

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ECUACIONES VARIACIONALES HIPERBÓLICAS Y
SU APLICACIÓN EN LA OBTENCIÓN DE
MAPAS DE RUIDO

PRESENTADO POR:
JONATHAN ALFREDO MUNGUÍA LA COTERA

ASESORA:
Dra. IRLA MANTILLA NÚÑEZ

LIMA - PERÚ
2012

RESUMEN

El desarrollo de esta Tesis se centra en la solución de las Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales de tipo Hiperbólico Lineal (EDPHL), y su aplicación en la obtención de un modelo matemático para crear Mapas de Ruido (MR).

Para ello, este modelo se transforma a un problema de Ecuaciones Variacionales Hiperbólicas, del cual se analiza su existencia y unicidad de solución en subespacios de Sobolev evolutivo sobre dominios acotados. Este problema se resuelve numéricamente bajo ciertas condiciones de estabilidad. El procedimiento de resolución comprende desde las mediciones correspondientes a la geometría del dominio, preparación de la base de datos experimental y computacional hasta la construcción del esquema numérico y su implementación en MATLAB.

El esquema numérico está basado en el Método de Elementos Finitos (MEF), con el cual se muestra la eficiencia de los resultados. Como aplicación física de la resolución efectiva del problema de Onda Sonora es la construcción de los MR.

Para ello se ha considerado como dominio virtual una zona en coordenadas (x, z, t) localizada en el interior de la Facultad de Ciencias (R1), donde se puede apreciar que se cumple la normatividad acústica.

Palabras claves: Problemas Hiperbólicos de segundo orden, Ecuación de la Onda, Método de Elementos Finitos, Método de Diferencias Finitas.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20 - 35L05 - 65M60 - 65M06.

ABSTRACT

The development of this thesis focuses on the solution of Partial Differential Equations with Linear Hyperbolic type (PDELH), and its application to obtain a mathematical model to create noise maps (MR).

To do this, this model becomes a problem Hyperbolic Variational Equation, which analyzes their existence and uniqueness of solution subspaces of Sobolev evolution on bounded domains. This problem is solved numerically under certain conditions of stability. The termination procedure ranges from individual measurements in the geometry of the domain, preparing the basis of experimental and computational data to the construction of numerical scheme and its implementation in MATLAB.

The numbering scheme is based on the Finite Element Method (FEM), with which how the efficiency of the results. As a physical application of the effective resolution of the problem of Sound Wave is the construction of the NM.

This domain has been considered an area virtual coordinates (x, z, t) located within the Faculty of Sciences (R1), where you can see that it meets the noise regulations.

Keywords: Second order hyperbolic problems, Wave Equation, Finite Element Method, Finite Difference Method.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20 - 35L05 - 65M60 - 65M06.

Contenido

Agradecimientos	I
Introducción	X
Notaciones	XIII
1. MARCO TEÓRICO	1
1.1. Ecuaciones en Derivadas Parciales	1
1.2. Clasificación de las EDP lineales de segundo orden	3
1.3. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales	
Hiperbólicas	6
1.3.1. Clasificación de las Ecuaciones Hiperbólicas	6
1.3.2. Valores iniciales y de contorno para Ecuaciones Hiperbólicas .	7
1.3.3. Existencia y unicidad clásica para los problemas	
Hiperbólicos	8
1.4. Ecuación de la Onda	9
1.4.1. Planteamiento del problema de Onda en 1D. .	9
1.4.2. Estudio de la solución clásica del problema de Onda en 1D.	10
1.4.3. Dificultades para hallar la solución de la Onda n -dimensional,	
$n > 1$	18
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	19
2.1. Modelo Físico: Propagación del ruido	19
2.1.1. Obtención de la Ecuación que gobierna el Ruido	24
2.2. Modelo Matemático: Ecuación de la Onda Sonora n -dimensional .	26
2.2.1. Formulación variacional del Problema de la Onda Sonora .	28
2.2.2. Existencia y unicidad de solución del Problema Variacional	30

3. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DEL RUIDO	38
3.1. Solución numérica por Diferencias Finitas en 1D	38
3.1.1. Análisis de convergencia del esquema numérico .	40
3.2. Solución numérica por Elementos Finitos	44
3.2.1. Aproximación espacial: Método de Elementos Finitos	45
3.2.2. Aproximación temporal: Método de Newmark	51
3.2.3. Aproximación algebraica: Factorización LU . .	53
3.2.4. Análisis de convergencia del esquema numérico .	57
4. RESULTADOS: OBTENCIÓN COMPUTACIONAL DE LOS MAPAS DE RUIDO	61
4.1. Construcción del Diagrama de Flujo	61
4.2. Comparación del Método de Diferencias Finitas, Método de Elementos Finitos y la solución exacta en 1D.	63
4.3. Resultados con el Esquema por Elementos Finitos bidimensional .	65
4.4. Condiciones Iniciales y de Contorno para la obtención de los Mapas de Ruido	73
4.4.1. Obtención de la data de presión experimental	73
4.4.2. Medición de las fuentes de ruido y razón de cambio para la presión inicial experimental	76
4.4.3. Obtención de la Data de Contorno Experimental	76
4.5. Obtención numérica de los Mapas de Ruido	80
4.5.1. Datos de Entrada	80
4.5.2. Proceso Computacional	81
5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	95
6. ANEXOS	97
6.1. Algunos conceptos de Teoría de la Medida.	97
6.2. Espacios L^p	98
6.3. Espacios de Sobolev	103
6.4. Espacio Dual H^{-1} . .	107
6.5. Espacios de Sobolev Evolutivos	109
Bibliografía	113

Indice de figuras

2.1. Presión acústica	20
2.2. Escala de niveles sonoros	23
3.1. Elemento finito triangular con nodos en los vértices. .	47
3.2. Transformación T de $\Omega^{(e)}$ a Ω_0	49
4.1. Solución exacta y soluciones aproximadas para $\Delta t = \pi/5$ seg y en el instante $t = \pi/5$ seg.	64
4.2. Solución exacta y soluciones aproximadas para $\Delta t = \pi/10$ seg y en el instante $t = \pi/5$ seg. . .	65
4.3. Malla de 200 elementos.	67
4.4. Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 2$ seg.	68
4.5. Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 1$ seg.	68
4.6. Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 0,5$ seg.	69
4.7. Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 0,33$ seg.	69
4.8. Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 0,25$ seg.	70
4.9. Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 0,2$ seg.	70
4.10. Presión exacta y aproximada sobre una malla de 200 elementos y $\Delta t = 0,2$ seg.	71
4.11. Mapa de ruido de la presión experimental para 90 elementos.	75
4.12. Mapa de ruido de la presión experimental para 360 elemento .	75
4.13. Dominio rectangular de la Facultad de Ciencias. .	76
4.14. Malla de Elementos Finitos Triangular	82
4.15. Densidad de los coeficientes no nulos de las matrices de M y K .	82
4.16. Mapas de ruido a 5 min y 10 min de iniciado el proceso computacional.	83
4.17. Mapas de ruido a 25 min y 45 min de iniciado el proceso computacional.	83

4.18. Mapa de ruido a 35 min de iniciado el proceso computacional donde se muestra el mallado.	84
4.19. Rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros α y γ para 90 elementos y 45 minutos.	85
4.20. Densidad de los valores no nulos de la matriz de estabilidad num para 90 elementos y 45 minutos.	85
4.21. Malla de Elementos Finitos Triangular .	86
4.22. Densidad de los coeficientes no nulos de las matrices de M y K .	86
4.23. Mapas de ruido a 5 min y 10 min de iniciado el proceso computacional .	87
4.24. Mapas de ruido a 25 min y 45 min de iniciado el proceso computacional.	87
4.25. Rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros α y γ para 360 elementos y 45 minutos.	88
4.26. Densidad de los valores no nulos de la matriz de estabilidad num para 360 elementos y 45 minutos.	88
4.27. Rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros α y γ en 1D.	90
4.28. Densidad de los valores no nulos de la matriz de estabilidad num en 1D.	90
4.29. Mapas de ruido a 1 min y 5 min de iniciado el proceso computacional. .	91
4.30. Mapas de ruido a 8 min y 10 min de iniciado el proceso computacional.	91
4.31. Rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros α y γ para 360 elementos y 10 minutos.	92
4.32. Densidad de los valores no nulos de la matriz de estabilidad num para 360 elementos y 10 minutos.	92
4.33. Mapa de ruido para 90 elementos y 45 minutos.	93
4.34. Mapa de ruido para 360 elementos y 45 minutos.	93
4.35. Mapa de ruido para 90 elementos y 10 minutos. .	94
4.36. Mapa de ruido para 360 elementos y 10 minutos.	94

Introducción

Para prevenir la contaminación acústica que se ha venido registrando en los últimos tiempos, con la modernidad en las principales ciudades del Perú. Se ha trazado una estrategia específica para limitar el nivel de contaminación acústica: la elaboración de *Mapas de Ruido* (MR) en una cierta zona expuesta a ella. Hasta ahora un MR es el máximo indicador donde se muestra los diferentes niveles acústicos emitidos por ciertas fuentes de ruido. Para ello se realiza una exhaustiva medición de la emisión de ruidos usando *Sonómetros*. Estos equipos cada día están mejorando su tecnología gracias a las diferentes investigaciones en acústica.

Si bien los MR son tomados en cuenta en la ley de contaminación de ruido, en el Perú su aplicación se encuentra en un estado inicial.

Los MR son muy importantes puesto que permiten ver cuándo una determinada zona se encuentra expuesta a una contaminación acústica, y si ésta puede ser de alto riesgo para la salud de los habitantes de dicha zona. La importancia de una buena medición de ruidos es fundamental, ya que un error puede determinar un MR de baja calidad. La localización y medición de ruidos son aspectos verdaderamente importante para tal fin.

La ciencia que se especializa en estudiar los procesos y control del ruido (emisión, transmisión y recepción de las ondas sonoras en cualquier medio en el que se propaguen), corresponde al campo de la Acústica, donde se estudia la naturaleza y su repercusión de los distintos medios existentes de ruido, de modo experimental y científico, aplicando muchas veces formulaciones empíricas.

Generalmente se emplean dos técnicas para generar los MR, la técnica de muestreo y la técnica de simulación, la primera consiste en la utilización del **sonómetro**, como herramienta fundamental para medir niveles de **presión sonora** (dB) experimental, con el cual se va tomando datos directos de una zona en un tiempo determinado. Con esta técnica para obtener un MR de calidad, el proceso generalmente se realiza en aproxi-

madamente un año y su procedimiento es muy tedioso.

Mientras que con la técnica de simulación es más rápida siempre que se tenga un modelo matemático apropiado, por lo que la dificultad y tarea muy difícil de esta técnica es obtener dicho modelo, puesto que éste incluye ecuaciones que gobiernan el fenómeno de propagación del ruido y también las condiciones de contorno es decir una base de datos de alta performance, así como la construcción algorítmica para el cálculo computacional de la solución de estas ecuaciones. Pero gracias a la existencia de los sistemas de cómputo de gran capacidad para almacenar datos normados internacionalmente de las distintas formas de fuentes de ruido, es viable aplicar técnicas de simulación numérica y de este modo generar los MR. Con este proceso se puede localizar las fuentes de ruido, identificar y prevenir el nivel de contaminación acústica en un determinado escenario y aislarlo en caso necesario. Así como también mejorar la industria de materiales acústicos y la tecnología de los sonómetros. La principal ventaja de la modelación matemática para la obtención de los MR, es la visualización gráfica, donde se puede observar el nivel de sonido y/o ruido que viene directamente de las fuentes de origen. Cada escenario tiene su propio modelo, es allí la importancia de la realización de este tema de Tesis.

Objetivos

El objetivo del tema de Tesis es obtener un modelo matemático basado en las *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales Hiperbólicas (EDPH)* definidas en un dominio acotado, en el cual se asume que está expuesto a diferentes fuentes de ruido. Este modelo expresará el comportamiento de la presión de las **ondas sonoras** en dicho dominio.

En principio se hace un estudio del modelo clásico resolviendo las ecuaciones en una dimensión espacial y en forma analítica mediante el método de D'Alambert. Pero resulta que en la solución se tiene que integrar de forma exacta la función derivada de la presión, la cual es una variable dependiente de las condiciones iniciales del problema de Onda. En este caso de estudio no se cuenta como conocida la función integrando en forma analítica, puesto que sólo se tiene una base de datos de creta. Otra dificultad encontrada es respecto al problema bidimensional (obtención de su forma canónica evolutiva), para aplicar una técnica exacta de solución, razón por la cual no es viable encontrar una solución explícita exacta.

Específicamente el objetivo de esta Tesis es transformar el problema de onda clásico a un problema de *Ecuaciones Variacionales Hiperbólicas*, analizar las condiciones de

existencia de solución única y desarrollar un esquema numérico en 1D y 2D para obtener la solución explícita del problema, cuya aplicación de los resultados servirá para la construcción de los MR.

En lo resultado e muestra la eficiencia de esta metodología desarrollada en la convergencia de la solución y en la precisión de los MR.

La construcción del esquema numérico comprende un método variacional de Galerkin con Elementos Finitos para la semidiscretización espacial, un método explícito de Newmark para la solución del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de segundo orden y un método directo tipo Gaussiano con Factorización LU para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas.

El desarrollo del trabajo está organizado del siguiente modo:

En el primer capítulo se describe un marco teórico requerido para el desarrollo del problema. En el capítulo 2 e hace la formulación del modelo Físico-Matemático y el estudio de existencia de la solución única del problema variacional. En el capítulo 3 se hace el estudio numérico del problema clásico y variacional, en el capítulo 4 se implementa y se presenta los resultados numéricos basados en la experimentación compuacional para la generación óptima de los MR. Finalmente se dan las conclusiones y discusiones, asimismo se mencionan futuros trabajos de investigación.

Notaciones

Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^n .

- $C(\Omega)$ es el espacio de funciones continuas sobre Ω .
- $C^k(\Omega)$ es el espacio de funciones k veces diferenciable continuamente sobre Ω ($k > 1$ es un entero).
- $C^\infty = \bigcap_k C^k(\Omega)$.
- $C_c(\Omega)$ es el espacio de funciones continuas sobre Ω con soporte compacto en Ω , es decir que se anula en el exterior de algún conjunto compacto $K \subset \Omega$.
- $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.
- $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$,
(Otros autores escriben $\mathcal{D}(\Omega)$ o $C_0^\infty(\Omega)$ en lugar de $C_c^\infty(\Omega)$).
- Ω : un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n con frontera $\Gamma = \partial \Omega$.
- $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$.
- u : denota una función de varias variables.
- $|\Omega|$: medida de Lebesgue del conjunto Ω .
- $\text{sop}(f)$: Soporte de la función f .
- $C_0^m(\Omega)$: espacio de funciones $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ " m " veces continuamente diferenciables ($m \in \mathbb{N}$ ó $m = +\infty$) y de soporte compacto contenido en Ω .
- V : Espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot, \cdot)_V$ y norma asociada $\|V\|$.
- V^* : Espacio dual topológico de V , es decir, espacio de las funcionales lineales continuas de V en \mathbb{R} . La notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*, V}$ representa la relación de dualidad entre V y V^* .

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

En esta Tesis se estudia las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales de tipo Hiperbólico (EDPH), para lo cual se clasifica las EDP de forma general hasta llegar al caso particular de la ecuación de Onda.

1.1. Ecuaciones en Derivadas Parciales

En esta sección se define y clasifica las EDP en forma general [Evans, 1970].

NOTACIONES

Supóngase que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x)$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$.

- a) Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, donde cada componente α_i es un entero no negativo, es llamado **multiíndice** de orden $|\alpha|$, tal que:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

- b) Dado un multiíndice α , se define

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

la cual se conoce como derivada parcial de orden $|\alpha|$.

- c) Si k es un entero no negativo, se define

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) / |\alpha| = k\},$$

como el conjunto de todas las derivadas parciales de orden k .

Definición 1.1.1 (Ecuación Diferencial Parcial)

Una Ecuación en Derivadas Parciales o Ecuación Diferencial Parcial (EDP) es una ecuación con $n(n > 2)$ variables independientes $x_i (i \in \{1, \dots, n\})$ que se denotarán vectorialmente por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y derivadas parciales de una función $u = u(x)$ que es la variable dependiente, y que se define sobre un subconjunto abierto Ω de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} .

Más precisamente, una EDP con n variables independientes x_1, \dots, x_n es una ecuación de la forma:

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad \bar{x} \in \Omega \quad (1.1)$$

donde $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada y $u = u(x)$ es la función que se desea determinar. La ecuación (1.1) es llamada una EDP de k -ésimo orden.

Definición 1.1.2 La EDP (1.1) se clasifica como:

1. **Lineal** si tiene la forma:

$$\sum_{|\alpha| < k} a_\alpha(\bar{x}) D^\alpha u = f(x)$$

donde $a_\alpha (|\alpha| \leq k)$ y f son funciones dadas. Esta EDP lineal es homogénea si $f \equiv 0$.

2. **Semilineales** si tiene la forma:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

3. **Cuasilineal** si tiene la forma:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

4. **Totalmente no lineal** si depende no linealmente de los derivados de mayor orden.

El interés de este trabajo es el estudio de las EDP lineales de segundo orden, por tal motivo se las describe y clasifica en la siguiente sección, ver en [Tijonov, 1972].

1.2. Clasificación de las EDP lineales de segundo orden

Se llama **Ecuación en Derivadas Parciales de segundo orden** con n variables independientes x_i ($i = 1, \dots, n$) a una relación entre la función incógnita $u(x)$ y sus derivadas parciales hasta el segundo orden, sobre un subconjunto abierto Ω de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , es decir:

$$F(u_{x_n x_n}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_{x_1 x_1}, u_{x_n}, \dots, u_{x_1}, u, x_n, \dots, x_1) = 0$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, y en donde también se usará en forma indistinta la siguiente notación para las derivadas parciales:

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

En lo que sigue, se considerará la ecuación lineal de segundo orden, en su forma divergente:

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(\bar{x})u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(\bar{x})u + f(\bar{x}) = 0$$

que también puede escribirse en su forma matricial como:

$$\operatorname{div}(A^t(x, t)Du) + B(x, t)Du + c(x, t)u + f(x) = 0$$

donde $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_i)_{n \times 1}$, A^t es la matriz transpuesta de A y Du denota el gradiente de u . También se la puede expresar en su forma no divergente, la cual se usará con mayor frecuencia:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\bar{x})u_{x_i} + c(x)u + f(x) = 0, \quad (1.2)$$

donde los coeficientes a_{ij} , b_i , c ($i, j = 1, \dots, n$) y el término libre f son funciones continuas dadas de x . Se puede transformar la forma divergente de la EDP a su forma no divergente por las propiedades de la derivación.

Antes de empezar con el estudio de dichas ecuaciones se reescribe la ecuación (1.2), de la siguiente forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \phi(Du, u, x) = 0 \quad (1.3)$$

donde

$$\phi(Du, u, x) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u + f(x) \quad (1.4)$$

Para clasificar estas ecuaciones, se estudia su comportamiento local a través de su forma canónica en un punto. Por lo cual se hace el cambio de variables no singular $y = y(x)$, se demuestra del álgebra que existe la siguiente transformación no degenerada,

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad J \begin{pmatrix} y_1, y_2, \dots, y_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

Dado que el Jacobiano de esta transformación es $J \neq 0$, las variables $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se pueden expresar a través de las variables $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\bar{x} = x(\bar{y})$, en una vecindad de cada punto \bar{x} del dominio.

Sea entonces $u(x(\bar{y})) = \tilde{u}(\bar{y})$, es decir $u(\bar{x}) = \tilde{u}(y(\bar{x}))$, luego aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sustituyendo las expresiones (1.6) y (1.7) en la ecuación (1.2), se tiene

$$\sum_{l,k=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + c\tilde{u} + f(\bar{x}) = 0. \quad (1.8)$$

Tomando las siguientes notaciones en la ecuación (1.8)

$$\tilde{a}_{lk}(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial y_l}{\partial x_i}(\bar{x}) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(\bar{x}) \quad (1.9)$$

$$\tilde{\phi}(D\tilde{u}, \tilde{u}, \bar{y}) \equiv \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + c\tilde{u} + f(\bar{x}) \quad (1.10)$$

Se obtiene:

$$\sum_{l,k=1}^n \tilde{a}_{lk}(\bar{y}) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \tilde{\phi}(D\tilde{u}, \tilde{u}, \bar{y}) = 0. \quad (1.11)$$

Se verifica que la ecuación (1.11) es también una EDP lineal de segundo orden con variables independientes $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Con este resultado se demuestra que la EDP no cambia su comportamiento cuando se le aplica una transformación lineal así que se estudiará a continuación a la EDP en un punto dado x_0 , bajo un cambio de variables y una transformación apropiadas.

Del punto $y_0 = y(x_0)$ y de la notación:

$$e_{li} = \frac{\partial y_l(x_0)}{\partial x_i}$$

se obtiene de la ecuación (1.9) la relación

$$\tilde{a}_{lk}(y_0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial y_l}{\partial x_i}(x_0) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i,j=1}^n e_{li} a_{ij}(x_0) e_{kj} \quad (1.12)$$

que en forma matricial se escribe como

$$\tilde{A} = EAE^T \quad (1.13)$$

donde $\tilde{A} = [\tilde{a}_{lk}(y_0)]$ y $A = [a_{ij}(x_0)]$ son matrices de coeficientes de las segundas derivadas parciales y $E = [e_{li}]$ es la matriz de primeras derivadas parciales $\partial y_l / \partial x_i$ en un punto x_0 y su determinante es el Jacobiano de la transformación de coordenadas $y = y(x)$, $J(y/x) = \det E \neq 0$. Se conoce del Álgebra lineal [Lages, 1998] que a una matriz simétrica real A se le puede diagonalizar mediante una transformación del tipo (1.13), en donde E^T es una matriz ortogonal cuyas columnas son vectores propios de A , y A es la matriz diagonal obtenida al diagonalizar A , cuyas columnas son vectores propios de A repetidos de acuerdo con sus multiplicidades algebraicas. Entonces escogiendo la transformación lineal no singular de variables independientes $y = y(x)$ de tal manera que la matriz E satisfaga dichas condiciones en el punto x_0 , se puede decir entonces que **la ecuación (1.11) es la forma canónica de la ecuación (1.3) en el punto x_0 .**

De la ecuación (1.12) y (1.13) se deduce que la Ley de inercia de Sylvester establece que el número de elementos positivos, negativos y nulos \tilde{a}_{lk} de la matriz canónica n -dimensional, obtenida de la transformación lineal EAE^T es invariante a cualquier otra matriz canónica equivalente. Como la matriz obtenida es diagonal se tiene:

$$\forall l, k \in \{1, 2, \dots, n\}, l \neq k : \quad \tilde{a}_{lk} = 0$$

De lo dicho anteriormente se clasifica las EDP de segundo orden en un punto x_0 de su dominio como se puede ver en la siguiente definición:

Definición 1.2.1 (Operador Hiperbólico n -dimensional) *De los coeficientes \tilde{a}_{ii} de la matriz canónica \tilde{A} obtenida de una transformación lineal (1.13), sobre los coeficientes de la parte principal de la EDP (1.2)¹, se puede decir que (1.2) es del tipo:*

1. **Elíptico** en el punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, si todos los n coeficientes \tilde{a}_{ii} son de un mismo signo.
2. **Parabólico** en el punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, si por lo menos uno de los coeficientes \tilde{a}_{ii} es igual a cero.
3. **Hiperbólico** en el punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, si los $n - 1$ coeficientes de la forma \tilde{a}_{ii} poseen el mismo signo y el n coeficiente faltante tiene signo opuesto.

¹Son los derivados de mayor orden, en este caso particular las derivadas de segundo orden.

diremos que (1.2) es elíptica, parabólica o hiperbólica en Ω si se cumple (1), (2) ó (3) respectivamente para todo $x \in \Omega$.

1.3. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales Hiperbólicas

En esta sección se estudia las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales Hiperbólicas (EDPH) de segundo orden, y como caso específico la ecuación de la Onda, pero también se aprecia en la siguiente clasificación que existe EDPH de primer orden [Quarteroni, 2007].

1.3.1. Clasificación de las Ecuaciones Hiperbólicas

Las EDPH son de primer orden y segundo orden, estas ecuaciones son consideradas evolutivas:

1. Las ecuaciones hiperbólicas de primer orden son de dos tipos:

a) Ecuaciones hiperbólicas de primer orden lineales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Ecuaciones hiperbólicas de primer orden no lineales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

donde $a(u) := F'(u)$ denota la velocidad característica.

2. Una ecuación de segundo orden dada en su forma canónica es hiperbólica en un punto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ si tiene la forma siguiente:

$$a(x_0, t_0) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n a_i(x_0, t_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \phi(Du, u, x) = 0.$$

donde a, a_i son funciones de \mathbb{R}^{n+1} , $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$ y ϕ es dado como en (1.4).

EJEMPLOS

▪ Ecuación lineal de advección:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Ecuación de la onda en una dimensión espacial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde c es la velocidad de la onda.

- Ecuación de la onda en dos dimensiones espaciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad t > 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2,$$

donde c es la velocidad de la onda. Ver [Asmar, 2004].

1.3.2. Valores iniciales y de contorno para Ecuaciones Hiperbólicas

Cuando se describe un fenómeno físico mediante un modelo matemático dependiente por ejemplo de la presión, hay que plantear correctamente el problema sobre la variable u (presión), es decir, enunciar las condiciones suficientes para la determinación de una única solución. Es conocido que las Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas Lineales (EDPHL) [Quarteroni, 2007], poseen un conjunto infinito de soluciones, por lo que para caracterizar de manera única la solución es necesario agregar al modelo planteado ciertas condiciones complementarias que garanticen la existencia y unicidad de solución. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) abierto y acotado con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular y cuyas condiciones complementarias son:

1. **Condiciones Iniciales** Existen dos condiciones iniciales necesarias y suficientes:

a) **Presión inicial:** Consiste en la determinación de los valores de la función $u(x, t)$ en el momento inicial t_0 y para todo $x \in \Omega$.

b) **Cambio de presión inicial:** Consiste en la determinación de los valores de la función $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ en el momento inicial t_0 y para todo $x \in \Omega$.

2. **Condiciones de Contorno** Son condiciones necesarias y suficientes que se dan sobre la frontera Γ de la región en la cual tiene lugar el proceso físico. Existen 3 tipos de condiciones de contorno:

i) **Especificar la función en la frontera del dominio.** Se conoce como condición del tipo Dirichlet. Consiste en especificar los valores que toma la función $u(\bar{x}, t)$ en la frontera Γ :

$$\forall x \in \Gamma : \quad u(x, t) = \gamma(x)$$

Este tipo de condiciones genera lo que se llama un problema de Dirichlet.

- ii) **Especificar la derivada de la función en la frontera del dominio.** Se conoce como condición del tipo Neumann y el problema asociado se llama problema de Neumann. Aquí se conoce el valor de la derivada de la función $u(x, t)$ con respecto a la normal η a lo largo de la frontera Γ :

$$\forall x \in \Gamma : \quad \nabla u(x, t) \cdot \eta = \gamma(x)$$

Físicamente este tipo de condición define el flujo de presión.

- iii) **Especificar la función y su derivada en la frontera del dominio.** Se conoce como condición de tipo Robin y el problema asociado es un problema mixto:

$$\forall x \in \Gamma : \quad \alpha(x)u(x, t) + \beta(x)\nabla u(x, t) = \gamma(x)$$

donde α , β y γ son funciones dadas.

1.3.3. Existencia y unicidad clásica para los problemas Hiperbólicos

En esta sección se enuncia el Teorema de la existencia y unicidad de solución clásica de problemas hiperbólicos con condiciones iniciales [Petrovski, 1960] [Mijáilov, 1978] [Zuazua, 2003]. Para ello, considérese el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de las funciones incógnitas u_1, u_2, \dots, u_m respecto a las variables independientes t, x_1, x_2, \dots, x_n , tales que u_i son funciones escalares diferenciales hasta el orden k , en n variables sobre un dominio Ω acotado, que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i \left(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \frac{\partial^{k_i} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots \right) \quad (1.14)$$

$(k_0 + k_1 + \dots + k_n = k < n_j; \quad k_0 < n_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, m)$.

Para un cierto valor de $t = t_0$ se dan los valores (valores iniciales) de las funciones incógnitas u_i y de sus derivadas respecto a t hasta el orden $n_i - 1$. Supóngase que para $t = t_0$

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1). \quad (1.15)$$

Todas las funciones $\varphi_i^{(k)}$ están definidas en el dominio Ω del espacio \mathbb{R}^n .

Definición 1.3.1 *El problema de Cauchy consiste en hallar la solución del sistema (1.14) que satisfaga para $t = t_0$ las condiciones iniciales (1.15).*

Definición 1.3.2 Una función $F(z_1, z_2, \dots, z_m)$ de m variables reales se llama analítica en la vecindad del punto $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$ si es desarrollable en la serie de potencias

$$F(z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum_{k_1 k_2 \dots k_m} A_{k_1 k_2 \dots k_m} (z_1 - z_1^0)^{k_1} (z_2 - z_2^0)^{k_2} \dots (z_m - z_m^0)^{k_m}$$

que converge para $|z_i - z_i^0|$ suficientemente pequeños.

Obsevación 1.3.1 Es fácil ver que la función F tiene derivadas de todos los órdenes en el punto $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$ y que sus coeficientes $A_{k_1 k_2 \dots k_m}$ son

$$A_{k_1 k_2 \dots k_m} = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_m!} \left(\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_m} F}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_m^{k_m}} \right)_{z_1=z_1^0, \dots, z_m=z_m^0}$$

Notación 1.3.1 Se abrevia la notación para las derivadas de las funciones $\varphi_i^{(k)}$ en cierto punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$:

$$\left(\frac{\partial^{k-k_0} \varphi_i(k_0)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right)_{x_1=x_1^0, \dots, x_n=x_n^0} = \varphi_{i, k_0, k_1, \dots, k_n}^0$$

$(i = 1, 2, \dots, N; \quad k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leq n_i).$

Teorema 1.3.1 (Kovalevskaya [Petrovski, 1960]) Si todas las funciones F_i son analíticas en una vecindad del punto:

$(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \dots, \varphi_{j, k_0, k_1, \dots, k_n}^0, \dots)$ y todas las funciones $\varphi_j^{(k)}$ son analíticas en una vecindad del punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, el problema de Cauchy admite solución analítica en una vecindad del punto $(t^0; x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, solución que es única en la clase de las funciones analíticas.

1.4. Ecuación de la Onda

Se vio en la sección (1.3.1) la ecuación de la Onda como un ejemplo de EDPHL de segundo orden, en esta sección se busca hallar la forma de la solución analítica de un problema de valor inicial y de contorno que involucra a la ecuación de la Onda.

1.4.1. Planteamiento del problema de Onda en 1D.

A continuación se enuncia el problema de la Onda con condiciones iniciales y de contorno en una dimensión espacial [Asmar, 2004]:

Sean $I = (0, L) \subset \mathbb{R}$, $\Omega = I \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$, y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} EDP : & \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad (x, t) \in \Omega \\ CI : & \quad \begin{cases} u(x, 0) = g(x) \quad , \quad x \in \bar{I}, \\ u_t(x, 0) = h(x) \quad , \quad x \in \bar{I} \end{cases} \\ CC : & \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 = u(L, t) \quad , \quad t \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde $u = u(x, t)$, $f, g : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$, son funciones dadas, definidas como: $g = g(x)$ y $h = h(x)$ y c, L son constantes positivas.

La solución del problema se busca en el espacio V definido como:

$$V = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : \forall x \in \bar{I}, \exists u_t(x, 0) \text{ y } u(0) = 0 = u(L)\} \quad (1.17)$$

1.4.2. Estudio de la solución clásica del problema de Onda en 1D.

Para la construcción de la solución se da las siguientes proposiciones que serán básicas para la demostración del teorema, ver todos estos resultados en [Mantilla, 2009] y [Iório, 1999]:

Proposición 1.4.1 ([Iório, 1999]) Sea $\theta \in C([0, M])$ una función real y supongase que θ satisface

$$\theta(0) = 0 = \theta(M)$$

entonces la función $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Theta(x) = \begin{cases} \theta(x - 2kM) & \text{si } 2kM \leq x \leq (2k + 1)M, k \in \mathbb{Z} \\ -\theta(-x + 2kM) & \text{si } (2k - 1)M \leq x \leq 2kM, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1.18)$$

es la extensión impar y periódica de periodo $2M$ de θ y está en $C(\mathbb{R})$.

Además, si $\theta \in C^1([0, M])$ entonces $\Theta \in C^1(\mathbb{R})$ y Θ' es la extensión par y periódica de periodo $2M$ de $\theta' \in C([0, M])$

Proposición 1.4.2 ([Iório, 1999]) Si $\gamma \in C([0, N])$. Entonces la función $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \gamma(x - 2kN) & \text{si } 2kN \leq x \leq (2k + 1)N, k \in \mathbb{Z} \\ \gamma(-x + 2kN) & \text{si } (2k - 1)N \leq x \leq 2kN, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1.19)$$

es la extensión par y periódica de periodo $2N$ de γ y es continua en toda la recta.

Además de eso, si $\gamma \in C^1([0, N])$, entonces $\Gamma \in C^1(\mathbb{R})$ si y solamente si $\gamma'(0) = 0 =$

$\gamma'(N)$; en ese caso Γ' es la extensión impar y periódica de periodo $2N$ de la función $\gamma' \in C([0, N])$.

Teorema 1.4.1 (Solución clásica) Supongase que se tiene el problema base enunciado anteriormente, donde $g \in C^2([0, L])$ y $h \in C^1([0, L])$ tales que cumplan:

$$g''(0) = 0 = g''(L) \quad (1.20)$$

$$h(0) = 0 = h(L) \quad (1.21)$$

Entonces se demuestra que la función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma:

$$u(x, t) = \frac{G(x + ct) + G(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} H(s) ds. \quad (1.22)$$

donde G y H son de la forma dada en la **Proposición 1.4.1** y son de clase $C^2(\mathbb{R})$ y de clase $C^1(\mathbb{R})$ respectivamente, es la solución única al problema base en el espacio V .

Demostración.

La demostración se analiza en los siguientes casos:

1.- Análisis de la solución de la Ecuación de la Onda en todo \mathbb{R}^2

En este paso considerese u definido sobre todo \mathbb{R} y la ecuación de la onda sobre todo \mathbb{R}^2 . Se halla las curvas características de la ecuación, para tal fin se expresa la ecuación de la manera siguiente:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

de aquí se obtiene las funciones:

$$A = 1, \quad B = 0 \quad y \quad C = -c^2$$

De las cuales se obtiene las curvas características, que son las familias de rectas:

$$x + ct = k_1$$

$$x - ct = k_2$$

donde k_1 y k_2 son constantes.

Ahora se expresa la ecuación en su forma canónica, para esto se define las funciones:

$$\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi = \xi(x, t) = x + ct$$

$$\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta = \eta(x, t) = x - ct$$

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, v = v(\xi, \eta)$$

claramente ξ y η son funciones de clase C^2 y su jacobiano:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -c - c = -2c \neq 0$$

entonces por el teorema de la función inversa, se pueden expresar x, y , como: $x = x(\xi, \eta)$ y $y = y(\xi, \eta)$, las cuales son también de clase C^2 , además igualamos u a v , de la siguiente forma:

$$u = u(x, t) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = v(\xi, \eta) = v$$

tomando en cuenta el cambio de variable $u = v$ y la regla de la cadena, se tiene los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t}(x + ct) + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) = c \frac{\partial v}{\partial \xi} - c \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial v}{\partial \xi} - c \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ &= c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial t}(x + ct) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) \right) \\ &\quad - c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial t}(x + ct) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) \right) \\ &= c \left(c \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \right) - c \left(c \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - c \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

de manera similar se halla las derivadas con respecto a x .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x}(x + ct) + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial x}(x + ct) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial x}(x + ct) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Luego al reemplazar estos resultados en la ecuación de la onda, se obtiene la ecuación de la onda en su forma canónica:

$$v_{\xi\eta} = 0$$

Integrando dos veces dicha ecuación;

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias de clase C^2 sobre todo \mathbb{R} .

Volviendo a las variables x y t , se tiene

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \quad (1.23)$$

Como ξ y η son claramente funciones de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ entonces u es también de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$. La ecuación (1.23) es conocida como la ecuación de D'Alembert, se observa que esta ecuación tiene infinitas soluciones para la ecuación de la onda.

2.- Análisis de la solución de la ecuación de onda con condiciones iniciales sobre todo \mathbb{R}

En esta etapa consideramos la ecuación de la onda sobre todo \mathbb{R}^2 y las condiciones iniciales dadas en el problema base pero definidas sobre todo \mathbb{R} , conocida como problema de Cauchy, además se supone que f es de clase $C^2(\mathbb{R})$ y g es de clase $C^1(\mathbb{R})$.

Por lo tanto de la ecuación de D'Alembert se sabe que existen soluciones a la ecuación de onda, ahora se impone las condiciones iniciales a la ecuación de D'Alembert:

• Primero usando el dato de la posición inicial:

$$u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = g(x)$$

derivando la ecuación anterior respecto a x , se tiene:

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{d\psi}{dx}(x) \quad (1.24)$$

• Segundo usando el dato de la velocidad inicial:

Para esto derivamos la ecuación de D'Alembert respecto a t (regla de la cadena), se tiene.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x + ct) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}(x - ct) \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

lo cual se convierte en

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{d\varphi}{dx}(x + ct) - c \frac{d\psi}{dx}(x - ct)$$

sustituyendo $t = 0$ en lo anterior, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = c \frac{d\varphi}{dx}(x) - c \frac{d\psi}{dx}(x) = h(x)$$

ordenando se tiene la ecuación:

$$\frac{h(x)}{c} = \frac{d\varphi}{dx}(x) - \frac{d\psi}{dx}(x) \quad (1.25)$$

• Tercero se resuelve el sistema de ecuaciones (1.24) y (1.25)

Se obtiene:

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{1}{2} \frac{dg}{dx}(x) + \frac{1}{2c} h(x) \quad (1.26)$$

$$\frac{d\psi}{dx}(x) = \frac{1}{2} \frac{dg}{dx}(x) - \frac{1}{2c} h(x) \quad (1.27)$$

Integrando la ecuación (1.26) de cero a x , se tiene

$$\int_0^x \frac{d\varphi}{ds}(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dg}{ds}(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^x h(s) ds$$

aplicando el teorema fundamental de cálculo, se tiene

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \frac{1}{2} [g(x) - g(0)] + \frac{1}{2c} \int_0^x h(s) ds$$

luego ordenando se tiene la ecuación:

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \frac{1}{2} g(0) + \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x h(s) ds \quad (1.28)$$

procediendo de manera similar con la ecuación (1.27), se tiene:

$$\int_0^x \frac{d\psi}{ds}(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dg}{ds}(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^x h(s) ds,$$

$$\psi(x) - \psi(0) = \frac{1}{2} [g(x) - g(0)] - \frac{1}{2c} \int_0^x h(s) ds$$

y por último la ecuación:

$$\psi(x) = \psi(0) - \frac{1}{2} g(0) + \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x h(s) ds \quad (1.29)$$

además se observa que

$$\varphi(0) + \psi(0) = f(0)$$

Se sustituye x por $x + ct$ en (1.28), y x por $x - ct$ en (1.29):

$$\varphi(x + ct) = \varphi(0) - \frac{1}{2} g(0) + \frac{1}{2} g(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} h(s) ds$$

$$\psi(x - ct) = \psi(0) - \frac{1}{2} g(0) + \frac{1}{2} g(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} h(s) ds$$

luego sumando, se obtiene

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 : u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(s) ds. \quad (1.30)$$

Claramente esta ecuación es solución del problema de Cauchy.

3.- Se analiza la solución del problema base con $h \equiv 0$

En esta etapa se demuestra el teorema tomando $h \equiv 0$. A pesar de que el problema se parece al anterior, no se puede usar la ecuación (1.30) pues, tomando $x = 0$, se espera que:

$$\forall t \geq 0 : [-ct, ct] \subset \bar{I}$$

lo cual es absurdo.

Por lo tanto se procede a extender g y h a todo \mathbb{R} . Y se buscará una solución a la ecuación de la onda sobre todo \mathbb{R}^2 , y luego se probará que la restricción a $\bar{\Omega}$ es la solución del problema. Entonces se toma las siguientes extensiones para g y h :

$$G(x) = \begin{cases} g(x - 2kL) & \text{si } 2kL \leq x \leq (2k + 1)L, k \in \mathbb{Z} \\ -g(-x + 2kL) & \text{si } (2k - 1)L \leq x \leq 2kL, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

y

$$\forall x \in \mathbb{R} : H(x) = 0$$

claramente $H \in C^1(\mathbb{R})$, véase que $G \in C^2(\mathbb{R})$, en efecto: Se tiene que $G \in C^2([0, L])$ y se ve claramente que $g(0) = 0 = g(L)$, de la proposición 1.4.1 se tiene que $G \in C^1(\mathbb{R})$, y G' es de la forma:

$$G'(x) = \begin{cases} g'(x - 2kL) & \text{si } 2kL \leq x \leq (2k + 1)L, k \in \mathbb{Z} \\ -g'(-x + 2kL) & \text{si } (2k - 1)L \leq x \leq 2kL, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Como $g' \in C^1[0, L]$ y por la condición (1.20) se tiene de la proposición 1.4.2 que $G' \in C^1(\mathbb{R})$ es decir $G \in C^2(\mathbb{R})$. Entonces se sabe que existe una solución al problema extendido de la forma:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 : u(x, t) = \frac{G(x + ct) + G(x - ct)}{2} \quad (1.31)$$

Ahora se probará que dicha solución restringida a $\bar{\Omega}$ es solución del problema base con $h \equiv 0$. En efecto:

Véase que la función u satisface las condiciones de contorno pues como G es impar se tiene que

$$\forall t \geq 0 : u(0, t) = \frac{G(ct) + G(-ct)}{2} = \frac{G(ct) - G(ct)}{2} = 0.$$

ahora utilizando el hecho que G es periódica de periodo $2L$, es evidente que:

$G(L + ct) = G(-L + ct)$, luego, cualquiera que sea $t \geq 0$,

$$u(L, t) = \frac{G(L + ct) + G(L - ct)}{2} = \frac{G(-L + ct) + G(L - ct)}{2}$$

$$= \frac{G(-L + ct) - G(-L + ct)}{2} = 0.$$

En cuanto a las condiciones iniciales, por la propia definición de G es claro que

$$\forall x \in [0, L] : u(x, 0) = g(x)$$

derivando la ecuación (1.31) respecto de t , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x + ct) \frac{\partial}{\partial t}(x + ct) + \frac{\partial G}{\partial x}(x - ct) \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) \right) \\ u_t(x, t) &= \frac{cG'(x + ct) - cG'(x - ct)}{2} \end{aligned}$$

por tanto

$$\forall x \in \bar{I} : u_t(x, 0) = 0.$$

Como $G \in C^2(\mathbb{R})$ y de lo anterior es fácil ver que $u \in V$; es más $u \in C^2(\bar{\Omega})$, con esto se prueba que la solución restringida es la solución al problema base con $h \equiv 0$ en el espacio V .

4.- Análisis de la solución del problema base con $g \equiv 0$

De manera similar se demuestra que la solución dada por el teorema es solución del problema base con $g \equiv 0$, por lo tanto las extensiones que se toma para g y h son:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : G(x) &= 0 \\ H(x) &= \begin{cases} h(x - 2kL) & \text{si } 2kL \leq x \leq (2k + 1)L, k \in \mathbb{Z} \\ -h(-x + 2kL) & \text{si } (2k - 1)L \leq x \leq 2kL, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

claramente $G \in C^2(\mathbb{R})$, se ve que $H \in C^1(\mathbb{R})$, pues de la condición (1.21) y de $h \in C^1(\bar{I})$ se verifica la proposición 1.4.1. Luego la solución única del problema extendido será de la forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} H(s) ds \quad (1.32)$$

Ahora véase que la restricción de esta función es solución del problema base con $g \equiv 0$. Por lo tanto se verifica la condición de frontera en $x = 0$, pues como H es impar, se obtiene

$$\forall t \geq 0 : u(0, t) = \int_{-ct}^{ct} H(s) ds = 0$$

es claro de la ecuación (1.32), que se cumple la condición inicial:

$$\forall x \in \bar{I}, u(x, 0) = 0,$$

de igual manera se verifica la condición de frontera en $x = L$, pues como H es periódica se tiene para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 u(L, t) &= \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} H(s) ds = \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} H(r+L) dr \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^0 H(r+L) dr + \frac{1}{2c} \int_0^{ct} H(r+L) dr \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^0 H(r-L) dr + \frac{1}{2c} \int_0^{ct} H(r+L) dr \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{-L-ct}^{-L} H(s) ds + \frac{1}{2c} \int_L^{L+ct} H(s) ds \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, derivando (1.32) respecto a t , se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{x-ct}^{x+ct} H(s) ds \right) \\
 &= \frac{1}{2c} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s} \left[\int H(s) ds \right] \right) (x+ct) \frac{\partial}{\partial t} (x+ct) - \left(\frac{\partial}{\partial s} \left[\int H(s) ds \right] \right) (x-ct) \frac{\partial}{\partial t} (x-ct) \right\} \\
 &= \frac{cH(x+ct) + cH(x-ct)}{2c}
 \end{aligned}$$

entonces por último se tiene:

$$u_t(x, t) = \frac{H(x+ct) + H(x-ct)}{2}$$

entonces

$$\forall x \in \bar{I} : u_t(x, 0) = H(x) = h(x).$$

De manera similar se puede calcular la derivada de u con respecto a x :

$$u_x(x, t) = \frac{H(x+ct) - H(x-ct)}{2c}$$

de lo anterior se tiene que $u_t \in C^1(\bar{\Omega})$ y $u_x \in C^1(\bar{\Omega})$, por lo tanto $u \in V$ y es más $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y la función restringida es solución del problema base con $g \equiv 0$.

5.- Análisis de la solución del problema

En esta etapa final se demuestra que la solución propuesta por el teorema es solución del problema de onda, para eso extendemos las funciones g, h a G y H respectivamente como en las etapas 2 y 3.

Sea v una solución al problema de la etapa 1 y w una solución al problema de la etapa

2. Se demostrará que $u - v + w$ es solución del problema, cuya expresión es dada en la ecuación (1.22).

Por el principio de superposición u es solución de la ecuación de la onda, por cálculo $u \in V$ y u es de clase $C^2(\Omega)$. Ahora véase que verifica las condiciones iniciales y de contorno:

- Véase que se cumpla las condiciones iniciales:

$$\forall x \in I : u(x, 0) - v(x, 0) + w(x, 0) = g(x) + 0 - g(x),$$

$$\forall x \in I : u_t(x, 0) = v_t(x, 0) + w_t(x, 0) = 0 + h(x) = h(x);$$

- Véase que se cumpla las condiciones frontera:

$$\forall t \geq 0 : u(0, t) - v(0, t) + w(0, t) = 0 + 0 = 0,$$

$$\forall t \geq 0 : u(L, t) - v(L, t) + w(L, t) = 0 + 0 = 0,$$

Por lo que u dada en la ecuación (1.22) es solución del problema de onda en el espacio V .

1.4.3. Dificultades para hallar la solución de la Onda n -dimensional, $n > 1$

Entre las dificultades de buscar la solución general explícita del problema de Onda en forma analítica o clásica en n dimensiones espaciales ($n > 1$), es llevarlo a su forma canónica. Según [Tijonov, 1972] para $n \geq 2$ para hallar la forma canónica en un entorno de un punto del dominio Ω_T resulta singularidades al usar la fórmula de Kirchhoff [Petrovski, 1960], la cual es una variante de la fórmula de D'Alembert pero se llega al problema de que la solución es implícita, es decir la misma dificultad del caso unidimensional en espacio.

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se plantea el problema de la Propagación del Ruido, la obtención de las ecuaciones que gobiernan dicho fenómeno y la formulación variacional de su Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (EDP).

2.1. Modelo Físico: Propagación del ruido

En esta sección se busca entender el fenómeno físico, sus conceptos y la obtención de la EDP que gobierna este fenómeno.

ONDAS SONORAS

Son ondas mecánicas longitudinales, producidas por variaciones de presión en el medio circundante. La propagación de estas ondas en un medio puede servir para estudiar algunas propiedades de dicho medio de transmisión.

SONIDO

El sonido es un fenómeno físico que consiste en la alteración mecánica de las partículas de un medio elástico, producida por un elemento en vibración, que es capaz de provocar una sensación auditiva. Las vibraciones se transmiten en el medio, generalmente el aire, en forma de ondas sonoras, las cuales se introducen por el pabellón del oído haciendo vibrar la membrana del tímpano, de ahí pasa al oído medio, oído interno y excita las terminales del nervio acústico que transporta al cerebro los impulsos neuronales que fi-

se hará referencia, el fenómeno se propaga por la puesta en vibración de las moléculas de aire situadas en la proximidad del elemento vibrante, que a su vez transmiten el movimiento a las moléculas vecinas, y así sucesivamente. La vibración de las moléculas de aire provoca una variación de la presión atmosférica, es decir, una onda de presión que se propaga por el aire. Esta variación de la presión se denomina **presión acústica** o **presión sonora**, y se define como la diferencia en un instante dado entre la **presión instantánea** y la **presión atmosférica**. La presión acústica varía muy bruscamente con el tiempo; estas variaciones bruscas son percibidas por el oído humano, creando la sensación auditiva (Figura 4.15). Las ondas sonoras se atenúan con la distancia y pueden ser absorbidas o reflejadas por los obstáculos que encuentran a su paso.

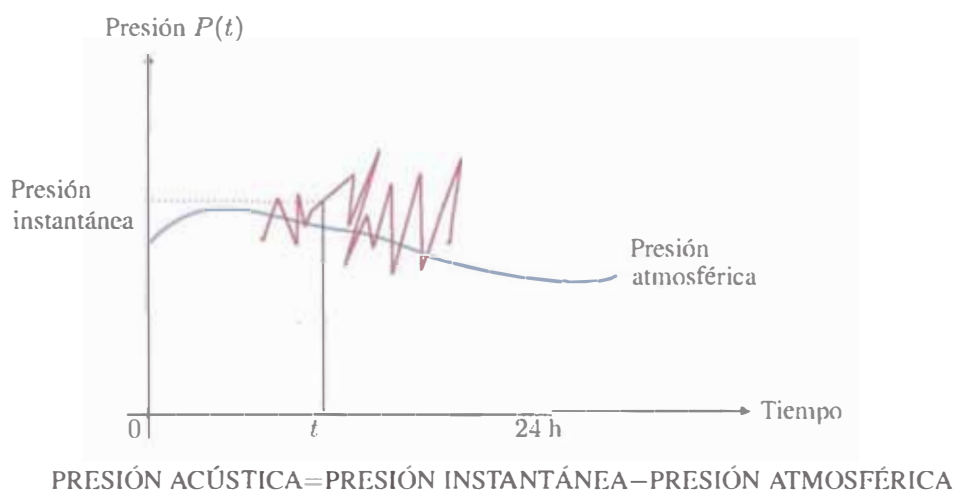


Figura 2.1: Presión acústica

VELOCIDAD DEL SONIDO

Es la velocidad de propagación de las Ondas Sonoras. Esta depende de las características del medio en el que se realiza dicha propagación y no de las características de la onda o de la fuerza que la genera. Por ejemplo en el caso de las propiedades físicas del aire, la presión y la humedad, son factores que afectan la velocidad del sonido; cuanto mayor es la temperatura del aire mayor es la velocidad de propagación. La velocidad del sonido en el aire aumenta 0,6 m/s por cada 1° C de aumento en la temperatura.

Una velocidad aproximada (en metros/segundo) puede ser calculada mediante la siguiente fórmula empírica:

$$c = (331,5 + 0,6 \cdot \vartheta) \text{ m/s} \quad (2.1)$$

donde ϑ es la temperatura en grados celsius (-273 kelvins);

$$\vartheta = T - 273.15 \text{ K.} \quad (2.2)$$

Una ecuación más exacta, referida normalmente como **velocidad adiabática del sonido**, viene dada por la fórmula siguiente:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{m}} \quad (2.3)$$

donde

R es la constante de los gases,

m es el peso molecular promedio del aire ($R/m = 287 \text{ J/kg K}$ para el aire),

κ es la razón de los calores específicos ($\kappa = c_p/c_v$ siendo igual a 1,4 para el aire), y

T es la temperatura absoluta en Kelvin.

En una atmósfera estándar se considera que T es 293,15 Kelvin, dando un valor de 343 m/s ó 1 235 km/h. Esta fórmula supone que la transmisión del sonido se realiza sin pérdidas de energía en el medio, aproximación muy cercana a la realidad.

RUIDO

Un ruido es la sensación auditiva no deseada correspondiente generalmente a una variación aleatoria de la presión a lo largo del tiempo. Es un sonido complejo, y puede ser caracterizado por la frecuencia de los sonidos puros que lo componen y por la amplitud de la presión acústica correspondiente a cada una de esas frecuencias. Si estas últimas son muy numerosas, se caracteriza entonces el ruido por la repartición de la energía sonora en bandas de frecuencias contiguas, definiendo lo que se denomina **espectro frecuencial del ruido**. El espectro de frecuencias de un ruido varía aleatoriamente a lo largo del tiempo, a diferencia de otros sonidos complejos, como los acordes musicales, que siguen una ley de variación precisa.

Existen multitud de variables que permiten diferenciar unos ruidos de otros: su composición en frecuencias, su intensidad, su variación temporal, su cadencia y ritmo, etc.

MAPA DE RUIDO

Un mapa de ruido es la representación cartográfica de los niveles de presión sonora (ruido) existentes en una zona concreta y en un período determinado.

UTILIDAD DE LOS MAPAS DE RUIDO

La utilidad del mapa de ruido es determinar la exposición de la población al ruido ambiental, para así adoptar los planes de acción necesarios para prevenir y reducir el ruido ambiental y, en particular, cuando los niveles de exposición puedan tener efectos nocivos en la salud humana.

Existen dos formas básicas de abordar la elaboración de un mapa de ruido:

1. **Por muestreo.** A través de la técnica acustimétrica de digitalización espacial mediante el uso de sonómetros. Es la técnica que se ha venido utilizando habitualmente a la hora de estudiar la contaminación por ruidos de grandes áreas o núcleos urbanos. La metodología se basa en una campaña de mediciones directas del ruido de no menos de un año de duración en retículas de determinados tamaños mediante un procedimiento de muestreo.
2. **Por simulación.** Actualmente, se utilizan técnicas de simulación basadas en el cálculo, que acortan la duración del proceso de obtención de datos y abaratan su coste, además de introducir como ventaja fundamental la posibilidad de valorar qué parte del sonido captado procede directamente de la fuente y qué parte procede de las diferentes reflexiones acústicas del entorno. Estas nuevas técnicas de simulación son posibles gracias al aumento de la capacidad de los sistemas computacionales, a la comprensión y normalización internacional de las diferentes formas que una fuente puede generar un sonido, al entendimiento de los efectos de la propagación del sonido por los diferentes medios y materiales, y a la estandarización de los modelos de cálculo. A través del uso de estos simuladores, podemos llegar a predecir los niveles de ruido que se dan en un cualquier escenario acústico imaginable presente o futuro.

CARACTERIZACIÓN DEL RUIDO

Las presiones acústicas a las cuales es sensible el oído humano varían en un intervalo enorme. Así, el umbral inferior de la audición humana, es decir, la presión acústica mínima que provoca una sensación auditiva, es $2 \times 10^{-5} Pa$, y el umbral máximo es de alrededor de $20 Pa$.

La manipulación de valores que cubren un campo tan extenso no resulta cómoda, por lo que se recurre a la utilización de otra escala, logarítmica, y otra “unidad”, el decibelio. Se define el nivel de presión sonora L por la expresión:

$$L_P = 10 \log \frac{P^2}{P_0^2} = 20 \log \frac{P}{P_0}$$

donde P_0 es el valor de referencia de la presión acústica que representa la menor presión acústica audible por un oído humano normal, $2 \times 10^{-5} Pa$, L se expresa en decibelios (dB). El comportamiento del oído humano está más cerca de una función logarítmica que de una lineal. Un oído humano es capaz de percibir y soportar sonidos correspondientes a niveles de presión sonora entre 0 y 120 dB . Este último nivel de ruido marca aproximadamente el denominado “umbral del dolor”. A niveles de ruido superiores pueden producirse daños físicos como rotura del tímpano.

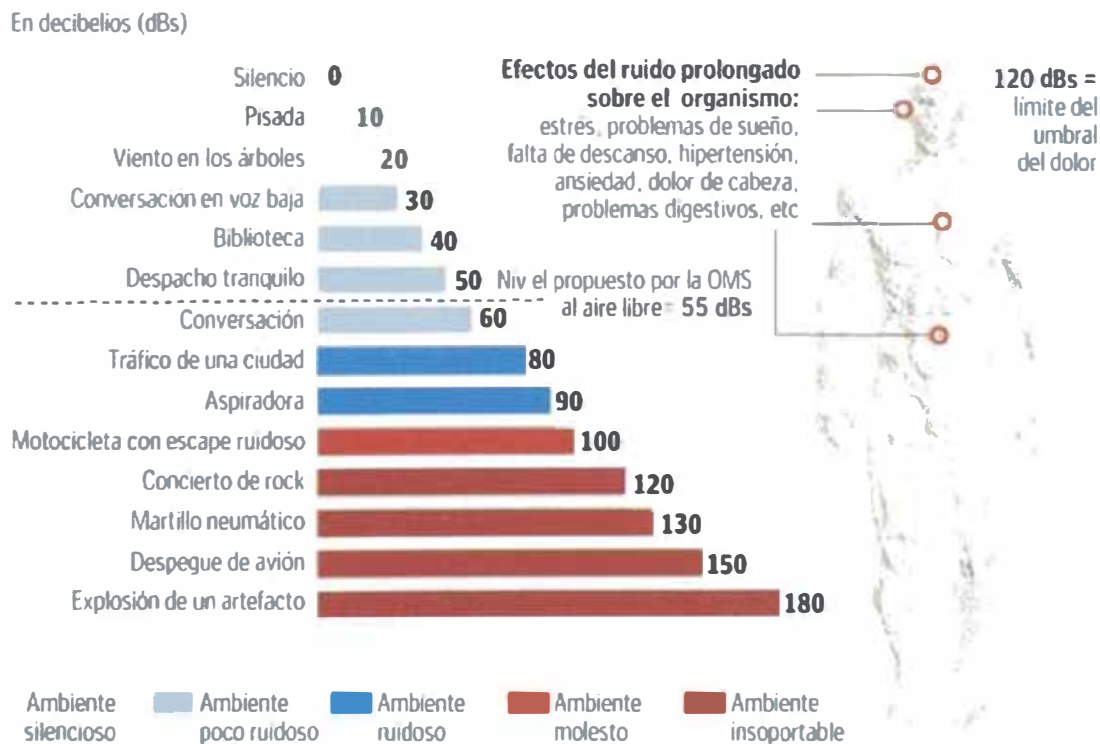


Figura 2.2: Escala de niveles sonoros

2.1.1. Obtención de la Ecuación que gobierna el Ruido

De las definiciones del ruido se sabe que es una Onda Sonora generada por una Fuente de Ruido, que se propaga en el medio ambiente. Para nuestros fines se considerará un flujo de aire sobre un dominio espacial Ω , determinado sobre el sistema de coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$; $\rho = \rho(x, y, z, t)$, $p = p(x, y, z, t)$ y $F = F(x, y, z, t)$ son la densidad, la presión y la densidad de fuerzas externas calculadas para una unidad de masa de aire, en el punto (x, y, z) y en el instante t , además $v = (v_x, v_y, v_z)$ es la velocidad de la partícula de aire (donde v_x, v_y y v_z son las componentes en las direcciones x, y, z), todas estas magnitudes caracterizan la perturbación del aire generada por dicha fuente. En esta deducción [Möser, 2009] [Shames, 1985] [Tijonov, 1972] se formula los fenómenos siguientes:

1. De qué manera las pequeñas masas de aire son inducidas a moverse aceleradamente a causa de las fuerzas que actúan sobre ellas.
2. De qué manera son comprimidas las pequeñas masas de aire por las fuerzas actuantes.

A continuación, de estos fenómenos se deduce las ecuación de conservación de movimiento y de masa respectivamente:

A) Deducción de la Ecuación de Conservación de Movimiento

Considérese cierto volumen de aire V y calcúlese las fuerzas que actúa sobre él. Despreciando las fuerzas de rozamiento, para la resultante de las fuerzas de presión, se obtiene la integral de superficie:

$$- \int_{\Gamma} p \cdot \eta d\Gamma, \quad (2.4)$$

donde Γ es la superficie del volumen V , η el vector normal exterior unitario a la superficie. Por la fórmula de Ostrogradski, se obtiene

$$- \int_{\Gamma} p \cdot \eta d\Gamma = - \int_V \nabla p dV. \quad (2.5)$$

Para calcular la aceleración en cierto punto, es necesario considerar el desplazamiento del propio punto. Sea $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ la ecuación de la trayectoria de dicho punto.

Calcúlese la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\dot{z} \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v_1 + \frac{\partial v}{\partial y}v_2 + \frac{\partial v}{\partial z}v_3 \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v,\end{aligned}$$

Esta derivada con respecto al tiempo se llama sustancial o material. La ecuación del movimiento de la partícula de aire, expresa el nexo entre la aceleración y las fuerzas que actúan sobre estas:

$$\int_V \rho \frac{dv}{dt} dV = - \int_V \nabla p dV + \int_V \rho F dV, \quad (2.6)$$

En virtud a la arbitrariedad del volumen V , se obtiene la ecuación del movimiento en forma diferencial:

$$v_t + v \cdot \nabla v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + F. \quad (2.7)$$

B) Deducción de la Ecuación de Conservación de Masa

Si dentro del volumen V no hay ni aumento ni pérdida de masa, entonces el cambio de cantidad de aire dentro de V por unidad de tiempo es igual al flujo a través de la frontera Γ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\Gamma} \rho v \eta d\Gamma. \quad (2.8)$$

transformando la integral de superficie en integral de volumen se obtiene:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \right) dV = 0.$$

Como esta igualdad es válida para volúmenes arbitrariamente pequeños, se sigue la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v)$$

o bien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v = 0. \quad (2.9)$$

Para simplificar las ecuaciones de conservación en el proceso de propagación del ruido.

Se hará las siguientes suposiciones:

1. Asumiendo que no actúan fuerzas externas sobre la propagación del sonido.

2. Asumiendo que el proceso de propagación del sonido es adiabático, por tanto la ecuación de estado resulta ser la siguiente expresión de Poisson:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad \left(\gamma = \frac{C_p}{C_v} \right) \quad (2.10)$$

donde ρ_0 y p_0 son la densidad y presión inicial respectivamente, así como C_p y C_v corresponden a las capacidades caloríficas a presión constante y a volumen constante respectivamente.

3. Asumiendo que las oscilaciones del aire son pequeñas, así se puede despreciar los términos no lineales de las ecuaciones de conservación.

Luego de aplicar estas 3 suposiciones se obtiene el siguiente sistema simplificado:

$$v_t = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p, \quad (2.11)$$

$$\rho_t + \rho_0 \nabla \cdot v = 0, \quad (2.12)$$

$$p = c^2 \rho. \quad (2.13)$$

donde $c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$.

Por lo tanto combinando las ecuaciones (2.11), (2.12) y tomando en cuenta (2.13), se obtiene la ecuación de la Onda Sonora:

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

2.2. Modelo Matemático: Ecuación de la Onda Sonora n -dimensional

Como se vio en la sección anterior el ruido es gobernado por una EDPHL (La ecuación de la Onda Sonora). La solución clásica de este tipo de problemas, tratado en el capítulo de los preliminares, es demasiado extensa para obtener su solución explícita en n dimensiones. Además como se verá más adelante la solución numérica por el método de Diferencias Finitas no es tan precisa para los datos discretos obtenidos. Son por estos motivos que se decide abordar el problema desde el punto de vista variacional, es decir estudiar la solución débil o variacional del problema.

Como la Onda Sonora es una ecuación hiperbólica, en esta sección y en la siguiente se tratará la solución para las EDPHL, para así completar el estudio de las EDPH [Evans, 1970].

Sea $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, donde $T > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para $n = 2$ un conjunto abierto y acotado, considérese para la función presión la variable dependiente u tal que u es una función escalar diferenciable hasta el segundo orden, en t, x_1 y x_2 ; cuyas derivadas parciales de u respecto a cada una de las variables independientes están definidas sobre un dominio Ω_T acotado, tales que satisfacen el siguiente problema de valor inicial y de contorno:

$$\begin{aligned} EDP : & \quad u_{tt} + Lu = f \quad \text{en } \Omega_T \\ CI : & \quad \begin{cases} u = g, & u_t = h \quad \text{sobre } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \\ CC : & \quad \begin{cases} u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $f : \Omega_T \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$; $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son dados y $u : \overline{\Omega_T} \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, es la variable incógnita del problema. Además $L(u)$ es un operador diferencial lineal de segundo orden, para $n = 2$ toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} EDP : & \quad u_{tt} = c^2 [u_{xx} + u_{zz}] \quad \text{en } \Omega_T \\ CI : & \quad \begin{cases} u = g, & u_t = h \quad \text{sobre } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \\ CC : & \quad \begin{cases} u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde f es una función nula y g es la función que representa a la fuente de ruido.

Este es nuestro problema central a resolver en el trabajo de Tesis, cuyo objetivo será encontrar una solución explícita. Para ello se realiza en la próxima sección un estudio de la existencia y unicidad de solución.

Definición 2.2.1 (Operador hiperbólico uniforme)

Considérese que $L(u)$ es un operador diferencial parcial de segundo orden de la forma:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u$$

llamado *operador divergente de segundo orden en n - variables*.

Y sea

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u$$

el *operador no divergente de segundo orden en n - variables*.

Sean los coeficientes $a_{ij}, b_i, c(i, j = 1, \dots, n)$ funciones conocidas para el problema y dependientes de (x, t) o funciones constantes, donde $x \in \mathbb{R}^n$. Considerando la transformación cuadrática (1.13) y la definición (1.2.1), se dice que el operador diferencial $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$ es definido como **operador hiperbólico uniforme** si existe una constante $\theta > 0$

tal que la forma cuadrática de los coeficientes de las derivadas de segundo orden de u cumplen:

$$\forall(x, t) \in \Omega_T, \forall y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)y_i y_j \geq \theta|y|^2$$

En particular para nuestro caso en estudio se tiene que u está definida en $\Omega_T \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $n = 2$, aunque la función u satisfaga la ecuación de la onda bajo la condición de hiperbolicidad uniforme, la mayor dificultad para encontrar la solución clásica explícita de este problema, en n dimensiones espaciales para $n > 1$, según [Tijonov, 1972] en el caso de $n \geq 2$, no se puede hallar la forma canónica en un entorno de un punto del dominio Ω_T , condición necesaria para aplicar la fórmula de D'Alembert, como en el caso unidimensional con la que se encuentra la solución clásica pero implícita. También se puede apreciar en [Petrovski, 1960] un método de solución del problema de Onda para $n \geq 2$ aplicando la fórmula de Kirchhoff (método del Descenso), con el cual se llega a la misma dificultad de obtener una solución implícita restringida en algunos puntos del dominio, para evitar así las singularidad que se forma en una vecindad del punto en estudio. Por tales dificultades es que se decide abordar el problema de un modo aproximado para llegar a obtener la solución explícita del problema en estudio. Para ello se utilizará el Método de Galerkin con Elementos Finitos, desde este punto de vista numérico es necesario transformar el problema clásico o diferencial en un problema llamado Problema Variacional, cuya formulación se realizará en la siguiente sección y en ésta se hará el estudio de existencia y unicidad de solución en sentido variacional.

2.2.1. Formulación variacional del Problema de la Onda Sonora

Para definir el problema variacional se consideran las siguientes condiciones:

1. $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\bar{\Omega}_T)$ ($i, j = 1, \dots, n$), $n = 2$
2. $f \in L^2(\Omega_T)$,
3. $g \in H_0^1(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$

Haciendo uso de los espacios evolutivos, se redefine u y f , como

$$u : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega), \quad \text{por} \quad [u(t)](x) := u(x, t)$$

de manera similar

$$f : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega), \quad \text{por} \quad [f(t)](x) := f(x, t)$$

que se denotará simplemente por u y f .

Ahora se pasa el término fuente, de la ecuación hiperbólica en su forma no divergente, al primer miembro y se multiplica por una función test, $v \in H_0^1(\Omega)$, y luego se integra sobre Ω .

$$\int_{\Omega} [u_{tt} - Lu - f]v dx = 0$$

y de la definición (2.2.1) y aplicando la siguiente identidad

$$\int_{\Omega} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} v dx = - \int_{\Omega} a_{ij}u_{x_i} v_{x_j} dx \quad (2.17)$$

se obtiene la formulación variacional para la ecuación hiperbólica no homogénea

$$(u_{tt}, v) + B[u, v; t] = (f, v) \quad (2.18)$$

para $0 \leq t \leq T$, donde $(,)$ denota el producto interno en $L^2(\Omega)$ y B es una forma bilineal dependiente del tiempo, definido como:

$$B[u, v; t] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) u v dx$$

Se ve de la EDP $u_{tt} + Lu = f$ que u_{tt} se puede escribir como

$$u_{tt} = g^0 + \sum_{j=1}^n g_{x_j}^j$$

donde

$$g^0 := f - \sum_{i,j=1}^n b_i u_{x_i} - cu \quad \text{y} \quad g^j := \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Esto sugiere que se debe buscar una solución débil u tal que $u'' \in H^{-1}(\Omega)$ para casi todo $0 \leq t \leq T$, donde u'' denota u_{tt} en sentido débil, entonces reinterpretando el primer término de (2.18) como $\langle u'', v \rangle; \langle , \rangle$ estableciendo una vinculación entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

Condiciones de regularidad

Asumiendo que

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{con} \quad u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{y} \quad u'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

el problema consiste en hallar u que satisface la siguiente Ecuación Variacional Hiperbólica (EVH):

$$\langle u'', v \rangle + B[u, v; t] = (f, v) \quad (2.19)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ en casi todo $0 < t \leq T$, y

$$u(0) = g, \quad u'(0) = h. \quad (2.20)$$

Pero para hallar la solución u en sentido débil, es necesario previamente hacer un estudio sobre la existencia y unicidad de solución lo que se abordará en la siguiente sección.

2.2.2. Existencia y unicidad de solución del Problema Variacional

Antes de pasar a la demostración de existencia y unicidad de solución del problema variacional hiperbólico, se define una base de aproximación del problema de dimensión infinita (2.19) por medio del método de Galerkin, luego se construye la base del espacio de funciones de aproximación y se demuestra la existencia y unicidad de solución basado en el Teorema de la Desigualdad de la Energía.

Aplicación del método de Galerkin

Sea una sucesión de funciones que satisfacen las condiciones de regularidad, $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que define una base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ y una base ortonormal de $L^2(\Omega)$.

Luego se fija un entero positivo m , y se escribe

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k, \quad (2.21)$$

donde se busca los coeficientes $d_m^k(t)$

$(0 \leq t \leq T, \quad k = 1, \dots, m)$ tales que:

$$d_m^k(0) = (g, w_k) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (2.22)$$

$$d_m^{k'}(0) = (h, w_k) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (2.23)$$

y

$$(u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k) \quad (0 \leq t \leq T, \quad k = 1, \dots, m) \quad (2.24)$$

Teorema 2.2.1 (Construcción de soluciones aproximadas)

Para cada entero $m = 1, 2, \dots$, existe una única función u_m de la forma (2.21) satisfaciendo (2.22)-(2.24).

Demostración.

Supongamos u_m de la forma (2.21), observamos que tomando $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ como una base de $L^2(\Omega)$, se tiene

$$(u_m''(t), w_k) = d_m^{k''}(t).$$

Por otra parte,

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t),$$

donde $e^{kl} := B[w_l, w_k; t]$ para $(k, l = 1, \dots, m)$.

Se denotará por $f^k(t) := (f(t), w_k)$ para $(k, l = 1, \dots, m)$.

Una vez definida la base del espacio de aproximación como consecuencia de aplicar (2.24), la formulación variacional del problema clásico con la interpolación polinomial y el método de Galerkin, con elementos finitos, el problema variacional (2.24), se convierte en un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) lineal.

$$d_m^{k''}(t) + \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t) \quad (0 \leq t \leq T, \quad k = 1, \dots, m), \quad (2.25)$$

sujeto a las condiciones iniciales (2.22),(2.23). De acuerdo con la teoría clásica de las EDO, se demostraría que el sistema tendría solución única de clase C^2 , $d_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$, satisfaciendo (2.22),(2.23), y que resuelve (2.25) para $0 \leq t \leq T$. Luego cuando $m \rightarrow \infty$, se tendría por el teorema fundamental del álgebra, que la base construida es una base del espacio de dimensión infinita. \square

A continuación se demostrará mediante teorema de la Desigualdad de la Energía, el dominio de existencia la solución débil.

Teorema 2.2.2 (Desigualdad de la Energía)

Existe una constante C positiva que depende de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, T y de los coeficientes de L , tal que

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|u_m''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ \leq C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{H_0^1} + \|h\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

para $m = 1, 2, \dots$

Demostración.

1. Multiplicamos (2.24) por $d_m^{k'}$, sumamos $k = 1, \dots, m$, y de (2.21), obtenemos

$$(u_m'', u_m') + B[u_m, u_m'; t] = (f, u_m') \quad (2.26)$$

para casi todo $0 \leq t \leq T$.

Observamos que $(u_m'', u_m') = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_m'\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$. Por otro lado, podemos escribir

$$\begin{aligned} B[u_m, u_m'; t] &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{m,x_i} u_{m,x_j}' dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i u_{m,x_i} u_m' + c u_m u_m' dx \\ &:= B_1 + B_2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

desde que $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), $n = 2$ vemos

$$B_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A[u_m, u_m; t] \right) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{m,x_i} u'_{m,x_j} dx \quad (2.28)$$

por la simetría de la forma bilineal

$$A[u, v; t] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx \quad (u, v \in H_0^1(\Omega)).$$

la igualdad (2.28) implica

$$B_1 > \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A[u_m, u_m; t] \right) - C \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad (2.29)$$

y notamos también

$$|B_2| \leq C \left(\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (2.30)$$

combinando las estimaciones (2.26)-(2.30), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|u'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + A[u_m, u_m; t] \right) &< C \left(\|u'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &< C \left(\|u'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + A[u_m, u_m; t] + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde usamos la desigualdad

$$\theta \int_{\Omega} |Du|^2 dx \leq A[u, u; t] \quad (u \in H_0^1(\Omega)). \quad (2.32)$$

que se deriva de la condición de hiperbolicidad uniforme.

2. Ahora escribimos

$$\eta(t) := \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + A[u_m(t), u_m(t); t] \quad (2.33)$$

$$\xi(t) := \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.34)$$

entonces la desigualdad (2.31) se escribe

$$\eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$$

para $0 \leq t \leq T$ y constantes apropiadas C_1, C_2 .

Aplicando la desigualdad de Gronwall, se obtiene la estimación.

$$\eta(t) \leq e^{C_1 t} \left(\eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s) ds \right) \quad (0 < t \leq T) \quad (2.35)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\eta(0) &= \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + A[u_m(0), u_m(0); 0] \\ &\leq C \left(\|h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right),\end{aligned}$$

de acuerdo a (2.22) y (2.23) y la estimación $\|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H_0^1(\Omega)}$. Así las fórmulas (2.33)-(2.35) proporcionan la cota

$$\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + A[u_m(t), u_m(t); t] \leq C \left(\|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)$$

desde que $0 \leq t \leq T$ fue arbitrario, vemos de esta estimación y de (2.32) que

$$\begin{aligned}\max \left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ \leq C \left(\|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)\end{aligned}$$

3. Fijando cualquier $v \in H_0^1(\Omega)$, $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$ y escribimos $v = v^1 + v^2$, donde $v^1 \in \text{Span}\{w_k\}_{k=1}^m$ y $(v^2, w_k) = 0$ ($k = 1, \dots, m$). Notar que $\|v^1\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Entonces de (2.21) y (2.24) se tiene

$$\langle u''_m, v \rangle = \langle u''_m, v^1 \rangle = (f, v^1) - B[u_m, v^1; t].$$

Así se obtiene

$$|\langle u''_m, v \rangle| \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \right),$$

desde que $\|v^1\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$.

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u''_m\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt &\leq C \int_0^T (\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2) dt \\ &\leq C \left(\|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \cdot \square\end{aligned}$$

Teorema 2.2.3 (Existencia de solución única en sentido débil)

Asumiendo que la función u cumple con las condiciones de regularidad y satisface la hipótesis del teorema de la Desigualdad de la Energía, entonces el problema variacional (2.19), con término fuente $f \equiv 0$ tiene solución única.

Demostración. La demostración de este teorema se divide en dos partes, primero la existencia de solución y por último la unicidad de la solución:

1. A continuación se prueba que existe una solución al problema (2.19):

a) De acuerdo al **teorema 2.2.2**, vemos que las sucesiones $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ es acotada en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\{u'_m\}_{m=1}^{\infty}$ es acotada en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ y $\{u''_m\}_{m=1}^{\infty}$ es acotada en $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Como consecuencia de esto, existe una subsucesión $\{u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, con $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, tal que

$$\begin{aligned} u_{m_l} &\rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u'_{m_l} &\rightharpoonup u' \quad \text{débilmente en } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ u''_{m_l} &\rightharpoonup u'' \quad \text{débilmente en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

b) A continuación fijamos un entero N y escogemos una función $v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$ de la forma

$$v(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k, \quad (2.37)$$

donde $\{d^k\}_{k=1}^N$ son funciones con suficiente regularidad. Eligiendo $m \geq N$, multiplicamos (2.24) por $d^k(t)$, sumamos $k = 1, \dots, N$, e integramos con respecto a t .

$$\int_0^T \langle u''_m, v \rangle + B[u_m, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt. \quad (2.38)$$

Haciendo $m = m_l$, de (2.36), y tomando límite a (2.38) se obtiene que:

$$\int_0^T \langle u'', v \rangle + B[u, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt \quad (2.39)$$

Esta igualdad se cumple para todas las funciones $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y por la densidad del espacio de las funciones de la forma (2.37) en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, de (2.39) se obtiene:

$$\langle u'', v \rangle + B[u, v; t] = (f, v)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, para casi todo $0 \leq t \leq T$, y además se tendría que $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ y $u' \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$.

c) Debemos ahora verificar que

$$u(0) = g, \quad (2.40)$$

$$u'(0) = h. \quad (2.41)$$

Para esto, elegimos cualquier función $v \in C^2([0, T]; H_0^1(\Omega))$, con $v(T) = v'(T) = 0$.

Entonces integrando por partes dos veces con respecto a t en (2.39), obtenemos

$$\int_0^T (v'', u) + B[u, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt - (u(0), v'(0)) + (u'(0), v(0)). \quad (2.42)$$

similarmente de (2.38) deducimos

$$\int_0^T (v'', u_m) + B[u_m, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt - (u_m(0), v'(0)) + (u'_m(0), v(0)).$$

tomando $m = m_l$ y de (2.22), (2.23) y (2.36), deducimos

$$\int_0^T (v'', u) + B[u, v; t] dt = \int_0^T (f, v) dt - (g, v'(0)) + (h, v(0)). \quad (2.43)$$

comparando las identidades (2.42) y (2.43), se verifica (2.40) y (2.41) cuando $v(0)$ y $v'(0)$ toman valores arbitrarios. Con lo cual se demuestra la existencia de solución. \square

2. Para probar la unicidad de solución consideramos:

a) Sin pérdida de generalidad, tomando en el problema (2.19) que $f \equiv g \equiv h \equiv 0$ se tendría una solución trivial, es decir

$$u \equiv 0. \quad (2.44)$$

Para esto considérese u cualesquiera que cumpla con las condiciones anteriores y una función test v de la forma siguiente (fijando $0 \leq s \leq T$)

$$v(t) := \begin{cases} \int_t^s u(\tau) d\tau & \text{si } 0 \leq t \leq s \\ 0 & \text{si } s \leq t \leq T. \end{cases}$$

entonces $v(t) \in H_0^1(\Omega)$ para cada $0 \leq t \leq T$, y por lo tanto

$$\int_0^s \langle u'', v \rangle + B[u, v; t] dt = 0.$$

por los datos dados en las condiciones iniciales se tiene que $u'(0) = v(s) = 0$, después al integrar por partes el primer término de la ecuación anterior, resulta:

$$\int_0^s -(u', v') + B[u, v; t] dt = 0.$$

considerando $v'(t) = -u(t)$, para $0 \leq t \leq s$, se tendría

$$\int_0^s \langle u', u \rangle - B[v', v; t] dt = 0.$$

Entonces:

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} B[v, v; t] \right) dt = - \int_0^s C[u, v; t] + D[v, v; t] dt,$$

donde

$$C[u, v; t] := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} u + \frac{1}{2} b_{i, x_i} u v dx$$

y

$$D[u, v; t] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij,t} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_{i,t} u_{x_i} v + c_t u v dx,$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} B[v(0), v(0); t] = - \int_0^s C[u, v, t] + D[v, v, t] dt,$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \leq C \left(\int_0^s \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \|v(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

b) Sea

$$w(t) := \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (0 \leq t \leq T);$$

entonces, (2.45) se convierte en

$$\begin{aligned} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \leq C \left(\int_0^s \|w(t) - w(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

pero $\|w(t) - w(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|w(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2$,

y $\|w(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^s \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} dt$.

Por lo tanto, de (2.46) implica

$$\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 - 2sC_1) \|w(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \int_0^s \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

Elijiendo T_1 suficientemente pequeño tal que

$$1 - 2T_1 C_1 \geq \frac{1}{2}.$$

Si $0 \leq s \leq T_1$, entonces se tiene que

$$\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \int_0^s (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2) dt$$

En consecuencia, la forma integral de la desigualdad de Gronwall implica que $u \equiv 0$ sobre $[0, T_1]$.

- c) Aplicando el mismo argumento en los intervalos $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$, \dots , se deduce la ecuación (2.44).
- d) Del resultado anterior se demuestra que si se tiene dos soluciones u_1 y u_2 del problema (2.19) con condiciones no homogéneas, usando la linealidad de los operadores se verifica que $u_1 - u_2$ es también solución de la ecuación hiperbólica y considerando las condiciones iniciales dadas:

$$\begin{aligned} u_1(0) = u_2(0) = g & & (u_1 - u_2)(0) = 0 \\ u_1'(0) = u_2'(0) = h & & (u_1 - u_2)'(0) = 0 \end{aligned}$$

se verifica que $u_1 - u_2$ es solución del problema con condiciones homogéneas, luego de lo visto en (a), (b) y (c) se tiene que $u_1 - u_2 = 0$, y por tanto $u_1 = u_2$, con lo que se demuestra la unicidad de solución. \square

El problema de la Onda en estudio es un problema asociado a una ecuación hiperbólica de segundo orden homogéneo, es decir que satisface todas las condiciones de existencia y unicidad débil como se ha demostrado con los teoremas (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3), haciendo $f = 0$ se predice que el problema de la Onda Sonora bidimensional tiene solución única. El siguiente objetivo es hallar la solución desde el punto de vista numérico lo cual se detalla en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DEL RUIDO

En este capítulo se desarrolla numéricamente la solución del problema de Onda, por dos esquemas uno basado en Diferencias Finitas y otro en Elementos finitos, este último es el que se utilizará para obtener los Mapas de Ruido.

3.1. Solución numérica por Diferencias Finitas en 1D

A continuación se enuncia la Ecuación de la Onda con condiciones iniciales y de contorno en 1D:

Sean $I = (0, L) \subset \mathbb{R}$, $\Omega = I \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$, y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $u = u(x, t)$.

Sea el problema con condiciones iniciales y de contorno

$$\begin{aligned} EDP : & \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad (x, t) \in \Omega \\ CI : & \quad \begin{cases} u(x, 0) = g(x) \quad , \quad x \in \bar{I}, \\ u_t(x, 0) = h(x) \quad , \quad x \in \bar{I} \end{cases} \\ CC : & \quad \begin{cases} u(0, t) = C_1(t) \quad \text{y} \quad u(L, t) = C_2(t) \quad , \quad t \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $f, g : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $C_1, C_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas, además c, L son constantes positivas. En esta metodología se usa la técnica de diferencias finitas, para eso:

Primero se discretiza el dominio espacial \bar{I} de manera uniforme en N subintervalos, con lo cual se obtiene el tamaño de la partición del espacio:

$$\Delta x = \frac{L}{N}$$

luego se verá que el tamaño de la partición temporal dependerá de la espacial, la cual se denotará por Δt , con estos tamaños se define las siguientes particiones:

$$P_x = \{x_i/x_i = (i - 1)\Delta x, i \in \{1, 2, \dots, N + 1\}\}$$

$$P_t = \{t_j/t_j = (j - 1)\Delta t, j \in \mathbb{N}\}$$

Se denotará de ahora en adelante que:

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : u(x_i, t_j) = u_i^j$$

En segundo lugar, se reemplaza las derivadas de segundo orden por diferencias centradas, donde el superíndice denotará el tiempo de ejecución y el subíndice denotará la posición donde se desea conocer la presión sonora:

$$\frac{u_i^j - 2u_i^{j-1} + u_i^{j-2}}{(\Delta t)^2} = c^2 \left(\frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{(\Delta x)^2} \right)$$

se despeja u_i^j :

$$u_i^j = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}) + 2 \left[1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] u_i^{j-1} - u_i^{j-2} \quad (3.2)$$

se hace la siguiente suposición

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 = 1 \quad (3.3)$$

esta suposición permite simplificar la ecuación, obteniendose

$$\forall i \in \{2, 3, \dots, N\} \forall j \geq 3 : u_i^j = u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1} - u_i^{j-2}, \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{|c|} \quad (3.4)$$

la ecuación (3.4) está bien definida a partir de la tercera etapa de tiempo, es decir para encontrar la solución al problema se debe encontrar los valores nodales en u_i^1 y u_i^2 .

- Por las condiciones de contorno, se tiene

$$\forall j \in \mathbb{N} : u_1^j = C_1(t_j) \quad \text{y} \quad u_{N+1}^j = C_2(t_j). \quad (3.5)$$

- Por las condiciones iniciales, se tiene

- De la condición de presión inicial, los valores de presión en el primer paso de tiempo u_i^1 :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N + 1\} : u_i^1 = g(x_i). \quad (3.6)$$

- De la condición de cambio de presión inicial y usando la aproximación por diferencia central, se tiene:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N + 1\} : h(x_i) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u_i^2 - u_i^0}{2\Delta t},$$

luego se despeja u_i^0 que es una solución en un tiempo anterior al proceso:

$$u_i^0 = u_i^2 - 2h(x_i)\Delta t. \quad (3.7)$$

Sustituyendo (3.7) en (3.4) para $j = 2$, se tiene:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N + 1\} : u_i^2 = \frac{1}{2}[u_{i+1}^1 + u_{i-1}^1] + h(x_i)\Delta t. \quad (3.8)$$

Luego la ecuación (3.4), con (3.5), (3.6) y (3.8) describen el algoritmo para la solución del problema de onda en una dimensión. Este esquema es mejorado, como se puede apreciar en el trabajo previo [Mantilla, 2011], usando la ecuación de D'Alambert (1.30) para la obtención de u_i^2 , como se ve a continuación:

Se sustituye (x_i, t_2) en la ecuación (1.30) y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se tiene la siguiente regla:

$$u_i^2 = u(x_i, \Delta t) = \frac{1}{2}[g(x_i + c\Delta t) + g(x_i - c\Delta t)] + \frac{1}{2c} \int_{x_i - c\Delta t}^{x_i + c\Delta t} h(s) ds$$

de la suposición $\Delta x = c\Delta t$, y de que $x_i = (i - 1)\Delta x$ se tiene:

$$u_i^2 = \frac{1}{2}[g(x_{i+1}) + g(x_{i-1})] + \frac{1}{2c} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} h(s) ds$$

como $\forall i \in \{1, 2, \dots, N + 1\} : u_i^1 = g(x_i)$, entonces

$$\forall i \in \{2, 3, \dots, N\} : u_i^2 = \frac{1}{2}[u_{i+1}^1 + u_{i-1}^1] + \frac{1}{2c} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} h(s) ds, \quad (3.9)$$

luego se aproxima la integral por la regla de integración numérica de Simpson.

3.1.1. Análisis de convergencia del esquema numérico

Se usará para demostrar la convergencia el teorema de Equivalencia de Lax y la teoría de diferencias finitas :

Teorema 3.1.1 (Equivalencia de Lax [Thomas, 1995]) *Un esquema de diferencias finitas consistente para un problema de valor inicial lineal bien puesto, es convergente si y solo si es estable.*

Para analizar la convergencia del esquema de diferencias (3.2), se considera dicho esquema de la siguiente forma:

$$u_i^j = R^2 (u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}) + 2(1 - R^2) u_i^{j-1} - u_i^{j-2} \quad (3.10)$$

donde $R = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.

Por el teorema de Equivalencia de Lax, se verá la convergencia, a través de la consistencia y estabilidad del esquema de diferencias finitas:

CONSISTENCIA

Definición 3.1.1 Sean $f(s)$ y $\phi(s)$ dos funciones de un espacio vectorial S en \mathbb{R} tal que existe una constante positiva C , tal que:

$$\forall s \in S : |f(s)| \leq C |\phi(s)|,$$

lo cual se denota por:

$$\forall s \in S : f(s) = \mathcal{O}(\phi(s)).$$

Se dice que $f(s)$ es del orden de $\phi(s)$.

Definición 3.1.2 (Consistencia) Un esquema de diferencias, se dice que tiene orden de precisión (p, q) , si:

$$\|\tau^n\| = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.11)$$

donde nos referimos a τ^n o $\|\tau^n\|$ como el error de truncamiento. Además se dice que el esquema es **consistente**.

Se denotará por v a la solución exacta del problema (3.1) y tomando como herramienta las **Series de Expansión de Taylor** se tiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{v_i^{j-1} - 2v_{i-1}^{j-1} + v_{i-2}^{j-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{v_{i-1}^j - 2v_{i-1}^{j-1} + v_{i-1}^{j-2}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

luego reemplazando estas expresiones en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{u_i^j - 2u_i^{j-1} + u_i^{j-2}}{(\Delta t)^2} - c^2 \left(\frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{(\Delta x)^2} \right) = \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Por lo tanto el esquema (3.10) es consistente y de orden de precisión $(2, 2)$.

ESTABILIDAD

Definición 3.1.3 *Un esquema de diferencia*

$$u^{n+1} = Qu^n$$

se dice que es estable con orden n respecto a la norma $\|\cdot\|$, si existen constantes Δx_0 y Δt_0 , y constantes no negativas K_1 , K_2 y β tal que

$$\|u^{n+1}\| \leq (K_1 + nK_2)e^{\beta t} \|u^0\|$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ y $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Por tanto se escribe el esquema de diferencias de tercer nivel en un sistema de ecuaciones de segundo nivel:

$$U_i^{j+2} = QU_i^{j+1} \quad (3.12)$$

donde

$$Q = \begin{pmatrix} R^2(S^+ + S^-) + 2(1 - R^2) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_i^{j+2} = \begin{bmatrix} u_i^{j+2} \\ u_i^{j+1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_i^{j+1} = \begin{bmatrix} u_i^{j+1} \\ u_i^j \end{bmatrix}$$

además $S^+ u_i^j = u_{i+1}^j$ y $S^- u_i^j = u_{i-1}^j$.

La demostración de la consistencia se sigue en [Thomas, 1995], en el cual se toma la Transformada de Fourier discreta al sistema (3.12). Así si se considera $R \leq 1$ en el esquema (3.10), entonces el esquema es estable de orden n y como es consistente con la EDP del problema de valor inicial y de contorno (3.1), entonces por el teorema de Equivalencia de Lax, el esquema es convergente si $R \leq 1$.

ORDEN DE CONVERGENCIA

Teorema 3.1.2 ([Thomas, 1995]) *Supóngase un esquema de diferencias de multinivel, consistente de orden de precisión (p, q) para una EDP de segundo orden en tiempo y estable de orden n . Entonces si la diferencia $w = v - u$ donde v es la solución exacta y u la aproximada para las condiciones aproximadas w^1 y w^2 son tales que $w_i^1 = 0$ y $w_i^2 = \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^{q+1})$, el esquema de diferencias es convergente de orden (p, q) .*

Para analizar el orden de convergencia primero se analiza la Condición de Inicialización (3.8) para el esquema simplificado (3.4), por lo cual se toma su forma general. Por el cambio de presión inicial, se tiene la siguiente aproximación:

$$\frac{u_i^2 - u_i^0}{2\Delta t} = h_i. \quad (3.13)$$

donde $h_i = h(x_i)$, tomando $j = 2$ en el esquema (3.10), se obtiene:

$$u_i^2 = R^2 (u_{i+1}^1 + u_{i-1}^1) + 2(1 - R^2) u_i^1 - u_i^0, \quad (3.14)$$

despejando u_i^0 de (3.13) y sustituyendo en (3.14), se obtiene:

$$u_i^2 = \frac{1}{2} R^2 (g_{i+1} + g_{i-1}) + (1 - R^2) g_i + \Delta t h_i, \quad (3.15)$$

donde $u_i^1 = g_i$. Ya se demostró la consistencia y la estabilidad, además por la condición inicial de presión, se tiene que $v_i^1 = u_i^1$ para todo i por lo tanto $w^1 = 0$, sólo faltaría w^2 , que se halla a continuación:

$$\begin{aligned} w_i^2 &= v_i^2 - u_i^2 \\ &= v_i^1 + (v_t)_i^1 \Delta t + (v_{tt})_i^1 \frac{\Delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &\quad - \frac{1}{2} R^2 (g_{i+1} + g_{i-1}) - (1 - R^2) g_i - \Delta t h_i \\ &= c^2 (v_{xx})_i^1 \frac{\Delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) - \frac{1}{2} R^2 (g_{i+1} + g_{i-1}) + R^2 g_i \\ &= \frac{c^2}{\Delta x^2} (\delta^2 v_i^1) \frac{\Delta t^2}{2} + c^2 \mathcal{O}(\Delta x^2) \frac{\Delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &\quad - \frac{1}{2} R^2 (g_{i+1} + g_{i-1}) + R^2 g_i \\ &= \mathcal{O}(\Delta x^2 \Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde $\delta^2 u_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}$. Con este último resultado se completa los requerimientos del Teorema (3.1.2), por lo que se demuestra que el orden de convergencia del esquema de diferencias es (2, 2).

3.2. Solución numérica por Elementos Finitos

En esta sección se aborda el problema de la Onda Sonora como se hizo en el capítulo anterior, sólo se hará algunos recuentos de la formulación variacional, para poder deducir el esquema numérico, sea entonces la Ecuación de Onda:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.17)$$

donde $u(x, z, t)$ representa la presión sonora en el punto (x, z) y en el instante t , y c es la velocidad del sonido en el aire. Esta ecuación está matemáticamente clasificada como una ecuación hiperbólica lineal de segundo orden. Esta ecuación diferencial definida sobre el dominio espacial Ω y el intervalo de tiempo $[0, T]$ debe satisfacer las condiciones iniciales y de contorno respectivamente:

$$\forall \bar{x} \in \bar{\Omega} : u(\bar{x}, 0) = u_0(\bar{x}) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, 0) = v_0(\bar{x}) \quad (3.18a)$$

$$\forall \bar{x} \in \Gamma, \forall t \in [0, T] : u(\bar{x}, t) = \hat{u}(t) \quad (3.18b)$$

donde \hat{u} , u_0 y v_0 son funciones dadas, $\bar{x} = (x, z)$ y Γ es la frontera de Ω .

A continuación se halla la formulación variacional de este problema en particular.

Se toma la notación:

$$F_1 = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad F_2 = a_{22} \frac{\partial u}{\partial z}$$

luego se la multiplica por una función peso $v = v(x, z)$ y se la integra sobre Ω , obteniéndose:

$$\int_{\Omega} v \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right] dx dz = 0 \quad (3.19)$$

aplicando derivadas parciales a las funciones vF_1 y vF_2 respecto a x e z respectivamente se tiene las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} -v \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} (vF_1) \\ -v \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial z} F_2 - \frac{\partial}{\partial z} (vF_2) \end{aligned}$$

reemplazando estas identidades en (3.19) se tiene:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{c^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial x} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} (vF_1) + \frac{\partial v}{\partial z} F_2 - \frac{\partial}{\partial z} (vF_2) \right] dx dz = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia y considerenado que v se anula en la frontera, se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (vF_1) dx dz = \oint_{\Gamma} (vF_1 n_x) ds = 0$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} (v F_2) dx dz = \oint_{\Gamma} (v F_2 n_z) ds = 0$$

reemplazando nuevamente se tiene

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{c^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial x} F_1 + \frac{\partial v}{\partial z} F_2 \right] dx dz = 0, \quad (3.20)$$

esta última ecuación es la formulación variacional de la ecuación de la onda. Como se desea comparar el MEF con el de Diferencias Finitas, se particulariza la formulación anterior para 1D:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{c^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx = 0, \quad (3.21)$$

3.2.1. Aproximación espacial: Método de Elementos Finitos

Luego se aplica un Método de Elementos Finitos [Reddy, 1993] [Johnson, 1987], llamado Galerkin al caso bidimensional obtenido y también al caso particular unidimensional.

CASO 2D

Se aplica el método de Galerkin para aproximar la variable dependiente u sobre un elemento finito Ω^e de la partición espacial, como se ve a continuación:

$$u(x, z, t) \approx U^e(x, z, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \psi_j^e(x, z)$$

donde u_j^e es el valor de u en el j -ésimo nodo (x_j, z_j) del triángulo, n el número de nodos del elemento y ψ_j^e son las funciones de interpolación de Lagrange, con la propiedad:

$$\psi_j^e(x_i, z_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

hallando las derivadas parciales de la aproximación se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) = \sum_{j=1}^N u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}(x, z) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, z, t) = \sum_{j=1}^N u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e}{\partial z}(x, z)$$

Reemplazando en la ecuación (3.20), tomando como dominio el elemento Ω^e y como función de peso $v = \psi_i$, se tiene:

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega^e} \left(\psi_i \sum_{j=1}^N \frac{d^2 u_j}{dt^2} \psi_j \right) dx dz + \int_{\Omega^e} \left[a_{11} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right] dx dz = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d^2 u_j}{dt^2} \psi_i \psi_j \right\} dx dz + \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^N \left\{ a_{11} u_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} u_j \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right\} dx dz = 0$$

o también

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^N M_{ij}^e \frac{d^2 u_j}{dt^2} + K_{ij}^e u_j = 0 \quad (3.22)$$

donde

$$M_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^e} \psi_i \psi_j dx dz \quad y \quad K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right) dx dz.$$

Ahora en adelante se usará elementos triangulares lineales:

Elementos Triangulares Lineales

Antes de continuar, se define el tipo de partición espacial que se usará aquí: La triangulación.

Definición 3.2.1 (Triangulación [Ciarlet, 1979]) Una triangulación o malla es una partición $\mathcal{T}_h(\Omega)$ del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en un número finito de triángulos T , llamados elementos con las siguientes propiedades:

$$i) T \subset \bar{\Omega} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$$

$$ii) \bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} T$$

$$iii) \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h(\Omega) \text{ con } T_1 \neq T_2 : \overset{\circ}{T}_1 \cap \overset{\circ}{T}_2 = \emptyset$$

además, $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ con $T_1 \neq T_2$ se satisface sólo una de las siguientes condiciones:

$$i) T_1 \cap T_2 = \emptyset$$

ii) T_1 y T_2 tienen un sólo vértice común.

iii) T_1 y T_2 tienen un sólo lado común.

además h denota la mayor longitud de los lados de los elementos de la triangulación.

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \left\{ \max_{p, q \in T} \{ \| p - q \| \} \right\}$$

En el siguiente gráfico se muestra un elemento típico de la triangulación:

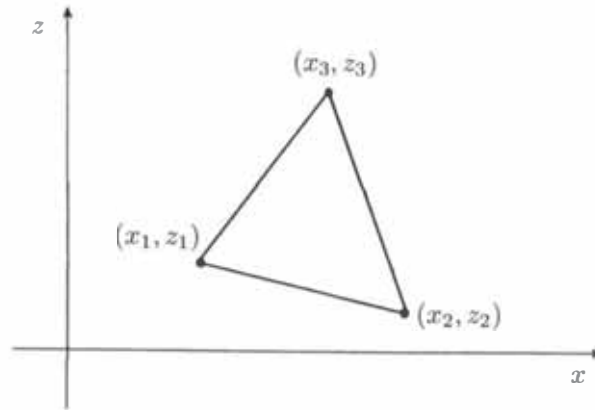


Figura 3.1: Elemento finito triangular con nodos en los vértices.

Para hallar las funciones de interpolación asociadas a este tipo de elementos, se supone que u es lineal en x e z dentro del elemento, es decir:

$$u = a_1 + a_2x + a_3z$$

o en forma matricial:

$$u(x, z) = [1 \quad x \quad z] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

donde los a_i son las constantes a determinar.

Reemplazando los puntos nodales en (3.23) se tiene que:

$$u(x_1, z_1) = a_1 + a_2x_1 + a_3z_1 = u_1$$

$$u(x_2, z_2) = a_1 + a_2x_2 + a_3z_2 = u_2$$

$$u(x_3, z_3) = a_1 + a_2x_3 + a_3z_3 = u_3$$

luego:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

ahora se despeja el vector de constantes a_i

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

luego reemplazando en la ecuación (3.23), y efectuando se obtiene:

$$u = \psi_1u_1 + \psi_2u_2 + \psi_3u_3 \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2A}[x_2z_3 - x_3z_2 + (z_2 - z_3)x + (x_3 - x_2)z] \\ \psi_2 &= \frac{1}{2A}[x_3z_1 - x_1z_3 + (z_3 - z_1)x + (x_1 - x_3)z] \\ \psi_3 &= \frac{1}{2A}[x_1z_2 - x_2z_1 + (z_1 - z_2)x + (x_2 - x_1)z]\end{aligned}$$

Las funciones ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 son las funciones base del espacio de elementos finitos.

Evaluación de las Matrices de elementos

Ahora se calcula las matrices de elementos M^e y K^e , lo cual no es sencillo, por lo que se recurre a un método de aproximación, conocido como método de Cuadratura Gaussiana [Burden, 2004], para mostrar como se procede se da el siguiente ejemplo:

$$\int \int_{\Omega_0} f(x, z) dx dz = A_1 f(x_1, z_1) + E \quad (3.25)$$

donde:

$$\Omega_0 = \{(x, z) / 0 < x < 1, \quad 0 \leq z \leq 1 - x\}$$

es un elemento típico de la triangulación y E denota el Error cometido. Se observa que en la ecuación (3.25) aparecen 3 variables A_1 , x_1 y z_1 , las cuales hay que determinarlas, para ello se supone que (3.25) sea exacta para cualquier polinomio lineal en x e z , y como la integral es un operador lineal, de aquí, es suficiente que (3.25) sea exacta para los monomios 1 , x e z . Es decir, sobre Ω_0 se tendría el siguiente sistema algebraico:

$$\begin{aligned}\bullet \text{ Si } f(x, z) &= 1 & \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 dz dx &= \frac{1}{2} = A_1 \\ \bullet \text{ Si } f(x, z) &= x & \int_0^1 \int_0^{1-x} x dz dx &= \frac{1}{6} = A_1 x_1 \\ \bullet \text{ Si } f(x, z) &= z & \int_0^1 \int_0^{1-x} z dz dx &= \frac{1}{6} = A_1 z_1\end{aligned}$$

cuya solución está dado por:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad z_1 = \frac{1}{3}$$

luego, la regla de cuadratura de un punto es:

$$\int \int_{\Omega_0} f(x, z) dx dz = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + E \quad (3.26)$$

el cual corresponde al punto de evaluación óptimo, que es el centro de gravedad del triángulo.

De manera análoga, se puede establecer una regla de cuadratura de 3 puntos:

$$\int \int_{\Omega_0} f(x, z) dx dz = A_1 f(x_1, z_1) + A_2 f(x_2, z_2) + A_3 f(x_3, z_3) + E \quad (3.27)$$

es decir, se deben determinar 9 variables, éstos valores son mostrados en la tabla siguiente:

i	x_i	z_i	A_i
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Para calcular las matrices M^e , K^e de cada elemento Ω^e de la malla del dominio Ω , se usará para evaluar la integral doble el elemento triangular típico Ω_0 dado en (3.26) bajo un cambio de coordenadas adecuado, $T(\xi, \eta) = (x, z)$, donde:

$$\int_{\Omega^e} f(x, z) dx dz = \int_{\Omega_0} f(T(\xi, \eta)) \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, z)} \right| d\xi d\eta$$

y $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, z)}$ denota el Jacobiano de la transformación T calculado como:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

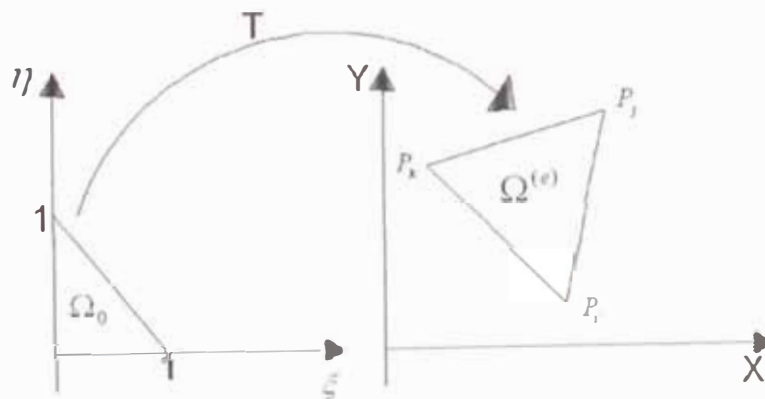


Figura 3.2: Transformación T de Ω^e a Ω_0

además:

$$\begin{aligned}x &= (1 - \xi - \eta)x_i + \xi x_j + \eta x_k \\z &= (1 - \xi - \eta)z_i + \xi z_j + \eta z_k\end{aligned}$$

Entonces las funciones base: ϕ_i ($i = 1, 2, 3$) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ \psi_2(\xi, \eta) &= \xi \\ \psi_3(\xi, \eta) &= \eta\end{aligned}$$

Luego se ensambla las matrices M^e , K^e , F^e y el vector de nodos u^e obtenidas en cada elemento para obtener el sistema global:

$$\begin{cases} Mu''(t) + Ku(t) = F \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.28)$$

para cada t de la partición temporal.

CASO 1D

Para el caso unidimensional se sigue los mismos pasos con la diferencia que los elementos de la partición son segmentos uniformes, es decir de la forma $[x_1, x_2]$ y sus funciones de interpolación son:

$$\psi_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \psi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto la solución sobre un elemento es:

$$u = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2,$$

donde $u_1 = u(x_1)$ y $u_2 = u(x_2)$. Luego se obtiene el mismo sistema EDO de la forma (3.28) del Caso 2D

$$\begin{cases} Mu''(t) + Ku(t) = F \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

donde M , K y F son las matrices ensambladas de todos los elementos de la partición, con la diferencia de que sus matrices M^e y K^e se pueden calcular directamente como:

$$M^e = (x_2 - x_1) \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad K^e = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.2. Aproximación temporal: Método de Newmark

En esta sección se busca a través del método de Newmark [Reddy, 1993] transformar los sistemas EDO (3.28) y (3.29) en un sistema de ecuaciones algebraicas.

El método de Newmark para resolver los sistema EDO es definido a través de las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} M\ddot{u}_s + K u_s = F_s, \\ u_{s+1} = u_s + \Delta t \dot{u}_s + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_s + \frac{1}{2} \gamma \Delta t^2 (\ddot{u}_{s+1} - \ddot{u}_s), \\ \dot{u}_{s+1} = \dot{u}_s + \Delta t \ddot{u}_s + \alpha \Delta t (\ddot{u}_{s+1} - \ddot{u}_s). \end{cases} \quad (3.30)$$

donde el subíndice s indica el s -ésimo paso de tiempo, es decir:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{s+1} &= \ddot{u}(t_{s+1}) & \ddot{u}_s &= \ddot{u}(t_s) \\ \dot{u}_{s+1} &= \dot{u}(t_{s+1}) & \dot{u}_s &= \dot{u}(t_s) \\ u_{s+1} &= u(t_{s+1}) & u_s &= u(t_s) \\ \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} \end{aligned}$$

En este método se realizó las siguientes aproximaciones:

$$\frac{\dot{u}_{s+1} - \dot{u}_s}{\Delta t} = (1 - \alpha) \ddot{u}_s + \alpha \ddot{u}_{s+1} \quad (3.31)$$

$$\frac{u_{s+1} - u_s}{\Delta t} = \dot{u}_s + \frac{\Delta t}{2} [(1 - \gamma) \ddot{u}_s + \gamma \ddot{u}_{s+1}] \quad (3.32)$$

Ahora para hallar el esquema iterativo del método de Newmark, se procede multiplicando por γ y $1 - \gamma$ para los pasos de tiempo t_{s+1} y t_s respectivamente a la siguiente ecuación:

$$M\ddot{u}_s + K u_s = F_s, \quad (3.33)$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} \gamma M \ddot{u}_{s+1} + \gamma K u_{s+1} &= \gamma F_{s+1} \\ (1 - \gamma) M \ddot{u}_s + (1 - \gamma) K u_s &= (1 - \gamma) F_s \end{aligned}$$

sumando estas dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$M(\gamma \ddot{u}_{s+1} + (1 - \gamma) \ddot{u}_s) + K(\gamma u_{s+1} + (1 - \gamma) u_s) = \gamma F_{s+1} + (1 - \gamma) F_s \quad (3.34)$$

despejando $(1 - \gamma) \ddot{u}_s + \gamma \ddot{u}_{s+1}$ de la ecuación (3.32) y reemplazando en (3.34), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{u_{s+1} - u_s}{\Delta t} - \dot{u}_s \right) M + \gamma u_{s+1} K + (1 - \gamma) u_s K \\ = \gamma F_{s+1} + (1 - \gamma) (M \ddot{u}_s + K u_s), \end{aligned}$$

simplificando y ordenando, se obtiene finalmente:

$$\left(K + \frac{2}{\gamma(\Delta t)^2} M \right) u_{s+1} = F_{s+1} + M \left(\frac{2}{\gamma(\Delta t)^2} u_s + \frac{2}{\gamma\Delta t} \dot{u}_s + \frac{1-\gamma}{\gamma} \ddot{u}_s \right)$$

la ecuación anterior se le puede expresar de la siguiente forma:

$$\hat{K} u_{s+1} = \hat{F}_{s,s+1} \quad (3.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{K}_{s+1} &= K + a_3 M \\ \hat{F}_{s,s+1} &= F_{s+1} + M(a_3 u_s + a_4 \dot{u}_s + a_5 \ddot{u}_s) \\ a_3 &= \frac{2}{\gamma(\Delta t)^2} \quad , \quad a_4 = \frac{2}{\gamma\Delta t} \quad , \quad a_5 = \frac{1}{\gamma} - 1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Se necesita las condiciones iniciales: u_0 , \dot{u}_0 y \ddot{u}_0 , ahora del problema se tiene de dato las condiciones iniciales u_0 , \dot{u}_0 , pero no de \ddot{u}_0 , por lo que de la ecuación (3.33) se despeja $\ddot{u}(t)$, y se evalúa en el paso de tiempo $t = 0$, obteniéndose:

$$\ddot{u}_0 = M^{-1}(F_0 - K u_0)$$

luego los nuevos vectores aceleración \ddot{u}_{s+1} y velocidad \dot{u}_{s+1} se deducen de las ecuaciones (3.32) y (3.31) respectivamente, obteniéndose el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{s+1} &= a_3(u_{s+1} - u_s) - a_4 \dot{u}_s - a_5 \ddot{u}_s \\ \dot{u}_{s+1} &= \dot{u}_s + a_2 \ddot{u}_s + a_1 \ddot{u}_{s+1} \\ a_1 &= \alpha \Delta t \quad , \quad a_2 = (1 - \alpha) \Delta t \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por todo lo expuesto anteriormente se ha podido transformar el sistema EDO en el sistema de ecuaciones algebraicas (3.35).

3.2.3. Aproximación algebraica: Factorización LU.

En esta sección se resolverá el sistema de ecuaciones algebraicas (3.35), por un método de factorización, por lo que se redefine la ecuación como:

$$Ax = b \quad (3.38)$$

donde A es una matriz tridiagonal.

Por teoría se tiene métodos directos para calcular la inversa de la matriz A , pero es muy costoso computacionalmente, por tal motivo, se utilizará un método de factorización de la matriz A , que se deduce del método de eliminación gaussiana:

MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Sea el sistema lineal:

$$\begin{aligned} E_1 : & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1. \\ E_2 : & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2. \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ E_n : & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}$$

Se forma la matriz aumentada $\bar{A} = [A, b]$, donde $A = [a_{ij}]$ y $b = [b_i]$.

Siempre que $a_{11} \neq 0$, las operaciones correspondientes a $(E_j - (a_{j1})/a_{11}E_1) \rightarrow (E_j)$ se efectúan para cada $j = 2, 3, \dots, n$ para eliminar el coeficiente de x_1 en cada uno de estos renglones. Aunque se espera que los elementos de los renglones $2, 3, \dots, n$ cambien, para facilitar la notación se denotará nuevamente con a_{ij} el elemento del i -ésimo renglón y la j -ésima columna. Teniéndose presente esto, se aplica un procedimiento secuencial cuando $i = 2, 3, \dots, n-1$ y se realiza la operación $(E_j - (a_{ji})/a_{ii}E_i) \rightarrow (E_j)$ para todo $j = i+1, i+2, \dots, n$, a condición de que $a_{ii} \neq 0$. Con ello se transforma en cero el coeficiente de x_i en cada renglón debajo del i -ésimo renglón para todos los $i = 1, 2, \dots, n-1$. Luego se obtiene el sistema más simple:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1. \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= \quad \quad \quad \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Al resolver la n -ésima ecuación para x_n se obtiene:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Al resolver la $(n - 1)$ -ésima ecuación para x_{n-1} y al utilizar la incógnita x_n se obtiene:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}},$$

y, al continuar con el proceso, se obtiene:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}},$$

para cada $i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$.

Como la matriz de la ecuación (3.38) es tridiagonal, se usa la factorización LU pues ella se simplifica considerablemente, ya que poseen una gran cantidad de ceros que aparecen en patrones regulares.

Definición 3.2.2 Una matriz de orden $n \times n$, $U = [u_{ij}]$ se dice que es **triangular superior** si para todo $j = 1, 2, \dots, n$, los elementos

$$u_{ij} = 0, \quad \text{para cada } i = j + 1, j + 2, \dots, n.$$

Definición 3.2.3 Una matriz de orden $n \times n$, $L = [l_{ij}]$ se dice que es **triangular inferior** si para todo $j = 1, 2, \dots, n$, los elementos

$$l_{ij} = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, j - 1.$$

Teorema 3.2.1 Si se puede efectuar la eliminación gaussiana en el sistema $Ax = b$ sin intercambios de renglones, entonces se puede factorizar A de la forma:

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior y U una triangular superior.

Como no toda matriz tridiagonal cumple con esta condición, se toma la matriz de permutación P , de orden $n \times n$, que se obtiene al arreglar los renglones de la matriz identidad. A continuación se muestra el algoritmo para la implementación de la factorización LU:

FACTORIZACIÓN LU [Burden, 2004]

Para factorizar la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $n \times n$ en el producto de la matriz triangular inferior $L = [l_{ij}]$ y la matriz triangular superior $U = [u_{ij}]$; es decir, $A = LU$, donde la diagonal principal de L o U consta de unos, se sigue el siguiente algoritmo:

ENTRADA la dimensión n ; los elementos a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ de A , la diagonal $l_{11} = \dots = l_{nn} = 1$ de L o la diagonal $u_{11} = \dots = u_{nn} = 1$ de U .

SALIDA los elementos l_{ij} , $1 \leq j \leq i$, $1 \leq i \leq n$ de L y los elementos u_{ij} , $i \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n$ de U .

Paso 1: Seleccione l_{11} y u_{11} satisfaciendo $l_{11}u_{11} = a_{11}$.

Si $l_{11}u_{11} = 0$ entonces SALIDA ('factorización imposible');

PARAR.

Paso 2: Para $j = 2, \dots, n$ tome:

$$\begin{aligned} u_{1j} &= a_{1j}/l_{11}; \quad (\text{primer renglón de } U). \\ l_{j1} &= a_{j1}/u_{11}; \quad (\text{primera columna de } L). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Paso 3: Para $i = 2, \dots, n-1$ se hace los pasos 4 y 5.

Paso 4: Seleccione l_{ii} y u_{ii} satisfaciendo $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$.

Si $l_{ii}u_{ii} = 0$ entonces SALIDA ('factorización imposible');

PARAR.

Paso 5: Para $j = i+1, \dots, n$, tome:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \frac{1}{l_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right]; \quad (i - \text{ésimo renglón de } U). \\ l_{ji} &= \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right]. \quad (i - \text{ésima renglón de } L). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Paso 6: Seleccione l_{nn} y u_{nn} tales que $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$.

(Nota: Si $l_{nn}u_{nn} = 0$, entonces $A = LU$ pero A es singular.)

Paso 7: SALIDA (l_{ij} para $j = 1, \dots, i$ e $i = 1, \dots, n$);

SALIDA (u_{ij} para $j = i, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n$);

PARAR.

Luego para aplicar la factorización LU se debe multiplicar la matriz A por una matriz de permutación P conveniente, obteniéndose:

$$PA = LU$$

Al reemplazar esta equivalencia en (3.38) se obtiene el sistema:

$$LUx = Pb \quad (3.41)$$

Haciendose los siguientes cambios en la ecuación (3.41):

$$Ux = z \quad (3.42)$$

$$\bar{b} = Pb, \quad (3.43)$$

Se tiene:

$$Lz = \bar{b} \quad (3.44)$$

Este sistema es más sencillo de resolver por el método de eliminación gaussiana, obteniéndose

$$z = L^{-1}\bar{b}, \quad (3.45)$$

con este resultado se resuelve (3.42), obteniendo

$$x = U^{-1}z, \quad (3.46)$$

finalmente reemplazando (3.45) y (3.43) en (3.46), se obtiene la solución del sistema (3.38):

$$x = U^{-1}L^{-1}Pb$$

Con este esquema numérico se obtiene la solución del sistema de ecuaciones algebraicas (3.35) del problema de la Onda Sonora.

3.2.4. Análisis de convergencia del esquema numérico

En esta sección se aborda la convergencia del esquema numérico, para lo cual se busca una manera de medir la distancia entre la solución exacta u y la solución aproximada U . Existen varias maneras, una puede ser midiendo en cada punto del dominio, lo cual proporciona una función, conocida como **error punto a punto**, la otra forma y la utilizada en este trabajo es tomar el máximo de todos los valores absolutos de la diferencias de u y U en el dominio $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$:

$$\| u - U \|_{\infty} \equiv \max_{(\bar{x}, t) \in \Omega_T} | u(\bar{x}, t) - U(\bar{x}, t) | \quad (3.47)$$

Esta norma es conocida como norma del supremo, y a esta medida de la diferencia se la llama **supmétrica**, notar que esta supmétrica es un número real no negativo.

ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA ESPACIAL: MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El análisis de la convergencia espacial por el MEF se puede ver en [Ciarlet, 1979], [Brenner, 2000], [Johnson, 1987] y [Reddy, 1993], en esta sección se usará la **norma de la energía** que se define como:

$$\| v \|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} | D^{\alpha} v |^2 d\Omega \right)^{1/2}, \quad 1 \leq m < \infty.$$

Se dice que una solución aproximada por elementos finitos U^e converge a la solución real u a través de la norma de energía si:

$$\| u - U^e \|_m \leq \lambda h^p \quad \text{para } p > 0 \quad (3.48)$$

donde λ es una constante independiente de u y U^e , y h es la longitud característica de un elemento de la partición. La constante p es llamada **tasa de convergencia**. Notar que la convergencia depende de h como de p ; p depende del orden de la derivada de u en la forma débil y el grado de los polinomios usados en la aproximación de u . Por lo tanto, el error en la aproximación puede ser reducida, bien reduciendo el tamaño de los elementos o incrementando el grado de los polinomios aproximadores. La convergencia de la solución por elementos finitos con mallas refinadas es denominada **h -convergencia**. La convergencia por incremento del grado de los polinomios es llamada **p -convergencia**.

Teorema 3.2.2 (Convergencia de elementos finitos [Ciarlet, 1979]) *Sea u la solución exacta y u_h la solución por elementos finitos de la formulación variacional de la EDPHL*

(2.19). Si las funciones de interpolación ψ_j , $j \in \{1, 2, \dots, M\}$, donde M es la dimensión de la base del espacio de elementos finitos, son polinomios completos de grado k (k es mayor o igual al mayor orden de la derivadas que aparecen en la formulación). Entonces el error de aproximación (e_h) por la norma de energía satisface:

$$\| e_h \|_m = \| u - u_h \|_m \leq \lambda h^p, \quad p = k + 1 - m > 0, \quad (3.49)$$

donde λ es una constante, y h es alguna dimensión característica de los elementos.

Como en este trabajo se ha usado polinomios de interpolación de primer grado, se tiene entonces que $m = 1$, y por el teorema el orden de convergencia espacial para una y dos dimensiones es de h^1 . Para el caso unidimensional: $\mathcal{O}(\Delta x)$.

ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA TEMPORAL: MÉTODO DE NEWMARK

En esta sección se analiza la convergencia temporal de la siguiente manera:

Eliminando \dot{u}_s y \ddot{u}_s de las ecuaciones del método (3.30), y por una serie de pasos largos, se obtiene la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned} (M + \frac{1}{2}\gamma\tau^2 K) D_{\tau\bar{\tau}}u_s + \left\{ \tau \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) K \right\} D_{\bar{\tau}}u_s \\ + K u_s = \left\{ I + \tau \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) D_{\bar{\tau}} + \frac{1}{2}\gamma\tau^2 D_{\tau\bar{\tau}} \right\} F_n, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde $\tau = \Delta t$ y

$$\begin{cases} D_{\tau}u_s = (u_{s+1} - u_s)/\tau, \\ D_{\bar{\tau}}u_s = (u_s - u_{s-1})/\tau, \\ D_{\tau\bar{\tau}}u_s = (D_{\tau}u_s - D_{\bar{\tau}}u_s)/\tau. \end{cases} \quad (3.51)$$

A continuación se considerará T un número positivo fijo, N un entero positivo, se define $\tau := T/N$ y $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Sea K definida positiva: $(Kx, x) \geq k(x, x)$ con $k > 0$ y $m > 0$ el valor propio más pequeño de M . También se asume que $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Y se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.2.3 (Desigualdad de Energía [Chiba, 2012]) Sea $\{u_s\}_{n=0}^N$ una sucesión generada por el esquema de Newmark. Entonces para una constante positiva τ_0 que se determina como:

$$\tau_0 > 0 \quad \text{cuando} \quad \gamma \geq \alpha, \quad (3.52)$$

o

$$0 < \tau_0 < \sqrt{\frac{2m}{(\alpha - \gamma) \| K \|}} \quad \text{cuando} \quad 0 \leq \gamma < \alpha. \quad (3.53)$$

existe una constante positiva C_0 tal que:

$$\begin{aligned} \| M^{1/2} D_\tau u_s \|^2 + \frac{\tau^2}{2} \left\{ \gamma - \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) - \beta \right\} \| K^{1/2} D_\tau u_s \|^2 \\ + \left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \| K^{1/2} u_s \|^2 \leq C_0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

para todo $\tau \leq \tau_0$ y una constante positiva arbitraria α .

Obsevación 3.2.1 La constante C_0 es definida como:

$$\begin{aligned} C_0 := \left(1 - \frac{1}{2} \delta \tau_0 \right)^{-1} \left[\omega_0 + \frac{2T}{\delta^2} \left\{ (\gamma + \alpha) \sup_{0 \leq t < T} \| F(t) \| \right\}^2 \right] \\ \times \exp \left(\delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta \tau_0 \right)^{-1} T \right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_0 = \| M^{1/2} D_\tau u_0 \|^2 + \frac{\tau^2}{2} \left\{ \gamma - \alpha + \frac{1}{2} \right\} \| K^{1/2} D_\tau u_0 \|^2 \\ + \operatorname{Re} \{ \tau (K D_\tau u_0, u_0) \} + \| K^{1/2} u_0 \|^2, \end{aligned} \quad (3.56)$$

y δ en (3.56) es definida como:

$$0 < \delta \leq m, \quad (3.57)$$

para el caso (3.52) o

$$0 < \delta \leq m - \frac{\tau_0^2}{2} (\alpha - \gamma) \| K \|, \quad (3.58)$$

para el caso (3.53).

Obsevación 3.2.2 La constante C_0 en el teorema depende principalmente de los coeficientes de las matrices M y K ; y secundariamente de los parámetros de ajuste α y γ ; también depende de los valores iniciales u_0 y \dot{u}_0 , del término no homogéneo F , y finalmente de τ_0 , en la forma descrita anteriormente.

Con el teorema de la desigualdad de energía, se obtiene las condiciones de estabilidad para el método de Newmark, descritas en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4 (Estabilidad de Newmark [Chiba, 2012]) Sean M y K definidas positivas, sean m y k los valores propios más pequeños de M y K respectivamente, además se asume $\alpha \geq 1/2$. Entonces el método de Newmark (3.30) en un intervalo de tiempo $[0, T]$ es estable en los siguientes 2 casos respecto a γ :

Caso 1: Si $\alpha < \gamma$, entonces con $\tau_0 > 0$ y δ dados en (3.57) y (3.58) se tiene, para

$$\tau < \tau_0 \text{ y } N = T/\tau:$$

$$\| u_s \| \leq \sqrt{\frac{(2\gamma - 2\alpha + 1)}{(2\gamma - 2\alpha)k}} C_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.59)$$

Caso 2: Si $0 \leq \gamma \leq \alpha$, entonces para τ_0 satisfaciendo

$$0 < \tau_0 < \sqrt{\frac{2m}{(\alpha - \gamma) \|K\|}} \quad (3.60)$$

se tiene para $\tau \leq \tau_0$ y $N = T/\tau$

$$\|u_s\| \leq \|u_0\| + \sqrt{\frac{C_0}{m - \frac{\tau_0^2}{2}(\alpha - \gamma) \|K\|}} \tau_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.61)$$

en ambos casos C_0 es dado por (3.55) junto con (3.56) y $\tau_n = \Delta t_n = t_{n+1} - t_n$.

Usando la relación de recurrencia (3.50) y el teorema de estabilidad, se muestra la convergencia del método de Newmark junto con su orden de convergencia. Sea $u(t)$ la solución del sistema EDO (3.28) y u_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) la solución del método de Newmark para (3.28). Se asume que M y K son definidos positivos.

El error de discretización e_n es definido como $e_n := u(\tau_n) - u_n$. Entonces se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.2.5 (Convergencia de Newmark [Chiba, 2012]) *Supóngase que $F \in C^2[0, T]$, entonces se tiene la estimación $\|e_n\| = \mathcal{O}(\tau^l)$, donde*

$$\begin{cases} l = 2 & \text{para } \alpha = \frac{1}{2} \\ l = 1 & \text{para } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.62)$$

Los parámetros α y γ determinados en este método son los que determinan la estabilidad y precisión del esquema numérico. Los siguientes esquemas son casos particulares del método de Newmark:

- $\alpha = 1/2, \gamma = 1/2$, método de aceleración de promedio constante.
- $\alpha = 1/2, \gamma = 1/3$, método de aceleración lineal.
- $\alpha = 1/2, \gamma = 0$, método de diferencia central.
- $\alpha = 3/2, \gamma = 8/5$, método de Galerkin.
- $\alpha = 3/2, \gamma = 2$, método de diferencia hacia atrás.

Capítulo 4

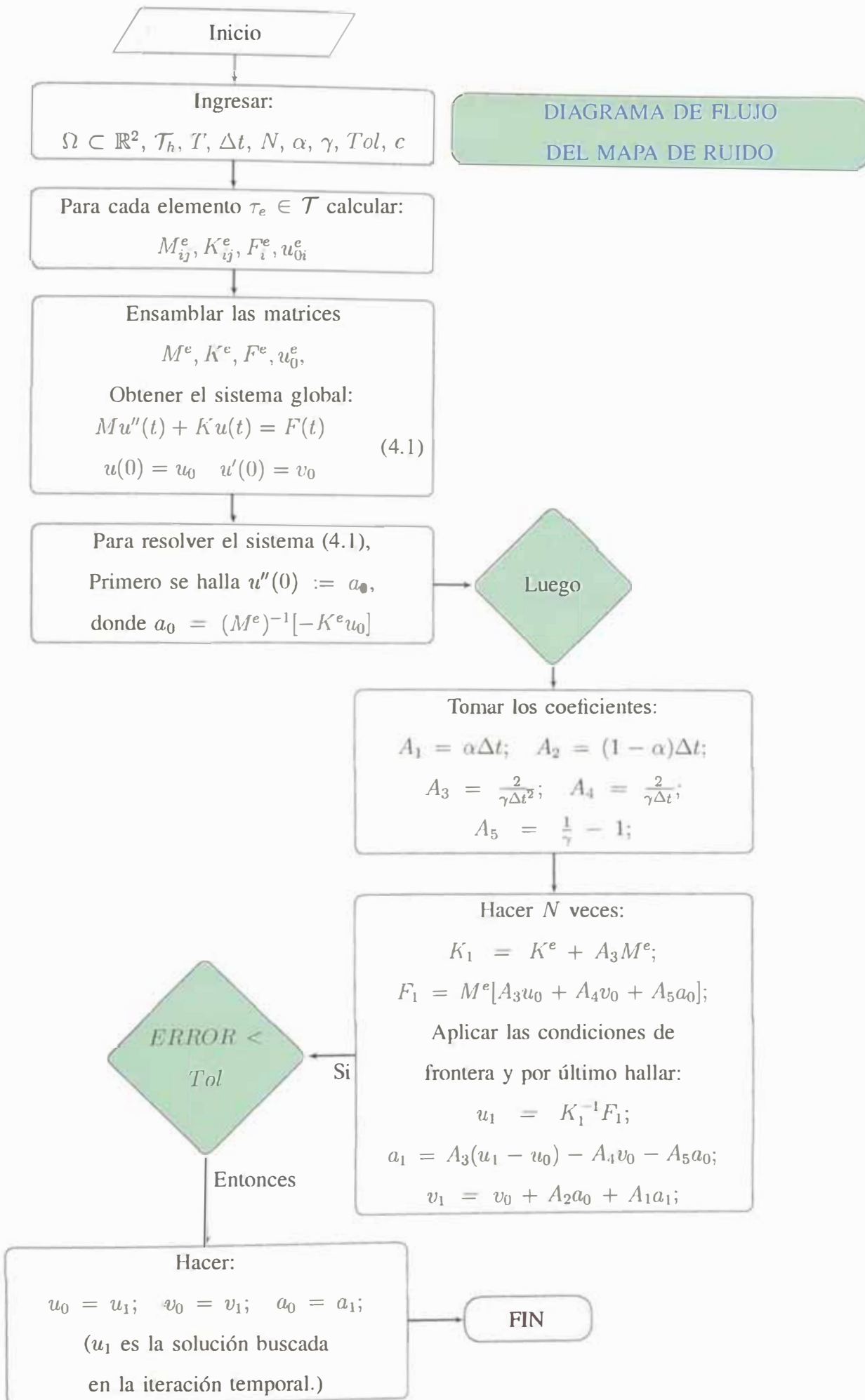
RESULTADOS: OBTENCIÓN COMPUTACIONAL DE LOS MAPAS DE RUIDO

En esta capítulo se aplica el software implementado para la resolución numérica del problema de propagación del ruido y la creación de los mapas de ruido del área de interés. Como geometría del dominio computacional (Ω) se ha considerado una sección transversal rectangular del interior del pabellón R1 de la Facultad de Ciencias, correspondiente a una zona que comprende: el pasadizo del primer piso (lado inferior) hasta el cuarto piso (lado superior) y sus márgenes de altura (lado izquierdo y lado derecho).

4.1. Construcción del Diagrama de Flujo

En esta sección se construye un resumen de la resolución numérica descrita en el capítulo anterior, mediante un diagrama de flujo para evaluar la presión sonora u en la construcción del Mapa de Ruido. Se usará la siguiente notación:

- Ω : geometría del dominio espacial, \mathcal{T}_h : mallado triangular del dominio, de longitud de lado h , c : velocidad del sonido,
- $[0, T]$: es el intervalo de tiempo, Δt : paso de tiempo y N : número de iteraciones
- α y γ : parámetros de estabilidad numérica, Tol : intervalo de tolerancia de los datos de presión,
- u_0 : la presión inicial, v_0 : el cambio de presión inicial y F el término fuente.



4.2. Comparación del Método de Diferencias Finitas, Método de Elementos Finitos y la solución exacta en 1D.

Para la resolución numérica del problema de la onda en una dimensión espacial, se hace una comparación de dos métodos numéricos implementados, el de Diferencias Finitas desde el punto de vista clásico y el de Elementos Finitos desde el punto de vista débil, aquí se observa la comparación de las normas del supremo de los vectores de error de ambas aproximaciones numéricas para el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 EDP : & \quad u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < \pi, 0 < t < \pi, \\
 CI : & \quad \begin{cases} u(x, 0) = 1 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = \cos x & , \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
 CC : & \quad \begin{cases} u(0, t) = 1 + \text{sen } t & , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ u(\pi, t) = 1 - \text{sen } t & , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Cuya solución exacta (4.3) es dada en por [Majid, 2009] y que satisface el problema (4.2).

$$u(x, t) = 1 + \cos x \text{sen } t. \tag{4.3}$$

Para el detalle de la resolución de este problema se puede ver las referencias [Mantilla, 2009] [Mantilla, 2010], donde se considera un mallado espacial de 5 segmentos, con un $\Delta x = \pi/5$ metros y Δt varía a medida que crece el número de etapas de tiempo (N).

Luego la ecuación (3.4), con (3.5), (3.6) y (3.8) describen el algoritmo para la solución del problema de onda en una dimensión, con $g(x) = 1$, $h(x) = \cos x$, $C_1(t) = 1 + \text{sen } t$ y $C_2(t) = 1 - \text{sen } t$ y con el MEF en 1D descrito por las ecuaciones (3.21), (3.29) y (3.30) se tiene los siguientes resultados mostrados en la tabla (4.1) y en las figuras (4.1) y (4.2).

Cuadro 4.1: Cota de errores cometidos por los métodos numéricos en metros.

N	DIFERENCIAS FINITAS	ELEMENTOS FINITOS
5	1.9021	0.1782
10	0.0328	0.0275
20	0.2146	0.0049
30	0.2226	0.0076
40	0.2282	0.0091
50	0.2247	0.0099
60	0.2250	0.0103
70	0.2225	0.0106
80	0.2222	0.0107
90	0.2204	0.0109
100	0.2201	0.0109
200	0.2151	0.0112
500	0.2116	0.0113
1000	0.2103	0.0113

También se hace una comparación gráfica de los dos métodos.

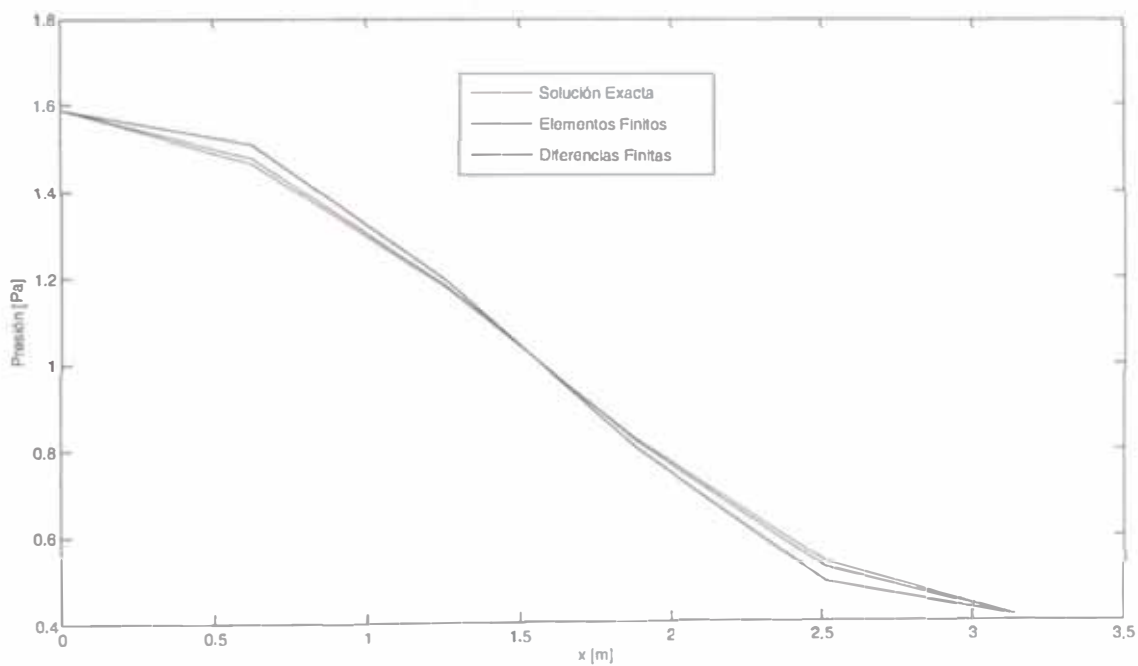


Figura 4.1: Solución exacta y soluciones aproximadas para $\Delta t = \pi/5$ seg y en el instante $t = \pi/5$ seg.

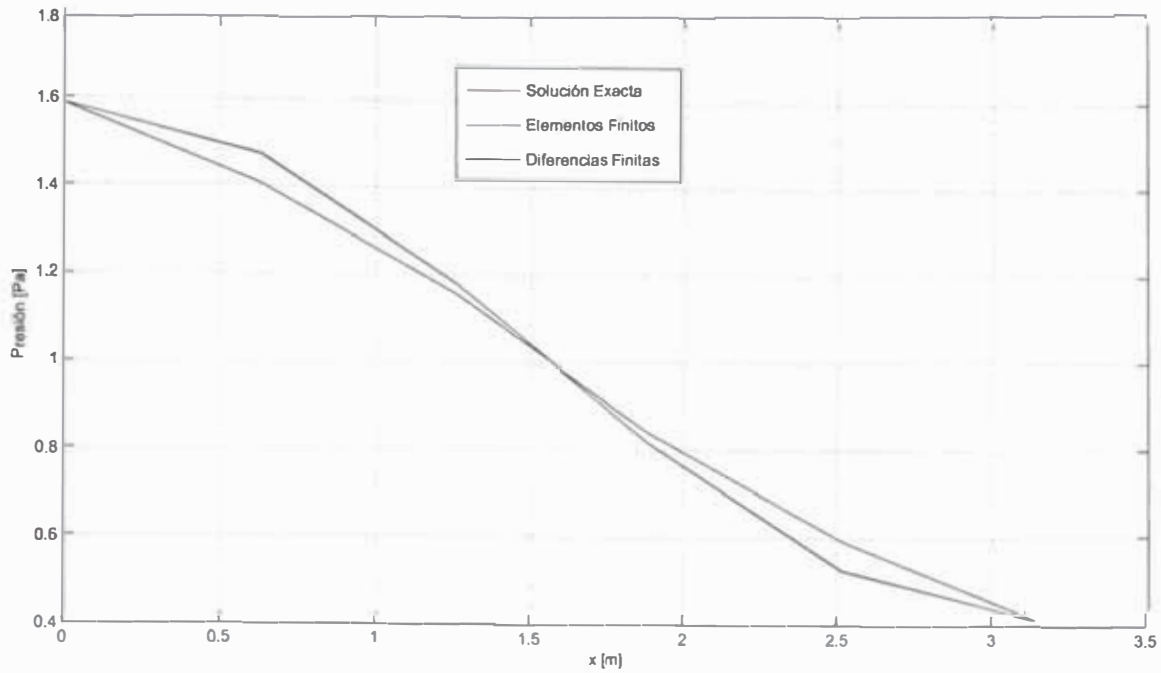


Figura 4.2: Solución exacta y soluciones aproximadas para $\Delta t = \pi/10$ seg y en el instante $t = \pi/5$ seg.

4.3. Resultados con el Esquema por Elementos Finitos bidimensional

En esta sección se muestra la precisión del Esquema por Elementos Finitos bidimensional, para verificar esta precisión consideremos una supuesta solución exacta que satisface el problema hiperbólico dado en [Majid, 2009].

$$\begin{aligned}
 EDP : & \quad u_{tt} = (u_{xx} + u_{zz}) + \cos y \quad , \quad 0 < x, z < \pi, t > 0, \\
 CI : & \quad \begin{cases} u(x, z, 0) = \cos z \quad , \quad 0 \leq x, z \leq \pi \\ u_t(x, z, 0) = \text{sen } x \quad , \quad 0 \leq x, z \leq \pi. \end{cases} \\
 CC : & \quad \begin{cases} u(0, z, t) = u(\pi, z, t) = \cos z \quad , \quad 0 \leq z \leq \pi, t > 0 \\ u(x, 0, t) = 1 + \text{sen } x \text{ sen } t \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\ u(x, \pi, t) = -1 + \text{sen } x \text{ sen } t \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi, t > 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$u(x, z, t) = \cos z + \text{sen } x \text{ sen } t. \tag{4.5}$$

En efecto:

- Derivando (4.5) respecto a cada una de las componentes (u_{tt} , u_{xx} y u_{zz}) y sustituyendo en el problema (4.4), se tiene:

$$u_{tt} = \text{sen } x \cos t, \quad u_{xx} = -\text{sen } x \text{ sen } t \quad \text{y} \quad u_{zz} = -\cos z.$$

$$u_{xx} + u_{zz} + \cos z = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} t - \cancel{\cos z} + \cancel{\cos z} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} t = u_{tt},$$

- Se verifica que cumple las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, z, 0) &= \cos z + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 0 \\ &= \cos z + \operatorname{sen} x \cdot 0 \\ &= \cos z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t(x, z, 0) &= \operatorname{sen} x \cos 0 \\ &= \operatorname{sen} x \cdot 1 \\ &= \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

- Por último se verifica las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, z, t) &= \cos z + \cancel{\operatorname{sen} 0 \operatorname{sen} t} \\ &= \cos z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(\pi, z, t) &= \cos z + \cancel{\operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} t} \\ &= \cos z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= \cos 0 + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t \\ &= 1 + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, \pi, t) &= \cos \pi + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t \\ &= -1 + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Por tanto se verifica que u es solución del problema.

Numéricamente en el problema dado se asume que la variable dependiente u a la que denominaremos presión se mide en pascuales, las variables espaciales x, z en metros y la variable temporal en segundos. Además se construye un mallado con 200 elementos sobre el dominio espacial $[0, \pi] \times [0, \pi]$, se toma un intervalo de tiempo $[0, 10]$ segundos, y los parámetros de estabilidad con los siguientes valores: $\alpha = 0,5$ y $\gamma = 0,5$.

Definición 4.3.1 Sea m el número de nodos de una malla; si m es impar entonces se define el nodo central de la malla del dominio $[0, a] \times [0, b]$, como el nodo de coordenadas:

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right).$$

A continuación se muestra los resultado numéricos del problema dado: en la figura (4.3) la malla espacial, que se utiliza para obtener la tabla de resultados (valores de presión) correspondientes a la solución sobre un nodo central para los pasos de tiempo 2, 4, 6, 8 y 10 segundos. Se puede observar que cuando Δt tiende a cero la solución aproximada tiende a la solución exacta como se muestra en la figuras (4.4) a (4.9).

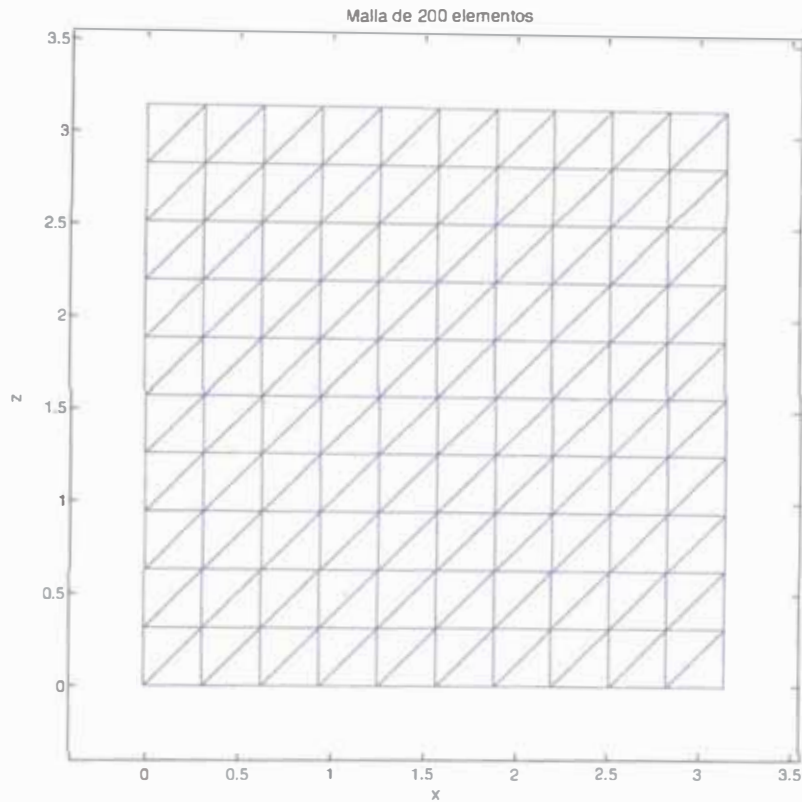


Figura 4.3: Malla de 200 elementos.

Cuadro 4.2: Presiones del nodo central en pascal.

T	Exacta	$\Delta t = 2$	$\Delta t = 1$	$\Delta t = 0,5$	$\Delta t = 0,33$	$\Delta t = 0,25$	$\Delta t = 0,20$	$\Delta t = 0,17$	$\Delta t = 0,14$	$\Delta t = 0,125$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.9093	0.9780	0.9678	0.9286	0.9187	0.9151	0.9123	0.9100	0.9085	0.9076
4	-0.7568	-0.2097	-0.6605	-0.7570	-0.7561	-0.7540	-0.7539	-0.7530	-0.7529	-0.7525
6	-0.2794	-1.1749	-0.6336	-0.3381	-0.2965	-0.2818	-0.2778	-0.2742	-0.2732	-0.2726
8	0.9894	0.7814	1.3907	1.0815	1.0199	1.0007	0.9923	0.9852	0.9821	0.9801
10	-0.5440	1.2464	-0.6319	-0.6141	-0.5683	-0.5503	-0.5424	-0.5381	-0.5354	-0.5358

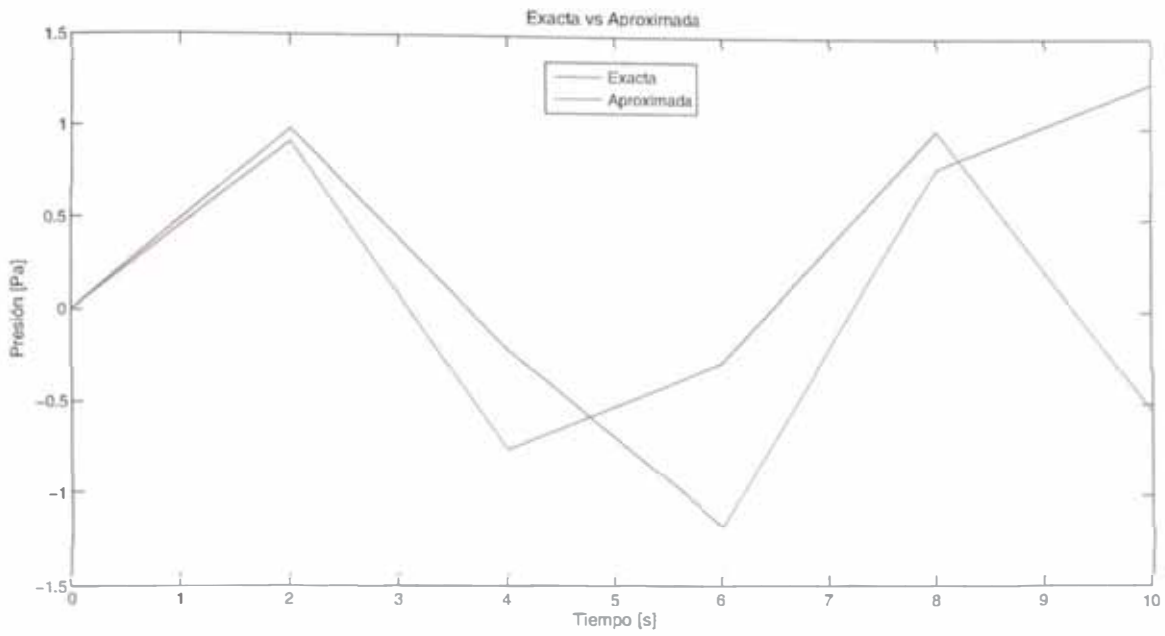


Figura 4.4: Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 2$ seg.

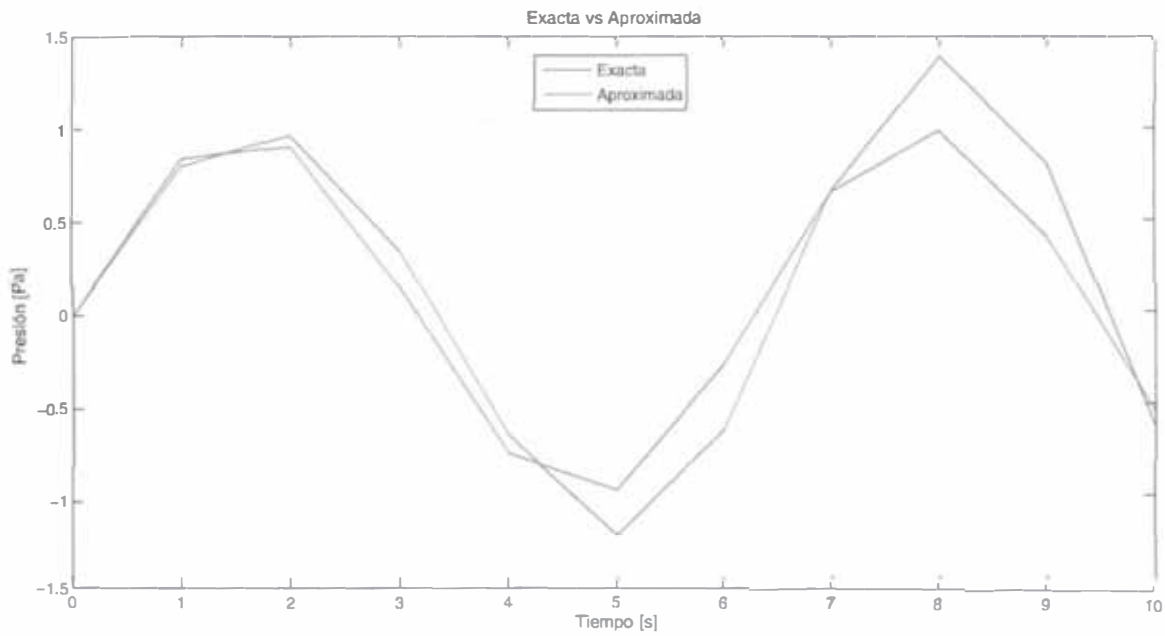


Figura 4.5: Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 1$ seg.

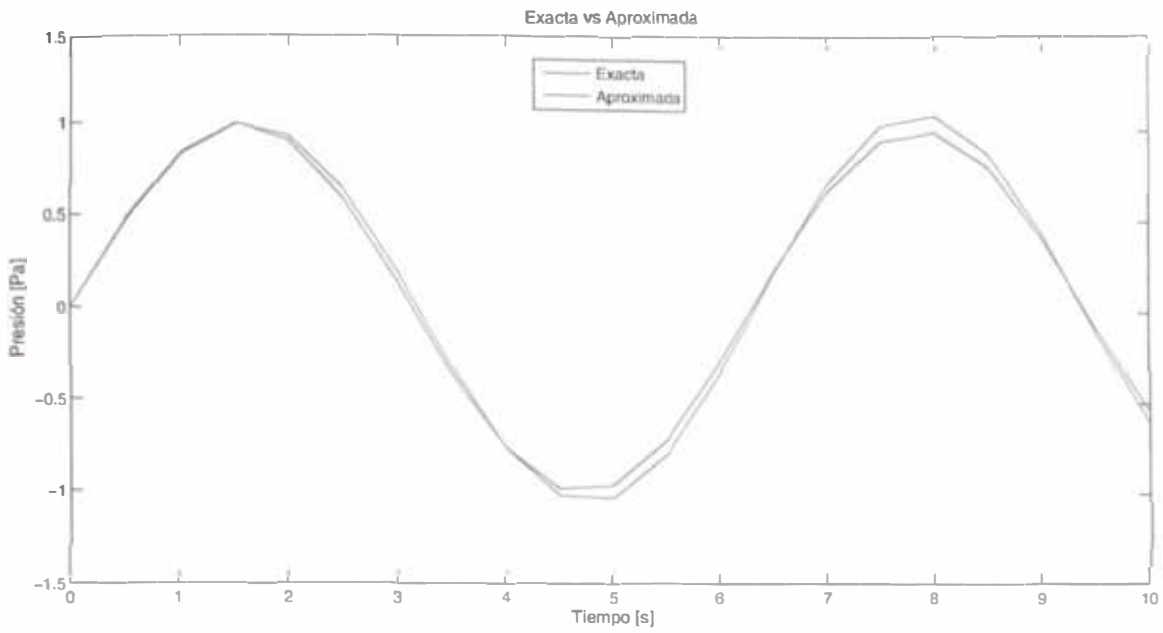


Figura 4.6: Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 0,5$ seg.

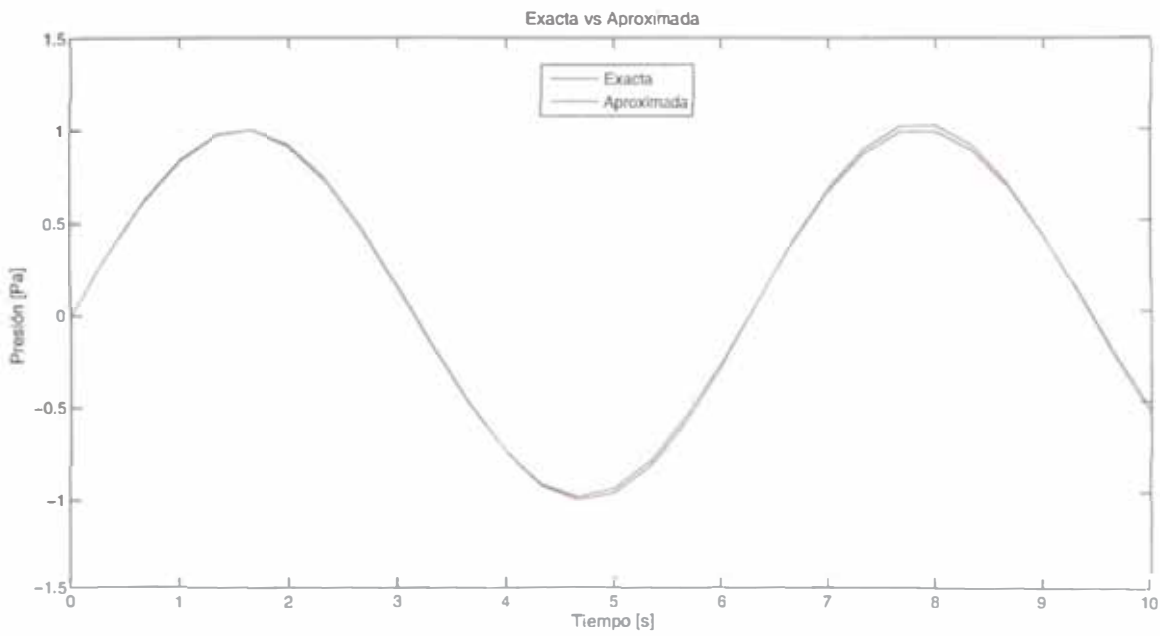


Figura 4.7: Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 0,33$ seg.

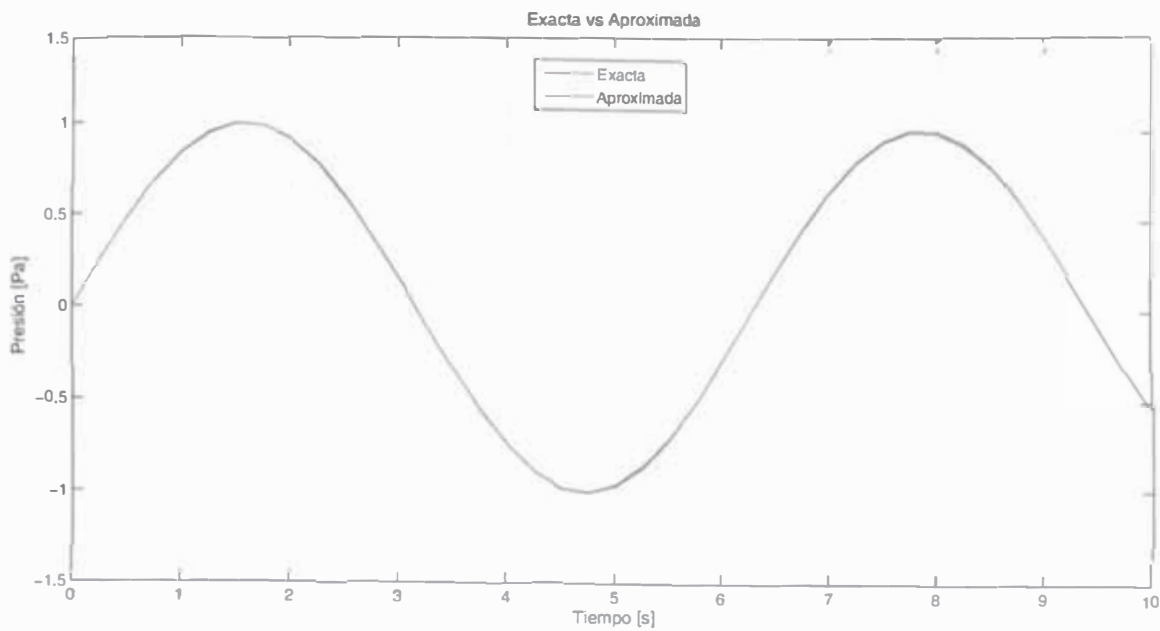


Figura 4.8: Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 0,25$ seg.

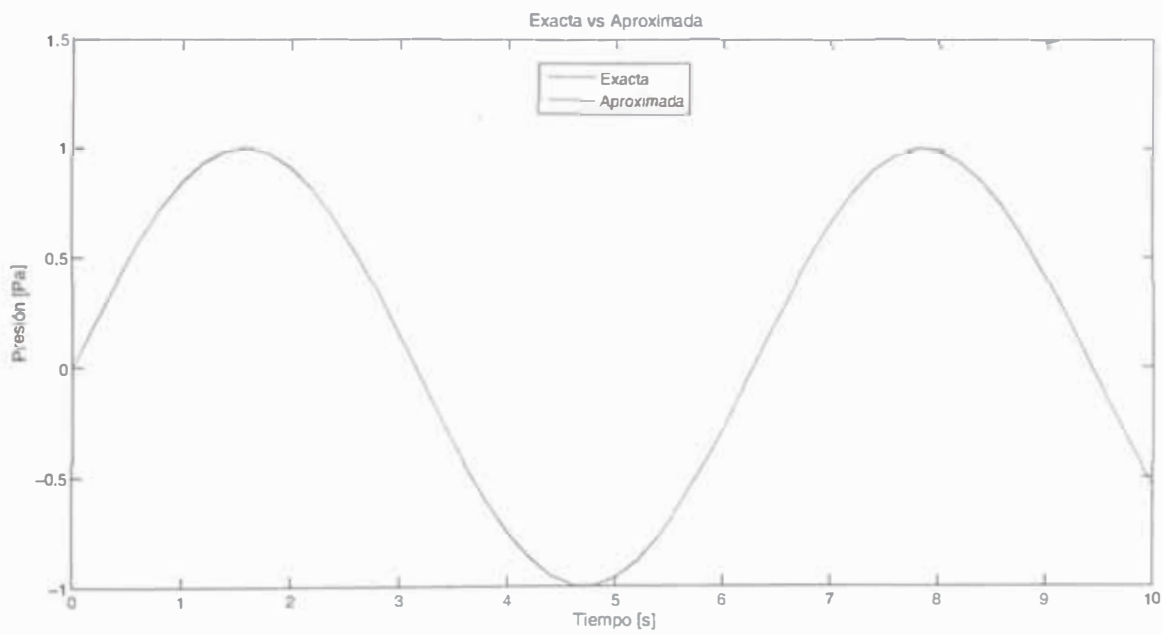


Figura 4.9: Solución exacta y aproximada del nodo central para un $\Delta t = 0,2$ seg.

Luego en las siguiente figura (4.10) se muestra los resultados de la solución del problema dado en todos los nodos de la malla.

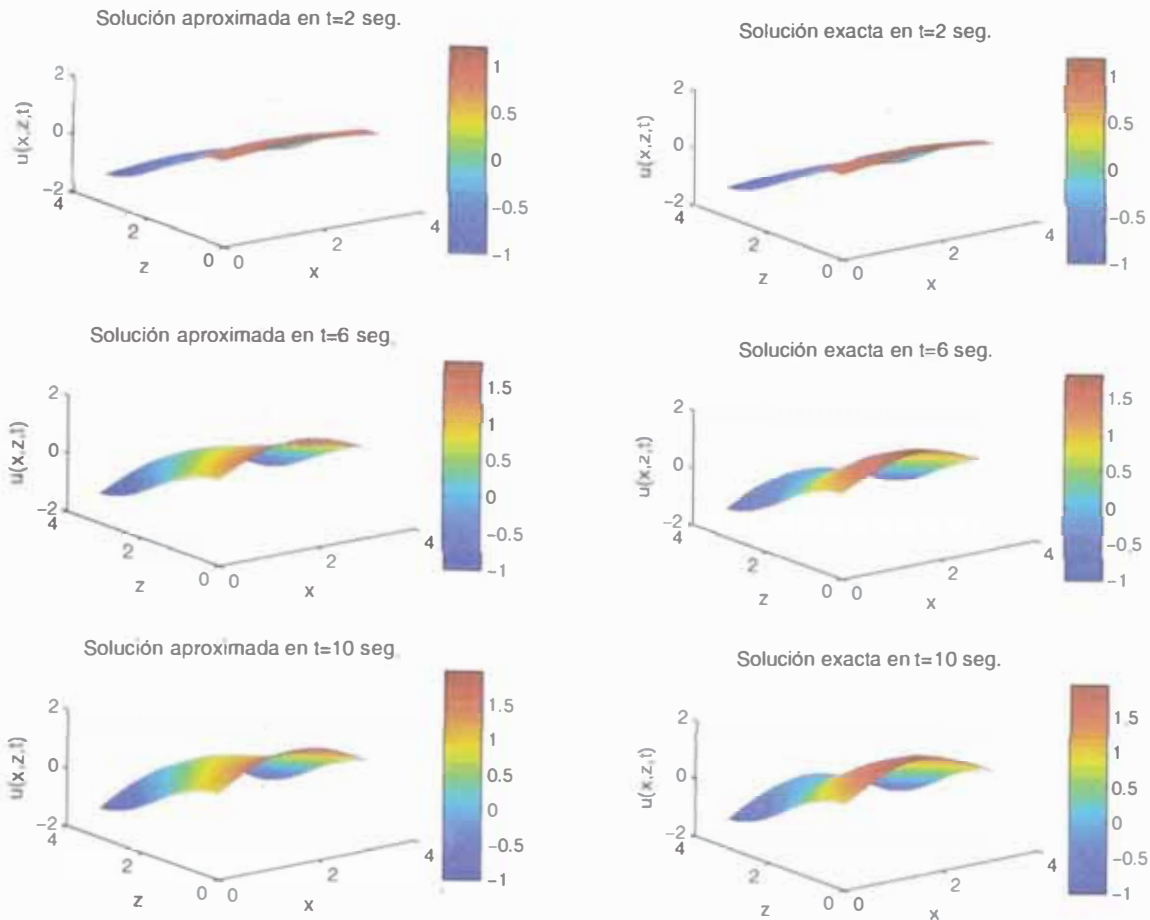


Figura 4.10: Presión exacta y aproximada sobre una malla de 200 elementos y $\Delta t = 0,2$ seg.

ESTIMACIÓN DEL ERROR

Para analizar la estimación del error se usará la norma del supremo sobre la diferencia entre los valores de la solución exacta y aproximada, este valor numérico da una medida de acotación, y se denotará por $COTA$, además N denotará el número de pasos de tiempo. Para hallar la partición temporal se usará la fórmula

$$\Delta t = \frac{T}{N},$$

donde T denota el paso de tiempo máximo.

El siguiente cuadro muestra la cota del error de la solución aproximada para 200 elementos en un intervalo de tiempo $[0, 10]$ segundos, cuando Δt tende a cero.

Cuadro 4.3: Error cuando Δt tiende a cero

N	Δt	COTA
5	2	1.7904
10	1	0.4014
20	0.50	0.0922
25	0.40	0.0495
30	0.33	0.0305
40	0.25	0.0113
50	0.20	0.0043
60	0.17	0.0060
70	0.14	0.0087
80	0.125	0.0105
90	0.11	0.0120
100	0.10	0.0129
500	0.02	0.0159
1000	0.01	0.0160
2000	0.005	0.0160
5000	0.002	0.0160
10000	0.001	0.0160

A continuación se muestra un cuadro de doble entrada de Δt y el número de elementos en un intervalo de tiempo $[0, 10]$ segundos, para las cotas del error:

Cuadro 4.4: Número de elementos versus Δt .

Nº Elementos	$\Delta t[s]$	0.50	0.33	0.25	0.20	0.17	0.14	0.125	0.11	0.10
	8		0.1446	0.1745	0.1841	0.1871	0.1901	0.1906	0.1921	0.1922
32		0.0180	0.0516	0.0679	0.0754	0.0793	0.0815	0.0829	0.0838	0.0844
72		0.0571	0.0121	0.0258	0.0325	0.0363	0.0387	0.0405	0.0422	0.0433
128		0.0786	0.0238	0.0060	0.0122	0.0154	0.0179	0.0202	0.0216	0.0225
200		0.0922	0.0305	0.0113	0.0043	0.0060	0.0087	0.0105	0.0120	0.0129
288		0.0999	0.0350	0.0150	0.0061	0.0033	0.0034	0.0055	0.0067	0.0072
392		0.1049	0.0379	0.0177	0.0086	0.0037	0.0025	0.0025	0.0036	0.0046
512		0.1085	0.0399	0.0194	0.0103	0.0052	0.0024	0.0020	0.0020	0.0025

Por último se muestra un cuadro de la cota del error para Δt y el número de elementos fijos.

Cuadro 4.5: Error para $\Delta t = 0,25$ seg. y 128 elementos.

T	N	$COTA$
1	4	0.0056
10	40	0.0060
100	400	0.0122
1000	4000	0.0133

OBSERVACIONES

1. Del cuadro 4.3 se observa que la proximidad de la solución aproximada a la exacta está dentro de una cota de error máxima de 0.0160.
2. En el cuadro 4.4 se muestra que la solución se aproxima a la exacta y llega a su mayor proximidad para un cierto número de elementos, aunque aquí no se ha hallado la cota del error máxima por falta de memoria computacional, se sabe por la teoría del MEF que existe dicha cota.
3. En el cuadro 4.5 se aprecia que a medida que T aumenta, manteniendo Δt y el número de elementos fijos, por ejemplo $\Delta t = 0,25$ y 128 elementos, el error aumenta.

4.4. Condiciones Iniciales y de Contorno para la obtención de los Mapas de Ruido

En esta sección se obtiene las condiciones iniciales y de contorno basadas en una base de datos experimental tomada sobre la zona de estudio que corresponde al pabellón R1 de la Facultad de Ciencias que colinda con una fuente de ruido ubicada en la Av. Tupac Amaru y alrededores de la zona considerada.

4.4.1. Obtención de la data de presión experimental

La presión experimental es medida en un intervalo de tiempo de 8:45 a 9:30 a.m, es decir durante 45 min, ya que sólo se dispone de un Sonómetro. Pero dichos datos se

consideran medidos todos a las 8:45 a.m; bajo esta suposición se muestra la siguiente data experimental:

Cuadro 4.6: Datos experimentales de la Presión inicial (p)

$x_i [m]$ \ $z_j [m]$	0	3	6	9
0	54.2000	57.2000	55.8000	62.9000
1	52.0000	48.9000	48.7000	72.8000
2	47.7000	47.1000	47.8000	65.9000
3	48.7000	50.3000	44.4000	56.2000
4	49.3000	56.3000	44.3000	58.3000
5	46.7000	53.3000	52.3000	58.5000
6	47.9000	48.6000	57.1000	57.8000
7	52.8000	48.1000	49.0000	63.7000
8	49.6000	50.4000	53.5000	52.9000
9	44.7000	46.7000	51.8000	57.6000
10	44.8000	49.9000	48.3000	56.4000
11	45.0000	48.1000	48.7000	59.3000
12	44.7000	47.9000	46.9000	61.3000
13	44.5000	45.5000	45.3000	55.3000
14	45.2000	55.7000	54.2000	53.5000
15	46.2000	51.8000	50.0000	51.9000
16	51.1000	48.3000	48.6000	53.1000
17	48.6000	51.9000	51.2000	50.0000
18	45.0000	47.3000	48.6000	46.9000
19	46.0000	49.2000	48.6000	55.7000
20	47.9000	50.9000	44.2000	51.5000
21	46.2000	50.5000	45.9000	53.8000
22	49.7000	48.5000	44.6000	56.4000
23	47.0000	49.3000	48.5000	48.1000
24	48.3000	48.7000	48.0000	51.6000
25	52.7000	48.8000	45.2000	49.2000
26	48.0000	55.5000	45.5000	49.2000
27	49.0000	52.6000	46.2000	48.8000
28	49.0000	51.2000	47.3000	47.4000
29	46.2000	56.3000	47.5000	50.5000
30	49.3000	57.9000	49.4000	50.1000

Como se necesitará para la obtención numérica una condición inicial de presión para 90 elementos, se muestra el siguiente gráfico de la presión experimental:

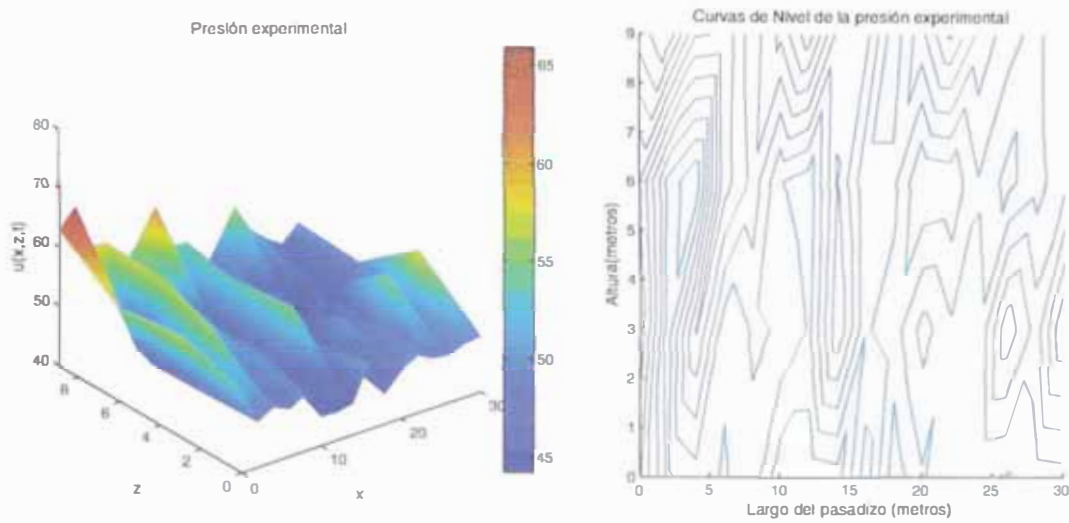


Figura 4.11: Mapa de ruido de la presión experimental para 90 elementos.

Además como no se tiene mucha información en el eje z , es decir altura, se toma un promediado entre piso y piso, obteniéndose 6 particiones espaciales en el eje z . Y así se obtiene una presión experimental para 360 elementos:

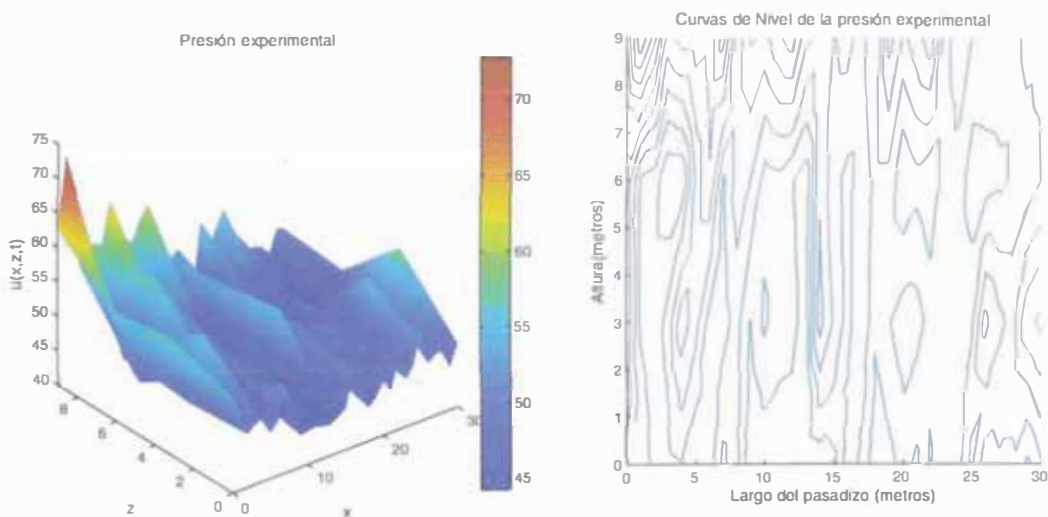


Figura 4.12: Mapa de ruido de la presión experimental para 360 elementos.

4.4.2. Medición de las fuentes de ruido y razón de cambio para la presión inicial experimental

Ahora como los **cambios de presión** varían muy rápidamente en el tiempo, y el Sonómetro no cuenta con una memoria extraíble, se ha considerado que esta es **nula**, ya que las fuentes de ruido que pueden ser personas, animales y máquinas producen este ruido y luego se “apagan”, es decir estas fuentes se comportan como fuentes discretas de ruido. Por esta razón es que es complicado querer hallar una función explícita del cambio de presión inicial, por lo tanto se busca obtener resultados aceptables para crear un **mapa de ruido** bajo esta suposición conveniente.

A continuación se muestra las principales fuentes de ruido en el área de estudio:

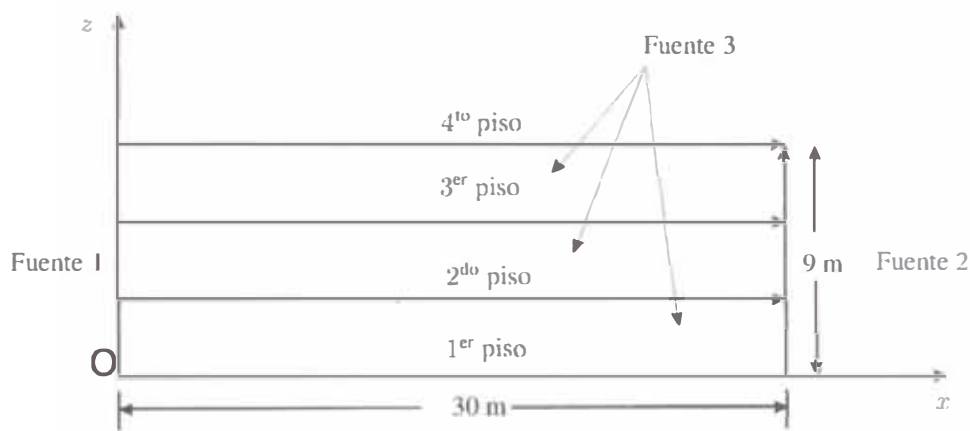


Figura 4.13: Dominio rectangular de la Facultad de Ciencias.

Fuente 1: Aquí se encuentra la Av. Tupac Amaru y la construcción de la Facultad de Sistemas.

Fuente 2: Aquí se encuentra el restaurante y la construcción de ampliación de la Facultad de Ciencias.

Fuente 3: En estas zonas se considera el ruido de los peatones que circulan por los pasadizos.

4.4.3. Obtención de la Data de Contorno Experimental

Ahora para medir las condiciones de contorno del dominio, se procede a medir cada condición de contorno un día distinto durante el mismo horario 8:45 a.m. Como se empleó un intervalo de tiempo de 5 min para medir un largo completo de un pasadizo, es que se toma como Δt a 5 min, luego se hace 8 mediciones más, tardándose en total 45

min, dicho intervalo de tiempo es el que se toma como el intervalo de tiempo del problema. Se hace estas suposiciones porque el ruido es **aleatorio**, y lo que se desea es tener una idea del comportamiento de este ruido en el área de interés, es decir un **mapa de ruido**. Ahora se muestra la data experimental de los cuatro contornos: Lado izquierdo, inferior, derecho y superior.

Cuadro 4.7: Lado Izquierdo

t_i [min]	z_j [m]	0	3	6	9
0		54.2000	57.2000	55.8000	62.9000
5		53.8000	55.0000	53.5000	57.9000
10		52.2000	54.2000	54.2000	57.5000
15		55.0000	54.6000	49.6000	54.0000
20		48.1000	53.4000	54.8000	56.5000
25		53.1000	53.7000	52.3000	56.1000
30		51.3000	51.9000	56.9000	56.0000
35		53.0000	47.8000	48.4000	55.6000
40		51.5000	50.2000	52.9000	54.3000
45		50.5000	49.1000	56.9000	50.2000

Cuadro 4.8: Lado Derecho

t_i [min]	z_j [m]	0	3	6	9
0		49.3000	57.9000	49.4000	50.1000
5		63.2000	49.0000	48.6000	54.4000
10		62.7000	57.2000	48.8000	49.4000
15		62.9000	55.5000	52.9000	46.6000
20		58.2000	49.9000	64.3000	46.7000
25		64.3000	53.6000	66.4000	48.5000
30		57.7000	49.5000	67.5000	48.0000
35		59.7000	53.7000	48.3000	48.3000
40		62.2000	48.6000	44.3000	56.9000
45		66.6000	50.0000	44.9000	52.3000

Cuadro 4.9: Lado Inferior

$x_i [m]$ \ $t_j [min]$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
0	54.2000	57.2000	69.5000	58.6000	66.3000	47.7000	47.1000	46.1000	51.5000	50.0000
1	52.0000	56.1000	65.9000	55.1000	61.0000	48.1000	48.9000	44.5000	55.5000	44.4000
2	47.7000	48.6000	61.0000	56.5000	52.4000	45.5000	45.1000	43.0000	47.5000	47.1000
3	48.7000	45.6000	60.5000	61.0000	65.5000	47.2000	41.7000	44.6000	49.4000	45.2000
4	49.3000	49.5000	52.6000	55.0000	53.3000	51.1000	43.1000	47.2000	49.2000	48.6000
5	46.7000	51.8000	47.5000	49.0000	56.2000	53.9000	46.0000	49.5000	50.0000	48.3000
6	47.9000	51.6000	65.1000	48.1000	46.0000	46.6000	46.8000	45.4000	46.4000	47.5000
7	52.8000	46.7000	61.6000	63.0000	56.7000	45.9000	44.8000	45.2000	44.6000	48.0000
8	49.6000	56.6000	56.1000	59.5000	46.1000	47.0000	48.7000	43.3000	42.8000	45.2000
9	44.7000	47.4000	65.0000	58.6000	51.1000	45.0000	46.7000	45.0000	41.5000	45.6000
10	44.8000	49.7000	65.7000	62.8000	68.3000	45.0000	46.8000	45.3000	45.5000	42.6000
11	45.0000	52.3000	66.0000	60.8000	52.0000	51.8000	45.0000	44.7000	41.7000	44.8000
12	44.7000	50.7000	57.5000	62.2000	48.3000	69.0000	46.2000	46.9000	43.2000	45.9000
13	44.5000	51.9000	69.2000	60.5000	63.3000	68.1000	46.3000	45.8000	42.4000	47.1000
14	45.2000	46.5000	68.1000	50.0000	49.2000	59.6000	45.1000	45.8000	46.6000	44.6000
15	46.2000	50.2000	63.6000	65.6000	54.3000	56.3000	45.4000	45.3000	44.8000	43.2000
16	51.1000	47.9000	62.5000	47.8000	66.1000	58.0000	49.7000	43.6000	47.6000	44.7000
17	48.6000	48.1000	43.7000	64.6000	50.2000	60.9000	47.4000	48.7000	42.1000	41.5000
18	45.0000	45.0000	70.4000	60.8000	64.0000	71.9000	45.6000	49.2000	45.3000	42.8000
19	46.0000	50.5000	70.5000	49.6000	74.2000	73.2000	44.7000	42.1000	45.0000	46.8000
20	47.9000	45.8000	53.0000	64.0000	52.0000	63.9000	45.9000	45.0000	49.0000	45.0000
21	46.2000	49.9000	59.3000	54.5000	67.4000	61.8000	46.5000	48.0000	47.1000	45.9000
22	49.7000	45.2000	53.1000	50.8000	63.1000	71.1000	48.1000	47.1000	52.6000	45.0000
23	47.0000	46.6000	56.5000	62.0000	56.5000	73.1000	50.2000	46.6000	49.0000	47.0000
24	48.3000	51.5000	55.1000	67.2000	67.6000	72.4000	50.1000	46.4000	47.0000	58.0000
25	52.7000	47.9000	52.2000	51.9000	51.3000	72.8000	49.8000	45.4000	46.1000	50.7000
26	48.0000	50.3000	46.2000	68.5000	79.8000	63.2000	53.3000	46.3000	46.0000	45.1000
27	49.0000	51.6000	65.9000	58.1000	46.5000	69.5000	51.0000	46.5000	43.0000	45.5000
28	49.0000	56.8000	60.5000	67.2000	50.1000	73.3000	51.2000	46.5000	54.6000	48.0000
29	46.2000	60.6000	49.9000	67.7000	50.8000	77.1000	53.7000	47.3000	55.6000	46.8000
30	49.3000	66.0000	56.6000	73.2000	51.5000	76.7000	55.8000	51.3000	54.3000	50.7000

Cuadro 4.10: Lado Superior

x_i [m] \ t_j [min]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
0	62.9000	60.5000	60.9000	56.8000	62.9000	59.2000	58.1000	60.0000	58.7000	59.3000
1	72.8000	57.0000	56.1000	54.1000	58.3000	59.6000	56.3000	52.6000	57.7000	53.8000
2	65.9000	60.1000	58.3000	56.0000	57.4000	53.6000	54.4000	52.7000	56.1000	52.9000
3	56.2000	59.2000	61.7000	54.8000	59.9000	48.3000	53.3000	53.9000	51.1000	51.1000
4	58.3000	57.2000	62.2000	56.0000	59.2000	50.9000	50.6000	53.6000	52.9000	55.5000
5	58.5000	54.4000	60.4000	58.0000	59.4000	43.7000	50.4000	51.4000	50.4000	53.9000
6	57.8000	55.1000	60.2000	59.4000	55.0000	53.9000	50.6000	57.2000	52.3000	51.4000
7	63.7000	55.0000	57.5000	57.2000	56.7000	46.4000	53.0000	57.9000	57.7000	48.4000
8	52.9000	57.3000	56.5000	55.1000	53.6000	48.8000	55.8000	58.5000	56.7000	54.7000
9	57.6000	55.5000	58.6000	56.1000	51.4000	50.6000	54.5000	59.7000	56.2000	56.8000
10	56.4000	54.8000	56.5000	56.5000	53.4000	54.6000	53.7000	54.0000	54.2000	47.5000
11	59.3000	55.2000	56.7000	53.9000	52.9000	56.4000	52.1000	54.8000	52.6000	51.2000
12	61.3000	54.1000	56.1000	50.3000	55.7000	53.2000	49.4000	50.9000	51.9000	53.4000
13	55.3000	51.1000	52.2000	46.7000	52.2000	54.6000	59.4000	59.7000	55.9000	54.5000
14	53.5000	53.3000	53.9000	47.5000	52.3000	48.8000	59.1000	48.7000	54.2000	58.9000
15	51.9000	56.5000	51.4000	48.0000	53.1000	49.5000	50.8000	53.5000	60.2000	56.5000
16	53.1000	56.0000	50.0000	44.7000	56.3000	51.3000	51.7000	55.2000	59.4000	62.1000
17	50.0000	52.7000	49.9000	53.2000	53.7000	54.8000	61.6000	55.2000	51.5000	56.3000
18	46.9000	54.6000	48.4000	53.0000	54.0000	50.8000	62.3000	53.0000	56.6000	49.2000
19	55.7000	50.1000	51.4000	47.7000	49.7000	48.9000	63.6000	47.6000	58.0000	48.2000
20	51.5000	51.8000	50.9000	54.8000	51.0000	47.1000	49.0000	62.0000	46.9000	52.5000
21	53.8000	53.1000	52.9000	56.5000	57.1000	45.7000	57.1000	55.1000	55.0000	50.2000
22	56.4000	54.8000	53.0000	55.9000	51.0000	46.0000	57.8000	56.1000	59.0000	47.4000
23	48.1000	50.8000	51.7000	53.0000	54.8000	45.5000	53.6000	62.9000	51.3000	60.0000
24	51.6000	51.1000	53.4000	49.5000	50.0000	44.0000	52.4000	59.7000	60.2000	62.8000
25	49.2000	52.1000	51.6000	49.0000	48.2000	46.7000	50.6000	64.0000	50.0000	63.6000
26	49.2000	52.6000	52.1000	49.5000	52.3000	48.6000	55.0000	58.4000	56.6000	63.4000
27	48.8000	51.4000	54.1000	50.0000	47.2000	51.0000	58.8000	48.4000	48.7000	63.9000
28	47.4000	53.8000	53.0000	51.9000	51.4000	57.0000	57.2000	59.3000	48.2000	63.6000
29	50.5000	51.8000	50.3000	49.5000	46.8000	51.3000	61.2000	50.4000	52.9000	64.8000
30	50.1000	54.2000	50.1000	49.1000	53.9000	48.8000	61.5000	51.4000	49.4000	61.1000

4.5. Obtención numérica de los Mapas de Ruido

4.5.1. Datos de Entrada

- Tiempo máximo en segundos: $T_1 = 2700$ y $T_2 = 600$, los cuales equivalen a 45 y 10 minutos.
- Región del dominio computacional en metros: $\Omega = [0, 30] \times [0, 9]$.
- Número de elementos: $N_1 = 90$ y $N_2 = 360$.
- Velocidad del sonido en el aire en metros por segundo: $c = 343$.
- Parámetros de Estabilidad del método de Newmark:

$$\alpha = 0,5 \quad \text{y} \quad \gamma = 0,5$$

- Como condición inicial se toma las presiones experimentales para los 90 y 360 elementos en la sección 4.4.1.
- Por lo discutido en el sección 4.4.2, se considera que el cambio de presión inicial y el término fuente son funciones nulas.
- Se toma como condiciones de contorno las obtenidas en la sección 4.4.3:

Nota 4.5.1 *Se ha tomado por comodidad como unidades los minutos y los decibelios para mostrar las tomas de datos y todos los gráficos que se muestran en este capítulo pero todos los cálculos se han realizado considerando como unidad de tiempo el segundo [Seg] y unidad de presión el pascal [Pa]. Esto debido a que la toma de datos se ha realizado en el sistema internacional.*

4.5.2. Proceso Computacional

Obtenidas las condiciones iniciales y de contorno experimentales, medidas por el sonómetro y almacenadas en una **hoja de cálculo de Excel**, se las ingresa al programa de cálculo construido para el algoritmo de solución del problema de Onda Sonora bidimensional descrito por las ecuaciones (2.16) y (3.20), optimizando los resultados en cuanto a la estabilidad de la solución con los valores adecuados para los parámetros α y γ y de este modo condicionar la convergencia de la solución. Para ello se toma el intervalo de tolerancia $Tol = [p_{min}, p_{max}]$, donde $p_{min} = 40 dB$ y $p_{max} = 80 dB$ son los valores en decibelios para la presión mínima y máxima respectivamente registrados por el Sonómetro. Luego se almacena en una matriz llamada **num** aquellos resultados en el número de iteraciones que no pertenecen al rango de tolerancia, cuyo algoritmo controla la estabilidad numérica de la solución.

Se realiza una comparación de resultados con dos mallas, donde una es un refinamiento de la otra:

- Número de elementos en la dirección x : 15, 30.
- Número de elementos en la dirección y : 3, 6.

Entonces

	Malla N° 1	Malla N°2
Número de nodos Totales	64	217
Número de nodos Internos	56	174
Número de nodos en la frontera	36	72
Número de Elementos	90	360

A continuación se presenta los resultados obtenidos sobre estas mallas, así como la densidad gráfica de los coeficientes de las matrices M y K de la semidiscretización espacial, y los Mapas de Ruidos y el control de estabilidad(**num**).

RESULTADOS GRÁFICOS DEL PROCESO SOBRE 90 ELEMENTOS Y 45 MINUTOS DE DURACIÓN.

En esta sección el proceso dura 45 minutos, con un $\Delta t = 300$ segundos, procesado sobre una malla de 90 elementos triangulares.

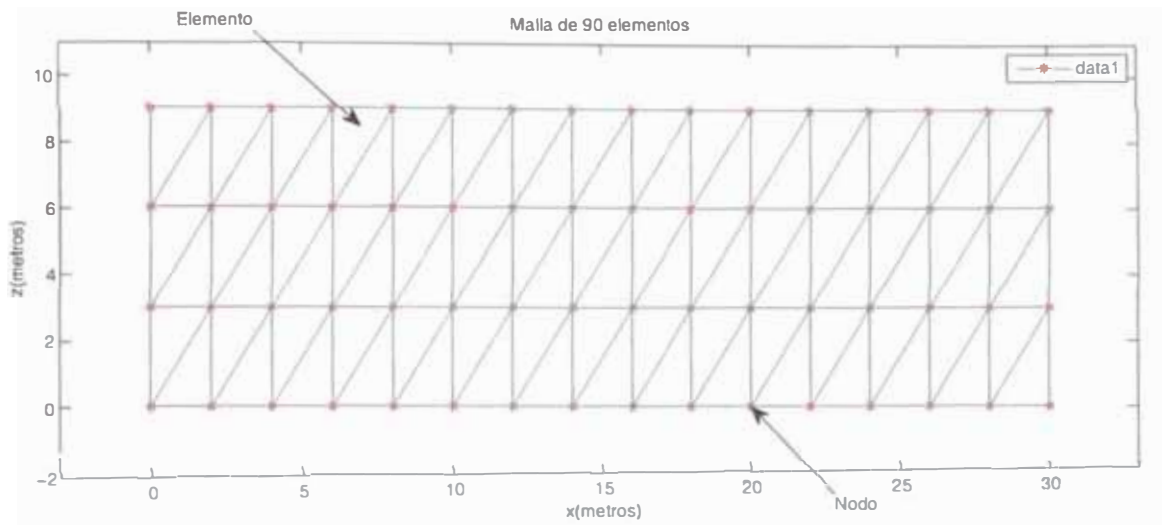


Figura 4.14: Malla de Elementos Finitos Triangular

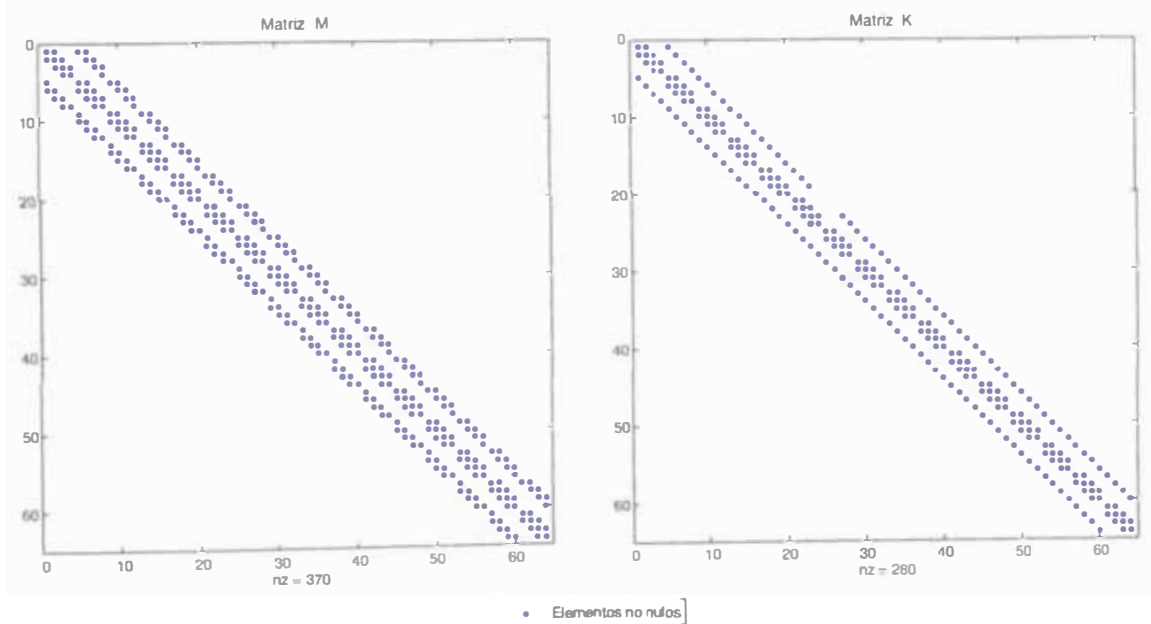


Figura 4.15: Densidad de los coeficientes no nulos de las matrices de M y K

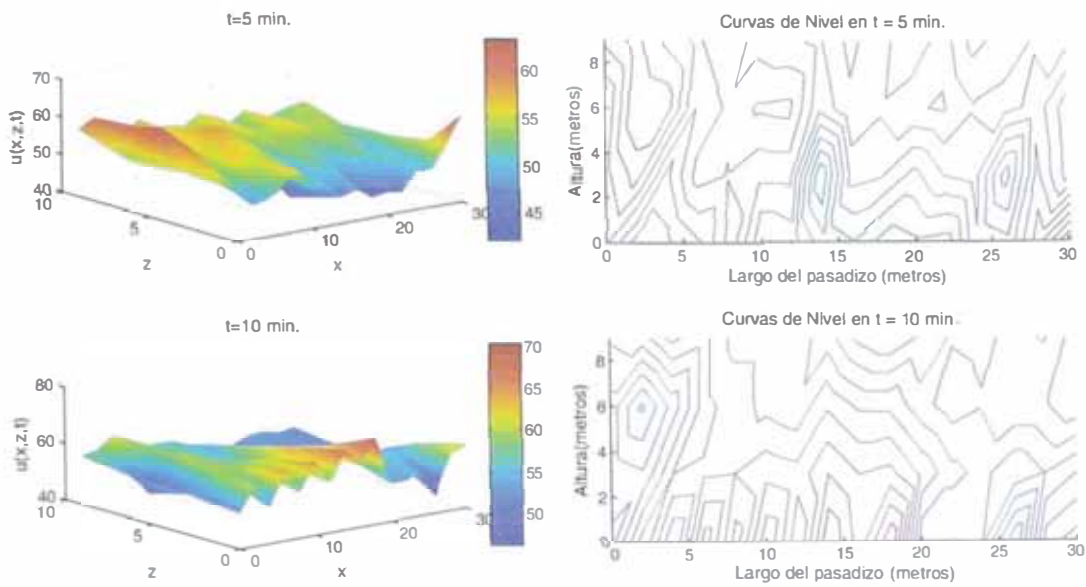


Figura 4.16: Mapas de ruido a 5 min y 10 min de iniciado el proceso computacional.

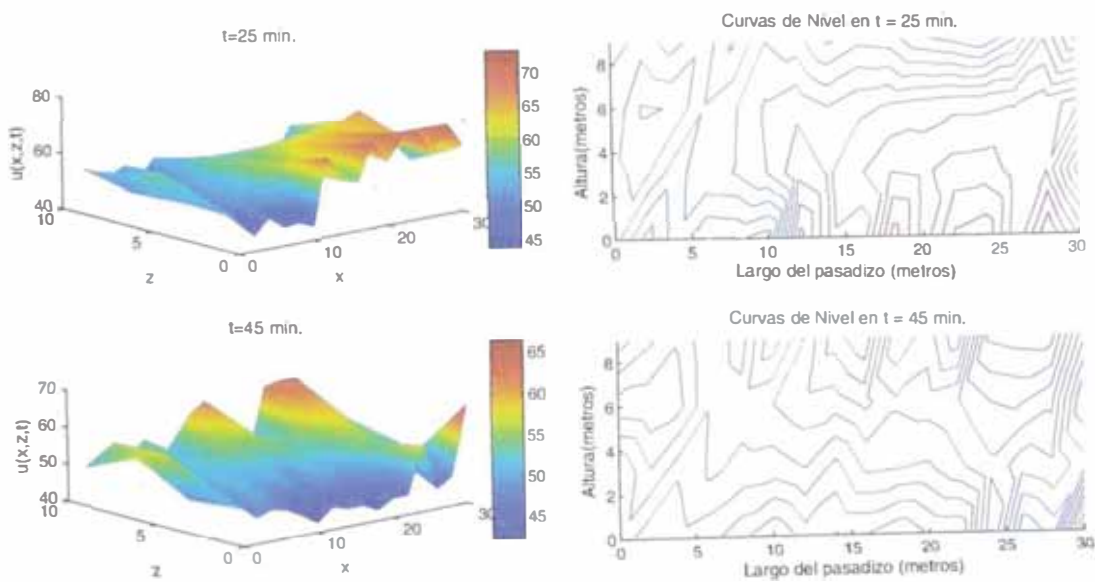


Figura 4.17: Mapas de ruido a 25 min y 45 min de iniciado el proceso computacional.

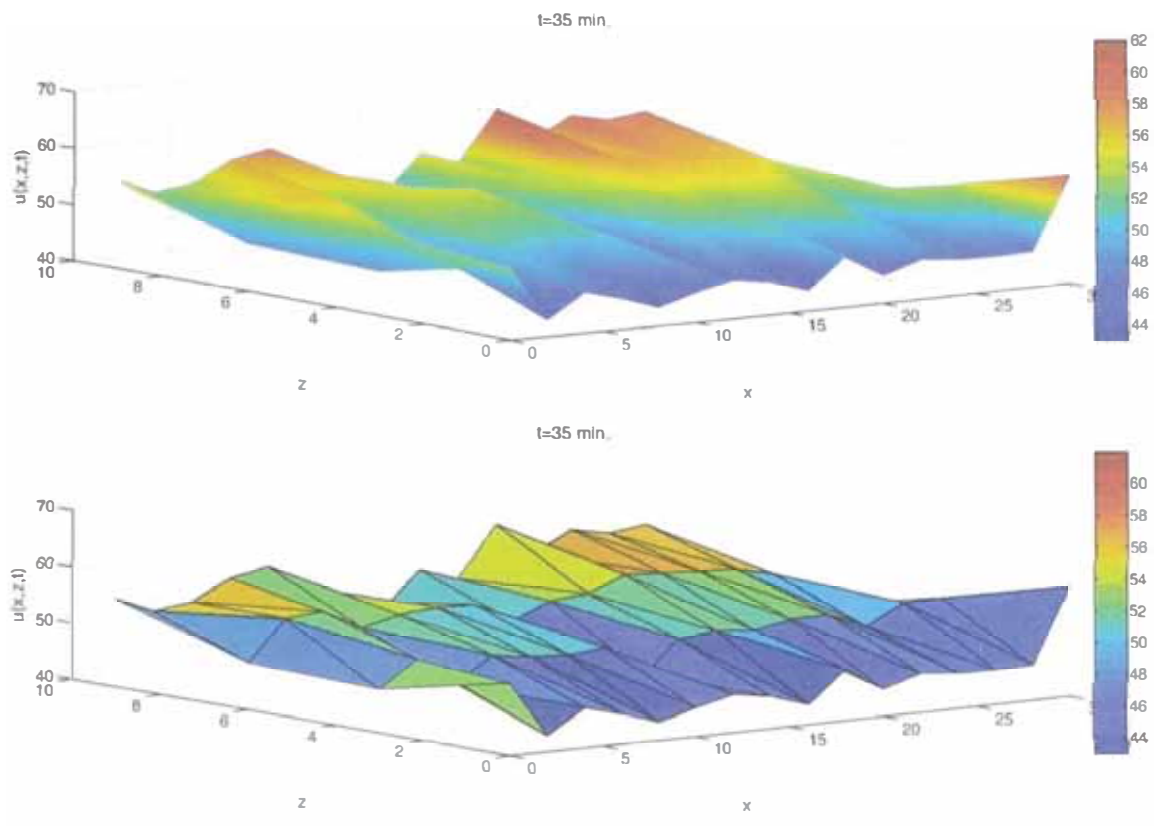


Figura 4.18: Mapa de ruido a 35 min de iniciado el proceso computacional donde se muestra el mallado.

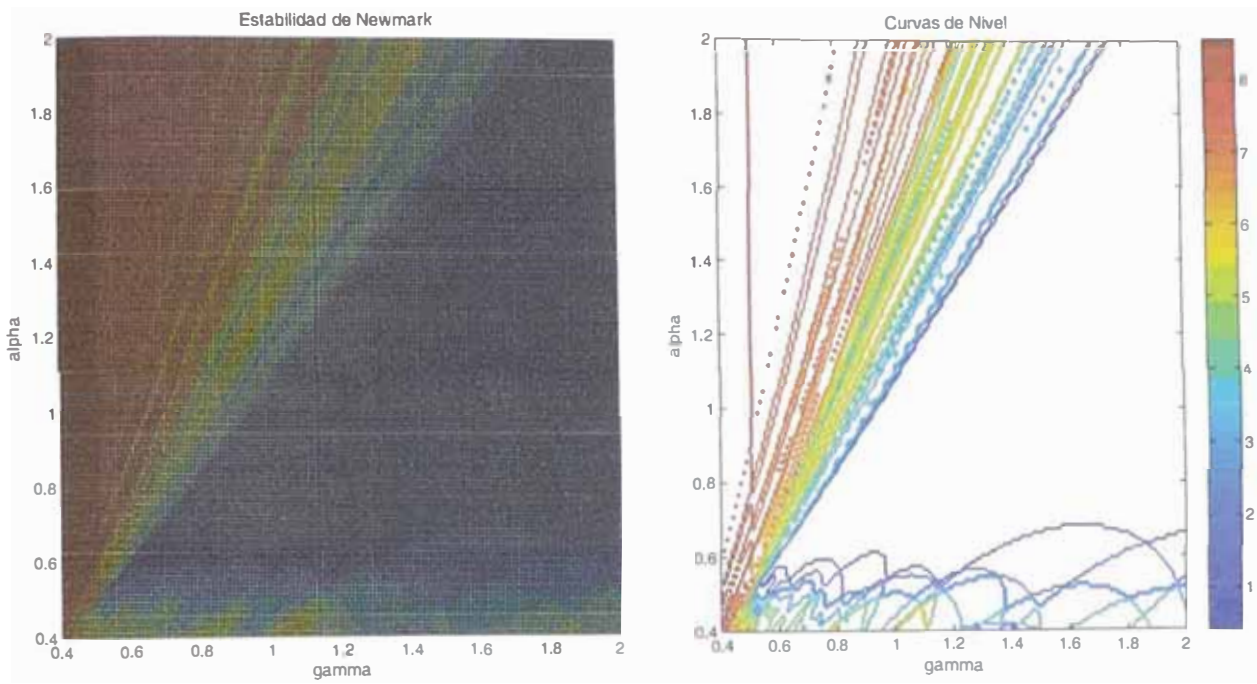


Figura 4.19: Rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros α y γ para 90 elementos y 45 minutos.

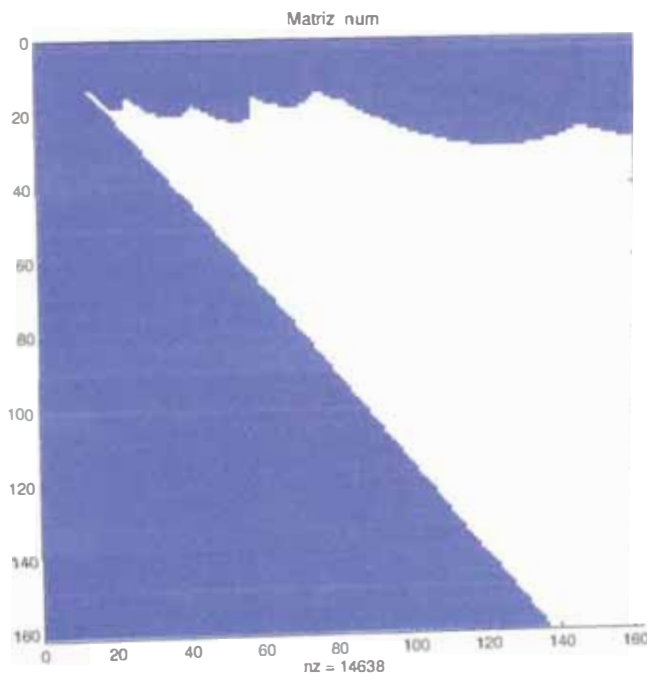


Figura 4.20: Densidad de los valores no nulos de la matriz de estabilidad **num** para 90 elementos y 45 minutos.

RESULTADOS GRÁFICOS DEL PROCESO SOBRE 360 ELEMENTOS Y 45 MINUTOS DE DURACIÓN.

En esta sección el proceso dura 45 minutos, con un $\Delta t = 300$ segundos, igual que en la subsección anterior pero procesado sobre una malla de 360 elementos triangulares.

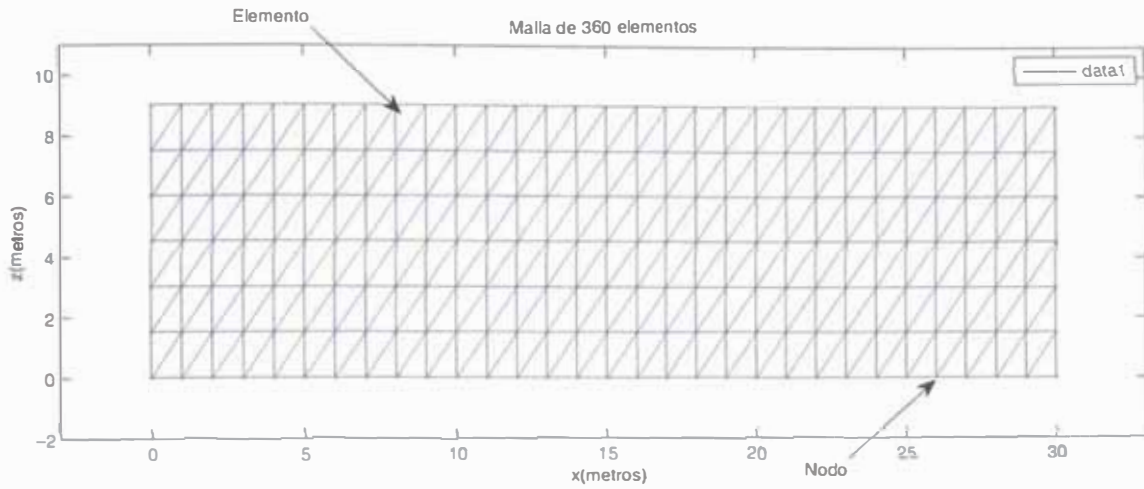


Figura 4.21: Malla de Elementos Finitos Triangular

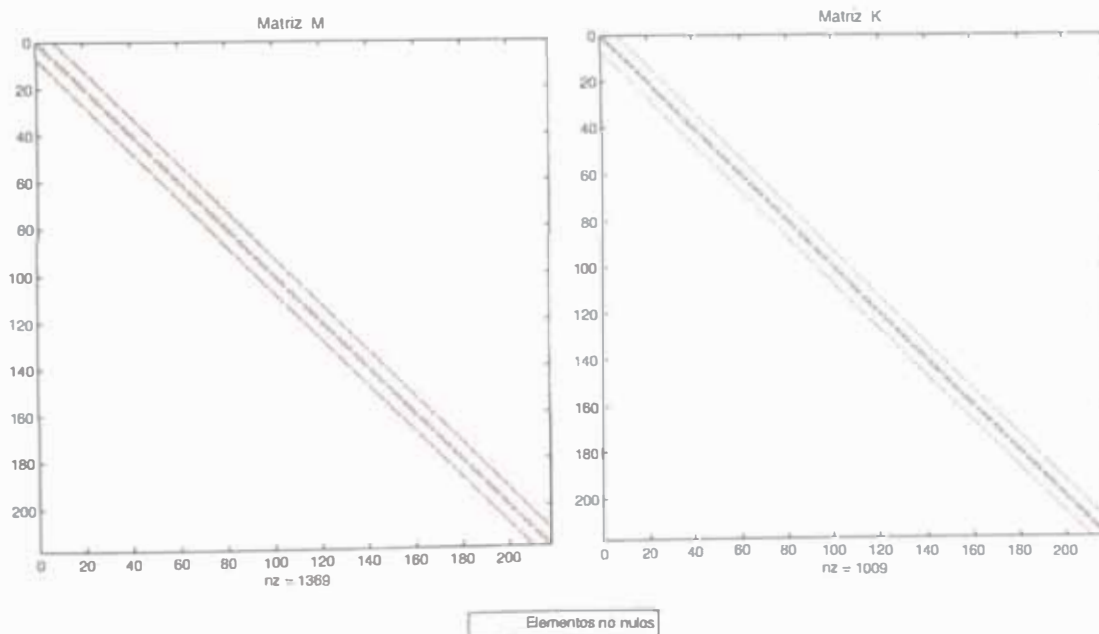


Figura 4.22: Densidad de los coeficientes no nulos de las matrices de M y K

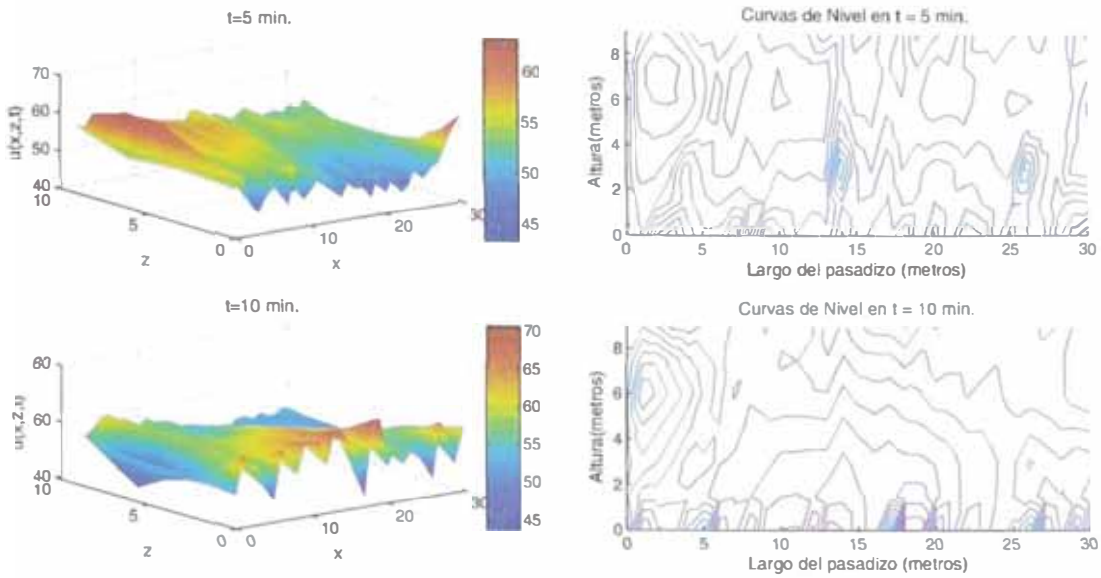


Figura 4.23: Mapas de ruido a 5 min y 10 min de iniciado el proceso computacional

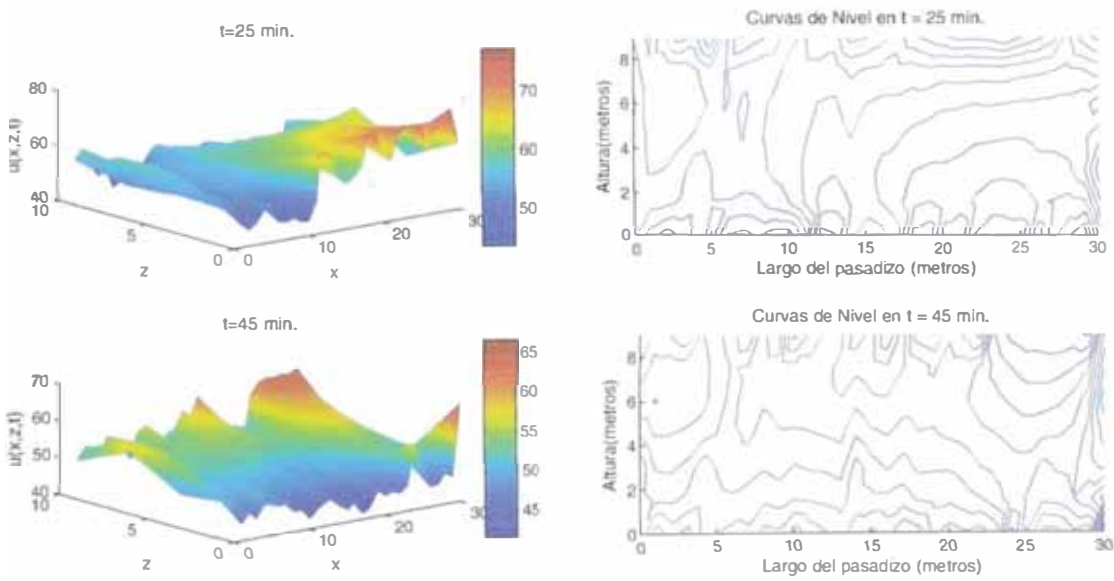


Figura 4.24: Mapas de ruido a 25 min y 45 min de iniciado el proceso computacional.

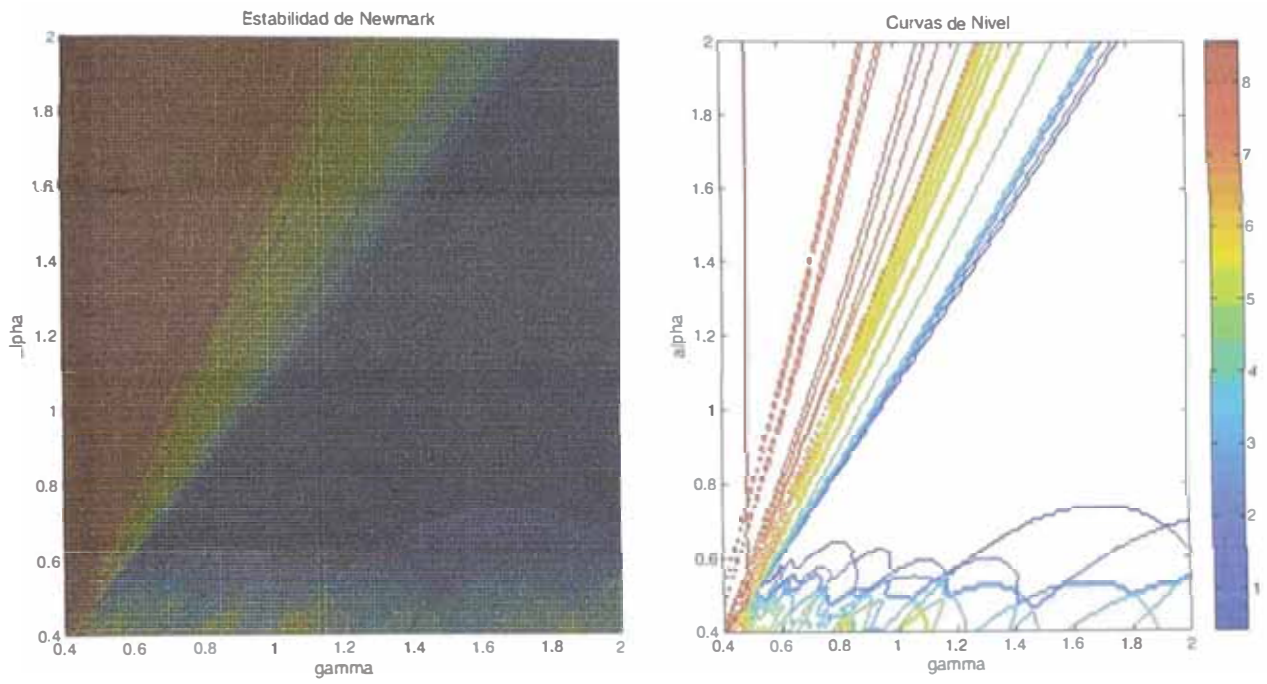


Figura 4.25: Rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros α y γ para 360 elementos y 45 minutos.

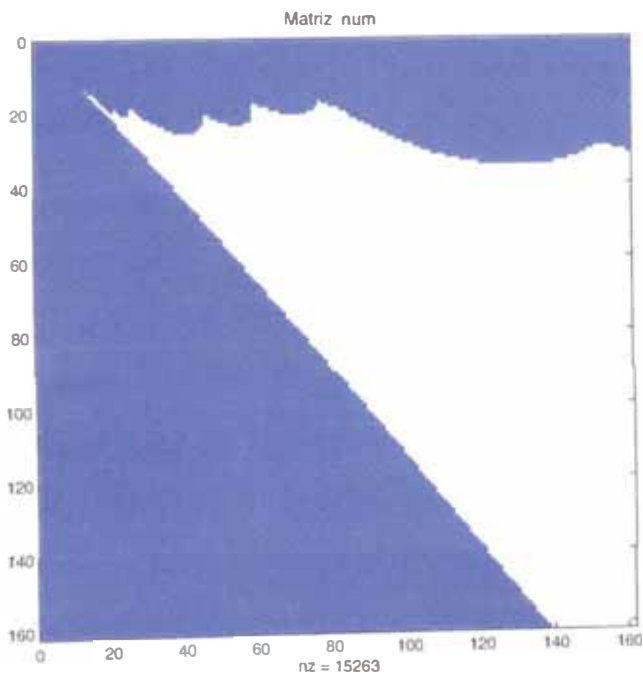


Figura 4.26: Densidad de los valores no nulos de la matriz de estabilidad **num** para 360 elementos y 45 minutos.

OBSERVACIONES

- Se nota que en las figuras (4.14) y (4.21), que el número de elementos de los mallados se encuentran en la proporción de 1 a 4.
- En la figuras (4.15) y (4.22) se ve que las matrices de densidad son tridiagonales es decir que sus elementos no nulos se acumulan alrededor de la diagonal de las matrices.
- Además las figuras (4.16), (4.17), (4.23) y (4.24) muestran el comportamiento del ruido en el área de estudio, llamados **Mapas de Ruido** que son el objetivo principal del estudio de este trabajo. Por la teoría se sabe que los MR (4.23) y (4.24) dan mayor información y más precisa que los MR (4.16) y (4.17).
- Por último las figuras (4.19), (4.20), (4.25), (4.26), (4.31) y (4.32), informan sobre el rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros del método de Newmark.

RESULTADOS GRÁFICOS DEL PROCESO SOBRE 360 ELEMENTOS Y 10 MINUTOS DE DURACIÓN.

Como se desea tener un conocimiento más real del comportamiento ondulatorio del ruido, es que se busca un Δt más pequeño. Para encontrarlo habría sido necesario tomar una gran data para las condiciones de contorno pero esto se evitó al considerar los pasadizos como problemas independientes en una dimensión. Es decir sólo fue necesario tomar las mediciones de los extremos de los pasadizos cada 10 segundos durante 10 minutos. Luego estos datos se ingresan en el programa implementado para una dimensión, obteniéndose las condiciones de contorno necesarias. Con esta partición temporal mucho más pequeña se obtiene una mejor aproximación a lo que sucede en la realidad como se predice en el **análisis de convergencia**. Esto se observa en el comportamiento más suave de los **MR** de las figuras 4.29 y 4.30.

Al igual que en el programa de dos dimensiones, se busca los valores de α y γ que establezcan el programa en una dimensión, lo cual se muestra en las figuras 4.27 y 4.28.

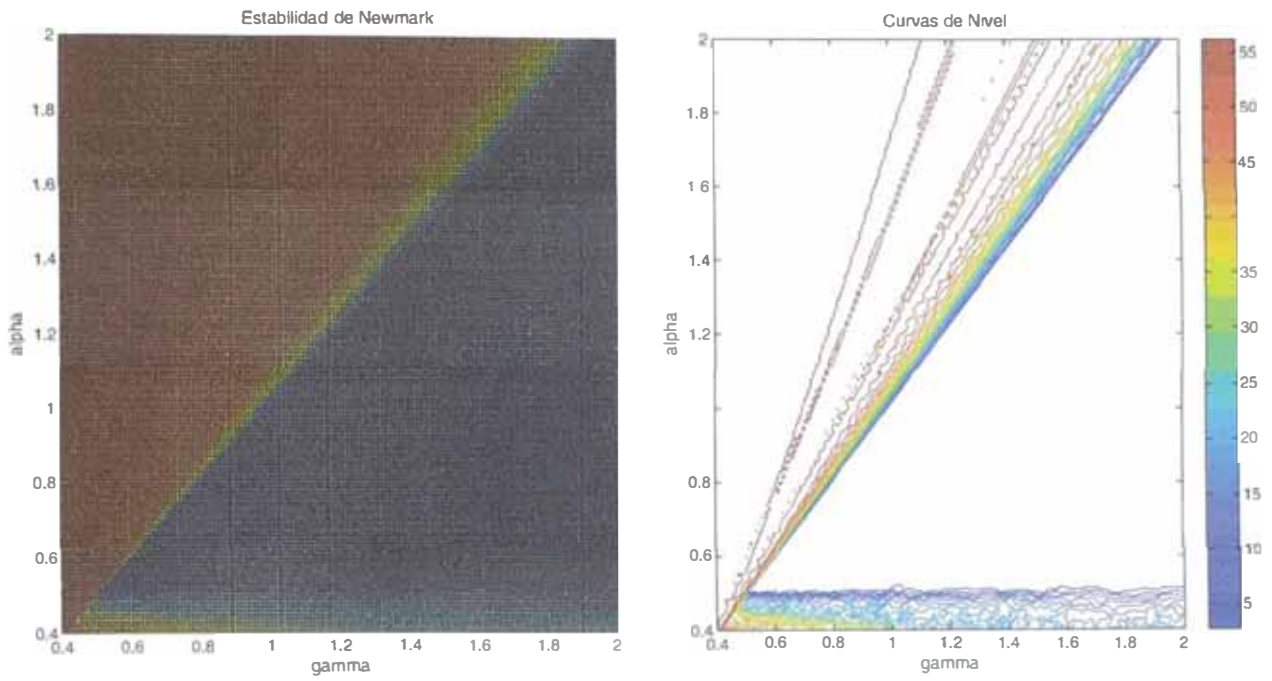


Figura 4.27: Rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros α y γ en 1D.

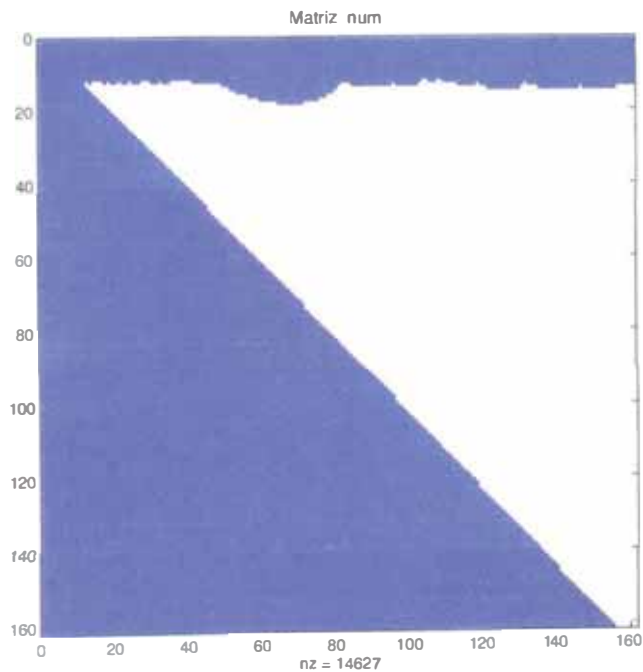


Figura 4.28: Densidad de los valores no nulos de la matriz de estabilidad **num** en 1D.

A continuación se muestra los mapas de ruido y su matriz de estabilidad num sobre un mallado de 360 elementos triangulares:

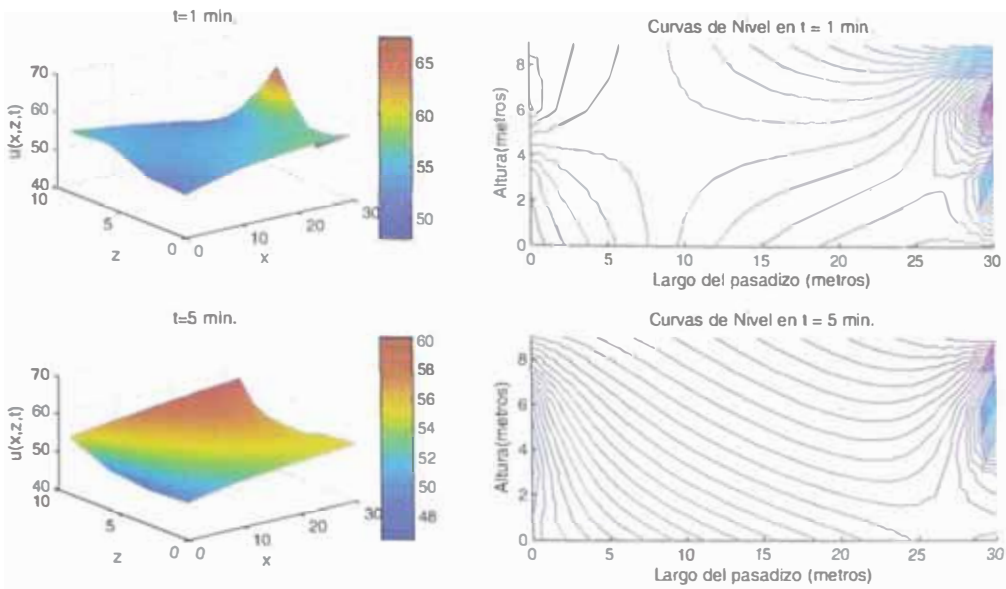


Figura 4.29: Mapas de ruido a 1 min y 5 min de iniciado el proceso computacional.

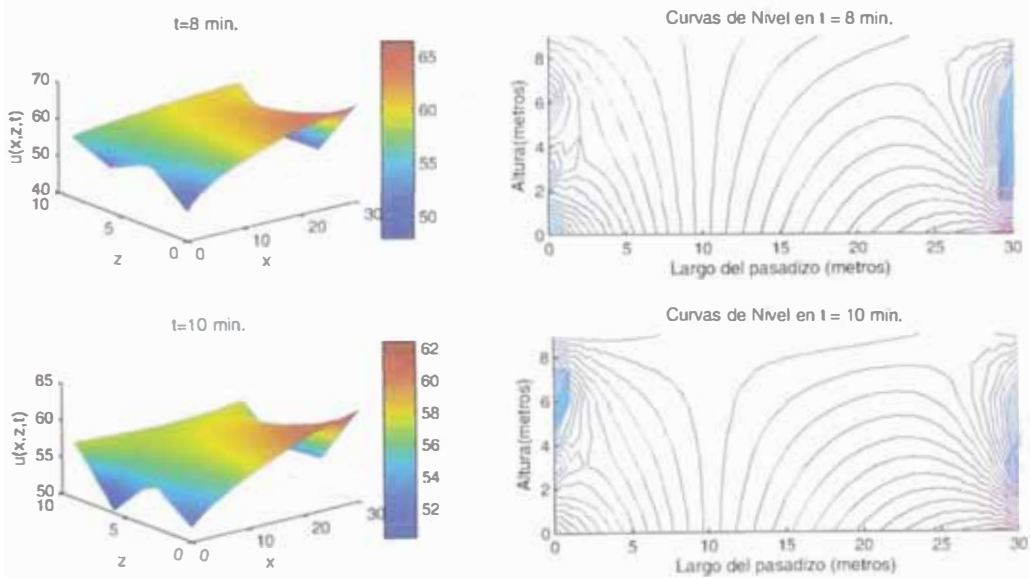


Figura 4.30: Mapas de ruido a 8 min y 10 min de iniciado el proceso computacional.

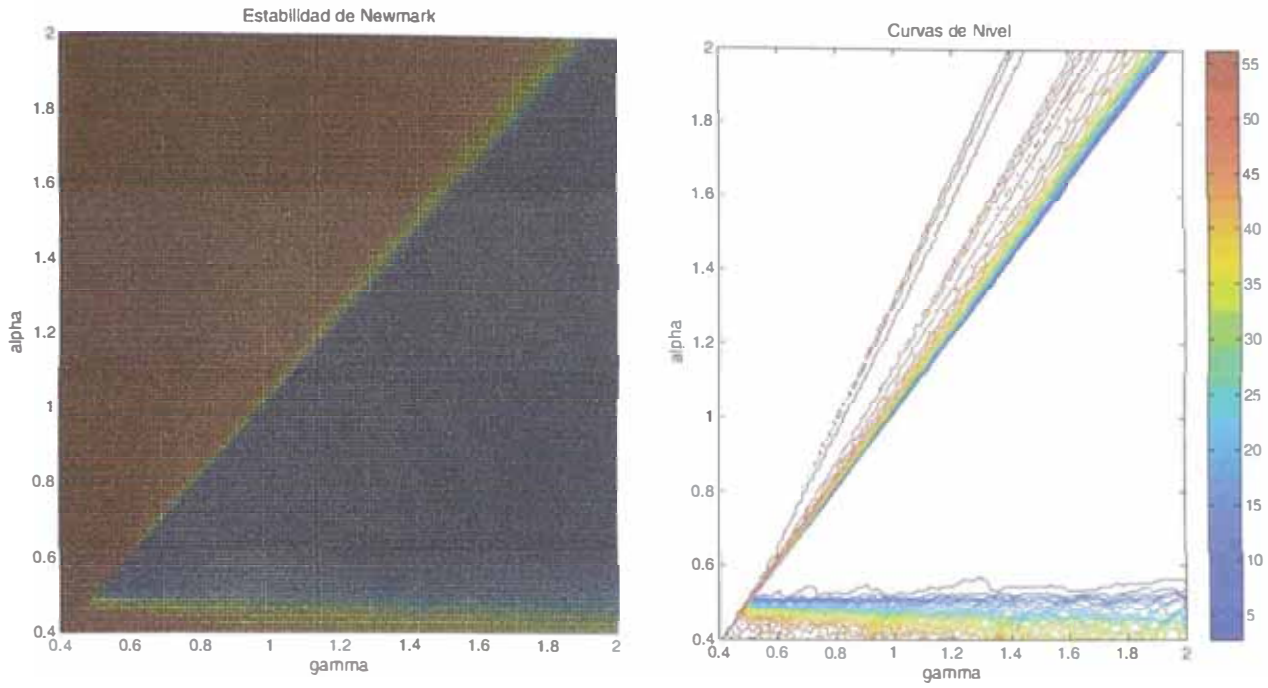


Figura 4.31: Rango de estabilidad respecto al número de iteraciones al variar los parámetros α y γ para 360 elementos y 10 minutos.

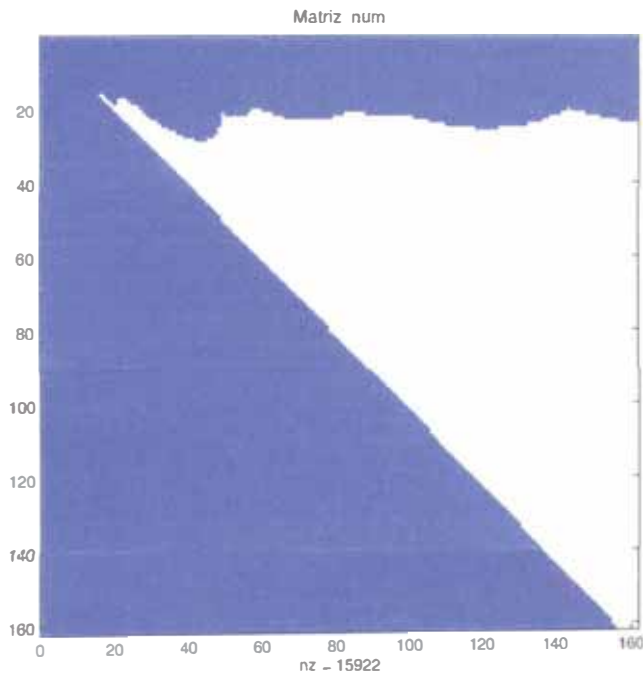


Figura 4.32: Densidad de los valores no nulos de la matriz de estabilidad **num** para 360 elementos y 10 minutos.

NIVEL DE PRESIÓN EN LOS MAPAS DE RUIDO.

En esta sección se busca especificar los valores de nivel de presión de las isosónicas para las dos mallas de 90 y 360 elementos y sus respectivos refinamientos temporales.

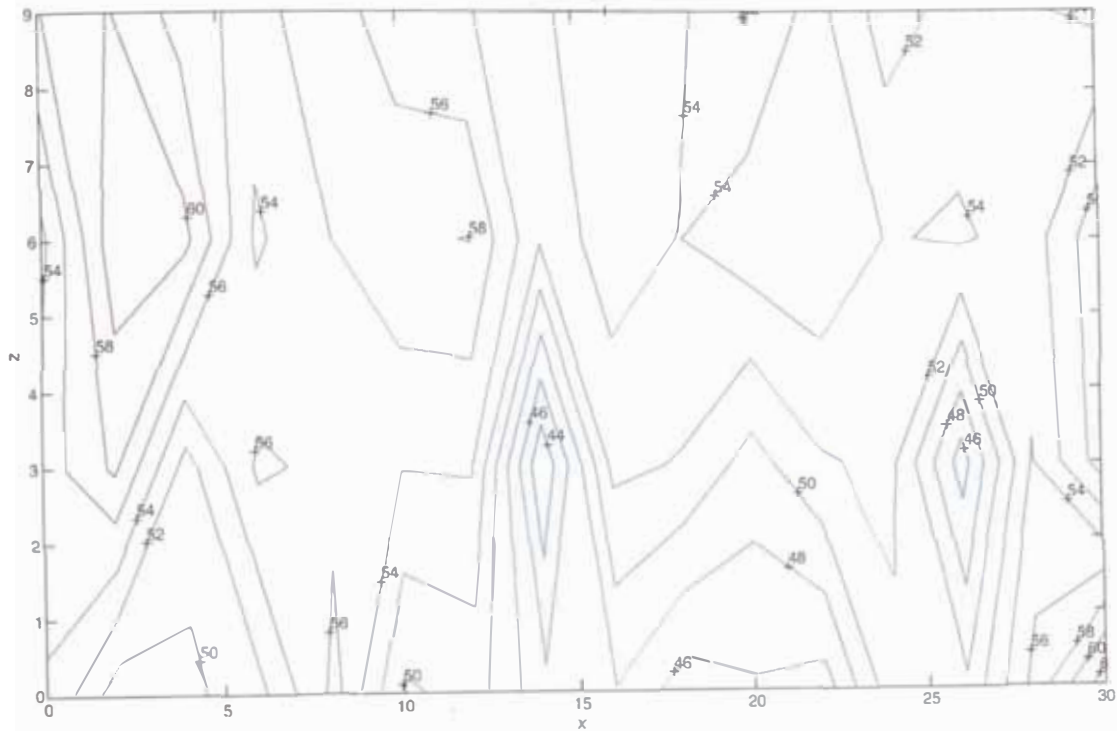


Figura 4.33: Mapa de ruido para 90 elementos y 45 minutos.

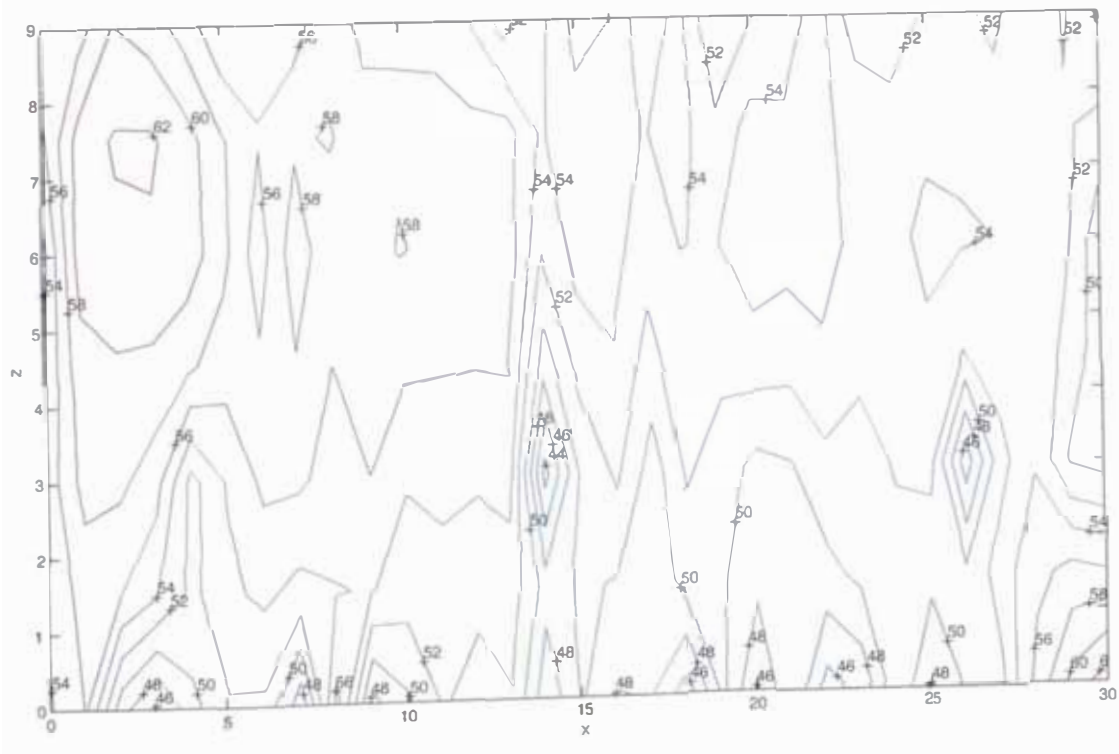


Figura 4.34: Mapa de ruido para 360 elementos y 45 minutos.

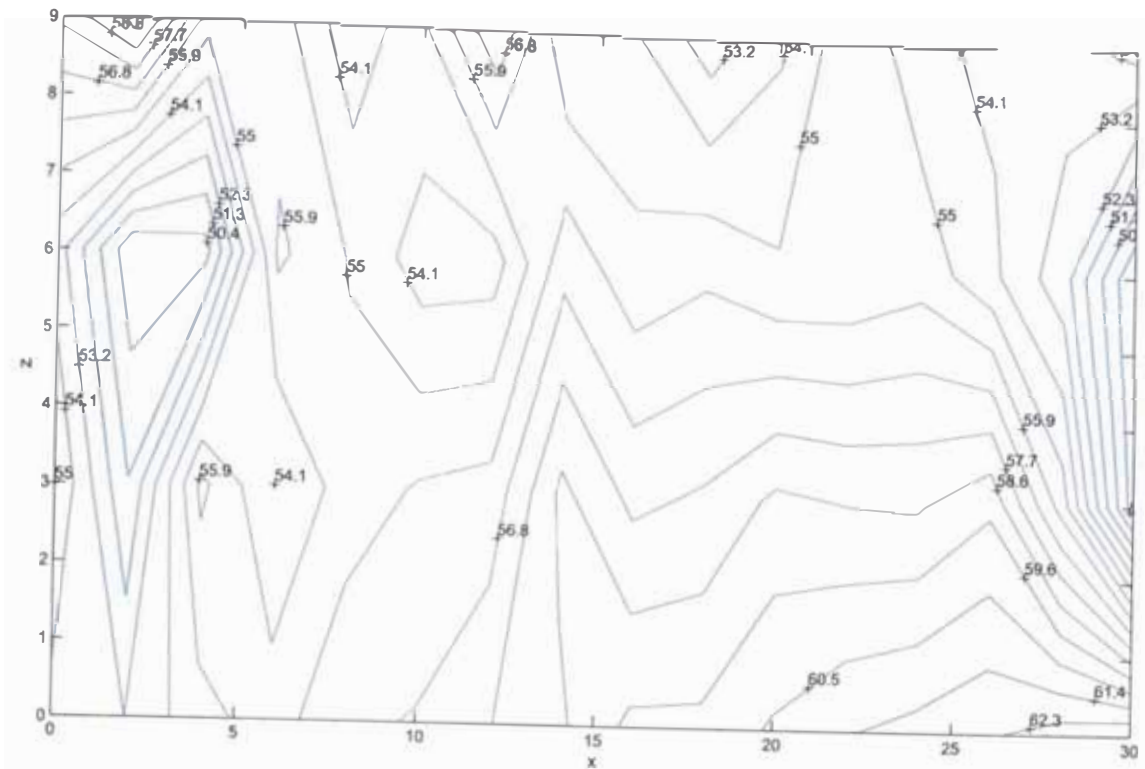


Figura 4.35: Mapa de ruido para 90 elementos y 10 minutos.

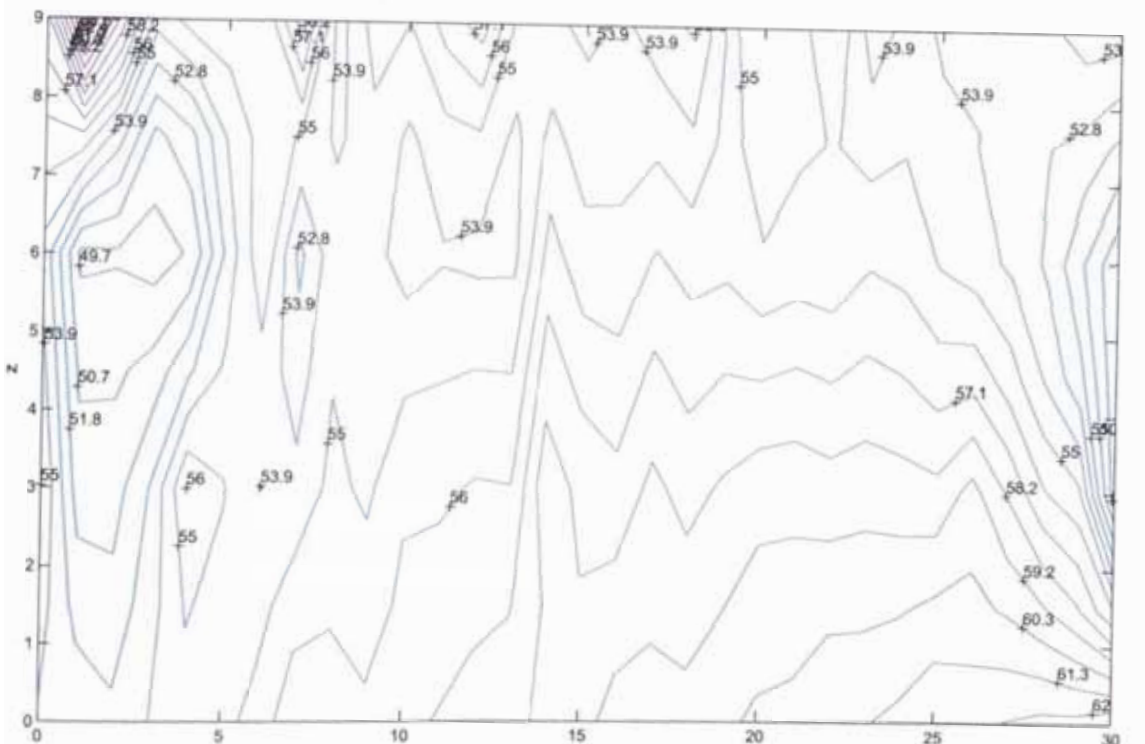


Figura 4.36: Mapa de ruido para 360 elementos y 10 minutos.

Con estos últimos resultados se completa la obtención del Mapa de Ruido del dominio computacional ubicado en el interior de la Facultad de Ciencias, donde se puede observar que se cumple la norma ambiental acústica.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y TRABAJOS

FUTUROS

1. En este trabajo se ha abordado el problema de la propagación del ruido, para la construcción de MR en 2D, se demostró que la ecuación que gobierna este fenómeno es una EDPHL, conocida como Onda Sonora.
2. La solución de este problema se resuelve en sentido clásico, donde se encuentran algunas dificultades relacionadas a la determinación de la solución explícita, y por tal razón se aborda el proceso de solución en forma débil o variacional.
3. Se establecieron las condiciones de existencia y unicidad de solución del problema variacional evolutivo basado en el teorema de la Desigualdad de la Energía.
4. En primer lugar se obtiene la solución aproximada del problema diferencial mediante un esquema de Diferencias Finitas y luego se aproxima el problema variacional hiperbólico mediante un esquema de Galerkin explícito con Elementos Finitos e interpolación lineal. Asimismo se hizo una comparación de los dos esquemas numéricos, donde se pudo observar que se obtiene mayor precisión con el MEF, cuyo refinamiento temporal no depende del refinamiento espacial y el esquema genera estabilidad, mientras que con el método de Diferencias Finitas para obtener la estabilidad del esquema se requiere de la dependencia de ambos parámetros de refinamiento, es decir $\Delta t = \Delta x/|c|$, donde c depende de la presión y la densidad del aire.
5. Se analiza teóricamente la convergencia de ambos esquemas numéricos y sus órdenes de convergencia. Para el esquema de Diferencias Finitas, el orden de

convergencia es $(2, 2)$. Y para el segundo esquema: la semidiscretización espacial por Elementos finitos es $\mathcal{O}(h^1)$, en particular en 1D es $\mathcal{O}(\Delta x)$; y la discretización temporal con el Método de Newmark es $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ cuando $\alpha = 0,5$ y $\mathcal{O}(\Delta t^1)$ cuando $\alpha \geq 0,5$.

6. Este trabajo aporta una manera sencilla y económica de obtener un **MR** con un sólo Sonómetro, además de la forma óptima de obtener una base de datos experimental para ser utilizada como condiciones iniciales y de contorno en el desarrollo del problema, en estudio, de esta Tesis.
7. La importancia del modelo matemático utilizado como generador del MR es por la facilidad de visualizar gráficamente el comportamiento de la propagación del ruido mediante las **curvas isosónicas** de los MR (4.33), (4.34), (4.35) y (4.36) .
8. Para la optimización de los resultados de simulación se traza el rango de estabilidad basado en la variación de los parámetros α y γ , lo que se muestra en las figuras (4.19), (4.25), (4.27) y (4.31) , esto es para obtener resultados coherentes con la realidad, el cual indica qué valores son apropiados para dichos parámetros.
9. Este trabajo es de gran interés en la actualidad, porque ayuda a mejorar el nivel de vida de las personas, en sus ambientes de trabajo, ocio, estudio, etc. Motivo por el cual se hizo este estudio para determinar el MR en una zona de la FC-UNI relacionada a los ambientes interiores del pabellón R1, cuyos resultados cumplen con las normas de presión sonora, en el que se indica el índice de ruido adecuado entre 40 y 80 decibelios. Lo cual se puede apreciar en las figuras (4.16), (4.17), (4.18), (4.23), (4.24), (4.29) y (4.30).
10. La aportación de la Tesis contribuye al conocimiento científico, tecnológico e innovador.
11. Esta metodología se puede aplicar para el estudio de la propagación del ruido en tres dimensiones espaciales y en dominios no acotados. Asimismo mejorar los esquemas de aproximación con elementos finitos utilizando polinomios de interpolación de mayor grado, y aplicar en problemas no lineales generados en el análisis de materiales acústico, lo cual se tiene planificado para trabajos futuros de investigación.

Bibliografía

- [Asmar, 2004] NAKHLÉ H. ASMAR - Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problemas - Pearson Prentice Hall - Second Edition - Pag. 525 - 532 - 2004.
- [Brenner, 2000] SUSSANE C. BRENNER - The Mathematical Theory of Finite Element Methods - Springer - Third Edition - 2000.
- [Brezis, 2010] HAIM BREZIS - Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations - Springer - 2010.
- [Burden, 2004] RICHARD L. BURDEN - Análisis numérico - Sétima edición - 2004.
- [Chiba, 2012] FUMIHIRO CHIBA - Stability and Convergence theorems for Newmarks method - <http://es.scribd.com/doc/18679477/Stability-and-Convergence-theorems-for-Newmarks-method> - 2012.
- [Ciarlet, 1979] PHILIPPE G. CIARLET - The Finite Element Method for Elliptic Problems- Studies in mathematics and its applications - Volume 4 -Second Edition 1979.
- [Evans, 1970] LAWRENCE C. EVANS - Partial Differential Equations - Graduate Studies in Mathematics - American Mathematical Society - Volume 19 - 1997.
- [Haberman, 1987] RICHARD HABERMAN - Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problemas - Prentice Hall - Second Edition - Pag. 509 - 511 - 1987.
- [Íorio, 1999] VALERIA ÍORIO - EDP Un curso de graduación - Colección Textos del IMCA - 1999.

- [Ireneo, 2004] ALONSO IRENEO PERAL - Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales - Departamento de Matemáticas - Universidad Autónoma de Madrid - Segunda Edición 2004.
- [Johnson, 1987] CLAES JOHNSON - Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method -Cambridge University Press - 1987.
- [Kreysig, 2003] ERWIN KREYSIG - Matemáticas avanzadas para ingeniería - Limusa Wiley - Tercera Edición, Vol 2, pag. 124 - 134 - 2003.
- [Kreysig, 1978] ERWIN KREYSIG - Introductory Functional Analysis with Applications - Wiley & Sons - 1978.
- [Kwon, 1997] YOUNG W. KWON - The Finite Element Method using MATLAB - CRC MECHANICAL ENGINEERING SERIES - 1997.
- [Lages, 1998] ELON LAGES LIMA - Algebra Lineal - IMCA - 1998.
- [Majid, 2009] ABDUL MAJID WAZWAZ - Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory - Springer 2009.
- [Mantilla, 2009] MANTILLA IRLA, MUNGUÍA JONATHAN A. - Método Upwind para Sistemas de Conservación Lineal - Seminario de Aplicada Pura I - FC-UNI - 2009.
- [Mantilla, 2010] MANTILLA IRLA, MUNGUÍA JONATHAN A. - Análisis de estabilidad para un esquema numérico de volúmenes finitos - Seminario de Aplicada Pura II - FC-UNI - 2010.
- [Mantilla, 2011] MANTILLA IRLA, MUNGUÍA JONATHAN A. - Metodo de D'Alambert con Integración de Simpson para resolver el problema de la Onda Sonora - XV Encuentro de Física - FC-UNI - 2011.
- [Mijáilov, 1978] V. P. MIJÁILOV - Ecuaciones diferenciales en derivadas Parciales - Editorial Mir Moscú 1978.
- [Möser, 2009] MICHAEL MÖSER - JOSÉ LUIS BARROS - Ingeniería Acústica - Teoría y Aplicaciones - 2nda Edición - Springer 2009.
- [Petrovski, 1960] I. G. PETROVSKI - Lecciones sobre ecuaciones en DERIVADAS PARCIALES - Ciencia Tecnica Instituto del Libro - Tercera Edición 1960.

- [Piñeros, 2009] JUAN CARLOS PIÑEROS - Sobre la solución numérica de la ecuación de onda - Artículo publicado: 8 setiembre de 2009 - Universidad Nacional de Colombia.
- [Quarteroni, 2007] ALFIO QUARTERONI - Numerical Mathematics - Second Edition - Springer - 2007.
- [Reddy, 1993] J. N. REDDY - An Introduction to the Finite Element Method - Mc Graw - Hill - Second Edition - 1993.
- [Rudin, 1970] WALTER RUDIN - Real and Complex Analysis - Mc Graw - Hill - 1970.
- [Shames, 1985] IRVING H. SHAMES - La Mecánica de los Fluidos - Mc Graw - Hill - 1985.
- [Tijonov, 1972] A. TIJONOV, A SAMARSKY - Ecuaciones de la Física Matemática - Editorial MIR - Primera Edición - Moscú 1972.
- [Thomas, 1995] J. W. THOMAS - Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods - Springer 1995.
- [Vicente, 1991] SANTIAGO DE VICENTE - ELENA IZAGUIRRE - Análisis Numérico de las propiedades de propagación de algunos métodos de elementos finitos para ecuaciones de onda 2-D - Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 7, 2, 163-191(1991).
- [Young, 2005] WON YOUNG YANG - Applied Numerical Methods Using MATLAB - Wiley Interscience - Pag. 417 - 419 - 2005.
- [Zuazua, 2003] ENRIQUE ZUAZUA - Ecuaciones en Derivadas Parciales - <http://www.uam.es/personal-pdi/ciencias/ezuazua/docencia.html>. - 2003.
- [Zuazua, 2007] ENRIQUE ZUAZUA - Métodos Numéricos de resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales - Departamento de Matemáticas - Universidad Autónoma de Madrid 2007.