UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

"EL TEOREMA DE SIEGEL Y EL TEOREMA DE BRJUNO, EN DIMENSIÓN UNO"

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR:

JORGE JOEL SULCA CHIPANA

ASESOR:
Dr. BENITO LEONARDO OSTOS CORDERO

LIMA – PERÚ

2018

Mi esfuerzo y sacrificio,
a mis Padres; mis abuelos:
María, Juan;
Clementina y Domingo.
A Geraldine, mi hija;
y a Cristina, mi esposa.

Agradecimientos

Manifiesto mi gratitud al Director del Instituto de Matemática y Ciencias Afines - IMCA - de la Universidad Nacional de Ingeniería, Dr. Félix Escalante del Águila, y al conductor del Programa “FORTALECIMIENTO DEL PROGRAMA DE MAESTRÍA EN UNIVERSIDADES PERUANAS”, Dr. Eladio Ocaña Anaya, por haberme hecho parte de este Programa financiado por el Estado Peruano a través del Fondecyt - Ciencia Activa.

Mi completa gratitud al Dr. Benito Leonardo Ostos Cordero, por asesorarme y guiarme en mi trabajo, y por conducirme a la finalización del mismo.

Índice general

Resumen

Lo expuesto en este trabajo está dividido en cinco capítulos y un apéndice.

En el capítulo primero exponemos las ideas básicas que sirven de apoyo a todo el resto del trabajo: series de números complejos, series de potencias formales; resultados relativos al análisis complejo en una variable. Se estudia también las aproximaciones a un número irracional a través de un tipo particular de sucesión de números racionales.

En el capítulo segundo abordamos las ideas y conceptos básicos de la Dinámica Compleja Unidimensional. Abordamos el estudio de las condiciones bajo las cuales una función analítica con pate constante cero y parte lineal diferente de cero, es conjugado a su parte lineal. Este estudio deriva en dos casos: el primero corresponde a cuando la parte lineal está en la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas, y la segunda a cuando la parte lineal esta fuera de esta.

El estudio del caso primero forma parte del capítulo segundo; mas el caso segundo, por ser el preámbulo a los Teorema de Siegel y Brjuno, es tratado en el capítulo tres. En este capítulo se definen también la Condición de Siegel y la Condición de Brjuno, y se estudian las diversas conexiones que existen entre estas. Probamos, por ejemplo, la existencia de números irracionales que satisfacen la condición de Brjuno pero no la Condición de Siegel.

El capítulo cuatro trata, en toda su extensión, sobre el Teorema de Siegel. La demostración del Teorema abarca conceptos de análisis en una variable compleja, muy en particular lo relacionado con la convergencia de sucesiones de funciones.

Desarrollamos aquí la demostración del Teorema de Brjuno; y es aquí donde toma relevancia el estudio de las fracciones continuas expuestas en el primer capítulo.

El apéndice contiene un resultado técnico relacionado con el capítulo cinco.

Introducción

La dinámica compleja unidimensional estudia, básicamente, el comportamiento de las órbitas $\mathscr{O}_f(z) :=\{f^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ asociadas a una función analítica compleja de variable compleja, y a un determinado punto z de su dominio. Lo expuesto en este trabajo no es ajeno a este propósito.

Siendo $f(x) = \lambda x + \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ una función compleja de variable compleja, analítica, sin término constante y con parte lineal no nula (i.e $f(0) = 0$ y $\lambda \neq 0$), nos planteamos determinar las condiciones bajo las cuales existe un biholomorfismo h definido entre vecindades del origen de coordenadas, con $h(0) = 0$, de modo que

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = \lambda x \tag{1}$$

El hecho que la ecuación (1) pueda ser resuelta brinda información valiosa sobre el comportamiento de las órbitas asociadas a f; esta nos dice que las órbitas de f son transformadas en las de $x \longmapsto \lambda x$, las cuales, sabemos, son, simplemente, rotaciones.

El estudio de la ecuación (1), a lo largo del desarrollo del pensamiento matemático, ha sido abordado persistentemente... y, básicamente, este se ha bifurcado en cuando λ está dentro y fuera de la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas, es decir cuando

a) $0 < |\lambda| < 1$
b) $1 < |\lambda| < \infty$
c) $|\lambda| = 1$

El camino que nos conduce a responder lo correspondiente a los casos (a) y (b) es relativamente corto y directo.

El estudio de la ecuación (1), en el caso que $|\lambda| = 1$, requiere de herramientas muy diferentes de las usadas para el estudio para cuando $|\lambda \neq 1$. Si λ esta en la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas, entonces este es de la forma $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, donde θ puede ser un número racional o irracional. Este trabajo abarca una parte del caso cuando θ

es un número irracional.

El caso en el que $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, donde θ es un número irracional, es un caso aun no estudiado del todo completo. Lo resuelto son los casos en el que θ satisface la condición de Siegel, esto es, cuando

$$\exists\, c > 1\ k \in \mathbb{N}\ /\forall\ n \geq 1\colon \frac{1}{|e^{2\pi i n\theta} - 1|} \leq \frac{c}{k!} n^k \tag{S}$$

Afortunadamente, todos los números algebraicos satisfacen esta condición.

Dentro de los números irracionales θ que no satisfacen la condición de siegel están aquellos que satisfacen la condición del logaritmo o condición de Brjuno, esto es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} < \infty \tag{B}$$

donde q_k, $k \in \mathbb{N}$, son los denominadores de la descomposición en fracciones continuas del número irracional θ.

Ambos casos, (S) y (B), pasan por estudiar lo bien o mal que un número irracional puede ser aproximado por números racionales; en particular, por las aproximaciones de un número irracional por fracciones continuas.

Capítulo 1

Preliminares

Sección 1.1. El cuerpo de los números complejos

En el conjunto $\mathbb{C}$ constituido por todos los pares ordenados (a, b) de números reales se define una **Adición** $(+)$ y una **Multiplicación** $(\cdot)$:

$$\begin{array}{llcl} \textbf{Adición} & (a,b)+(c,d): & = & (a+c, b+d) \\ \textbf{Multiplicación} & (a,b)\cdot(c,d): & = & (ac-bd, ad+bc) \end{array}$$

Fácilmente se puede verificar que estas operaciones son cerradas, asociativas y conmutativas; que poseen, cada una, un elemento neutro, el $(0,0)$ para la adición, llamado **cero**, y 1 para la multiplicación, llamado **uno**; y que cada par ordenado posee un inverso aditivo, y también multiplicativo cuando este fuera diferente de $(0,0)$. Ambas operaciones se relacionan mediante la propiedad distributiva.

La estructura compuesta por $\mathbb{C}$, la adición y multiplicación definidas en parágrafo anterior y las operaciones allí mencionadas, es llamada **cuerpo de los números complejos**.

Por comodidad se suele denotar también por $a + ib$ a un número complejo, siendo a e b números reales. En cualquier caso, ya sea la notación (a, b) o $a + ib$, se dice que a es su parte real y b su parte imaginaria.

El módulo de un número complejo $x = a + ib$ es denotado por $|x|$ y definido como

$$|x|: = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sin ninguna dificultad se prueba que

a) $|x| \geq 0$,

b) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

c) $|\lambda x| = |\lambda||x|$,

d) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

La función módulo $x \longmapsto |x|$ provee de una **métrica** d a esta estructura. Más precisamente, la distancia entre $x, y \in \mathbb{C}$ es denotada por $d(x, y)$ y definida como $d(x, y) := |x - y|$; al igual que las propiedades de la función módulo, son también de fácil verificación las siguientes:

a) $d(x, y) \geq 0$,
b) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
c) $d(x, y) = d(y, x)$,
d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Esta métrica induce de manera natural una **topología** en $\mathbb{C}$, una cuya base la conforman todos los conjuntos de la forma

$$D(x_0, r) := \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < r\}$$

donde $x_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$; y nos referimos a este **disco abierto de centro x_0 y radio r**.

La cerradura del disco abierto $D(x_0, r)$, esto es $D[x_0, r] := \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| \leq r\}$, es es llamado **disco cerrado centrado en x_0 y radio $r > 0$**.

Damos por aceptado todos los conceptos, definiciones y propiedades concerniente a esta topología.

Sección 1.2. Sucesiones y series de números complejos

Una **sucesión de números complejos** es cualquier función cuyo dominio y conjunto de llegada sean, el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y el cuerpo de los números complejos ($\mathbb{C}$), respectivamente. Un tal objeto solemos denotarlo por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; y las propiedades que atañen a la teoría de sucesiones, como convergencia y otros, son dejados al interesado.

Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos definimos $s_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ y nos referimos a esta como enésima suma parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La sucesión de estas sumas es denotada por $\sum_{n\geq 1} x_n$ y llamada **serie asociada a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$**.

La serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ se dice **convergente** si la sucesión de sumas parciales lo es; en este caso escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} s_n$$

y nos referimos a este número complejo como la **suma de la serie**. Por el contrario, la serie se dice **divergente** si la sucesión de sumas parciales diverge. Es de fácil verificación que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0$ es una condición necesaria para que la serie converja.

La serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es **absolutamente convergente** si la serie de números reales $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ converge. De ser este el caso, la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es, necesariamente, convergente.

Proposición 1.1 (Criterio de la raíz)**.** Una serie de números complejos $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge absolutamente si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$; y diverge si $\underline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$

Prueba. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < r < 1$. Dado que este límite superior es el mayor valor de adherencia de la sucesión $\{\sqrt[n]{|x_n|}\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|x_n|} < r$ para todo $n > n_0$. De esto se sigue que

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n > \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

De hacer $n \longrightarrow +\infty$ resulta la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} |x_n|$.

Por otro lado, si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, entonces existe una infinidad de índices $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sqrt[n]{|x_n|} > 1$. Esto significa que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n \neq 0$, de lo cual se deduce la divergencia. ■

Definición 1.1. Dadas las series $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ definimos

Suma	$\sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} y_n : = \sum_{n\geq 1}(x_n + y_n)$
Producto por un escalar	$\lambda \sum_{n\geq 1} x_n : = \sum_{n\geq 1} \lambda x_n$
Producto de Cauchy	$\sum_{n\geq 1} x_n \cdot \sum_{n\geq 1} y_n : = \sum_{n\geq 1} z_n$; donde $z_n = \sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k} y_k$, $n \geq 1$

Proposición 1.2. Sean $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ series convergentes. Entonces, la suma y pro-

ducto por un escalar convergen. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Y si al menos una converge absolutamente, entones también converge el producto de Cauchy, y, en este caso se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

Sección 1.3. Sucesión de funciones complejas de variable compleja

Siendo $X \subset \mathbb{C}$ un conjunto no vacío, damos las siguientes definiciones con respecto a una sucesión $\{f_n \colon X \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones complejas de variable compleja. También dos teoremas al final de esta sección, que usaremos en la parte final de la demostración del Teorema de Siegel, al final del capítulo cuatro.

Es **acotada puntualmente** si para cada $x \in X$ el conjunto $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, dependiente de x, es acotado. De haber un disco $D(0, r) \subset \mathbb{C}$ que contenga en su interior a todos los conjuntos $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, $x \in X$, diremos que la sucesión es **acotada uniformemente**.

Converge puntualmente a la función $f \colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ si para cada $x \in X$ ocurre que $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x)$. Si además de esto, para cada $\epsilon > 0$ es posible hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo tal que todo $n > n_0$ y todo $x \in X$ satisfagan la desigualdad $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, decimos que **converge uniformemente** a f. Naturalmente, de la convergencia uniforme siempre se obtiene la convergencia puntual.

Converge local y uniformemente a $f \colon X \longrightarrow \mathbb{C}$, si cada punto $x \in \Omega$ posee una vecindad abierta $V \subset \mathbb{C}$ de modo tal que la sucesión de restricciones $\{f_n \colon V \cap X \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la restricción $f \colon V \cap X \longrightarrow \mathbb{C}$.

En el desarrollo del análisis complejo existen muchos resultados que no se obtienen de manera directa, sino más bien por aproximaciones. Podemos conocer propiedades de la función límite a partir de las que se conocen para la sucesión que se le aproxima; es más, para tales deducciones no se requiere que las propiedades en cuestión y/o de interes ocurran en todo el dominio de definición.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío. Se dice que la sucesión **converge uniformemente en compactos** si existe una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de modo tal que, cualquiera que sea el conjunto compacto $K \subset \Omega$, la sucesión $\{f_n : K \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$, de restricciones a K, converge uniformemente a la función restricción $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$.

Es **normal** si alguna subsucesión $\{f_{n_k} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos de Ω a alguna función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

Teorema 1.1. Una sucesión de funciones $\{f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ si, y solo si,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| \, : \, x \in X\} = 0$$

Teorema 1.2. Sean $\{f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n : X \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de funciones que convergen uniformemente a $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$, respectivamente.

a) $\{f_n + g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f + g$
b) Si $0 \notin \text{Rango}(f_n) \cup \text{Rango}(f)$, cualquier que sea $n \in \mathbb{N}$, y $\{1/f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, entonces $\{1/f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $1/f$.
c) Si f es acotada, y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada uniformemente, entonces el producto $\{f_n g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a fg.

Sección 1.4. Series de Potencias Formales

Definición 1.2. Una **serie de potencias formal, con coeficientes complejos y centrada en** $x_0 \in \mathbb{C}$ es una expresión del tipo $f = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n(x - x_0)^n$, donde a_0 es una constante compleja y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos.

El conjunto conformado por todas las series de potencias formales, con coeficientes complejos y centradas en $x_0 \in \mathbb{C}$, lo denotamos por $\mathbb{C}_{x_0}[\![x]\!]$; y por comodidad escribiremos $f = \sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$.

Definición 1.3. Para $f = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$, $g = \sum_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n \in \mathbb{C}_{x_0}[\![x]\!]$ se define:

$$\begin{array}{lrl}
\textbf{Suma} & f+g\colon & = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)\,(x-x_0)^n \\
\textbf{Producto por un escalar} & \lambda\cdot f\colon & = \displaystyle\sum_{n\geq 0}\lambda a_n\,(x-x_0)^n; \quad \lambda\in\mathbb{C}. \\
\textbf{Producto} & f\cdot g\colon & = \displaystyle\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}(x-x_0)^n \\
\textbf{Composición} & f\circ g\colon & = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(g(x)-x_0)^n
\end{array}$$

Así también, decimos que f **es mayorado por** g, lo que escribimos como $\mathbf{f}\prec\mathbf{g}$, cuando $|a_n|\leq|b_n|$, cualquiera que $n\geq 0$.

Proposición 1.3. Sean $f = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ y $g = \sum_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$ dos series de potencias formales. Entonces

a) $f\prec\overline{|f|}$,
b) $f\prec g \ \wedge\ g\prec h \Longrightarrow f\prec h$,
c) $\overline{|f.g|}\prec\overline{|f|}\,\overline{|g|}$,
d) $\overline{|f\circ g|}\prec\overline{|f|}\circ\overline{|g|}$,

Proposición 1.4. En $\mathbb{C}_0[\![x]\!]$ tomemos una serie formal $f = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ y una perturbación de la identidad, también formal, $\varphi = y + yh(y)$, con $h\colon = \sum_{n\geq 0} h_n y^n$. Entonces

$$(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\prec(1+\overline{|h|})\sum|f_n|(y+y\overline{|h|})^n$$

Prueba. De la Proposición (1.3) sucede que

$$(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\prec\overline{|(1+h)\cdot(f\circ\varphi)|}\prec\overline{|1+h|}\cdot\overline{|f\circ\varphi|}$$

considerando que $\overline{|1+h|} = 1+\overline{|h|}$, resulta

$$= (1+\overline{|h|})\cdot\overline{|f\circ\varphi|} = \overline{|f\circ\varphi|} + \overline{|h|}\cdot\overline{|f\circ\varphi|}$$

haciendo $\sum_{n\geq 0} a_n y^n\colon = \overline{|f\circ\varphi|}$ tenemos

$$= \sum_{n\geq 0} a_n y^n + \sum_{n\geq 0}|h_n|y^n\sum_{n\geq 0} a_n y^n$$

Escribiendo $\sum_{n\geq 0} b_n y^n := \overline{|f|} \circ \overline{|\varphi|}$ y considerando que $\overline{|f \circ \varphi|} \prec \overline{|f|} \circ \overline{|\varphi|}$ resulta

$$
\begin{aligned}
(1+h)\cdot(f\circ\varphi) &\prec \sum_{n\geq 0} b_n y^n + \sum_{n\geq 0} |h_n| y^n \sum_{n\geq 0} b_n y^n = \overline{|f|}\circ\overline{|\varphi|} + \overline{|h|}\cdot\overline{|f|}\circ\overline{|\varphi|} \\
&= (1+\overline{|h|})\cdot(\overline{|f|}\circ\overline{|\varphi|}) = (1+\overline{|h|})\sum_{n\geq 0} |f_n|(y+y\overline{|h|})^n
\end{aligned}
$$

■

Una serie formal siempre converge para cuando $x = x_0$. Obviamente no hay nada que estudiar y/o analizar si no hay más elemento que este. El teorema dado a continuación nos da información precisa al respecto.

Teorema 1.3. Sea $f = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$ una serie formal centrada en x_0. Esta es convergente para cada $x \in D(x_0, r)$, donde $r := 1/\overline{\lim}|a_n|^{1/n} \geq 0$.

Más aún, la serie converge absolutamente en el disco abierto $D(x_0, r)$ y diverge en el complemento del disco cerrado $D[x_0, r]$. Además, la convergencia absoluta es uniforme en todo disco cerrado de centro x_0 y radio $r^* < r$.

Convenimos en llamar **Radio de Convergencia de** f a $r := 1/\overline{\lim}|a_n|^{1/n}$.

Observación 1.1. El teorema no excluye los casos $r = 0$ y $r = +\infty$. En el primero, la serie converge absolutamente en todo el plano complejo; en el segundo, únicamente para cuando $x = x_0$.

Prueba. Observando que $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ analizamos tres casos:

$$
\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0; \qquad \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty; \qquad 0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < +\infty
$$

En el primer caso sucede que $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} < 1$, cualquiera que sea $x \in \mathbb{C}$; luego, por el criterio de la raíz enésima la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente en todo el plano complejo. En el segundo caso, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} < 1$ solo para $x = x_0$; en cualquier otro caso se tiene $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} > 1$. Entonces, por el criterio usado antes, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ converge para $x = x_0$ y diverge para $x \neq x_0$. Si $0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$, entonces

$$
\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} < 1 \iff |x-x_0|\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |x-x_0| < 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}
$$

Se sigue entonces que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente en cada $x \in D(x_0, 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|})$ y diverge en cada x perteneciente al complemento de $D[x_0, 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}]$.

Si se toma x en un la cerradura de un disco $D(x_0\,,\, r)$ de radio $r < 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$, entonces

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leq r \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$$

De otra parte, si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ es finito, cero o diferente de cero, siempre es posible hallar $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} \leq r \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < c < 1$$

Luego, como el límite superior es el mayor valor de adherencia de la sucesión $\{\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $|a_n(x-x_0)^n| < c^n$, para todo n suficientemente grande. Luego, por el M-Test de Weierstrass, la serie $\sum_{n=0} a_n(x-x_0)^n$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D(x_0, r)}$. ■

Sección 1.5. Resultados del análisis complejo en una variable compleja

En lo que sigue, Ω denota un conjunto abierto del plano complejo.

Definición 1.4. Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfa si en cada punto $x_0 \in \Omega$ si el siguiente limite es finito

$$f'(x_0) \colon = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Nos referimos a $f'(x_0)$ como la **derivada de f en x_0**.

Nos referiremos a f como **Biholomorfismo** cuando esta tuviera inversa también holomorfa.

Definición 1.5. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua; y $\lambda \colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ un camino con derivada continua. La **Integral de f a lo largo de λ** es definida como

$$\int_\lambda f(x)\,dx \colon = \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\,dt$$

Escribiendo

$$\lambda^* \colon = \lambda([a,b]) \quad \wedge \quad \ell(\lambda) \colon = \int_a^b |\lambda'(t)|\,dt$$

tenemos la siguiente proposición

Proposición 1.5. Sea $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ una función continua; y $\lambda\colon[a,b]\longrightarrow\Omega$ un camino con derivada continua. Entonces

$$\Big|\int_\lambda f(x)\,dx\Big|\leq \sup\{|f(x)|\,:\,x\in\lambda^*\}\times\ell(\lambda)$$

Teorema 1.4. Sea $\lambda\colon[a,b]\longrightarrow\Omega$ un camino con derivada continua, y $\{f_n\colon\gamma^*\longrightarrow\mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $f:\gamma^*\longrightarrow\mathbb{C}$. Entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\lambda f_n(x)\,dx=\int_\lambda f(x)\,dx$$

Prueba. Esta se sustenta en el Teorema (1.1) y en la Proposición (1.5). ∎

Teorema 1.5. Sea $f(x)=\sum_{n\geq0}a_n(x-x_0)^n$ una serie de potencias centrada en x_0 y de radio de convergencia $r=1/\overline{\lim}|a_n|^{1/n}>0$. Entonces esta es holomorfa; además

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},\ x\in D(x_0,r)$$

Teorema 1.6. Sea $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ una función holomorfa; y $D[x_0,r]\subset\Omega$.

a) **Fórmula de Cauchy**:

$$\forall\,x\in D(x_0;r)\colon\ f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{\xi-x}\,d\xi \tag{1.1}$$

b) **Representación Local de Cauchy**: En el disco abierto $D(x_0;r)$ la función tiene una representación en serie de potencias; esto es

$$\forall\,x\in D(x_0;r)\colon\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{1.2}$$

de coeficientes

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(x_0,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-x_0)^{n+1}}\,d\xi,\ n\geq0.$$

c) **Estimativa de Cauchy**: Si $|f(x)|\leq M$, cualquiera que sea $x\in D(x_0,r)$, entonces

$$\forall\,n\geq0\colon\ |a_n|\leq\frac{M}{r^n} \tag{1.3}$$

Definición 1.6. Con respecto a la Representación Local de Cauchy de la función f en la vecindad $D(x_0,r)$ (1.2); la **parte constante de** f es a_0; y su **parte lineal**, a_1. Esto es, $f(x_0)=a_0$ y $f'(x_0)=a_1$.

Teorema 1.7. Sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa; y $x_0 \in \Omega$ tal que $f'(x_0) \neq 0$. Entonces existe una vecindad abierta $U \subset \Omega$ de x_0 tal que:

a) f es inyectiva en U

b) $f(U)$ es abierto

c) $f^{-1}\colon f(U) \longrightarrow U$ es también holomorfa. Además $(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$.

Teorema 1.8. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas definidas en Ω, convergente uniformemente en compactos a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces, f es holomorfa y $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos a $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

Teorema 1.9. Toda sucesión de funciones holomorfas definidas en Ω, que sea uniformemente acotada en compactos de Ω, es normal.

Teorema 1.10. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias centrada en el origen de coordenadas, y de radio de convergencia $r > 0$. Entonces existen constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que en el disco abierto $D(0, c_2)$ sucede el mayoramiento

$$f \prec \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_1}{c_2^n} x^n$$

Prueba. Como f es holomorfa en una vecindad del origen de coordenadas, existe una constante $c_2 > 0$ tal que f es continua en el disco cerrado $D[0, r_2]$ y holomorfa en el interior de este. Si $c_1 := \max_{|x|\leq c_2} |f(x)|$ es el máximo que $|f|$ alcanza en el dicho disco cerrado, entonces del Teorema (1.6) se tiene que $|a_n| \leq c_1/c_2^n$, $n \geq 1$. De esto se desprende que

$$f \prec \sum_{n=1} |a_n| x^n \prec \sum_{n=1} \frac{c_1}{c_2^n} x^n$$

La serie de la izquierda converge en $D(0, c_2)$, puesto que en este disco se tiene

$$\sum_{n=1} \frac{c_1}{c_2^n} x^n = c_1\Big(\sum_{n=0} \Big(\frac{x}{c_2}\Big)^n - 1\Big) = c_1\Big(\frac{1}{1 - x/c_2} - 1\Big) = \frac{c_1 x}{c_2 - x}$$

■

Proposición 1.6. Sea $f\colon \Omega \longrightarrow \overline{\Omega}$ un biholomorfimo definido entre conjuntos abiertos Ω y $\overline{\Omega}$ del plano complejo. Sea $r > 0$ tal que $D[y_0; r] \subset \overline{\Omega}$. Entonces

$$\forall\ y \in D(y_0; r)\colon\ f^{-1}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial f^{-1}(D[y_0;r])} \frac{x f'(x)}{f(x) - y} dx$$

Prueba. De aplicar la Fórmula de Cauchy (Teorema (1.6), a f^{-1}, resulta

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(y_0;r)} \frac{f^{-1}(\xi)}{\xi - y}d\xi; \quad y \in D(y_0;r)$$

Luego

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(y_0;r)} \frac{f^{-1}(\xi)}{f(f^{-1}(\xi)) - y}df(f^{-1}(\xi)) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(y_0;r)} \frac{f^{-1}(\xi)}{f(f^{-1}(\xi)) - y}f'(f^{-1}(\xi))d(f^{-1}(\xi)) \end{aligned}$$

haciendo $x = f^{-1}(\xi)$ resulta

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial f^{-1}(D(y_0;r))} \frac{xf'(x)}{f(x) - y}dx$$

Esto prueba la proposición. ∎

Sección 1.6. Fracciones Continuas

El Teorema de Brjuno, presentado en el quinto capítulo, requiere para su demostración la teoría de Fracciones Continuas. El Lema (1.2), demostrado al final de esta sección, tiene un rol determinante al momento de lograr el mayoramiento $\prec_4$ presentado en la subsección (5.1.4).

En el capítulo tres, el Corolario (1.1) permite probar que todo número irracional que satisface la Condición Diofántica satisface también la Condición de Brjuno. De esto trata el Teorema (3.3).

La teoría de Fracciones Continuas, en resumen, trata del estudio de las aproximaciones óptimas a un número irracional a través de un números racionales.

Definición 1.7. Una **fracción continua finita**, asociada a una colección finita de los números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$, $m \geq 0$, es una expresión del tipo

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m] : = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{a_{m-2} + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}}} \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.1. Tenemos los casos particulares

$$\begin{aligned}
[a_0] &= a_0 \\
[a_0, a_1] &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\
[a_0, a_1, a_2] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \\
[a_0, a_1, a_2, a_3] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}
\end{aligned}$$

Son de inmediata comprobación las siguientes identidades:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m] = \left[a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1} + \frac{1}{a_m}\right] \tag{1.5}$$

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m]} = [a_0, [a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m]] \tag{1.6}$$

Dado un número irracional θ, esto es $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, es de nuestro interés estudiar el comportamiento de un tipo particular de sucesiones de números racionales que se le aproximan. Teniendo en mente tal propósito, damos la siguiente definición.

Definición 1.8. Para $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ se consideran las siguientes sucesiones

$$\begin{array}{lcl}
a_0 : = [\![\theta]\!] & ; & \alpha_0 : = \theta - [\![\theta]\!] \\
a_n : = \left[\!\!\left[\dfrac{1}{\alpha_{n-1}}\right]\!\!\right] & ; & \alpha_n : = \dfrac{1}{\alpha_{n-1}} - \left[\!\!\left[\dfrac{1}{\alpha_{n-1}}\right]\!\!\right], \quad n \geq 1
\end{array} \tag{1.7}$$

donde el símbolo $[\![\cdot]\!]$ denota a la función máximo entero. Convenimos en llamar **sucesión de las partes enteras** a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, y **sucesión de las partes fraccionarias** a $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$.

Y para las sucesiones anteriores se consideran también

$$\begin{array}{lll} p_0 := a_0 & ; \quad p_1 := a_0 a_1 + 1 & ; \quad p_n := a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ q_0 := 1 & ; \quad q_1 := a_1 & ; \quad q_n := a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{array} \tag{1.8}$$

$$\beta_n := \prod_{i=0}^{n} \alpha_i, \quad n \geq 0 \tag{1.9}$$

Observación 1.2. De (1.8) se deduce que todos los $q\_$ dependen de las partes enteras a_n, $n \geq 1$; como estos últimos son mayores o iguales que la unidad, resulta que los $q\_$ también. De otro lado, $q_0 = 1 \leq a_1 = q_1$; y para $n \geq 1$ se tiene que $q_n < q_n + q_{n-1} \leq a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$

Proposición 1.7. En referencia a lo definido en (1.8) para $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ se tiene:

a) Los términos de la sucesión de las partes enteras, excepto tal vez a_0, varían en $[1, \infty[$; y los de la parte fraccionaria en $(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cap]0, 1[$.

b) Los $q_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, son todos números naturales mayores o iguales a la unidad. Además

$$q_0 \leq q_1 < \cdots < q_n < q_{n+1} < \ldots$$

En consecuencia $q_n \geq n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

c) $\beta_n > 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 1.11. Sea $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales para la que definimos $\{p_n\}_{n\geq 0}$ y $\{q_n\}_{n\geq 0}$, tal como en (1.8). Entonces para todo $n \geq 0$ se tiene:

a) $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$

b) $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$

En particular, si estas son las sucesiones de números enteros provenientes de lo definido en (1.8) para $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ se tiene

c) Si definimos $p_{-1} := 1$ y $q_{-1} := 0$, entonces

$$\theta = \frac{p_n + p_{n-1}\alpha_n}{q_n + q_{n-1}\alpha_n}$$

d) $\beta_n = (-1)^n (q_n \theta - p_n)$

e) $q_{n+1}\beta_n + q_n \beta_{n+1} = 1$

Observación 1.3. En el Teorema (1.11) las identidades (a) y (b) son válidas para cualquier sucesión de números reales, es decir, si para una sucesión arbitraria de números reales $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definimos p_n y q_n, $n \geq 0$, tal como en (1.8), entonces

$$\forall\ n \geq 0\colon [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}; \qquad p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

Una ligera lectura de las demostraciones de las afirmaciones (a) y (b) permite constatar que no hay nercesidad, en ningún momento, de que a_n, p_n y p_n sean números enteros.

Hemos querido que esto sea así con la única intención de agrupar varios resultados en un mismo teorema.

Prueba. Las demostraciones se hacen por inducción, excepto la última.

a) Para cuando $n = 0$ el resultado es inmediato; se desprende de la definición de p_0 y q_0.

   Para $n = 1$ se tiene

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

   Fijemos $n \geq 1$ y asumamos la validez de (a) para cualquier colección arbitraria de números reales $\__0, \__1, \__2, \ldots, \__n$ (**Hip. Ind**). Demostraremos que la validez se mantiene cuando se considera una colección $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. En efecto. De la identidad (1.5) resulta

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right]$$

   Hacemos uso la hipótesis inductiva en el lado derecho para obtener

$$= \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + q_{n-2}}$$

   de realizar operaciones elementales resulta

$$= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}$$
$$= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

b) Para $n = 0$ se tiene $p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + 1) - a_0a_1 = (-1)^0$; y para $n = 1$

$$\begin{aligned} p_2q_1 - p_1q_2 &= (a_2p_1 + p_0)a_1 - (a_0a_1 + 1)(a_2q_1 + q_0) \\ &= (a_2(a_0a_1 + 1) + a_0)a_1 - (a_0a_1 + 1)(a_2a_1 + 1) \\ &= a_0a_1^2a_2 + a_1a_2 + a_0a_1 - a_0a_1^2a_2 - a_0a_1 - a_1a_2 - 1 = (-1)^1 \end{aligned}$$

Probemos la validez para $n + 1$ asumiendo que se cumple para $n \geq 1$ (**Hip. Ind.**). En efecto

$$\begin{aligned} p_{n+1+1}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+1+1} &= p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} \\ &= (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) \\ &= p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n \\ &= (-1)(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}) \end{aligned}$$

de aplicar la Hipótesis inductiva resulta

$$= (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

c) Para $n = 0$ y $n = 1$ tenemos, respectivamente

$$\frac{p_0 + p_{-1}\alpha_0}{q_0 + q_{-1}\alpha_0} = a_0 + \alpha_0 = [\![\theta]\!] + \theta - [\![\theta]\!] = \theta \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned} \frac{p_1 + p_0\alpha_1}{q_1 + q_0\alpha_1} &= \frac{a_0a_1 + 1 + a_0\alpha_1}{a_1 + \alpha_1} = \frac{a_0(a_1 + \alpha_1) + 1}{a_1 + \alpha_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \alpha_1} \\ &= [\![\theta]\!] + \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_0}} = [\![\theta]\!] + \alpha_0 = [\![\theta]\!] + \theta - [\![\theta]\!] = \theta \end{aligned}$$

Supongamos la validez para $n \geq 1$ (**Hip. Ind.**) y demostrémoslo para $n + 1$. En efecto

$$\frac{p_{n+1} + p_{n+1-1}\alpha_{n+1}}{q_{n+1} + q_{n+1-1}\alpha_{n+1}} = \frac{p_{n+1} + p_n\alpha_{n+1}}{q_{n+1} + q_n\alpha_{n+1}}$$

lo definido en (1.8) y el hecho que $a_{n+1} + \alpha_{n+1} = 1/\alpha_n$ justifican la igualdad

$$= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1} + p_n\left(\frac{1}{\alpha_n} - a_{n+1}\right)}{a_{n+1}q_n + q_{n-1} + q_n\left(\frac{1}{\alpha_n} - a_{n+1}\right)}$$

Realizando operaciones elementales se tiene

$$= \frac{\cancel{\alpha_na_{n+1}p_n} + \alpha_np_{n-1} + p_n - \cancel{\alpha_na_{n+1}p_n}}{\cancel{\alpha_na_{n+1}q_n} + \alpha_nq_{n-1} + q_n - \cancel{\alpha_na_{n+1}q_n}} = \frac{p_n + p_{n-1}\alpha_n}{q_n + q_{n-1}\alpha_n} = \theta$$

La última igualdad se debe a la Hipótesis Inductiva.

d) Para $n = 0$ se tiene $(-1)^0(q_0\theta - p_0) = \theta - a_0 = \theta - [\![\theta]\!] = \alpha_0 = \beta_0$.

Para $n = 1$

$$(-1)^1(q_1\theta - p_1) = (-1)(q_1\theta - p_1)$$

del item (c) $\theta = \dfrac{p_1 + p_0\alpha_1}{q_1 + q_0\alpha_1} \equiv q_1\theta - p_1 = (-1)\alpha_1(q_0\theta - p_0)$, entonces

$$= (-1)(-1)\alpha_1(q_0\theta - p_0) = \alpha_1(q_0\theta - p_0) = \alpha_1\beta_0 = \alpha_1\alpha_0 = \beta_1$$

Asumiendo la validéz para $n \geq 1$ (**Hip. Ind.**), tenemos que

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} = \alpha_{n+1}\beta_n \overset{H.I}{=} \alpha_{n+1}(-1)^n(q_n\theta - p_n) &= (-1)^{n+1}(-\alpha_{n+1})(q_n\theta - p_n)\\ &= (-1)^{n+1}(q_{n+1}\theta - p_{n+1})\end{aligned}$$

la última igualdad se debe al item (c).

e) De la parte (d) tenemos

$$\begin{aligned}q_{n+1}\beta_n + q_n\beta_{n+1} &= q_{n+1}(-1)^n(q_n\theta - p_n) + q_n(-1)^{n+1}(q_{n+1}\theta - p_{n+1})\\ &= \cancel{q_{n+1}(-1)^n q_n\theta} - q_{n+1}(-1)^n p_n + \cancel{q_n(-1)^{n+1} q_{n+1}\theta} - q_n(-1)^{n+1} p_{n+1}\\ &= q_{n+1}(-1)^{n+1} p_n - q_n(-1)^{n+1} p_{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}(p_n q_{n+1} - p_{n+1}q_n) = (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = 1\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad resulta de (b).

■

Corolario 1.1. En referencia a lo definido en (1.8) para $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

$$\forall\ n \geq 0 \colon \frac{1}{q_{n+1} + q_n} < |q_n\theta - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

Prueba. De la parte (e) del Teorema (1.11) y de la definición de los β_n, se sabe que

$$1 = q_{n+1}\beta_n + q_n\beta_{n+1} = q_{n+1}\beta_n + q_n\beta_n\alpha_{n+1}$$

podemos despejar β_n y obtener

$$\beta_n = \frac{1}{q_{n+1} + q_n\alpha_{n+1}}$$

Asimismo, de la parte (d) del mismo Teorema (1.11), y del hecho que $\beta_n > 0$, también se tiene $\beta_n = |q_n x - p_n|$, $n \geq 0$. Luego

$$\frac{1}{|q_n x - p_n|} = q_{n+1} + q_n \alpha_{n+1}$$

Finalmente, como las partes fraccionarias de θ varían en el intervalo $]0, 1[$, se tiene que $0 < q_n \alpha_{n+1} < q_n$; consecuentemente, $q_{n+1} < q_{n+1} + q_n \alpha_{n+1} < q_n + q_{n+1}$ y, por ende,

$$q_{n+1} < \frac{1}{|q_n x - p_n|} < q_n + q_{n+1}$$

Invirtiendo los términos se obtiene lo que se afirma. ■

Lema 1.1. En referencia a lo definido en (1.8) para $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, se tiene

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log q_n}{q_n} < +\infty$

Prueba. Previamente, demostremos por inducción que

$$\frac{1}{q_n} \leq \Big(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\Big)^{n-1} \quad \equiv \quad q_n \geq \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{n-1}; \quad n \geq 1$$

Para $n = 1$ es inmediato porque $q_1 :\ = a_1 \geq 1$. Asumiendo que la tesis es válida para todo $k < n$, demostrémoslo que también lo es para n. En efecto. De $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$, debido a que $a_{n+1} \geq 1$, resulta $q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1}$. Luego, de la hipótesis inductiva se tiene

$$\begin{aligned} q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1} &\geq \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{n-1} + \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{n-2} \\ &= \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{n}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{2}\Big) \\ &= \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{n}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}\Big) > \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{n} \end{aligned}$$

Demostremos ahora lo que se afirma en a) y b).

a) Se sigue de aplicar el criterio de comparación.

b) Escribiendo $d :\ = (\sqrt{5}+1)/2$, tenemos $d^{n-1} \leq q_n$. Luego, como la función $g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(t) = \log(t)/t$ es decreciente a partir de cierto $a > 0$ (ver fig (1.1)), tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log q_n}{q_n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(d^n d^{-1})}{d^n d^{-1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log d^n}{d^n d^{-1}} = \frac{\log d}{d^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{d^n} < \infty$$

donde la finitud de la serie del extremo derecho se debe al criterio de la razón, esto es

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{n+1}{d^{n+1}}}{\frac{n}{d^n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n+1}{n}\frac{1}{d} = \frac{1}{d} < 1$$

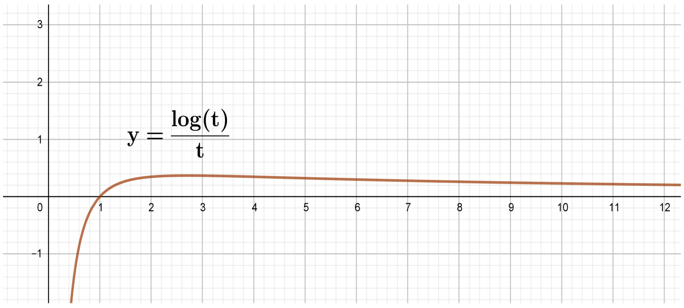

Figura 1.1: Funcion $f(t) = \frac{\log(t)}{t}$

■

Definición 1.9. Para $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ y $n \geq 1$ denotamos por $\omega(n)$ a la distancia de $n\theta$ al número entero más cercano, esto es

$$\omega(n) : = \min\{|n\theta - m| \ : \ m \in \mathbb{Z}\} \tag{1.10}$$

Lema 1.2. Sea $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ y q_k el denominador de la k-esima fracción continua de θ. Entonces se verifica que

a) $\forall\ n \geq 1$: $\omega(q_n) = |q_n\theta - p_n|$.

b) $\forall\ n \geq 1$: $1/2q_{n+1} < \omega(q_n)$

c) $\forall\ n \geq 1$: $1 \leq q < q_{n+1} \ \wedge\ q \neq q_n \Longrightarrow \omega(q_n) < \omega(q)$

d) La igualdad $\omega(q_1) = \omega(q_0)$ ocurre cuando, y solo cuando, $q_1 = q_0$. Además

$$\begin{array}{ccccccccccccc} +\infty \longleftarrow \cdots > & q_{n+1} & > & q_n & > \cdots > & q_3 & > & q_2 & > & q_1 & \geq & q_0 & = & 1 \\ 0 \longleftarrow \cdots < & \omega(q_{n+1}) & < & \omega(q_n) & < \cdots < & \omega(q_3) & < & \omega(q_2) & < & \omega(q_1) & \leq & \omega(q_0) & < & 1/2 \end{array}$$

e) Si definimos $\omega(q_{-1}) : = 1$, entonces

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{Z},\ k \geq -1 \,/\, \frac{\omega(q_{k+1})}{2} \leq \omega(m) < \frac{\omega(q_k)}{2}$$

es decir, dado $m \in \mathbb{N}$ ocurre una de las dos posibilidades

$$\frac{\omega(q_0)}{2} \leq \omega(m) < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} / \frac{\omega(q_{k+1})}{2} \leq \omega(m) < \frac{\omega(q_k)}{2}$$

Prueba.

a) Siendo $n \geq 1$, fijo y arbitrario, vamos a probar que todo $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq p_n$, verifica la desigualdad $|q_n\theta - p_n| < |q_n\theta - p|$. De esto se seguiría que

$$\omega(q_n) :\ = \min\{|q_n\theta - p| \ :\ p \in \mathbb{Z}\} = |q_n\theta - p_n|$$

De la Proposición (1.7), donde se afirma que $q_{n+1} > 1$; y de $|p - p_n| \geq 1$, resulta que

$$\left|\frac{p}{q_n} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|p - p_n|}{q_n} \geq \frac{1}{q_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Esto dice que p/q_n cae fuera de cualquiera de los intervalos

$$I = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right] \quad \text{o} \quad J = \left[\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_n}{q_n}\right],$$

cuyas longitudes son

$$\begin{aligned}\textbf{long(I)} = \textbf{long(J)} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \frac{|p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}|}{q_n q_{n+1}} \\ \text{(del Teorema (1.11-b)} \quad &= \frac{|(-1)^n|}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}\end{aligned}$$

Así pues, de cualquiera de los hecho: $p/q_n \in \mathbb{R}/I$ o $p/q_n \in \mathbb{R}/J$, siempre resulta

$$\left|\theta - \frac{p}{q_n}\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p}{q_n} - \frac{p_n}{q_n}\right|,\ \left|\frac{p}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

en consecuencia

$$|q_n\theta - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}}$$

Pero también es cierto que $|q_n\theta - p_n| < 1/q_{n+1}$ (Corolario (1.1)). Por tanto

$$|q_n\theta - p_n| < 1/q_{n+1} < |q_n\theta - p|$$

b) Del Corolario (1.1) y de (a)) se sabe que

$$\frac{1}{q_{n+1} + q_n} < |q_n\theta - p_n| = \omega(q_n)$$

Y, de la Proposición (1.7), que $q_n + q_{n+1} < q_{n+1} + q_{n+1}$. Luego

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < \frac{1}{q_n + q_{n+1}} < \omega(q_n)$$

c) En virtud de (a)) debemos probar que $|q_n\theta - p_n| < |q\theta - p|$, siendo $1 \leq q < q_{n+1}$, $q \neq q_n$, y $p \in \mathbb{Z}$ números enteros arbitrarios; de esto se seguiría que

$$\omega(q_n) = |q_n\theta - p_n| < \min\{|q\theta - p| \, : \, p \in \mathbb{Z}\} : = \omega(q)$$

En el caso que $p/q \neq p_n/q_n$, la ruta a de la prueba es bastante similar a la seguida en la prueba de (a)). Veamos.

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|pq_n - p_n q|}{qq_n} \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Esto dice que p/q cae fuera de cualquiera de los intervalos

$$I = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right] \quad \text{o} \quad J = \left[\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_n}{q_n}\right]$$

puesto que, como ya se dijo en (a)), estos son de longitud **long(I)** $=$ **long(J)** $= 1/q_n q_{n+1}$. Luego

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$$

De esto se sigue que $|q\theta - p| \geq 1/q_{n+1}$.
El resultado se sigue de la conjunción de esta desigualdad con $|q_n\theta - p_n| < 1/q_{n+1}$, proporcionada por el Corolario (1.1).

Situémonos ahora en el caso que $p/q = p_n/q_n$. Dado que $p = qp_n/q_n$, entonces q_n, como no divide a p_n, debe dividir a q, necesariamente; y como se está tratando con números enteros positivos, resulta que $q_n \leq q$. Pero de la hipótesis, $q \neq q_n$ y $q < q_{n+1}$; por ende $q_n < q < q_{n+1}$. Por tanto existe $r_0 \in \mathbb{Z}$, $r_0 \geq 2$, tal que $q = r_0 q_n$ y, por ende, $p = r_0 p_n$. Luego

$$|q\theta - p| = |r_0 q_n\theta - r_0 p_n| = r_0|q_n\theta - p_n| \geq 2|q_n\theta - p_n| > |q_n\theta - p_n| = \omega(q_n)$$

d) De la Proposición (1.7) se tiene $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \cdots$ por ende $\lim_{n\longrightarrow\infty} q_n = \infty$.
De otro lado. Como $q_0 \leq q_1 < q_2$, entonces de (c)) resulta que $\omega(q_1) \leq \omega(q_0)$.
En general, para $n \geq 1$ se sabe que $q_n < q_{n+1} < q_{n+2}$. Entonces de (c)) resulta $\omega(q_{n+1}) < \omega(q_n)$.
De la parte (a)) y del Corolario (1.1) se tiene

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \omega(q_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} |q_n\theta - p_n| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{q_{n+1}} = 0$$

e) Del item anterior, y del hecho que $\omega(q_{-1}): \ = 1$, se sabe que

$$0 \longleftarrow \cdots < \omega(q_{n+1}) < \omega(q_n) < \cdots < \omega(q_3) < \omega(q_2) < \omega(q_1) \leq \omega(q_0) \ < 1/2 = \frac{\omega(q_{-1})}{2}$$

En consecuencia

$$\left]0, \frac{1}{2}\right[= \cdots \left[\frac{\omega(q_{k+1})}{2}, \frac{\omega(q_k)}{2}\right[\cup \cdots \cup \left[\frac{\omega(q_1)}{2}, \frac{\omega(q_0)}{2}\right[\cup \left[\frac{\omega(q_0)}{2}, \frac{\omega(q_{-1})}{2}\right[$$

■

Proposición 1.8. En referencia a la definición (1.9).

$$\forall n \geq 1 : 4\omega(n) \leq |e^{2\pi i \theta n} - 1|$$

Prueba. Tenemos

$$|e^{2n\pi i \theta} - 1| = |\cos(2n\pi\theta) - 1 + i \sin(2n\pi\theta)| = 2\sqrt{\frac{1 - \cos(2n\pi\theta)}{2}} = 2|\sin(n\pi\theta)|$$

Considerando que $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \Longrightarrow |\sin(x)| \geq (2/\pi)|x|$ (ver figura (3.1)), podemos tomar el número entero m que hace que $-\pi/2 < n\pi\theta - m\pi \ < \pi/2$ (esto siempre posible porque $n\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$) y observamos que

$$|e^{2n\pi i \theta} - 1| = 2|\sin(n\pi\theta)| = 2|\sin(n\pi\theta - m\pi)| \geq 2\frac{2}{\pi}|n\pi\theta - m\pi| = 4\omega(n)$$

■

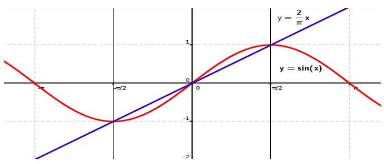

Figura 1.2: $y = \sin(x)$

Capítulo 2

Dinámica compleja unidimensional

Sección 2.1. Definiciones - Propiedades Básicas - Ejemplos

Definición 2.1. Sea $f : U \longrightarrow U$ una función holomorfa definida en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$. La órbita de $x \in U$ es el conjunto denotado por $\mathscr{O}_f(x)$ y conformado por todas las iteraciones de f en x, es decir

$$\mathscr{O}_f(x) : = \{f^n(x) : n \geq 0\} \tag{2.1}$$

se entiende que $f^0(x) = x$.

Nuestro interés es conocer el comportamiento de la sucesión de iteraciones $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en cada punto $x \in U$.

Ejemplo 2.1. Sea $f : U \longrightarrow U$ una función holomorfa definida en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$. Si suponemos que la sucesión de iteraciones $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para cierto punto $x \in U$ es acotada, entonces esta tiene un valor de adherencia, es decir existe $x_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} f^n(x) = x_0$. Si se diese la pertenencia $x_0 \in U$, entonces sucede que

$$f(x_0) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(f^n(x)) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f^n(x) = x_0$$

Esto dice que los puntos de adherencia de las órbitas, en el caso que los posea, son puntos fijos de f, es decir puntos $x_0 \in U$ tales que $f(x_0) = x_0$.

Así pues, las funciones holomorfas podríamos clasificarlas en dos clases: las que tienen al menos un punto fijo, y las que no. se divide en dos casos.

Definición 2.2. Una **Transformación de Moebius** es una función compleja de variable compleja del tipo

$$R(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

donde a, b, c, d son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

Ejemplo 2.2. Sea la transformación de Moebius $R\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $R(x)\colon = \lambda x$.

Si $|\lambda| < 1$, entonces el punto de adherencia de cualquier órbita $\mathscr{O}_f(x)$, $x \neq 0$, es el origen de coordenadas. Pero si $|\lambda| > 1$, entonces el valor de adherencia es el ∞.

En el caso que $|\lambda| = 1$, es decir en el caso que exista $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = e^{2\pi\theta i}$, la órbita $\mathscr{O}_f(x)$ no escapa de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $|x|$.

Si θ fuese un número racional, entonces λ es una raíz de la unidad; por ende la órbita que pasa por x es un conjunto finito.

Si θ fuese un número irracional, entonces la órbita es densa en la circunferencia. Probemos esta afirmación. Como la órbita no escapa de la circunferencia, entonces esta posee una subsuceción convergente $\{R^{n_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, de términos dos a dos distintos. De esta forma, siempre es posible tomar en la órbita dos puntos (dos iteraciones) diferentes y tan cerca, una de la otra, tanto como se desee.

De lo anterior, si $\overset{\frown}{\mathrm{A}}$ es un arco contenido en la circunferencia, abierto en sus extremos y de longitud arbitraria $\ell > 0$, entonces existe un índice $k \in \mathbb{N}$ de modo tal que el arco entre los términos $R^{n_k}(x)$ y $R^{n_{k+1}}(x)$ sea de longitud menor que $\ell/2$. Y como una composición de R consigo misma es una rotación, y como las rotaciones preservan la longitud de arco, n_k iteraciones antes se tuvo

$$dist(x, R^{n_{k+1}-n_k}(x)) = dist(R^{n_k}(x), R^{n_{k+1}}(x)) = \frac{\ell}{2}$$

Así, después de iterar $n_{k+1} - n_k$ veces el punto $x_0\colon = x$, obtendremos un punto x_1 cuya distancia a x_0 es $\ell/2$ unidades. Y si a x_1 lo iteramos $n_{k+1} - n_k$ veces, obtendremos un punto x_2 cuya distancia a x_1 es también $\ell/2$. Si repetimos este proceso, obtendremos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (contenida en la órbita de x), donde dos puntos consecutivos distan $\ell/2$. Y como el arco $\overset{\frown}{\mathrm{A}}$ es de longitud ℓ, entonces este tiene que contener, necesariamente, un punto de esta sucesión. Esto demuestra que la órbita es densa en la circunferencia.

Ejemplo 2.3. Sea la transformación de Moebius

$$R(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Y asumamos que $x_0 \in \mathbb{C}$ es su único punto fijo.

Vamos a demostrar que x_0 es un punto de adherencia de todas las órbitas o, más precisamente, que todo elemento $x \in \mathrm{Dom}(R)$ es tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} R^n(x) = x_0$

Si x_0 es el único punto fijo de R, entonces $c \neq 0$, necesariamente; y por ende R transforma $\mathbb{C}/\{-d/c\}$ en $\mathbb{C}/\{a/c\}$.

El biholomorfismo $g\colon \mathbb{C}/\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{C}/\{0\}$ definido como $g(x) = 1/(x - x_0)$ juega un rol crucial en tal propósito. De hecho, si consideremos la composición

$$\mathbb{C}/\{0,\, g(-d/c)\} \xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{C}/\{x_0,\, -d/c\} \xrightarrow{R} \mathbb{C}/\{x_0,\, a/c\} \xrightarrow{g} \mathbb{C}/\{0\}$$

y denotemosla por S, es decir

$$S(x)\colon = gRg^{-1}(x)$$

Del modo como se ha construido S, resulta que g^{-1} lleva órbitas de S en órbitas de R, preservando cada una de las iteraciones de S, es decir

$$\forall\, n \geq 1\colon g^{-1}(S^n(x)) = R^n(g^{-1}(x))$$

Vamos a demostrar que S es una traslación; para lo cual es suficiente que ∞ sea su único punto fijo. Si $x \in Dom(S)$ fuese tal que $S(x) = x$, entonces de $S(x)\colon = gRg^{-1}(x)$ resulta $g^{-1}(x) = Rg^{-1}(x)$, y por ende $g^{-1}(x) = x_0$, es decir $x_0 + \frac{1}{x} = x_0$. Esto es imposible. Por tanto ∞ es el único punto fijo de S y por ende S es una traslación.

Siendo $x \in \mathbb{C}/\{-d/c\}$, un punto arbitrario, sucede que

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} R^n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} R^n(g^{-1}(g(x))) = \lim_{n\longrightarrow\infty} g^{-1}(S^n(g(x))) &= x_0 + \frac{1}{\lim_{n\longrightarrow\infty} S^n(g(x))} \\ &= x_0 + \frac{1}{\infty} = x_0\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior la función construida S fue de bastante utilidad para demostrar lo que nos propusimos. Tal función motiva la siguiente definición

Definición 2.3. Las funciones holomorfas $f\colon U \longrightarrow U$ y $g\colon V \longrightarrow V$, definidas en conjuntos abiertos del plano complejo, se dicen conjugadas si existe un biholomorfismo $h\colon U \longrightarrow V$ tal que

$$g = h \circ f \circ h^{-1} \tag{2.2}$$

Convenimos en llamar **conjugación** entre f y g al biholomorfismo h; diremos también que f se conjunga con g mediante h, o simplemente que se conjugan cuando no haya lugar a confusión.

En el caso que g sea de la forma $g(x) := \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}/\{0\}$, decimos que f es **Linealizable**.

Observación 2.1. Si bien es cierto que la conjugación es tal cuando esta satsiface (2.2), no está demás notar que esta ecuación es equivalente a $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Por ejemplo, (2.2) infiere esta segunda ecuación porque $f = f \circ h^{-1} \circ h = h^{-1} \circ g \circ h$.

La importancia de la conjugación h entre dos funciones holomorfas f y g (o la conjugación h^{-1} entre g y f) recae en el hecho que f y g pueden ser consideradas lo mismo; lo mismo en el sentido que h lleva las órbitas de f en las de g (o h^{-1} lleva las de g en las de f), preservandose, en todo momento, todas las iteraciones, es decir

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)) \quad o \quad h^{-1}(g^n(x)) = f^n(h^{-1}(x))$$

cualquiera que sea $n \geq 1$. Esta similitud entre las órbitas se desprende de

$$f^n(x) = \overbrace{(h^{-1}gh)\,(h^{-1}gh)\,\ldots\,(h^{-1}gh)}^{n \text{ veces}}(x) = h^{-1}g^n h(x)$$
$$g^n(x) = \overbrace{(hfh^{-1})\,(hfh^{-1})\,\ldots\,(hfh^{-1})}^{n \text{ veces}}(x) = hf^n h^{-1}(x)$$

Finalizamos esta primera subsección dejando en claro el objetivo principal de este trabajo: Queremos identificar las condiciones bajo las cuales una función analítica $f : U \longrightarrow U$, definida en una vecindad abierta del origen de coordenadas, con $f(0) = 0$, y de parte lineal $\lambda \neq 0$, se conjuga con $x \longmapsto \lambda x$; es decir, condiciones bajo las cuales existe un biholomorfismo h entre vecindades abiertas del origen de coordenadas, con $h(0) = 0$, tal que

$$\lambda\, x = (h \circ f \circ h^{-1})(x) \tag{2.3}$$

Este objetivo se divide según cómo sea la parte lineal λ de f. Se presentan los siguientes casos: $|\lambda| \neq 1$ y $|\lambda| = 1$.

Sección 2.2. Funciones holomorfas con parte lineal fuera de S^1

Este caso atañe a cuando $0 < |\lambda| < 1$ o $|\lambda| > 1$. A continuacion enunciamos el teorema que trata el primer caso; consecuencia de este es el otro caso.

Teorema 2.1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta del origen de coordenadas, y $f : U \longrightarrow U$ una función analítica con $f(0) = 0$ y de parte lineal $\lambda \neq 0$. Si $0 < |\lambda| < 1$, entonces existe un biholomorfismo h entre vecindades abiertas del plano complejo, con $h(0) = 0$, que conjuga f con la función $x \longmapsto \lambda x$, es decir

$$\lambda x = (h \circ f \circ h^{-1})(x) \tag{2.4}$$

para todo x suficientemente cerca del origen de coordenadas.

Preámbulo a la demostración. Sea $f(x) = \lambda x + a_2 x^2 + \cdots$ la expansión en serie de potencias de f en una vecindad del origen de coordenadas, y $h(x) = x + b_2 x^2 + \cdots$ la conjugación que deseamos encontrar.
Escribiendo, convenientemente, $f(x) = \lambda x + A(x)$ y $h(x) = x + B(x)$, donde A y B son series de potencias de orden dos o más, resultan las equivalencias

$$\begin{aligned}
(f \circ h)(x) = (h \circ g)(x) &\equiv \lambda h(x) + A(h(x)) = g(x) + B(g(x)) \\
&\equiv A(h(x)) = B(\lambda x) - \lambda B(x) \\
&\equiv \sum_{n \geq 2} \{A(h)\}_n x^n = \sum_{n \geq 2} b_n (\lambda^n - \lambda) x^n \\
&\equiv \{A(h)\}_n = b_n (\lambda^n - \lambda) (*), \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

En las identidades anteriores hemos convenido en denotar por $\{A(h)\}_n$, $n \geq 2$, al coeficiente que acompana a x^n en el desarrollo en serie de potencias de la composición $A(h(x)) = a_2(x + B(x))^2 + a_3(x + B(x))^3 + a_4(x + B(x))^4 + \cdots$. Un cálculo muestra que

$$\begin{aligned}
\{A(h)\}_2 &= a_2 & \{A(h)\}_4 &= 2a_2 b_3 + a_2 b_2 b_2 + 3a_3 b_2 + a_4 \\
\{A(h)\}_3 &= 2a_2 b_2 + a_3 & \{A(h)\}_5 &= 2a_2 b_4 + 2a_2 b_2 b_3 + 3a_3 b_3 + 4a_4 b_2
\end{aligned}$$

Se observa, entonces, que el coeficiente enésismo $\{A(h)\}_n$ depende unicamente de $a_2, \ldots, a_n$ y $b_2, \ldots, b_{n-1}$. Así, pues, la relación $(*)$ da pie a que los coeficientes de la conjugación buscada h puedan ser definidos inductivamente. En efecto. Tomamos $b_2 \in \mathbb{C}$ tal que $\{A(h)\}_2 = b_2(\lambda^2 - \lambda)$; seguidamente, habiendo tomado $b_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 2$ con la condición $\{A(h)\}_n = b_n(\lambda^n - \lambda)$, tomamos $b_{n+1} \in \mathbb{C}$ tal que $\{A(h)\}_{n+1} = b_{n+1}(\lambda^{n+1} - \lambda)$.

Hemos demostrado en este preámbulo que existe una serie formal $h(x) = x + \sum_{n\geq 2} b_n x^n$ que satisface la ecuación (2.4). La demostración de su convergencia, en un entorno del origen de coordenadas, pasa por profundizar en la igualdad $(*)$. En efecto, de esta identidad resulta

$$|b_n|\,(|\lambda| - |\lambda|^2) = |b_n|\,|\lambda|\,|1 - |\lambda|| \leq |b_n||\lambda||1 - \lambda^{n-1}| = |b_n||\lambda - \lambda^n| = |\{A(h)\}_n|$$

de donde

$$\frac{|\{A(h)\}_n|}{|\lambda| - |\lambda|^2} \geq |b_n| \tag{2.5}$$

La desigualdad (2.5) nos hace pensar que la demostración de la convergencia de h pasa por encontar una serie convergente g que la mayore. Naturalmente, la serie mayorante debe estár definida en un entorno del origen de coordenadas.

Prueba. (del Teorema (2.1)). En el disco unitario centrado en el origen de coordenadas consideremos la serie de potencias convergente

$$G(x) = x - \frac{1}{|\lambda| - |\lambda|^2} \sum_{n\geq 2} x^n$$

Y sea $g(x) = x + \sum_{n\geq 2} \beta_n x^n$ la inversa de esta, definida en una vecindad del origen de coordenadas. Entonces

$$G(g(x)) = x \equiv g(x) - \frac{1}{|\lambda| - |\lambda|^2} \sum_{n=2} g(x)^n = x$$

denotando por $\{g\}_n$, $n \geq 2$, al coeficiente que acompaña a x^n en el desarrollo en serie de potencias de $\sum_{n=2} g(x)^n$, y reemplazando $g(x)$ por $x + \sum_{n\geq 2} \beta_n x^n$, resulta

$$\equiv x + \sum_{n\geq 2} \beta_n x^n - \frac{1}{|\lambda| - |\lambda|^2} \sum_{n=2} \{g\}_n x^n = x$$

cancenlando x y operando convenientemente

$$\equiv \sum_{n\geq 2} \{g\}_n x^n = \sum_{n\geq 2} \left[(|\lambda| - |\lambda|^2)\beta_n\right] x^n$$

$$\equiv \forall\, n \in \mathbb{N};\, n \geq 2\colon\, \beta_n = \frac{\{g\}_n}{|\lambda| - |\lambda|^2}$$

A esta altura de la demostración permítasenos suponer, sin perdida de generalidad, que los coeficientes de f, todos, en módulo son menores o iguales que la unidad. Justificamos esta suposición tomando un $x_0 \neq 0$ para el que $(a_n x_0^n)$ es una sucesión acotada (esto es posible porque la serie de f en x_0 converge) y tomando $\ell > 1$ tal que $|a_n x_0^{n-1}| \leq \ell^{n-1}$, para todo $n \geq 2$, y osbervando que

$$|a_n| = \frac{|a_n|\,|x_0^{n-1}|}{|x_0^{n-1}|} \leq \frac{\ell^{n-1}}{|x_0^{n-1}|} = \Big(\frac{\ell}{|x_0|}\Big)^{n-1}$$

Haciendo $L = \ell/|x_0|$ tenemos que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}; n \geq 2 \colon \frac{|a_n|}{L^{n-1}} \leq 1$$

Entonces, podemos definir $\varphi(x) = x/L$ y trabajar no con f sino con su conjugado

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \colon = Lf\Big(\frac{x}{L}\Big) = L\Big(\lambda\frac{x}{L} + \sum_{n\geq 2} a_n\Big(\frac{x}{L}\Big)^n\Big) = \lambda x + \sum_{n\geq 2}\Big(\frac{a_n}{L^{n-1}}\Big)x^n$$

Proseguimos con la demostración, dando por hecho lo que al inicio de esta digresión supusimos.

Un cálculo muestra que $\{g\}_2 = 1$. De esto se sigue

$$\beta_2 = \frac{\{g\}_2}{|\lambda| - |\lambda|^2} = \frac{1}{|\lambda| - |\lambda|^2} \geq \frac{|a_2|}{|\lambda| - |\lambda|^2} = \frac{|\{A(h)\}_2|}{|\lambda| - |\lambda|^2} \geq |b_2|$$

Del mismo modo se muestra que $\{g\}_3 = 2\beta_2 + 1$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\beta_3 = \frac{\{g\}_3}{|\lambda| - |\lambda|^2} = \frac{2\beta_2 + 1}{|\lambda| - |\lambda|^2} \geq \frac{2|b_2| + 1}{|\lambda| - |\lambda|^2} \geq \frac{2|a_2||b_2| + |a_3|}{|\lambda| - |\lambda|^2} &\geq \frac{|2a_2b_2 + a_3|}{|\lambda| - |\lambda|^2} \\ &= \frac{|\{A(h)\}_3|}{|\lambda| - |\lambda|^2} \geq |b_3|\end{aligned}$$

En general, si escribimos $\{A(h)\}_n = P_n(a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_{n-1})$, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta_n = \frac{\{g\}_n}{|\lambda| - |\lambda|^2} &\geq \frac{P_n(1, \ldots, 1, |b_2|, \ldots, |b_{n-1}|)}{|\lambda| - |\lambda|^2} \\ &\geq \frac{|P_n(a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_{n-1})|}{|\lambda| - |\lambda|^2} \\ &\geq \frac{|\{A(h)\}_n|}{|\lambda| - |\lambda|^2} \\ &\geq |b_n|\end{aligned}$$

■

Corolario 2.1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta del origen de coordenadas y $f : U \longrightarrow U$ una función analítica, con $f(0) = 0$ y parte lineal $\lambda \neq 0$. Si $|\lambda| > 1$, entonces existe una mapeo conforme h entre vecindades abiertas del plano complejo, con $h(0) = 0$, que conjuga f con $x \longmapsto \lambda x$, es decir

$$\lambda x = h \circ f \circ h^{-1}(x) \tag{2.6}$$

Prueba. Como $f'(0) = \lambda \neq 0$, entonces el teorema de la función inversa garantiza la existencia de vecindades abiertas V y W del origen de coordenadas, de modo tal que $f : V \longrightarrow W$ es un biholomorfismo. Consideremos un disco abierto B centrado en el origen de coordenadas, y contenido en la intersección de V con W; y $T : B \longrightarrow \mathbb{C}$ el biholomorfismo entre B y $\mathbb{C}$. Y sea F dado por la composición

$$\mathbb{C} \xrightarrow{T^{-1}} W \xrightarrow{f^{-1}} V \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{C}$$

Como $|F'(0)| = |1/\lambda| < 1$, entonces por el teorema anterior existe un biholomorfismo h definido entre vecindades del origen de coordenadas, que conjuga F con $x \longmapsto \frac{1}{\lambda}x$, es decir

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\lambda}x = h \circ F \circ h^{-1}(x) \quad &\equiv \quad \tfrac{1}{\lambda}x = h \circ T^{-1} \circ f^{-1} \circ T \circ h^{-1}(x) \\ &\equiv \quad \tfrac{1}{\lambda}x = (T \circ h^{-1})^{-1} \circ f^{-1} \circ (T \circ h^{-1})(x) \end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$\lambda\, x = (T \circ h^{-1}) \circ f \circ (T \circ h^{-1})^{-1}(x)$$

■

Sección 2.3. Funciones analíticas con parte lineal en S^1

Subsección 2.3.1. Preámbulo

Siendo $F(x) = e^{2\pi i\theta}x + xf(x)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$, una función analítica en el origen de coordenadas, y θ es un número real, racional o irracional, es de nuestro interés determinar las condiciones bajo las cuales la ecuación

$$(\varphi^{-1} \circ F \circ \varphi)(x) = e^{2\pi\theta\, i}\, x \tag{2.7}$$

admite una solución analítica φ definida en una vecindad del origen de coordenadas.

Para determinar la naturaleza de las soluciones de la ecuación anterior tomamos una serie formal $\varphi(y) := y + yh(y)$, $h(y) = \sum_{n=1} h_n y^n$. y asumimos que satisface la identidad, esto es $F(\varphi(y)) = \varphi(e^{2\pi i\theta} y)$ o, equivalentemente,

$$e^{2\pi i\theta} (y + yh(y)) + (y + yh(y)) f(y + yh(y)) = e^{2\pi i\theta} y + e^{2\pi i\theta} yh(e^{2\pi i\theta} y)$$

Dividiendo entre $e^{2\pi i\theta} y$ y agrupando convenientemente tenemos

$$h(e^{2\pi i\theta} y) - h(y) = e^{-2\pi i\theta} (1 + h(y)) f(y(1 + h(y)))$$

Dado que todas las funciones que aparecen en esta identidad tienen, cada una, una representación en serie de potencias, podemos igualar los coeficientes que acompañan a y^n y obtener

$$\forall\, n \geq 1 : (e^{2\pi i\theta n} - 1) h_n = e^{-2\pi i\theta} \{(1 + h) \cdot (f \circ \varphi)\}_n$$

donde, por conveniencia, $\{(1 + h) \cdot (f \circ \varphi)\}_n$, $n \geq 1$, denota al coeficiente que acompaña a y^n en la serie producto $y \longmapsto (1 + h(y)) \cdot (f \circ \varphi)(y) = (1 + h(y)) f(y(1 + h(y)))$.

Si θ fuese un número irracional, entonces $e^{2\pi i\theta n} \neq 1$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$; por ende podemos dividir y obtener la identidad

$$\forall\, n \geq 1 : h_n = \frac{e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta n} - 1} \{(1 + h) \cdot (f \circ \varphi)\}_n$$

En el caso que θ no sea irracional sino racional, la representación anterior no es posible porque, en este caso, existe una infinidad de índices $n \in \mathbb{N}$ tales que $e^{2\pi i\theta n} = 1$.

Subsección 2.3.2. Existencia de la Solución Formal de la Ecuación (2.7)

Tenemos una primera proposición

Proposición 2.1. Sea $F(x) := e^{2\pi i\theta} x + x f(x)$ una serie formal, donde $f(x) := \sum_{n\geq 1} f_n x^n$ y θ es un número irracional. Sea $\varphi(y) := y + yh(y)$, con $h(y) := \sum_{n\geq 1} h_n y^n$, una solución formal de la ecuación (2.7), es decir una serie formal tal que

$$\left(\varphi^{-1} \circ F \circ \varphi\right)(y) = e^{2\pi i\theta} y,$$

y definamos

$$\sum_{n\geq 1}\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n y^n:\ =(1+h(y))\,(f\circ\varphi)(y), \tag{2.8}$$

Entonces

$$\forall\, n\geq 1:\ h_n=\frac{e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta n}-1}\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n \tag{2.9}$$

Prueba. Ya fue vista en las líneas previas al enunciado de esta proposición. ■

Observación 2.2. La identidad (2.9), si bien es cierto es una condición necesaria para que $\varphi(x):\ =y+y\sum_{n=1}h_n y^n$ sea solución de la ecuación (2.7), no ayudaría en mucho si en el desarrollo de enésimo coeficiente de $y\longrightarrow(1+h(y))\,(f\circ\varphi)(y)$, esto es $\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n$, tomara parte algún coeficiente h_m de índice $m\geq n$. Afortunadamente esto no ocurre, tal como vamos a ver en la siguiente proposición.

Proposición 2.2. En referencia a la serie formal (2.8), esto es

$$\sum_{n\geq 1}\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n y^n:\ =(1+h(y))\,(f\circ\varphi)(y)=(1+h(y))\sum_{n\geq 1}f_n(y+yh(y))^n$$

se tiene

$$\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_1=f_1$$

$$\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n=\text{depende de } f_m, m\leq n \text{ y de los } h_m, 0\leq m<n, h_0:\ =1$$

Prueba. Tenemos

$$\sum_{n\geq 1}\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n y^n:\ =\underbrace{\sum_{n\geq 1}f_n(y+yh(y))^n}_{\text{Esta serie empieza en } n\,=\,1}+\underbrace{h(y)\sum_{n\geq 1}f_n(y+yh(y))^n}_{\text{Esta serie empieza en } n\,=\,2}$$

Desarrollando cada una de las series formales del lado derecho resulta

$$\begin{aligned}
&=\frac{c_1}{c_2}(y+yh(y))+\frac{c_1}{c_2^2}(y^2+2y^2h(y)+y^2h(y)^2)+\\
&\frac{c_1}{c_2^3}(y^3+3y^3h(y)+3y^3h(y)^2+y^3h(y)^3)+\\
&\frac{c_1}{c_2^4}(y^4+4y^4h(y)+6y^4h(y)^2+4y^4h(y)^3+y^4h(y)^4)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\cdots+\\
&\frac{c_1}{c_2}(yh(y)+yh(y)^2)+\frac{c_1}{c_2^2}(y^2h(y)+2y^2h(y)^2+y^2h(y)^3)\\
&+\frac{c_1}{c_2^3}(y^3h(y)+3y^3h(y)^2+3y^3h(y)^3+y^3h(y)^4)+\cdots
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes tenemos

$$\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_1 = f_1$$

$$\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_2 = 2f_1h_1 + f_2$$

$$\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_3 = 3f_2h_1 + f_1h_1^2 + 2f_1h_2 + f_3$$

En general, para $n \geq 2$ se tiene que

$$\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n = \text{depende de } f_m, m \leq n \text{ y de los } h_m, 0 \leq m < n, h_0 := 1$$

∎

Observación 2.3. La identidad (2.9) y la proposición (2.2) nos están diciendo que los coeficientes de la solución formal $\varphi(y) = y + y\sum_{n\geq} h_n y^n$ de la ecuación (2.7) deben ser definidos inductivamente, necesariamente, mediante

$$\begin{aligned}
h_1 &:= \frac{e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta}-1} f_1,\\
h_2 &:= \frac{e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta 2}-1}(2f_1h_1 + f_2),\\
h_3 &:= \frac{e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta 3}-1}(3f_2h_1 + f_1h_1^2 + 2f_1h_2 + f_3), \quad \text{etc...}
\end{aligned}$$

En general, para $n \geq 1$

$$h_n := \frac{e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta n}-1}\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n \tag{2.10}$$

Sintetizamos estos resultados en la siguiente proposición

Proposición 2.3. Sea θ un número irracional; y $F(x) = e^{2\pi i\theta}x + xf(x)$, $f(x) = \sum_{n=1} f_n x^n$, una función analítica definida en una vecindad del origen coordenadas. Entonces la ecuación (2.7), esto es

$$(\varphi^{-1}\circ F\circ\varphi)(y) = e^{2\pi i\theta}y,$$

tiene como solución formal a la serie $\varphi(y) = y + y\sum_{n\geq 1} h_n y^n$ de coeficientes

$$h_n := \frac{e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta n}-1}\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n; \quad n \geq 1 \tag{2.11}$$

donde $\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n$ es el enésimo coeficiente de la serie producto

$$\sum_{n\geq 1}\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n y^n := (1+h(y))\,(f\circ\varphi)(y) \tag{2.12}$$

Prueba. Esta se infiere de lo planteado en las líneas previas ■

Entonces ahora queda por probar la convergencia de la solución formal.

$$\varphi(y) = y + y \sum_{n \geq 1} \left[\frac{e^{-2\pi i \theta}}{e^{2\pi i \theta n} - 1} \{(1 + h) \cdot (f \circ \varphi)\}_n \right] y^n$$

Es aquí donde entra a tallar las condiciones adicionales del número irracional θ: La **Condición de Siegel** y la **Condición de Brjuno**, o también llamada Condición Logarítmica. En el capítulo cuatro demostraremos que la funciones analíticas $F(x) = e^{2\pi\theta i}x + xf(x)$, donde $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n x^n$ y θ es un número irracional que satisface la condición de Siegel, es conjugado a su parte lineal $x \longmapsto e^{2\pi\theta i}x$. En el capítulo cinco se trata el caso en el que θ satisface la Condición de Brjuno.

Capítulo 3

La Condición de Siegel y la Condición de Brjuno

Sea θ un número irracional y $F(x) = e^{2\pi i\theta}x + xf(x)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$, una función analítica en una vecindad del origen de coordenadas. Y consideremos la ecuación

$$(\varphi^{-1} \circ F \circ \varphi)(x) = e^{2\pi\theta\, i}x \tag{3.1}$$

En la parte final del capítulo anterior hemos resuelto demostrar que esta ecuación admite una solución analítica cuando θ satisface la Condición de Siegel o la Condición de Brjuno. Lo primero corresponde al **Teorema de Siegel**, tratado el capítulo cuatro; lo segundo al **Teorema de Brjuno**, el cual es formulado y demostrado en el capítulo cinco.

Definimos a continuación estas condiciones

Definición 3.1. Se dice que un número $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ satiface la **Condición de Siegel** si

$$\exists\, M > 0 \wedge \exists\, k \in \mathbb{N} \;/\; \forall\, n \in \mathbb{N}\colon\; \frac{1}{|e^{2\pi i n\theta} - 1|} \leq M n^k \tag{3.2}$$

Definición 3.2. Se dice que $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ satisface la **Condición de Brjuno** si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < \infty \tag{3.3}$$

donde q_n, $n \geq 0$, son los denominadores de la descomposición en fracciones continuas de θ.

Definición 3.3. Se dice que $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ satisface la **Condición Diofántica** si

$$\exists\, a > 0,\; b > 2 \;/\; \forall\, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\colon \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{a}{q^b} \tag{3.4}$$

Definición 3.4. Un número real θ se dice **algebraico** si existe un polinomio $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, de coeficientes racionales, y no todos ceros, tal que $P(\theta) = 0$

Si θ es un número real algebraico entonces, de entre todos los polinomios $P(x)$ de coeficiente principal diferente de cero que satisfacen la definición (3.4), tomamos el de menor grado;

podemos asumir, sin perdida de generalidad, que este es mónico, es decir de coeficiente principal uno. Nos referimos a este como **Polinomio Minimal para** θ; el grado de este es, por definición, el **grado de** θ.

Son números algebraicos todos los racionales; también todos los irracionales de la forma $m^{1/n}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, y siempre que $m^{1/n}$ sea un número real. Claramente, si $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es algebraico, entonces grado$(\theta) \geq 2$.

En el presente capítulo vamos a responder y/o demostrar y/o reforzar lo que se enuncia a líneas abajo, respecto de los conjuntos **S**, **B**, **D**, conformados por todos los $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ que satisfacen la Condición de Siegel, la Condición de Brjuno y la Condición Diofántica, respectivamente. Sea, también, **A** el conjunto de todos los números algebraicos irracionales, y definamos $\mathbf{A_2} :\ = \{\theta \in \mathbf{A}\ :\ \text{grado}(\theta) = 2\}$ y $\mathbf{A_3} :\ = \{\theta \in \mathbf{A}\ :\ \text{grado}(\theta) \geq 3\}$.

P1) **A** es no vacío (Observación (3.1)).

P2) **S**, **B** y **D** son no vacíos (Observación (3.1)).

P3) $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}$ (Teorema (3.1))

P4) $\mathbf{D} \subset \mathbf{S}$ (Proposición (3.1)). $\mathbf{D} \subset \mathbf{B}$ (Teorema (3.3)). $\mathbf{A_3} \subset \mathbf{D}$ (Teorema (3.1) y (3.3)).

P5) **S** es invariante por traslación entera. Es decir, si $\theta \in \mathbf{S}$ si, y solo si, $\theta + m \in \mathbf{S}$, cualquiera que sea $m \in \mathbb{Z}$ (Observación (3.1)),

P6) Existe $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ que no satisface la Condición de Siegel, pero si la de Brjuno (Teorema (3.4).

P7) El conjunto $\mathbf{S_0} :\ = [0, 1] \cap \mathbf{S}$ es Lebesgue medible y $\mathbf{m}(\mathbf{S_0}) = 1$. En consecuencia, **S** es union numerable disjunta de los conjuntos medibles $\mathbf{S}_m :\ = \mathbf{S_0} + \{m\} \subset [m, m+1]$, donde m es un entero; por ende, Lebesgue medible y de medida infinita (Teorema (3.2))

P8) $\mathbf{S} \cup \mathbf{B}$ no cubre todo $\mathbb{I}$. Es decir, existe $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ que no satisfacen la Condición de Brjuno, y tampoco la de Siegel (Teorema (3.5)).

P9) Sea $\mathbf{B}_m :\ = [m, m+1] \cap \mathbf{B}$, $m \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbf{B}_m/\mathbf{S}_m$ es medible según Lebesgue, con $\mathbf{m}(\mathbf{B}_m/\mathbf{S}_m) = 0$. En consecuencia **B** es Lebesgue medible y $\mathbf{m}(\mathbf{B}/\mathbf{S}) = 0$ (Observación (3.1)).

Observación 3.1. Algunos de estas aseveraciones son verificación elementale inmediata. Ya se explicó lo que respecta a la aseveración (P1). La justificación de (P2) se basa en el hecho que $\mathbf{A}_3$ es no vacío y a los contenidos dados en (P4). La aseveración (P5) se justifica en el hecho todo número entero m es tal que $e^{2\pi n(\theta+m)i} = e^{2\pi n\theta i}e^{2\pi nmi} = e^{2\pi n\theta i}$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. La aseveración (P9) se infiere de (P7); en consecuencia, en este caso, bastará probar la segunda.

Sección 3.1. La Condición de Siegel

Subsección 3.1.1. La no vacuidad de S

El Teorema de Liuoville (3.1) justifica este hecho. Para la justificación de este hecho es preciso dar algunos resultados previos.

Proposición 3.1. Sea θ un número irracional. Si θ satisface la condición de Siegel, entonces

$$\exists\, a > 0,\ b \geq 2 \ /\ \forall\ (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\colon \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{a}{q^b} \tag{3.5}$$

Recíprocamente, si

$$\exists\, a > 0,\ b > 0 \ /\ \forall\ (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\colon \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{a}{q^b} \tag{3.6}$$

entonces θ satisface la Condición de Siegel.

Observación 3.2. Esta proposición no está diciendo que $\mathbf{D} \subset \mathbf{S}$

Prueba. Si $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ satisface la condición de Siegel, entonces existe $M > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ de modo tal que todo $q \in \mathbb{N}$ verifica la desigualdad

$$\frac{M^{-1}}{q^k} \leq |e^{2\pi iq\theta} - 1|$$

Considerando que todo número entero p es tal que $e^{2\pi ip} = 1$, tenemos que

$$\frac{M^{-1}}{q^k} \leq |e^{2\pi iq\theta} - 1| = |e^{2\pi iq\theta} - e^{2\pi ip}|$$

Y definiendo $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $g(t) = e^{2\pi it}$, el Teorema del Valor Medio asegura que

$$= |g(\theta q) - g(p)| \leq 2\pi|\theta q - p|$$

y por ende

$$\frac{M^{-1}}{q^k}\frac{1}{2\pi} \leq |\theta q - p| \;\equiv\; \frac{M^{-1}}{q^{k+1}}\frac{1}{2\pi} \leq \left|\theta - \frac{p}{q}\right|$$

Por tanto

$$\exists\, a: \,= (2\pi M)^{-1} \,\wedge\, b: \,= k+1 \,/\, \forall\,(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\colon \frac{a}{q^b} \leq \left|\theta - \frac{p}{q}\right|$$

Recípocamente. Fijado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|e^{2n\pi i\theta} - 1| = |\cos(2n\pi\theta) - 1 + i\,\sin(2n\pi\theta)| = 2\sqrt{\frac{1-\cos(2n\pi\theta)}{2}} = 2|\sin(n\pi\theta)|$$

Considerando que

$$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \Longrightarrow |\sin(x)| \geq \frac{2}{\pi}|x| \quad \text{(ver figura (3.1))}$$

podemos tomar el número entero m, más cercano a $n\theta$, que hace que $-1/2 < n\theta - m < 1/2$ o, equivalentemente, que $-\pi/2 < n\theta\pi - m\pi < \pi/2$; esto siempre posible porque $n\theta$ es un número irracional.

Para el $n \in \mathbb{N}$ tomado arbitrariamente, y el $m \in \mathbb{Z}$ elegido convenientemente, tenemos

$$|e^{2n\pi i\theta} - 1| = 2|\sin(n\pi\theta)| = 2|\sin(n\pi\theta - m\pi)| \geq 2(2/\pi)|n\pi\theta - m\pi| = 4n\left|\theta - \frac{m}{n}\right| \geq 4n\frac{a}{n^b}$$

Así pues existe $M: \,= a^{-1}$ y $k: \,= [\![b]\!] + 1$ tal que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{|e^{2n\pi i\theta} - 1|} \leq \frac{1}{4n}\frac{1}{a}n^b \leq \frac{1}{a}n^b \leq \frac{1}{a}n^{[\![b]\!]+1} = Mn^k$$

■

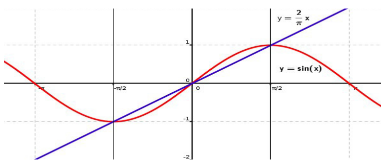

Figura 3.1: $y = \sin(x)$

Teorema 3.1 (De Liouville)**.** Los números algebraicos irracionales satisfacen la condición (3.5) y, por ende, también la Condición de Siegel. Más precisamente, si $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es algebraico entonces

$$\exists\, c > 0 \,/\, \forall\,(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\colon \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^{\text{grado}(\theta)}}$$

Prueba. Sea $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ un número algebraico, de grado$(\theta) := n$ y polinomio minimal P.

Fijado arbitrariamente $p/q \in \mathbb{Q}$, $q \geq 1$, existe por el Teorema del Valor Medio, $\xi := \xi(p/q) \in \mathbb{R}$, entre θ y p/q, tal que

$$-P(p/q) = P(\theta) - P(p/q) = (\theta - p/q)P'(\xi)$$

El lado izquierdo de esta identidad es diferente de cero, i.e. $P(p/q) \neq 0$, pues P es irreducible en $\mathbb{Q}$, ya que P es minimal.

Como P tiene coeficientes enteros, resulta que $-q^n P(p/q) \in \mathbb{Z}/\{0\}$; por ende

$$|(\theta - p/q)P'(\xi)q^n| \geq 1 \quad \equiv \quad |\theta - p/q| \geq \frac{1}{q^n}\frac{1}{|P'(\xi)|}$$

Desafortunadamente $P'(\xi)$ depende de p/q. Para salvar este obstáculo analizamos las dos únicas posibilidades:

$$p/q \in]\theta - 1, \theta + 1[\quad \vee \quad p/q \in \mathbb{R}/]\theta - 1, \theta + 1[$$

Si ocurre lo primero, entonces debe tenerse la pertenencia $\xi \in]\theta - 1, \theta + 1[$. Así, considerando que $P'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(n-i)x^{n-1-i}$, resulta

$$|P'(\xi)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||n-i||\xi|^{n-1-i} \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||n-i|(|\theta| + 1)^{n-1-i} < \frac{1}{a}$$

para algún número real $a > 0$, dependiente solo de θ, no de p/q. En consecuencia

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n}\frac{1}{|P'(\xi)|} > \frac{a}{q^n} = \frac{a}{q^{\text{grado}(\theta)}}$$

Si ocurre lo segundo, entonces $|\theta - p/q| \geq 1$; y por ende

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq 1 \geq \frac{1}{q^n} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{q^n} = \frac{1/2}{q^{\text{grado}(\theta)}}$$

Así existe $c := \min\{a, 1/2\} > 0$ tal que

$$\forall\, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \colon \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^{\text{grado}(\theta)}}$$

■

Subsección 3.1.2. S tiene medida de Lebesgue infinita

Del hecho que **S** es invariante por traslaciones enteras se desprende que todo $\theta \in \mathbf{S}$ es traslación entera de un algún $\theta^* \in \mathbf{S_0}$. Así, considerando que la **m-Medida de Lebesgue** es invariante por traslaciones, bastará probar que $\mathbf{S_0}$ es Lebesgue medible. En lo que sigue vamos a probar este hecho; y también que $\mathbf{m(S_0)} = 1$.

Teorema 3.2. El conjunto

$$\mathbf{S_0} := \left\{\theta \in [0,1] \cap \mathbb{R}/\mathbb{Q} \,:\, \exists\, M > 0, \exists\, k \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{|e^{2\pi n\theta i} - 1|} \leq Mn^k\right\} \tag{3.7}$$

es **m**-Lebesgue Medible, y $\mathbf{m(S_0)} = 1$.

Prueba. Vamos a demostrar que $[0,1]/\mathbf{S_0}$ es Lebesgue Medible y que $\mathbf{m}([0,1]/\mathbf{S_0}) = 0$. En efecto. Considerando que

$$|e^{2\pi n\theta i} - 1| = |e^{\pi n\theta i}e^{\pi n\theta i} - 1| = |e^{\pi n\theta i}||e^{\pi n\theta i} - e^{-\pi n\theta i}| = 2|\sin(\pi n\theta)|$$

tenemos

$$[0,1]/\mathbf{S_0} = \left\{\theta \in [0,1] \,:\, \forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, M > 0 : \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, 2|\sin(\pi n\theta)| < \frac{1}{Mn^k}\right\}$$

Si $\theta \in [0,1]/\mathbf{S_0}$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $M > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2|\sin(\pi n\theta)| < 1/Mn^k$. Si πm es el múltiplo de π más cercano de $\pi n\theta$, lo que lo mismo decir que si m es el número entero más cercano de $n\theta$, resulta que

$$n\left|\theta - \frac{m}{n}\right| = |\theta n - m| \leq 2|\sin(\pi n\theta - \pi m)| = 2|\sin(\pi n\theta)| < \frac{1}{Mn^k}$$

Como k es cualquiera, podemos tomar $k = 2$ y tener la implicación

$$\theta \in [0,1]/\mathbf{S_0} \Longrightarrow \forall\, M > 0 \,:\, \exists\, m, n \in \mathbb{N} \,/\, \theta \in \left]\frac{m}{n} - \frac{1}{Mn^3}, \frac{m}{n} + \frac{1}{Mn^3}\right[$$

Es así como

$$\forall\, M > 0 \colon [0,1]/\mathbf{S_0} \subset E_M := [0,1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} \left]\frac{m}{n} - \frac{1}{Mn^3}, \frac{m}{n} + \frac{1}{Mn^3}\right[$$

La unión de índice m la partimos en dos: de $m := 1$ hasta $m := n$ y la que va de $m := n+1$ hasta ∞. La segunda no se considera cuando convenimos en tomar $M > 1$, pues

$$Mn^2 > 1 \Longrightarrow 1 > \frac{1}{Mn^2} \Longrightarrow \forall m \geq n+1 \colon n + \frac{1}{Mn^2} < m \Longrightarrow \forall m \geq n+1 \colon \frac{m}{n} - \frac{1}{Mn^3} > 1$$

De esto resulta que

$$[0,1]/\mathbf{S}_0 \subset E:\ = \bigcap_{M>1} E_M$$

Como

$$\mathbf{m}(E) = \lim_{M\longrightarrow\infty} \mathbf{m}(E_M) \leq \lim_{M\longrightarrow\infty} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \frac{2}{Mn^3} = \lim_{M\longrightarrow\infty} \frac{2}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq \lim_{M\longrightarrow\infty}\frac{4}{M} = 0$$

Luego, como la medida de Lebesgue es completa, resulta que $[0,1]/\mathbf{S}_0$ es medible y de medida cero. ■

Subsección 3.1.3. El contenido D ⊂ B

Teorema 3.3. Sea $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tal que satisface la Condición Diofántica, esto es

$$\exists\, a > 0,\ b > 2 \ /\ \forall\ (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}:\ \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{a}{q^b}$$

Entonces θ satisface la Condición de Brjuno.

Prueba. La condición (3.6) es válida para todos los convergentes de θ. Este hecho junto con el Corolario (1.1) proporciona las desigualdades

$$\frac{a}{q_k^b} \leq \left|\theta - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

Trasponiendo términos obtenemos $aq_{k+1} < q_k^{b-1}$, cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$; y de tomar logaritmo resulta $\log(a) + \log q_{k+1} < (b-1)\log q_k$. Así pues

$$\log(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log q_{k+1}}{q_k} < (b-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log q_k}{q_k}$$

Las series de los extremos son finita por el Lema (1.1). ■

Sección 3.2. La Condición de Brjuno

Subsección 3.2.1. La no vacuidad de B/S

Lema 3.1. Sea θ un número irracional. En referencia a los denominadores q_n de las fracciones continuas de θ dados en el definición (1.8), se tiene

$$\forall\ n \geq 1:\ q_n < (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1) \tag{3.8}$$

donde a_n son los términos de la sucesión de las partes enteras de θ.

Prueba. De la definición (1.8) y proposición (1.7) se sabe, respectivamente, que

$$q_0 :\ = 1,\ q_1 :\ = a_1,\ q_{n+1} :\ = a_{n+1} q_n + q_{n-1},\ n \geq 1 \qquad \text{y} \qquad q_{n-1} < q_n,\ n \geq 2$$

De la conjunción de estos dos hechos resulta $q_{n+1}/q_n = a_{n+1} + q_{n-1}/q_n < a_{n+1} + 1$, $n \geq 2$. En consecuencia,

$$\forall\ n \geq 2 \colon q_{n+1} < q_n(a_{n+1} + 1)$$

Asimismo, de $q_2 :\ = a_2 q_1 + q_0$ y $q_0 \leq q_1$ resulta $q_2/q_1 \leq a_2 + 1$. Por ende, también se tiene

$$q_2 \leq q_1(a_2 + 1)$$

De tales hechos resultan las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} q_1 :\ = a_1 < a_1 + 1 \\ q_2 \leq q_1(a_2 + 1) < (a_1 + 1)(a_2 + 1) \\ q_3 < q_2(a_3 + 1) < (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \end{aligned}$$

En general la prueba se sigue por inducción. ■

Teorema 3.4. Existe un $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ que no satisface la Condición de Siegel, pero sí la Condición de Brjuno.

Prueba. Consideremos la sucesión de números enteros $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de términos $a_0 :\ = 0$ y $a_n :\ = 10^{n!}$, $n \geq 1$; y también las suseciones $\{p_n\}_{n \geq 0}$ y $\{q_n\}_{n \geq 0}$ definidas mediante (1.8).

Definamos

$$\theta :\ = \lim_{m \longrightarrow \infty} [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m] :\ = \lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{p_m}{q_m} \tag{3.9}$$

Afirmación: El número definido en (3.9) no satisface la condición de Siegel (3.2). Del Corolario (1.1) y del hecho que $q_n \geq 1$, $n \geq 0$ (ver la Proposición (1.7)), resulta que

$$\forall\ n \geq 1 \colon \left| \frac{p_n}{q_n} - \theta \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_{n+1}}$$

Pero como $a_{n+1} < a_{n+1}q_n < a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$, $n \geq 2$, tenemos que

$$\forall\ n \geq 2: \left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} = \frac{1}{(10^{n!})^{n+1}} < \frac{1}{(10^{n!})^n} = \frac{1}{a_n^n}$$

De otro lado, usando (3.8) en este caso concreto tenemos

$$q_n < (10+1)(10^{2!}+1)\dots(10^{n!}+1); \quad n \geq 1.$$

Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} q_n < (10+1)(10^{2!}+1)\dots(10^{n!}+1) &= 10\Big(1+\frac{1}{10}\Big)10^{2!}\Big(1+\frac{1}{10^{2!}}\Big)\cdots 10^{n!}\Big(1+\frac{1}{10^{n!}}\Big) \\ &< \Big(1+\frac{1}{10}\Big)\Big(1+\frac{1}{10^2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{10^n}\Big)(10\times 10^{2!}\times\cdots\times 10^{n!}) \\ &< 2\times 10\times 10^{2!}\times\cdots\times 10^{n!} \\ \text{(se prueba por inducción)} &< (10^{n!})^2 = a_n^2 \end{aligned}$$

De este modo obtenemos el siguiente mayoramiento para cada $n \geq 2$

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right| < \frac{1}{(10^{n!})^n} < \frac{1}{q_n^{n/2}}$$

Si θ satisfaciese la Condición de Siegel, entonces de tomar las constantes $a > 0$ y $b \geq 2$ que nos proporciona la Proposición (3.1) resulta

$$\frac{a}{q_n^b} \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right| < \frac{1}{q_n^{n/2}} \quad \equiv \quad q_n^{n/2-b} \leq q_n^{n/2}a^{-1}\left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right| < a^{-1}$$

cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Esto contradice a la Proposición (1.7); mas precisamente, al hecho que $\lim_{n\longrightarrow\infty} q_n = +\infty$.

Afirmación: El número definido en (3.9) satisface la Condición de Brjuno Se sabe que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, cualquiera que sea $n \geq 1$. Tomando entonces logaritmo se tiene

$$\log q_{n+1} = \log(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) = \log\left[\left(a_{n+1} + q_{n-1}q_n^{-1}\right)q_n\right] = \log\left(a_{n+1} + q_{n-1}q_n^{-1}\right) + \log q_n$$

Pero $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ o, equivalentemente, $q_{n-1}q_n^{-1} + a_n^{-1}q_{n-2}q_n^{-1} = a_n^{-1}$; luego

$$\begin{aligned} \log q_{n+1} < \log(a_{n+1} + q_{n-1}q_n^{-1}) + \log q_n &< \log\Big(a_{n+1} + \frac{1}{a_n}\Big) + \log q_n \\ &< \log(a_{n+1}+1) + \log q_n \\ \text{(ver figura (3.2))} \qquad &< \log a_{n+1} + 1 + \log q_n \\ &= (n+1) + 1 + \log q_n \end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{q_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log q_n}{q_n}$$

En el lado derecho de la de la desigualdad, la segunda y tercera serie son convergentes; esto se sigue del Lema (1.1). Y la convergencia de la primera se sigue del criterio de la razón,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{q_n}}{\dfrac{n!}{q_{n-1}}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)!q_{n-1}}{n!q_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} (n+1)\frac{q_{n-1}}{q_n} &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n+1}{a_n}\frac{q_{n-1}a_n}{q_n} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n+1}{10^{n!}}\frac{q_n - q_{n-2}}{q_n} \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n+1}{10^{n!}} = 0
\end{aligned}$$

■

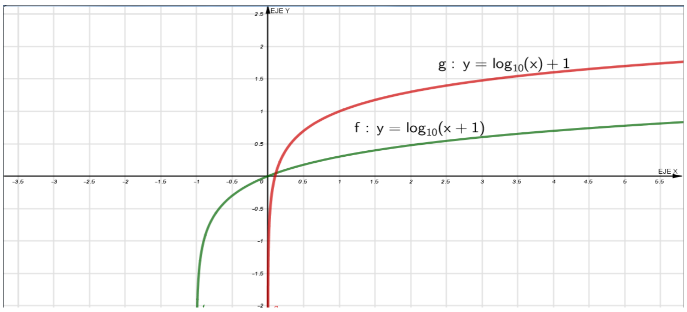

Figura 3.2: Comparacion de $y = \log(x+1)$ con $y = \log(x) + 1$

Sección 3.3. La no vacuidad de $\mathbb{I}/\mathbf{B} \cup \mathbf{S}$

En esta subsección vamos a demostrar que existen funciones analíticas $F(x) = e^{2\pi i\theta}x + xf(x)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$, para las que la ecuación (3.1) no admite solución analítica. En consecuencia, habremos que existen números irracionales θ que no satisface ni la Condición de Siegel ni la de Brjuno. Esto se refleja en el Teorema (3.5), pero previamente presentamos el Lema (3.2).

Lema 3.2. Sean $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ y $f(x) = e^{2\pi i\theta}x + \cdots + x^d$ un polinomio mónico de grado $d \geq 2$ tal que la ecuación

$$(h \circ f \circ h^{-1})(x) = e^{2\pi i\theta}x$$

admite solución h definida en un disco $D(0,\delta)$. Entonces

$$\forall n \geq 1\colon \delta^{d^n} < |1 - e^{2\pi i n\theta}| \tag{3.10}$$

En particular, si para una sucesión creciente de números naturales $\{n_k\}_{k\geq 1}$ definimos

$$\theta\colon = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_3}} + \cdots,$$

entonces para todo k suficientemente grande se tiene

$$n_{k+1} < \left(2 + \log_2\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) d^{2^{n_k}} \tag{3.11}$$

Prueba. Escribamos $\lambda\colon = e^{2\pi i\theta}$ y fijemos un número natural $n \geq 1$. Componiendo f consigo misma, n veces, tenemos

$$f^n(x) = \lambda^n x + \cdots + x^{d^n}$$

Entonces la identidad

$$f^n(x) - x = (\lambda^n - 1)\, x + \cdots + x^{d^n}$$

nos permite afirmar que las raíces del polinomio $g(x)\colon = (\lambda^n - 1)\, x + \cdots + x^{d^n}$ son puntos fijos de $f^n(x)$. Uno de estos puntos fijos es $x = 0$; denotemos por $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{d^n-1}$ a los puntos fijos restantes.

De otro lado se observa que

$$f^2(x) = f(h^{-1}(\lambda h(x))) = h^{-1}(\lambda h(h^{-1}(\lambda h(x)))) = h^{-1}(\lambda^2 h(x))$$
$$f^3(x) = f^2(f(x)) = h^{-1}(\lambda^2 h(f(x))) = h^{-1}(\lambda^2 h(h^{-1}(\lambda h(x)))) = h^{-1}(\lambda^3 h(x))$$

Y en general, que

$$\forall\, x \in D(0,\delta)\colon f^n(x) = h^{-1}(\lambda^n h(x))$$

De esto y de la inyectividad de h en se infiere que $f^n(x)$ es uno a uno en $D(0,\delta)$ y que, en este disco, $x = 0$ es su único punto fijo.

Si en el disco $D(0,\delta)$ hubiera un punto fijo f^n que no fuera cero, digamos $x \neq 0$, entonces de $x = f^n(x) = h^{-1}(\lambda^n h(x))$ se infiere que $h(x) = \lambda^n h(x)$; cancelando $h(x)$, puesto que $h(x) \neq 0$ debido a la univalencia de h, llegamos a la imposibilidad $\lambda^n = 1$.

De lo argumentado en el parágrafo anterior, todos los puntos fijos diferentes de cero de $f^n(x)$ caen fuera del disco $D(0,\delta)$. En consecuencia, $\delta \leq |x_j|$, $j = 1,\ldots,d^n - 1$ y, por ende.

$$\delta^{d^n-1} \leq \prod_{j=1}^{d^n-1} |x_j|$$

Y como el producto de las raíces diferentes de cero de $g(x)$ es el coeficiente que acompaña a x, tenemos que

$$\delta^{d^n-1} \leq \prod_{j=1}^{d^n-1} |x_j| = |1-\lambda^n|$$

Dado que podemos considerar $\delta < 1$, tenemos que $\delta^{d^n} < |1-\lambda^n|$. Esto prueba (3.10).

Probemos ahora (3.11). En efecto. Si "theta" es el número irracional tal cual se indica, entonces fijamos arbitrariamente un $k \in \mathbb{N}$ y multiplicamos por $2\pi i 2^{n_k}$ a ambos lados y obtenemos

$$\begin{aligned}2\pi i\theta 2^{n_k} = 2\pi i 2^{n_k-n_1} + 2\pi i 2^{n_k-n_2} + 2\pi i 2^{n_k-n_3} + \cdots + 2\pi i 2^{n_k-n_{k-1}}&\\ + 2\pi i + \frac{2\pi i}{2^{n_{k+1}-n_k}} + 2\pi i \sum_{j\geq 2} \frac{1}{2^{n_{k+j}-n_k}}&\end{aligned}$$

Haciendo

$$a_k : = \frac{1}{2^{n_{k+1}-n_k}} + \sum_{j\geq 2} \frac{1}{2^{n_{k+j}-n_k}}$$

tenemos $e^{2\pi i\theta 2^{n_k}} = e^{2\pi i a_k} = \cos(2\pi a_k) + i\,\sin(2\pi a_k)$; y por ende

$$|e^{2\pi i\theta 2^{n_k}} - 1| = |\cos(2\pi a_k) - 1 + i\,\sin(2\pi a_k)| = 2\sqrt{\frac{1-\cos(2\pi a_k)}{2}} \leq 2|\sin(\pi a_k)|$$

Ahora. Para todo k extremadamente grande se tiene que

$$|e^{2\pi i\theta 2^{n_k}} - 1| \leq 2|\sin(\pi a_k)| \leq 2\pi a_k$$

porque, en este caso, a_k resulta ser infinitesimal.

Pero

$$a_k : = \frac{1}{2^{n_{k+1}-n_k}} + \frac{1}{2^{n_{k+2}-n_k}} + \frac{1}{2^{n_{k+3}-n_k}} + \cdots < 2\frac{1}{2^{n_{k+1}-n_k}}$$

en consecuencia, para todo k suficientemente grande se tiene

$$|e^{2\pi i\theta 2^{n_k}} - 1| \leq 2\pi a_k < 2\pi 2\frac{1}{2^{n_{k+1}-n_k}}$$

Este resultado en conjunción con (3.10), nos proporciona:

$$\delta^{d^{n_k}} < |e^{2\pi i\theta 2^{n_k}} - 1| < \frac{4\pi}{2^{n_{k+1}-n_k}}$$

y por ende

$$2^{n_{k+1}} < 2^{n_k}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{d^{2^{n_k}}} 4\pi$$

Aplicando logaritmo en base dos y sabiendo que $d \geq 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} n_{k+1} < n_k + d^{2^{n_k}}\log_2(1/\delta) + \log_2(4\pi) &< 2^{2^{n_k}} + d^{2^{n_k}}\log_2(1/\delta) + \log_2(4\pi) \\ &\leq d^{2^{n_k}} + d^{2^{n_k}}\log_2(1/\delta) + \log_2(4\pi) \\ &= d^{2^{n_k}}(1 + \log_2(1/\delta)) + \log_2(4\pi) \end{aligned}$$

Dado que $\log_2(4\pi)$ es una constante, sucede que para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se tiene que

$$n_{k+1} < d^{2^{n_k}}(1+\log_2(1/\delta))+\log_2(4\pi) < d^{2^{n_k}}(1+\log_2(1/\delta))+d^{2^{n_k}} = d^{2^{n_k}}(2+\log_2(1/\delta))$$

■

Teorema 3.5. Existe $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tal que la ecuación

$$(h \circ f \circ h^{-1})(x) = e^{2\pi i\theta}x$$

no admite solución cuando $f(x) := e^{2\pi i\theta}x + \cdots + x^d$ es un polinomio mónico de grado $d \geq 2$.

Prueba. Vamos a construir un número irracional θ que posea la característica deseada. En efecto. Fijado $n_1 \in \mathbb{N}$ escogemos $n_2 > n_1$ tal que $1 \cdot 2^{n_1} < \log_2(n_2)$; luego $n_3 > n_2 > n_1$ tal que $2 \cdot 2^{n_2} < \log_2(n_3)$. Ahora, $n_4 > n_3 > n_2 > n_1$ tal que $3 \cdot 2^{n_3} < \log_2(n_4)$, $k \geq 1$. De este modo es posible hallar una sucesión creciente de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ tal que $k \cdot 2^{n_k} < \log_2(n_{k+1})$.

Tal construcción no se hecho a ciegas sino con la intención de poder aplicar la desigualdad (3.11).

Consideremos el número irracional $\theta := \sum_{k\geq 1} 1/2^{n_k}$ asociado a la sucesión definida en el parágrafo anterior; y supongamos que existe un polinomio mónico $f(x) = e^{2\pi i\theta}x + \cdots + x^d$

de grado $d \geq 2$, para el que la ecuación

$$f(x) = h^{-1}(e^{2\pi i\theta} h(x))$$

admite solución h definida en un disco $D(0, \delta)$. Entonces haciendo uso de (3.11), para todo k suficientemente grande, resulta

$$k \cdot 2^{n_k} < \log_2(n_{k+1}) < \log_2((2 + \log_2(1/\delta)) d^{2^{n_k}}) = \log_2(2 + \log_2(1/\delta)) + 2^{n_k} \log_2(d)$$

O, equivalentemente

$$2^{n_k}(k - \log_2(d)) < \log_2(2 + \log_2(1/\delta))$$

Esto es una contradicción dado que la sucesión $\{n_k\}_{k \geq 1}$ es estrictamente creciente. ∎

Capítulo 4

El Teorema unidimensional de Siegel

Sección 4.1. El Teorema de Siegel

Teorema 4.1 (de Siegel). Sea $f(x) = e^{2\pi i\theta}x + F(x)$, $F(x) = \sum_{n\geq 2} a_n x^n$, una función analítica definida en una vecindad abierta del origen de coordenadas, donde $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es un número que satisface la Condición de Siegel.

Entonces la ecuación

$$(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(y) = e^{2\pi i\theta} y \tag{4.1}$$

admite una solución analítica $\varphi(y) = y + \phi(y)$, $\phi(y) = \sum_{n\geq 1} b_n y^n$, definida en una vecindad abierta del origen de coordenadas.

El Teorema (4.1) dice, en palabras simples, que toda función analítica $f(x) = e^{2\pi i\theta}x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ definida en una vecindad abierta del origen de coordenadas, y donde $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es un número que satisface la Condición de Siegel, es localmente conjugado a su parte lineal.

La demotración del Teorema está dividida en cuatro subsecciones.

Subsección 4.1.1. Condición Necesaria

Sea $\varphi(x) = x + \phi(x)$, $\phi(x) := \sum_{n=\geq 1} b_n x^n$, una serie de potencias formal. Si asumimos que es invertible, entonces su inversa es necesariamente de la forma $\varphi^{-1}(w) = w + \ell(w)$, siendo ℓ de orden mayor o igual que dos.

Si φ solucionase la ecuación (4.1), tenemos

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi)(x) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x))) &= f(\varphi(x))+\ell(f(\varphi(x)))\\ &= e^{2\pi i\theta}\varphi(x)+F(\varphi(x)) + \ell(f(\varphi(x)))\\ &= e^{2\pi i\theta}x + e^{2\pi i\theta}\phi(x)+F(\varphi(x))+\ell(f(\varphi(x)))\\ &= e^{2\pi i\theta}x + G(x)\end{aligned}$$

donde

$$G(x) = e^{2\pi i\theta}\phi(x)+F(\varphi(x))+\ell(f(\varphi(x))) \tag{J1}$$

Lo expuesto permite afirmar que las series formales $\varphi(x)$ candidatas a ser soluciones de la ecuación (4.1), son aquellas para las cuales $G(x) = 0$.

Buscando características que nos hagan conocer algo más de la naturaleza de la solución formal φ, es que continuamos con las generalidades. Así pues

$$\begin{aligned}&(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi)(x) = e^{2\pi i\theta}x + G(x)\\ &\equiv (f\circ\varphi)(x) = \varphi(e^{2\pi i\theta}x + G(x))\\ &\equiv e^{2\pi i\theta}\varphi(x) + F(\varphi(x)) = e^{2\pi i\theta}x + G(x) + \phi(e^{2\pi i\theta}x + G(x))\\ &\equiv e^{2\pi i\theta}x + e^{2\pi i\theta}\phi(x) + F(\varphi(x)) = e^{2\pi i\theta}x + G(x) + \phi(e^{2\pi i\theta}x + G(x))\\ &\equiv G(x) = e^{2\pi i\theta}\phi(x) + F(\varphi(x)) - \phi(e^{2\pi i\theta}x + G(x))\end{aligned}$$

Sumando $F(x)$ y $\phi(e^{2\pi i\theta}x)$ en el lado derecho, y restándolos luego para no afectar la identidad, obtenemos la siguiente caracterización para la función G definida según (J1)

$$G(x) = \overbrace{F(\varphi(x)) - F(x) + \phi(e^{2\pi i\theta}x) - \phi(e^{2\pi i\theta}x + G(x))}^{\text{expresión (1)}} + \overbrace{F(x) - \phi(e^{2\pi i\theta}x) + e^{2\pi i\theta}\phi(x)}^{\text{expresión (2)}} \tag{J2}$$

Es, a esta altura, donde el intento de demostrar el Teorema de Siegel cambia de rumbo; en vez de hallar una φ que haga que G sea idénticamente nula, vamos a estudiar la naturaleza de la expresión (2).

Definición 4.1. Sea $F(x) = \sum_{n\geq 2} a_n x^n$ una función analítica en un entorno del origen de coordenadas. Nos referimos como ecuación **E** a la ecuación funcional

$$F(x) = \phi(e^{2\pi i\theta}x) - e^{2\pi i\theta}\phi(x) \tag{E}$$

Si $\phi(x) :=\sum_{n\geq 2} b_n x^n$ es una serie formal que verifica la ecuación **E**, entonces la llamaremos solución formal; y si esta fuese analítica, nos referiremos a esta como solución analítica (analítica en una vecindad del origen de coordenadas, se sobreentiende).

Un hecho que refuerza el propósito de estudiar la ecuación funcional (E) es la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi\right)(x) = e^{2\pi i\theta} x \quad &\equiv \quad f(\varphi(x)) = \varphi(e^{2\pi i\theta} x) \\
&\equiv \quad e^{2\pi i\theta}\varphi(x) + F(\varphi(x)) = e^{2\pi i\theta} x + \phi(e^{2\pi i\theta} x) \\
&\equiv \quad e^{2\pi i\theta} x + e^{2\pi i\theta}\phi(x) + F(\varphi(x)) = e^{2\pi i\theta} x + \phi(e^{2\pi i\theta} x) \\
&\equiv \quad F(\varphi(x)) = \phi(e^{2\pi i\theta} x) - e^{2\pi i\theta}\phi(x)
\end{aligned}$$

Es probable que la solución ϕ no sea tal que $G(x) = 0$, pero sí, como vamos a ver en lo que sigue, hace de $G(x)$ una función acotada, una cuya cota es suceptible de ser calculada.

Subsección 4.1.2. Estudio de la Ecuación (E)

El Teorema (4.2), enunciado más adelante, es la esencia de esta subsección. Este trata sobre la solución de la Ecuación **E**

$$F(x) = \phi(e^{2\pi i\theta} x) - e^{2\pi i\theta}\phi(x) \tag{E}$$

Las ideas expuestas en esta subsección permitiran vislumbrar la existencia de la solución formal de la ecuación (4.1). Obtendremos la solución formal después de aplicar una y otra vez el Teorema (4.2); esto se visualizará en la cadena de composiciones (4.6) y en la familia de sucesiones $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida en (4.8).

Definición 4.2. Para constantes $M > 5$ y $r > 0$ definimos seis discos abiertos concéntricos

$$D_{Mm} := \{x \in \mathbb{C} : |x| < r\,(1 - m/M)\}, \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Estos discos forman una cadena decreciente, esto es

$$D_{M5} \subset D_{M4} \subset D_{M3} \subset D_{M2} \subset D_{M1} \subset D_{M0} = D(0, r)$$

y su razón de ser es revelado en el item (b) del teorema que sigue.

Teorema 4.2. Sea $F(x) = \sum_{n\geq 2} a_n x^n$ una función analítica definida en una vecindad abierta del origen de coordenadas y θ un número irracional que satisface la condición de Siegel. Y consideremos la ecuación funcional

$$F(x) = \phi(e^{2\pi i\theta}x) - e^{2\pi i\theta}\phi(x), \tag{E}$$

donde la incognita es la serie formal $\phi(x) \colon = \sum_{n\geq 2} b_n x^n$.

Entonces la serie de potencias

$$\phi(x) = \sum_{n\geq 2} b_n x^n; \quad \text{donde} \quad b_n \colon = \frac{a_n}{e^{2\pi i n\theta} - e^{2\pi i\theta}}, \quad n \geq 2 \tag{4.2}$$

tiene radio de convergencia mayor o igual al de F; además soluciona la ecuación (E).

a) Consideremos las funciones analíticas $\varphi(x) \colon = x + \phi(x)$ (perturbación de la identidad asociada a ϕ) y $f(x) \colon = e^{2\pi i\theta}x + F(x)$. Y sean $M > 5$, $0 < \delta < 1/cM^{k+2}$ y $r > 0$ constantes tales que $|x| \leq r \Longrightarrow |F'(x)| \leq \delta$.
Entonces queda bien definida la cadena de composiciones

$$D_{M4} \xrightarrow{\varphi} D_{M3} \xrightarrow{f} D_{M2} \xrightarrow{\varphi^{-1}} D_{M1}$$

b) En referencia a las constantes dada en el el item a), la función analítica $G \colon D_{M4} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $G(x) = (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) - e^{2\pi i\theta}x$, y de orden ≥ 2, es tal que

$$x \in D_{M4} \Longrightarrow (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) = e^{2\pi i\theta}x + G(x) \tag{4.3}$$

$$x \in D_{M4} \Longrightarrow |G(x)| \leq 2c\delta^2 r M^{k+1} \tag{4.4}$$

$$|x| < r^* \Longrightarrow |G'(x)| \leq \delta^*; \quad r^* = r\,(1 - 5/M)\,,\ \delta^* = 2c\delta^2 M^{k+2} \tag{4.5}$$

Prueba. Vamos a probar, de momento, solo lo que respecta a la solución analítica. Las afirmaciones a) y b) son demostradas en el Lema (4.4).

La existencia de la solución formal se desprende de la equivalencia

$$\begin{aligned} F(x) = \phi(e^{2\pi i\theta}x) - e^{2\pi i\theta}\phi(x) \quad &\equiv \quad \sum_{n\geq 2} a_n x^n = \sum_{n\geq 2} b_n e^{2\pi i n\theta} x^n - e^{2\pi i\theta} \sum_{n\geq 2} b_n x^n \\ &\equiv \quad a_n = b_n e^{2\pi i n\theta} - e^{2\pi i\theta} b_n \\ &\equiv \quad b_n = \frac{a_n}{e^{2\pi i n\theta} - e^{2\pi i\theta}}, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Estas nos dicen que la solución formal es

$$\phi(x) = \sum_{n\geq 2} b_n x^n, \quad \text{donde} \quad b_n : = \frac{a_n}{e^{2\pi i n\theta} - e^{2\pi i\theta}}$$

Ahora demostremos que ϕ tiene radio de convergencia > 0. Esto se sigue de la implicación

$$|b_n| = |a_n| \frac{1}{|e^{2\pi i(n-1)\theta} - 1|} \leq |a_n| M (n-1)^k \Longrightarrow \sqrt[n]{|b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n|}\, \sqrt[n]{M}\, \sqrt[n]{(n-1)^k}$$

porque del hecho que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{M} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{(n-1)^k} = 1$$

resulta que $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|b_n|} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$. Este cálculo muestra ϕ tiene radio de convergencia > 0, mayor o igual que el de F. ∎

Observación 4.1. La perturbación de la identidad $x \longmapsto \varphi(x) = x + \phi(x)$, asociada a la solución ϕ de la Ecuación (E) no tiene por que ser inyectiva; no obstante, tal como lo vamos a ver en el Lema (4.3), sí lo es un dominio restrinjido. Determinar este dominio es fundamental porque en los items a) y b) del Teorema (4.2) así lo requiere.

El proceso de identificar este dominio donde se quiere que φ sea inyectiva lo constituyen los Lemas (4.1), (4.2) y (4.3).

Lema 4.1. En referencia a la solución analítica ϕ de la ecuación **E** dada en el Teorema (4.2). Para que φ sea inyectiva en una vecindad del origen de coordenadas es suficiente exista una constante $\alpha > 1$ de modo que en dicha vecindad ocurra la desiguladad $|\phi'(x)| < \alpha < 1$.

Prueba. Si x, y son tales que $x + \phi(x) = y + \phi(y)$, entonces $|x - y| = |\phi(x) - \phi(y)|$. Y como $|\phi'|$ es acotada por α, tendríamos

$$|x - y| = |\phi(x) - \phi(y)| \leq \alpha |x - y|$$

Si fuese el caso $x \neq y$, entonces de la condición $\alpha < 1$ resultaría

$$|x - y| \leq \alpha |x - y| < |x - y|$$

Esto no puede ser. Por tanto $x = y$. ∎

Lema 4.2. En referencia a la solución analítica ϕ de la ecuación **E** dada en el Teorema (4.2), si $\delta > 0$ y $r > 0$ son tales que $|x| \leq r \Longrightarrow |F'(x)| \leq \delta$, entonces

$$|\phi'(x)| \leq c\delta\Big(\frac{r}{r-|x|}\Big)^{k+1}; \quad |x| < r$$

Prueba. Dado que

$$F'(x) = \sum_{n\geq 2} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1}(n+1)a_{n+1}x^n$$

resulta que $(F')^{(n)}(0) = n!(n+1)a_{n+1}$, $n \geq 1$; así, de la fórmula integral de cauchy resulta

$$|(n+1)a_{n+1}| = \frac{|(F')^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{\|F'\|}{r^n}; \quad n \geq 1$$

Escribiendo convenientemente $M = c/k!$, para algún $c > 0$, para $x \in D(0\,,\, r)$ se tiene

$$\begin{aligned}
|\phi'(x)| &\leq \sum_{n\geq 2} |nb_n||x|^{n-1} = \sum_{n\geq 2} \frac{|na_n|}{|e^{2\pi i n\theta} - e^{2\pi i\theta}|}|x|^{n-1} = \sum_{n\geq 2} |na_n| \frac{1}{|e^{2\pi i(n-1)\theta} - 1|}|x|^{n-1} \\
&\leq \sum_{n\geq 2} \frac{\|F'\|}{r^{n-1}} \frac{c}{k!}(n-1)^k|x|^{n-1} = c\|F'\| \sum_{n\geq 2}(n-1)^k \frac{1}{k!}\Big(\frac{|x|}{r}\Big)^{n-1} \\
&= c\|F'\| \sum_{n\geq 1} n^k \frac{1}{k!}\Big(\frac{|x|}{r}\Big)^n \\
&\leq c\|F'\| \sum_{n\geq 1} n(n+1)\cdots(n+k-2)(n+k-1)\ \frac{1}{k!}\Big(\frac{|x|}{r}\Big)^n \\
&= c\|F'\| \sum_{n\geq 1} \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!}\frac{1}{k!}\Big(\frac{|x|}{r}\Big)^n = c\|F'\| \sum_{n\geq 0} \frac{(n+k)!}{n!\,k!}\Big(\frac{|x|}{r}\Big)^{n+1} \\
&\leq c\|F'\| \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k}\Big(\frac{|x|}{r}\Big)^n = c\|F'\|\Big(\frac{r}{r-|x|}\Big)^{k+1} \leq c\delta\Big(\frac{r}{r-|x|}\Big)^{k+1}
\end{aligned}$$

■

Observación 4.2. Como se quiere hallar una vecindad del origen de coordenadas y una constante $\alpha > 0$ tal que $|\phi'(x)| < \alpha < 1$, el Lema (4.2) sugiere que debemos tomar un disco donde la expresión $r/(r - |x|)$ sea acotada por una constante $M > 0$. Ahora bien, de la equivalencia

$$\frac{r}{r-|x|} < M \Longleftrightarrow |x| < r\Big(1 - \frac{1}{M}\Big), \tag{H}$$

se deduce que M debe ser una constante mayor que la unidad, y que el disco donde ocurre la acotación requerida es

$$D_{M1}: = \left\{x \in \mathbb{C} : |x| < r\left(1 - \frac{1}{M}\right)\right\}$$

Así pues, considerando que D_{M1} está contenido en $D(0,r)$, el Lema (4.2) asegura que

$$|\phi'(x)| \leq c\delta\Big(\frac{r}{r-|x|}\Big)^{k+1} \leq c\delta M^{k+1}; \quad x \in D_{M1} \tag{F}$$

Observación 4.3. Es importante notar que la desigualdad (F) ocurre en cualquier disco D_{M1}, donde $M > 1$ no depende ni de $\delta > 0$ ni de $r > 0$. Cuando forzamos a que δ dependa de $M>1$, el Lema (4.2) es reformulado como sigue.

Lema 4.3. En referencia a la solución analítica ϕ de la ecuación **E** dada en el Teorema (4.2). Sean $M > 1$, $0 < \delta < c^{-1}/M^{k+2}$ y $r > 0$ constantes tales que $x \in D[0,r] \Longrightarrow |F'(x)| \leq \delta$. Entonces

$$|\phi'(x)| \leq \frac{1}{M} < 1; \quad x \in D_{M1}: \; = \Big\{x \in \mathbb{C} : |x| < r\Big(1 - \frac{1}{M}\Big)\Big\}$$

Consecuentemente la perturbación de la identidad $\varphi(x) = x + \phi(x)$ es inyectiva en D_{M1}, en virtud del Lema (4.1).

Prueba. Por el Lema (4.2), sabemos que en el disco $D(0,r)$ sucede que

$$|\phi'(x)| \leq c\delta\Big(\frac{r}{r-|x|}\Big)^{k+1}$$

Luego, si nos restrinjimos D_{M1}, es decir si tomamos $|x| < r(1 + 1/M)$, entonces de la equivalencia (H) resulta que

$$|\phi'(x)| \leq c\delta\Big(\frac{r}{r-|x|}\Big)^{k+1} < c\delta M^{k+1} < c\frac{c^{-1}}{M^{k+2}}M^{k+1} = \frac{1}{M} < 1$$

■

Finalizamos la demostración del Teorema (4.2) con el el Lema presentado a continuación. En este probamos las desigualdades a) y b) del teorema en mención.

Lema 4.4. En referencia a la solución analítica ϕ de la ecuación **E** dada en el Teorema (4.2). Si $M > 5$, $0 < \delta < c^{-1}/M^{k+2}$ y $r > 0$ son tales que $x \in D[0,r] \Longrightarrow |F'(x)| \leq \delta$, entonces se cumple lo que se afirma en los items a) y b) del Teorema (4.2).

Prueba.

a) Probar que las funciones φ, φ^{-1} y f definen bien la cadena de composiciones

$$D_{M4} \xrightarrow{\varphi} D_{M3} \xrightarrow{f} D_{M2} \xrightarrow{\varphi^{-1}} D_{M1}$$

es lo mismo que probar que ocurren simultáneamente los contenidos

$$\varphi(D_{M1}) \supset D_{M2}; \quad D_{M2} \supset f(D_{M3}); \quad D_{M3} \supset \varphi(D_{M4})$$

Probemos el primero. Si este no se diera, entonces, necesariamente, el corte $D_{M2} \cap \partial\varphi(D_{M1})$ debería ser no vacío; es decir, existiría $x \in \partial D_{M1}$ tal que $\varphi(x) \in D_{M2} \cap \partial\varphi(D_{M1})$. Pero en este caso se tendría que

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| = |x + \phi(x)| \geq |x| - |\phi(x)| \geq |x| - \frac{1}{M}|x| &= |x|\Big(1 - \frac{1}{M}\Big) \\
&= r\Big(1 - \frac{1}{M}\Big)\Big(1 - \frac{1}{M}\Big) \\
&\geq r\Big(1 - \frac{2}{M}\Big) \\
&= \text{radio}(D_{M2})
\end{aligned}$$

Luego, $|\varphi(x)| \geq r(1 - 2/M)$; y en consecuencia tendríamos que $\varphi(x) \notin D_{M2}$. Esto contradice a lo supuesto.

Probemos ahora el segundo contenido. Si $y \in f(D_3)$, entonces existe $x \in D_3$ tal que $y = f(x)$. Luego,

$$|y| = |f(x)| = |e^{2\pi\theta i}x + F(x)| \leq |x| + |F(x)|$$

como en D_3 sucede que $|F'(x)| < \delta < 1/cM^{k+2} < 1/cM < 1/M$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\leq |x| + \frac{1}{M}|x| = |x|\Big(1 + \frac{1}{M}\Big) \\
&\leq r\Big(1 - \frac{3}{M}\Big)\Big(1 + \frac{1}{M}\Big) < r\Big(1 - \frac{2}{M}\Big)
\end{aligned}$$

De esto se desprende que $y \in D_2$.

Probemos el tercer contenido. Si $y \in \varphi(D_4)$, entonces existe $x \in D_4$ tal que $y = \varphi(x)$. Luego

$$|y| = |\varphi(x)| = |x + \phi(x)| \leq |x| + |\phi(x)|$$

pero $|\phi'(x)| < 1/M$, en consecuencia

$$\begin{aligned} &\leq |x| + \frac{1}{M}|x| = |x|\Big(1+\frac{1}{M}\Big) \\ &\leq r\Big(1-\frac{4}{M}\Big)(1+\frac{1}{M}) < r\Big(1-\frac{3}{M}\Big) \end{aligned}$$

En consecuencia $y \in D_3$.

b) En la subsección (4.1.1) vimos que a cada perturbación formal de la identidad $\varphi(y) = y + \phi(y)$, $\phi(y) = \sum_{n\geq 2} b_n y^n$, hay asociada una serie formal G, caracterizada por (J2), tal que

$$(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) = e^{2\pi i\theta}x + G(x)$$

En particular, podemos tomar aquella perturbación de la identidad que se obtiene de la solución de la ecuación (E), y por G a la función analítica que proviene de esta.

Siendo esto así, de (J2) resulta que

$$G(x) = \text{expresion (1)} + 0 = F(\varphi(x)) - F(x) + \phi(e^{2\pi i\theta}x) - \phi(e^{2\pi i\theta}x + G(x))$$

Esta función G, así hallada, es analítica en una vecindad del origen de coordenadas, puesto que las funciones que aparecen en su definición lo son; y está definida en D_{M4}, debido a la cadena de descomposiciones dada en el item (a)). Esto prueba la primera implicación.

Demostremos que G verifica la implicación (4.4). Tenemos

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leq |\phi(e^{2\pi i\theta}x) - \phi(e^{2\pi i\theta}x + G(x))| + |F(\varphi(x)) - F(x)| \\ &\leq |e^{2\pi i\theta}x + G(x) - e^{2\pi i\theta}x| \sup_{x\in D_4} |\phi'(x)| + |\varphi(x) - x| \sup_{x\in D_3} |F'(x)| \\ &= |G(x)| \sup_{x\in D_4} |\phi'(x)| + |\phi(x)| \sup_{x\in D_3} |F'(x)| \\ &\leq |G(x)|\frac{1}{M} + |\phi(x)|\delta \end{aligned}$$

como en D_{M1} ocurre que $|\phi'(x)| \leq c\delta M^{k+1}$, resulta que $|\phi(x)|/|x| \leq c\delta M^{k+1}$, por ende

$$\leq |G(x)|\frac{1}{5} + c\delta M^{k+1}|x|\delta \leq |G(x)|\frac{1}{5} + c\delta^2 M^{k+1} r$$

De esto resulta que

$$|G(x)| \leq \frac{5}{4}c\delta^2 rM^{k+1} \leq 2c\delta^2 rM^{k+1}; \quad x \in D_4$$

Probemos ahora la implicación (4.5). Dado arbitrariamente $x \in D_{M5}$ consideremos el disco abierto $D(x, r/M)$ contenido en D_{M4}. La inclusión se da porque

$$y \in D(x, r/M) \Longrightarrow |y| \leq |y-x|+|x| < \frac{r}{M}+r\Big(1-\frac{5}{M}\Big) = r\Big(1-\frac{4}{M}\Big) = \text{radio}(D_{M4})$$

Entonces, de la Representación Local de Cauchy se tiene

$$G'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(x,r/M)} \frac{G(z)}{(z-x)^2}dz$$

Luego

$$\begin{aligned}
|G'(x)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\partial D(x,r/M)} \frac{G(z)}{(z-x)^2}dz\Big| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \times \max_{z\in\partial D(x,r/M)} \frac{|G(z)|}{|z-x|^2} \times \ell(\partial D(x, r/M)) \quad \text{(Proposición (1.5))} \\
&= \frac{1}{2\pi} \times \max_{z\in\partial D(x,r/M)} \frac{|G(z)|}{(rM^{-1})^2} \times 2\pi\frac{r}{M} \\
&= \frac{1}{2\pi} \times \max_{z\in\partial D(x,r/M)} |G(z)| \times \frac{1}{(rM^{-1})^2} \times 2\pi\frac{r}{M} \\
&= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \times 2c\delta^2\cancel{r}M^{k+1} \times \frac{M^{\cancel{2}}}{\cancel{r^2}} \times \cancel{2\pi}\frac{\cancel{r}}{\cancel{M}} \quad \text{(Implicación (4.4))} \\
&= 2c\delta^2 M^{k+2}
\end{aligned}$$

■

Subsección 4.1.3. Obtención de la solución Formal de la Ecuación (4.1)

En esta subsección presentaremos una solución formal de la ecuación (4.1). Para tener una visión panorámica de lo que vamos a exponer, nos permitimos adelantar que esta solución formal es de la forma $\varphi(x) :\ = x + \phi(x)$, que tal como lo vamos a ver en las líneas que siguen, se obtiene como el limite de una sucesión de funciones $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ver (4.8)), cuya existencia quedará garantizada cuando apliquemos el Teorema (4.2) a una familia de ecuaciones funcionales

$$F_n(x) = \phi_n(e^{2\pi i\theta}x) - e^{2\pi i\theta}\phi_n(x); \quad n \geq 0$$

las cuales obtendremos recursivamente, conforme pongamos de relieve las etapas (0), (1)..., que constituyen esta parte del proceso.

Antes de prosegir permitásenos reescribir convenientemente las funciones que aparecen en la hipótesis del Teorema de Siegel como $f_0(x):=f(x):=e^{2\pi i\theta}x+F_0(x)$ y $F_0(x):=F(x):=\sum_{n\geq 2}a_nx^n$.

Cada una de las etapas que vamos a detallar a continuación es en sí una aplicación directa del Teorema (4.2); en cada una de estas aparece una ecuación funcional (E), su solución ϕ y la perturbación de la identidad φ que se le asocia; la función f, las constantes $M>5$, $\delta>0$ y $r>0$, y, finalmente, la función G.

Etapa (0): Sea la ecuación funcional

$$F_0(x)=\phi_0(e^{2\pi i\theta}x)-e^{2\pi i\theta}\phi_0(x)$$

Por el Teorema (4.2) hay asociada a esta ecuación una solución ϕ_0, la perturbación de la identidad $\varphi_0(x)=x+\phi_0(x)$ y la función $f_0(x):=e^{2\pi i\theta}x+F_0(x)$.

Si tomamos una constante arbitraria $M_0>5$, $0<\delta_0<1/cM_0^{k+2}$ y $r_0>0$ tales que $|x|<r_0\Longrightarrow|F_0'(x)|<\delta_0$, entonces queda bien definida la cadena

$$D_{M_04}\xrightarrow{\varphi_0}D_{M_03}\xrightarrow{f_0}D_{M_02}\xrightarrow{\varphi_0^{-1}}D_{M_01}$$

Y existe, además, una función analítica $F_1\colon D_{M_0,4}\longrightarrow\mathbb{C}$, de orden ≥ 2, tal que

$$\begin{aligned}
x\in D_{M_04}&\Longrightarrow(\varphi_0^{-1}\circ f_0\circ\varphi_0)(x)=e^{2\pi i\theta}x+F_1(x)\\
x\in D_{M_04}&\Longrightarrow|F_1(x)|\leq 2c\delta_0^2r_0M_0^{k+1}\\
|x|<r_1&\Longrightarrow|F_1'(x)|\leq\delta_1;\quad\text{donde } r_1:=r_0\,(1-5/M_0)\ \text{ y } \delta_1:=2c\delta_0^2M_0^{k+2}\qquad(*)
\end{aligned}$$

Etapa (1): Con la función analítica F_1 hallada en la etapa (0) formulamos la ecuación funcional

$$F_1(x)=\phi_1(e^{2\pi i\theta}x)-e^{2\pi i\theta}\phi_1(x)$$

Hacemos uso nuevamente del Teorema (4.2). Por este hay asociada, a esta ecuación, una solución ϕ_1, su respectiva perturbación de la identidad $\varphi_1(x)=x+\phi_1(x)$, y $f_1(x):=e^{2\pi i\theta}x+F_1(x)$.

Asumamos que fuese posible tomar una constante $M_1 > 5$ tal que $\delta_1 < 1/cM_1^{k+2}$. Entonces, de poner esto en conjunción con $(*)$ de la etapa (0), es decir, con el hecho que $|x| < r_1 \Longrightarrow |F_1'(x)| \leq \delta_1$, resulta la buena definición de la cadena

$$D_{M_1 4} \xrightarrow{\varphi_1} D_{M_1 3} \xrightarrow{f_1\ ,} D_{M_1 2} \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} D_{M_1 1}$$

Y existe una función analítica $F_2\colon D_{M_1 4} \longrightarrow \mathbb{C}$, de orden ≥ 2, tal que

$$x \in D_{M_1 4} \Longrightarrow (\varphi_1^{-1} \circ f_1 \circ \varphi_1)(x) = e^{2\pi i\theta}x + F_2(x)$$

$$x \in D_{M_1 4} \Longrightarrow |F_2(x)| \leq 2c\delta_1^2 r_1 M_1^{k+1}$$

$$|x| < r_2 \Longrightarrow |F_2'(x)| \leq \delta_2;\ \text{donde } r_2\colon = r_1\,(1 - 5/M_1)\ \text{ y } \delta_2\colon = 2c\delta_1^2 M_1^{k+2}$$

Etapa (n) (Hipótesis Inductiva): Sea F_n una función analítica de orden mayor o igual que 2, definida en una vecindad del origen de coordenadas, para la que consideramos la siguiente ecuación funcional

$$F_n(x) = \phi_n(e^{2\pi i\theta}x) - e^{2\pi i\theta}\phi_n(x)$$

Asumamos que esta admite solución ϕ_n. Y definamos la perturbación de la identidad $\varphi_n(y) = y + \phi(y)$ y $f_n(x)\colon = e^{2\pi i\theta}x + F_n(x)$. Y asumamos, también, que existen constantes $M_n > 5$, $\delta_n < 1/cM_n^{k+2}$ y $r_n > 0$ tales que

$$|x| < r_n \Longrightarrow |F_n'(x)| < \delta_n$$

Entonces, por el Teorema (4.2), tiene sentido la cadena de composiciones

$$D_{M_n 4} \xrightarrow{\varphi_n} D_{M_n 3} \xrightarrow{f_n\ ,} D_{M_n 2} \xrightarrow{\varphi_n^{-1}} D_{M_n 1}$$

Y existe una función $F_{n+1}\colon D_{M_n 4} \longrightarrow \mathbb{C}$, de orden ≥ 2, caracterizada por las implicaciones

$$x \in D_{M_n 4} \Longrightarrow (\varphi_n^{-1} \circ f_n \circ \varphi_n)(x) = e^{2\pi i\theta}x + F_{n+1}(x)$$

$$x \in D_{M_n 4} \Longrightarrow |F_{n+1}(x)| \leq 2c\delta_n^2 r_n M_n^{k+1}$$

$$|x| < r_{n+1} \Longrightarrow |F_{n+1}'(x)| \leq \delta_{n+1};\quad r_{n+1}\colon = r_n(1-5/M_n)\ \wedge\ \delta_{n+1}\colon = 2c\delta_n^2 M_n^{k+2} \quad (*)$$

Etapa (n+1): Siguiendo la idea la etapa (1), para la función analítica F_{n+1} hallada en la etapa (n) consideremos la ecuación funcional

$$F_{n+1}(x) = \phi_{n+1}(e^{2\pi i\theta}x) - e^{2\pi i\theta}\phi_{n+1}(x)$$

Sean, ϕ_{n+1} su solución y $\varphi_{n+1}(y) = y + \phi_{n+1}(y)$ la perturbación de la identidad asociada, y $f_{n+1}(x) \colon = e^{2\pi i\theta}x + F_{n+1}(x)$.

Asumamos que fuese posible tomar una constante $M_{n+1} > 5$ tal que $\delta_{n+1} < 1/cM_{n+1}^{k+2}$. Entonces, de poner esto en conjunción con la implicación $(*)$ de la etapa (n), es decir con el hecho que $|x| < r_{n+1} \Longrightarrow |F'_{n+1}(x)| \leq \delta_{n+1}$, resulta la buena definición de la cadena

$$D_{M_{n+1}4} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} D_{M_{n+1}3} \xrightarrow{f_{n+1}} D_{M_{n+1}2} \xrightarrow{\varphi_{n+1}^{-1}} D_{M_{n+1}1}$$

Y existe una función analítica $F_{n+2} \colon D_{M_{n+1}4} \longrightarrow \mathbb{C}$, de orden ≥ 2, tal que

$$x \in D_{M_{n+1}4} \Longrightarrow (\varphi_{n+1}^{-1} \circ f_{n+1} \circ \varphi_{n+1})(x) = e^{2\pi i\theta}x + F_{n+2}(x)$$
$$x \in D_{M_{n+1}4} \Longrightarrow |F_{n+2}(x)| \leq 2c\delta_{n+1}^2 r_{n+1} M_{n+1}^{k+1}$$
$$|x| < r_{n+2} \Longrightarrow |F'_{n+2}(x)| \leq \delta_{n+2};\ r_{n+2} \colon = r_{n+1}(1 - 5/M_{n+1}) \wedge \delta_{n+2} \colon = 2c\delta_{n+1}^2 M_{n+1}^{k+2}$$

Yuxtaponiendo las cadenas de composiciones halladas en las etapas precedentes, tenemos

$$V \cdots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots \longrightarrow D_{M_n 4} \xrightarrow{\varphi_n} D_{M_n 3} \xrightarrow{f_n} D_{M_n 2} \xrightarrow{\varphi_n^{-1}} D_{M_n 1} \cdots \longrightarrow \cdots D_{M_0 4} \xrightarrow{\varphi_0} D_{M_0 3} \xrightarrow{f_0} D_{M_0 2} \xrightarrow{\varphi_0^{-1}} D_{M_0 1} \tag{4.6}$$

donde $V \colon = \cap_{n=0}^{\infty} D_{M_n 5}$. Y la sucesión

$$\{\Psi_n \colon V \longrightarrow D_{M_0 3}\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{4.7}$$

de funciones invertibles, cuyo limite φ queremos que solucione la ecuación (4.1), la definimos como

$$\Psi_n \colon = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n \colon V \longrightarrow D_{M_0 3}, \quad n \geq 0 \tag{4.8}$$

Esta sucesión es tal que

$$(\Psi_n^{-1} \circ f \circ \Psi_n)(x) = e^{2\pi i\theta}x + F_{n+1}(x) \tag{4.9}$$

Por ejemplo, para Ψ_0 y Ψ_1 tenemos, repectivamente

$$(\Psi_0^{-1} \circ f \circ \Psi_0)(x) = (\varphi_0^{-1} \circ f \circ \varphi_0^{-1})(x) = e^{2\pi i\theta}x + F_1(x); \quad \text{y}$$
$$(\Psi_1^{-1} \circ f \circ \Psi_1)(x) = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0^{-1} \circ f \circ \varphi_0 \circ \varphi_1)(x) = (\varphi_1^{-1} \circ f_1 \circ \varphi_1)(x) = e^{2\pi i\theta}x + F_2(x)$$

Asumamos, con la intención de hacernos de una idea global de lo que se quiere, que la sucesión (4.7) posea una subsucesión $\{\Psi_{n_k}\colon V \longrightarrow D_{M_0 3}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a una función $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$; y que la sucesión de inversas

$$\{\Psi_{n_k}^{-1}\colon \text{dominio adecuado} \longrightarrow V\}_{k\in\mathbb{N}}$$

converja a $\varphi^{-1}\colon$ dominio adecuado $\longrightarrow V$.

Si a lo supuesto anteriormente añadimos este otro: $F_{n+1} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces despúes de tomar límite en la identidad (4.9) tendríamos

$$(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) = e^{2\pi i\theta}x$$

Esto es exactamente lo que buscábamos, una solución formal de la ecuación (4.1).

Para que todo los supuestos sean una posibilidad real, hay que evitar que el dominio $V:=\cap_{n=0}^{\infty} D_{M_n 5}$ se reduzca al origen de coordenadas. Evitarlo es fundamental. Evitar esto pasa por controlar, naturalmente, el radio del disco $D_{M_n 5}$, determinado en la etapa (n). Así pues, debemos garantizar que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \text{radio del disco } D_{M_n 5} := \lim_{n\longrightarrow\infty} r_n\Big(1-\frac{5}{M_n}\Big) \neq 0$$

Para hacer que este limite sea diferente de cero debemos controlar las constantes $r_n > 0$ y $M_n > 5, n \geq 0$.

Si damos una mirada retrospectiva a lo hecho en la etapa $n \geq 1$, nos daremos cuenta que en ninguna línea se garantiza la existencia de M_n, sino todo lo contrario, esta se asume. En la subsección (4.1.4) dilucidamos este punto.

Subsección 4.1.4. Finalización de la prueba del Teorema de Siegel

Tal como lo mencionamos en la subsección anterior, debemos definir $M_n > 0$ y $r_n > 0$, $n \geq 0$, de modo tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} r_n\Big(1-\frac{5}{M_n}\Big) > 0 \quad \wedge \quad r_{n+1} := r_n\Big(1-\frac{5}{M_n}\Big),$$

La relación entre r_{n+1} y r_n es fundamental porque es el vínculo entre las etapas (n) y (n+1).

Con respecto a los δ_n sabemos, de las etapas antes expuestas, que su definición es inductiva; más precisamente, $\delta_{n+1}: = 2c\delta_n^2 M_n^{k+2}$, $n \geq 0$. Esto nos lleva a que en la etapa (0) debamos escoger δ_0 de modo que $\delta_n < 1/cM_n^{k+2}$, cualquiera que sea $n \geq 0$.

En virtud de lo expuesto, para cada $n \geq 0$ definimos

$$M_n: = 10(1 + 2^n) \tag{4.10}$$

Para le elección de δ_0 es preciso observar que cada constante M_n, $n \geq 1$, es tal que

$$\frac{1}{c}\frac{1}{M_n^{k+2}} = \frac{1}{c}\frac{1}{10^{k+2}}\frac{1}{(1+2^n)^{k+2}} > \frac{1}{c}\frac{1}{10^{k+2}}\frac{1}{(2^{n+1})^{k+2}} = \frac{1}{c}\frac{1}{10^{k+2}}\frac{1}{2^{k+2}}\Big(\frac{1}{2^{k+2}}\Big)^n$$

Entonces, si $A > 0$, $B > 0$ y $\delta_0 > 0$ fueran elegido de modo tal que

$$2^{k+2}AB\delta_0 < 1 \wedge \delta_0 < \frac{1}{c}\frac{1}{10^{k+2}}\frac{1}{2^{k+2}}\frac{1}{2^{k+2}}\frac{1}{A}\frac{1}{B} < 1, \tag{4.11}$$

resultaría

$$\frac{1}{c}\frac{1}{M_n^{k+2}} > \frac{1}{c}\frac{1}{10^{k+2}}\frac{1}{2^{k+2}}\Big(\frac{1}{2^{k+2}}\Big)^n \geq 2^{k+2}AB\delta_0\Big(\frac{1}{2^{k+2}}\Big)^n \geq (2^{k+2}AB\delta_0)^n\Big(\frac{1}{2^{k+2}}\Big)^n = (AB\delta_0)^n$$

Proposición 4.1. Existen constantes $A > 1$, $B > 1$ de modo que si $\delta_0 > 0$ es elegido según (4.11), entonces todo $n \geq 1$ es tal que

$$1/cM_n^{k+2} >_4 (AB\delta_0)^n >_3 (AB\delta_0)^{2^n} \geq_2 AB^{n+1}\delta_n >_1 \delta_n$$

Prueba. La desigualdad $>_1$ es porque A y B son mayores que la unidad. La desigualdad $>_3$ se da porque $AB\delta_0 < 1$ (esto se deduce del hecho que $2^{k+2}AB\delta_0 < 1$). Lo que atañe a la desigualdad $>_4$ ya fue visto en las líneas previas al enunciado de la proposición. Así pues, solo queda por demostrar la desigualdad $\geq_2$.

Para $n = 1$ deberíamos tener

$$AB^2\delta_1 \leq (AB\delta_0)^2 \quad \equiv \quad AB^2 2c\delta_0^2(10(1+2^0))^{k+2} \leq (AB\delta_0)^2 \quad \equiv \quad A \geq 2c20^{k+2}$$

Esta equivalencia hace que tomemos por $A > \max\{1, 2c20^{k+2}\}$.

Para deducir el valor de B asumamos la validez de la desigualdad para un $n \geq 1$ (Hipótesis Inductiva), y hallemos condiciones sobre de modo tal que $(AB\delta_0)^{2^{n+1}} \geq AB^{n+2}\delta_{n+1}$. Veamos

$$AB^{n+2}\delta_{n+1} = AB^{n+1}B2c\delta_n^2 M_n^{k+2} = (AB^{n+1}\delta_n)\,(B2c\delta_n(10(1+2^n))^{k+2})$$

Tomamos entonces un número B mayor que uno y tal que

$$\cancel{B}2c\cancel{\delta_n}(10(1+2^n))^{k+2} < AB^{n\cancel{+1}}\cancel{\delta_n} \equiv 2c(10(1+2^n))^{k+2} < AB^n \equiv \frac{2c}{A}\Big(\frac{1+2^n}{2}\Big)^{k+2} < B^n,$$

Bajo tales condiciones tenemos $AB^{n+2}\delta_{n+1} \leq (AB^{n+1}\delta_n)(AB^{n+1}\delta_n) \leq (AB\delta_0)^{2^{n+1}}$

donde la desigualdad del extremo derecho es por la hipótesis inductiva. ∎

Definición 4.3. En referencia al número δ_0 seleccionado en (4.11), sea r_0 aquel número positivo que hace que se de la implicancia $|x| < r_0 \Longrightarrow |F'(x)| < \delta_0$. Y para $n \geq 1$, definimos

$$r_n : = \frac{r_0}{2}\Big(1 + \frac{1}{2^n}\Big) \tag{4.12}$$

Observación 4.4. En virtud de la definición anterior se tiene,

$$\forall\, n \geq 0 \colon \frac{r_0}{2} < r_n\Big(1 - \frac{5}{M_n}\Big)$$

y también que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n\Big(1 - \frac{5}{M_n}\Big) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{r_0}{2}\Big(1 + \frac{1}{2^n}\Big)\Big(1 - \frac{5}{10(1+2^n)}\Big) = \frac{r_0}{2}$$

Esto se traduce diciendo que el radio de D_{M_n5} decae hasta $r_0/2$ a medida que $n \longrightarrow +\infty$. De este modo queda garantizado que

$$V : = \cap_{n=1}^{\infty} D_{M_n5} = D(0, r_0/2) \neq \{0\}$$

Si bien es cierto que la definición adecuada de las constantes M_n, δ_0, r_0 y r_n hace que todo, hasta ahora, se acomode a lo planeado, no está demás preguntarse por qué estas son definidas así. La razón es simple, todo parte del hecho que, de antemano, se requiere que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (\text{radio de } D_{M_n5}) = r_0/2$$

Este requerimiento es la razón por la que r_n se define como tal en (4.10); y este conlleva a sospechar que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} M_n = +\infty$, necesariamente, pero no a que M_n sea definido según (4.10). Aparentemente el requerimiento $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\text{radio de } D_{M_n5}) = r_0/2$ no lo justifica, pero no, sino todo lo contrario, pues

$$\begin{aligned} r_n\Big(1 - \frac{5}{M_n}\Big) \text{ decae hasta } \frac{r_0}{2} &\Longrightarrow \frac{r_0}{2} < r_n\Big(1 - \frac{5}{M_n}\Big) = \frac{r_0}{2}\Big(1 + \frac{1}{2^n}\Big)\Big(1 - \frac{5}{M_n}\Big) \\ &\Longleftrightarrow \frac{5}{M_n}\Big(1 + \frac{1}{2^n}\Big) < \frac{1}{2^n} \Longleftrightarrow 5\Big(1 + 2^n\Big) < M_n \end{aligned}$$

Proposición 4.2. En referencia a, las constantes M_n definidas en (4.10), al número δ_0 elegido en la Proposición (4.1), y al radio r_n, $n \geq 0$, dado en la definición (4.3), se cumple

a) $\forall\, n \geq 0\colon M_n > 5$.
b) $\forall\, n \geq 0\colon r_{n+1} = r_n(1 - 5/M_n)$.
c) $\forall\, n \geq 0\colon \delta_n < 1/cM_n^{k+2}$
d) $\operatorname{int} \bigcap_{n=0}^{\infty} D_{M_n 5} = D(0, r_0/2)$
e) $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$, cualquiera que sea $x \in D(0, r_0/2)$.
f) La sucesión de funciones $\{\Psi_n\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow D_{M_0 3}\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\{\Psi_{n_k}\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow D_{M_0 3}\}$ que converge uniformemente en compactos de $D(0, r_0/2)$ a una función $\varphi\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow D_{M_0 3}$.

   Existe una vecindad abierta $U \subset D(0, r_0/2)$ del origen de coordenadas que hace que la restricción $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ sea un biholomorfismo. Además,
   (a) La sucesión $\{\Psi_{n_k}^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow U\}$ converge puntualmente a $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow U$.
   (b) La función $\varphi\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow D_{M_0 3}$ soluciona la ecuación (4.1).

Prueba.

a) Se desprende de su misma definición.
b) La prueba consiste en un cálculo inmediato.
c) Ya fue visto en la proposición (4.1).
d) Ya fue visto en la observación (4.4).
e) Sea $x \in D(0; r_0/2)$. De la etapa (n) se sabe que

$$|F_{n+1}(x)| \leq 2c\delta_n^2 r_n M_n^{k+1}$$

   Luego, como $\delta_n < 1/cM_n^{k+2} < 1$, resulta

$$|F_{n+1}(x)| \leq 2c\delta_n^2 r_n M_n^{k+1} < 2c\delta_n r_n M_n^{k+1} < 2c\frac{1}{c}\frac{1}{M_n^{k+2}} r_n M_n^{k+1} = 2\frac{r_n}{M_n} = 2\frac{\frac{r_0}{2}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{10(1+2^n)}$$

   De esto se sigue que $\lim_{n\longrightarrow 0} F_{n+1}(x) = 0$.
f) La sucesión de funciones $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada porque cada Ψ_n tiene rango contenido en $D_{M_0 3}$; la cadena (4.6) asegura este hecho. Entonces, por el Teorema (1.9) esta es una familia normal, es decir posee una subscuesión

$$\{\Psi_{n_k}\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow D_{M_0 3}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

que converge uniformemente en compactos de $D(0, r_0/2)$ a una función $\varphi\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow D_{M_0 3}$.

Demostremos que φ es un biholomorfismo entre vecindades abiertas del origen de coordenadas. Veamos. Por el Teorema (1.8), $\varphi\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow D_{M_0 3}$ es holomorfa y $\{\Psi'_{n_k}\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos de $D(0, r_0/2)$ a $\varphi'\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow \mathbb{C}$, por el mismo teorema. Esta convergencia asegura que $\lim_{k\longrightarrow\infty} \Psi'_{n_k}(0) = \varphi'(0)$. Y como

$$\Psi_{n_k} \colon = \varphi_{n_k} \circ \varphi_{n_{k-1}} \circ \cdots \circ \varphi_0$$

y $\varphi_{n_i}(x)\colon = x + \phi_{n_i}(x)$, donde ϕ_{n_i} es de orden mayor o igual a 2, tenemos que $\Psi'_{n_k}(0) = 1$. En consecuencia

$$\varphi'(0) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \Psi'_{n_k}(0) = 1$$

Este último hecho asegura que $\varphi\colon D(0, r_0/2) \longrightarrow D_{M_0 3}$ es, necesariamente, una perturbación de la identidad.

De otro lado. El Teorema (1.7) garantiza, debido a que $\varphi'(0) \neq 0$, la existencia de un entorno abierto $U \subset D(0, r_0/2)$ del origen de coordenadas para el cual $\varphi(U) \subset D_{M_0 3}$ resulta ser un conjunto abierto; también que $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U)$ es un biholomorfismo.
Demostremos ahora que $\{\Psi^{-1}_{n_k}\colon \varphi(U) \longrightarrow U\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow U$.

Sea $y_0 \in \varphi(U)$, fijo y arbitrario, y hagamos $x_0 = \varphi^{-1}(y_0)$; y sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $D[y_0, \varepsilon_0] \subset \varphi(U)$. De aplicar la Proposición (1.6) a cada una de las funciones Ψ_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, resulta

$$\Psi^{-1}_{n_k}(y_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Psi^{-1}_{n_k}(D[y_0,\varepsilon_0])} \frac{x\Psi'_{n_k}(x)}{\Psi_{n_k}(x) - y_0}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\varphi^{-1}(D[y_0,\varepsilon_0])} \frac{x\Psi'_{n_k}(x)}{\Psi_{n_k}(x) - y_0}dx$$

donde la segunda igualdad se debe a que $\gamma^*_k\colon = \partial\Psi^{-1}_{n_k}(D[y_0, \varepsilon])$ es una curva homotópica a $\gamma^*\colon = \partial\varphi^{-1}(D[y_0, \varepsilon_0])$.
Dado que las restricciones $\Psi_{n_k}\colon = \Psi_{n_k}|_U$ convergen uniformemente en compactos de U a $\varphi\colon = \varphi|_U$; idem para $\Psi'_{n_k}\colon = \Psi'_{n_k}|_U$ con respecto a $\varphi'\colon = \varphi'|_U$, para la curva compacta γ^* tenemos que

(a) $\Psi_{n_k}|_{\gamma^*}$ converge uniformemente a $\varphi|_{\gamma^*}$. Además

$$\exists\, D[y_0, c] \subset D(y_0, \varepsilon_0) \;\wedge\; \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, k \geq k_0 \;\wedge\; \forall\, x \in \gamma^* \colon \Psi_{n_k}(x) \notin D(y_0, c)$$

De esto se infiere que la sucesión $\left.\frac{1}{\Psi_{n_k} - y_0}\right|_{\gamma^*}$ es uniformemente acotada. Luego, del Teorema (1.2-b) resulta

$$\left.\frac{1}{\Psi_{n_k} - y_0}\right|_{\gamma^*} \xrightarrow{\text{conv. unif}} \left.\frac{1}{\varphi - y_0}\right|_{\gamma^*}$$

(b) La sucesión $\{x\Psi'_{n_k}|_{\gamma^*}\}$ converge uniformemente a $x\varphi'|_{\gamma^*}$.

Entonces del Teorema (1.2-c), resulta que

$$\left.\frac{x\Psi'_{n_k}}{\Psi_{n_k} - y_0}\right|_{\gamma^*} \xrightarrow{\text{conv. unif}} \left.\frac{x\varphi'}{\varphi - y_0}\right|_{\gamma^*}$$

En consecuencia, del Teorema (1.4) se tiene

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \Psi_{n_k}^{-1}(y_0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_\gamma \frac{x\Psi'_{n_k}(x)}{\Psi_{n_k}(x) - y_0} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{x\ \varphi'(x)}{\varphi(x) - y_0} dx = \varphi^{-1}(y_0)$$

La última igualdad se debe al Lema (1.6). De este modo finaliza la demostración del Teorema de Siegel.

$\blacksquare$

Capítulo 5

El Teorema unidimensional de Brjuno

Sección 5.1. El Teorema de Brjuno.

Teorema 5.1 (Teorema de Brjuno)**.** Sea $F(x) := e^{2\pi i\theta}x + xf(x)$, $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$, una función analítica en el origen de coordenadas, donde $\theta \in \mathbb{R}$ es un número irracional que satisface la Condición de Brjuno. Entonces existe un biholomorfismo $\varphi(y) := y + yh(y)$, con $h(y) := \sum_{n=1}^{\infty} h_n y^n$, definido en una vecindad del origen de coordenadas, que conjuga F con $y \longmapsto e^{2\pi i\theta}y$, es decir

$$\left(\varphi^{-1} \circ F \circ \varphi\right)(y) = e^{2\pi i\theta}y \tag{5.1}$$

Ya en la primera sección el Capítulo 03, más precisamente en el la Proposición (2.3), presentamos la solución formal $\varphi(y) = y + yh(y)$, $h(y) = \sum_{n\geq 1} h_n y^n$, de la ecuación (5.1) dada en el enunciado del Teorema de Brjuno. Falta demostrar, pues, la analiticididad de esta en una vecindad del origen de coordenadas.

Naturalmente, la convergencia de $\varphi(y) = y + y\sum_{n\geq 1} h_n y^n$ depende, únicamente, de la convergencia de la serie formal $h(y) = \sum_{n\geq 1} h_n y^n$; y para lograr esto vamos a mayorar h por una serie de potencias analítica en una vecindad del origen de coordenadas.

Para tener una visión global de la ruta a seguir, permítasenos decir que vamos construir una cadena de mayoramientos

$$h(y) \prec_{\mathbf{0}} \overline{|h|}(y) \prec_{\mathbf{1}} \sum_{n=1} \frac{1}{4\omega(n)}\{\ \}_n\, y^n \prec_{\mathbf{2}} \sum_{n=1} \sigma_n \delta_n\, y^n \prec_{\mathbf{3}} \sum_{n=1} c_4^n \delta_n\, y^n \prec_{\mathbf{4}} \sum_{n=1} c_4^n c_5^n\, y^n \tag{5.2}$$

Estos cuatro mayoramientos, excepto el primero, por ser inmediato, serán tratados en las subsección (5.2.1), (5.2.2), (5.2.3) y (5.2.4), respectivamente.

Con respecto a los símbolos que aparecen en esta cadena no está demás indicar que, $\omega(n) := \min\{|n\theta - m| : m \in \mathbb{Z}\}$ es lo definido en (1.9), $\{\ \}_n$ denota al coeficiente de la serie producto

$$y \longmapsto (1 + \overline{|h|}) \sum_{n=1} \frac{c_1}{c_2^n}(y + y\overline{|h|})^n$$

Que $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones definidas en la subsección (5.2.2); y finalmente, c_4 y c_5 son cosntantes positivas halladas en las subsecciones (5.2.3) y (5.2.4), respectivamente.

Subsección 5.1.1. Mayoramiento $\prec_1$

La Proposición (1.10) dice que si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ es analítica en una vecindad del origen de coordenadas, entonces existen constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que en el disco abierto $D(0, c_2)$ sudece el mayoramiento

$$f \prec \sum_{n\geq 1} \frac{c_1}{c_2^n} y^n$$

Este hecho lo vamos a usar en el siguiente lema.

Lema 5.1. En referencia a la solución formal $\varphi(y) = y + yh(y)$ de la ecuación (5.1), se tiene

$$\overline{|h|}(y) \prec \sum_{n=1} \frac{\{\ \}_n}{4\omega(n)}\, y^n \tag{5.3}$$

donde $\{\ \}_n$, $n \geq 1$, denota al coeficiente de la serie producto

$$y \longmapsto (1 + \overline{|h|}) \sum_{n=1} \frac{c_1}{c_2^n}(y + y\overline{|h|})^n \tag{5.4}$$

Prueba. De la Proposición (1.4) resulta

$$(1 + h) \cdot (f \circ \varphi) \prec (1 + \overline{|h|}) \sum |f_n|(y + y\overline{|h|})^n$$

Y de la proposicion (1.10) se sabe del mayoramiento $|f_n| \leq c_1/c_2^n$, $n \geq 1$; por ende

$$\prec (1 + \overline{|h|}) \sum \frac{c_1}{c_2^n}(y + y\overline{|h|})^n$$

Esto significa que

$$|\{(1 + h) \cdot (f \circ \varphi)\}_n| \leq \{\ \}_n$$

De otro lado, de (2.11) tenemos se tiene

$$|h_n| = \left|\frac{e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta n}-1}\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n\right| = \frac{1}{|e^{2\pi i\theta n}-1|}|\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n|$$

haciendo uso de la Proposición (1.8)

$$\leq \frac{1}{4\omega(n)}|\{(1+h)\cdot(f\circ\varphi)\}_n| \leq \frac{\{\ \}_n}{4\omega(n)}$$

De este modo finaliza la prueba de (5.3). ■

Subsección 5.1.2. Mayoramiento $\prec_2$

Para este propósito debemos conocer la naturaleza de los coeficientes $g_n := \{\ \}_n/4\omega(n)$. La siguiente proposición trata este punto.

Proposición 5.1. En referencia a la solución formal $\varphi(y) = y + h(y)$ de la ecuación (5.1) dada en el enunciado del Teorema de Brjuno. La serie formal

$$\sum_{n=1}\{\ \}_n y^n := (1+\overline{|h|})\sum_{n=1}\frac{c_1}{c_2^n}(y + y\overline{|h|})^n \tag{5.5}$$

es de coeficientes $\{\ \}_1 = c_1/c_2$ y los demás $\{\ \}_n$, $n \geq 2$ dependen, únicamente, de las constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, y de los $|h_m|$ con $m < n$.

Prueba. La técnica de la prueba es exactamente igual a la empleada en la Proposición (2.2). Una revisión a la prueba nos hace caer en la cuenta que

$$\begin{aligned}
\{\ \}_1 &= \frac{c_1}{c_2}, \\
\{\ \}_2 &= 2\frac{c_1}{c_2}|h_1| + \frac{c_1}{c_2^2}, \\
\{\ \}_3 &= 3\frac{c_1}{c_2^2}|h_1| + \frac{c_1}{c_2}|h_1|^2 + 2\frac{c_1}{c_2}|h_2| + \frac{c_1}{c_2^3}
\end{aligned}$$

En general, para $n \geq 2$ se tiene que

$$\{\ \}_n = \text{depende únicamente de las constantes } c_1 > 0,\ c_2 > 0, \text{ y de los } |h_m|,\ m < n$$

■

Lema 5.2. Existe una constante $c_3 > 0$ tal que

$$g_n \leq \frac{c_3}{\omega(n)} \sum_{n_1+n_2+1=n} g_{n_1} g_{n_2}, \quad \text{donde} \quad g_0 : = 1 \text{ y } g_n : = \frac{1}{4\omega(n)} \{ \}_n, \ n \geq 1.$$

Prueba. Lo que se pide es equivalente a probar que existe una constante $c_3 > 0$ tal que

$$\sum_{n\geq 1} \omega(n) g_n y^n \prec c_3 \sum_{n\geq 1} \sum_{n_1+n_2+1=n} g_{n_1} g_{n_2} \ y^n; \quad \text{donde } g_0 := 1 \tag{5.6}$$

En efecto

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} 4\omega(n) g_n y^n &= (1+g(y)) \sum_{n\geq 1} \frac{c_1}{c_2^n} (y(1+g(y)))^n = (1+g(y)) \frac{c_1 y(1+g(y))}{c_2 - y(1+g(y))} \\ &= \frac{c_1 y(1+g(y))^2}{c_2 - y(1+g(y))}\end{aligned}$$

de donde

$$c_2 \sum_{n\geq 1} 4\omega(n) g_n y^n - y(1+g(y)) \sum_{n\geq 1} 4\omega(n) g_n y^n = c_1 y(1+g(y))^2$$

Así pues

$$\sum_{n\geq 1} \omega(n) g_n y^n = \frac{1}{c_2} y(1+g) \sum_{n\geq 1} \omega(n) g_n y^n + \frac{1}{c_2}\frac{1}{4} c_1 y(1+g)^2$$

Considerando que $\omega(n) \leq 1/2$ se tiene

$$\begin{aligned}&\prec \frac{1}{c_2} y(1+g) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2} g_n y^n + \frac{1}{c_2}\frac{1}{4} c_1 y(1+g)^2 \\ &= \frac{1}{c_2}\frac{1}{2} y(g+g^2) + \frac{1}{c_2}\frac{1}{4} c_1 y(1+g)^2\end{aligned}$$

pero como $g + g^2 \prec 2g + g^2 \prec 1 + 2g + g^2$, pues g es de coeficientes positivos, resulta

$$\prec \frac{1}{c_2}\frac{1}{2} y(1+2g+g^2) + \frac{1}{c_2}\frac{1}{4} c_1 y(1+g)^2 = \frac{1}{c_2}\frac{1}{2} y(1+g)^2 + \frac{1}{c_2}\frac{1}{4} c_1 y(1+g)^2$$

operando convenientemente y haciendo $c_3 : = (2+c_1)/4c_2$ resulta

$$\begin{aligned}&= c_3 y(1+g)^2 = c_3 y \sum_{n\geq 0} \sum_{n_1+n_2=n} g_{n_1} g_{n_2} \ y^n = c_3 \sum_{n\geq 0} \sum_{n_1+n_2=n} g_{n_1} g_{n_2} \ y^{n+1} \\ &= c_3 \sum_{n\geq 1} \sum_{n_1+n_2+1=n} g_{n_1} g_{n_2} \ y^n\end{aligned}$$

■

El Lema (5.2) da una pista de como mayorar los coeficientes $g_n, n \geq 1$. Veamos. Definamos

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &:= 1\\
\sigma_1 &:= c_3\sigma_0 = c_3\\
\sigma_2 &:= c_3(\sigma_1\sigma_0 + \sigma_0\sigma_1) = 2c_3^2\\
\sigma_3 &:= c_3(\sigma_2\sigma_0 + \sigma_1\sigma_1 + \sigma_0\sigma_2) = 5c_3^3\\
\sigma_4 &:= c_3(\sigma_3\sigma_0 + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_0\sigma_3) = 14c_3^4\\
\delta_0 &:= 1\\
\delta_1 &:= \frac{1}{\omega(1)}\max\{\delta_0\} = \frac{1}{\omega(1)}\\
\delta_2 &:= \frac{1}{\omega(2)}\max\{\delta_1\delta_0\} = \frac{1}{\omega(2)}\frac{1}{\omega(1)}\\
\delta_3 &:= \frac{1}{\omega(3)}\max\{\delta_2\delta_0; \delta_1\delta_1\} = \frac{1}{\omega(3)}\max\left\{\frac{1}{\omega(1)\omega(2)}, \frac{1}{\omega(1)\omega(1)}\right\}\\
\delta_4 &:= \frac{1}{\omega(4)}\max\{\delta_3\delta_0; \delta_2\delta_1\}\\
&= \frac{1}{\omega(4)}\max\left\{\frac{1}{\omega(3)}\max\left\{\frac{1}{\omega(1)\omega(2)}; \frac{1}{\omega(1)\omega(1)}\right\}; \frac{1}{\omega(1)}\frac{1}{\omega(2)}\frac{1}{\omega(1)}\right\}
\end{aligned}
$$

De primer momento es extraña la definición de diez escalares $\sigma\_$ y $\delta\_$, pero las desigualdades que vienen a continuación lo justifica…en realidad, es natural que sea así. Del Lema (5.2) tenemos

$$
\begin{aligned}
g_1 &\leq \frac{c_3}{\omega(1)}g_0g_0 = c_3\frac{1}{\omega(1)} && = \sigma_1\delta_1\\
g_2 &\leq \frac{c_3}{\omega(2)}(g_0g_1 + g_1g_0) \leq \frac{c_3}{\omega(2)}\Big(\frac{c_3}{\omega(1)} + \frac{c_3}{\omega(1)}\Big) = c_3(\sigma_1\sigma_0 + \sigma_0\sigma_1)\frac{1}{\omega(2)}\frac{1}{\omega(1)} && = \sigma_2\delta_2\\
g_3 &\leq \frac{c_3}{\omega(3)}(g_2g_0 + g_1g_1 + g_0g_2) \leq c_3\frac{1}{\omega(3)}\Big(\frac{2c_3^2}{\omega(1)\omega(2)} + \frac{c_3c_3}{\omega(1)\omega(1)} + \frac{2c_3^2}{\omega(1)\omega(2)}\Big)\\
&\leq c_3\Big(2c_3^2 + c_3c_3 + 2c_3^2\Big)\frac{1}{\omega(3)}\max\left\{\frac{1}{\omega(1)\omega(2)}; \frac{1}{\omega(1)\omega(1)}\right\} && = \sigma_3\delta_3\\
g_4 &\leq \frac{c_3}{\omega(4)}(g_3g_0 + g_2g_1 + g_1g_2 + g_0g_3) = \frac{c_3}{\omega(4)}(2g_3g_0 + 2g_2g_1)\\
&\leq \frac{c_3}{\omega(4)}\Big(10c_3^3\frac{1}{\omega(3)}\max\left\{\frac{1}{\omega(1)\omega(2)}; \frac{1}{\omega(1)\omega(1)}\right\} + 4c_3^2\frac{1}{\omega(2)}\frac{1}{\omega(1)}c_3\frac{1}{\omega(1)}\Big)\\
&\leq c_3\Big(10c_3^3 + 4c_3^2c_3\Big)\frac{1}{\omega(4)}\max\left\{\frac{1}{\omega(3)}\max\left\{\frac{1}{\omega(1)\omega(2)}; \frac{1}{\omega(1)\omega(1)}\right\}; \frac{1}{\omega(1)}\frac{1}{\omega(2)}\frac{1}{\omega(1)}\right\}\\
& && = \sigma_4\delta_4
\end{aligned}
$$

Se observa que los cuatro primeros coeficientes de la serie $\sum_{n=1} g_n y^n :\quad = \sum_{n=1} \frac{1}{4\omega(n)}\{\ \}_n y^n$ están mayorados, cada uno, por el producto de dos factores: el primero es un múltlipo de una potencia de c_3; y el segundo un producto de factores $1/\omega(\_)$. Tenemos por tanto

Lema 5.3. Las sucesiones

$$\sigma_n: = \begin{cases} 1 & , \ n = 0 \\ c_3 \displaystyle\sum_{n_1+n_2+1=n} \sigma_{n_1}\sigma_{n_2} & , \ n \geq 1 \end{cases} ; \ \delta_n: = \begin{cases} 1 & , \ n = 0 \\ \dfrac{1}{\omega(n)} \displaystyle\max_{n_1+n_2+1=n} \{\delta_{n_1}\delta_{n_2}\} & , \ n \geq 1 \end{cases} \tag{5.7}$$

son tales que $g_n \leq \sigma_n \delta_n$, cualquiera que sea $n \geq 0$.

Prueba. Procedamos por inducción. El caso $n = 0$ se desprende de la definición de g_0, σ_0 y δ_0. Asumiendo que tal desigualdad es válida para k, demostremosla que también lo es para $k + 1$. En efecto.

$$\begin{aligned} g_{k+1} = \frac{1}{\omega(k+1)}\omega(k+1)g_{k+1} &\leq \frac{1}{\omega(k+1)}c_3 \sum_{n_1+n_2=k} g_{n_1}g_{n_2} \\ &\leq \frac{c_3}{\omega(k+1)} \sum_{n_1+n_2=k} \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\delta_{n_1}\delta_{n_2} \\ &\leq \frac{c_3}{\omega(k+1)} \sum_{n_1+n_2=k} \sigma_{n_1}\sigma_{n_2} \max_{n_1+n_2=k}\{\delta_{n_1}\delta_{n_2}\} = \sigma_{k+1}\delta_{k+1} \end{aligned}$$

■

Subsección 5.1.3. Mayoramiento $\prec_3$

La idea de aquí para adelante es mayorar por separado los factores σ_n y δ_n. En el lema que viene líneas más abajo demostraremos que existe una constante $c_4 > 0$ tal que $\sigma_n < c_4^n$, $n \geq 0$. La demostración de tal hecho es corto y requiere construcciones no complicadas.

Lema 5.4. Existe una constante $c_4 > 0$ tal que $\sigma_n < c_4^n$, $n \geq 0$.

Prueba. Definamos $\sigma = \sum_{n\geq 0} \sigma_n y^n$. Entonces de la definición de los σ_n tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma - 1 = 1 + \sum_{n\geq 1} \sigma_n - 1 &= \sum_{n\geq 1} \Big(c_3 \sum_{n_1+n_2+1=n} \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\Big) y^n \\ &= c_3 y \sum_{n\geq 1} \Big(\sum_{n_1+n_2=n-1} \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\Big) y^{n-1} \\ &= c_3 y \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{n_1+n_2=n} \sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\Big) y^{n} \\ &= c_3 y \sigma^2\end{aligned}$$

De esto resulta que σ esta caracterizada por la ecuacion $(c_3 y)\sigma(y)^2 - \sigma(y) + 1 = 0$. Luego

$$\sigma(y) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c_3 y}}{2c_3 y}$$

Ahora, como $\sigma(0) = 1$, entonces existe

$$\lim_{y\longrightarrow 0} \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c_3 y}}{2c_3 y}$$

Entonces denominador y el numerador deberian converger a cero, es decir deberiamos tener $\lim_{y\longrightarrow 0} 1 \pm \sqrt{1 - 4c_3 y} = 0$, lo cual solo es posible cuando de entre los simbolos "$\pm$" se escoge "$+$"; esto es

$$\sigma(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c_3 y}}{2c_3 y}$$

De otro lado, como y tambien toma valores reales, σ converge en el disco abierto agujereado $D(0, 1/4c_3)/\{0\}$. Pero como σ es continua en $y = 0$, entonces la analiticidad de σ se extiende a todo el disco $D(0, 1/4c_3)$. De otro lado, por la formula de cauchy exite $M_1 > 0$ tal que

$$\sigma_n = \sigma^{(n)}(0) \leq \frac{M_1}{(1/4c_3)^n} = M_1(4c_3)^n$$

Asumiendo, sin pérdida de generalidad, que $M_1 \geq 1$, resulta

$$\sigma_n \leq M_1(4c_3)^n < M_1^n(4c_3)^n = (4M_1c_3)^n$$

La prueba acaba haciendo $c_4 = 4M_1c_3$. ■

Subsección 5.1.4. Mayoramiento $\prec_4$

Ahora vamos a mayorar cada δ_n. Para ser mas exactos, nos proponemos hallar una constante $c_5 > 0$ de modo que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \delta_n < c_5^n \quad \text{o equivalentemente} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ \log(\delta_n) < n\log(c_5) \tag{5.8}$$

Tal como se aprecia al final de esta subsección, esta constante $c_5 > 0$ es tal que

$$\log(c_5) \colon = 2\log\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) + \log(4)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_k} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log(q_{k+1})}{q_k}$$

Para lograr lo que nos proponemos es preciso entender a fondo cómo están definidos los términos de la sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Una mirada acuciosa a la definición (5.7) nos hace caer en la cuenta que

$$\delta_0 = 1;\ \delta_n = \left(\frac{1}{\omega(n_\ell)}\right)^{mult_\ell(n)} \cdots \left(\frac{1}{\omega(n_i)}\right)^{mult_i(n)} \cdots \left(\frac{1}{\omega(n_1)}\right)^{mult_1(n)},\ n \geq 1 \tag{5.9}$$

siendo $n = n_\ell > \cdots > n_2 > n_1 \geq 1$ y $mult_i(n) \geq 0$ la multiplicidad del factor $1/\omega(n_i)$, $\ell \geq i \geq 1$.

En esta **descomposición (5.9) de** δ_n hay exactamente n factores (contando multiplicidades). El factor $1/\omega(n)$ aparece una y solo una vez, esto es $mult_\ell(n) = 1$; y $\sum_{i=1}^{\ell} mult_i(n) = n$.

Y con el propósito de lograr nuestro objetivo, podemos tomar logaritmo a ambos lados de (5.9) y observar que

$$\log(\delta_n) = \sum_{i=1}^{\ell} mult_i(n)\log\left(\frac{1}{\omega(n_i)}\right) \tag{5.10}$$

Así pues, en el camino que nos conduce a nuestro objetivo deberíamos mayorar cada factor $1/\omega(n_i)$ y su respectiva multiplicidad $mult_i(n)$.

Con respecto al mayoramiento $1/\omega(n_i)$, la parte del capítulo 1 que corresponde a la teoría de fracciones continuas tiene un rol importante en nuestro propósito, muy en especial el Lema (1.8). Este Lema asegura que existen números enteros $k_\ell, \ldots, k_1 \geq -1$ tales que

$$\forall\, \ell \geq i \geq 1 \colon \frac{\omega(q_{k_i+1})}{2} \leq \omega(n_i) < \frac{\omega(q_{k_i})}{2} \tag{5.11}$$

Y en cuanto al mayoramiento de las multiplicidades $mult_i(n)$ es preciso la siguiente definición y el lema que le sigue.

Definición 5.1. Fijados los números naturales $n \geq 1$ y $k \geq -1$, definimos $\Phi^{(k)}(n)$ como la cantidad de factores $1/\omega(\_)$ en la descomposición (5.9) de δ_n, tales que $\omega(\_) < \omega(q_k)/2$.

Observación 5.1.

a) Si k=−1, $\Phi^{(-1)}(n)$ es la cantidad de factores $1/\omega(\_)$ tales que $\omega(\_) < \omega(q_{-1})/2 = 1/2$. Esta cantidad es n; esto es $\Phi^{(-1)}(n) = n$.

b) Del Lema (1.2) se sabe que

$$\cdots < \frac{\omega(q_{k+1})}{2} < \frac{\omega(q_k)}{2} < \cdots \frac{\omega(q_2)}{2} < \frac{\omega(q_1)}{2} \leq \frac{\omega(q_0)}{2} < \frac{\omega(q_{-1})}{2}$$

En consecuencia,

$$\cdots \leq \Phi^{(k+1)}(n) \leq \Phi^{(k)}(n) \leq \cdots \Phi^{(2)}(n) \leq \Phi^{(1)}(n) \leq \Phi^{(0)}(n) \leq \Phi^{(-1)}(n) = n$$

La sucesión $\{\Phi^{(k)}(n)\}_{k\geq -1}$ (de números enteros no negativos) es acotada superiormente y no crece a medida que $k \longrightarrow +\infty$; en algún debe hacerse constante. Si bien cierto que n mayora a todos los $\Phi^{(k)}(n)$, este no es un mayoramiento de nuestro interés porque no contribuye a nuestro objetivo. El Lema que viene a continuación dice que la sucesión $\{\Phi^{(k)}(n)\}_{k\geq -1}$ se hace constante e igual cero a partir de cierto indice; y brinda un mayoramiento más fino.

Lema 5.5. Sea δ_n, donde $n \geq 1$ es fijo y arbitrario. Si $k \geq 0$ es tal que $q_{k+1} > n$, entonces en (5.9) ningún factor $1/\omega(\_)$ verifica la desigualdad $\omega(\_) < \omega(q_k)/2$, esto es $\Phi^{(k)}(n) = 0$. Y si $k \geq 0$ fuese tal que $n \geq q_{k+1}$, entonces $\Phi^{(k)}(n)$ es mayorado por $2[\![n/q_{k+1}]\!] - 1$.
En símbolos

$$\forall k \geq 0\colon q_{k+1} > n \geq 1 \Longrightarrow \Phi^{(k)}(n) = 0 \quad \wedge \quad n \geq q_{k+1} \Longrightarrow \Phi^{(k)}(n) \leq 2\left[\!\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\!\right] - 1$$

Observación 5.2.

a) Si $k = -1$, entonces $\Phi^{(-1)}(n)$ $(= n)$ es mayorada por $\left[\!\!\left[n/q_{-1+1}\right]\!\!\right] - 1$ $(= 2n - 1)$.

b) La primera implicación del Lema (5.5) trata de existencia; el hecho $\Phi^{(k)}(n) = 0$ significa que en la descomposición de δ_n no aparecen factores $1/\omega(\_)$ tales que $\omega(\_) < \omega(q_k)/2$. La segunda implicación no; es decir, cuando $n \geq q_{k+1}$ el lema no afirma que existen factores $1/\omega(\_)$ tales que $\omega(\_) < \omega(q_k)/2$; pueden haber o no; o dicho de un modo diferente: puede suceder que $\Phi^{(k)}(n) = 0$ o $\Phi^{(k)}(n) \neq 0$. Independientemente de estos casos, siempre se tiene el mayoramiento que se indica.

Prueba. Ver la demostración en el apéndice. ■

Lema 5.6. Existe una constante $c_5 > 0$ tal que $\delta_n < c_5^n$, cualquiera que sea $n \geq 1$.

Prueba. Si $1/\omega(n_i)$, $\ell \geq i \leq 1$, es un factor de δ_n, $n \geq 1$ (ver 5.9), entonces de (5.11) resulta $\omega(q_{k_i+1})/2 \leq \omega(n_i) < \omega(q_{k_i})/2$; luego, δ_n contiene al menos $mult_i(n)$ factores $1/\omega(\_)$ tales que $\omega(\_) < \omega(q_{k_i})/2$, es decir $mult_i(n) \leq \Phi^{(k_i)}(n)$. En consecuencia

$$\delta_n = \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{1}{\omega(n_i)}\right)^{mult_i(n)} \leq \prod_{k=-1}^{\ell} \left(\frac{1}{\omega(q_{k+1})}\right)^{2\left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right]-1} \leq \prod_{k=-1}^{\ell} \left(\frac{1}{\omega(q_{k+1})}\right)^{\frac{2n}{q_{k+1}}}$$

Luego

$$\log(\delta_n) \leq \sum_{k=-1}^{\ell} \frac{2n}{q_{k+1}} \log\left(\frac{1}{\omega(q_{k+1})}\right) = \frac{2n}{q_0} \log\left(\frac{1}{\omega(q_0)}\right) + 2n \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{q_{k+1}} \log\left(\frac{1}{\omega(q_{k+1})}\right)$$

Pero $q_0 = 1$. Y del Lema (1.2) se sabe que $k \geq 0 \Longrightarrow 1/\omega(q_{k+1}) \leq 2q_{k+2}$. Luego

$$\begin{aligned}
\log(\delta_n) &\leq 2n \log\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) + 2n \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{q_{k+1}} \log(2q_{k+2}) \\
&= 2n \log\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) + 2\log(2)n \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{q_{k+1}} + 2n \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\log(q_{k+2})}{q_{k+1}} \\
&\leq 2n \log\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) + 2\log(2)n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_k} + 2n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log(q_{k+1})}{q_k} = n\log(c_5)
\end{aligned}$$

donde c_5 es una constante tal que

$$\log(c_5) := 2\log\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) + \log(4) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_k} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log(q_{k+1})}{q_k}$$

Las dos series que aparecen en $\log(c_5)$ son finitas; la primera lo es por el Lema (1.1), y la segunda porque θ satsiface la Condición de Brjuno. ■

Apéndice A

Resultados técnicos

Proposición A.1.

a) Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define

$$\Psi^{(k)}(m) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega(m) < \frac{1}{2}\omega(q_k) \\ 0 & , \quad \omega(m) \geq \frac{1}{2}\omega(q_k) \end{cases}$$

Entonces $\Psi^{(k)}(m) = 1 \Longrightarrow \forall 1 \leq \ell < q_{k+1} \colon \Psi^{(k)}(m - \ell) = 0.$

b) Para $n \geq 1$ y $k \geq 0$ se tiene

$$\Phi^{(k)}(n) \leq \Psi^{(k)}(n) + \max \left\{ \Phi^{(k)}(n_1) + \Phi^{(k)}(n_2) : n_1 + n_2 + 1 = n,\ n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0 \right\}$$

Observación A.1.

a) Con respecto a la Proposición (a)) tenemos:

- Para $k = -1$ se define $\Psi^{(-1)}(m) = 1$, cualquiera que sea $m \in \mathbb{N}$. En este caso la implicación es vacía.
- La implicación es equivalente a decir que de $\omega(m) < \omega(q_k)/2$ se infiere que $\omega(m - \ell) \geq \omega(q_k)/2$, cualquiera que sea $1 \leq \ell < q_{k+1}$.
- Para $k \geq 0$ siempre se tiene

  $$\Psi^{(k)}(m) = 1 \Longrightarrow m > q_{k+1} \quad \text{o equivalentemente} \quad q_{k+1} \geq m \Longrightarrow \Psi^{(k)}(m) = 0$$

  Si fuese $m < q_{k+1}$, entonces del Lema (1.2) resultaría $\omega(m) < \omega(q_k)/2 \leq \omega(m)/2$, lo cual no puede ser, evidentemente.
- Si fuese el caso $\Psi^{(k)}(m) = 1$ y $q_{k+2} > m > q_{k+1}$, entonces

  $$\frac{\omega(q_{k+1})}{2} < \omega(q_{k+1}) < \omega(m) < \frac{\omega(q_k)}{2}$$

b) Para $k = -1$ se tiene

Prueba.

a) Sean $p_1,\ p_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $\omega(m) = |m\theta - p_1|$ y $\omega(m-\ell) = |(m-\ell)\theta - p_2|$. Entonces

$$\omega(m) + \omega(m-\ell) \geq |(m\theta - p_1) - ((m-\ell)\theta - p_2)| = |\ell\theta - (p_1 - p_2)| \geq \omega(\ell)$$

De esto se sigue que $\omega(m-\ell) \geq \omega(\ell) - \omega(m)$.

De otro lado, el dato $\Psi^{(k)}(m) = 1$ significa que $\omega(m) < \omega(q_k)/2$; y el Lema (1.2) asegura que de $0 < \ell < q_{k+1}$ se sigue que $\omega(q_k) \leq \omega(\ell)$. Luego

$$\omega(m-\ell) \geq \omega(\ell) - \omega(m) > \omega(q_k) - \frac{1}{2}\omega(q_k) = \frac{1}{2}\omega(q_k)$$

Entonces de la definición de $\Psi^{(k)}$ resulta que $\Psi^{(k)}(m-\ell) = 0$.

b) Fijemos $n \geq 1$. De la definición de la sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existen $n_1, n_2 \geq 0$, con $n_1 + n_2 + 1 = n$, tales que

$$\delta_n = \frac{1}{\omega(n)}\delta_{n_1}\delta_{n_2}$$

En este producto el factor $1/\omega(n)$ podría ser tal que $\omega(n) < \omega(q_k)/2$ o $\omega(n) \geq \omega(q_k)/2$. En consecuencia, o $\Psi^k(n) = 1$ o $\Psi^k(n) = 0$. Esto es

$$\Phi^{(k)}(n) = 1 + \Phi^{(k)}(n_1) + \Phi^{(k)}(n_2) \quad \vee \quad \Phi^{(k)}(n) = 0 + \Phi^{(k)}(n_1) + \Phi^{(k)}(n_2)$$

En cualquier caso siempre se tiene la tesis

■

Proposición A.2.

a) Sean $r, s \geq 0$. Entonces, para cada $q \geq 1$ se cumple que

$$\left[\!\left[\frac{r}{q}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{s}{q}\right]\!\right] \leq \left[\!\left[\frac{r+s+1}{q}\right]\!\right]$$

b) $n < q_{k+1} \Longrightarrow \Phi^k(n) = 0$

c) $\Phi^{(k)}(q_{k+1}) \leq 1$.

d) Sean $0 \leq r \leq s < n$ tales que $r + s + 1 \leq n$ y $\Phi^{(k)}(n) \leq 1 + \Phi^{(k)}(r) + \Phi^{(k)}(s)$. De cualquiera de los siguientes casos se deduce la pertenencia $n \in X$.

1) $q_{k+1} \leq r \leq s < n \quad \wedge \quad r, s \in X$,

2) $r \leq s < q_{k+1} < n$,

3) $r < q_{k+1} \leq s < n \quad \wedge \quad s \in X \quad \wedge \quad [\![s/q_{k+1}]\!] < [\![n/q_{k+1}]\!]$.

Prueba.

a) La prueba se sigue de las desigualdades

$$\left[\!\left[\frac{r}{q}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{r}{q}\right]\!\right] \leq \frac{r}{q} + \frac{s}{q} = \frac{r}{q} + \frac{s}{q} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q} = \frac{r+s+1}{q} - \frac{1}{q} < \frac{r+s+1}{q}$$

b) En la descomposición

$$\delta_n = \frac{1}{\omega(n)}\frac{1}{\omega(n_1)^{m_1}}\cdots\frac{1}{\omega(n_i)^{m_i}}\cdots\frac{1}{\omega(n_p)^{m_p}}, \quad n \geq 1$$

se sabe que $n_1,\ldots n_p < n$.

Si $n < q_{k+1}$, entonces $n, n_1, \ldots n_p < q_{k+1}$; luego, del Lema (1.2) resulta que $\omega(q_k)/2 < \omega(q_k) \leq \omega(n_i)$, $0 \leq i \leq p$. Dicho de otro modo, ningún factor $1/\omega(n_i)$ es tal que $\omega(n_i) < \omega(q_k)/2$, y en consecuencia $\Phi^{(k)}(n) = 0$.

c) Si en la descomposición anterior hacemos $n = q_{k+1}$, entonces el Lema (1.2) asegura que $\omega(q_k)/2 < \omega(q_k) \leq \omega(n_i)$, $1 \leq i \leq p$. Así pues, $1/\omega(q_{k+1})$ es el único posible factor tal que $\omega(q_{k+1}) \leq \omega(q_k)/2$, es decir $\Phi^{(k)}(q_{k+1}) = 1$ o $\Phi^{(k)}(q_{k+1}) = 0$.

d) 1) Como $s, r \in X$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi^{(k)}(n) &\leq 1+2\left[\!\left[\frac{s}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1+2\left[\!\left[\frac{r}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1 = 2\left(\left[\!\left[\frac{s}{q_{k+1}}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{r}{q_{k+1}}\right]\!\right]\right) - 1\\ &\leq 2\left[\!\left[\frac{r+s+1}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1 \leq 2\left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1\end{aligned}$$

2) Del (d) se tiene $\Phi^{(k)}(s) = \Phi^{(k)}(r) = 0$; luego

$$\Phi^{(k)}(n) \leq 1 \leq \left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] \leq 2\left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1$$

3) Del (d) se tiene que $\Phi^{(k)}(r) = 0$; y como $s \in X$ resulta

$$\Phi^{(k)}(n) \leq 1+\Phi^{(k)}(s) \leq 1+2\left[\!\left[\frac{s}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1 < 2\left(\left[\!\left[\frac{s}{q_{k+1}}\right]\!\right] + 1\right) - 1 \leq 2\left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1$$

$\blacksquare$

Prueba del Lema (5.5): La primera parte se sigue de la Proposición (A.2-d). Vamos a probar que el conjunto

$$X := \left\{n \in \mathbb{N} : n \geq q_{k+1} \;\wedge\; \Phi^{(k)}(n) \leq 2\left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1\right\}$$

contiene a todos los números naturales mayores o iguales que q_{k+1}.

Prueba. Procedamos por inducción. De la Proposición (A.2-e) se tiene la pertenencia $q_{k+1} \in X$.

Asumamos, ahora, que X contiene a todos los números naturales contenidos el intervalo cerrado $[q_{k+1}; n-1]$ (**Hipótesis Inductiva**), y probemos, bajo tal suposición, que $n \in X$.

a) $\exists\ 0 \leq n_2 \leq n_1 < n;\ n_2 + n_1 + 1 = n\ /\ \Phi^{(k)}(n) \leq \Psi^{(k)}(n) + \Phi^{(k)}(n_2) + \Phi^{(k)}(n_1)$, donde $\Psi^{(k)}(n) = 0$. Estudiamos por separado cada posicionamiento de q_{k+1}.

   (a) $q_{k+1} \leq n_2 \leq n_1 < n$. De aplicar la hipótesis inductiva a n_2 y n_1 se tiene

$$\begin{aligned}\Phi^{(k)}(n) \leq 2\left[\!\left[\frac{n_1}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1 + 2\left[\!\left[\frac{n_2}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1 &< 2\left(\left[\!\left[\frac{n_1}{q_{k+1}}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{n_2}{q_{k+1}}\right]\!\right]\right) - 1 \\ &\leq 2\left[\!\left[\frac{n_1 + n_2 + 1}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1 \\ &= 2\left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1\end{aligned}$$

   (b) $n_2 < q_{k+1} \leq n_1 < n$. De la Proposición (A.2-d) se tiene que $\Phi^{(k)}(n_2) = 0$; por ende, al aplicar la hipótesis inductiva a n_1 resulta

$$\Phi^{(k)}(n) \leq 2\left[\!\left[\frac{n_1}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1 \leq 2\left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1$$

   (c) $0 \leq n_2 \leq n_1 < q_{k+1}$. De la Proposición (A.2-d) se tiene que $\Phi^{(k)}(n_1) = \Phi^{(k)}(n_2) = 0$. Por tanto

$$\Phi^{(k)}(n) = 0 \leq \left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1 \leq 2\left[\!\left[\frac{n}{q_{k+1}}\right]\!\right] - 1$$

b) $\exists\ 0 \leq n_2 \leq n_1 < n;\ n_2 + n_1 + 1 = n\ /\ \Phi^{(k)}(n) \leq \Psi^{(k)}(n) + \Phi^{(k)}(n_2) + \Phi^{(k)}(n_1)$, donde $\Psi^{(k)}(n) = 1$. Se tiene los siguientes posicionamientos:

   1) $q_{k+1} \leq n_2 \leq n_1 < n$

   2) $n_2 \leq n_1 < q_{k+1} < n$

   3) $n_2 < q_{k+1} \leq n_1 < n \wedge [\![n_1/q_{k+1}]\!] < [\![n/q_{k+1}]\!]$

   $*_1$) $n_2 < q_{k+1} \leq n_1 < n \wedge [\![n_1/q_{k+1}]\!] = [\![n/q_{k+1}]\!]$

   La prueba finaliza si ocurre (1), (2) o (3). La pertenencia $n \in X$ se sigue de la Proposición (A.2-f)).

   Si ocurre $(*_1)$, entonces $\Phi^k(n_2) = 0$ y $n_1 \neq 0$; luego, por la Proposición (A.2-b) existen $0 \leq n_4 \leq n_3 < n_1$, con $n_4 + n_3 + 1 = n_1 < n$ tales que $\Phi^{(k)}(n_1) \leq \Psi^{(k)}(n_1) + \Phi^{(k)}(n_4) + \Phi^{(k)}(n_3)$. En esta desigualdad sucede que $\Psi^{(k)}(n_1) = 0$; esto se sigue del hecho que $1 \leq n - n_1 < q_{k+1}$ (lo contrario, es decir $n \geq q_{k+1} + n_1$, conduciría a que $n/q_{k+1} \geq 1 + n_1/q_{k+1} \geq 1 + [\![n_1/q_{k+1}]\!]$), $\Psi^{(k)}(n) = 1$ y de la Proposición (A.2-a), la cual asegura que $\Psi^{(k)}(n_1) = \Psi^{(k)}(n - (n - n_1)) = 0$.

En consecuencia,

$$\Phi^{(k)}(n) \leq 1 + \Phi^{(k)}(n_1) \leq 1 + \Phi^{(k)}(n_4) + \Phi^{(k)}(n_3)$$

Se presentan las siguientes posibilidades:

1) $q_{k+1} \leq n_4 \leq n_3 < n$

2) $n_4 \leq n_3 < q_{k+1} < n$

3) $n_4 < q_{k+1} \leq n_3 < n \wedge [\![n_3/q_{k+1}]\!] < [\![n/q_{k+1}]\!]$

$*_3$) $n_4 < q_{k+1} \leq n_3 < n \wedge [\![n_3/q_{k+1}]\!] = [\![n/q_{k+1}]\!]$

La prueba finaliza si ocurren 1) o 2) o (3).

Si ocurre ($*_3$), entonces $\Phi^k(n_4) = 0$ y $n_3 \neq 0$; luego, por la Proposición (A.2-b) existen $0 \leq n_6 \leq n_5 < n_3$, con $n_6 + n_5 + 1 = n_3 < n$ tales que $\Phi^{(k)}(n_3) \leq \Psi^{(k)}(n_3) + \Phi^{(k)}(n_5) + \Phi^{(k)}(n_6)$. La desigualdad $1 \leq n - n_3 < q_{k+1}$ es un hecho; lo contrario conduciría a que $n/q_{k+1} \geq 1 + n_3/q_{k+1} \geq 1 + [\![n_3/q_{k+1}]\!]$. Así pues, como $\Psi^{(k)}(n) = 1$, la Proposición (A.2-a) asegura que $\Psi^{(k)}(n_3) = \Psi^{(k)}(n - (n - n_3)) = 0$.

En resumen,

$$\Phi^{(k)}(n) \leq 1 + \Phi^{(k)}(n_3) \leq 1 + \Phi^{(k)}(n_5) + \Phi^{(k)}(n_6)$$

Se presentan las siguientes posibilidades:

1) $q_{k+1} \leq n_6 \leq n_5 < n$

2) $n_6 \leq n_5 < q_{k+1} < n$

3) $n_6 < q_{k+1} \leq n_5 < n \wedge [\![n_5/q_{k+1}]\!] < [\![n/q_{k+1}]\!]$

$*_5$) $n_6 < q_{k+1} \leq n_5 < n \wedge [\![n_5/q_{k+1}]\!] = [\![n/q_{k+1}]\!]$

Al igual que antes, la prueba acaba en los casos (1), (2) y (3).

Si ocurriese ($*_5$), entonces tenemos que $\Phi^k(n_6) = 0$ y $n_5 \neq 0$; luego por la Proposición (A.2-b) existen $0 \leq n_8 \leq n_7 < n_5$, $n_8 + n_7 + 1 = n_5 < n$ tales que $\Phi^{(k)}(n_5) \leq \Psi^{(k)}(n_5) + \Phi^{(k)}(n_7) + \Phi^{(k)}(n_8)$ donde, de manera análoga, se verifica que $\Psi^{(k)}(n_5) = 0$. Luego

$$\Phi^{(k)}(n) \leq 1 + \Phi^{(k)}(n_5) \leq 1 + \Phi^{(k)}(n_7) + \Phi^{(k)}(n_8)$$

Hasta ahora, la conjunción de $(*_1)$, $(*_2)$ y $(*_5)$ implican que existen $n_1, n_3, n_5 \in \mathbb{N}$ tales que $n > n_1 > n_3 > n_5$.

Este proceso no puede continuar indefinidamente porque n es un número natural fijado de antemano. Dicho de otro modo, la sucesión $n > n_1 > n_3 > n_5$ no puede decaer indefinidamente; en alguna etapa se debe cortar; en alguna etapa debe ocurrir o (1) o (2) o (3), pero ya no $(*\_)$.

De este modo finaliza la prueba del Lema (5.5).

■

Bibliografía

[1] A. D. Brujno. Analytical form of differential equations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 25:132–224, 1971.

[2] Carlos G. Moreira. Introducao a Teoria dos Números. Imca - Perú - 2002.

[3] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. Complex Dynamics. Springer-Verlag - Los Angeles - 1992.

[4] Alan F. Beadon. Iteraion of Rational Functions. Springer-Verlag - England - 1990.

[5] R. E. Lee De Ville. Brjuno Numbers and the Symbolic Dinamics of the Complex Exponential. Department of Mathematical Sciences Renssalaer Polytechnic Institute -1999

[6] Renato Benazic Tomé. Dinamica compleja bidimensional. Apuntes de clase sin publicar, July 2010.