

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



DINÁMICA CUÁNTICA DEL KAÓN Y CÁLCULO DE SUS
DECAIMIENTOS

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTADO POR:

OSCAR CHACALTANA ALARCÓN

ASESOR :

Dr. ORLANDO PEREYRA RAVÍNEZ

LIMA, PERÚ

2005

Índice general

Dedicatoria	III
Agradecimientos	IV
Resumen	V
1.. Teoría del campo escalar	1
1.1. El campo escalar clásico	1
1.1.1. Principio variacional para un campo clásico	3
1.1.2. Ecuación de Klein-Gordon	7
1.1.3. Soluciones como combinaciones de ondas planas	9
1.1.4. Interacción de campos clásicos escalares	14
1.1.5. Interacción con un potencial externo y función de Green	16
1.2. El campo escalar cuántico	20
1.2.1. Cuantización de la teoría clásica	21
1.2.2. El espacio de momentos	24
1.2.3. Interpretación de partículas del campo cuántico	31
1.2.4. Ordenamiento normal	35
1.2.5. Espacio de Fock	37
1.3. Interacción de campos cuánticos	41
1.3.1. Postulados de la teoría de interacción	42
1.3.2. La imagen de interacción	46
1.3.3. El operador de evolución y matriz S	51
1.3.4. Teoría de perturbaciones	53
1.3.5. Teorema de Wick	58
1.3.6. Cálculo de términos perturbativos de la matriz S	61
1.3.7. Diagramas de Feynman para la teoría ϕ^4	63
2.. Cinemática de decaimientos	69
2.1. Decaimientos	70
2.2. Integración del espacio de fase	73
3.. Modelo escalar para decaimientos $K \rightarrow \pi$	75
3.1. Lagrangiano del modelo	75
3.2. Razón de decaimiento para el proceso $K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	76
Conclusiones	80
Bibliografía	81

Resumen

En este trabajo estudiamos la cuantización canónica de la teoría de campos y, como aplicación, construimos un modelo para representar los decaimientos de kaones en mesones. Cada decaimiento se incorpora en el Lagrangiano del modelo como un término de interacción individual, lo cual permite el cálculo de amplitudes con diagramas de Feynman a nivel de árbol. A modo de ejemplo mostramos cómo calcular el tiempo de decaimiento de un kaón en dos piones.

1. Teoría del campo escalar

Para describir el modelo de kaones y piones de este trabajo se necesita una teoría de interacciones de partículas de espín cero, también llamadas escalares. Esta es la teoría cuántica del campo escalar. Tal como en el caso de la mecánica cuántica de una partícula, es necesario desarrollar primero la teoría clásica, y posteriormente cuantizarla.

1.1. El campo escalar clásico

Puesto que estamos interesados en aplicaciones a física de partículas relativistas, tomamos el espacio base sobre el cual definiremos los campos como el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$, que es el espacio \mathbb{R}^4 dotado de una métrica $\eta = (- + + +)$. El grupo de transformaciones isométricas de $\mathbb{R}^{3,1}$, es decir, el grupo de transformaciones $\mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ que mantienen la métrica invariante, se llama grupo de Poincaré, y consiste en transformaciones de Lorentz (las cuales comprenden rotaciones espaciales y boosts) y traslaciones. (En otras aplicaciones de teoría de campos, por ejemplo en materia condensada, el espacio base es euclidiano en lugar de Minkowski, y el grupo de transformaciones isométricas es el grupo euclidiano, que comprende rotaciones y traslaciones espaciales, pero no boosts.)

Un campo (clásico) es un objeto físico representado por una función $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ o $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{C}^N$, donde N es un número natural. El espacio ϕ debe formar una representación lineal N -dimensional del grupo de Lorentz, en el sentido que bajo una transformación de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda x$,

$$\phi^a(x) \mapsto \phi'^a(x') = U(\Lambda)^a_b \phi^b(x), \quad (1.1.1)$$

donde $U(\Lambda)$ es una matriz $N \times N$ (compleja o real dependiendo de si el rango del campo es \mathbb{R}^N o \mathbb{C}^N) que representa a la transformación de Lorentz Λ . Recordemos que una representación finita del grupo de Lorentz (que es un grupo no compacto)

no puede ser unitaria. Notemos también que los campos forman una representación del grupo de Lorentz, no del grupo de Poincaré.

La razón por la cual requerimos que un campo pertenezca a una representación del grupo de Lorentz es que esta es la manera más natural de incorporar a los campos como objetos con los que, más adelante, construiremos el Lagrangiano. Las simetrías del Lagrangiano descienden a simetrías de cantidades físicas medibles, y queremos que estas cantidades se transformen apropiadamente bajo el grupo de Lorentz. (Debemos remarcar que nuestra definición de campo clásico es rústica, pero suficiente para este trabajo. Más elegantemente, se puede entender los campos como objetos que viven en un producto tensorial del fibrado tangente de $\mathbb{R}^{3,1}$. Para introducir campos gauge, es necesario introducir el concepto de fibrado principal. Esta manera matemáticamente más rigurosa de estudiar los campos está fuera del ámbito de esta tesis.)

En particular, en este trabajo estamos interesados en el caso más simple, el del campo escalar, que corresponde a la representación trivial del grupo de Lorentz. Un campo escalar es un campo $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}$ o $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{C}$ que es invariante bajo transformaciones de Lorentz, es decir, que bajo una transformación de Lorentz $x \mapsto x' = \Lambda x$ se transforma de la siguiente manera,

$$\phi(x) \mapsto \phi(x') = \phi(x). \quad (1.1.2)$$

Como nota, recordemos que la complexificación del álgebra de Lie $so(3,1)$ del grupo de Lorentz es isomorfa a $sl(2, \mathbb{C}) \times sl(2, \mathbb{C})$, y por tanto las representaciones de dimensión finita (y por tanto no unitarias) del grupo de Lorentz $SO(3,1)$ son las mismas que las del grupo $SU(2) \times SU(2)$. En particular, una representación de dimensión finita del grupo de Lorentz se etiqueta con dos números semi-enteros no negativos (j_1, j_2) (cuyos estados son de la forma (m_1, m_2) , con $-j_1 < m_1 < j_1$, $-j_2 \leq m_2 < j_2$), y es de dimensión $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. El número $J = j_1 + j_2$ se llama espín del campo. En este sentido, el campo escalar, que corresponde a la representación $(0,0)$, es un campo de espín cero. Las otras representaciones que aparecen comúnmente en física de altas energías son $(1/2, 0)$ y $(0, 1/2)$ (fermiones

de espín $1/2$), $(1/2, 1/2)$ (bosones vectoriales), $(1/2, 1)$ (gravitino, espín $3/2$), y $(1, 1)$ (gravitón, espín 2). Existen argumentos físicos para no utilizar campos con espín $J > 2$ en teorías de campo sin gravedad.

1.1.1. Principio variacional para un campo clásico

Rigurosamente hablando, el principio variacional para campos requiere técnicas de espacios de Banach, las cuales están fuera del alcance de este trabajo. En lugar de ello, estudiaremos una versión simplificada para un solo campo escalar, y nos limitaremos a mostrar la generalización para más campos.

El Lagrangiano de un campo escalar real es una función $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3,1} \mapsto \mathbb{R}$. (Si queremos trabajar con un campo escalar complejo, entonces requerimos $\mathcal{L} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{3,1} \mapsto \mathbb{R}$, pero cambiar \mathbb{R} por \mathbb{C} no afecta los argumentos de esta sección. Lo importante es que en cualquier caso el Lagrangiano debe tomar valores reales.) Si ϕ es un campo escalar real, el Lagrangiano debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz, en el sentido que debe satisfacer

$$\mathcal{L}(\phi'(x'), \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}}(x')) = \mathcal{L}(\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}(x)), \quad (1.1.3)$$

donde $x \mapsto x' = \Lambda x$ es una transformación de Lorentz. Puesto que hemos asumido que el campo es escalar, $\phi'(x') = \phi(x)$, y solamente es necesario que las derivadas $\partial_{\mu} \phi$ aparezcan en el Lagrangiano en una forma invariante bajo Lorentz (por ejemplo en un término $\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi$). (Notemos que si estuviéramos trabajando con campos en otras representaciones del grupo de Lorentz, el requisito de invariancia de Lorentz del Lagrangiano aún está dado por la ecuación (1.1.3).)

Un ejemplo de Lagrangiano es la función $\mathcal{L}(u, v^{\mu}) = v^{\mu} v_{\mu} + m^2 u^2$, conocido como Lagrangiano de Klein-Gordon. Otro ejemplo que veremos frecuentemente es el Lagrangiano ϕ^4 , definido por $\mathcal{L}(u, v^{\mu}) = v^{\mu} v_{\mu} + m^2 u^2 + \lambda u^4$.

A continuación veremos el principio variacional para un campo escalar, que determina una ecuación diferencial para el campo, llamada ecuación de movimiento. Esto es análogo al caso de mecánica clásica, en que el principio variacional determina

la ecuación de Newton. En adelante nos restringiremos a ecuaciones diferenciales de segundo grado. Una razón importante para esta restricción es que no existe un método consistente para cuantizar sistemas clásicos que corresponden a ecuaciones de movimiento con derivadas de orden superior al segundo. Esta dificultad se hará más claro cuando discutamos el tema de cuantización.

Si nos restringimos a ecuaciones diferenciales de segundo orden, deseamos imponer dos condiciones de contorno para el campo escalar ϕ ,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, \mathbf{x}) = \phi_{-\infty}(\mathbf{x}), \quad (1.1.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, \mathbf{x}) = \phi_{+\infty}(\mathbf{x}). \quad (1.1.5)$$

donde $\phi_{-\infty}$ y $\phi_{+\infty}$ son funciones $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Por razones técnicas (convergencia de algunas integrales) también necesitamos la condición

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.1.6)$$

Sea \mathcal{F} el conjunto de campos escalares que cumplen estas tres condiciones de contorno. Definimos ahora la funcional de acción $S : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \quad (1.1.7)$$

(Cuando el campo escalar es complejo, también requerimos que la acción tome valores reales.) Asumiremos que esta integral converge para cualquier $\phi \in \mathcal{F}$.

Queremos ahora definir un concepto de derivada de S con respecto a variaciones del campo. Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar real que cumple las siguientes

condiciones de contorno,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.1.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.1.9)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.1.10)$$

Sea V el conjunto de campos escalares que cumplen estas condiciones. Nótese que V posee una estructura de espacio vectorial real, pues si $\psi_1, \psi_2 \in V$, entonces $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \in V$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Por otro lado, \mathcal{F} no tiene una estructura de espacio vectorial. Como nota aparte, remarquemos que sobre V se puede definir una estructura de espacio de Banach, que es un espacio vectorial con producto interno que satisface ciertas propiedades.)

Es claro que si $\phi \in \mathcal{F}$ y $\psi \in V$, entonces $\phi + \psi \in \mathcal{F}$. Lo que haremos a continuación es definir la derivada de la acción en un punto $\phi \in \mathcal{F}$, pero con respecto a una dirección $\psi \in V$.

Definamos ahora la función $f_{\phi, \psi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{\phi, \psi}(\alpha) = S[\phi + \alpha\psi], \quad (1.1.11)$$

y la derivada de S en $\phi \in \mathcal{F}$ con respecto a $\psi \in V$ como

$$\delta_{\psi} S[\phi] = \left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{S[\phi + \alpha\psi] - S[\phi]}{\alpha}. \quad (1.1.12)$$

Nótese que hemos definido la derivada funcional $\delta_{\psi} S[\phi]$ como una derivada común de una función real $f_{\phi, \psi}$ de variable real α .

El principio variacional, $\delta_{\psi} S[\phi] = 0$, implica que la acción es estacionaria con respecto a variaciones pequeñas de ϕ . En general ϕ puede ser un mínimo, un máximo, o un punto de inflexión de S en el espacio \mathcal{F} .

Asumiendo que es posible expandir \mathcal{L} en serie de Taylor, tenemos

$$S[\phi + \alpha\psi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x) + \psi(x), \partial_\mu\phi(x) + \alpha\partial_\mu\psi(x)) \quad (1.1.13)$$

$$= S[\phi] + \alpha \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu\psi(x) \right] + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (1.1.14)$$

$$(1.1.15)$$

Entonces

$$\delta_\psi S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu\psi(x) \right]. \quad (1.1.16)$$

Podemos escribir

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu\psi(x) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \psi(x) \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \psi(x). \quad (1.1.17)$$

La divergencia en el primer término del lado izquierdo de esta ecuación se anula por el teorema de Stokes y por las condiciones de contorno que ψ satisface. (Uno puede imaginar que el espacio $\mathbb{R}^{3,1}$ es reemplazado por una caja 4-dimensional finita, y que se toma el límite cuando la caja adquiere volumen infinito. Usando el teorema de Stokes antes de tomar este límite, uno necesariamente debe evaluar ψ en $t \rightarrow \pm\infty$ o $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, y por tanto la integral tiende a cero.)

Entonces tenemos

$$\delta_\psi S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \psi(x) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \psi(x). \quad (1.1.18)$$

Puesto que $\psi \in V$ es arbitrario, encontramos que $\delta_\psi S[\phi] = 0$ implica la ecuación diferencial

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right), \quad (1.1.19)$$

que se conoce como ecuación de Euler-Lagrange.

Es posible generalizar los argumentos de esta subsección a un sistema con N campos escalares reales. En este caso, el Lagrangino es una función $\mathcal{L} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3,1})^N \rightarrow$

\mathbb{R} . La acción se define como

$$S[\phi_1, \dots, \phi_N] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_1(x), \partial_\mu \phi_1(x), \dots, \phi_N(x), \partial_\mu \phi_N(x)), \quad (1.1.20)$$

y la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right), \quad (1.1.21)$$

donde $i = 1, \dots, N$.

La generalización a campos escalares complejos, e incluso otras representaciones del grupo de Lorentz no implica complicaciones adicionales, y los argumentos de esta subsección se extienden naturalmente a dichos casos.

1.1.2. Ecuación de Klein-Gordon

En esta sección veremos la ecuación de movimiento del campo escalar clásico en su versión más sencilla, a saber, cuando el campo es libre. Asumiremos que la ecuación de movimiento es la *ecuación de Klein-Gordon*:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (1.1.22)$$

Aquí \square denota el operador D'Alembertiano $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$. La ecuación de Klein-Gordon es explícitamente invariante bajo transformaciones de Lorentz. Por el momento asumimos que ϕ es un campo real.

Heurísticamente, existen varias maneras de justificar la elección de la ecuación de Klein-Gordon. La más conocida de ellas proviene de buscar una forma relativista de la ecuación de Schrödinger de la partícula libre (refs. [3], [5], [14], [17], [20], [?], [23]). En efecto, esta última es $(\hat{E} - \hat{P}^2/2m)\phi(x) = 0$, donde $\hat{P} = -i\hbar\nabla$ es el operador cuántico de momentum lineal y $E = i\hbar\partial_t$ es el operador de energía. La ecuación corresponde a la energía de una partícula libre, $E = p^2/2m$. Si en su lugar se considera la expresión relativista $E^2 = p^2 + m^2$, y se recuerda que (E, \mathbf{p}) , al igual

que su versión en operadores $\hat{P}_\mu = i\hbar\partial_\mu = (\hat{E}, \hat{P})$, es un 4-vector, se obtiene

$$(-\hat{E}^2 + \hat{P}^2 + m^2)\phi(x) = (-\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu + m^2)\phi(x) = (\square + m^2)\phi(x) = 0,$$

con $\square = \partial_\mu\partial^\mu = -\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu$. Sin embargo, esta asociación con la ecuación de Schrödinger puede conducir a confusión: se puede mostrar que la ecuación de continuidad que se deriva de la ecuación de Klein-Gordon, que normalmente se interpreta como conservación de probabilidad, asigna una cantidad que puede tomar valores negativos al objeto que normalmente se interpreta como densidad de probabilidad. En otras palabras, no existe una interpretación probabilística del campo de Klein-Gordon análoga a la de la función de onda.

La ecuación de Klein-Gordon también se puede obtener del principio variacional mediante la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, u, v) = \frac{1}{2}v_\mu v^\mu - \frac{1}{2}m^2 u^2$$

Es conveniente también estudiar el caso cuando el campo escalar puede tomar no sólo valores reales, sino complejos. Se tiene entonces una función $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son dos campos escalares reales. El Lagrangiano puede tomarse como la suma de dos Lagrangianos libres de Klein-Gordon, uno para cada campo:

$$\mathcal{L}(x, u_1, v_1, u_2, v_2) = \frac{1}{2}v_{1\mu}v_1^\mu - \frac{1}{2}m^2 u_1^2 + \frac{1}{2}v_{2\mu}v_2^\mu - \frac{1}{2}m^2 u_2^2$$

Haciendo los cálculos, se obtiene que tanto ϕ_1 como ϕ_2 cumplen la ecuación de Klein-Gordon independientemente:

$$(\square + m^2)\phi_1(x) = 0 \quad , \quad (\square + m^2)\phi_2(x) = 0.$$

En lugar de describir el sistema con los campos ϕ_1 y ϕ_2 se puede utilizar el campo complejo ϕ y su conjugada compleja ϕ^* . En términos de estos campos, el Lagrangiano

anterior se escribe de manera más compacta:

$$\mathcal{L}(x, u, v) = \frac{1}{2}v_\nu^*v^\nu - \frac{1}{2}m^2u^*u$$

y tanto ϕ como ϕ^* cumplen la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad , \quad (\square + m^2)\phi^*(x) = 0.$$

Puesto que el campo real es el caso especial donde $\phi = \phi^*$, basta con estudiar el campo complejo para cubrir ambos casos.

1.1.3. Soluciones como combinaciones de ondas planas

Puesto que la ecuación de Klein-Gordon es lineal hiperbólica, es posible construir una base de ondas planas, en términos de las cuales se puede escribir cualquier solución de la ecuación en la forma de transformada de Fourier. El espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon forma, evidentemente, un espacio vectorial.

Si asumimos que ϕ es de cuadrado integrable, su transformada de Fourier ϕ existe y se expresa según:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(p) e^{-ipx} \quad (1.1.23)$$

$$\tilde{\phi}(p) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} \phi(x) e^{ipx}. \quad (1.1.24)$$

En principio, p es simplemente una variable de integración y al no depender de x , no tendría porqué transformarse cuando x lo hace. Por otro lado, la función ϕ sí debe ser un invariante de Lorentz. Es claro que cuando x se transforma bajo una transformación de Lorentz,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L'^\mu_\nu x^\nu, \quad (1.1.25)$$

p y ϕ también deben transformarse de la siguiente forma,

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = L^\mu_\nu p^\nu, \tilde{\phi}(p) \rightarrow \tilde{\phi}'(p') = \tilde{\phi}(p), \quad (1.1.26)$$

para mantener la invariancia Lorentz de ϕ . En otras palabras, $\tilde{\phi}$ también debe ser escalar, y vemos que se induce naturalmente una métrica de Minkowski en el espacio de coordenadas p ; de ahora en adelante llamaremos al espacio de coordenadas p el *espacio de momentos*. Si se realiza una transformación de Lorentz en el espacio de coordenadas x , se debe realizar simultáneamente la misma transformación en el espacio de momentos.

Nótese que no nos hemos preocupado de la medida de integración d^4p , puesto que es naturalmente un invariante de Lorentz,

$$d^4p' = |\det L| d^4p = d^4p.$$

La ecuación de Klein-Gordon permite obtener una ecuación para la transformada ϕ . Se tiene:

$$(\square + m^2)\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} (p^2 + m^2)\tilde{\phi}(p)e^{-ipx} = 0.$$

De aquí, la independencia lineal de las funciones e^{-ipx} implica la siguiente ecuación algebraica para ϕ ,

$$(p^2 + m^2)\tilde{\phi}(p) = 0. \quad (1.1.27)$$

Nótese que esta ecuación es invariante bajo transformaciones propias de Lorentz en el espacio de momentos.

La ecuación (1.1.27) significa que $\tilde{\phi}(p)$ puede ser diferente de cero solamente en los puntos p tales que $p^2 + m^2 = 0$. Existen dos soluciones para esta ecuación,

$$p^0 = \pm(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2},$$

que se conocen como *soluciones de energía positiva y negativa*, respectivamente. Estas

soluciones representan las dos ramas de un hiperboloide invariante de Lorentz en el espacio de momentos. Se denotará con E_p a la solución positiva,

$$E_p \equiv +(p^2 + m^2)^{1/2},$$

con lo cual las soluciones de energía positiva y negativa son $p^0 = \pm E_p$.

De otro lado, fuera del hiperboloide $p^2 + m^2 \neq 0$ se tiene claramente $\tilde{\phi}(p) = 0$. Por tanto, es razonable asumir que $\tilde{\phi}(p)$ posee un factor $\delta(p^2 + m^2)$, es decir,

$$\tilde{\phi}(p) = \delta(p^2 + m^2)\tilde{\psi}(p)$$

donde $\tilde{\psi}$ es una función continua de p . Nótese que como $\tilde{\phi}(p)$ y $\delta(p^2 + m^2)$ son escalares de Lorentz en el espacio de momentos, $\tilde{\psi}(p)$ también lo es. Usando esta expresión, la transformada de Fourier se convierte en una integración sobre la superficie de masa,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 + m^2) \tilde{\psi}(p) e^{-ipx} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [\delta(p^0 + E_p) + \delta(p^0 - E_p)] \tilde{\psi}(p) e^{-ipx} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \tilde{\psi}(E_p, \mathbf{p}) e^{-i(E_p t - \mathbf{p}\mathbf{x})} + \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \tilde{\psi}(-E_p, \mathbf{p}) e^{i(E_p t + \mathbf{p}\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Bajo un cambio de variable $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ en la segunda integral se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \tilde{\psi}(-E_p, \mathbf{p}) e^{i(E_p t + \mathbf{p}\mathbf{x})} \\ = \int_{\infty}^{-\infty} \int_{\infty}^{-\infty} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{d^3(-\mathbf{p})}{(2\pi)^3 2E_p} \tilde{\psi}(-E_p, -\mathbf{p}) e^{i(E_p t - \mathbf{p}\mathbf{x})} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \tilde{\psi}(-E_p, -\mathbf{p}) e^{i(E_p t - \mathbf{p}\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

pues E_p es una función par de \mathbf{p} . Recordando que $p^0 x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x} = p^0 x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x}$, se tiene entonces

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} [\tilde{\psi}(p) e^{-ipx} + \tilde{\psi}(-p) e^{ipx}]_{p^0 = E_p}. \quad (1.1.28)$$

La medida $\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p}$ aparece muy frecuentemente y por ello definimos

$$d\tilde{p} := \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p}$$

con lo cual la ecuación (1.1.28) se escribe

$$\phi(x) = \int d\tilde{p} [\tilde{\psi}(p)e^{-ipx} + \tilde{\psi}(-p)e^{ipx}]_{p^0=E_p}. \quad (1.1.29)$$

Veremos ahora que $d\tilde{p}$ es una medida invariante bajo transformaciones propias de Lorentz. En efecto, la ecuación (1.1.29) es de la forma

$$\phi(x) = \int d\tilde{p} f(p, x)|_{p^0=E_p}$$

donde $f(p, x)$ es una función Lorentz-invariante. Se tiene

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} f(p, x)|_{p^0=E_p}$$

Pero $\delta(p^2 + m^2) = \frac{1}{2E_p} (\delta(p^0 - E_p) + \delta(p^0 + E_p))$. Entonces

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 + m^2) \theta(p^0) f(p, x) \quad (1.1.30)$$

donde $\theta(p^0)$ es igual a 1 si $p^0 \geq 0$ e igual a 0 si $p^0 < 0$. Esta función es también invariante bajo transformaciones propias de Lorentz, ya que p^0 no cambia de signo bajo dichas transformaciones (sin embargo, bajo una transformación general de Lorentz, $\theta(p^0)$ sí puede cambiar). Finalmente, sabemos que d^4p es invariante de Lorentz, y por tanto $d\tilde{p}$ también lo es. Usando (1.1.30) se tiene una expresión explícitamente invariante de Lorentz para (1.1.29):

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 + m^2) \theta(p^0) [\tilde{\psi}(p)e^{-ipx} + \tilde{\psi}(-p)e^{ipx}].$$

Pasando a otro punto, la condición de realidad del campo ϕ impone una condi-

ción sobre la función $\tilde{\psi}$. Hallaremos esta condición. En efecto, tenemos $\phi^* = \phi$, donde

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(p^2 + m^2) \theta(p^0) [\tilde{\psi}^*(p) e^{ipx} + \tilde{\psi}^*(-p) e^{-ipx}].$$

Consecuentemente, de la independencia lineal de las funciones $e^{\pm ipx}$, se obtiene la relación

$$\tilde{\psi}^*(p) = \tilde{\psi}(-p).$$

Por tanto, es conveniente definir

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}) &:= \psi(p) |_{p^0=E_p} \\ a^*(\mathbf{p}) &= \tilde{\psi}^*(p) |_{p^0=E_p} = \tilde{\psi}(-p) |_{p^0=E_p}, \end{aligned}$$

para simplificar la expresión (1.1.29),

$$\phi(x) = \int d\tilde{p} [a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^*(\mathbf{p}) e^{ipx}],$$

donde se ha omitido indicar la evaluación de las funciones e^{ipx} en $p^0 = E_p$ por comodidad. Esta relación se interpreta como la descomposición lineal de ϕ en la base de ondas planas e^{ipx} . Esta interpretación se estudiará en mayor detalle más adelante.

Ahora, se puede calcular los coeficientes $a(\mathbf{p})$ tomando la proyección del campo $\phi(x)$ sobre una onda plana determinada $e^{iqx} = e^{i(E_q t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}$:

$$\begin{aligned} \int d^3x \phi(x) e^{iqx} &= \int d\tilde{p} [a(\mathbf{p}) \int e^{-i(p-q)x} d^3x + a^*(\mathbf{p}) \int e^{i(p+q)x} d^3x] \\ &= \int d\tilde{p} [a(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{-i(E_p - E_q)t} + a^*(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) e^{i(E_p + E_q)t}] \\ &= \frac{1}{2E_q} [a(\mathbf{q}) + a^*(\mathbf{q}) e^{2iE_q t}]. \end{aligned}$$

Similarmente, de la expresión de $\partial_0\phi(x)$, que se denotará en adelante $\pi(x)$:

$$\pi(x) := \partial_0\phi(x) = \int d\tilde{p}(-iE_p)[a(p)e^{-ipx} - a^*(p)e^{ipx}],$$

se obtiene otra relación para los coeficientes $a(q)$:

$$\int d^3x \partial_0\phi(x)e^{iqx} = \frac{-i}{2}[a(q) - a^*(q)e^{2iE_q t}]$$

Despejando algebraicamente $a(q)$, se tiene

$$a(q) = \int d^3x [E_q\phi(x) + i\pi(x)]e^{iqx} \quad (1.1.31)$$

Nótese que por definición, $q^0 = E_q$ ni $a(q)$ dependen del tiempo. En efecto, podemos comprobar que la aparente dependencia del tiempo en el lado derecho de (1.1.31) se cancela.

Así, los valores de $\phi(\mathbf{x}, t_0)$ y $\pi(\mathbf{x}, t_0)$ para un tiempo inicial dado y fijo t_0 sirven de condiciones iniciales para la ecuación de Klein-Gordon; la correspondiente solución $\phi(\mathbf{x}, t)$ para un tiempo t arbitrario se halla calculando primero las funciones $a(q)$ según (1.1.31).

1.1.4. Interacción de campos clásicos escalares

Se desea ahora estudiar un sistema con múltiples campos. Si se asume que la densidad Lagrangiana es *separable*, es decir, si se puede escribir en la forma

$$\mathcal{L}(u_1, v_1^\mu, \dots, u_N, v_N^\mu) = \mathcal{L}(u_1, v_1^\mu) + \dots + \mathcal{L}(u_N, v_N^\mu), \quad (1.1.32)$$

entonces para cada campo la ecuación de Euler-Lagrange predice una ecuación de movimiento independiente de los demás campos. Este sistema se puede interpretar como un conjunto de campos libres, donde la evolución de cada campo no es afectada por la presencia de los demás campos.

Un caso más interesante es el de campos en interacción, es decir, cuando las ecuaciones

de movimiento presentan acoplamientos entre los distintos campos. Un caso especial de esta forma resulta si a una densidad Lagrangiana separable (1.1.32) se le suma un término que combine dos o más campos. Este no es en absoluto la única forma de obtener ecuaciones acopladas, pero las densidades Lagrangianas que se estudiarán en lo sucesivo serán precisamente de esta forma particular.

La parte libre de la densidad Lagrangiana es siempre separable en el sentido de (1.1.32). Por otro lado, el término de interacción combina uno o mas campos y se asumirá que depende solo de los campos en sí y no de sus derivadas.

Considérese entonces un sistema de N campos escalares y sea $\mathcal{V} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la *densidad Lagrangiana de interacción*. Entonces la densidad Lagrangiana total es

$$\mathcal{L}(u_A, v_A^\mu) = \mathcal{L}_0(u_A, v_A^\mu) - \mathcal{V}(u_A)$$

donde \mathcal{L}_0 es la suma de las densidades Lagrangianas de los campos libres:

$$\mathcal{L}_0(u_A, v_A^\mu) = \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} [v_A^\mu v_{A\mu} - m_A^2 u_A^2]$$

La función \mathcal{V} también se conoce como el *potencial* del sistema.

Es conveniente separar en la densidad Lagrangiana libre \mathcal{L}_0 los términos que dependen de los campos de aquellos que dependen de las derivadas:

$$\mathcal{L}_0(u_A, v_A^\mu) = \mathcal{T}(v_A^\mu) - \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} m_A^2 u_A^2$$

donde

$$\mathcal{T}(v_A^\mu) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} v_A^\mu v_{A\mu}$$

se denomina el *término de energía cinética* y los sumandos

$$\frac{1}{2} m_A^2 u_A^2,$$

para $i = 1, \dots, N$, se llaman *términos de masa*.

Entonces si se conoce el potencial, se puede escribir la ecuación de Euler-Lagrange para cada campo:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_A^\nu}(x, \phi_B(x), \partial_\mu \phi_B(x)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A}(x, \phi_B(x), \partial_\mu \phi_B(x))$$

obteniéndose

$$(\square + m_A^2)\phi_A(x) = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u_A}(\phi_B(x)),$$

para $A, B = 1, \dots, N$. Este sistema de ecuaciones acopladas exhibe la interacción de los campos escalares ϕ_1, \dots, ϕ_N y es, en general, no lineal. La solución analítica de este sistema estará sujeta a las condiciones iniciales o de contorno que se impongan.

El ejemplo más simple de interacción es el de un solo campo:

$$\mathcal{L}(u, v^\mu) = \frac{1}{2}(v^\mu v_\mu - m^2 u^2) - \mathcal{V}(u).$$

En estas condiciones se dice que se tiene un caso de autointeracción.

Un ejemplo de autointeracción es la *teoría ϕ^4* :

$$\mathcal{V}(u) = \frac{\lambda}{4!} u^4,$$

donde λ es una constante. En este caso la ecuación de Euler-Lagrange es

$$(\square + m^2)\phi(x) = -\frac{\lambda}{3!}\phi(x)^3.$$

1.1.5. Interacción con un potencial externo y función de Green

Aquí trataremos el caso de un sistema no cerrado de campos que interactúa con un campo externo. De ello resulta necesario el estudio de las funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon, que serán de mucha importancia en el estudio de los campos cuánticos.

En la sección anterior se trató con un sistema cerrado de campos. Se vio que se tiene

conservación de energía, momento y momento angular. En cambio, si se considera el sistema parcial formado por sólo algunos de los campos, se tiene un sistema no cerrado, ya que existe interacción externa con el resto de los campos, y por tanto las cantidades físicas como la energía de este sistema parcial no se conservan.

En esta sección estudiaremos el caso de un sistema de campos no cerrado A que interactúa con otro sistema B , de modo que el sistema total sea cerrado y asumiendo conocida la evolución de los campos de B . Se dice que el sistema A interactúa con un potencial externo, creado por B .

Las ecuaciones de movimiento de los campos del sistema A se hallan por el principio variacional reemplazando en la densidad Lagrangiana total, correspondiente al sistema cerrado $A + B$, las expresiones conocidas de los campos de B .

Así, si la densidad Lagrangiana total es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0A} + \mathcal{L}_{0B} - \mathcal{V}(A, B),$$

se tendrá al reemplazar la evolución de B

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0A} + \mathcal{L}_{0B}(x) - V(A, x).$$

El término $\mathcal{L}_{0B}(x)$ se puede omitir porque no depende ni de los campos de A ni de sus derivadas, y por tanto no tiene efecto sobre las ecuaciones de movimiento de dichos campos. Por tanto se puede escribir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0A} - V(A, x).$$

De este modo, el movimiento de un sistema de campos en un potencial externo se define por una densidad Lagrangiana ordinaria, con la única diferencia que ahora el potencial puede depender explícitamente de x .

Un caso de especial importancia es el de un campo ϕ en un campo externo definido

por el potencial

$$U(x, \phi(x)) = \phi(x)F(x)$$

donde F es una función $\mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . En estas condiciones la ecuación de movimiento de ϕ es

$$(\square + m^2)\phi(x) = F(x).$$

Esta *ecuación inhomogénea de Klein-Gordon* tiene la propiedad de linealidad. Así, es posible aplicar los varios métodos conocidos para resolver ecuaciones lineales. En particular, será de utilidad aquí y en el estudio de los campos cuánticos estudiar la solución mediante el método de la función de Green.

Primero, deben estar dadas ciertas condiciones de contorno para el problema. Si se conoce una solución particular ϕ_P de la ecuación inhomogénea, la solución general está dada por

$$\phi = \phi_H + \phi_P$$

donde ϕ_H es la solución general de la ecuación homogénea de Klein-Gordon con condiciones de contorno de Dirichlet o de Neumann.

El método de la función de Green provee una solución particular del problema inhomogéneo. Según este método, existe una función $G : \mathbb{M}^4 \times \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, denominada *función de Green*, con las siguientes propiedades:

1. G depende de las condiciones de contorno del problema.
2. G es continua en su dominio y es de clase C^1 en puntos (x, y) con $x \neq y$.
3. G es solución de la ecuación homogénea respecto a la primera variable:

$$(\square + m^2)G(x, y) = 0 \quad x \neq y,$$

4. La función

$$\phi_P(x) = \int d^4y G(x, y) F(y)$$

es solución del problema no homogéneo, es decir,

$$(\square + m^2)\phi_P(x) = F(x)$$

y ϕ_P cumple las condiciones de contorno del problema.

Así, la solución general de la ecuación con fuente es:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^4y G(x, y) J(y)$$

donde ϕ_0 es la solución general de la ecuación homogénea y la *función de Green* $G(x, y)$ es:

$$G(x, y) = G_1(x, y) \quad \text{para } x^0 < y^0$$

$$G(x, y) = G_2(x, y) \quad \text{para } x^0 > y^0$$

siendo además en $x^0 = y^0$ la función $G(x, y)$ continua y su derivada presenta un salto (es discontinua).

Las funciones G_1 y G_2 son combinaciones lineales de 2 soluciones $\Delta^{(+)}$ y $\Delta^{(-)}$ de la ecuación de Klein-Gordon:

$$G_1(x) = a(y)\Delta^{(+)}(x) + b(y)\Delta^{(-)}(x)$$

$$G_2(x) = c(y)\Delta^{(+)}(x) + d(y)\Delta^{(-)}(x)$$

Definimos:

$$\Delta^{(\pm)}(x) = \pm \frac{1}{i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{\mp i(\omega_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

donde $\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}$. Es posible escribir estas funciones en forma explícitamente Lorentz-invariante:

$$\Delta^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{i} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \Theta(\pm p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx}$$

donde Θ es la función de Heaviside o función escalón.

Verifiquemos que Δ^\pm son soluciones de la ecuación homogénea:

$$(\square + m^2)\Delta^{(\pm)} = \pm \frac{1}{i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} (-\omega_p^2 + \vec{p}^2 + m^2) e^{\mp i(\omega_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = 0$$

Las funciones $\Delta^{(\pm)}$ coinciden con los residuos de la función compleja:

$$u(p^0) = \frac{1}{i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} = \frac{e^{-ipx}}{(p^0)^2 - \omega_p^2}$$

En efecto, la función u tiene 2 polos de primer orden en $p^0 = \pm\omega_p$. Los residuos son:

$$R_1 = \text{Res} \left[\frac{e^{-ipx}}{(p^0)^2 - \omega_p^2} \right]_{p^0 = -\omega_p} = \lim_{p^0 \rightarrow -\omega_p} (p^0 + \omega_p) \frac{e^{-ipx}}{(p^0)^2 - \omega_p^2} = -\frac{e^{i(\omega_p t + \vec{p} \cdot \vec{x})}}{2\omega_p}$$

$$R_2 = \text{Res} \left[\frac{e^{-ipx}}{(p^0)^2 - \omega_p^2} \right]_{p^0 = \omega_p} = \lim_{p^0 \rightarrow \omega_p} (p^0 - \omega_p) \frac{e^{-ipx}}{(p^0)^2 - \omega_p^2} = \frac{e^{-i(\omega_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})}}{2\omega_p}$$

Entonces una función de Green se puede escribir como una combinación lineal de estos residuos. De otro modo, una función de Green corresponde a la integración en un plano complejo $p_0 = \text{Re}(p^0) + i\text{Im}(p^0)$ sobre un contorno definido C que cubre toda la recta real de p^0 y que rodea los puntos $\pm\omega_p$. La forma explícita de este contorno depende evidentemente de las condiciones que debe cumplir la solución de la ecuación. Es decir, tenemos:

$$G(x, y) = \int_C \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 - m^2}$$

1.2. El campo escalar cuántico

En la teoría clásica, el campo y sus cantidades conservadas son funciones bien definidas del espacio-tiempo y se conocen con toda precisión. En la teoría cuántica se asume que la función de campo no se puede conocer con toda certeza, sino sólo la probabilidad de que el campo esté representado por una determinada función de campo. Del mismo modo, no se puede hablar de un valor determinado de las cantidades conservadas del campo, sino sólo de una distribución de probabilidad para

sus valores. Así, se habla de valores medios y de la indeterminación de dichas cantidades conservadas. Esta modificación de los conceptos básicos de la teoría conduce a la cuantización del espacio de estados del campo, y finalmente a la interpretación del campo en términos de partículas. Mientras que en esta sección sólo se estudia el campo cuántico libre, en la siguiente sección se estudiará la interacción de campos cuánticos, o lo que es lo mismo, la interacción de partículas.

1.2.1. Cuantización de la teoría clásica

En las secciones anteriores el campo estaba representado por una función $\mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ denominada campo clásico. Se dice que el *estado (clásico) del campo* está dado por dicho campo clásico. Conociendo el campo clásico, se conocen también las cantidades conservadas del campo como la energía y el momento. Es decir, la teoría del campo clásico es *determinista*, en el sentido que conocer el estado del campo implica que las cantidades conservadas están completamente determinadas.

La *cuantización* de la teoría clásica consiste en una modificación de algunas asunciones de la sección anterior. La idea principal es que la teoría cuántica es *no determinista*, en el sentido que conocer el estado del campo implica conocer sólo una *distribución de probabilidad* de los valores de las cantidades conservadas. Para ello es necesario modificar el concepto de estado del campo. Así mismo, el término *conservación* de una cantidad toma otro sentido. Por ello se prefiere el término *observables* para referirse a la versión cuántica de las cantidades conservadas.

La construcción de la teoría cuántica se realiza respetando el *principio de correspondencia*, es decir, la teoría clásica se debe obtener de la teoría cuántica como el límite para muy pequeñas indeterminaciones en las distribuciones de probabilidad de los observables. Esta construcción se basa en las siguientes asunciones:

1. Existe un conjunto de estados posibles del campo con la estructura de un espacio de Hilbert \mathcal{H} .
2. El campo está representado por una función $\hat{\phi} : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ que a cada x en \mathbb{M}^4 le asocia un operador lineal $\phi(x) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, llamado *operador de campo*,

tal que

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = [\hat{\phi}^\dagger(x), \hat{\phi}(x')] = 0 \quad \text{para } x, x' \in \mathbb{M}^4,$$

donde $\hat{\phi}^\dagger(x)$ representa el operador adjunto de $\hat{\phi}(x)$.

3. Existe una función $\hat{\pi} : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ que a cada x en \mathbb{M}^4 le asocia un operador lineal $\hat{\pi}(x) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, llamado *momento conjugado del campo*, tal que

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(x')] &= [\hat{\pi}^\dagger(x), \hat{\pi}(x')] = 0 \quad \text{para } x, x' \in \mathbb{M}^4; \\ [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \text{para } t \in \mathbb{R}; \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

4. Los operadores $\hat{\phi}(x)$ y $\hat{\pi}(x)$ son invariantes de Lorentz.
5. A cada observable le corresponde un operador lineal $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ hermítico que es funcional del operador de campo $\hat{\phi}(x)$. En particular, a la energía le corresponde un operador \hat{H} , denominado *Hamiltoniano*, y al momento lineal un operador $\hat{\mathbf{P}}$. Juntos forman el operador de 4-momentum, $P^\mu = (\hat{H}, \hat{\mathbf{P}})$.
6. Los operadores $\hat{\phi}(x)$ y $\hat{\pi}(x)$, así como todo observable $\hat{A}(x)$, satisfacen la *ecuación de movimiento de Heisenberg*,

$$[\hat{A}(x), \hat{P}^\mu] = i\partial^\mu \hat{A}(x)$$

Se construirá en primer lugar los operadores que corresponden a los observables. Por el principio de correspondencia, un campo clásico $\psi(x)$ se interpreta como el valor medio del operador de campo $\hat{\phi}(x)$ en un cierto estado del campo $|\psi\rangle$:

$$\psi(x) \leftrightarrow \langle \psi | \hat{\phi}(x) | \psi \rangle$$

Similarmente, una cantidad conservada clásica A corresponde al valor medio de un operador observable \hat{A} en un estado del campo $|\psi\rangle$.

$$A \leftrightarrow \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Es natural entonces suponer que los operadores observables tienen la misma expresión que las cantidades conservadas. Sin embargo, debido a que el producto de números reales es conmutativo, existen muchas expresiones equivalentes de las cantidades conservadas que corresponden a operadores diferentes. La solución a este problema está en el *ordenamiento normal*, que se tratará más adelante. Por ahora, podemos asumir que el Hamiltoniano (que corresponde a la energía clásica) y el operador de momento poseen la misma forma clásica:

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (\partial^0 \hat{\pi}(x))^2 + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi}(x))^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}(x)^2 \right]$$

$$\hat{P} = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} \partial^0 \hat{\phi}(x) \nabla \hat{\phi}(x)$$

Estas expresiones aparecen explícitamente en la ecuación de Heisenberg,

$$[\hat{A}(x), \hat{H}] = i\partial_t \hat{A}(x)$$

$$[\hat{A}(x), \hat{P}] = i\nabla \hat{A}(x).$$

De aquí es claro que un observable \hat{A} conmuta con el Hamiltoniano si y sólo si dicho operador no depende explícitamente del tiempo. En particular, $i\partial_t \hat{H} = [\hat{H}, \hat{H}] = 0$, es decir, el Hamiltoniano es constante en el tiempo. Además, se probará más adelante que $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$; esto implica que el operador de momentum es también una constante de movimiento.

De la misma manera, un observable A conmuta con el operador de momentum si y sólo si dicho operador no depende explícitamente de la coordenada espacial \mathbf{x} , o en otras palabras, es invariante bajo traslaciones. En particular, $[\hat{H}, \hat{P}] = [\hat{P}, \hat{P}] = 0$; y por tanto \hat{H} y \hat{P} son invariantes bajo traslaciones.

De la primera ecuación de Heisenberg, se ve la dependencia temporal del campo $\phi(x)$,

$$i\partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \int d^3\mathbf{x}' \left\{ \frac{1}{2} (\partial^0 \hat{\pi}(t, \mathbf{x}'))^2 + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi}(t, \mathbf{x}'))^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')^2 \right\}]$$

Utilizando las reglas de conmutación, se obtiene

$$i\partial_t\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = i\hat{\pi}(t, \mathbf{x}),$$

es decir,

$$\hat{\pi}(x) = \dot{\phi}(x),$$

análogamente al caso clásico. Sin embargo, nótese que esta expresión no proviene de un tratamiento Lagrangiano.

Similarmente, la primera ecuación de Heisenberg aplicada a $\hat{\pi}(x)$ da

$$i\partial_t\hat{\pi}(t, \mathbf{x}) = -i(-\nabla^2 + m^2)\hat{\phi}(t, \mathbf{x}),$$

y por tanto, de la expresión de $\hat{\pi}(x)$ antes obtenida,

$$(\square + m^2)\hat{\phi}(x) = 0.$$

Es decir, el campo $\phi(x)$ cumple la ecuación de Klein-Gordon, también en analogía con el caso clásico. Obsérvese sin embargo que la ecuación no proviene de un principio variacional.

Es interesante notar la manera cómo estas dos expresiones clásicas tienen su equivalente cuántico como consecuencia conjunta del principio de correspondencia, de la ecuación de Heisenberg y de los conmutadores asumidos entre $\hat{\phi}(x)$ y $\hat{\pi}(x)$.

1.2.2. El espacio de momentos

En esta sección construiremos una expresión en ondas planas del campo cuántico. Los coeficientes de dicha expansión, que ya aparecían en el caso clásico, tienen en la teoría cuántica una estructura más rica que se irá viendo en esta y las siguientes secciones.

Considere un espacio de Minkowski \mathbb{M}_K^4 , al que se denominará *espacio de mo-*

mentos y sea $k = (k^0, \mathbf{k})$ un elemento de dicho espacio. Dado un valor temporal t , se define el *operador de aniquilación* $\hat{a}(\mathbf{k})$ en el tiempo t en analogía con la componente de Fourier $a(k)$ del campo clásico,

$$\hat{a}(\mathbf{k}) := \int d^3\mathbf{x} \{E_k \hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)\} e^{i\mathbf{k}x},$$

donde $k^0 = E_k$. Similarmente, el *operador de creación* para un t se define como el operador adjunto al operador de aniquilación para t ,

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) := \int d^3\mathbf{x} \{E_k \hat{\phi}(x) - i\hat{\pi}(x)\} e^{-i\mathbf{k}x}.$$

Se verá primero que estas expresiones no dependen del t elegido, es decir, son independientes del tiempo. Para ello basta calcular el conmutador con el Hamiltoniano,

$$[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{H}]$$

Con la ayuda de los conmutadores entre $\phi(x)$ y $\hat{\pi}(x)$, se puede calcular el conmutador de $\hat{a}(\mathbf{k})$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})$. Para esto se elige por comodidad el mismo tiempo valor temporal en las expresiones de $\hat{a}(\mathbf{k})$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})$,

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] &= \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \{ E_q e^{-iqx} E_k e^{iky} [\phi(y), \phi(x)] + E_q e^{-iqx} i e^{iky} [\pi(y), \phi(x)] \\ &\quad - i e^{-iqx} E_k e^{iky} [\phi(y), \pi(x)] - i e^{-iqx} i e^{iky} [\pi(y), \pi(x)] \} \\ &= \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \{ (E_q + E_k) e^{i(ky - qx)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \} \\ &= (E_k + E_q) \int d^3\mathbf{x} e^{i(k - q)x} \\ &= (E_k + E_q) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) e^{i(E_k - E_q)t} \end{aligned}$$

Como esta expresión es diferente de cero sólo cuando $\mathbf{k} = \mathbf{q}$, se puede escribir

$$[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3 (2E_k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$$

Este conmutador será de extrema importancia en lo sucesivo. De manera similar se obtiene la relación

$$[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}(\mathbf{q})] = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{k}, \mathbf{q}.$$

Los operadores $\hat{\phi}(x)$ y $\hat{\pi}(x)$ se pueden recuperar de los $\hat{a}(\mathbf{p})$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ por medio de proyecciones, obteniéndose

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \int d\tilde{p} \{ \hat{a}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \} \\ \hat{\pi}(x) &= \int d\tilde{p} (-iE_p) \{ \hat{a}(\mathbf{p}) e^{-ipx} - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \}. \end{aligned}$$

Estas relaciones son análogas a las expresiones de la transformada de Fourier del campo clásico. Como primera aplicación, se verá que la imposición del conmutador equitemporal no-covariante $[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ implica relaciones de conmutación covariantes entre el campo $\hat{\phi}(x)$ y su momento conjugado $\hat{\pi}(x)$.

Para verificar esta afirmación, nótese en primer lugar que la expresión del campo se puede entender como la suma de un *término de energía positiva* y un *término de energía negativa* de $\phi(x)$, cada uno Lorentz-invariante,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{(+)}(x) &= \int d\tilde{p} \hat{a}(\mathbf{p}) e^{ipx} \\ \hat{\phi}^{(-)}(x) &= \int d\tilde{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ipx}. \end{aligned}$$

De este modo, la separación $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$ es Lorentz-invariante. Naturalmente se puede separar del mismo modo el operador $\hat{\pi}(x)$ como suma de un término de energía positiva y otro de energía negativa.

Se comprobará entonces que el conmutador $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ tiene una expresión covariante. Se tiene:

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)]$$

Como $\phi^{(+)}$ sólo posee operadores de aniquilación y $\phi^{(-)}$ operadores de creación, ellos

conmutan:

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)] = [\phi^{(-)}(x), \phi^{(-)}(y)] = 0.$$

Luego,

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)].$$

Por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2w_k} \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2w_{k'}} a(\vec{k}) e^{i(k'y - kx)} [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2w_k} e^{-ik(x-y)} =: i\Delta^{(+)}(x-y), \end{aligned}$$

y evidentemente,

$$[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] = -[\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] = -i\Delta^{+}(y-x) =: i\Delta^{(-)}(x-y)$$

Note que $\Delta^{(+)}$ y $\Delta^{(-)}$ son Lorentz-invariantes. Entonces:

$$[\phi(x), \phi(y)] = i(\Delta^{(+)}(x-y) + \Delta^{(-)}(x-y))$$

Es claro que este conmutador es Lorentz-invariante. De la misma manera, se puede verificar que para los conmutadores $[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)]$, $[\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(y)]$ se deducen expresiones Lorentz invariantes.

Con la expresión en serie de Fourier de $\phi(x)$, y sabiendo que los operadores observables son funcionales de $\hat{\phi}(x)$ y de sus derivadas, aquellos se pueden escribir en función de los operadores de creación y aniquilación $\hat{a}(k)$ y $\hat{a}^\dagger(k)$. Estas expresiones serán muy útiles más adelante para estudiar el espectro de valores propios y vectores propios de observables como el Hamiltoniano y del operador de momentum.

Así, se tiene para el Hamiltoniano,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} (\hat{\pi}(x)^2 + (\nabla\hat{\phi}(x))^2 + m^2\hat{\phi}(x)^2) \\
&= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left\{ (-1) \left(\frac{1}{4} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{(2E_p)(2E_q)} \right)^2 (\hat{a}(\mathbf{p})e^{-ipx} - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}) \right. \\
&\quad \times (\hat{a}(\mathbf{q})e^{-iqx} - \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{iqx}) + m^2 \frac{1}{(2E_p)(2E_q)} (\hat{a}(\mathbf{p})e^{-ipx} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}) \\
&\quad \times (\hat{a}(\mathbf{q})e^{-iqx} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{iqx}) \left. \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left\{ (-1) \frac{(E_p E_q + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{(2E_p)(2E_q)} (\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q})e^{-i(E_p+E_q)t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - \right. \\
&\quad - \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{-i(E_p-E_q)t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q})e^{i(E_p-E_q)t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \\
&\quad + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{i(E_p+E_q)t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q})) + \frac{m^2}{(2E_p)(2E_q)} (\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q})e^{-i(E_p+E_q)t} \\
&\quad \times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{-i(E_p-E_q)t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \\
&\quad \left. + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q})e^{i(E_p-E_q)t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{i(E_p+E_q)t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q})) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})) \cdot \left(\frac{E_p^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}{(2E_p)^2} \right),
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d\tilde{p} E_p (\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})).$$

Además, el conmutador $[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3 2E_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ permite escribir

$$\hat{H} = \int d\tilde{p} E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{p} \delta(\mathbf{0}) E_p.$$

El segundo sumando, que se considera infinito, será tratado más adelante.

Similarmente, para el operador de momentum,

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d^3\mathbf{x} \hat{\pi}(x) \nabla \hat{\phi}(x)$$

se tiene la relación

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d\tilde{p} \mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{p} \delta(\mathbf{0}) \mathbf{p}.$$

Aunque el sumando con $\delta(0)$ aparece también aquí, la integral se anula por ser impar, de modo que para este caso se tiene exactamente

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d\tilde{p} \mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p}).$$

Como aplicación directa, es sencillo comprobar que el operador $\hat{\mathbf{P}}$ no depende explícitamente del tiempo:

$$\begin{aligned} i\partial_t \hat{\mathbf{P}} &= [\hat{\mathbf{P}}, H] = \frac{1}{4} \int d\tilde{p} \int d\tilde{q} \mathbf{p} E_q [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{q})] \\ &= \frac{1}{4} \int d\tilde{p} \int d\tilde{q} \mathbf{p} E_q \{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) [\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})] \hat{a}(\mathbf{q}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}), \hat{a}(\mathbf{q})] \hat{a}(\mathbf{p}) \} \\ &= \frac{1}{4} \int d\tilde{p} \int d\tilde{q} \mathbf{p} E_q \{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{q}) (2\pi)^3 2E_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{p}) (2\pi)^3 2E_q \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \} \end{aligned}$$

y luego, $[\hat{\mathbf{P}}, \hat{H}] = 0$, por tanto

$$\partial_t \hat{\mathbf{P}} = 0,$$

que es lo que se quería comprobar.

Se verá ahora el tratamiento del segundo sumando en el Hamiltoniano. En realidad, aún no se sabe si el otro sumando también da un resultado divergente. Se verá posteriormente que no es así.

El Hamiltoniano corresponde al observable de energía del campo, por tanto, para un cierto estado $|\psi\rangle$ normalizado del campo, la energía es

$$E_\psi = \langle \hat{H} \rangle_\psi := \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle.$$

De acuerdo a lo dicho, el valor de la energía diverge. En realidad en una medición lo que obtiene no es el valor $\langle \hat{H} \rangle_\psi$, sino su valor relativo respecto a un *nivel cero* de energía. Para esto, es necesario designar un estado arbitrario $|\chi\rangle$, y definir un operador

$$\hat{H}_\chi := \hat{H} - \langle \hat{H} \rangle_\chi.$$

Evidentemente, $\langle \hat{H}' \rangle_\chi = 0$, es decir, χ se ha definido como el cero de la energía.

Ahora, para un estado ψ ,

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}_x \rangle_\psi &= \langle \hat{H} \rangle_\psi - \langle \hat{H} \rangle_x \\ &= \langle \psi | \int d\tilde{p} E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p}) | \psi \rangle - \langle \chi | \int d\tilde{p} E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p}) | \chi \rangle.\end{aligned}$$

De aquí que es conveniente estudiar el operador $d\tilde{p} E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p})$, al cual denotaremos

$$\begin{aligned}\hat{H}' &:= \hat{H} - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{p} \delta(\mathbf{0}) E_p \\ &= \int d\tilde{p} E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

Es decir, H' es el Hamiltoniano sin el término infinito. Note que $|h\rangle$ es un vector propio de H' con valor propio h ,

$$\hat{H}'|h\rangle = h|h\rangle$$

si y sólo si $|h\rangle$ es vector propio de \hat{H} con valor propio $h + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{p} \delta(\mathbf{0}) E_p$,

$$\hat{H}|h\rangle = (h + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{p} \delta(\mathbf{0}) E_p) |h\rangle.$$

Con esta notación,

$$\hat{H}_x = \hat{H}' - \langle \hat{H}' \rangle_x.$$

Además,

$$[\hat{H}', \hat{A}] = \hat{B}$$

si y sólo si

$$[\hat{H}, \hat{A}] = \hat{B}.$$

Es decir, \hat{H}' cumple las mismas reglas de conmutación que H . De todos estos resultados, es clara la conveniencia de estudiar \hat{H}' en lugar de \hat{H} .

1.2.3. Interpretación de partículas del campo cuántico

Aquí veremos la importancia de los operadores de creación y aniquilación en la interpretación de partículas del campo cuántico libre. Además, calcularemos los vectores propios del Hamiltoniano y su espectro de valores propios. Veremos que estos vectores son también vectores propios del operador de momento $\hat{\mathbf{P}}$.

Sea $|\lambda\rangle$ vector propio de \hat{H}' con valor propio λ ,

$$\hat{H}'|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle.$$

Suponiendo por comodidad que $|\lambda\rangle$ está normalizado, se tiene

$$\langle\lambda|\hat{H}'|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle = \lambda,$$

es decir,

$$\int d\tilde{p} E_p \langle\lambda|\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})|\lambda\rangle = \int d\tilde{p} E_p \|\hat{a}(\mathbf{p})|\lambda\rangle\|^2 = \lambda \|\lambda\rangle\|^2.$$

De aquí es claro que $\lambda \geq 0$, es decir, los valores propios del Hamiltoniano no pueden ser negativos. Además, suponiendo que $|\lambda\rangle \neq 0$, se tiene que $\lambda = 0$ si y sólo si $\hat{a}(\mathbf{p})|\lambda\rangle = 0$, para todo \mathbf{p} . Un estado tal se denomina *estado de vacío*.

Veamos que el suponer la existencia de un vector propio cualquier $|\lambda\rangle$, implica la existencia de un estado de vacío que se denotará $|0\rangle$, es decir, un estado tal que

$$\hat{H}'|0\rangle = 0$$

En efecto, si $\lambda = 0$, simplemente $|\lambda\rangle = |0\rangle$. El caso $\lambda > 0$ requiere primero verificar las siguientes identidades para todo \mathbf{p} :

$$[\hat{H}', \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})] = E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$$

$$[\hat{H}', \hat{a}(\mathbf{p})] = -E_p \hat{a}(\mathbf{p}).$$

La veracidad de estas relaciones es directa. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 [\hat{H}', \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})] &= \left[\int d\tilde{q} \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{q}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \right] \\
 &= \int d\tilde{q} E_q \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) [\hat{a}(\mathbf{q}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})] \\
 &= \int d\tilde{q} E_q \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) (2\pi)^3 2E_q \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \\
 &= E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}).
 \end{aligned}$$

Similarmente, se prueba la relación $[\hat{H}', \hat{a}(\mathbf{p})] = -E_p \hat{a}(\mathbf{p})$. Entonces, dado \mathbf{p} cualquiera, se tiene

$$\hat{H}' \hat{a}(\mathbf{p}) |\lambda\rangle = (\lambda - E_p) \hat{a}(\mathbf{p}) |\lambda\rangle,$$

es decir, el operador $\hat{a}(\mathbf{p})$ disminuye el valor propio λ en una cantidad positiva E_p .

Así, por inducción,

$$\hat{H}' \hat{a}(\mathbf{p})^n |\lambda\rangle = (\lambda - nE_p) \hat{a}(\mathbf{p})^n |\lambda\rangle.$$

Entonces, existe n tal que $\lambda - nE_p < 0 < \lambda - (n-1)E_p$. Pero un valor propio de \hat{H}' no puede ser negativo, luego $\lambda = nE_p$ y

$$\hat{H}' \hat{a}(\mathbf{p})^n |\lambda\rangle = 0.$$

De este modo, se puede identificar $|0\rangle := \hat{a}(\mathbf{p})^n |\lambda\rangle$. En realidad, dado un estado de vacío $|0\rangle$, cualquier múltiplo de él también lo es. El conjunto de estados de vacío forma un espacio vectorial. Se asumirá que dicho espacio vectorial es simplemente una recta, es decir, que, salvo transformaciones de fase, existe un único estado de vacío $|0\rangle$ con $\langle 0|0\rangle = 1$.

Note que se cumplen las importantes propiedades del estado de vacío:

$$\begin{aligned}
 \hat{a}(\mathbf{p})|0\rangle &= 0 \\
 \langle 0|\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) &= 0
 \end{aligned}$$

para cualquier 3-momento \mathbf{p} . La segunda igualdad se deduce al tomar la adjunta de la primera. De estas propiedades se deduce que el campo clásico correspondiente al estado de vacío es nulo. En efecto, $\phi(x) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = 0$, ya que $\hat{\phi}(x)$ es una combinación lineal de operadores $\hat{a}(\mathbf{p})$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$.

Por otro lado, de $[\hat{H}', \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})] = E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ se deduce que

$$\hat{H}' \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle = E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle,$$

es decir, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle$ es un vector propio de \hat{H}' con energía E_p . Por inducción,

$$\hat{H}' \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})^n | 0 \rangle = n E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})^n | 0 \rangle;$$

o en otras palabras, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})^n | 0 \rangle$ es vector propio de \hat{H}' con energía $n E_p$, para n natural.

Se verá ahora que los estados $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})^n | 0 \rangle$ son también estados propios del momento $\hat{\mathbf{P}}$.

En primer lugar se cumplen las relaciones

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})] = \mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$$

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{a}(\mathbf{p})] = -\mathbf{p} \hat{a}(\mathbf{p}).$$

Además, de $\hat{a}(\mathbf{p}) | 0 \rangle = 0$ para todo \mathbf{p} , se tiene que

$$\hat{\mathbf{P}} | 0 \rangle = 0$$

y por tanto,

$$\hat{\mathbf{P}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle.$$

Finalmente, por inducción,

$$\hat{\mathbf{P}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})^n | 0 \rangle = n \mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})^n | 0 \rangle.$$

De manera más general, para r momentos $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r$ y r números enteros no negativos n_1, \dots, n_r , se tiene

$$\begin{aligned}\hat{H}' \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)^{n_1} \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_r)^{n_r} |0\rangle &= (n_1 E_{p_1} + \dots + n_r E_{p_r}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)^{n_1} \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_r)^{n_r} |0\rangle \\ \hat{\mathbf{P}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)^{n_1} \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_r)^{n_r} |0\rangle &= (n_1 \mathbf{p}_1 + \dots + n_r \mathbf{p}_r) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)^{n_1} \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_r)^{n_r} |0\rangle\end{aligned}$$

De esta manera, el estado $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)^{n_1} \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_r)^{n_r} |0\rangle$ se interpreta como un estado formado por n_1 partículas de momento \mathbf{p}_1 y energía E_{p_1}, \dots, n_r partículas de momento \mathbf{p}_r y energía E_{p_r} . En concordancia con la fórmula de energía, $E_p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$, se dice que estas partículas poseen masa m . El estado $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)^{n_1} \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_r)^{n_r} |0\rangle$ se denotará:

$$|n_1 \mathbf{p}_1, \dots, n_r \mathbf{p}_r\rangle := \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)^{n_1} \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_r)^{n_r} |0\rangle$$

Los estados propios de \hat{H} y de $\hat{\mathbf{P}}$ se denominan *estados multipartícula*.

Según esta interpretación, el operador de creación $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ añade una partícula de momento \mathbf{p} y energía E_p , mientras que el operador de aniquilación $\hat{a}(\mathbf{p})$ elimina una de estas partículas. Si ninguna de dichas partículas está presente, es fácil ver que las reglas de conmutación implican que el operador $\hat{a}(\mathbf{p})$ elimina el estado. Es decir,

$$\hat{a}(\mathbf{q}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)^{n_1} \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_r)^{n_r} |0\rangle = 0 \quad \text{si } \mathbf{q} \neq \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r.$$

Como las reglas de conmutación también implican que no interesa el orden en que se crean las partículas, se dice que las partículas que representa el campo escalar son bosones.

Finalmente, el producto escalar de dos estados multipartícula se deduce de las reglas de conmutación. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle &= \langle 0 | \hat{a}(\mathbf{p}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = \langle 0 | (2\pi)^3 2E_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{p}) |0\rangle \\ &= (2\pi)^3 2E_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}).\end{aligned}$$

De aquí es claro que los estados multipartícula no son normalizables.

1.2.4. Ordenamiento normal

Aquí presentaremos una solución estándar para el problema de las divergencias en la energía y otros observables del campo.

Las operaciones realizadas para calcular el espectro de valores propios del Hamiltoniano \hat{H} se han realizado a través del operador \hat{H}' para el cual no aparecen términos infinitos en la energía. Se mencionó que es necesario elegir un estado referencial $|\chi\rangle$ (normalizado) para el cual se considera que la energía es cero. En otras palabras, la energía de cualquier otro estado se mide en comparación con la del estado $|\chi\rangle$. Esto se hizo definiendo el operador \hat{H}_χ :

$$\hat{H}_\chi := \hat{H} - \langle \hat{H} \rangle_\chi = \hat{H}' - \langle \hat{H}' \rangle_\chi.$$

Con el fin de eliminar el infinito en sus valores propios, este procedimiento se extiende a cualquier observable A definiendo el operador

$$\hat{A}_\chi := \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\chi.$$

De este modo, el estado $|\chi\rangle$ es el nivel referencial para todos los observables,

$$\langle \hat{A} \rangle_\chi = 0.$$

Ahora se escogerá un estado referencial $|\chi\rangle$ particular, a saber, el estado de vacío $|0\rangle$ normalizado. Se verá que la razón de esta elección es fundamentalmente la simplificación de la fórmula para el observable modificado \hat{A}_χ . En estas condiciones, se dice que el observable está *ordenado normalmente*, y se utiliza la notación

$$N\{\hat{A}\} := \hat{A}_{|0\rangle} = \hat{A} - \langle 0|\hat{A}|0\rangle.$$

La operación $N\{\cdot\}$ se denomina *ordenamiento normal*. Se verán ahora las propiedades que muestra la elección particular que se ha hecho.

En general los observables son funcionales del campo $\hat{\phi}$ y de sus derivadas $\partial_0\hat{\phi} = \hat{\pi}$ y $\partial_i\hat{\phi}$. Como ya se conoce la descomposición del campo en serie de Fourier, siempre es posible expresar los observables como integrales en el espacio de momentos de expresiones con los operadores de creación $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ y aniquilación $\hat{a}(\mathbf{p})$. Los observables que se han visto presentan combinaciones cuadráticas del campo y de sus derivadas, por ello, en las integrales en el espacio de momentos sólo aparecen combinaciones de los tipos

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}), \quad \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}), \quad \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \quad \text{y} \quad \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}).$$

Por otro lado, es claro de la definición que el operador de ordenamiento normal es lineal, es decir:

$$N\{\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}\} = \alpha N\{\hat{A}\} + \beta N\{\hat{B}\}$$

Por tanto, la operación $N\{\cdot\}$ entra en el signo de integral y se tienen individualmente los siguientes términos:

$$N\{\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\} = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - \langle 0|\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$$

$$N\{\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})\} = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) - \langle 0|\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})|0\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})$$

$$\begin{aligned} N\{\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\} &= \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - \langle 0|\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \delta(0) - \\ &\quad - \langle 0|\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle - \langle 0|0\rangle\delta(0) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

$$N\{\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})\} = \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) - \langle 0|\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})|0\rangle = \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})$$

donde hemos utilizado la propiedad $\hat{a}(\mathbf{p})|0\rangle = 0 = \langle 0|\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ y hemos asumido $\langle 0|0\rangle=1$. Se ve que el ordenamiento normal sólo tiene efecto en el operador $\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$, a saber, $N\{\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\} = a^\dagger(k)a(k)$. Es decir, el efecto del ordenamiento normal es, en general, colocar los operadores de aniquilación a la derecha de los operadores de creación. En realidad esta propiedad se extiende a un producto de operadores de creación y aniquilación en cualquier número. Además, el orden entre operadores solamente de

creación o solamente de aniquilación no es importante pues conmutan.

Por ejemplo para el Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} N\{\hat{H}\} &= N\left\{\frac{1}{2} \int d\tilde{p} E_p (\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}))\right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d\tilde{p} E_p (N\{\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\} + N\{\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})\}) \\ &= \int d\tilde{p} E_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) = \hat{H}'. \end{aligned}$$

De aquí que los resultados obtenidos para \hat{H}' son válidos para $N\{\hat{H}\}$. Por ejemplo,

$$N\{\hat{H}\}|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle = (E_{p_1} + E_{p_2})|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle$$

Del mismo modo, para el operador de momento

$$N\{\hat{\mathbf{P}}\} = \int d\tilde{p} \mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{P}}.$$

Este resultado tiene sentido puesto que ya se había visto que en el momento $\hat{\mathbf{P}}$ el infinito se anulaba por sí solo.

De este modo, de aquí en adelante los observables como el Hamiltoniano y el momento del campo serán reemplazados por sus respectivos operadores ordenados normalmente.

1.2.5. Espacio de Fock

Aquí completaremos la caracterización del espacio de Hilbert de estados del campo cuántico escalar.

Anteriormente se han construido estados propios del Hamiltoniano y del operador de momento, es decir, del operador de 4-momentum. Estos estados tienen momento, y por tanto energía, completamente definidos,

$$\begin{aligned} N\{\hat{H}\}|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r\rangle &= (E_{p_1} + E_{p_2} + \dots + E_{p_r})|\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_r\rangle \\ N\{\hat{\mathbf{P}}\}|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r\rangle &= (\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_r)|\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_r\rangle \end{aligned}$$

Estos estados no pueden corresponder a estados físicos reales. En efecto, los estados físicamente interpretables en la teoría cuántica no poseen un momento definido, sino una distribución de momento. Así, un estado físico de una partícula tiene la forma de un paquete de ondas:

$$|\psi\rangle = \int d\tilde{p} f(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle,$$

donde f es una función de *cuadrado integrable*:

$$\|f\|^2 := \int d\tilde{p} |f(\mathbf{p})|^2 < \infty.$$

De este manera $|\psi\rangle$ es normalizable, ya que

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \int d\tilde{p}_1 \int d\tilde{p}_2 f^*(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) \langle\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\rangle \\ &= \int d\tilde{p}_1 \int d\tilde{p}_2 f^*(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) (2\pi)^3 2E_{p_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &= \int d\tilde{p}_1 |f(\mathbf{p}_1)|^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Es decir, $|\psi\rangle$ está normalizado si y sólo si $\|f\|^2 = 1$. Así, el valor medio de P en el estado $|\psi\rangle$ está definido como:

$$\begin{aligned} \langle\hat{P}\rangle_\psi - \langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle_\psi &= \int d\tilde{p}_1 \int d\tilde{p} f^*(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}) \langle\mathbf{p}_1|\hat{P}|\mathbf{p}\rangle \\ &= \int d\tilde{p}_1 \int d\tilde{p} f^*(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}) \mathbf{p} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \\ &= \int d\tilde{p} |f(\mathbf{p})|^2 \mathbf{p} \end{aligned}$$

y luego $|f(\mathbf{p})|^2$ se puede interpretar como la probabilidad de que el estado $|\psi\rangle$ posea momento \mathbf{p} .

De manera similar, se puede definir la desviación standard como

$$(\Delta P)_\psi := \sqrt{\langle P^2 \rangle_\psi - \langle P \rangle_\psi^2}.$$

Con esto se tiene una interpretación estadística del observable \hat{P} similar a la de la mecánica cuántica no relativista.

El conjunto de estados normalizables de una sola partícula forma un espacio de Hilbert que se denotará por \mathcal{H}_1 .

Del mismo modo, un estado de r partículas es un paquete de ondas de la forma

$$|\psi\rangle = \int d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_r f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r\rangle,$$

donde f es una función de cuadrado integrable:

$$|f|^2 = \int d\tilde{p}_1 \dots \int d\tilde{p}_r |f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r)|^2 = \langle \psi | \psi \rangle < \infty.$$

Por tanto, $|\psi\rangle$ es normalizable. Además, f debe ser tal que $|\psi\rangle$ obedezca la estadística de Bose-Einstein. Para ello, $|\psi\rangle$ debe ser invariante bajo el intercambio de sus partículas. Específicamente, dado un operador de transposición S_{ij} ($1 < i, j \leq r$, $i \neq j$), se debe tener $S_{ij}|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Para los estados de momento definido, se tiene claramente

$$\begin{aligned} S_{ij}|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_r\rangle &= |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_r\rangle \\ &= |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_r\rangle \end{aligned}$$

Para tener la misma propiedad en $|\psi\rangle$ se debe exigir que $S_{ij}f = f$, es decir, que

$$f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_r) = f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_r)$$

para todo $1 \leq i, j < r$, $i \neq j$. En general, como todo operador de permutación P se puede expresar como un producto de transposiciones, se tiene también que $Pf(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r) = f(\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_r}) = f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r)$, donde P transforma j en i_j , para $1 \leq j \leq r$. Es decir, f es invariante bajo el intercambio de cualesquiera de sus partículas.

El conjunto de los estados normalizables de r partículas forma un espacio de Hilbert \mathcal{H}_r . Aquí también es posible una interpretación estadística de f . En este caso, $|f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r)|^2$ corresponde a la probabilidad de tener r partículas con momentos $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r$. Nótese que por la manera cómo se han definido los estados, no tiene sentido preguntarse cuál partícula tiene cuál momento.

Por completitud se considerará al espacio de Hilbert de estados con ninguna partícula, $\mathcal{H}_0 = \{\alpha|0\rangle, \alpha \in \mathbb{C}\}$, que no es sino la recta que contiene al vacío $|0\rangle$.

Ahora, el estado físico más general es una combinación lineal de estados de 0 partículas, 1 partícula, 2 partículas, etc.; en otras palabras, un estado de la forma

$$|\psi\rangle = f_0|0\rangle + \int d\tilde{p} f_1(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle + \int d\tilde{p}_1 \int d\tilde{p}_2 f_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle + \dots + \\ + \int d\tilde{p}_1 \dots \int d\tilde{p}_k f_k(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\rangle + \dots,$$

en donde cada una de las funciones f_k ($1 \leq k < \infty$) se asume de cuadrado integrable.

Se supone además que $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < \infty$, siendo

$$\langle\psi|\psi\rangle = |f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_k|^2 + \dots \leq \infty.$$

Es decir, se exige que $|\psi\rangle$ sea normalizable. En este caso, $|f_k(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)|^2$ se interpreta como la probabilidad de que se midan k partículas con momentos p_1, \dots, p_k . Por otro lado, $|f_k|^2$ se interpreta como la probabilidad de encontrar k partículas.

El espacio de Hilbert al cual pertenecen estos estados es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_k \oplus \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j$, y se denomina *espacio de Fock*. El está formado por estados de varias partículas, y es el espacio sobre el que actúan los operadores que se han discutido hasta ahora.

Obsérvese también que se ha utilizado el hecho que estados con diferente número de partículas son necesariamente ortogonales. En efecto, sean $|\psi_r\rangle \in \mathcal{H}_r$ y $|\psi_s\rangle \in \mathcal{H}_s$ estados de r y s partículas respectivamente ($r \neq s$). Entonces,

$$\langle\psi_r|\psi_s\rangle = \int d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_r d\tilde{q}_1 \dots d\tilde{q}_s f_r^*(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r) f_s(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s) \langle\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r|\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s\rangle.$$

Así, basta mostrar que $\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r | \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s \rangle = 0$ para todo $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s$. En efecto, este producto es igual a $\langle 0 | a(\mathbf{p}_1) \dots a(\mathbf{p}_r) a^\dagger(\mathbf{q}_1) \dots a^\dagger(\mathbf{q}_s) | 0 \rangle$. Mediante el uso del conmutador $[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3 (2E_p) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ un número finito de veces, es posible convertir dicho producto a una suma de expresiones en las que aparecen elementos $\langle 0 | a^\dagger(\mathbf{q}) = 0$ ó $a(\mathbf{q}) | 0 \rangle = 0$. Para ilustrar este procedimiento, se mostrará un ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_3 \rangle &= \langle 0 | a(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_2) a^\dagger(\mathbf{p}_3) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | a(\mathbf{p}_1) (a^\dagger(\mathbf{p}_3) a(\mathbf{p}_2) + (2\pi)^3 (2E_{p_2}) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | a(\mathbf{p}_1) a^\dagger(\mathbf{p}_3) a(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle + (2\pi)^3 (2E_{p_2}) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \langle 0 | a(\mathbf{p}_1) | 0 \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

En conclusión, si bien los estados multipartícula con momento definido $\{ \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r \}$ no representan estados físicos reales, éstos son combinaciones lineales de estados de momento definido, por ello se dice que ellos generan el espacio de Fock \mathcal{H} . Justamente por este hecho se justifica que se estudien sólo los estados de momento definido. Las expresiones para estados físicos se obtienen naturalmente de las expresiones correspondientes para estados de momento definido. Se volverá a tratar este tema cuando se calculen secciones eficaces y tiempos de decaimiento, las cuales son cantidades físicas medibles, y que deben por tanto ser tratadas en el contexto de los estados físicos.

1.3. Interacción de campos cuánticos

Los procesos dinámicos como decaimientos y dispersiones, que pueden incluir partículas del mismo tipo o de varios tipos, aparecen al considerar los campos cuánticos en interacción. En este caso se asume que el Lagrangiano del sistema se puede escribir como la suma de dos Lagrangianos: un Lagrangiano libre, que es la suma de los Lagrangianos libres para cada uno de los campos considerados, y un Lagrangiano de interacción. Dicho Lagrangiano de interacción no es en general conocido, y usual-

mente debe asumirse su forma según ciertos criterios o características deseadas.

Para trabajar con varios campos es conveniente realizar una transformación sobre estados y operadores que separe la parte libre de la parte de interacción en el Lagrangiano. Esto introduce la llamada imagen de Dirac. Con ayuda de ella se construye una expresión para el operador de evolución del sistema, y a la vez para la matriz de interacción o matriz S . Las cantidades físicas como el tiempo de decaimiento y la sección eficaz dependen directamente de la matriz S ; por ello, se hacen necesarios métodos para calcularla. El método comúnmente utilizado es la teoría de perturbaciones, la cual introduce los llamados diagramas de Feynman. Finalmente, se ilustra la teoría con un ejemplo para un campo con autointeracción: la teoría ϕ^4 .

1.3.1. Postulados de la teoría de interacción

En esta sección iniciaremos el estudio de un sistema de N campos cuánticos escalares que interactúan entre sí. La construcción de la teoría se hará de manera similar a la teoría del campo cuántico libre, es decir, estará basada en el principio de correspondencia. Por otro lado, sólo desarrollaremos el caso de interacciones que se anulan en $|t| \rightarrow \infty$, a modo de habilitar el estudio de los procesos más importantes desde el punto de vista experimental: los decaimientos y las dispersiones.

Al anularse la interacción entre los campos del sistema para $|t| \rightarrow \infty$, se tendrá en este límite campos libres, de manera que en ambos límites existen operadores de creación y aniquilación y por tanto una base de estados multipartículas. En otras palabras, se puede hablar de estados de partículas libres en $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$. Sin embargo, fuera de estos límites la interpretación de partículas ya no tiene sentido. Dado un sistema de N campos cuánticos interactuantes se hará las siguientes asunciones:

1. Existe un conjunto de estados posibles del sistema con la estructura de un espacio de Hilbert \mathcal{H} .
2. El campo i ($1 \leq i \leq N$) está representado por una función $\hat{\phi}_i : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$,

que a cada x en \mathbb{M}^4 le asocia un operador lineal $\hat{\phi}_i(x) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, llamado *operador del campo i* . Los operadores de los campos son tales que:

$$[\hat{\phi}_i(x), \hat{\phi}_j(x')] = [\hat{\phi}_i^\dagger(x), \hat{\phi}_j(x')] = 0$$

para $i, j = 1, \dots, N$ y $x, x' \in \mathbb{M}^4$, y donde $\hat{\phi}_i^\dagger(x)$ representa el adjunto de $\hat{\phi}_i(x)$.

3. Para el campo i ($1 \leq i \leq n$), existe una función $\hat{\pi}_i : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ que a cada x en \mathbb{M}^4 le asocia un operador lineal $\hat{\pi}_i(x) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, llamado *momento conjugado del campo*, tal que

$$[\hat{\pi}_i(x), \hat{\pi}_j(x')] = [\hat{\pi}_i^\dagger(x), \hat{\pi}_j(x')] = 0 \quad \text{para } x, x' \in \mathbb{M}^4;$$

$$[\hat{\phi}_i(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}_j(t, \mathbf{x}')] = i\delta_{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \text{para } t \in \mathbb{R}; \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3;$$

teniéndose en ambas expresiones, $i, j = 1, \dots, N$.

4. Los operadores $\hat{\phi}_i(x)$ y $\hat{\pi}_i(x)$ ($1 \leq i < N$) son escalares de Lorentz.
5. A cada observable del sistema le corresponde un operador lineal $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ hermítico que es funcional de los operadores de campo $\hat{\phi}_i(x)$ ($1 \leq i \leq N$). En particular, a la energía le corresponde un operador \hat{H} , denominado *Hamiltoniano*, y al momento lineal un operador $\hat{\mathbf{P}}$. Juntos forman el operador de 4-momentum del sistema, $P^\mu = (\hat{H}, \hat{\mathbf{P}})$.
6. Los operadores de campo $\hat{\phi}_i(x)$ y $\hat{\pi}_i(x)$ ($1 \leq i < N$), así como todo observable $\hat{A}(x)$ del sistema, satisfacen la *ecuación de movimiento de Heisenberg*,

$$[\hat{A}(x), \hat{P}^\mu] = i\partial^\mu \hat{A}(x)$$

7. El Hamiltoniano del sistema \hat{H} es tal que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \hat{H}|\psi\rangle = \hat{H}_0 \in \mathcal{H}$$

para todo estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Aquí \hat{H}_0 denota el *Hamiltoniano libre* de los campos:

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \int d^3x \frac{1}{2} [\hat{\pi}_i(x)^2 + (\nabla \hat{\phi}_i(x))^2 + m^2 \hat{\phi}_i(x)^2],$$

8. El estado de vacío $|0, \text{ent}\rangle$ correspondiente a los campos libres presentes en el límite $t \rightarrow -\infty$ y el estado de vacío $|0, \text{sal}\rangle$ correspondiente a los campos libres presentes en el límite $t \rightarrow \infty$, son iguales:

$$|0, \text{ent}\rangle = |0, \text{sal}\rangle =: |0\rangle$$

Como en el caso del campo libre, se puede suponer por el principio de correspondencia que la expresión de los operadores observables es la misma que en el caso de la interacción de campos clásicos. Luego, el Hamiltoniano es

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_{0i} + \hat{V},$$

donde \hat{H}_{0i} ($1 \leq i \leq N$) es el Hamiltoniano libre del campo i :

$$\hat{H}_{0i} = \int d^3x \frac{1}{2} [\hat{\pi}_i(x)^2 + (\nabla \hat{\phi}_i(x))^2 + m^2 \hat{\phi}_i(x)^2],$$

y V es el operador potencial,

$$\hat{V} = \int d^3x \hat{\mathcal{V}}(\hat{\phi}_i(x)),$$

donde $\hat{\mathcal{V}}(\hat{\phi}_i(x))$ es el operador correspondiente al potencial clásico $\mathcal{V}(\phi_i(x))$.

Por las reglas de conmutación, se tiene

$$[\hat{\phi}_i(x), H_{0j}] = i\delta_{ij}\hat{\pi}_i(x).$$

Similarmente,

$$[\hat{\pi}_i(x), H_{0j}] = -i\delta_{ij}(-\nabla^2 + m^2)\hat{\phi}_i(x).$$

Por tanto, de la ecuación de Heisenberg aplicada a $\hat{\phi}_i(x)$,

$$i\partial_t \hat{\phi}(x) = [\hat{\phi}_i(x), H] = i\hat{\pi}_i(x) + \int d^3x' [\hat{\phi}_i(x), \hat{\mathcal{V}}(\hat{\phi}_k(x'))] = i\hat{\pi}_i(x).$$

Luego el momento conjugado del campo i es el mismo que para el campo cuántico libre,

$$\hat{\pi}_i(x) = \partial_t \hat{\phi}_i(x).$$

Por otro lado, de la ecuación de Heisenberg aplicada a $\hat{\pi}_i(x)$ se tiene

$$i\partial_t \hat{\pi}_i(x) = [\hat{\pi}_i(x), \hat{H}] = -i(-\nabla^2 + m^2)\hat{\phi}_i(x) + [\hat{\pi}_i(x), \hat{V}].$$

Es decir,

$$(\square + m^2)\hat{\phi}_i(x) = i[\hat{V}, \hat{\pi}_i(x)],$$

que es la ecuación de Klein-Gordon para el campo i del sistema.

Se verá ahora el ejemplo de la teoría ϕ^4 en su versión cuántica. Se tiene un solo campo $\phi(x)$ con la autointeracción correspondiente al potencial clásico

$$\mathcal{V}(\phi(x)) := \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4,$$

es decir, el operador de potencial es

$$\hat{\mathcal{V}}(\hat{\phi}(x)) := \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}(x)^4$$

Entonces

$$[\hat{V}, \hat{\pi}(x)] = \int d^3x' \frac{\lambda}{4!} [\hat{\phi}(x')^4, \pi(x)].$$

Es fácil comprobar, usando las reglas de conmutación, que

$$[\hat{\phi}(x')^4, \hat{\pi}(x)] = 4i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\hat{\phi}(x)^3$$

Luego,

$$[\hat{V}, \hat{\pi}(x)] = i \frac{\lambda}{3!} \hat{\phi}(x),$$

y consecuentemente,

$$(\square + m^2) \hat{\phi}(x) = -\frac{\lambda}{3!} \hat{\phi}(x)^3.$$

Esta ecuación con operadores de campo es la misma que la ecuación de movimiento clásica obtenida antes para la teoría ϕ^4 .

Generalizando, se puede mostrar que

$$[\hat{V}(\phi_k(x')), \hat{\pi}_i(x)] = i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial \hat{\mathcal{V}}}{\partial \hat{\phi}_i}(\phi^k(x')),$$

entonces,

$$[\hat{V}(\phi_k(x')), \hat{\pi}_i(x)] = i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \hat{\phi}_i}(\phi^k(x)).$$

Es decir, el efecto de conmutar con $\hat{\pi}_i(x)$ es el de derivar con respecto a la variable que representa al campo $\phi_i(x)$, lo cual es análogo al caso de mecánica cuántica, en donde $[p, f(x)] = i \frac{\partial f}{\partial x}$.

Luego, la ecuación de Klein-Gordon para campos en interacción queda como

$$(\square + m^2) \hat{\phi}_i(x) = -\frac{\partial \hat{\mathcal{V}}}{\partial \hat{\phi}_i}(\phi^k(x)).$$

1.3.2. La imagen de interacción

Aquí definiremos el concepto de imagen, que permite escribir los operadores y estados que representan el sistema físico en distintas formas equivalentes entre sí. Presentamos como casos particulares la imagen de Heisenberg, con la que se ha estado trabajando; la imagen de Schrödinger, más conocida en mecánica cuántica; y la imagen de interacción, que utilizaremos en las siguientes secciones.

En una teoría cuántica las cantidades medibles se expresan siempre en términos de probabilidades de obtener ciertos resultados. La amplitud de una probabilidad es la proyección de un estado sobre otro, de modo que, en suma, las cantidades medibles dependen de los estados y de los operadores sólo a través de *elementos de matriz*

$$\langle \alpha | \hat{A}(x) | \beta \rangle.$$

Así, si se transforman los operadores y los vectores de estado de modo tal que cualquier elemento de matriz permanezca invariante, no se modifican los valores físicos medibles. Entonces, una descripción del sistema físico con los operadores y estados transformados es equivalente a aquella con los operadores y estados antes de transformar. Una transformación con estas características queda definida por un operador U mediante:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &:= \hat{U}|\psi\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle \psi'| = \langle \psi|U^\dagger \\ \hat{A}'(x) &:= \hat{U}\hat{A}(x)\hat{U}^{-1} \end{aligned}$$

Entonces los elementos de matriz no cambian si y sólo si $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$, es decir, si el operador U es unitario:

$$\langle \psi' | \hat{A}'(x) | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{U}^{-1} \hat{U} \hat{A}(x) \hat{U}^{-1} \hat{U} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}(x) | \psi \rangle$$

Al realizar una transformación de este tipo se dice que se ha hecho un *cambio de imagen*. De acuerdo a esto existen diversos imágenes o sistemas de estados y operadores que describen la misma situación física, todos ellos relacionados por una transformación unitaria. La imagen con la que se ha trabajado hasta este momento se denomina *imagen de Heisenberg*.

Considérese ahora el cambio de imagen según la transformación

$$\hat{U} = \hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}}.$$

Este operador es unitario porque el Hamiltoniano es hermítico. La transformación según $\hat{U}(t)$ es,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle^S &:= e^{-it\hat{H}}|\psi\rangle \\ \hat{A}^S(x) &:= e^{-it\hat{H}}\hat{A}(x)e^{it\hat{H}}, \end{aligned}$$

donde se ha denotado a los nuevos estados y operadores con el superíndice S (para la imagen de Heisenberg no se utilizará ningún superíndice). Los operadores y estados transformados según $\hat{U}(t)$ definen la *imagen de Schrödinger*.

En la imagen de Schrödinger, los operadores son independientes del tiempo, ya que:

$$\begin{aligned} i\partial_t \hat{A}^S(x) &= i\partial_t(e^{-it\hat{H}} \hat{A}^H(x) e^{it\hat{H}}) = [\hat{H}, \hat{A}^S(x)] + ie^{-it\hat{H}} \partial_t \hat{A}^H(x) e^{it\hat{H}} \\ &= [\hat{H}, \hat{A}^S(x)] + [\hat{A}^S(x), \hat{H}] = 0 \end{aligned}$$

Como caso especial, el Hamiltoniano coincide en ambas imágenes:

$$\hat{H}^S = \hat{H}.$$

Por otro lado, el vector de estado se hace ahora dependiente del tiempo. Esto es claro del hecho que su ley de transformación por depende de t y que el vector de estado en la imagen de Heisenberg no depende del tiempo. El vector de estado de Schrödinger en el instante inicial $t = 0$ coincide, según la expresión de $U(t)$, con el vector en la imagen de Heisenberg,

$$|\psi(0)\rangle^S = |\psi\rangle,$$

es decir,

$$|\psi(t)\rangle^S = e^{-it\hat{H}^S} |\psi(0)\rangle^S.$$

Esta expresión es equivalente a la *ecuación de Schrödinger*:

$$i\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle^S = \hat{H}^S |\psi(t)\rangle^S$$

Note que la ecuación de Schrödinger está escrita en forma claramente no-covariante pues distingue el tiempo en su transformación.

La discusión hasta ahora es válida tanto para campos libre como para los campos en interacción. La imagen de Heisenberg provee una descripción covariante del sistema, mientras que la de imagen de Schrödinger no. Por otro lado, se encontró que las solu-

ciones de la ecuación de Heisenberg, o equivalentemente la ecuación de Klein-Gordon, son combinaciones de ondas planas. Sin embargo, para el caso de la interacción, la ecuación de movimiento ya no es en general equivalente a la ecuación de Klein-Gordon, y no se puede encontrar soluciones como ondas planas. En este caso es útil pasar a una imagen que no presente estas inconveniencias.

Una imagen con estas características es la *imagen de Dirac* o *de interacción*. Ya se ha visto que en un problema de campos interactuantes el Hamiltoniano se puede escribir como la suma de dos operadores Lorentz-invariantes \hat{H}_0 y \hat{V} ,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

donde \hat{H}_0 es el Hamiltoniano libre y \hat{V} es el término de interacción. La transformación para pasar de la imagen de Schrödinger a la de Dirac está determinada por el operador unitario

$$\hat{U}'(t) = e^{i\hat{H}_0^S t},$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle^I &= e^{i\hat{H}_0^S t} |\psi(t)\rangle^S \\ \hat{A}^I(x) &= e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{A}^S(x) e^{-i\hat{H}_0^S t}. \end{aligned}$$

Aquí se ha utilizado el superíndice I para denotar los operadores o estados en la imagen de interacción.

Es claro de la transformación que el Hamiltoniano libre en la imagen de interacción y en la de Schrödinger coinciden:

$$\hat{H}_0^I = \hat{H}_0^S.$$

Se verán ahora las ecuaciones de movimiento de estados y operadores en la imagen de interacción. Para los vectores de estado se tiene:

$$\begin{aligned}
 i\partial_t|\psi(t)\rangle^I &= i\partial_t(e^{i\hat{H}_0^S t}|\psi(t)\rangle^S) \\
 &= -\hat{H}_0^S|\psi(t)\rangle^I + e^{i\hat{H}_0^S t}\hat{H}^S|\psi(t)\rangle^S \\
 &= e^{i\hat{H}_0^S t}\hat{V}^S|\psi(t)\rangle^S \\
 &= e^{i\hat{H}_0^S t}\hat{V}^S e^{-i\hat{H}_0^S t}|\psi(t)\rangle^I,
 \end{aligned}$$

es decir,

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle^I = V^I|\psi(t)\rangle^I$$

Esta ecuación es similar a la ecuación de Schrödinger; sin embargo, aquí la variación temporal de los estados está determinada únicamente por el Hamiltoniano de interacción.

A partir de ahora al hablar de ecuación de Schrödinger se hace referencia a esta última ecuación en la imagen de interacción.

Por otro lado, para los operadores se tiene

$$i\partial_t\hat{A}(x)^I = -\hat{H}_0^S\hat{A}(x)^I + \hat{A}(x)^I\hat{H}_0^S + e^{i\hat{H}_0^S t}i\partial_t\hat{A}^S(x)e^{-i\hat{H}_0^S t}.$$

Pero como $\hat{H}_0^S = \hat{H}_0^I$ y $\partial_t\hat{A}^S(x) = 0$,

$$i\partial_t\hat{A}(x)^I = [\hat{A}(x)^I, \hat{H}_0^I].$$

Luego, la evolución temporal de un operador en la imagen de interacción está determinada únicamente por el Hamiltoniano libre.

Se verá ahora la relación entre la imagen de interacción y la de Heisenberg. Se tiene:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle^I &= e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}^S t} |\psi(0)\rangle^I \\
 &= e^{-i\hat{H}^I t} e^{i\hat{H}_0^I t} e^{i\hat{H}^I t} e^{-i\hat{H}^I t} |\psi\rangle,
 \end{aligned}$$

entonces

$$|\psi(t)\rangle^I = e^{-it\hat{H}} e^{it\hat{H}_0} |\psi\rangle$$

Similarmente,

$$\hat{\Lambda}^I = e^{-it\hat{H}} e^{it\hat{H}_0} \hat{\Lambda} e^{-it\hat{H}_0} e^{it\hat{H}},$$

es decir, la transformación de la imagen de Heisenberg a la de Dirac corresponde al operador unitario

$$\hat{U}'' = e^{-it\hat{H}} e^{it\hat{H}_0}$$

Nótese que en ausencia de interacción ($\hat{V} = 0$) $\hat{U}'' = 1$, es decir, la imagen de Heisenberg y la de interacción coinciden.

1.3.3. El operador de evolución y matriz S

En esta sección definiremos el operador $U(t_2, t_1)$ que transforma el estado del sistema en un tiempo t_1 al estado en el tiempo t_2 . Con ello se definirá el operador S , que lleva el estado inicial en $t \rightarrow -\infty$ al estado final en $t \rightarrow \infty$, así como la matriz S , que da la amplitud de probabilidad de que un cierto estado inicial termine en un estado final particular.

Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Se ha visto que

$$\begin{aligned} |\psi(t_1)\rangle^I &= e^{-it_1\hat{H}} e^{it_1\hat{H}_0} |\psi\rangle = \hat{U}''(t_1) |\psi\rangle \\ |\psi(t_2)\rangle^I &= e^{-it_2\hat{H}} e^{it_2\hat{H}_0} |\psi\rangle = \hat{U}''(t_2) |\psi\rangle, \end{aligned}$$

entonces

$$|\psi(t_2)\rangle^I = \hat{U}''(t_2) (\hat{U}''(t_1))^{-1} |\psi(t_1)\rangle^I.$$

Se define

$$\hat{U}(t_2, t_1) := \hat{U}''(t_2) (\hat{U}''(t_1))^{-1}$$

y se denomina a $\hat{U}(t_2, t_1)$ *operador de evolución*. Se cumple entonces la siguiente propiedad fundamental:

$$|\psi(t_2)\rangle^I = \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle^I.$$

Esta relación significa que el operador de evolución contiene toda la información sobre la evolución temporal del sistema. De este modo, si se tiene un estado inicial dado en $t \rightarrow -\infty$,

$$|i\rangle^I = \lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle^I,$$

se tendrá para el estado final en $t \rightarrow \infty$, denotado $|\psi(\infty)\rangle^I$,

$$|\psi(\infty)\rangle^I = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle^I.$$

Ya se ha mencionado que en $t \rightarrow \pm\infty$ los campos son libres (por asunción), de modo que existen dos bases, para $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$, de estados multipartículas. Si se elige el estado inicial $|i\rangle^I$ como un estado multipartícula de la base $t \rightarrow -\infty$, y dado un estado multipartícula $|f\rangle$ de la base $t \rightarrow \infty$, se tiene que la amplitud de probabilidad de obtener $|f\rangle$ al medir el estado final $|\psi(\infty)\rangle$ es:

$${}^I \langle f | \psi(\infty) \rangle^I = {}^I \langle f | \left(\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle \right).$$

Este producto interno se llama *elemento de matriz S del estado final f y el estado inicial i*, y se denota:

$$S_{fi} := {}^I \langle f | \psi(\infty) \rangle^I = \langle f | \psi(\infty) \rangle.$$

La última igualdad proviene del hecho que los productos internos son invariantes bajo un cambio de imagen. Como $|f\rangle$ y $|i\rangle$ son elementos arbitrarios de bases del espacio de Hilbert, el conjunto de elementos de matriz S_{fi} determina un operador lineal S llamado *operador de dispersión* u *operador \hat{S}* . Específicamente, dado un estado

$$|\psi\rangle = \sum \langle i | \psi \rangle |i\rangle$$

Se define

$$\hat{S}|\psi\rangle := \sum \langle i | \psi \rangle S_{fi} |i\rangle.$$

y las cantidades S_{fi} son efectivamente los elementos de matriz del operador \hat{S} en las bases multipartículas en $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow \infty$.

Así, la información sobre la dinámica del sistema para un estado inicial $|i\rangle$ en $t \rightarrow -\infty$ está dada por la matriz S .

De manera informal, se puede decir que el operador \hat{S} es un límite del operador de evolución:

$$\hat{S} =? \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \hat{U}(t_2, t_1).$$

El problema con esta igualdad está en que no se está especificando la manera en que se realiza el límite de un operador. Un estudio más cuidadoso muestra que un modo correcto de hacer esto es tomando el límite a los estados, como en la definición de la matriz S . Por ello se definió primero matriz S y después el operador \hat{S} .

En todo caso estas observaciones indican que para encontrar una expresión para la matriz S más apropiada para el cálculo, se debe comenzar por encontrar una expresión tal para el operador de evolución.

1.3.4. Teoría de perturbaciones

Aquí deduciremos una expresión en serie de la matriz S apropiada para el caso cuando la interacción es una perturbación, es decir, cuando sus efectos sobre el sistema de campos son pequeños. En el transcurso de la discusión definiremos el producto cronológico de operadores, cuya importancia se irá revelando en las siguientes secciones.

Con el fin de encontrar dicha expresión para la matriz S se parte de la relación que define el operador de evolución $U(t, t_0)$:

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-it\hat{H}} e^{i(t-t_0)\hat{H}_0} e^{it_0\hat{H}}.$$

Puesto que los estados en la imagen de interacción satisfacen la ecuación de Schrödinger, es razonable que el propio operador de evolución la satisfaga también.

En efecto,

$$\begin{aligned} i\partial_t \hat{U}(t, t_0) &= \hat{H} \hat{U}(t, t_0) - e^{-it\hat{H}} \hat{H}_0 e^{i(t-t_0)\hat{H}_0} e^{it_0\hat{H}} \\ &= e^{-it\hat{H}} \hat{V} e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}} e^{i(t-t_0)\hat{H}_0} e^{it_0\hat{H}}, \end{aligned}$$

entonces

$$i\partial_t \hat{U}(t, t_0) = \hat{V}^I(t) \hat{U}(t, t_0)$$

Se puede encontrar una relación iterativa para $\hat{U}(t, t_0)$ transformando esta ecuación diferencial en una ecuación integral. Notando que $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$ e integrando de t_0 a t se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt' \hat{V}^I(t') \hat{U}(t', t_0) \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{V}^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{V}^I(t_1) \hat{V}^I(t_2) + \dots \\ &\quad + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n) + \dots \end{aligned}$$

En este punto es conveniente introducir el concepto de *ordenamiento cronológico*. Dados n operadores dependientes del tiempo $\hat{A}_1(t_1), \dots, \hat{A}_n(t_n)$, evaluados en tiempos diferentes ($t_i \neq t_j$), su *producto ordenado cronológicamente*, denotado $T_n\{\hat{A}_1(t_1), \dots, \hat{A}_n(t_n)\}$, se define por

$$T_n\{\hat{A}_1(t_1), \dots, \hat{A}_n(t_n)\} := \sum \theta(t_{P_1}, \dots, t_{P_n}) \hat{A}_{P_1}(t_{P_1}) \dots \hat{A}_{P_n}(t_{P_n}),$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones P de $\{1, \dots, n\}$ elementos y

$$\theta(t_{P_1}, \dots, t_{P_n}) = 1 \quad \text{si } t_{P_1} > t_{P_2} > \dots > t_{P_n}$$

0 en otro caso.

Debido a la función θ , la operación $T_n\{\dots\}$ coloca a los n -operadores en orden temporal decreciente. A partir de aquí se prescinde de la letra n y de las comas que

separan las entradas de la función T , escribiéndose

$$T\{\hat{A}_1(t_1) \dots \hat{A}_n(t_n)\} = T_n\{\hat{A}_1(t_1), \dots, \hat{A}_n(t_n)\} = \hat{A}_{i_1}(t_{i_1}) \dots \hat{A}_{i_n}(t_{i_n}),$$

donde $\{i_1 \dots i_n\}$ es una permutación de $\{1, \dots, n\}$ tal que $t_{i_1} > \dots > t_{i_n}$.

El ordenamiento cronológico es invariante de Lorentz. es decir, si $t_{i_1} > \dots > t_{i_n}$, entonces bajo una transformación propia de Lorentz, se tendrá $t'_{i_1} > \dots > t'_{i_n}$. En efecto, si se considera que los tiempos t_k corresponden a eventos en una misma posición espacial \mathbf{x} , entonces para cada $k = 1, \dots, n - 1$ la diferencia $t'_{i_k} - t'_{i_{k+1}} = (t_{i_k} - t_{i_{k+1}})'$ tiene el mismo signo que $(t_{i_k} - t_{i_{k+1}}) > 0$. Luego $t'_k > t'_{k+1}$, para $k = 1, \dots, n - 1$.

Cuando en un producto de operadores dependientes del tiempo algunos de los tiempos son iguales, existirá una ambigüedad al tratar de definir el producto ordenado cronológicamente. Para ver con más cuidado lo que ocurre, considérese un espacio euclidiano n -dimensional y denótese con (t_1, \dots, t_n) los puntos de este espacio. Dados $t, t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $t > t_0$, se restringirá la discusión al cubo n -dimensional $K = [t_0, t] \times \dots \times [t_0, t]$ (n veces). Así, para cada permutación P de $\{1, \dots, n\}$, considérese el conjunto V_P de los puntos (t_1, \dots, t_n) en el cubo K tales que $t_{P_1} > \dots > t_{P_n}$.

Por simetría, las regiones abiertas V_P dividen el cubo en $n!$ volúmenes iguales, que son divididos por hiperplanos $(n - k + 1)$ -dimensionales donde k coordenadas t_j coinciden. En particular, el conjunto de los puntos donde $t_1 = \dots = t_n$ es una recta.

De esta discusión se tiene que el ordenamiento cronológico de n operadores determinados es una función continua de las variables temporales t_1, \dots, t_n en cada región V_P , ya que allí está fijo un cierto orden temporal. En cambio, en los hiperplanos donde algunos tiempos coinciden (intersectados con el cubo), ocurren las discontinuidades de esta función.

Se aplicará ahora el concepto de producto cronológico al desarrollo el operador

$\hat{U}(t, t_0)$:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{V}^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{\hat{V}^I(t_1)\hat{V}^I(t_2)\} + \dots \\ & + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} + \dots \end{aligned}$$

Tómese el sumando con n ($n \geq 2$) elementos. Observe que es la integral sobre el volumen V_I , descrito anteriormente, correspondiente a la permutación identidad I :

$$(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} = (-i)^n \int_{V_I} T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\}.$$

Ahora, note que el orden en que se escriban los operadores \hat{V}^I dentro del producto cronológico es irrelevante. Por tanto, dada una permutación P de $\{1, \dots, n\}$, denótese con $\{i_{P^{-1}}, \dots, i_{P_n^{-1}}\}$ la permutación inversa de P . Se tiene

$$T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} = T\{\hat{V}^I(t_{i_{P^{-1}}}) \dots \hat{V}^I(t_{i_{P_n^{-1}}})\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{V_I} T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} &= \int_{V_I} T\{\hat{V}^I(t_{i_{P^{-1}}}) \dots \hat{V}^I(t_{i_{P_n^{-1}}})\} \\ &= \int_{V_P} T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} \end{aligned}$$

La última igualdad proviene de haber cambiado las variables mudas de integración t_k . Entonces el valor de la integral de $T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\}$ sobre el volumen V_P para cualquier permutación P de $\{1, \dots, n\}$ es el mismo. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{V_I} T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} &= \frac{1}{n!} \sum_P \int_{V_P} T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} \\ &= \frac{1}{n!} \int_K T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} \\ &= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t T\{\hat{V}^I(t_1) \dots \hat{V}^I(t_n)\} \end{aligned}$$

pues la integral sobre el cubo n dimensional $K = [t_0, t] \times \cdots \times [t_0, t]$ es igual a la integral sobre la unión de los volúmenes V_P (el conjunto $K \setminus (\bigcup_P V_P) \neq \emptyset$ tiene volumen n dimensional nulo y no contribuye a la integral).

Reemplazando este resultado en el desarrollo de $\hat{U}(t, t_0)$,

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^t T\{\hat{V}^I(t_1) \cdots \hat{V}^I(t_n)\},$$

donde se ha denotado $T\{\hat{V}^I(t)\} = \hat{V}^I(t)$. Esta expresión se representa simbólicamente por

$$\hat{U}(t, t_0) = T\left\{\exp\left(\int_{t_0}^t dt' \hat{V}^I(t')\right)\right\}$$

Con el resultado anterior se encontrará ahora una expresión para la matriz S :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f | \left(\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} T\left\{\exp\left(\int_{t_0}^t dt' \hat{V}^I(t')\right)\right\} |\psi(t_0)\rangle^I \right) \\ &= \langle f | i \rangle^I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \langle f | T\{\hat{V}^I(t_1) \cdots \hat{V}^I(t_n)\} |\psi(t_0)\rangle^I \\ &= \langle f | i \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t dt_1 \cdots \int_{-\infty}^t dt_n \langle f | T\{\hat{V}^I(t_1) \cdots \hat{V}^I(t_n)\} | i \rangle \\ &= \langle f | i \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \langle f | T\{\hat{V}^I(t_1) \cdots \hat{V}^I(t_n)\} | i \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \hat{V}^I(t_j) &= e^{-it_j \hat{H}} \hat{V} e^{it_j \hat{H}} \\ &= e^{-it_j \hat{H}} \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{V}(\hat{\phi}_k(x_j)) e^{it_j \hat{H}} \\ &= \int d^3 \mathbf{x} \hat{V}^I(\hat{\phi}_k(x_j)). \end{aligned}$$

Entonces,

$$S_{fi} = \langle f | i \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \cdots \int d^4 x_n \langle f | T\{\hat{V}^I(\hat{\phi}_k(x_1)) \cdots \hat{V}^I(\hat{\phi}_k(x_n))\} | i \rangle.$$

Esta expresión de la matriz S es de mucha utilidad para el cálculo aproximado de la matriz S , como se verá un poco más adelante. De aquí también se puede obtener una expresión para el operador \hat{S} . En efecto, se tiene

$$S_{fi} = \langle f | 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T\{\hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x_1)) \dots \hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x_n))\} | i \rangle,$$

y luego

$$\hat{S} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T\{\hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x_1)) \dots \hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x_n))\}.$$

Esta relación se expresa simbólicamente como

$$\hat{S} = T\{\exp \int d^4x' \hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x'))\},$$

y correspondientemente para la matriz S ,

$$S_{fi} = \langle f | T\{\exp \int d^4x' \hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x'))\} | i \rangle.$$

1.3.5. Teorema de Wick

En esta sección estableceremos un teorema que se utilizará para el cálculo de productos cronológicos de la forma

$$T\{\hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x_1)) \dots \hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x_n))\},$$

que son importantes pues aparecen en la expresión de la matriz S . En realidad sólo estudiaremos interacciones $\hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}_k(x))$ que son funciones polinomiales de los campos $\hat{\phi}_k(x)$ ($k = 1, \dots, \#$ de campos) o en series de potencias de ellos (por ejemplo, si la interacción se puede expresar en serie de Taylor). Veremos que el problema se reduce a determinar productos cronológicos de monomios en los campos $\phi_k(x)$.

Para esto, nótese en primer lugar que la operación de ordenamiento cronológico $T\{\cdot\}$

es lineal en los operadores:

$$T\{(a\hat{A}_1(t_1) + b\hat{A}'_1(t_1))\hat{A}_2(t_2) \dots \hat{A}_n(t_n)\} = aT\{(\hat{A}_1(t_1)\hat{A}_2(t_2) \dots \hat{A}_n(t_n))\} + \\ + bT\{(\hat{A}'_1(t_1)\hat{A}_2(t_2) \dots \hat{A}_n(t_n))\}$$

De este modo, es necesario el problema se convierte en el de determinar productos cronológicos de la forma

$$T\{\hat{A}_1(x_1) \dots \hat{A}_k(x_k)\},$$

donde los operadores \hat{A}_j son operadores de campo ϕ_k , no necesariamente diferentes entre sí.

De otro lado, en la imagen de interacción, los operadores de campo se expresan en serie de Fourier y por tanto se descomponen en términos de energía positiva y negativa,

$$\hat{A}_i(x_i) = \hat{A}_i^{(+)}(x_i) + \hat{A}_i^{(-)}(x_i)$$

Se considerará primero el caso del producto de 2 operadores y se verá posteriormente el caso general por inducción.

Sean los operadores $\hat{A}(x_1)$ y $\hat{B}(x_2)$ con $x_1 = (t_1, \mathbf{x}_1)$, $x_2 = (t_2, \mathbf{x}_2)$ tales que $t_1 > t_2$.

Entonces:

$$T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} = \hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2) \\ = \hat{A}^{(+)}(x_1)\hat{B}^{(+)}(x_2) + \hat{A}^{(+)}(x_1)\hat{B}^{(-)}(x_2) + \hat{A}^{(-)}(x_1)\hat{B}^{(+)}(x_2) \\ + \hat{A}^{(-)}(x_1)\hat{B}^{(-)}(x_2) \\ = N\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} + [\hat{A}^{(+)}(x_1), \hat{B}^{(-)}(x_2)]$$

El conmutador $[\hat{A}^{(+)}(x_1), \hat{B}^{(-)}(x_2)]$, es necesariamente un múltiplo del operador identidad. En efecto, si A y B corresponden a operadores diferentes, el conmutador es cero. Si corresponden a un mismo operador, al reemplazar la expresión de las partes positiva y negativa de A o B , aparecerán conmutadores de la forma

$[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})] = i(2\pi)^3 2E_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Por tanto, el conmutador es igual a la identidad multiplicada por un número c (que probablemente incluya deltas de Dirac). Entonces:

$$\begin{aligned} [\hat{A}^{(+)}(x_1), \hat{B}^{(-)}(x_2)] &= c = c|0\rangle\langle 0| = \langle 0|c|0\rangle = \langle 0| [\hat{A}^{(+)}(x_1), \hat{B}^{(-)}(x_2)] |0\rangle \\ &= \langle 0|\hat{A}^{(+)}(x_1)\hat{B}^{(-)}(x_2)|0\rangle = \langle 0|\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)|0\rangle \\ &= \langle 0|T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\}|0\rangle. \end{aligned}$$

Aquí se ha utilizado la asunción $t_1 > t_2$ y las propiedades $\langle 0|\hat{A}^{(+)}(x)|0\rangle = 0$ y $\langle 0|\hat{B}^{(-)}(x)|0\rangle = 0$. En conclusión se tiene

$$T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} = N\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} + \langle 0|T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\}|0\rangle,$$

válida para $t_1 > t_2$. Pero como los productos T y N son invariantes bajo permutaciones de sus factores,

$$T\{\hat{A}(x_2)\hat{B}(x_1)\} = N\{\hat{A}(x_2)\hat{B}(x_1)\} + \langle 0|T\{\hat{A}(x_2)\hat{B}(x_1)\}|0\rangle.$$

Intercambiando x_1 por x_2 , se tiene que la relación obtenida es igualmente válida si $t_1 < t_2$.

El término $\langle 0|T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\}|0\rangle$ aparecerá frecuentemente y se denomina *contracción* de $A(x_1)$ y $B(x_2)$:

$$\underbrace{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)} := \langle 0|T\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)|0\rangle.$$

Obsérvese que la contracción es conmutativa:

$$\underbrace{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)} = \underbrace{\hat{A}(x_2)\hat{B}(x_1)}.$$

En términos de la contracción se puede escribir la descomposición del producto T como:

$$T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} = N\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} + \underbrace{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)}.$$

Este resultado es el teorema de Wick para dos operadores. Similarmente, el producto T de 3 operadores \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} resulta

$$T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\hat{C}(x_3)\} = N\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\hat{C}(x_3) + N\{\underbrace{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)}\hat{C}(x_3)\} + \\ + N\{\hat{A}(x_1)\underbrace{\hat{B}(x_2)\hat{C}(x_3)}\} + N\{\underbrace{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\hat{C}(x_3)}\}.$$

Similarmente, el resultado para N operadores $\hat{A}_1(x_1)\dots\hat{A}_n(x_n)$ (abreviando \hat{A}_i por $\hat{A}_i(x_i)$) es

$$T\{\hat{A}_1\dots\hat{A}_n\} = N\{\hat{A}_1\dots\hat{A}_n\} + N\{\underbrace{\hat{A}_1\hat{A}_2}\dots\hat{A}_n\} + N\{\underbrace{\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3}\dots\hat{A}_n\} + \dots + \\ + N\{\hat{A}_1\hat{A}_2\dots\underbrace{\hat{A}_{n-1}\hat{A}_n}\} + N\{\underbrace{\hat{A}_1\hat{A}_2}\underbrace{\hat{A}_3\hat{A}_4}\dots\hat{A}_n\} + \\ + N\{\hat{A}_1\hat{A}_2\dots\underbrace{\hat{A}_{n-3}\hat{A}_{n-2}\hat{A}_{n-1}\hat{A}_n}\} + \text{términos con 3 contracciones} + \dots$$

Si N es par, el último término tendrá todas las combinaciones de $N/2$ contracciones, mientras que si N es impar, se tendrá las combinaciones de $(N-1)/2$ contracciones.

1.3.6. Cálculo de términos perturbativos de la matriz S

En esta sección explicaremos de manera práctica el modo en que se utiliza el teorema de Wick para calcular un cierto orden de perturbación de la matriz S correspondiente a algún proceso determinado.

Se desea calcular los elementos de matriz $S_{fi} := \langle f|\hat{S}|i\rangle$, es decir, la amplitud de probabilidad de que se mida el estado final $|f\rangle$ en el sistema cuyo estado inicial es $|i\rangle = |\psi(t = -\infty)\rangle$. Como ya se ha indicado, estos estados inicial y final pueden elegirse como estados de partículas libres, es decir:

$$|i\rangle = |k_1 k_2 \dots k_n\rangle = a^\dagger(k_1) \dots a^\dagger(k_n)|0\rangle$$

$$|f\rangle = |q_1 q_2 \dots q_m\rangle = a^\dagger(q_1) \dots a^\dagger(q_m)|0\rangle,$$

donde no se ha excluido la posibilidad de que haya varias partículas con el mismo momentum. Entonces se tiene

$$S_{fi} = \langle 0 | a(q_1) \dots a(q_m) \hat{S} a^\dagger(k_1) \dots a^\dagger(k_n) | 0 \rangle.$$

Por otro lado, se sabe que el operador \hat{S} es:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n T \{ N \{ \hat{\mathcal{V}}^I(x_1) \} N \{ \hat{\mathcal{V}}^I(x_2) \} \dots N \{ \hat{\mathcal{V}}^I(x_n) \} \}$$

Sea $\hat{S}^{(n)}$ el n -ésimo término en la sumatoria de \hat{S} , al que se llama n -ésimo término perturbativo. Según esto, el elemento de matriz también puede escribirse como una sumatoria:

$$S_{fi} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{fi}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f | \hat{S}^{(n)} | i \rangle$$

El operador $S^{(n)}$ se descompone en una suma de productos de operadores de creación y aniquilación. Sólo algunos de estos términos dan una contribución no nula a $S_{fi}^{(n)}$, a saber aquellos que son productos de la forma:

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_2) \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_n) \hat{a}(\mathbf{k}_1) \hat{a}(\mathbf{k}_2) \dots \hat{a}(\mathbf{k}_n)$$

En efecto, si en el producto faltara uno solo de estos operadores o hubiera algún otro de más, dicho operador anularía el elemento de matriz según una de las propiedades $a(\mathbf{k}')|0\rangle$ ó $\langle 0|a(\mathbf{k}')$.

Antes de evaluar el elemento de matriz que resulta de dicho producto, es instructivo calcular dicho elemento de matriz para el caso especial de 2 partículas entrantes y 2 partículas salientes. En este caso los vectores $|f\rangle$ y $|i\rangle$ son:

$$|i\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2) |0\rangle$$

$$|f\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_2) |0\rangle$$

Y el producto que contribuye a $S_{fi}^{(n)}$ es:

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_1)\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_2)\hat{a}(\mathbf{k}_1)\hat{a}(\mathbf{k}_2)$$

y el elemento de matriz es:

$$\langle f|\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_1)\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_2)\hat{a}(\mathbf{k}_1)\hat{a}(\mathbf{k}_2)|i\rangle = \langle 0|\hat{a}(\mathbf{q}_2)\hat{a}(\mathbf{q}_1)\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_1)\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_2)\hat{a}(\mathbf{k}_1)\hat{a}(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)|0\rangle$$

Entonces, dado un proceso determinado, se puede saber exactamente qué términos de la expansión de S contribuyen al elemento de matriz del proceso. Por otro lado, también se puede calcular la expansión de S y saber a qué procesos contribuirá cada orden de dicha expansión.

1.3.7. Diagramas de Feynman para la teoría ϕ^4

Haremos un cálculo explícito de los elementos de matriz para una teoría escalar

$$\mathcal{H}_0(\hat{\phi}(x), \partial_\nu \hat{\phi}(x)) = \partial_\mu \hat{\phi}(x) \partial^\mu \hat{\phi}(x) - m^2 \hat{\phi}(x)^2$$

con una interacción

$$\hat{\mathcal{V}}(\phi(x)) = \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4$$

Se examinará los términos en la expansión de S :

$$\begin{aligned} \hat{S} &= T \exp\left\{ \int d^4x N\{\hat{\mathcal{V}}^I(\hat{\phi}(x))\} \right\} \\ &= T \exp\left\{ \int d^4x \frac{-\lambda}{4!} N\{\hat{\phi}^4(x)\} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda}{4!} \right)^n \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n T\{N\{\phi^4(x_1)\}N\{\phi^4(x_2)\} \dots N\{\phi^4(x_n)\}\}. \end{aligned}$$

El término de orden cero es $\hat{S}^{(0)} = I$, que es igual a \hat{S} cuando $\hat{\mathcal{V}}^I = 0$. Ya que $\langle f|\hat{S}^{(0)}|i\rangle = \delta_{fi}$, simplemente implica que en ausencia de interacción, para que el proceso tenga sentido, se debe tener $|i\rangle = |f\rangle$.

El término de primer orden es:

$$\hat{S}^{(1)} = \frac{-\lambda}{4!} \int d^4x T\{N\{\hat{\phi}^4(x)\}\} = \frac{-\lambda}{4!} \int d^4x N\{\hat{\phi}^4(x)\}.$$

Se tiene:

$$N\{\hat{\phi}^4\} = \hat{\phi}^{(+4)} + 4\hat{\phi}^{(-)}\hat{\phi}^{(+3)} + 6\hat{\phi}^{(-)2}\hat{\phi}^{(+2)} + 4\hat{\phi}^{(-)3}\hat{\phi}^{(+)} + \hat{\phi}^{(-)4}$$

Veamos a qué proceso corresponde cada término de $S^{(1)}$. Si se recuerda que $\hat{\phi}^{(+)}$ posee operadores de aniquilación y $\hat{\phi}^{(-)}$ operadores de creación, entonces se sabe que el término $\hat{\phi}^{(+4)}$ sólo contribuirá a un proceso en el que hay 4 partículas en el estado inicial y ninguna en el final, es decir, para $|i\rangle = |0\rangle$ y $|f\rangle = |p_1 p_2 p_3 p_4\rangle$. Del mismo modo, el término $\hat{\phi}^{(-)}\hat{\phi}^{(+3)}$ corresponde a un proceso con una partícula inicial y 3 finales; $\hat{\phi}^{(-)2}\hat{\phi}^{(+2)}$ a un proceso con 2 partículas iniciales y 2 finales; $\hat{\phi}^{(-)3}\hat{\phi}^{(+)}$ a un proceso con 1 partícula inicial y 3 finales; y finalmente, $\hat{\phi}^{(-)4}$ a un proceso con ninguna partícula inicial y 4 finales.

Veremos ahora un caso más interesante: el término de segundo orden de \hat{S} :

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{-\lambda^2}{4!} \int d^4x_1 d^4x_2 T\{N\{\hat{\phi}^4(x_1)\}N\{\hat{\phi}^4(x_2)\}\}$$

Representaremos estos 5 procesos por un sólo diagrama de Feynman, y entenderemos que se puede deducir qué procesos son poniendo los extremos libres del diagrama ya sea para el lado de los estados iniciales o finales. Este diagrama único es:

Por el Teorema de Wick se tiene:

$$\begin{aligned}
T\{N\{\hat{\phi}^4(x_1)\}N\{\hat{\phi}^4(x_2)\}\} &= N\{N\{\hat{\phi}^4(x_1)\}N\{\hat{\phi}^4(x_2)\}\} \\
&+ \underbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)} N\{N\{\hat{\phi}^3(x_1)\}N\{\hat{\phi}^3(x_2)\}\} + \\
&+ \left(\underbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)}\right)^2 N\{N\{\hat{\phi}^2(x_1)\}N\{\hat{\phi}^2(x_2)\}\} \\
&+ \left(\underbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)}\right)^3 N\{N\{\hat{\phi}(x_1)\}N\{\hat{\phi}(x_2)\}\} \\
&+ \left(\underbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)}\right)^4
\end{aligned}$$

Note que se ha representado cada contracción por la unión de dos extremos libres del diagrama básico. Note también que estos diagramas no corresponden aún a un proceso determinado: para esto hay que especificar si cada extremo libre corresponde a una partícula del estado inicial o final. Matemáticamente, esto corresponden a descomponer cada $\hat{\phi}$ en operadores $\hat{\phi}^{(+)}$ y $\hat{\phi}^{(-)}$. Por ejemplo para el segundo diagrama hay 6 extremos libres, que pueden corresponder, por ejemplo, a 2 partículas entrantes y 4 salientes ó a 3 entrantes y 3 salientes.

Generalizando, el diagrama de Feynman correspondiente al término de orden n en la expansión de S consiste en n diagramas básicos, en los cuales se puede realizar contracciones, es decir, unir 2 extremos libres cualesquiera. En sí, el teorema de Wick descompone el término de orden n de S en $(2n + 1)$ sumandos. Para el caso de $\hat{\phi}^4$ cada uno de estos sumandos tiene m contracciones y $(4n - 2m)$ extremos libres, donde $m = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Es decir, el término de orden n contribuye a procesos con 2, 4, 6, ... $4n$ partículas asintóticas (entrantes + salientes).

Se calculará ahora un elemento de matriz para un caso específico. Por el método que se ha descrito, se puede calcular dicho elemento de matriz hasta el orden que se

deseo. Entonces los estados de dos partículas entrantes y dos salientes es:

$$|i\rangle = |p_1 p_2\rangle$$

$$|f\rangle = |p_3 p_4\rangle$$

El término de orden cero siempre es un término del tipo δ_{fi} , así que si se considere $|f\rangle \neq |i\rangle$, se puede omitirlo. Entonces, hasta el segundo orden se tiene:

$$\langle f|\hat{S}|i\rangle = \hat{S}_{fi} = \hat{S}_{fi}^{(1)} + \hat{S}_{fi}^{(2)}$$

Tenemos:

$$\hat{S}_{fi}^{(1)} = 6 \left(\frac{-\lambda}{4!} \right) \int d^4x \langle p_3 p_4 | \hat{\phi}^{(-)2}(x) \hat{\phi}^{(+)2}(x) | p_1 p_2 \rangle$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle p_3 p_4 | \hat{\phi}^{(-)2}(x) \hat{\phi}^{(+)2}(x) | p_1 p_2 \rangle &= \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4 (2\omega_{k_1} 2\omega_{k_2} 2\omega_{k_3} 2\omega_{k_4})^{-1/2} e^{-i(k_1+k_2-k_3-k_4)x} \times \\ &\times \langle p_3 p_4 | a^\dagger(k_4) a^\dagger(k_3) a(k_2) a(k_1) | p_1 p_2 \rangle \end{aligned}$$

Aquí:

$$\langle p_3 p_4 | a^\dagger(k_4) a^\dagger(k_3) a(k_2) a(k_1) | p_1 p_2 \rangle = \langle 0 | a(p_3) a(p_4) a^\dagger(k_4) a^\dagger(k_3) a(k_2) a(k_1) a^\dagger(p_1) a^\dagger(p_2) | 0 \rangle$$

Usando las propiedades $a(k)|0\rangle$ y $a(k)a^\dagger(p) = a^\dagger(p)a(k) + i\delta(p-k)$:

$$\begin{aligned} a(k_2) a(k_1) a^\dagger(p_1) a^\dagger(p_2) | 0 \rangle &= a(k_2) a^\dagger(p_1) a(k_1) a^\dagger(p_2) | 0 \rangle + i\delta(p_1 - k_1) a(k_2) a^\dagger(p_2) | 0 \rangle \\ &= i\delta(p_2 - k_1) a(k_2) a^\dagger(p_1) | 0 \rangle + i\delta(p_1 - k_1) i\delta(p_2 - k_2) | 0 \rangle \\ &= -\{ \delta(p_2 - k_1) \delta(p_1 - k_2) + \delta(p_1 - k_1) \delta(p_2 - k_2) \} | 0 \rangle \end{aligned}$$

Similarmente:

$$\langle 0|a(p_3)a(p_4)a^\dagger(k_4)a^\dagger(k_3) = -\{\delta(p_3 - k_4)\delta(p_4 - k_3) + \delta(p_3 - k_3)\delta(p_4 - k_4)\}\langle 0|$$

Entonces:

$$\langle p_3p_4|\phi^{(-)2}(x)\phi^{(+2)}(x)|p_1p_2\rangle = (2\omega_{p_1}2\omega_{p_2}2\omega_{p_3}2\omega_{p_4})^{-1/2} (2)e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x}$$

Y por tanto:

$$S_{fi}^{(1)} = 6 \left(\frac{-\lambda}{4!} \right) (2\omega_{p_1}2\omega_{p_2}2\omega_{p_3}2\omega_{p_4})^{-1/2} (2)\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

En general, se puede mostrar que para este proceso el elemento de matriz en cualquier orden posee un factor $\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$. Este factor expresa la conservación de la energía y el momentum.

Para el término de segundo orden calculamos $S^{(2)}$

$$S^{(2)} = \left(\frac{-\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 T\{N\{\phi^4(x_1)\}N\{\phi^4(x_2)\}\}$$

De la descomposición de $T\{N\{\phi^4(x_1)\}N\{\phi^4(x_2)\}\}$ por el Teorema de Wick, el término que nos interesa es el de 4 partículas libres, es decir, de 4 extremos libres:

$$\underbrace{(\phi(x_1)\phi(x_2))^2}_{N\{N\{\phi^2(x_1)\}N\{\phi^2(x_2)\}\}}$$

Además:

$$N\{N\{\phi^2(x_1)\}N\{\phi^2(x_2)\}\} = \phi^{(+2)}(x_1)\phi^{(+2)}(x_2) + 2\phi^{(-)}(x_2)\phi^{(+2)}(x_1)\phi^{(+)}(x_2) +$$

$$\phi^{(-)2}(x_2)\phi^{(+2)}(x_1) + 2\phi^{(-)}(x_1)\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(+2)}(x_2) +$$

$$+4\phi^{(-)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(+)}(x_2) + 2\phi^{(-)}(x_1)\phi^{(-)2}(x_2)\phi^{(+)}(x_1)$$

$$+\phi^{(-)2}(x_1)\phi^{(+)2}(x_2) + 2\phi^{(-)2}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)\phi^{(+)}(x_2) + \phi^{(-)2}(x_1)\phi^{(-)2}(x_2)$$

Como en el proceso analizado tiene 2 partículas entrantes y 2 salientes, los sumandos de interés son:

$$\phi^{(-)2}(x_2)\phi^{(+)2}(x_1)$$

$$4\phi^{(-)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(+)}(x_2)$$

$$\phi^{(-)2}(x_1)\phi^{(+)2}(x_2).$$

El elemento de matriz en segundo orden para el proceso es:

$$S_{fi}^{(2)} = \left(\frac{-\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 (\underbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)}^2) \langle p_3 p_4 | \{ \phi^{(-)2}(x_2)\phi^{(+)2}(x_1) + \\ + 4\phi^{(-)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(+)}(x_2) + \phi^{(-)2}(x_1)\phi^{(+)2}(x_2) \} | p_1 p_2 \rangle$$

Por simetría, la primera y tercera integrales son iguales (basta intercambiar x_1 por x_2), por tanto:

$$S_{fi}^{(2)} = \left(\frac{-\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 (\underbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)}^2) \langle p_3 p_4 | \{ 2\phi^{(-)2}(x_2)\phi^{(+)2}(x_1) + \\ + 4\phi^{(-)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(+)}(x_2) \} | p_1 p_2 \rangle$$

Ya sabemos que:

$$\langle p_3 p_4 | \phi^{(-)2}(x)\phi^{(+)2}(x) | p_1 p_2 \rangle = (2\omega_{p_1} 2\omega_{p_2} 2\omega_{p_3} 2\omega_{p_4})^{-1/2} (2) e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x}$$

Por otro lado:

$$\langle p_3 p_4 | \phi^{(-)2}(x)\phi^{(+)2}(x) | p_1 p_2 \rangle = \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4 (2\omega_{k_1} 2\omega_{k_2} 2\omega_{k_3} 2\omega_{k_4})^{-1/2} e^{-i(k_1+k_2-k_3-k_4)x} \times \\ \times \langle p_3 p_4 | a^\dagger(k_4) a^\dagger(k_3) a(k_2) a(k_1) | p_1 p_2 \rangle$$

2. Cinemática de decaimientos

En este capítulo se discutirá la desintegración o decaimiento espontáneo de una partícula y la dispersión o choque de dos partículas. Estos procesos son los más importantes entre los llamados procesos dinámicos.

En un proceso dinámico se tiene un estado inicial en un tiempo $t = -\infty$ que evoluciona a un estado final en $t = +\infty$. Se asume que la interacción es apreciable sólo dentro de un cierto intervalo de tiempo $[-T, T]$. Esto significa que los estados inicial y final pueden considerarse estados de campos libres. Estos estados pueden escribirse como combinaciones lineales de estados multipartícula. El estado inicial se puede asumir como un estado multipartícula puro de n partículas iniciales: $|i\rangle = |p_1 \dots p_n\rangle$. No se puede asumir nada sobre la forma del estado final puesto que se encuentra determinado por la dinámica del sistema. Por ello, el estado final consiste en general en una combinación lineal de estados multipartícula posibles. Bajo una medición el estado final hará una transición a cualquiera de estos estados con una cierta probabilidad. De este modo, aparece el concepto de *canal* para hablar de un estado multipartícula final posible. Un canal está caracterizado por el número y la naturaleza de las partículas del estado multipartícula.

Un canal se dice *abierto* si la transición es permitida por las leyes de conservación. En caso contrario, el canal se dice *cerrado*.

En esta discusión no se ha considerado que, debido al principio de incertidumbre, las partículas del estado inicial no pueden poseer momentum completamente definido, es decir, el estado inicial no puede ser exactamente un estado multipartícula, sino que en general será un paquete de onda, como los que se han discutido anteriormente. En realidad este paquete de onda puede tener un valor apreciablemente diferente de cero en una vecindad de un cierto valor, de modo que el estado inicial se aproxima a un estado multipartícula con toda la precisión que se desee. Por el principio de incertidumbre, a mayor precisión en el momentum, mayor será la indeterminación de

la posición de las partículas.

A pesar que la discusión arriba se aplica a un proceso inicial con un número arbitrario de partículas, los procesos de mayor importancia son sólo los de una partícula (decaimientos) o dos partículas (dispersiones) en el estado inicial. Estos procesos serán estudiados a continuación con mayor detalle.

2.1. Decaimientos

Un *decaimiento* o *desintegración* es un proceso dinámico con una sola partícula en el estado inicial. Los posibles estados finales pueden consistir en muchas partículas. Se dice que la partícula incidente se *desintegra* en partículas *producto*. Cada estado multipartícula final posible determina un *modo de desintegración*.

Se estudiará primero el problema cinemático de un decaimiento desde el punto de vista de la mecánica relativista. Se tiene una partícula inicial de masa m_i . Es conveniente trabajar en el *sistema del centro de masa* (CM), el cual se define como el sistema de referencia donde el momentum total es cero. En el sistema CM la partícula inicial se encuentra en reposo. Esta partícula decae en N productos de masas m_1, \dots, m_N y 4-momentums p_1, \dots, p_N .

$$m_i(\vec{p}_i = 0, E_i = m_i) \rightarrow \sum_{j=1}^N m_j(\vec{p}_j, E_j)$$

Por conservación de momentum y energía,

$$\sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \vec{0} \quad \sum_{j=1}^N E_j = E_i = m_i$$

Puesto que $E_j = \sqrt{m_j^2 + p_j^2} > m_j$, la desintegración (espontánea) sólo es posible si $m_i > \sum_{j=1}^N m_j$. En tal caso, la partícula m_i se dice *inestable*.

Las ecuaciones de conservación no son suficientes para determinar los 4-momentums en el caso general. Esto sólo es posible en el caso $N = 1$ (trivial).

En el caso $N = 2$ se puede determinar la energía y el módulo del momentum de los

productos. En dicho caso se tiene:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \quad E_1 + E_2 = m_i$$

Entonces, $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}_f$ y $E_1 = E_2 = E_f$. De la segunda ecuación, se tiene

$$\sqrt{p_f^2 + m_1^2} + \sqrt{p_f^2 + m_2^2} = m_i,$$

de donde

$$p_f = \frac{\sqrt{(m_i^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2m_i}$$

De esta expresión también se pueden calcular las energías de los dos productos:

$$E_1 = \frac{m_i^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_i} \quad E_2 = \frac{m_i^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m_i}$$

Se utilizará ahora los resultados de la teoría escalar para calcular el tiempo de desintegración. El estado inicial es un paquete de ondas de una partícula,

$$|i\rangle = \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} f(k)|k\rangle$$

donde la función $f(k)$ es la componente de Fourier del paquete de onda. Supondremos que el paquete no es disperso, sino que básicamente tiene un momentum medio p . Es decir, asumiremos que la función $f(k)$ es apreciablemente diferente de cero sólo en una vecindad de cierto momentum p .

Por otro lado, el estado final es un estado de N productos. Al igual que en el estado inicial, los momentums de los productos no son definidos, sino que forman parte de un paquete de onda. Sin embargo, esto será considerado más adelante, así que por el momento,

$$|f\rangle = |p_1 \dots p_N\rangle.$$

La matriz S_{fi} para el proceso es

$$S_{fi} = \langle f|S|i \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} f(k) \langle p_1 \dots p_N | S | k \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} f(k) S(p_1, \dots, p_N; k).$$

Para la matriz $S(p_1, \dots, p_N; k)$ se tiene

$$S(p_1, \dots, p_N; k) = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta(\sum p_j - k) M(p_1, \dots, p_N; k).$$

Por tanto, asumiendo que los estados inicial y final son diferentes,

$$S_{fi} = \int d\tilde{k} f(k) (2\pi^4) i \delta(\sum p_j - k) M(p; k),$$

donde hemos abreviado $M(p_1, \dots, p_N; k) = M(p_j; k)$. La probabilidad de transición es

$$W = |S_{fi}|^2 = (2\pi^8) \int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 \delta(\sum p_j - k_1) \delta(\sum p_j - k_2) f(k_1) f^*(k_2) M(p; k_1) M^*(p; k_2)$$

Asumiremos que $M(p_j; k_1) \approx M(p_j; k_2) \approx M(p_j; p)$. Además,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \int d^3\tilde{k} e^{ikx} f(k) \\ |\tilde{f}(x)|^2 &= \int d^3\tilde{k}_1 \int d^3\tilde{k}_2 e^{ik_1x} f(k_1) f^*(k_2) \\ (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - q) &= \int d^4x e^{i(k_1+k_2-q)x}. \end{aligned}$$

Reemplazando se obtiene

$$W = \int d^4x |\tilde{f}(x)|^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) |M(p_1, p_2; p)|^2.$$

Por el Teorema de Parseval, $\int d^3x |\tilde{f}|^2 = \int d^4p |\tilde{f}|^2$. Entonces:

$$W = \int dt \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) |M(p_1, p_2; p)|^2.$$

Ya que la cantidad en la integral no depende de t , la integral, y por tanto W , es igual a infinito. Esta ecuación se puede interpretar como que la cantidad que acompaña a la integral es la probabilidad w (constante) por unidad de tiempo de que la transición ocurra:

$$w = \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) |M(p_1, p_2; p)|^2$$

De aquí que la probabilidad de transición W es infinita porque dicha probabilidad constante por unidad de tiempo se ha sumado sobre un tiempo infinito.

Luego se tiene que la razón de decaimiento diferencial es

$$d\Gamma = \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 E_{p_1}} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 E_{p_2}} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) |M(p_1, p_2; p)|^2,$$

y se aprecia que es independiente de la función f .

La razón de decaimiento total es $\Gamma = \int d\Gamma$.

2.2. Integración del espacio de fase

Tanto en los problemas de decaimiento como en los problemas de dispersión se debe integrar sobre el diferencial de espacio de fase $d\text{Lips}(P_i^2; p_1, \dots, p_N)$. Se describirá explícitamente el procedimiento de dicha integración para el caso $N = 2$. El caso general de N partículas se puede reducir por inducción a varias integraciones para 2 partículas, como veremos en la siguiente sección.

Es más fácil hacer los cálculos en el sistema del centro de masa, el cual se define como el sistema en donde el 3-momentum total es cero. En el caso de 2 partículas, el momentum inicial total es $\vec{p}_i = 0$ y por tanto en el estado final, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$. Es decir, $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}_f$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} d\text{Lips}(p_i^2; p_1, p_2) &= \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_{p_1}^1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_{p_2}^2} (2\pi)^4 \delta(E_i^{CM} - E_{p_1}^1 - E_{p_2}^2) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ &= \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_{p_1}^1 (2\pi)^3 2E_{p_1}^2} (2\pi)^4 \delta(E_i^{CM} - E_{p_1}^1 - E_{p_1}^2) \\ &= \frac{p_1^2 d^3 p_1 d\Omega}{(2\pi)^3 2E_{p_1}^1 (2\pi)^3 2E_{p_1}^2} (2\pi)^4 \delta(E_i^{CM} - E_{p_1}^1 - E_{p_1}^2) \end{aligned}$$

Para abreviar, cambiemos p_1 por p , y definamos $E_1 = E_p^1$ y $E^2 = E_p^2$. Tenemos:

$$E = E_1 + E_2 = (m_1^2 + p^2)^{1/2} + (m_2^2 + p^2)^{1/2}$$

de donde $p dp = \frac{E_1 E_2}{E} dE$. Así,

$$\begin{aligned} d\text{Lips} &= \frac{d\Omega (2\pi)^4 p}{(2\pi)^6 4E} dE \delta(E_i^{CM} - E) \\ &= \frac{p d\Omega}{16\pi^2 E_i^{CM}} \end{aligned}$$

donde $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ y $E_i^{CM} = \sqrt{p_i^\mu p_{i\mu}}$.

En el caso escalar, los integrandos son esféricamente simétricos, de modo que $d\omega = 4\pi$.

Luego,

$$d\text{Lips}(p_i^2; p_1, p_2)^{CM} = \frac{p}{4\pi E_i^{CM}}$$

Para el caso de un decaimiento (en dos partículas), $E_i^{CM} = m_i$, es decir,

$$d\text{Lips} = p/4\pi m_i.$$

3. Modelo escalar para decaimientos $K \rightarrow \pi$

3.1. Lagrangiano del modelo

Los decaimientos de kaones neutros en piones son importantes porque fueron históricamente los primeros en los que se observó la violación de la simetría CP . Los mesones no son partículas fundamentales, sino que están compuestas de quarks. Los decaimientos de kaones en piones violan la conservación de extrañeza. Puesto que la interacción débil es la única que permite esto, ella es la responsable de estos decaimientos. El estudio de los decaimientos por medio del modelo estándar es imposible debido a la complicación en los cálculos.

Esta imposibilidad es la principal motivación para buscar construir un modelo efectivo, no fundamental, que describa los decaimientos de kaones en piones.

En el modelo a presentar se incluirán exclusivamente los decaimientos de kaones neutros en piones. No se incluirán los decaimientos de kaones cargados o los decaimientos semileptónicos de kaones neutros, los cuales incluyen también muones.

Los kaones neutros K^0 y \bar{K}^0 forman un par partícula- antipartícula, y por ello se les representa por un campo escalar complejo. Por otro lado, el triplete de piones π^+ , π^- y π^0 se representa como un campo escalar real para el pión neutro y un campo complejo para los piones cargados. Consecuentemente se tendrá $(K^0)^\dagger = \bar{K}^0$, $(\pi^0)^\dagger = \pi^0$ y $(\pi^+)^\dagger = \pi^-$. El Lagrangiano de la teoría libre será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & (\partial_\mu \pi^0)^2 + (\partial_\mu \pi^+) (\partial_\mu \pi^-) - m_{\pi^0}^2 \pi^0 \pi^0 - m_{\pi^\pm}^2 \pi^+ \pi^- + \\ & + (\partial_\mu K^0) (\partial_\mu \bar{K}^0) - m_K^2 K^0 \bar{K}^0. \end{aligned}$$

La interacción entre kaones y piones se especificará agregando un término en el Lagrangiano por cada proceso conocido de decaimiento de un kaón neutro en piones.

De acuerdo a esto, se agrega ocho términos y el Lagrangiano completo será

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_0 + g_1 K^0 \pi^0 \pi^0 + g_2 \bar{K}^0 \pi^0 \pi^0 + g_3 K^0 \pi^0 \pi^0 \pi^0 + g_4 \bar{K}^0 \pi^0 \pi^0 \pi^0 + \\ & + g_5 K^0 \pi^+ \pi^- + g_6 \bar{K}^0 \pi^+ \pi^- + g_7 K^0 \pi^+ \pi^- \pi^0 + g_8 \bar{K}^0 \pi^+ \pi^- \pi^0, \end{aligned}$$

en donde los coeficientes g_i ($1 < i \leq 8$) son complejos. Para asegurar la hermiticidad del Lagrangiano, se debe exigir $g_2 = g_1^*$, $g_4 = g_3^*$, $g_6 = g_5^*$ y $g_8 = g_7^*$, de modo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_0 + g_1 K^0 \pi^0 \pi^0 + g_1^* \bar{K}^0 \pi^0 \pi^0 + g_3 K^0 \pi^0 \pi^0 \pi^0 + g_3^* \bar{K}^0 \pi^0 \pi^0 \pi^0 + \\ & + g_5 K^0 \pi^+ \pi^- + g_5^* \bar{K}^0 \pi^+ \pi^- + g_7 K^0 \pi^+ \pi^- \pi^0 + g_7^* \bar{K}^0 \pi^+ \pi^- \pi^0. \end{aligned}$$

De esta manera, los parámetros del modelo son los cuatro coeficientes complejos g_1, g_3, g_5 y g_7 .

Con este Lagrangiano se puede calcular la matriz S en cualquier orden de aproximación para los diversos decaimientos. Se realizará estos cálculos sólo para el primer orden de aproximación, ya que los órdenes superiores requerirían un tratamiento con técnicas de renormalización, las cuales no se discutirán en este trabajo.

3.2. Razón de decaimiento para el proceso $K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$

Las expresiones de los campos de kaones y piones en función de sus respectivos operadores de creación y aniquilación son las siguientes:

$$K^0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} [a_k e^{-ikx} + c_k^\dagger e^{ikx}]$$

$$\bar{K}^0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} [c_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx}]$$

$$\pi^0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} [b_k e^{-ikx} + b_k^\dagger e^{ikx}]$$

$$\pi^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} [d_k e^{-ikx} + h_k^\dagger e^{ikx}]$$

$$\pi^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} [b_k e^{-ikx} + d_k^\dagger e^{ikx}]$$

El estado inicial posee un único kaón y no es un estado de momentum definido sino un paquete de onda:

$$|i\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} f(k) |k\rangle.$$

Aquí la función $f(k)$ es la componente de Fourier del paquete de onda. Se asumirá que el paquete no es disperso, sino que tiene la forma de un pico angosto centrado alrededor de un momentum medio p . Es decir, la función $f(k)$ es apreciablemente diferente de cero sólo en una vecindad de p .

Por otro lado, el estado final contiene dos partículas: π^+ y π^- . Al igual que en el caso anterior, hay que considerar los paquetes de onda de momento de los piones. Por el momento se tomarán sólo estados de momento definido, y después se incluirán los paquetes de onda por superposición. Así:

$$|f\rangle = |p_1 p_2\rangle.$$

La matriz S_{fi} para el proceso es

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} f(k) \langle p_1 p_2 | S | k \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)2E_k} f(k) S(p_1, p_2; k).$$

Como se mencionó, se calculará $S(p_1, p_2, k)$ sólo en primer orden:

$$\begin{aligned} S^{(1)}(p_1, p_2; k) &= g_1 \int d^3x \int d^3\tilde{q}_1 \int d^3\tilde{q}_2 \int d^3\tilde{q}_3 \langle 0 | b(p_1) b(p_2) b^\dagger(q_1) b^\dagger(q_2) b(q_3) a^\dagger(k) | 0 \rangle \\ &= 2g_1 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p_1 - p_2). \end{aligned}$$

Según la definición de la matriz M , $S(p_1, p_2; k) = i(2\pi)^4 \delta(k - p_1 - p_2) M(p_1, p_2; k)$ y consecuentemente

$$M^{(1)}(p_1, p_2; k) = -2ig_1.$$

En adelante se prescindirá del símbolo (1) para denotar primer orden, entendiéndose que no se trata de la matriz M completa.

Por tanto,

$$S_{fi} = \int d\tilde{k}_1 f(k_1) (2\pi)^4 i \delta(p_1 + p_2 - k) M(p_1, p_2; k).$$

La probabilidad de transición es

$$W = |S_{fi}|^2 = (2\pi^8) \int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 \delta(p_1 + p_2 - k_1) \delta(p_1 + p_2 - k_2) f(k_1) f^*(k_2) |M(p_1, p_2; k)|^2$$

Se asumirá que $M(p_1, p_2, k_1) \approx M(p_1, p_2, k_2) \approx M(p_1, p_2, p)$. Además,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \int d^3 \tilde{k} e^{ikx} f(k) \\ |\tilde{f}(x)|^2 &= \int d^3 \tilde{k}_1 \int d^3 \tilde{k}_2 e^{ik_1 x} f(k_1) f^*(k_2) \\ (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - q) &= \int d^4 x e^{i(k_1 + k_2 - q)x}. \end{aligned}$$

Reemplazando se obtiene

$$W = \int d^4 x |\tilde{f}(x)|^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) |M(p_1, p_2; p)|^2.$$

Por el teorema de Parseval, $\int d^3 x |\tilde{f}|^2 = \int d^4 p |\tilde{f}|^2$. Entonces:

$$W = \int dt \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) |M(p_1, p_2; p)|^2.$$

Ya que la cantidad en la integral no depende de t , la integral, y por tanto W , diverge. Sin embargo, la cantidad finita que acompaña a la integral se interpreta como la probabilidad w (constante) por unidad de tiempo de que la transición ocurra:

$$w = \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) |M(p_1, p_2; p)|^2$$

Además, la razón de decaimiento diferencial es

$$d\Gamma = \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 E_{p_1}} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 E_{p_2}} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) |M(p_1, p_2; p)|^2,$$

y se aprecia que es independiente de la función f .

La razón de decaimiento total es $\Gamma = \int d\Gamma$. Calculemos par esto la integral

$$I = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 E_{p_1}} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 E_{p_2}} \delta(E_{p_1} + E_{p_2} - E_p) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p})$$

En el sistema del centro de masa, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$, es decir, $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}_f$. Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^6 E_{p_1} E_{p_2}} \delta(E_{p_1} + E_{p_2} - E_p) \\ &= \int \frac{p_f^2 dp_f d\Omega}{(2\pi)^6 E_{p_1} E_{p_2}} \delta(E_{p_1} + E_{p_2} - E_p) \\ &= \frac{p_f}{(2\pi)^6 E_p} \int d\Omega_f = \frac{4\pi p_f}{(2\pi)^6 E_p} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{4\pi p_f}{(2\pi)^6 E_p} |M(p_1, p_2; p)|^2 \\ \Gamma &= \frac{|g_1|^2 p_f}{4\pi^5 E_p}. \end{aligned}$$

Esta expresión para la razón de decaimiento está dada en el sistema del centro de masa. Para calcular la razón de decaimiento en el sistema de laboratorio basta hacer la transformación correspondiente. El cálculo para el proceso $K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ es esencialmente el mismo, y da lugar a la misma razón de decaimiento. Este resultado era de esperar ya que la razón de decaimiento depende sólo del módulo de g_1 .

Conclusiones

En este trabajo se han expuesto los fundamentos de la teoría de campos clásica y cuántica del campo escalar y se ha mostrado un modelo de interacción sencillo que describe los decaimientos de kaones en piones. Además, se ha explicado en detalle cómo calcular tiempos de decaimiento. El siguiente paso natural es hacer un modelo que describa las interacciones de kaones y piones de manera más fiel a la realidad. El trabajo se puede extender con los conceptos de simetría gauge y de multipletes de grupo. Con ellos, se puede intentar construir un modelo con simetrías adicionales a la de Poincaré del cual se deduzcan todos los decaimientos sin necesidad de introducir cada uno individualmente. Otra extensión plausible sería la de añadir un término que viole la simetría CP, aumentando así la consistencia del modelo con la realidad. Una técnica estándar para construir este tipo de términos es hacer imaginaria la constante de acoplamiento correspondiente. Un Lagrangiano con estas características sería útil en la descripción de los decaimientos de kaones en piones, y de esta forma también útil en el estudio de la violación de simetría CP, sin necesidad de recurrir a los modelos más complicados que se utilizan en la actualidad.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.: Complex analysis. New York. (1966)
- [2] Berestetskii, V.B.; Lifschitz, E.M.; Pitaevskii, L.P.: Relativistic quantum theory. Oxford: Pergamon Press. (1971)
- [3] Bjorken; Drell: Relativistic quantum mechanics. New York : McGraw-Hill. (1964)
- [4] Bjorken, J.; Drell, S.: Relativistic quantum fields. New York : McGraw-Hill. (1965)
- [5] Bogoliubov, N. N.: Introduction to the theory of quantized fields. New York. (1959)
- [6] Bogoliubov: Quantum fields. Massachussets: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1983)
- [7] Cartan, H: Formes différentielles, applications élémentaires au calcul des variations et a la théorie des courbes et des surfaces. Paris : Hermann. (1967)
- [8] Choquet-Bruhat, Y.; DeWitt-Morette, C.; Dillard-Bleick, M.: Analysis, manifolds and physics. Amsterdam: North-Holland. 1982.
- [9] Coddington, E.; Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. Boston: McGraw-Hill Company, Inc. (1982)
- [10] P. Deligne et al.: Quantum fields and strings: a course for mathematicians. American Mathematical Society (1999). (1987)
- [11] Derrick: Variable compleja con aplicaciones. México : Iberoamérica. (1987)
- [12] Feynman, R.P.: Quantum electrodynamics. New York: Benjamin. (1973)
- [13] Gell-Mann, M.; Ne'eman, Y.: The eightfold way. New York: Benjamin. (1964).

- [14] Greiner, W.: Field quantization. Berlin : Springer-Verlag. (1994)
- [15] Greiner, W.; Müller, B.: Quantum mechanics: Symmetries. Berlin : Springer-Verlag. (1994)
- [16] Hamermesh, M.: Group Theory. Massachusetts : Addison-Wesley. (1964)
- [17] Itzykson: Quantum field theory. New York : McGraw-Hill. (1980)
- [18] Jauch; Rohrlich: Theory of electrons and photons. Massachusetts : Addison-Wesley. (1959)
- [19] Landau, L.D.; Lifschitz, E.M.: The classical theory of fields. Oxford: Pergamon Press. (1975)
- [20] Mandl, F.; Shaw, G.: Quantum field theory. Chichester : John Wiley & Sons. (1993)
- [21] Peskin, M.; Schroeder, D.: An introduction to quantum field theory. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co. (1995)
- [22] Pilkulm, H. M.: Relativistic particle physics. New York: Springer-Verlag. (1979)
- [23] Schwaber, S.: An introduction to relativistic quantum field theory. New York : Harper & Row. (1962)
- [24] Sokolov: Electrodinámica cuántica. Moscú : Mir. (1989)
- [25] Valqui, H.G.: Construcción de las funciones de Green. Caso unidimensional. Lima: Revista de Ciencias de la UNI. Vol. 2. No. 3. (1996)
- [26] Valqui, H.G.: Construcción de las funciones de Green. Caso n-dimensional. Lima: Revista de Ciencias de la UNI.
- [27] Wightman, A.; Streater, R.: PCT, spin and statistics and all that. New York: Benjamin. (1964)
- [28] Wu-Ki-Tung : Group Theory in Physics. Philadelphia : World Scientific. (1985)