f_{\nu'}) \arrow[r, "g_{\nu'}"] \arrow[d, "\delta^*_{\nu\nu'}"'] & Im(f_{\nu'}) \arrow[d, "\tilde{\delta}'_{\nu\nu'}"] \arrow[dl, dotted, "g'_\nu"'] \\
Coim(\tilde{f}_\nu) \arrow[r, "g_\nu"'] & Im(f_\nu)
\end{tikzcd}$$

y por la Proposición 3.3.9 se concluye que $g : \mathcal{I}m(f) \longrightarrow \mathcal{C}oim(f)$ es un isomorfismo. $\square$

3.4.3 Producto y Coproducto.

Proposición 3.4.7 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría con producto finito entonces $pro(\mathfrak{C})$ también es una categoría con producto finito.*

Demostración: Dado los $pro(\mathfrak{C})$-morfismos $\delta : \lfloor A\rfloor \longrightarrow \mathcal{A}$ y $\delta' : \lfloor B\rfloor \longrightarrow \mathcal{B}$, definimos $\mathcal{A}\times\mathcal{B} = \big(A_\lambda \times B_\mu, \delta_{\lambda\lambda'} \times \delta'_{\mu\mu'}, \mathcal{L}\big)$; donde $\mathcal{L} = \{(\lambda,\mu) \in \mathcal{I}\times\mathcal{J}\}$ es un conjunto directo bajo la relación, $\nu = (\lambda,\mu) \leq \nu' = (\lambda',\mu')$ si y sólo si $\lambda \leq \lambda'$ y $\mu \leq \mu'$.
Como $\delta_{\lambda\lambda'}\times\delta'_{\mu\mu'} : \lfloor A\rfloor\times\lfloor B\rfloor \longrightarrow \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ es el $\mathfrak{C}$-morfismo $\delta_{\lambda\lambda'}\times\delta'_{\mu\mu'} = \big\langle \delta_{\lambda\lambda'} \circ \delta_{\lambda'}; \delta'_{\mu\mu'} \circ \delta'_{\mu'}\big\rangle$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \lfloor A\rfloor \times \lfloor B\rfloor \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] \arrow[ddll, bend right, "\delta_{\lambda'}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\delta'_{\mu'}"] \arrow[ddd, dotted, "\delta_{\lambda\lambda'}\times\delta'_{\mu\mu'}"] & & \\
 & \lfloor A\rfloor \arrow[d, "\delta_\lambda"'] & & \lfloor B\rfloor \arrow[d, "\delta'_\mu"'] & \\
A_{\lambda'} \arrow[r, "\delta_{\lambda\lambda'}"] & A_\lambda & & B_\mu & B_{\mu'} \arrow[l, "\delta'_{\mu\mu'}"'] \\
 & & A_\lambda \times B_\mu \arrow[ul, "\pi_{A_\lambda}"] \arrow[ur, "\pi_{B_\mu}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Es claro que, $\delta_{\lambda\lambda'}\times\delta'_{\mu\mu'}$ es un mapeo estructural. Además, $\delta\times\delta' : \lfloor A\rfloor\times\lfloor B\rfloor \longrightarrow \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ es un $pro(\mathfrak{C})$-mofismo.

A continuación, se define el $pro(\mathfrak{C})$ morfismo proyección $\pi_{\mathcal{A}}$ para un $\mu \in \mathcal{J}$ fijo, como ${}_\mu\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$, es decir; como la clase de equivalencia de los inv-$\mathfrak{C}$-morfismos proyección $({}_\mu\pi_{A_\lambda}, \varphi_\mu) : A_\lambda \times B_\mu \longrightarrow A_\lambda$, $\lambda \in \mathcal{I}$; donde $\varphi_\mu : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}\times\mathcal{J}$ se define por $\varphi_\mu(\lambda) = (\lambda,\mu)$. Además es claro que, si μ' es otro índice, entonces $({}_\mu\pi_{A_\lambda}, \varphi_\mu)$ y $({}_{\mu'}\pi_{A_\lambda}, \varphi_{\mu'})$ son equivalentes.
Demostraremos que ${}_\mu\pi_{\mathcal{A}}$ así definido es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo. Para tal efecto; se veri-

ficará que el diagrama adjunto conmuta,

$$\begin{tikzcd}
A_\lambda \times B_\mu \arrow[d, "{}_\mu\pi_{A_\lambda}"'] & & A_{\lambda''} \times B_{\mu''} \arrow[ll, "\delta_{\lambda\lambda''}\times\delta'_{\mu\mu''}"'] \arrow[rr, "\delta_{\lambda'\lambda''}\times\delta'_{\mu'\mu''}"] & & A_{\lambda'} \times B_{\mu'} \arrow[d, "{}_{\mu'}\pi_{A_{\lambda'}}"] \\
A_\lambda & & & & A_{\lambda'} \arrow[llll, "\delta_{\lambda\lambda'}"]
\end{tikzcd}$$

En efecto, por la conmutatividad de los diagramas asociados a los $\mathfrak{C}$-morfismos producto $\delta_{\lambda'\lambda''} \times \delta'_{\mu'\mu''} : \lfloor A \rfloor \times \lfloor B \rfloor \longrightarrow A_{\lambda'} \times B_{\mu'}$; $\delta_{\lambda\lambda''} \times \delta'_{\mu\mu''} : \lfloor A \rfloor \times \lfloor B \rfloor \longrightarrow A_\lambda \times B_\mu$ y la igualdad,

$$\begin{aligned}
\delta_{\lambda\lambda'} \circ \Big({}_{\mu'}\pi_{A_{\lambda'}} \circ \delta_{\lambda'\lambda''} \times \delta'_{\mu'\mu''} \Big) &= \delta_{\lambda\lambda'} \circ \Big(\delta_{\lambda'\lambda''} \circ \delta_{\lambda''} \Big) \\
&= \Big(\delta_{\lambda\lambda'} \circ \delta_{\lambda'\lambda''} \Big) \circ \delta_{\lambda''} \\
&= \delta_{\lambda\lambda''} \circ \delta_{\lambda''} \\
&= {}_\mu\pi_{A_\lambda} \circ \delta_{\lambda\lambda''} \times \delta'_{\mu\mu''}
\end{aligned}$$

se concluye que $\pi_{\mathcal{A}}$ es un inv-$\mathfrak{C}$ morfismo.
De manera análoga, se define el $pro(\mathfrak{C})$ morfismo proyección $\pi_{\mathcal{B}}$ para un $\lambda \in \mathcal{I}$ fijo, por ${}_\lambda\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, es decir; como la clase de equivalencia de los inv-$\mathfrak{C}$-morfismos proyección $\big({}_\lambda\pi_{B_\mu}, \varphi_\lambda\big) : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, $\mu \in \mathcal{J}$; donde $\varphi_\lambda : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ se define por $\varphi_\lambda(\mu) = (\lambda, \mu)$.

Finalmente, demostraremos que $\Big(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \pi_{\mathcal{A}}, \pi_{\mathcal{B}}\Big)$ cumple con la propiedad universal del producto; es decir, si $\mathcal{C} = (C_\nu, \delta''_{\nu\nu'}, \Lambda) \in obj\Big(pro(\mathfrak{C})\Big)$, $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}\Big(\mathcal{C}; \mathcal{A}\Big)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}\Big(\mathcal{C}; \mathcal{B}\Big)$, entonces existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}\Big(\mathcal{C}; \mathcal{A} \times \mathcal{B}\Big)$ tal que $\pi_{\mathcal{B}} \circ h = g$ y $\pi_{\mathcal{A}} \circ h = f$.

En efecto; si los inv-$\mathfrak{C}$-morfismos (f_λ, ψ) y (g_μ, ψ') son los representantes de f y g entonces la existencia del $pro(\mathfrak{C})$-morfismo h pasa por garantizar la existencia de su representante, el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $(h_{(\lambda,\mu)}, \psi'')$ con la propiedad mencionada.
Como $\psi(\lambda), \psi'(\mu) \in \Lambda$ existe $\nu \in \Lambda$ tal que $\nu \geq \psi(\lambda), \psi'(\mu)$; luego elegimos un ν con esta propiedad, para definir la función $\psi'' : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \longrightarrow \Lambda$ como $\psi''(\lambda, \mu) = \nu$, de manera tal que para todo $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ se define el $\mathfrak{C}$-morfismo $h_{(\lambda,\mu)} : Z_{\psi''(\lambda,\mu)} \longrightarrow A_\lambda \times B_\mu$ como $h_{(\lambda,\mu)} = \Big\langle f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda)\psi''(\lambda,\mu)}; g_\mu \circ \delta''_{\psi'(\mu)\psi''(\lambda,\mu)} \Big\rangle$.
Demostraremos que $(h_{(\lambda,\mu)}, \psi'')$ así definido es un inv-$\mathfrak{C}$-morfismo. En efecto; si $(\lambda, \mu) \leq (\lambda', \mu')$, entonces $\lambda \leq \lambda'$ y $\mu \leq \mu'$. Como f, g son $pro(\mathfrak{C})$-morfismos para

$\lambda \leq \lambda'$ existe $\nu_1 \in \Lambda$ con $\nu_1 \geq \psi(\lambda), \psi(\lambda')$ tal que $f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda)\nu_1} = \delta_{\lambda\lambda'} \circ f_{\lambda'} \circ \delta''_{\psi(\lambda')\nu_1}$ y para $\mu \leq \mu'$ existe $\nu_2 \in \Lambda$ con $\nu_2 \geq \psi'(\mu), \psi'(\mu')$ tal que $g_\mu \circ \delta''_{\psi'(\mu)\nu_2} = \delta'_{\mu\mu'} \circ g_{\mu'} \circ \delta''_{\psi'(\mu')\nu_2}$. Pero como Λ es directo existe $\nu_3 \geq \nu_2, \nu_1$, y $\nu_4 \in \Lambda$ tal que $\nu_4 \geq \psi''(\lambda,\mu), \psi''(\lambda',\mu')$, así como $\nu \geq \nu_4, \nu_3$. Luego,

$$\begin{aligned}
h_{(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{\psi''(\lambda,\mu)\nu} &= \left\langle f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda)\psi''(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{\psi''(\lambda,\mu)\nu}; g_\mu \circ \delta''_{\psi'(\mu)\psi''(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{\psi''(\lambda,\mu)\nu} \right\rangle \\
&= \left\langle f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda)\nu}; g_\mu \circ \delta''_{\psi'(\mu)\nu} \right\rangle \\
&= \left\langle f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda)\nu_1} \circ \delta''_{\nu_1\nu}; g_\mu \circ \delta''_{\psi'(\mu)\nu_2} \circ \delta''_{\nu_2\nu} \right\rangle \\
&= \left\langle \delta_{\lambda\lambda'} \circ f_{\lambda'} \circ \delta''_{\psi(\lambda')\nu_1} \circ \delta''_{\nu_1\nu}; \delta'_{\mu\mu'} \circ g_{\mu'} \circ \delta''_{\psi'(\mu')\nu_2} \circ \delta''_{\nu_2\nu} \right\rangle \\
&= \left\langle \delta_{\lambda\lambda'} \circ f_{\lambda'} \circ \delta''_{\psi(\lambda')\nu}; \delta'_{\mu\mu'} \circ g_{\mu'} \circ \delta''_{\psi'(\mu')\nu} \right\rangle \\
&= \left\langle \delta_{\lambda\lambda'} \circ f_{\lambda'} \circ \delta''_{\psi(\lambda')\psi''(\lambda',\mu')} \circ \delta''_{\psi''(\lambda',\mu')\nu}; \delta'_{\mu\mu'} \circ g_{\mu'} \circ \delta''_{\psi'(\mu')\psi''(\lambda',\mu')} \circ \delta''_{\psi''(\lambda',\mu')\nu} \right\rangle \\
&= \left\langle \delta_{\lambda\lambda'} \times \delta'_{\mu\mu'} \right\rangle \circ h_{(\lambda',\mu')} \circ \delta''_{h(\lambda',\mu')\nu}
\end{aligned}$$

Observe que para cada $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ se tiene ${}_\mu\pi_{A_\lambda} \circ h_{(\lambda,\mu)} = f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda)\nu}$. Por lo tanto $\pi_{\mathcal{A}} \circ h = f$. De manera análoga se concluye $\pi_{\mathcal{B}} \circ h = g$.

Ahora demostremos la unicidad del $pro(\mathfrak{C})$-morfismo h para tal fin, supongamos que existe $h' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ representado por el inv-$\mathfrak{C}$-morfismo $\left(h'_{(\lambda,\mu)}, \phi\right)$ de manera tal que $\pi_{\mathcal{A}} \circ h' = f$ y $\pi_{\mathcal{B}} \circ h' = g$.
Como $\pi_{\mathcal{A}} \circ h' = f$, para $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ existe $\nu_1 \in \Lambda$ con $\nu_1 \geq \psi(\lambda), h'_{(\lambda,\mu)}$ tal que $f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda),\nu_1} = {}_\mu\pi_{A_\lambda} \circ h'_{(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{h'_{(\lambda,\mu)}\nu_1}$ y como $\pi_{\mathcal{B}} \circ h' = g$ para $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ existe $\nu_2 \in \Lambda$ con $\nu_2 \geq \psi'(\mu), h'_{(\lambda,\mu)}$ tal que $g_\mu \circ \delta''_{\psi'(\mu),\nu_2} = {}_\lambda\pi_{B_\mu} \circ h'_{(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{h'_{(\lambda,\mu)}\nu_2}$.
Por otro lado, al ser Λ directo existe $\nu_3 \in \Lambda$ con $\nu_3 \geq \nu_2, \nu_1$ y $\nu \in \Lambda$ con $\nu \geq \nu_3, h_{(\lambda,\mu)}$; de manera que, $f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda),\nu} = {}_\mu\pi_{A_\lambda} \circ h'_{(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{h'_{(\lambda,\mu)}\nu}$ y $g_\mu \circ \delta''_{\psi'(\mu),\nu} = {}_\lambda\pi_{B_\mu} \circ h'_{(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{h'_{(\lambda,\mu)}\nu}$.
Por lo tanto $h'_{(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{h'(\lambda,\mu)\nu} = \left\langle f_\lambda \circ \delta''_{\psi(\lambda),\nu}; g_\mu \circ \delta''_{\psi'(\mu),\nu} \right\rangle = h_{(\lambda,\mu)} \circ \delta''_{h(\lambda,\mu)\nu}$. Luego $h' = h$. Es decir h es único. □

Proposición 3.4.8 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría con coproductos finitos, entonces $pro(\mathfrak{C})$ tiene coproductos finitos.*

Demostración: El resultado se obtiene por un razonamiento análogo a la demostración de la Proposición 3.4.7. □

3.4.4 Pre-aditividad y Aditividad.

Proposición 3.4.9 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría pre-aditiva, entonces $pro(\mathfrak{C})$ también es una categoría pre-aditiva.*

Demostración: Demostraremos que $pro(\mathfrak{C})$ verifica las siguientes condiciones:

i) Dados $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in obj\Big(pro(\mathfrak{C})\Big)$ y la operación binaria:

$$+ : \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B}) \times \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$$

definida por $f+g := [f]+[g] = [f+g]$.
Demostraremos que $\Big(\mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B}), +\Big)$ es un grupo abeliano aditivo. En efecto; sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$ por la Proposición 3.3.5 se puede asumir sin perdida de generalidad que $\mathcal{A} = (A_\nu, \delta_{\nu\nu'}, \mathcal{L})$ y $\mathcal{B} = (B_\nu, \delta'_{\nu\nu'}, \mathcal{L})$ es decir son reindexados por un mismo conjunto de indices $\mathcal{L}$ de manera que f y g son representado por un $pro(\mathfrak{C})$-morfismo a nivel respectivamente. Luego $(f_\nu + g_\nu) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_\nu; B_\nu)$. Pues $\mathfrak{C}$ es una categoría aditiva. Si definimos $f+g$ por la familia de $\mathfrak{C}$-morfismos $f_\nu + g_\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_\nu; B_\nu)$ es evidente que $f+g$ es un $pro(\mathfrak{C})$-morfismo y $(f+g) \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$. Los otros axiomas de grupo abeliano aditivo son inmediatos.

ii) Ahora demostraremos

$$\circ : \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B}) \times \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{B};\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{C})$$

es bilineal. Está afirrmación consiste de las dos siguientes ítems a) y b):

a) Si $h; g \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{A};\mathcal{B})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{pro(\mathfrak{C})}(\mathcal{B};\mathcal{C})$ entonces demostraremos $(h+g)\circ f = h\circ f + g\circ f$. En efecto; por el argumento expuesto en el ítem i), se tiene :

$$\Big(h_\nu + g_\nu\Big) \circ f_\nu = h_\nu \circ f_\nu + g_\nu \circ f_\nu, \text{ para cada } \nu \leq \nu' \in \mathcal{L}.$$

Por lo tanto $(h+g)\circ f = h\circ f + g\circ f$.

b) De manera análoga se prueba que $h\circ(g+f) = h\circ g + h\circ f$.

Por lo tanto $pro(\mathfrak{C})$ es pre-aditiva. □

Teorema 3.4.10 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría aditiva, entonces $pro(\mathfrak{C})$ es una categoría aditiva.*

Demostración: Demostraremos que $pro(\mathfrak{C})$ verifica las condiciones de una categoría aditiva (ver Definición 2.2.1).

a) Se verifica por Porposición 3.4.9.

b) Se verifica por Proposición 3.3.7.

c) Se verifica por Proposición 3.4.7 y Proposición 3.4.8.

Por lo tanto $pro(\mathfrak{C})$ es una categoría aditiva. □

Teorema 3.4.11 *Si la categoría $\mathfrak{C}$ es aditiva entonces $pro(\mathfrak{C})$ tiene biproductos.*

Demostración: Por Teorema 3.4.10 se deduce que $pro(\mathfrak{C})$ tiene productos binarios y por el Teorema 2.1.11 se concluye que $pro(\mathfrak{C})$ tiene biproductos. □

3.4.5 Abelianidad.

Teorema 3.4.12 *$pro(\mathfrak{C})$ es abeliana, si $\mathfrak{C}$ es una categoría abeliana.*

Demostración: Para demostrar que $pro(\mathfrak{C})$ es abeliana, hacemos referencia a la Definición 2.4.1 y para ello verificaremos que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Por Teorema 3.4.10 se verifica que $pro(\mathfrak{C})$ es aditiva.

2. Por Proposición 3.4.1 y la Proposición 3.4.2 se verifica que todo morfismo en $pro(\mathfrak{C})$ tiene núcleo y conúcleo.

3. Por Proposición 3.4.6 y la Proposición 2.4.12 se verifica que todo monomorfismo(epimorfismo) en $pro(\mathfrak{C})$ es morfismo ker(coker) respectivamente. □

3.5 Consideraciones finales.

A toda categoría $\mathfrak{C}$ es posible asociarle una categoría de sistemas inversos inv-$\mathfrak{C}$ y la pro-categoría $pro(\mathfrak{C})$. Un estudio de tal situación se puede apreciar en esta tesis.
Por otro lado, S. Mardešić y J. Segal demuestran (ver [30],pp. 14–15) que los pro-objetos indexados por categorías cofiltrantes pequeñas son isomorfos a pro-objetos indexados por conjuntos directos. Tal isomorfismo permite principalmente reindexar a los sistemas inversos, con la finalidad de obtener una substancial simplificación en las demostraciones. Por tal razón, esta tesis utiliza los sistemas inversos indexados por conjuntos directos para demostrar que, si la categoría $\mathfrak{C}$ es Abeliana, entonces $pro(\mathfrak{C})$ también lo es.

Referencias

[1] Awodey Steve, *Category Theory*, Published in the United States by Oxford University Press Inc., New York, Second Edition published 2010.

[2] Awodey Steve, An Answer to Hellmans Question: Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?, Philosophia Mathematica, 12(1), pp. 54-64.

[3] Artin Michael, Grothendieck Alexander y Verdier Jean-Louis, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, tome **1**, Lecture Notes in Math. 269, Springer, 1972.

[4] Artin Michael y Mazur Barry, *Étale Homotopy*, Lecture Notes in Math. 100, Springer, 1969.

[5] Bourbaki, N., The Architecture of Mathematics. The American Mathematical Monthly, 57,(4), pp. 221-232.

[6] Buchsbaum David, Transactions of the American Mathematical Society, Vol **80**, Issue 1 (Sep. 1955)

[7] Curquejo Otero Luis, *Functores adjuntos y teoremas de adjuncin*, Monografa de la licenciatura en Matemtica. Dpto. de Ciencias. Universidad de Sevilla, 2016. Sevilla-España

[8] R. L. Cohen, J. D. S. Jones y G. B. Segal, *Floer's infinite-dimensional Morse theory and homotopy theory*, in: The Floer Memorial Volume, Progr. Math. 133, Birkhauser, 1995, 297–325.

[9] Colque Taipe Felipe, *Sucesiones Espectrales, Homología de Complejos Filtrados y Derivación de Funtores Compuestos*. Tesis, en Matemática Aplicada. Dpto. Facultad de Ciencias Univ. Nacional de Ingeniería, 2009.Lima-Perú

[10] Cordier J.M. y Porter T., *Shape Theory: Categorical Methods of Approximation*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl., Ellis Horwood, 1989.

[11] Dydak J.,*Epimorphism and monomorphism in homotopy*, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992) 1171–1173.

[12] Eilenberg Samuel y MacLane Saunders. (1945), *General theory of natural equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society **58**, 231–94.

[13] Edwards D.A. y Hastings H.M., *Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology*, Lecture Notes in Math. 542, Springer, 1976.

[14] Freyd Peter, *Abelian Categories*, New York: Harper and Row, 1964.

[15] Feferman, S., Set-theoretical Foundations of Category Theory, in M. Barr, et a., eds., Reports of the Midwest Category Seminar III, Lecture Notes in Mathematics 106, American Mathematical Society, 201-247.

[16] Friedlander E. M., *Étale homotopy of simplicial schemes*, Ann. of Math. Stud. 104, Princeton Univ. Press, 1982.

[17] Hellman G., *Mathematics without Numbers:Towards a Modal-Structural Interpretation.*,UK: Oxford University Press, 1989.

[18] Jech T., *Set theory*, New York: Springer-Verlag, 2013.

[19] Lawvere Francis William y Stephen H. Schamuel, *Conceptual mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[20] MacLane Saunders. (1971), *Categories for the Working Mathematician*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2nd ed. 1998.

[21] MacLane, S. and Moerdijk, I. Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory, New York: Springer-Verlag. 1992

[22] MOLINA GARAY JÓSE, *Teorema de Esción de Wodzicki*, Tesis, en Matemática Aplicada. Dpto. Facultad de Ciencias Univ. Nacional de Ingeniería, 2004.Lima-Perú

[23] LEZAMA FELIPE OSWALDO, *Categorías*, Cuaderno de álgebra, Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, 2014.

[24] LANDRY ELAINE y MARQUIS JEAN-PIERRE, *Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical*, Philosophia Mathematica (III) (2005) **13**, 1–43. doi:10.1093/philmat/nki005.

[25] PARRA BAQUERO FELIPE, *Sub-categorías de grupos*, Tesis, en Matemática Aplicada. Dpto. Facultad de Ciencias Univ. Nacional de Colombia, 2012.

[26] RESNIK MICHAEL DAVID, *Structural relativity*, Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Oxford University Press.

[27] SCHAPIRA PIERRE y KASHIWARA M., *Categories and sheaves*, Grundlehren der Math. Wiss. 332 Springer-Verlag, 2005.

[28] STONEK BRUNO, *Teoría de Haces*, Monografía de la licenciatura en Matemática. Dpto. de Ciencias, Universidad de la República, 2012. Uruguay

[29] SHAPIRO, S., Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. Oxford university Press. 1997

[30] MARDEŠIĆ SIBE y SEGAL DAVID, *Shape teory. The Inverse System Approach* North-Holland, Amsterdam. 1982

[31] VALQUI H. CHRISTIAN, *Pro-Módulos*, Pro Mathematica Vol. XVI, Nos. 31-32, 2002.

[32] VALENTE SANTIAGO FELIPE, *Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y teorema de inmersión en la categoría de grupos abelianos.* Tesis, en Matemática. Dpto, Facultad de Ciencias Univ. Autónoma de México, 2007

[33] ZALAMEA, F., Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.