

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL



ANALISIS DEL FLUJO PLASTICO EN ESTRUCTURAS
DE CONCRETO ARMADO

TESIS

Para Optar el Título Profesional de:

INGENIERO CIVIL

Jorge Luis Palomino Tamayo

LIMA-PERU
2004

INDICE

CAPITULO 1. INTRODUCCION	1
1.1 Justificación	1
1.2 Alcances y Objetivos	1
1.3 Organización de la Tesis	2
CAPITULO 2. PROPIEDADES DEL CONCRETO	4
2.1 Propiedades Mecánicas	4
2.1.1 Resistencia a la Compresión, Módulo de Elasticidad y Módulo de Ruptura	4
2.2 Deformación en el Tiempo	8
2.2.1 Flujo Plástico	9
2.2.2 Contracción	11
2.2.3 Relajación	12
2.2.4 Ecuación de Deformación	12
2.3 Coeficiente de Envejecimiento χ	13
2.3.1 Ecuación para el Coeficiente de Envejecimiento χ	14
2.3.2 Función de Relajación	15
2.3.3 Método Paso a Paso	17
2.4 Sección Transformada	20
CAPITULO 3. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN SECCIONES NO FISURADAS	22
3.1 Deformaciones en Secciones Compuestas	22
3.2 Cambios de Esfuerzo en el Concreto y en el Acero de Refuerzo Durante el Periodo t_0 a t	24
3.3 Consideraciones en el análisis de secciones de concreto armado	27
3.4 Movimiento de Apoyos en Estructuras	29
CAPITULO 4. ANALISIS DE FUERZAS DE RESTRICCIÓN DE FLUJO PLÁSTICO	32
4.1 Principios de Trabajos Virtuales en el Análisis de Marcos Estructurales	32

4.1.1	Definición de la Función de Forma	32
4.1.2	Formulación de las Funciones de Forma	33
4.2	Fuerzas de Restricción Artificial	37
4.2.1	Efectos de Fuerza Axial	38
4.2.2	Efectos de Flexión y Corte	39
4.2.3	Vector de Fuerzas	42
CAPITULO 5. ANALISIS DE ESTRUCTURAS CONSIDERANDO AGRIETAMIENTO		43
5.1	Consideraciones Básicas	43
5.1.1	Estado 1	45
5.1.2	Estado 2	46
5.1.3	Coefficiente de Interpolación ζ	48
5.2	Predicción de Deflexiones en Vigas Continuas	49
5.2.1	Modelo Modificado ACI (435)	50
5.2.2	Modelo ACI de 1971	50
5.2.3	Modelo CEB - FIP	51
5.2.4	Modelo Simplificado CEB - FIP	52
5.3	Análisis de Pórticos Planos	53
CAPITULO 6. APLICACIONES		59
6.1	Estudio de Deflexiones Diferidas	59
6.2	Redistribución de Esfuerzos con el Tiempo	66
6.2.1	Consideraciones Básicas	66
6.2.2	Compresión Pura	67
6.2.3	Flexo - Compresión	70
6.3	Análisis de Vigas Continuas	74
6.3.1	Viga con Voladizo	74
6.3.2	Porción de Pórtico	76
6.4	Análisis de Viga Continua con Asentamiento	81
CAPITULO 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		86
ANEXO		89
BIBLIOGRAFIA		108

LISTA DE FIGURAS

- Fig. 2.1 Curva esfuerzo - deformación para el concreto. $E_c(t_0)$ = módulo secante de elasticidad en el tiempo t_0 .
- Fig. 2.2 Incremento de la resistencia a la compresión con el tiempo para un espécimen de concreto con $f'_{c(28)} = 27.57$ MPa, $a = 4$, $\beta = 0.85$ y $t = 30000$ días.
- Fig. 2.3 Incremento del módulo de ruptura con el tiempo para un espécimen de concreto con $f'_{c(28)} = 27.57$ MPa, $a = 4$, $\beta = 0.85$ y $t = 30000$ días.
- Fig. 2.4 Incremento del módulo de elasticidad con el tiempo para un espécimen de concreto con $f'_{c(28)} = 27.57$ MPa, $a = 4$, $\beta = 0.85$ y $t = 30000$ días.
- Fig. 2.5 Coeficiente de flujo plástico para un espécimen de concreto estándar bajo condiciones ambientales de servicio.
- Fig. 2.6 Deformación por contracción para el mismo espécimen de la Fig. 2.5.
- Fig. 2.7 Esfuerzo versus tiempo y deformación versus tiempo de una fibra de concreto sujeta a un esfuerzo uniaxial de magnitud variable en el tiempo.
- Fig. 2.8 Variación del esfuerzo con el tiempo debido a una deformación ϵ_c impuesta en t_0 y mantenida constante (fenómeno de relajación).
- Fig. 2.9 División de: (a) tiempo en intervalos y (b) esfuerzo en incrementos para un análisis paso a paso.
- Fig. 2.10 Función del coeficiente de envejecimiento χ .
- Fig. 2.11 Función de relajación del concreto.
- Fig. 3.1 Análisis de distribución de esfuerzos en una sección compuesta (a) M , N positivo y (b) distribución de deformación.
- Fig. 3.2 Etapas de análisis de esfuerzos y deformaciones dependientes del tiempo.
- Fig. 3.3 Definición de la nomenclatura usada en las ecuaciones (3.13) y (3.14).
- Fig. 3.4 Desarrollo de las propiedades del concreto con el tiempo.
- Fig. 3.5 Fuerzas dependientes del tiempo causadas por el asentamiento del apoyo central de una viga continua (a) viga continua; (b) reacción en el apoyo central versus el tiempo; la curva A representa la variación de F cuando el asentamiento se introduce rápidamente en t_0 , en la curva B el asentamiento es introducido gradualmente.
- Fig. 4.1 Elemento sometido a fuerza axial.
- Fig. 4.2 Funciones de forma para un elemento sometido a deformación axial.
- Fig. 4.3 Elemento flexional.
- Fig. 4.4 Funciones de forma para el caso de flexión.
- Fig. 4.5 Elemento sometido a fuerzas de restricción artificial.

- Fig. 4.6 Elemento sometido a fuerzas internas debido al flujo plástico del concreto (caso axial).
- Fig. 4.7 Elemento sometido a fuerzas internas debido al flujo plástico del concreto (caso flexional).
- Fig. 5.1 Diversas zonas de esfuerzos y agrietamiento en una viga de concreto reforzado en condición de servicio.
- Fig. 5.2 Cambio del centroide de gravedad con el tiempo para el estado 1.
- Fig. 5.3 Cambio del centroide de gravedad con el tiempo para el estado 2.
- Fig. 5.4 Método simplificado de cálculo de deflexiones (CEB - FIP 1990).
- Fig. 6.1 Viga simplemente apoyada con refuerzo en tensión y compresión.
- Fig. 6.2 Variación de la curvatura interpolada con la luz de la viga.
- Fig. 6.3 Variación de la rigidez axial y a flexión con la luz de la viga 12.
- Fig. 6.4 Redistribución de esfuerzos en la sección central de la viga 12.
- Fig. 6.5 Variación del esfuerzo en el concreto.
- Fig. 6.6 Variación del esfuerzo y deformación del acero.
- Fig. 6.7 Esfuerzo del concreto en columnas.
- Fig. 6.8 Deformación del concreto en columnas.
- Fig. 6.9 Redistribución de esfuerzos con el tiempo en secciones sometidas a tensión y compresión.
- Fig. 6.10 Redistribución de esfuerzos con el tiempo en secciones sometidas a flexión pura.
- Fig. 6.11 Desarrollo de deformaciones con el tiempo en secciones sometidas a carga combinada.
- Fig. 6.12 Viga con voladizo con refuerzo en tensión y compresión variable a lo largo de la luz.
- Fig. 6.13 Variación de la deflexión a lo largo de la viga para $t = \infty$.
- Fig. 6.14 Progreso de la deflexión con el tiempo usando el modelo CEB.
- Fig. 6.15 Geometría de porción de pórtico.
- Fig. 6.16 Detalles de la luz exterior para la viga continua.
- Fig. 6.17 Variación de la curvatura con la longitud.
- Fig. 6.18 Redistribución del diagrama de momentos flectores.
- Fig. 6.19 Viga continua sujeta a asentamiento en su apoyo central.
- Fig. 6.20 Diagrama de momento flector debido al asentamiento δ en B.
- Fig. 6.21 Variación de la reacción interna F respecto a la reacción inicial R_0 .
- Fig. 6.22 Variación de la reacción interna F para diferentes lapsos de duración de asentamiento.



CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 JUSTIFICACION

El comportamiento de las estructuras bajo cargas de servicio es una consideración importante de diseño. Si las secciones son sólo adecuadas para cumplir los requerimientos de resistencia, existe el peligro que aunque sea adecuado el grado de seguridad para afrontar un posible desastre natural, el funcionamiento de la estructura en condición de servicio sea insatisfactorio, como lo demuestran las estructuras que presentan deflexiones excesivas a largo plazo.

En elementos de concreto armado, el aumento de la deflexión con el tiempo es una consecuencia del efecto del flujo plástico, efecto de temperatura y la contracción que se produce en los mismos durante un período de tiempo. Comúnmente en el diseño inicial de una estructura de concreto armado no se toma en cuenta la redistribución en los diagramas de fuerzas a producirse con el tiempo debido a los efectos mencionados anteriormente. Tal vez, esta consideración hasta cierto punto sea despreciable dependiendo de la circunstancia, pero en otros casos su omisión puede conllevar a serios errores en el diseño, reflejados en la etapa de funcionamiento de la estructura.

El presente estudio está enfocado en la influencia que tiene el flujo plástico del concreto en estructuras apertadas determinadas o indeterminadas estáticamente con secciones reforzadas usando varillas de acero corrugado. El análisis no sólo está relacionado al cálculo de deflexiones diferidas; sino también a los efectos que trae la redistribución de esfuerzos internos con el tiempo.

1.2 ALCANCES Y OBJETIVOS

El presente trabajo trata los siguientes puntos:

- Comparar los valores del coeficiente de flujo plástico y deformaciones por contracción calculados por diferentes códigos de diseño.



- Encontrar expresiones que tomen en cuenta la acción del flujo plástico y puedan ser fácilmente acopladas al algoritmo de un programa de análisis estático elástico convencional.
- Determinar la variabilidad de las fuerzas internas en los miembros de estructuras horizontales con apoyos simples o empotrados, así como también la determinación de la deflexión diferida producida en los mismos, considerando diferentes cuantías de refuerzo en la sección.
- Analizar la redistribución de esfuerzos y deformaciones en vigas y columnas de concreto reforzado.
- Estudiar el efecto del flujo plástico en acción conjunta con asentamientos producidos rápidamente o gradualmente en apoyos de estructuras de concreto armado.

1.3 ORGANIZACION DE LA TESIS

El capítulo dos describe el comportamiento de las propiedades del concreto con el desarrollo del tiempo, en este capítulo se define las propiedades mecánicas del concreto simple y se formulan expresiones para determinar las deformaciones adicionales debido al flujo plástico. Además, se explica el método paso a paso para el cálculo de esfuerzos en el tiempo.

En el capítulo tres se deducen fórmulas matemáticas que consideran la influencia del flujo plástico en base a expresiones conocidas de Resistencia de Materiales para el análisis de esfuerzos y deformaciones de secciones de concreto reforzado. Al final del capítulo se estudia la acción del flujo plástico en estructuras continuas que sufren asentamiento en uno de sus apoyos.

En el capítulo cuatro se han desarrollado expresiones para determinar fuerzas de restricción globales de flujo plástico en un miembro cualquiera de un pórtico plano, basándose en el principio de trabajos virtuales y en la resolución de integrales por métodos numéricos mediante la regla de Simpson.



El capítulo cinco describe el acoplamiento de las herramientas definidas anteriormente y las superposiciones realizadas para el cálculo de fuerzas y desplazamientos con el tiempo considerando el efecto de fisuración. Además, se hace una breve referencia de varios modelos de predicción de deflexiones diferidas en vigas continuas propuestas por los códigos de diseño CEB y ACI.

En el capítulo seis se desarrollan aplicaciones numéricas de toda la teoría explicada en los capítulos precedentes. Estructuras convencionales como vigas, columnas y pórticos planos son modelados de una manera muy cercana a la realidad haciendo uso de hojas de cálculo. Las conclusiones y recomendaciones obtenidas de las aplicaciones anteriores se mencionan en el capítulo 7.



CAPITULO 2

PROPIEDADES DEL CONCRETO

2.1 PROPIEDADES MECANICAS

Actualmente, el concreto reforzado es el material más usado en nuestro país en la construcción. Durante décadas se ha investigado la repuesta de las propiedades del concreto simple con el transcurso del tiempo, con la finalidad de simular más cercanamente su comportamiento en condiciones de servicio y su interacción con el acero de refuerzo. Los resultados de las investigaciones han derivado en la formulación de las propiedades mecánicas del concreto como son: el módulo de elasticidad, módulo de ruptura, flujo plástico y contracción, las cuales tienen mayor influencia en las deflexiones a largo plazo.

2.1.1 RESISTENCIA A LA COMPRESION, MODULO DE ELASTICIDAD Y MODULO DE RUPTURA

Las propiedades del concreto simple están basadas en la relación del esfuerzo aplicado y la deformación producida en especímenes cilíndricos estándares ensayados en el laboratorio a cierto tiempo de preparados, si bien es cierto que cada curva esfuerzo - deformación tiene una forma propia que depende a nivel interno de la cantidad de agregados usados y de la velocidad de aplicación del esfuerzo en la prueba, ciertos investigadores han propuesto curvas teóricas para el concreto.

Expresiones propuestas por Hognestad:

$$\sigma_{c(t_0)} = f'_{c(t_0)} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{c(t_0)}}{\varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{c(t_0)}}{\varepsilon_o} \right)^2 \right) \quad \varepsilon_{c(t_0)} \leq \varepsilon_o = 0.002 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{c(t_0)} = f'_{c(t_0)} \cdot (1 - 100 \cdot (\varepsilon_{c(t_0)} - \varepsilon_o)) \quad \varepsilon_{c(t_0)} \geq \varepsilon_o = 0.002 \quad (2.2)$$



Expresión propuesta por Desayi y Krishnan:

$$\sigma_{c(t_0)} = \frac{2 \cdot f'_{c(t_0)} \cdot \left(\frac{\epsilon_{c(t_0)}}{\epsilon_0} \right)}{1 + \left(\frac{\epsilon_{c(t_0)}}{\epsilon_0} \right)^2} \tag{2.3}$$

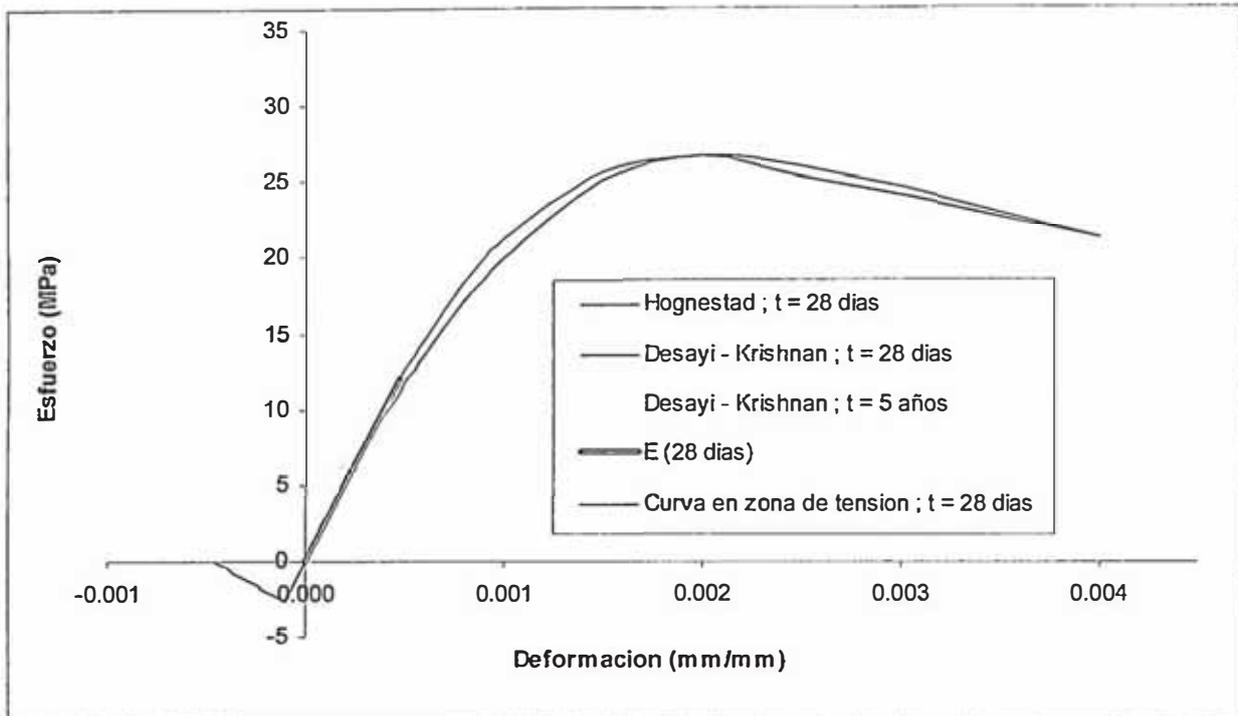


Fig. 2.1 Curva esfuerzo - deformación para el concreto. $E_{c(t_0)}$ = módulo secante de elasticidad en el tiempo t_0

La resistencia a la tensión del concreto es aproximadamente un décimo de la resistencia a la compresión. Por lo tanto, la mayoría de los códigos de diseño sólo consideran la zona en compresión a resistir las acciones internas en una sección cualquiera. La curva en la Fig. (2.1) es una curva típica para una fibra sometida a esfuerzos compresivos y de tensión en $t_0 = 28$ días. La curva de mayor esfuerzo máximo representa la curva teórica en $t = 5$ años, considerando un espécimen de concreto sometido a una misma velocidad de carga en el tiempo. En todos los casos se supone que el esfuerzo máximo se produce para una deformación de 0.002.

Del estudio de las curvas esfuerzo - deformación, el concepto de módulo de elasticidad no tiene mucho sentido en el concreto. Por lo cual, es necesario recurrir a definiciones arbitrarias, basadas en consideraciones empíricas. Así se puede definir el módulo tangente inicial o tangente a un punto determinado de la curva esfuerzo - deformación y



el módulo secante entre dos puntos de la misma. Para tomar en cuenta los efectos de larga duración en una forma simple, se utilizan a veces módulos menores que los correspondientes a las definiciones anteriormente mencionadas. El módulo secante se usa en ensayos de laboratorio para definir la deformabilidad de un concreto dado. La ASTM recomienda la pendiente de la línea recta que une los puntos de la curva correspondiente a una deformación de 0.0005 y al 40% de la carga máxima.

Por otro lado, el módulo de ruptura es la máxima resistencia a la tensión por flexión que puede resistir el concreto y cuyo progreso con el tiempo es similar al del módulo de elasticidad. El código ACI propone la siguiente expresión para predecir la resistencia a la compresión del concreto en el tiempo:

$$f'_{c(t)} = \frac{t}{a + \beta t} \cdot f'_{c(28)} \quad (\text{MPa}) \quad (2.4)$$

Donde a y β son parámetros dependientes del tipo de cemento y del tipo de curado, $f'_{c(28)}$ es la resistencia a la compresión del espécimen de concreto a los 28 días y t es la edad en días del espécimen de concreto. Además, la resistencia total se logra alrededor de los 28 días y su crecimiento se produce con el tiempo; pero a una razón decreciente como lo ilustra la Fig. 2.2.

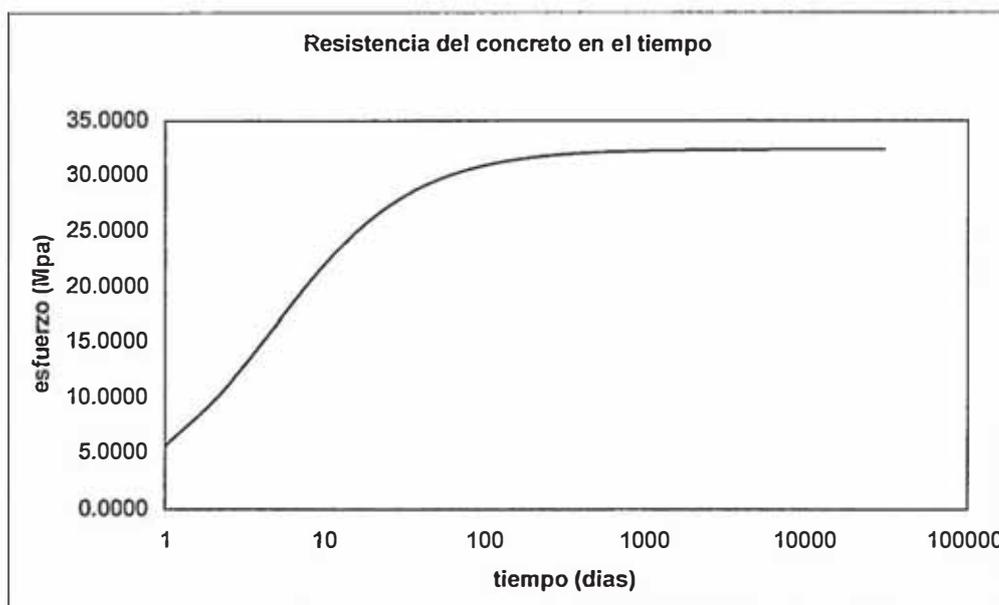


Fig. 2.2 Incremento de la resistencia a la compresión con el tiempo para un espécimen de concreto con $f'_{c(28)} = 27.57$ MPa , $a = 4$, $\beta = 0.85$ y $t = 30000$ días.



El módulo de ruptura en el tiempo es:

$$f'_{t(t)} = 0.623 \cdot \sqrt{f'_{c(t)}} \quad (\text{MPa}) \quad (2.5)$$

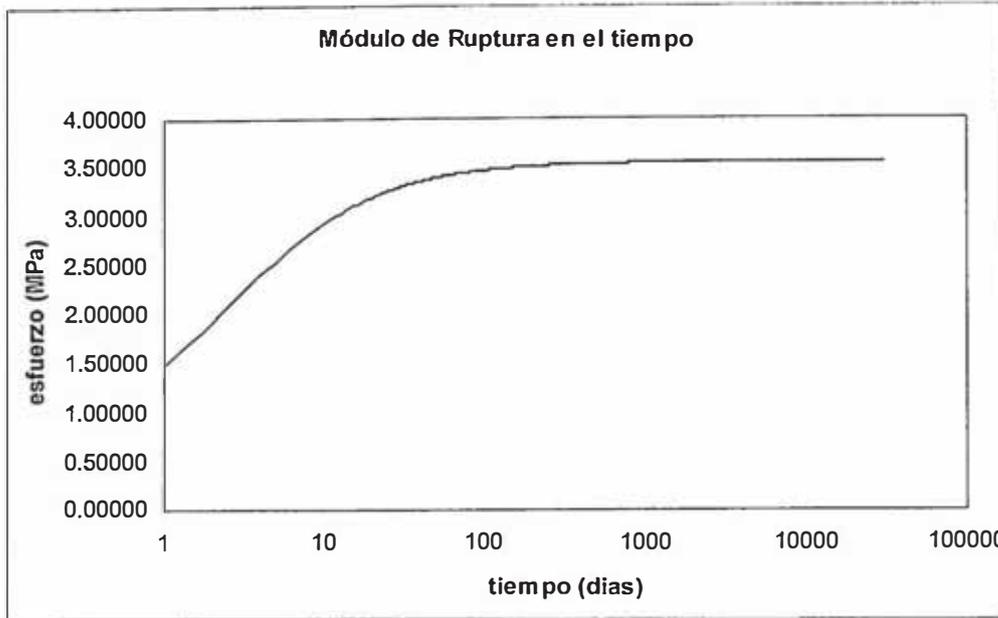


Fig 2.3 Incremento del módulo de ruptura con el tiempo para un espécimen de concreto con $f'_{c(28)} = 27.57 \text{ MPa}$, $a = 4$, $\beta = 0.85$ y $t = 30000$ días.

El desarrollo del módulo de elasticidad con el tiempo para concretos de peso normal según el código ACI es:

$$E_{c(t)} = 4805 \cdot \sqrt{f'_{c(t)}} \quad (\text{MPa}) \quad (2.6)$$

La ecuación anterior describe el desarrollo del módulo de elasticidad del concreto con el tiempo para el caso de compresión en el rango lineal. Debido a que la resistencia de tensión del concreto es relativamente baja, generalmente no se considera su participación para el cálculo de las fuerzas resultantes de sección; pero si se requiere de un análisis mas exacto, su inclusión se puede realizar suponiendo un comportamiento similar a las fibras en compresión considerando un módulo de elasticidad de tensión de acuerdo a la curva esfuerzo - deformación de la Fig. 2.1. En esta etapa inicial sólo se considera el desarrollo del módulo elasticidad en el rango lineal tanto para la zona en tensión como en compresión

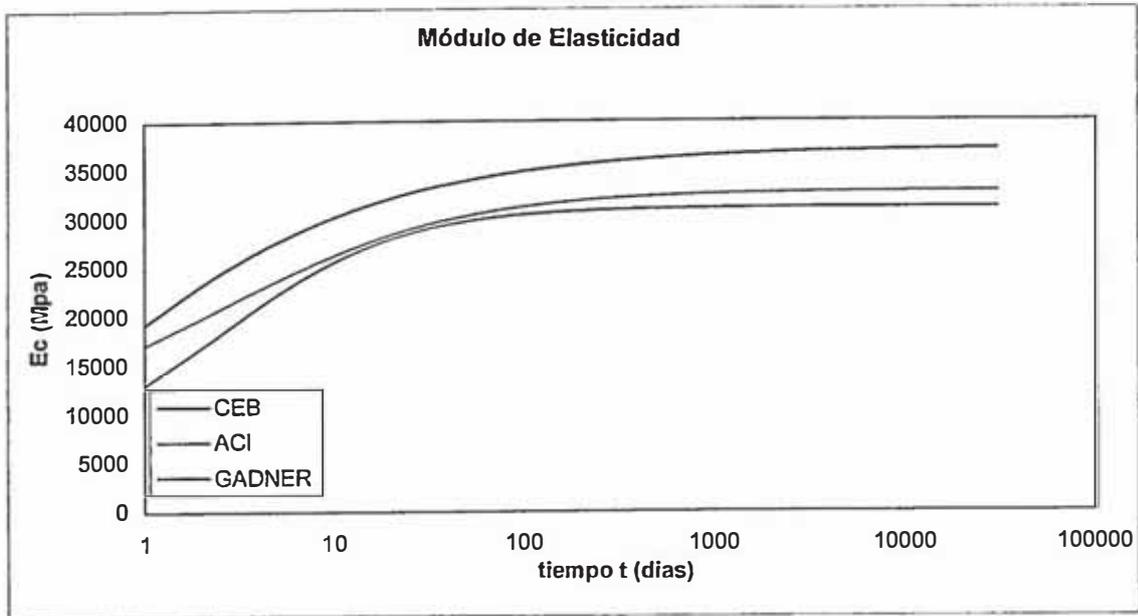


Fig. 2.4 Incremento del módulo de elasticidad con el tiempo para un espécimen de concreto con $f_{c(28)} = 27.57$ MPa , $a = 4$, $\beta = 0.85$ y $t = 30000$ días.

2.2 DEFORMACION EN EL TIEMPO

La práctica común es suponer que el esfuerzo en el concreto es proporcional a la deformación en condiciones de servicio y expresarlo como:

$$\varepsilon_{c(t_0)} = \frac{\sigma_{c(t_0)}}{E_{c(t_0)}} \quad (2.7)$$

Donde $\sigma_{c(t_0)}$, $E_{c(t_0)}$ son el esfuerzo aplicado y el módulo de elasticidad del concreto respectivamente en el tiempo t_0 (tiempo inicial de aplicación de la carga externa). El valor de E_c (módulo secante) depende de la magnitud del esfuerzo aplicado; pero esta dependencia se ignora en aplicaciones prácticas. La deformación que sufre en el tiempo una fibra de concreto es la suma algebraica de la deformación inicial mas las deformaciones inelásticas producidas por la contracción del concreto, por flujo plástico y por el cambio de temperatura que se experimenta con el tiempo.



2.2.1 FLUJO PLASTICO

El incremento de la deformación bajo carga externa actuante en el tiempo se define como deformación por flujo plástico y se puede subdividir en:

- Deformación plástica básica que ocurre bajo condiciones de contenido de humedad constante (medio ambiente)
- Deformación plástica adicional debida a secado.

La deformación adicional debido a flujo plástico en el concreto se calcula a través de un coeficiente adimensional $\phi_{(t,t_0)}$, que representa la relación entre la deformación adicional con respecto a la deformación inicial en una fibra de concreto. Por ejemplo, un espécimen de concreto sujeto a una fuerza axial o a un momento flexionante que produce un esfuerzo σ_c a la edad t_0 en una de las fibras del espécimen, se deforma en el tiempo cuando σ_c se mantiene constante, como sigue:

$$\varepsilon_{c(t_0)} = \frac{\sigma_{c(t_0)}}{E_{c(t_0)}} \cdot (1 + \phi_{(t,t_0)}) \quad (2.8)$$

El coeficiente de flujo plástico mencionado en el párrafo anterior depende de la edad de carga t_0 y de la edad t en la que se calcula la deformación total. La simbolización en función de estos dos parámetros es una manera muy general de representar dicho coeficiente con fines de nomenclatura. En realidad, la obtención de $\phi_{(t,t_0)}$ depende de una serie de factores como: la composición de la mezcla de concreto, temperatura, tipo de curado, humedad relativa, etc. Además, no existe un modelo único para su cálculo; por el contrario la elección del modelo de predicción dependerá de la cantidad de información que se tenga disponible. Alternativamente la deformación inelástica por flujo plástico puede ser calculada mediante el coeficiente $J_{(t,t_0)}$, que representa la deformación adicional producida por esfuerzo unitario aplicado en el tiempo de carga t_0 . Por lo tanto, el producto $J_{(t,t_0)} \cdot \sigma_{c(t_0)}$ representaría la deformación inelástica producida en el intervalo de tiempo $(t - t_0)$ debido a un esfuerzo, $\sigma_{c(t_0)}$, aplicado en el tiempo t_0 . La elección del coeficiente a utilizar depende de la disponibilidad que proponga el modelo de predicción escogido. En el caso del modelo B3, éste propone una ecuación directa para el cálculo de $J_{(t,t_0)}$, mientras que la obtención de $\phi_{(t,t_0)}$ es una derivación equivalente a $J_{(t,t_0)} \cdot E_{c(t_0)}$, la cual puede ser reemplazada en la ecuación (2.8). Los modelos de predicción para los coeficientes $\phi_{(t,t_0)}$ y $J_{(t,t_0)}$ considerados en el presente estudio son:



- Modelo ACI propuesto por el Comité 209 del American Concrete Institute
- Modelo CEB propuesto por el Comité Europeo de Concreto
- Modelo B3 propuesto por Bazant
- Modelo GZ propuesto por Gardner

El método de Ghali - Favre a ser explicado en los siguientes capítulos se basa en el cálculo preliminar de $\phi_{(t,t_0)}$. La Fig. 2.5 muestra cierta discrepancia en el valor final de $\phi_{(t,t_0)}$ para un espécimen de concreto simple sometido a condiciones normales de servicio. La variación en la respuesta tiene principalmente dos causas: la no homogeneidad en los parámetros de entrada y la diferencia natural que existe en la formulación de cada modelo debido a las condiciones propias del laboratorio en que fueron generados. Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga hasta niveles del 50% de la resistencia máxima.

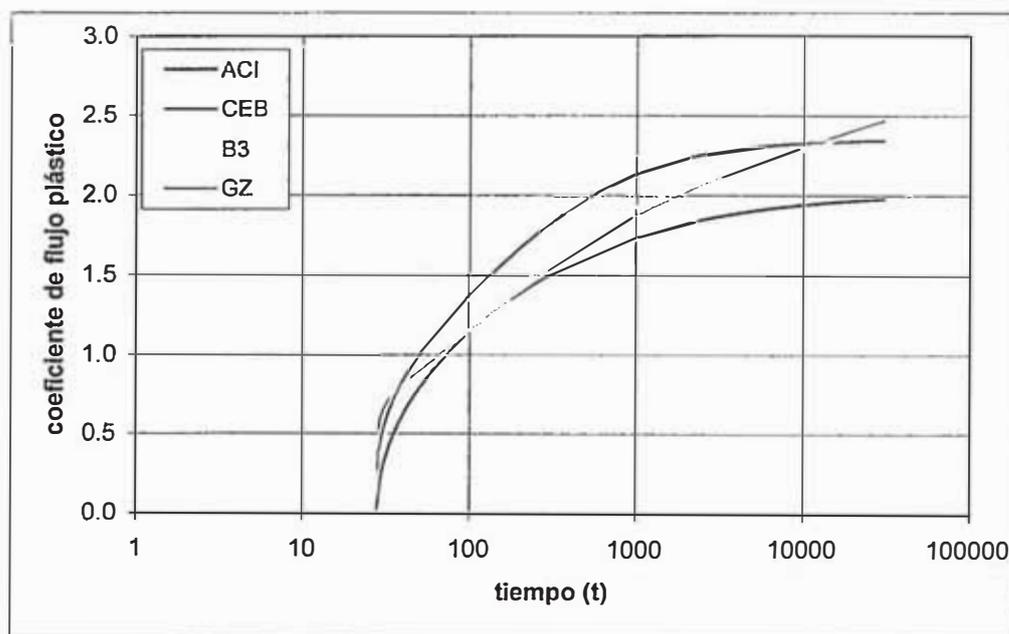


Fig. 2.5 Coeficiente de flujo plástico para un espécimen de concreto estándar bajo condiciones ambientales de servicio.

Los valores de $\phi_{(t,t_0)}$ para $t = 30000$ días son:

$$\phi_{ACI(30000,28)} = 1.977; \phi_{CEB(30000,28)} = 2.344; \phi_{B3(30000,28)} = 2.448; \phi_{GZ(30000,28)} = 2.467$$



2.2.2 CONTRACCION

La contracción después del endurecimiento de la mezcla de concreto es el decrecimiento con el tiempo del volumen del concreto. Este decrecimiento es debido a cambios en el contenido de humedad del concreto y a cambios químico - físicos que ocurren sin esfuerzos atribuibles a acciones externas en el espécimen.

La definición de arriba incluye las siguientes causas de contracción: a) debido a la pérdida de humedad en el concreto, b) por la hidratación del cemento y c) por la carbonatación de varios productos provenientes de la hidratación del cemento en presencia del Anhídrido carbónico.

Cuando el cambio de volumen es restringido por acciones físicas como podría ser ocasionado por el acero de refuerzo o las condiciones de apoyos, internamente se desarrollan esfuerzos en el espécimen que originan una redistribución de los esfuerzos iniciales conforme la contracción o expansión se desarrolla con el tiempo. La contracción ocurre más frecuentemente que la expansión; pero no existe diferencia en el tratamiento de ambos; excepto en la consideración del signo. El símbolo ϵ_{cs} será utilizado para denotar deformación libre (sin restricción) debido a contracción o expansión y será positivo en este ultimo caso. Análogamente al cálculo del coeficiente de flujo plástico, la deformación por contracción se aprecia en la Fig. 2.6.

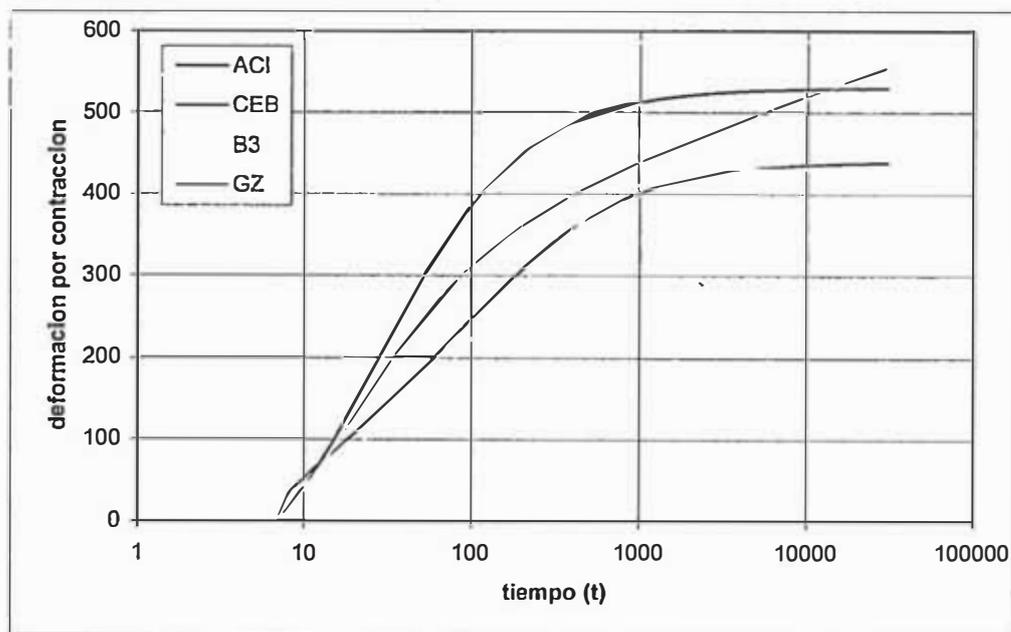


Fig. 2.6 Deformación por contracción para el mismo espécimen de la Fig. 2.5.



Siendo la deformación total para $t = 30000$ días la siguiente:

$$\varepsilon_{csACI(30000,7)} = -530\mu; \varepsilon_{csCEB(30000,7)} = -439\mu; \varepsilon_{csB3(30000,7)} = -431\mu; \varepsilon_{csGZ(30000,7)} = -553\mu$$

2.2.3 RELAJACION

La relajación es la reducción gradual del esfuerzo con el tiempo bajo una deformación constante. Una deformación constante produce un esfuerzo inicial en el tiempo de aplicación de la deformación, el cual se va incrementando en una proporción negativa. Una mayor explicación de la obtención de la función de relajación se explica en las secciones 2.3.2 y 2.3.3.

2.2.4 ECUACION DE DEFORMACION

La ecuación (2.8) permite calcular la deformación con el tiempo bajo un esfuerzo constante, lo que facilita la superposición de las deformaciones producidas por incrementos o decrementos de esfuerzos en el tiempo (esfuerzo variable). En la ecuación (2.9) se ha incluido el efecto de contracción mediante el término ε_{cs} , adicionalmente la deformación por temperatura podría ser considerada añadiendo el término correspondiente al extremo derecho de la ecuación (2.9), si se conociera la historia de temperatura de la fibra.

$$\varepsilon_{c(t)} = \sigma_{c(t_0)} \frac{1 + \phi(t, t_0)}{E_{c(t_0)}} + \int_{\sigma_{c(t_0)}}^{\sigma_{c(t)}} \frac{1 + \phi(t, \tau)}{E_{c(\tau)}} \cdot d\sigma_{c(\tau)} + \varepsilon_{cs(t, t_0)} \quad (2.9)$$

Donde:

t_0 y t : tiempo en el cual se aplica el esfuerzo inicial y tiempo cuando se considera la deformación.

τ : un tiempo intermedio entre t_0 y t

$\sigma_{c(t_0)}$: esfuerzo inicial aplicado a la edad t_0

$d\sigma_{c(\tau)}$: un esfuerzo diferencial (incremento o decremento) aplicado a la edad τ

$E_{c(\tau)}$: módulo de elasticidad del concreto a la edad τ

$\phi_{(t, \tau)}$: coeficiente de flujo plástico en el tiempo t .

$\varepsilon_{cs(t, t_0)}$: contracción libre que ocurre entre las edades t_0 y t

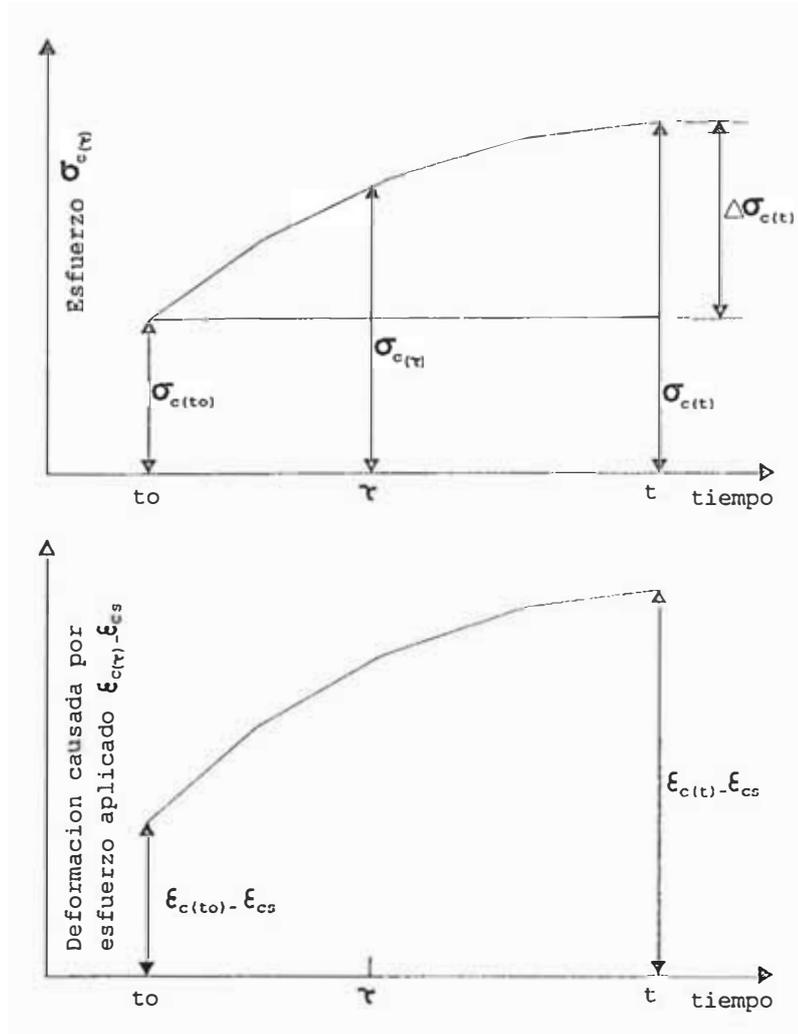


Fig. 2.7 Esfuerzo versus tiempo y deformación versus tiempo de una fibra de concreto sujeta a un esfuerzo uniaxial de magnitud variable en el tiempo.

2.3 COEFICIENTE DE ENVEJECIMIENTO χ

El primer término del lado derecho de la ecuación (2.9) representa la deformación que se produce debido a un esfuerzo instantáneo, $\sigma_{c(t_0)}$, aplicado en $t = t_0$ y mantenido constante hasta $t = t$, el segundo término representa la deformación producida debido a un incremento de esfuerzo, $\Delta\sigma_c$, introducido gradualmente durante el período t_0 a t y el último término en la ecuación representa la deformación por contracción. El esfuerzo $\Delta\sigma_c$ produce una deformación de flujo plástico de magnitud mas pequeña comparado con un esfuerzo de la misma magnitud aplicado en t_0 y mantenido constante durante el período $(t - t_0)$.



La integral en la ecuación (2.9) complica el cálculo de la deformación, una manera de simplificarlo es considerando que el esfuerzo incremental, $\Delta\sigma_{c(t)}$, se introduce totalmente en el tiempo t_0 y se mantiene constante hasta el tiempo t , pero considerando un valor reducido de $\phi_{(t,t_0)}$ igual a $\chi \cdot \phi_{(t,t_0)}$, donde $\chi = \chi_{(t,t_0)}$ es un multiplicador adimensional denominado coeficiente de envejecimiento. Entonces rescribiendo la ecuación anterior y ordenándola en una forma lineal:

$$\varepsilon_{c(t)} = \sigma_{c(t_0)} \cdot \frac{1 + \phi_{(t,t_0)}}{E_{c(t_0)}} + \frac{\Delta\sigma_{c(t)}}{E_{c(t,t_0)}} + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \quad (2.10)$$

Donde $E_{c(t,t_0)} = E_{c(t_0)} / (1 + \chi \cdot \phi_{(t,t_0)})$ es el módulo de elasticidad de edad ajustada que permite una relación lineal entre el incremento de esfuerzo y el incremento de deformación mediante $\Delta\varepsilon_c = \Delta\sigma_{c(t)} / \bar{E}_{c(t,t_0)}$.

2.3.1 ECUACION PARA EL COEFICIENTE DE ENVEJECIMIENTO χ

La variación del esfuerzo entre el tiempo t_0 y t se puede expresar como sigue:

$$\xi_1 = \frac{\sigma_{c(\tau)} - \sigma_{c(t_0)}}{\Delta\sigma_{c(t)}} \quad (2.11)$$

Donde ξ_1 es una función adimensional dependiente del tiempo que define la forma de la curva esfuerzo - tiempo mostrado en la Fig. 2.7. El valor de la función de forma ξ_1 varía entre 0 y 1 conforme τ varía de t_0 a t . Entonces, derivando la ecuación (2.11) con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{d\sigma_{c(\tau)}}{d\tau} = \Delta\sigma_{c(t)} \cdot \frac{d\xi_1}{d\tau} \quad (2.12)$$

sustituyendo la ecuación (2.12) en (2.9):

$$\varepsilon_{c(t)} = \sigma_{c(t_0)} \frac{1 + \phi_{(t,t_0)}}{E_{c(t_0)}} + \Delta\sigma_{c(t)} \int_{t_0}^t \frac{1 + \phi_{(t,\tau)}}{E_{c(\tau)}} \frac{d\xi_1}{d\tau} d\tau + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \quad (2.13)$$

La comparación de las ecuaciones (2.13) con (2.10) determina la expresión para el coeficiente de envejecimiento:



$$\chi(t, t_0) = \frac{E_{c(t_0)}}{\phi(t, t_0)} \int_{t_0}^t \frac{1 + \phi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \left(\frac{d\xi_1}{d\tau} \right) d\tau - \frac{1}{\phi(t, t_0)} \quad (2.14)$$

Tres funciones del tiempo se incluyen en la ecuación (2.14) ξ_1 , $E_{c(t)}$ y $\phi_{(t, \tau)}$, siendo las dos últimas dependientes de la calidad del concreto y las condiciones del medio ambiente. La historia de esfuerzo para una fibra de concreto es frecuentemente desconocida, lo que hace que la función de forma ξ_1 también lo sea. El suponer que ξ_1 tiene forma semejante a la curva de relajación del concreto permite calcular el coeficiente de envejecimiento χ ; sin embargo el valor de χ varía dentro de un rango usual que puede ser considerado para cálculos ingenieriles.

2.3.2 FUNCION DE RELAJACION

Cuando un miembro de concreto se sujeta en el tiempo t_0 a una deformación impuesta ε_c , el esfuerzo instantáneo es:

$$\sigma_{c(t_0)} = \varepsilon_c \cdot E_{c(t_0)} \quad (2.15)$$

Si subsecuentemente la longitud del miembro se mantiene constante con el tiempo ($\varepsilon_c = \text{constante}$), entonces el esfuerzo decrecerá gradualmente a causa del flujo plástico como lo muestra la Fig. 2.8. El valor del esfuerzo en cualquier tiempo $t > t_0$ puede ser expresado como sigue:

$$\sigma_{c(\tau)} = \varepsilon_c \cdot r_{(t, t_0)} \quad (2.16)$$

Donde $r_{(t, t_0)}$ es la función de relajación del concreto. El valor $r_{(t, t_0)}$ se define como el esfuerzo en el tiempo t debido a una deformación unitaria aplicada en t_0 y mantenida en forma constante durante el período $(t - t_0)$. En cualquier instante τ entre t_0 y t , la magnitud del esfuerzo relajado $\Delta\sigma_{c(\tau)}$ puede ser expresado como sigue:

$$\Delta\sigma_{c(\tau)} = \xi_1 \cdot (\Delta\sigma_{c(t)}) \quad (2.17)$$

Donde $\Delta\sigma_{c(\tau)}$ es el incremento de esfuerzo (esfuerzo relajado) durante el período t_0 a τ :

$$\Delta\sigma_{c(\tau)} = \sigma_{c(\tau)} - \sigma_{c(t_0)} \quad (2.18)$$

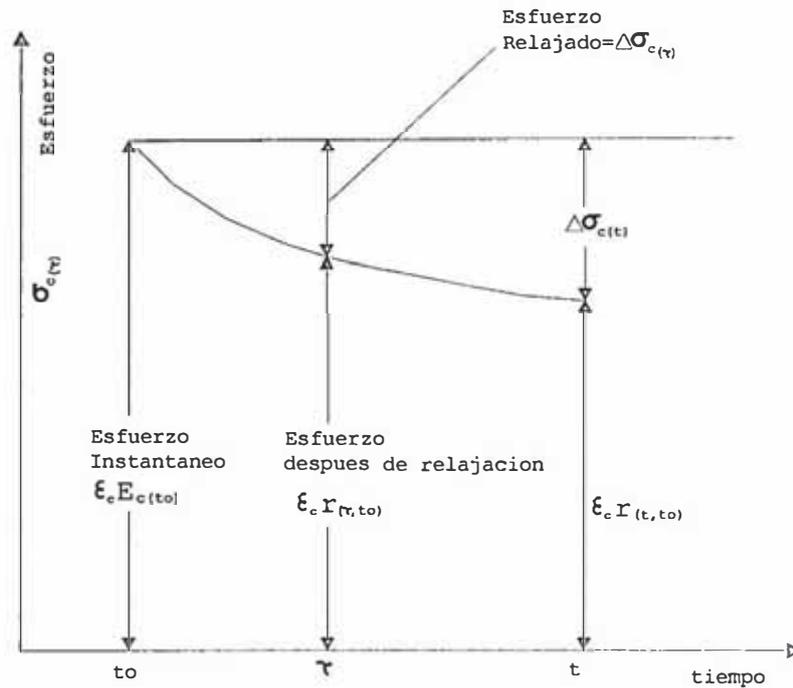


Fig. 2.8 Variación del esfuerzo con el tiempo debido a una deformación ϵ_c impuesta en t_0 y mantenida constante (fenómeno de relajación)

Similarmente, el incremento de esfuerzo durante el período t_0 a t es:

$$\Delta\sigma_{c(t)} = \sigma_{c(t)} - \sigma_{c(t_0)} \quad (2.19)$$

El símbolo ξ es una función de forma adimensional que representa para cualquier valor de τ la relación de esfuerzo relajado durante el período $(\tau - t_0)$ con respecto al esfuerzo relajado durante el período $(t - t_0)$ y se define como:

$$\xi = \frac{\Delta\sigma_{c(\tau)}}{\Delta\sigma_{c(t)}} \quad (2.20)$$

El valor de ξ es 0 y 1 cuando $\tau = t_0$ y t respectivamente. La función de forma ξ es similar a la función ξ_1 adoptada anteriormente. Refiriéndonos a la Fig. 2.8, el valor de deformación ϵ_c que existe en el tiempo t puede ser considerado como un resultado de: (a) un esfuerzo inicial $\sigma_{c(t_0)}$ introducido en t_0 y mantenido constante hasta t ; y (b) un incremento de esfuerzo $\Delta\sigma_{c(t)}$ introducido gradualmente durante el período $(t - t_0)$, así sustituyendo las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.19) en (2.10) y despejando χ , obtenemos:

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - r(t, t_0) / E_{c(t_0)}} - \frac{1}{\phi(t, t_0)} \quad (2.21)$$

2.3.3 METODO PASO A PASO

El procedimiento paso a paso consiste en la discretización del tiempo mediante intervalos crecientes de longitud variable de acuerdo a la ecuación de Chiorino durante el período $(t - t_0)$. Para ilustrarnos mejor podemos considerar una fibra de concreto sujeta a un esfuerzo uniaxial de magnitud variable como se muestra en la Fig. 2.9 (b).

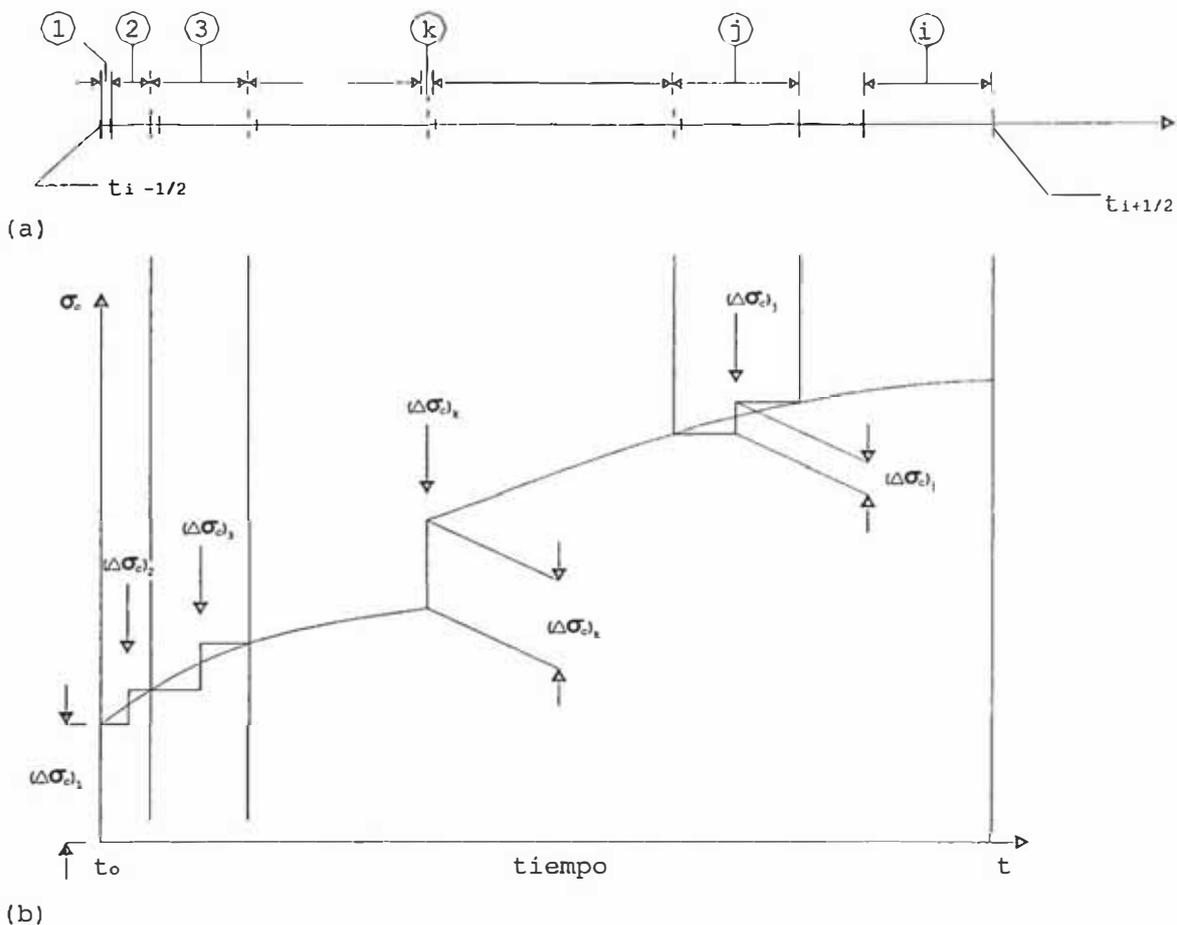


Fig. 2.9 División de: (a) tiempo en intervalos y (b) esfuerzo en incrementos para un análisis paso a paso.

$$t_{(j)} = (t_{(j-1)} - t_{(1)}) 10^{0.125} + t_{(1)} \quad j = 4, 5, 6, \dots, 55 \quad (2.22)$$

Donde $t_{(j)}$ representa el valor del tiempo en el extremo derecho del intervalo j ésimo, siendo $t_{(1)} = t_0$; $t_{(2)} = t_0$ y $t_{(3)} = t_0 + 0.01$. El procedimiento consiste en dividir el período $(t - t_0)$ en varios intervalos como lo muestra la Fig. 2.9 (a) de acuerdo a la ecuación (2.22) y



suponer que el esfuerzo se introduce en incrementos aplicados en el medio de los intervalos. De esta manera el esfuerzo $(\Delta\sigma_c)_i$ es aplicado en el medio del intervalo $i_{ésimo}$, mientras que para un incremento súbito en el esfuerzo se considera que éste actúa en un intervalo de longitud cero (por ejemplo $(\Delta\sigma_c)_1$ y $(\Delta\sigma_c)_k$).

El análisis paso a paso es adecuado para encontrar la deformación en cualquier tiempo τ entre t_0 y t . Alternativamente, si la deformación es conocida, el método puede ser usado para determinar la variación del esfuerzo con el tiempo. Los símbolos $t_{j-1/2}$, t_j y $t_{j+1/2}$ indican el tiempo al inicio, medio y final del intervalo $j_{ésimo}$ respectivamente. La deformación en el extremo final del intervalo $i_{ésimo}$ puede ser calculado por la ecuación (2.9) reemplazando los dos primeros términos por una sumatoria de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{c(t_i+\frac{1}{2})} = \sum_{j=1}^i \left((\Delta\sigma_c)_j \frac{1 + \phi(t_i + \frac{1}{2}, t_j)}{E_{c(t_j)}} \right) + \varepsilon_{cs(t_i+\frac{1}{2})} \quad (2.23)$$

La sumatoria anterior representa la superposición de la deformación causada por los incrementos de esfuerzos mostrados en la Fig. 2.9, cuando las magnitudes son conocidas. El esfuerzo en el extremo derecho del intervalo $i_{ésimo}$ es:

$$\sigma_{c(t_i+\frac{1}{2})} = \sum_{j=1}^i (\Delta\sigma_c)_j \quad (2.24)$$

Las dos ecuaciones anteriores son fundamentales en el análisis de la redistribución de esfuerzos con el tiempo en secciones transversales y en el análisis de pórticos planos utilizando el método de los desplazamientos o el método de las fuerzas. Consideremos ahora el caso cuando la deformación ε_c se impone en el tiempo t_0 y se mantiene constante hasta el tiempo t , el esfuerzo correspondiente introducido en t_0 será igual a $\varepsilon_c \cdot E_{c(t_0)}$ cuyo valor caerá gradualmente siguiendo la función de relajación de acuerdo a la ecuación (2.16) y expresando ésta para el intervalo $i_{ésimo}$ tenemos:

$$\sigma_{c(t_i+\frac{1}{2})} = \varepsilon_c \cdot r(t_i + \frac{1}{2}, t_0) \quad (2.25)$$

La sustitución de la ecuación (2.24) en (2.25) determina la función de relajación en el extremo derecho del intervalo $i_{ésimo}$:

$$r(t_i + \frac{1}{2}, t_0) = \frac{1}{\varepsilon_c} \cdot \sum_{j=1}^i (\Delta\sigma_c)_j \quad (2.26)$$

Rescribiendo la ecuación (2.23) y separando el último término de la sumatoria:



$$\varepsilon_{c(t_i+\frac{1}{2})} = (\Delta\sigma_c)_i \cdot \frac{1+\phi(t_i+\frac{1}{2}, t_i)}{E_{c(t_i)}} + \sum_{j=1}^{i-1} \left((\Delta\sigma_c)_j \frac{1+\phi(t_i+\frac{1}{2}, t_j)}{E_{c(t_j)}} \right) + \varepsilon_{cs(t_i+\frac{1}{2}, t_0)} \quad (2.27)$$

El incremento de esfuerzo para cualquier intervalo de tiempo conociendo los incrementos en los intervalos precedentes se obtiene mediante la ecuación (2.28). Para esto, es necesario conocer la deformación $\varepsilon_{c(t_i+\frac{1}{2})}$ al extremo de cada intervalo y las propiedades del concreto para cualquier tiempo como: el módulo de elasticidad, el coeficiente de flujo plástico y la deformación por contracción.

$$(\Delta\sigma_c)_i = \frac{E_{c(t_i)}}{1+\phi(t_i+\frac{1}{2}, t_i)} \left[\varepsilon_{c(t_i+\frac{1}{2})} - \varepsilon_{cs(t_i+\frac{1}{2}, t_0)} - \sum_{j=1}^{i-1} \left((\Delta\sigma_c)_j \frac{1+\phi(t_i+\frac{1}{2}, t_j)}{E_{c(t_j)}} \right) \right] \quad (2.28)$$

Los gráficos a continuación muestran la variación de la función de relajación del concreto y del coeficiente de envejecimiento utilizando el procedimiento descrito anteriormente para un espécimen cilíndrico de concreto con las siguientes características:

f_{ck} MPa	h_o mm	HR %	t_o (días)	t (días)
30	400	50	3	30000

- f_{ck} : esfuerzo compresivo característico de los cilindros
- h_o : tamaño del espécimen en estudio (2.vs)
- vs : relación volumen - superficie del espécimen en estudio
- HR : % de Humedad Relativa.
- t_o : tiempo de edad de carga del espécimen
- t : tiempo de análisis.

Las propiedades del concreto se calcularon utilizando las expresiones propuestas por el Comité Europeo de Concreto (CEB), cualquier otro código de diseño pudo haber sido escogido para el cálculo de la función de relajación y del coeficiente de envejecimiento. Alternativamente en los casos en donde el valor de $\phi(t, t_0)$ es casi constante cuando $(t - t_0)$ es mayor a un año el coeficiente de envejecimiento puede ser aproximado por la siguiente ecuación:

$$\chi_{(30 \times 10^3, t_0)} = \frac{\sqrt{t_0}}{1 + \sqrt{t_0}} \quad (2.29)$$

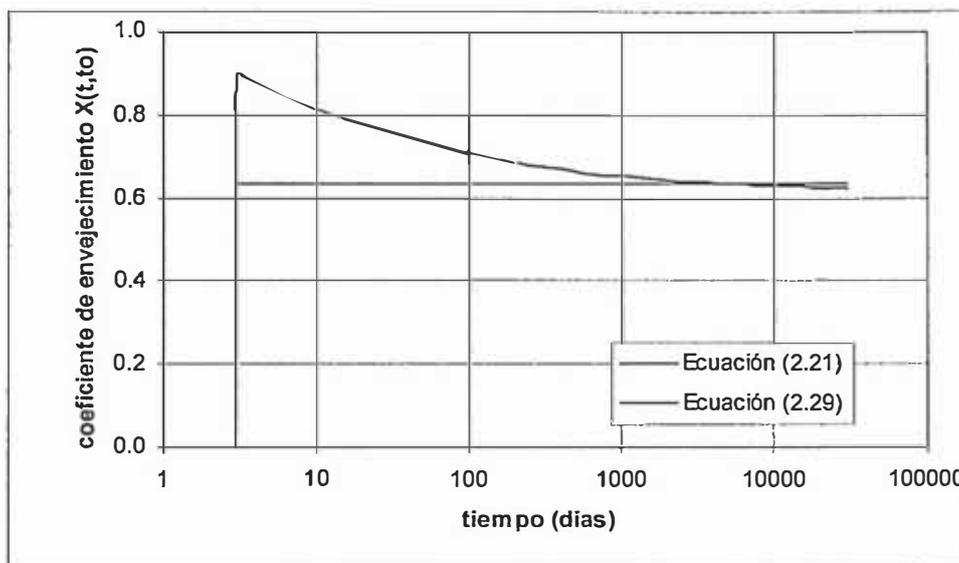


Fig. 2.10 Función del coeficiente de envejecimiento χ

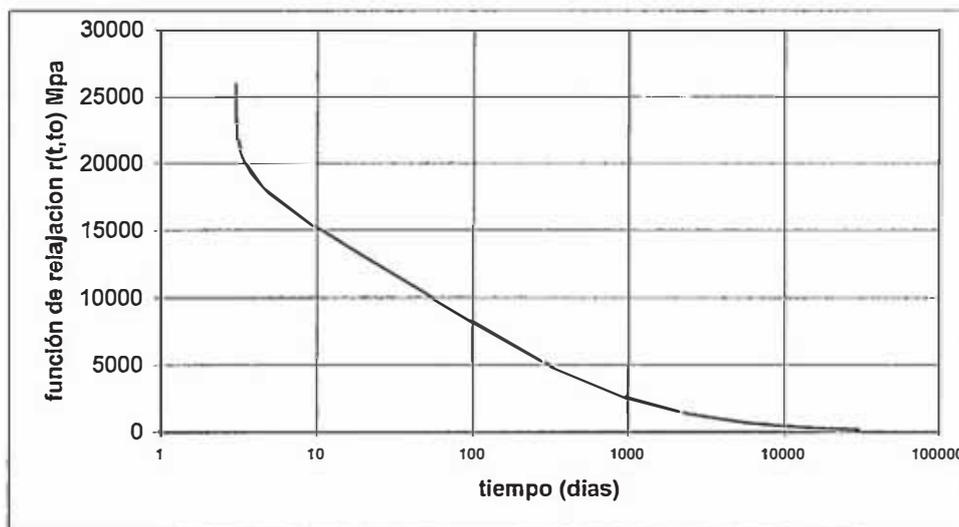


Fig. 2.11 Función de relajación del concreto.

2.4 SECCION TRANSFORMADA

El concepto de sección transformada se emplea cuando nos referimos a una sección transversal de un miembro de concreto reforzado cuya área efectiva se considera igual al área del concreto más α veces el área de acero de refuerzo; donde:

$$\alpha_{(t_0)} = \frac{E_s}{E_{c(t_0)}} \tag{2.30}$$

E_s es el módulo de elasticidad del acero de refuerzo, $E_{c(t_0)}$ es el módulo de elasticidad del concreto en t_0 y α es la razón entre ambos módulos. En el análisis de esfuerzos debido a fuerzas gradualmente desarrolladas durante un período de tiempo desde t_0 hasta t , se



utiliza la terminología de sección transformada de edad ajustada para referirse a la sección transformada compuesta del área de concreto mas $\bar{\alpha}$ veces el área del acero de refuerzo, donde:

$$\bar{\alpha}_{(t,t_0)} = \frac{E_s}{E_{c(t,t_0)}} \quad (2.31)$$

CAPITULO 3

ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN SECCIONES NO FISURADAS

3.1 DEFORMACIONES EN SECCIONES COMPUESTAS

La Fig. 3.1(a) representa la sección transversal de un elemento compuesto por diferentes tipos de materiales con eje vertical simétrico. Para el análisis de esfuerzos debido a una fuerza normal o momento flexionante actuante sobre la sección, primero se reemplaza la sección transversal por una sección transformada equivalente de manera que el área de la i ésima parte de la sección es reemplazada por un área transformada obtenida por $(E_{ci}/E_{ref}) \cdot A_i$, donde E_{ref} es el módulo de elasticidad de referencia escogido arbitrariamente (módulo de elasticidad de la sección transformada) y E_{ci} es el módulo de elasticidad correspondiente a la i ésima parte de la sección.

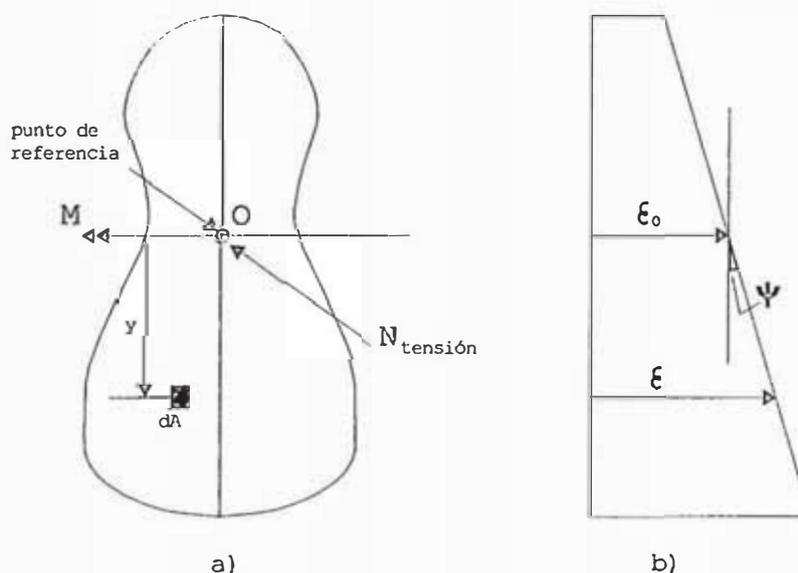


Fig. 3.1 Análisis de distribución de esfuerzos en una sección transversal compuesta (a) M , N positivo y ; (b) distribución de deformación.

En secciones de concreto reforzado, generalmente el módulo de referencia es el módulo de elasticidad del concreto de una de las partes de la sección (E_{ci}), donde el área del



acero de refuerzo se reemplaza por un área equivalente igual a α veces el área real, con

$$\alpha_{(t_0)} = E_s / E_{c(t_0)}.$$

En la Fig. 3.1(a) la sección transversal esta sujeta a una fuerza normal N situada en un punto cualquiera sobre el eje de simetría, esta acción es equivalente a la aplicación de la fuerza normal N en un punto de referencia O (escogido arbitrariamente) y a la acción de un momento flexionante M como se muestra en la figura. Generalmente, el punto de referencia O se escoge como el centroide de la sección transformada y es respecto a este punto que se van a aplicar las relaciones básicas de Resistencia de Materiales, considerando que la distribución de deformaciones es lineal en el peralte de la sección transversal.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \psi \cdot y \quad (3.1)$$

$$\sigma = E_c \cdot (\varepsilon_0 + \psi \cdot y) \quad (3.2)$$

$$N = \int \sigma \cdot dA \quad (3.3)$$

$$M = \int \sigma \cdot y \cdot dA \quad (3.4)$$

Donde ε_0 es la deformación axial media en el punto de referencia O , ψ es la curvatura de la sección e y es la distancia positiva medida desde el punto O a cualquier fibra de la sección debajo del punto de referencia. Reemplazando la ecuación (3.2) en las ecuaciones (3.3) y (3.4) se obtienen las ecuaciones que relacionan las propiedades geométricas de la sección con las deformaciones, las acciones internas y rescribiéndola en forma matricial obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{(t_0)} \\ \psi_{(t_0)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_{ref(t_0)} (AI - B^2)} \begin{bmatrix} I & -B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Donde:

A, B y I : área de la sección transversal, primer y segundo momento con respecto a un eje horizontal que pasa través del punto de referencia O en la edad t_0 .

$E_{ref(t_0)}$: módulo de elasticidad de referencia en t_0 .

N : fuerza normal actuante

M : momento de flexión alrededor de un eje horizontal que pasa por el punto O .



Cuando el punto O es el centroide de la sección transformada, entonces $B = 0$ y la ecuación matricial anterior se simplifica aún mas. Las expresiones derivadas anteriormente son relaciones básicas encontradas en cualquier texto de Resistencia de Materiales y representan las relaciones en el tiempo de edad de carga t_0 .

3.2 CAMBIOS DE ESFUERZO EN EL CONCRETO Y EN EL ACERO DE REFUERZO DURANTE EL PERIODO t_0 a t

La deformación adicional debido a flujo plástico y contracción resulta en una redistribución de esfuerzos internos entre los materiales involucrados. Los cambios producidos durante el período t_0 a t pueden ser descritos mediante la superposición esquematizada en la Fig. 3.2. Esta superposición se describe en 4 etapas:

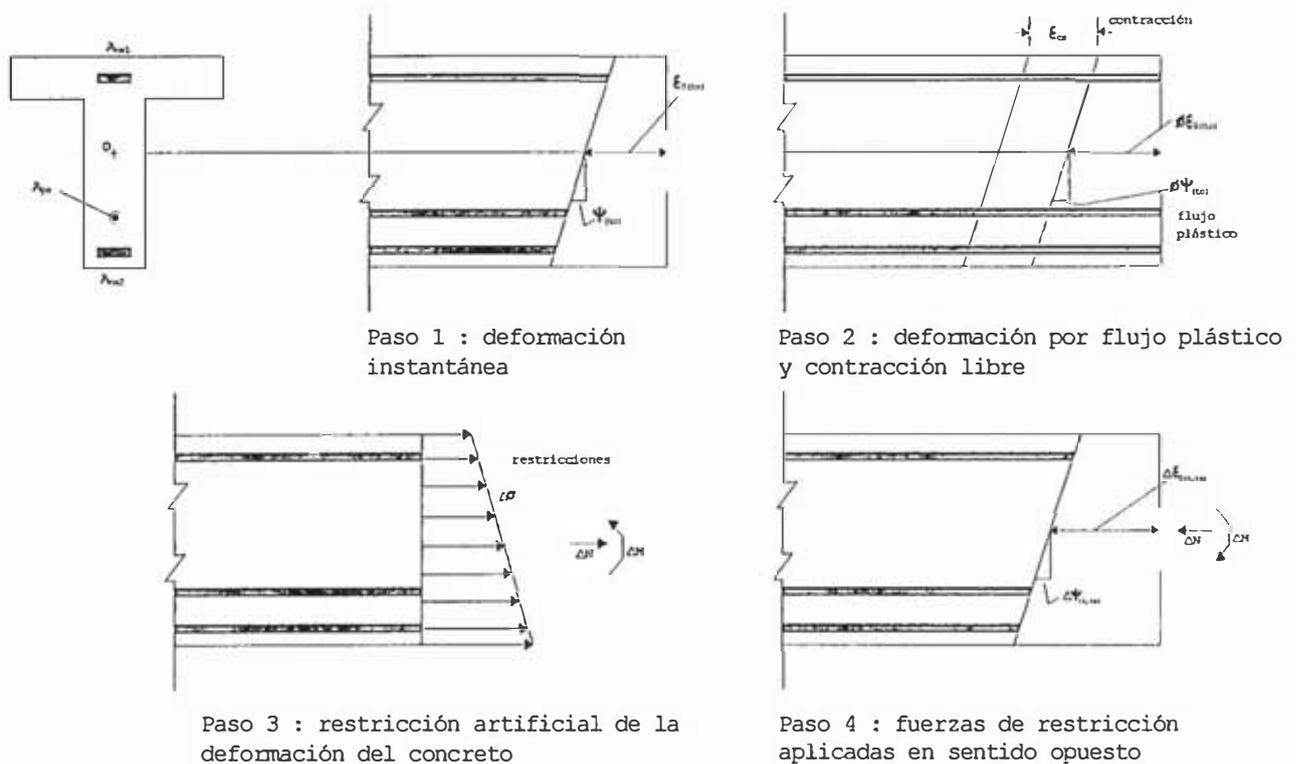


Fig. 3.2 Etapas de análisis de esfuerzos y deformaciones dependientes del tiempo

Etapa 1: Aplicar la ecuación (3.5) para determinar $\epsilon_{o(t_0)}$ y $\psi_{(t_0)}$ que definen el diagrama de distribución de deformación instantánea. La aplicación de la ecuación (3.2) determina la distribución de esfuerzos instantáneos.



Etapa 2: Determinar el cambio hipotético sin restricción en el período t_0 a t en la distribución de deformaciones debido al flujo plástico y contracción del concreto. El cambio de deformación en el punto O es igual a $(\phi_{(t,t_0)} \cdot \epsilon_{o(t_0)} + \epsilon_{cs})$ y el cambio en curvatura es $(\phi_{(t,t_0)} \cdot \psi)$

Etapa 3: Calcular el esfuerzo artificial que previene la deformación determinada en la etapa 2, este esfuerzo es introducido gradualmente sobre el concreto durante el período t_0 a t .

$$\Delta\sigma_{restriccion} = -\bar{E}_{c(t,t_0)} \cdot [\phi_{(t,t_0)} \cdot (\epsilon_{o(t_0)} + \psi_{(t_0)} \cdot y) + \epsilon_{cs(t,t_0)}] \quad (3.6)$$

Etapa 4: Los esfuerzos restringidores distribuidos a lo largo del peralte de la sección calculados de la ecuación (3.6) resultan en la obtención de un par de fuerzas restringidoras deducidas aplicando las ecuaciones (3.3) y (3.4), donde la integral se reemplaza por la sumatoria de las i ésimas partes de concreto, sin considerar el área de refuerzo. Así, las fuerzas restringidoras son:

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta N \\ \Delta M \end{matrix} \right\}_{flujo-plástico} = -\sum_{i=1}^m \left\{ \bar{E}_c \cdot \phi_i \cdot \begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} \\ B_{ci} & I_{ci} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{o(t_0)} \\ \psi_{(t_0)} \end{bmatrix} \right\}_i \quad (3.7)$$

El subíndice i se refiere a la i ésima parte de la sección, m al número de subdivisiones en la sección de concreto, A_{ci} , B_{ci} y I_{ci} son respectivamente el área, primer y segundo momento de la i ésima parte de concreto alrededor de un eje que pasa por el punto de referencia O, $\bar{E}_{ci} = \bar{E}_{ci(t,t_0)}$ y $\phi_i = (\phi_{(t,t_0)})_i$ son el módulo de elasticidad de edad ajustada y el coeficiente de flujo plástico para la i ésima parte de concreto en mención. Las fuerzas requeridas para prevenir la contracción son:

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta N \\ \Delta M \end{matrix} \right\}_{contracción} = -\sum_{i=1}^m \left\{ \bar{E}_c \cdot \epsilon_{cs} \cdot \begin{bmatrix} A_{ci} \\ B_{ci} \end{bmatrix} \right\}_i \quad (3.8)$$

Donde $\epsilon_{cs} = \epsilon_{cs(t, t_0)}$ es la contracción libre que ocurre durante el período t_0 a t . Las fuerzas restringidoras finales son:

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta N \\ \Delta M \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Delta N \\ \Delta M \end{matrix} \right\}_{flujo-plástico} + \left\{ \begin{matrix} \Delta N \\ \Delta M \end{matrix} \right\}_{contracción} \quad (3.9)$$



Subsecuentemente, estas fuerzas restringidoras son removidas por la aplicación de fuerzas iguales y opuestas sobre la sección transversal compuesta de A_c más $(\bar{\alpha} \cdot A_{ns})$, donde $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{(t,t_0)} = E_s / \bar{E}_{c(t,t_0)}$ es la relación modular de edad ajustada definida en esta sección. Aplicando la ecuación (3.5) con las modificaciones respectivas obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_o \\ \Delta \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{\bar{E}_c(\bar{AI} - B^2)} \begin{bmatrix} \bar{I} & -\bar{B} \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta N \\ -\Delta M \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Donde \bar{A} , \bar{B} y \bar{I} son el área, primer y segundo momento respectivamente alrededor de un eje que pasa por el punto de referencia O de la sección transformada de edad ajustada, $\bar{E}_c = \bar{E}_{c(t,t_0)}$ es el módulo de elasticidad de edad ajustada de una porción de área escogida de la sección transversal compuesta como material de referencia. Conociendo el incremento de deformación en el tiempo a partir de la ecuación (3.10), se puede calcular los incrementos de esfuerzos en el tiempo al nivel del refuerzo y en cualquier fibra de concreto.

Finalmente, la deformación total en el tiempo t es la suma de las deformaciones obtenidas en los pasos 1 y 4, mientras que el esfuerzo correspondiente es la suma del esfuerzo en t_0 determinado en la etapa 1 y los cambios dependientes del tiempo determinados en las etapas 3 y 4. Así, tenemos para una fibra de concreto:

$$\sigma_{(t)} = \sigma_{(t_0)} + \Delta \sigma_{restricción} + \bar{E}_{c(t,t_0)} \cdot (\Delta \varepsilon_o + y \cdot \Delta \psi) \quad (3.11)$$

A nivel de acero de refuerzo:

$$\sigma_{(t)} = \sigma_{ns(t_0)} + E_{ns} \cdot (\Delta \varepsilon_o + y_{ns} \cdot \Delta \psi) \quad (3.12)$$

Donde $\sigma_{ns(t_0)}$ es el esfuerzo a nivel de acero de refuerzo en t_0 ; E_{ns} es el módulo de elasticidad del acero e y_{ns} es la distancia medida desde el punto de referencia O hasta el nivel del acero de refuerzo. Las expresiones anteriormente deducidas toman en cuenta el efecto de contracción del concreto en el tiempo; pero sólo serán consideradas las deformaciones por flujo plástico.



3.3 CONSIDERACIONES EN EL ANÁLISIS DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO

La aplicación de una fuerza axial N y un momento de flexión M obtenidos del análisis elástico convencional en una sección transversal de concreto reforzado podrían producir fisuramiento en la sección transversal en el tiempo t_0 . En esta sección se presentan las ecuaciones deducidas anteriormente en una forma más simplificada con respecto al centroide de gravedad de la sección transformada de edad ajustada. Además, se considera desde un inicio que las fuerzas M y N actúan en el punto de referencia O que coincide con el centroide de la sección transformada en el tiempo t ($\bar{B} = 0$).

Reemplazando la ecuación (3.7) en (3.9) y esta a su vez en (3.10) obtenemos:

$$\Delta \varepsilon_o = \eta \cdot \phi_{(t,t_0)} \cdot \left(\varepsilon_{o(t_0)} + \psi_{(t_0)} \cdot y_c \right) \quad (3.13)$$

$$\Delta \psi = \kappa \cdot \phi_{(t,t_0)} \cdot \left(\psi_{(t_0)} + \varepsilon_{o(t_0)} \cdot \frac{y_c}{r_c^2} \right) \quad (3.14)$$

Donde $\varepsilon_{o(t_0)}$ y $\psi_{(t_0)}$ son la deformación axial media y curvatura en el tiempo t_0 con respecto al centroide de la sección transformada en el tiempo t , η y κ son las relaciones de área y momento de inercia de la sección neta de concreto con respecto al área y momento de inercia de la sección transformada de edad ajustada en el tiempo t , respectivamente.

$$\eta = \frac{A_c}{\bar{A}} \quad (3.15)$$

$$\kappa = \frac{I_c}{\bar{I}} \quad (3.16)$$

Donde A_c y \bar{A} son las áreas de la sección de concreto y de la sección transformada de edad ajustada, I_c y \bar{I} son los momentos de inercia del área de concreto y de la sección transformada de edad ajustada alrededor de un eje que pasa por O (centroide de la sección transformada de edad ajustada), $r_c^2 = I_c / A_c$ es el radio de giro del área de concreto, y_c es la coordenada del centroide del área neta de concreto medida desde el punto de referencia O hacia abajo. Así en la Fig. 3.3 y_c tiene un valor negativo.

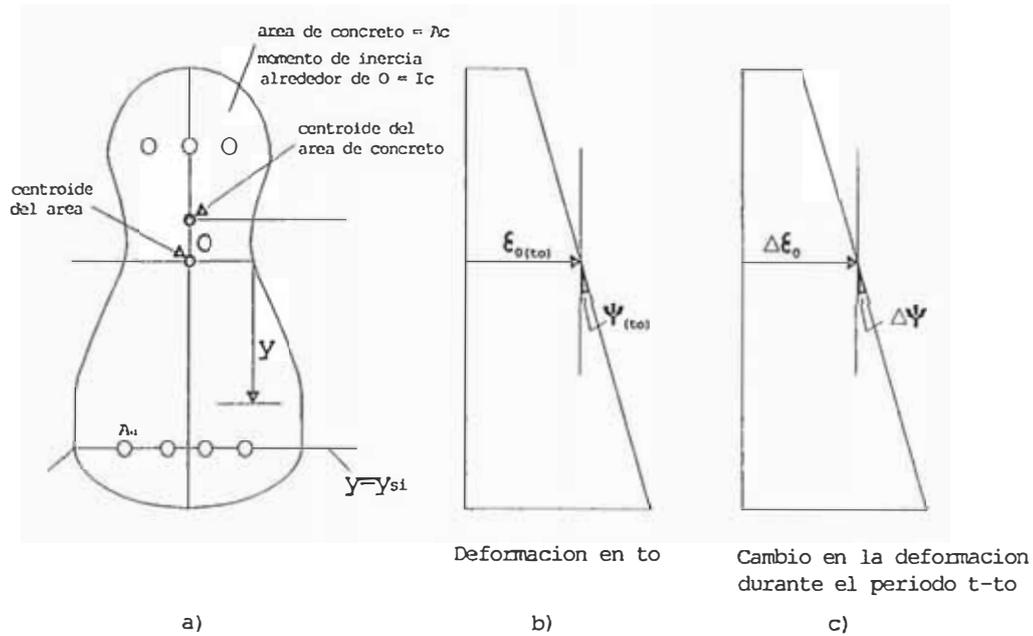


Fig. 3.3 Definición de la nomenclatura usada en las ecuaciones (3.13) y (3.14)

Se debe tener en cuenta que al aplicar las ecuaciones (3.13) y (3.14) el valor de $\epsilon_{0(t_0)}$ debe ser considerado a un nivel en el que todas las superposiciones se realicen sobre el punto de referencia O . Pero debido a la variación del módulo de elasticidad del concreto con el tiempo, el centroide de la sección transformada en el tiempo t tiene una posición diferente al centroide en el tiempo t_0 originándose un desfase. Para tener un mismo nivel de referencia, simplemente se considera la deformación axial media $\epsilon_{0(t_0)}$ en t_0 con respecto al nivel del centroide de la sección transformada en t .

Durante el período de tiempo $t - t_0$, las propiedades del concreto desarrollan un incremento que casi se uniformiza a partir del quinto año desde que la estructura ingreso a la condición de servicio como lo muestra la Fig. 3.4. En general, en el presente trabajo se ha considerado sólo la variación de las principales propiedades del concreto con el tiempo para el análisis, otras propiedades como la contracción, deformación debido a una historia de temperatura, relajación del acero presforzado (si hubiera) y la variación de la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto no se toman en cuenta; a pesar que en la realidad todas actúan simultáneamente.

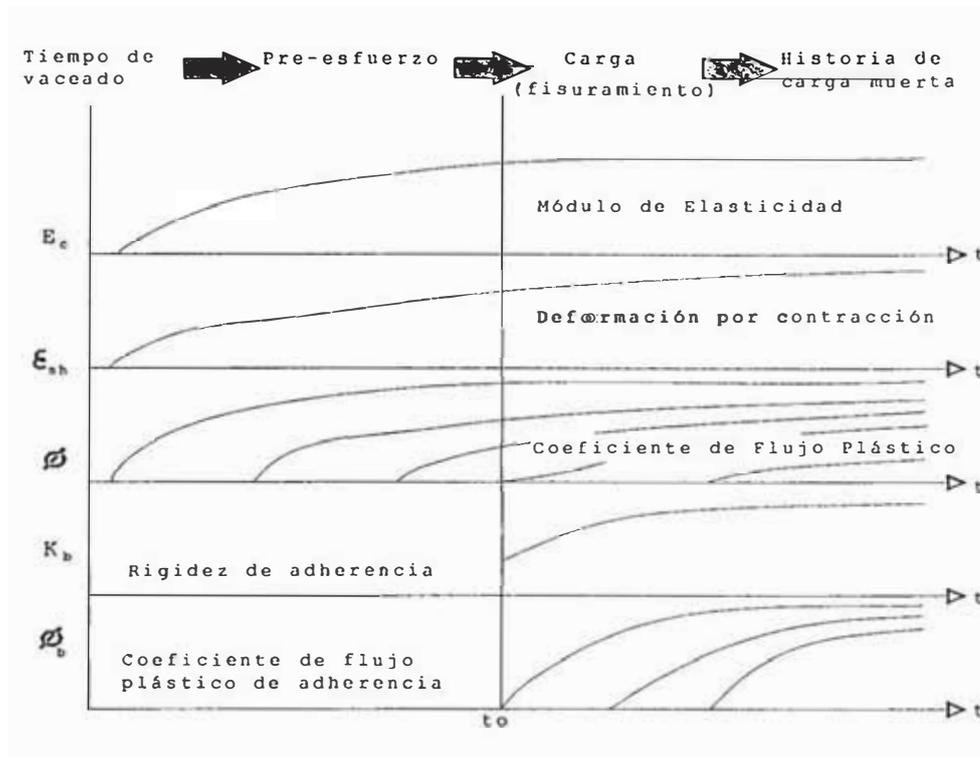


Fig.3.4 Desarrollo de las propiedades del concreto con el tiempo.

3.4 MOVIMIENTO DE APOYOS EN ESTRUCTURAS

El flujo plástico no sólo tiene efecto en la redistribución de esfuerzos en secciones de concreto armado bajo carga permanente; si no también en los cambios que se producen debido al movimiento de un apoyo en una estructura estáticamente indeterminada de concreto armado. Las fuerzas inducidas gradualmente por el movimiento del apoyo son relajadas posteriormente por la acción del flujo plástico.

Un caso real del movimiento de un apoyo es el asentamiento debido a la consolidación del suelo desarrollado gradualmente sobre un período de tiempo. Simultáneamente, a la acción anterior se le suma la deformación por la acción del flujo plástico en la estructura, que inclusive puede continuar desarrollándose después que se alcanza el máximo asentamiento. Los cambios en las fuerzas internas empiezan desde cero al inicio del asentamiento hasta valores máximos en o cerca del final del período de asentamiento, para posteriormente ser relajados por la acción del flujo plástico.

Lo anteriormente descrito se ilustra en la Fig. 3.5 considerando la fuerza de reacción F en B causada por un asentamiento δ del apoyo central de la viga continua mostrada. Un primer análisis sería considerar que todo el asentamiento se produce rápidamente en el



tiempo de carga t_0 , induciendo instantáneamente una fuerza de reacción R_0 en B . Si subsecuentemente δ se mantiene constante, entonces el flujo plástico del concreto causará relajación de la reacción como se muestra en la curva A .

De otra manera, la curva B en el mismo gráfico representa la variación de la fuerza F cuando se cambia la magnitud del asentamiento de cero a δ sobre un período de tiempo especificado. En una primera etapa la fuerza F se incrementa desde cero a un valor máximo F_{max} , el cual es generalmente mucho más pequeño que R_0 , para posteriormente decrecer gradualmente hasta un nivel casi constante.

Los valores de la reacción interna con el tiempo en el apoyo que sufre asentamiento se calculan mediante las ecuaciones (3.17) y (3.18). La ecuación (3.17) determina el valor máximo que alcanza la reacción interna en el tiempo t_1 debido a un asentamiento introducido gradualmente desde cero en el tiempo t_0 hasta t_1 . Aquellos valores entre los tiempos t_0 y t_1 no pueden ser calculados, a menos que se utilice un procedimiento paso a paso para su obtención. Los valores de la reacción interna después del tiempo t_1 y hasta un subsiguiente tiempo t_2 se determinan aproximadamente por la tabulación de varios puntos entre los tiempos t_1 y t_2 usando la ecuación (3.18).

$$F_{(t_1)} = R_0 \cdot \left(\frac{1}{1 + \chi \cdot \phi_{(t_1, t_0)}} \right) \quad (3.17)$$

$$F_{(t_2)} = F_{(t_1)} \cdot \left(1 - \frac{E_{c(t_1)}}{E_{c(t_2)}} \cdot \left(\frac{\phi_{(t_2, t_2)} - \phi_{(t_1, t_2)}}{1 + \chi \cdot \phi_{(t_2, t_1)}} \right) \right) \quad (3.18)$$

En la ecuación (3.17), R_0 es el valor de la reacción interna cuando δ ocurre rápidamente en el tiempo t_0 . El valor de R_0 se obtiene por análisis elástico convencional considerando el módulo de elasticidad del concreto igual a $E_{c(t_0)}$. Además, ϕ y χ son los coeficientes de flujo plástico y envejecimiento respectivamente, t_e es un tiempo equivalente entre t_0 y t_1 cuyo valor se determina por prueba y error mediante la siguiente expresión:

$$\frac{1}{E_{c(t_e)}} \cdot (1 + \phi_{(t_1, t_e)}) = \frac{1}{E_{c(t_0)}} \cdot [1 + \chi \cdot \phi_{(t_1, t_0)}] \quad (3.19)$$

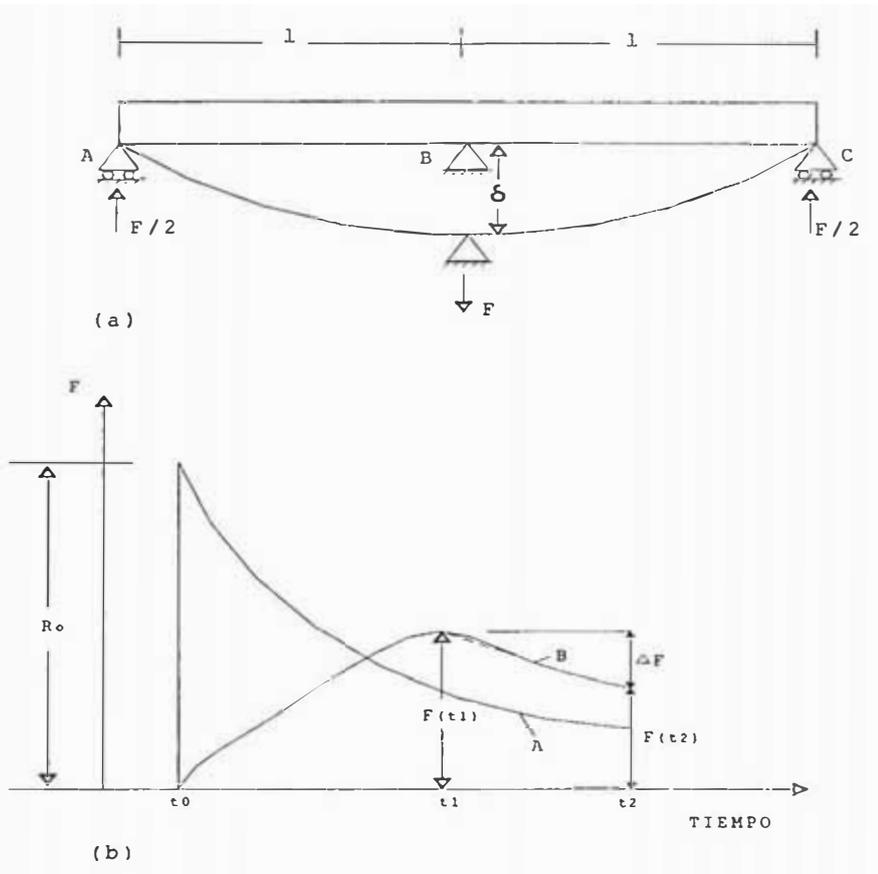


Fig. 3.5 Fuerzas dependientes del tiempo causadas por el asentamiento de un apoyo en una viga continua (a) viga continua; (b) reacción en el apoyo central versus el tiempo; la curva A representa la variación de F cuando el asentamiento se introduce rápidamente en t_0 , en la curva B el asentamiento es introducido gradualmente.

La ecuación (3.19) se entiende como si algún incremento de esfuerzo se introdujera en el tiempo efectivo t_e y se mantuviera constante hasta el tiempo t_1 , produciendo una deformación de la misma magnitud como si el mismo incremento de esfuerzo se introdujera gradualmente desde un valor inicial igual cero en t_0 hasta su valor final en el tiempo t_1 . Finalmente, cuando el asentamiento total se introduce rápidamente en el tiempo t_0 , se puede usar la ecuación (3.18) para encontrar las fuerzas inducidas en cualquier tiempo t después de t_0 por sustitución de $t_1 = t_0 = t_e$ y $t_2 = t$; así realizando estos reemplazos obtenemos:

$$F_{(t)} = R_o \cdot \left(1 - \frac{\phi_{(t,t_0)}}{(1 + \chi \cdot \phi_{(t,t_0)})} \right) \tag{3.20}$$



CAPITULO 4

ANÁLISIS DE FUERZAS DE RESTRICCIÓN DE FLUJO PLÁSTICO

4.1 PRINCIPIOS DE TRABAJOS VIRTUALES EN EL ANÁLISIS DE MARCOS ESTRUCTURALES

En este capítulo aplicaremos los principios de trabajos virtuales en la construcción de relaciones algebraicas provenientes del análisis estructural matricial, pues la necesidad de obtener expresiones que describan el estado desplazado de los elementos de un marco estructural así lo requiere. La aproximación utilizada aquí es siempre bastante cercana en la descripción de la forma de los estados desplazados o funciones de forma de los elementos.

4.1.1 DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE FORMA

En el análisis elástico lineal los requerimientos necesarios para la construcción de las ecuaciones de rigidez de un elemento por aproximaciones de desplazamientos virtuales son:

1. Constantes elásticas, las cuales relacionan los esfuerzos y las deformaciones del material.
2. Descripciones de los estados desplazados virtuales y reales del elemento.
3. Relaciones diferenciales relevantes entre deformación y desplazamiento

Las constantes elásticas se conocen de ensayos de laboratorio, mientras que las relaciones diferenciales entre la deformación y el desplazamiento son relaciones básicas en mecánica estructural definidas para los casos de interés. Lógicamente, se ha tomado en cuenta que el estado desplazado virtual tenga la misma forma como el estado desplazado real.

Se puede encontrar el estado desplazado de los elementos estructurales más simples mediante la solución de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de éstos.



Alternativamente, es posible empezar con la suposición de que el estado desplazado del elemento no se obtiene de la solución directa de una ecuación diferencial; aunque en la forma más simple de un elemento esta podría fortuitamente corresponder al estado desplazado exacto; pero generalmente la suposición realizada será una aproximación.

Cualquiera sea la aproximación tomada en la definición del estado desplazado de un elemento, el objetivo es producir una expresión algebraica en términos de los desplazamientos nodales del elemento, es decir una expresión de la forma siguiente:

$$\Delta = N_1 \cdot \Delta_1 + N_2 \cdot \Delta_2 + \dots + N_i \cdot \Delta_i$$

$$\Delta = \sum N_i \cdot \Delta_i \quad (4.1)$$

Donde Δ es la componente de desplazamiento en cuestión (semejante a la deformación axial " u " en el caso de un miembro axial o al desplazamiento por flexión " v " en el caso de una viga), Δ_i es el i ésimo grado de libertad del elemento, N_i es la función de forma correspondiente a Δ_i y n es el número total de grados de libertad en los nudos del elemento.

4.1.2 FORMULACION DE LAS FUNCIONES DE FORMA

La Fig. 4.1 muestra por ejemplo un miembro axial con deformación axial $\Delta = u$, $\Delta_1 = u_1$ y $\Delta_2 = u_2$, en donde la forma de la expresión del desplazamiento en función de los desplazamientos nodales axiales es:

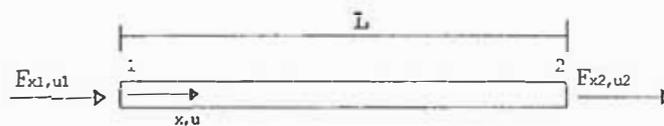


Fig. 4.1 Elemento sometido a fuerza axial

$$u = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 \quad (4.2)$$

En forma similar para un elemento sometido a flexión con $\Delta = v$, $\Delta_1 = v_1$, $\Delta_2 = v_2$, $\Delta_3 = \theta_1$ y $\Delta_4 = \theta_2$

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot \theta_1 + N_4 \cdot \theta_2 \quad (4.3)$$



La obtención de la matriz de rigidez de un elemento de un marco estructural se realiza mediante una superposición axial y flexional alrededor de dos ejes perpendiculares entre sí. Consecuentemente, las funciones de desplazamiento axial y flexional citadas arriba son suficientes para la derivación de las mismas relaciones a través de la aplicación de los conceptos de trabajo virtual.

Faltando establecer la forma algebraica y significado físico de las funciones de forma (N_i) para ambos casos: axial y flexional, se empezará con el caso más simple que corresponde al de un miembro axial con sección transversal constante igual a A . Para este elemento se conoce que la deformación es constante, desde que $\epsilon_x = du / dx$, donde u es una expresión lineal en x y la relación más general de ésta es:

$$u = a_1 + a_2 \cdot x \quad (4.4)$$

Los términos a_1 y a_2 son constantes que todavía no tienen significado físico; sin embargo esto todavía no es prioritario como encontrar las dos constantes en mención para determinar los desplazamientos nodales, u_1 y u_2 . Evaluando la ecuación anterior en los nudos tenemos en el punto 1, donde $x = 0$, lo siguiente:

$$u = u_1 = a_1$$

También, en el punto 2, donde $x = L$ y con los resultados de arriba

$$u_2 = u_1 + a_2 \cdot L$$

Finalmente

$$a_2 = (u_2 - u_1) / L$$

La sustitución de las expresiones anteriores para a_1 y a_2 en la ecuación (4.4):

$$u = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \quad (4.5)$$

Por comparación de las ecuaciones (4.2) y (4.5) deducimos que $N_1 = (1 - (x/L))$ y $N_2 = x/L$.

Es importante examinar las funciones de forma más cercanamente, con la finalidad de establecer propiedades aplicables a las funciones de forma de cada elemento. Antes que todo, las funciones de forma son adimensionales para este caso uniaxial con valor unitario en el punto 1 ($x = 0, u = u_1$) y cero en el punto 2 ($x = L, u = u_2$)

La Fig. 4.2 muestra la variación de N_1 y N_2 en función de la coordenada x . Además, cada gráfica describe el desplazamiento axial del elemento cuando éste sufre un desplazamiento unitario en el punto nodal correspondiente a N_i (punto 1 en el caso de N_1 , punto 2 en el caso de N_2) manteniendo en cero los otros grados de libertad del elemento.

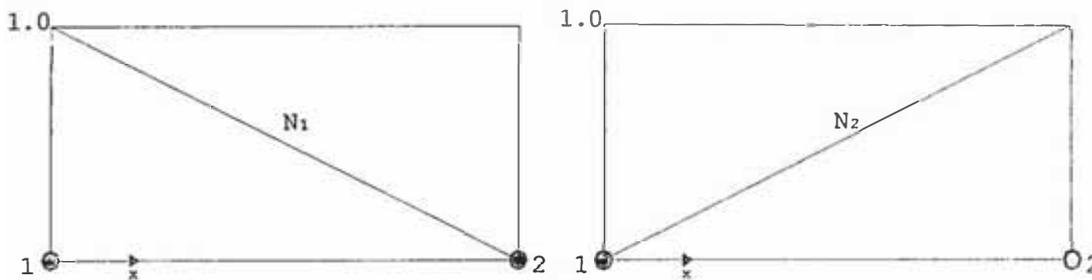


Fig. 4.2 Funciones de forma para un elemento sometido a deformación axial

La construcción de las funciones de forma para comportamiento flexional envuelve un álgebra más extensa que el caso de deformación axial; pero sigue el mismo principio. A continuación se describe el elemento flexional en la Fig. 4.3 en términos de sus cuatro desplazamientos nodales $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$. En el caso flexional, los desplazamientos angulares se derivan de los desplazamientos transversales mediante $\theta_1 = dv/dx|_1$, $\theta_2 = dv/dx|_2$.

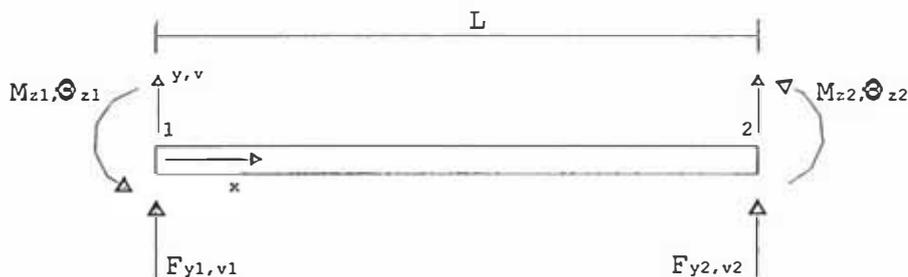


Fig. 4.3 Elemento flexional

En el caso de deformación axial una expresión polinomial de primer grado resultó adecuada para describir el desplazamiento en función de los dos desplazamientos extremos. Resulta lógico adoptar una expresión polinomial de tercer grado para un



elemento flexional que posee cuatro desplazamientos nodales. La expresión polinomial para este caso en cuestión debe ser de la forma:

$$v = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \quad (4.6)$$

La evaluación de v , en el punto 1 ($x = 0$) es:

$$v_1 = a_1$$

En el punto 2 ($x = L$) es:

$$v_2 = a_1 + a_2 \cdot L + a_3 \cdot L^2 + a_4 \cdot L^3$$

Para evaluar θ_1 y θ_2 necesitamos una expresión para la pendiente:

$$\theta = dv/dx = a_2 + 2 \cdot a_3 \cdot x + 3 \cdot a_4 \cdot x^2$$

Entonces en el punto 1:

$$\theta_1 = a_2$$

En el punto 2

$$\theta_2 = a_2 + 2 \cdot a_3 \cdot L + 3 \cdot a_4 \cdot L^2$$

Resumiendo las ecuaciones presentadas arriba obtenemos:

$$v_1 = a_1$$

$$v_2 = a_1 + a_2 \cdot L + a_3 \cdot L^2 + a_4 \cdot L^3$$

$$\theta_1 = a_2$$

$$\theta_2 = a_2 + 2 \cdot a_3 \cdot L + 3 \cdot a_4 \cdot L^2$$

Solucionando el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas con álgebra simple obtenemos los valores de:

$$a_1 = v_1$$



$$a_2 = \theta_1$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{L^2}\right) \cdot (-3 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 - 2 \cdot \theta_1 \cdot L - \theta_2 \cdot L)$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{L^3}\right) \cdot (2 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 + \theta_1 \cdot L + \theta_2 \cdot L)$$

La sustitución de a_1 , a_2 , a_3 y a_4 en la ecuación (4.6) determina la expresión para el desplazamiento a lo largo del elemento:

$$v = \left(1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \cdot v_1 + \left(3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \cdot v_2 + x \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot \theta_1 + x \cdot \left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right) \cdot \theta_2 \quad (4.7)$$

Así, por comparación con la ecuación (4.3)

$$N_1 = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_3 = x \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$N_2 = 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_4 = x \cdot \left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)\right)$$

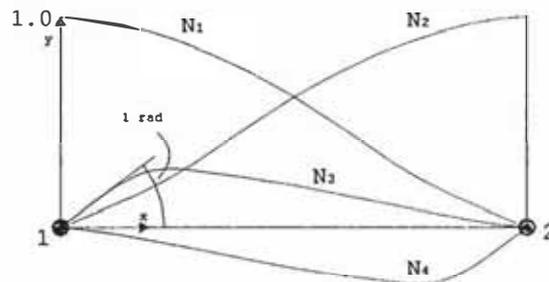


Fig. 4.4 Funciones de forma para el caso de flexión.

4.2 FUERZAS DE RESTRICCIÓN ARTIFICIAL

Las fuerzas restringidoras nodales son 6 fuerzas aplicadas en los extremos de un elemento cualquiera (tres por cada nudo), para prevenir la deformación debido al flujo plástico en todas las secciones del elemento. Posteriormente, estas fuerzas son



removidas por la aplicación de un juego de fuerzas iguales y opuestas sobre el elemento en mención. Por lo tanto, las fuerzas internas de restricción artificial ΔN y ΔM en cada sección transversal pueden ser reemplazadas por la aplicación de fuerzas externas equivalentes en los nudos de cada elemento de una estructura, como lo muestra la Fig. 4.5

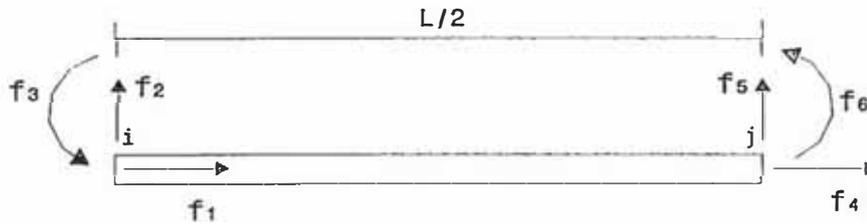


Fig. 4.5 Elemento sometido a fuerzas nodales de restricción artificial

La obtención de semejantes fuerzas se presenta a continuación usando el principio de trabajos virtuales y las funciones de forma explicadas anteriormente.

4.2.1 EFECTOS DE FUERZA AXIAL

La deformación axial en cualquier sección del elemento puede ser escrita de acuerdo a la ecuación (4.5) en forma vectorial:

$$u = \left\{ \left(I - \frac{x}{L} \right) \quad \frac{x}{L} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad u = H \cdot A$$

$$u' = \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad u' = H' \cdot A$$

Donde H' es el vector primera derivada respecto a la coordenada x de las funciones de forma para el caso de fuerza axial. La teoría de trabajos virtuales establece que los efectos de las fuerzas internas ΔN , desarrolladas con el tiempo debido al flujo plástico en las diversas secciones de un elemento, pueden ser representadas por un par de fuerzas axiales en los nudos extremos (i, j) del elemento en mención. La magnitud de estas fuerzas axiales de acuerdo a la teoría de trabajos virtuales está representada por la siguiente expresión:

$$f^e = \int H' \Delta N \cdot dx \quad (4.8)$$



Donde:

H' : es el vector que representa la primera derivada de las funciones de forma para el caso de fuerza axial.

ΔN : es la fuerza axial restringidora que se produce debido al flujo plástico.

Aplicando la regla de Simpson para la integral de la ecuación (4.8) con $H' = (-1/L \ 1/L)$ y considerando solamente tres secciones representativas por cada elemento como en se muestra la Fig. 4.6 tenemos:

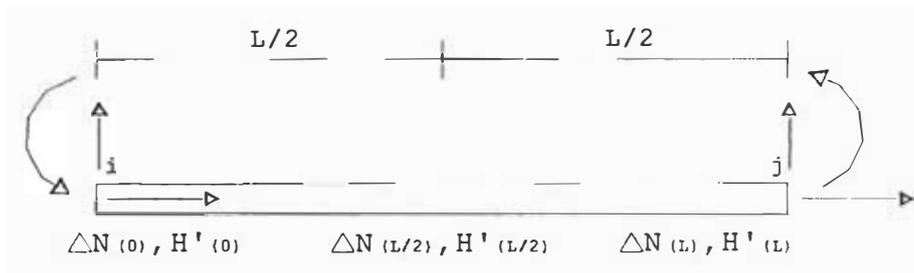


Fig. 4.6 Elemento sometido a fuerzas internas debido al flujo plástico del concreto (caso axial)

$$f^e = \frac{L}{6} \cdot (H'_{(0)} \cdot \Delta N_{(0)} + 4 \cdot H'_{(L/2)} \cdot \Delta N_{(L/2)} + H'_{(L)} \cdot \Delta N_{(L)}) \quad (4.9)$$

Reemplazando H' en la última expresión:

$$f^e_{ui} = -\frac{1}{6} \cdot (\Delta N_{(0)} + 4 \cdot \Delta N_{(L/2)} + \Delta N_{(L)}) \quad (4.10)$$

$$f^e_{uj} = \frac{1}{6} \cdot (\Delta N_{(0)} + 4 \cdot \Delta N_{(L/2)} + \Delta N_{(L)}) \quad (4.11)$$

4.2.2 EFECTOS DE FLEXIÓN Y CORTE

En forma similar al caso de fuerza axial, el desplazamiento vertical a lo largo de la luz de un elemento flexional como él mostrado en la Fig. 4.7, puede ser escrito en una forma vectorial como en la ecuación (4.7). El desplazamiento vertical en un punto del elemento depende de la posición x de la sección y de los puntos nodales 1 y 2. Esta misma dependencia se mantendrá para el cálculo del giro y la curvatura en una sección



cualquiera del elemento, siendo de interés prioritario esta última. Derivando la ecuación (4.7) dos veces respecto a x obtenemos:

$$\psi = v'' = \left(-\frac{6}{L^2} + 12 \cdot \frac{x}{L^3} \right) \cdot v_1 + \left(\frac{6}{L^2} - 12 \cdot \frac{x}{L^3} \right) \cdot v_2 + \left(6 \cdot \frac{x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \cdot \theta_1 + \left(6 \cdot \frac{x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \cdot \theta_2$$

En su forma vectorial para un elemento genérico:

$$v'' = \left\{ \left(-\frac{6}{L^2} + 12 \cdot \frac{x}{L^3} \right) \quad \left(6 \cdot \frac{x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - 12 \cdot \frac{x}{L^3} \right) \quad \left(6 \cdot \frac{x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \right\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

$$v'' = B \cdot A$$

Donde B es el vector obtenido al derivar las funciones de forma dos veces respecto a x para el caso de flexión. Además, por la misma razón que en el caso de fuerza axial, las fuerzas restringidoras para el caso de flexión pura son obtenidas también por el método de trabajos virtuales mediante la siguiente ecuación:

$$f^e = \int B^T \cdot \Delta M \cdot dx \quad (4.13)$$

Donde:

B^T : es el vector transpuesta que representa la curvatura.

ΔM : es el momento restringidor interno que se produce debido al flujo plástico.

Para solucionar la ecuación (4.13) mediante la regla de Simpson, se realizan las siguientes consideraciones:

- Sólo se toman en cuenta tres secciones por cada elemento: dos ubicadas en los nudos i, j y el último ubicado en la sección central del elemento (Fig. 4.7).



- En cada sección se calcula el momento restringidor interno ΔM debido al flujo plástico del concreto mediante la ecuación (3.7). Los momentos restringidores en la sección son: $\Delta M_{(0)}$ para $x = 0$ (nudo extremo izquierdo i), $\Delta M_{(L)}$ para $x = L$ (nudo extremo derecho j) y $\Delta M_{(L/2)}$ para la parte central del elemento con B igual a:

$$B = \left\{ \left(-\frac{6}{L^2} + 12 \cdot \frac{x}{L^3} \right) \quad \left(6 \cdot \frac{x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - 12 \cdot \frac{x}{L^3} \right) \quad \left(6 \cdot \frac{x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \right\}$$

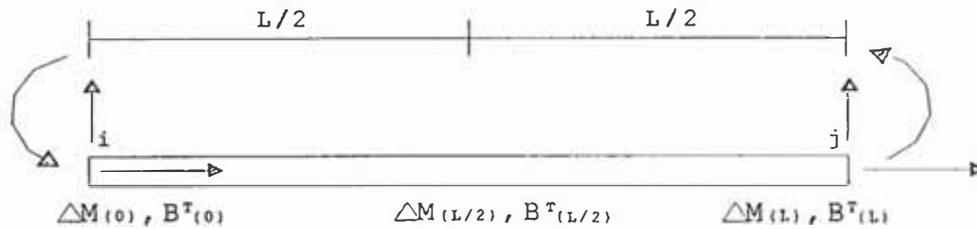


Fig. 4.7 Elemento sometido a fuerzas internas debido al flujo plástico del concreto (caso flexión)

$$f^e = \frac{L}{6} \cdot \left(B'_{(0)} \cdot \Delta M_{(0)} + 4 \cdot B'_{(L/2)} \cdot \Delta M_{(L/2)} + B'_{(L)} \cdot \Delta M_{(L)} \right) \quad (4.14)$$

Reemplazando los valores de B^T en (4.14):

$$f^e_{vi} = \left(\frac{L}{6} \right) \cdot \left[\left(-\frac{6}{L^2} \right) \cdot \Delta M_{(0)} + \left(\frac{6}{L^2} \right) \cdot \Delta M_{(L)} \right] \quad (4.15)$$

$$f^e_{\theta i} = \left(\frac{L}{6} \right) \cdot \left[\left(-\frac{4}{L} \right) \cdot \Delta M_{(0)} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{L} \right) \cdot \Delta M_{(L/2)} + \left(\frac{2}{L} \right) \cdot \Delta M_{(L)} \right] \quad (4.16)$$

$$f^e_{vj} = \left(\frac{L}{6} \right) \cdot \left[\left(-\frac{6}{L^2} \right) \cdot \Delta M_{(0)} + \left(\frac{6}{L^2} \right) \cdot \Delta M_{(L)} \right] \quad (4.17)$$

$$f^e_{\theta j} = \left(\frac{L}{6} \right) \cdot \left[\left(-\frac{2}{L} \right) \cdot \Delta M_{(0)} + 4 \cdot \left(\frac{1}{L} \right) \cdot \Delta M_{(L/2)} + \left(\frac{4}{L} \right) \cdot \Delta M_{(L)} \right] \quad (4.18)$$

Observación: es posible ajustar los valores ΔM determinados en las diferentes secciones del elemento, a una parábola de segundo grado mediante el método de mínimos cuadrados. La obtención de una función $\Delta M_{(x)}$ dependiente de la coordenada x a lo largo del elemento puede actuar conjuntamente con $B^T_{(x)}$ en la ecuación (4.13) para encontrar una expresión literal de f^e .



4.2.3 VECTOR DE FUERZAS

Con la teoría explicada anteriormente en las secciones 4.2.1 y 4.2.2 representamos el efecto que tienen las fuerzas internas restringidoras ΔN , ΔM mediante fuerzas restringidoras nodales locales en el elemento (Fig. 4.5):

$$f^e = \left. \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{6} \right) \left[\left(\Delta N_{(0)} + 4 \cdot \Delta N_{(L/2)} + \Delta N_{(L)} \right) \right] \dots \dots \dots u_i \\ \left(\frac{L}{6} \right) \left[\left(-\frac{6}{L^2} \right) \cdot \Delta M_{(0)} + \left(\frac{6}{L^2} \right) \cdot \Delta M_{(L)} \right] \dots \dots \dots v_i \\ \left(\frac{L}{6} \right) \left[\left(-\frac{4}{L} \right) \cdot \Delta M_{(0)} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{L} \right) \cdot \Delta M_{(L/2)} + \left(\frac{2}{L} \right) \cdot \Delta M_{(L)} \right] \dots \dots \dots \theta_i \\ \left(-\frac{1}{6} \right) \left[\left(\Delta N_{(0)} + 4 \cdot \Delta N_{(L/2)} + \Delta N_{(L)} \right) \right] \dots \dots \dots u_j \\ \left(-\frac{L}{6} \right) \left[\left(-\frac{6}{L^2} \right) \cdot \Delta M_{(0)} + \left(\frac{6}{L^2} \right) \cdot \Delta M_{(L)} \right] \dots \dots \dots v_j \\ \left(\frac{L}{6} \right) \left[\left(-\frac{2}{L} \right) \cdot \Delta M_{(0)} + 4 \cdot \left(\frac{1}{L} \right) \cdot \Delta M_{(L/2)} + \left(\frac{4}{L} \right) \cdot \Delta M_{(L)} \right] \dots \dots \dots \theta_j \end{array} \right\} \quad (4.19)$$



CAPITULO 5

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS CONSIDERANDO AGRIETAMIENTO

5.1 CONSIDERACIONES BASICAS

Generalmente en una sección fisurada se supone que el concreto en la zona de tensión no contribuye a resistir las fuerzas internas que actúan sobre la misma, debido a que la fibra extrema en tensión ha sobrepasado el módulo de ruptura del concreto f_{ct} , donde el área efectiva de la sección transversal es igual al área del concreto en compresión más el área del acero de refuerzo.

Igualmente, se considera que la sección permanece plana antes y después de la deformación y que existe compatibilidad en las deformaciones del acero de refuerzo y las fibras adyacentes de concreto. Estas dos suposiciones se satisfacen en el análisis mediante el uso de las propiedades de la sección transformada totalmente fisurada, compuesta del área de concreto en la zona de compresión A_c más $\alpha.A_s$ con $\alpha = E_s / E_c$. Donde, E_s y E_c son el módulo de elasticidad del acero de refuerzo y del concreto, respectivamente, en el tiempo de aplicación de la carga t_o . Los diagramas de esfuerzos y deformaciones se determinan al igual que en una sección no fisurada a través de una deformación axial media y la curvatura respectiva de sección en el tiempo t_o . Para el análisis de los efectos producidos por el flujo plástico, E_c será igual al módulo de elasticidad de edad ajustada.

Como consecuencia de la redistribución de esfuerzos, el peralte de la zona de compresión en una sección fisurada varía con el tiempo, lo que conlleva a que el área neta de concreto A_c sea también variable. Sin embargo, se considera que el área neta de concreto permanece constante e igual a la del tiempo t_o , para permitir una simplicidad en la superposición de efectos debido al flujo plástico. Generalmente, esta consideración produce un error despreciable; a pesar que puede ser eliminada utilizando procesos iterativos para el cálculo de las deformaciones.

En general, un elemento fisurado tendrá tres tipos de secciones a lo largo de la luz como se ilustra en la Fig. 5.1.

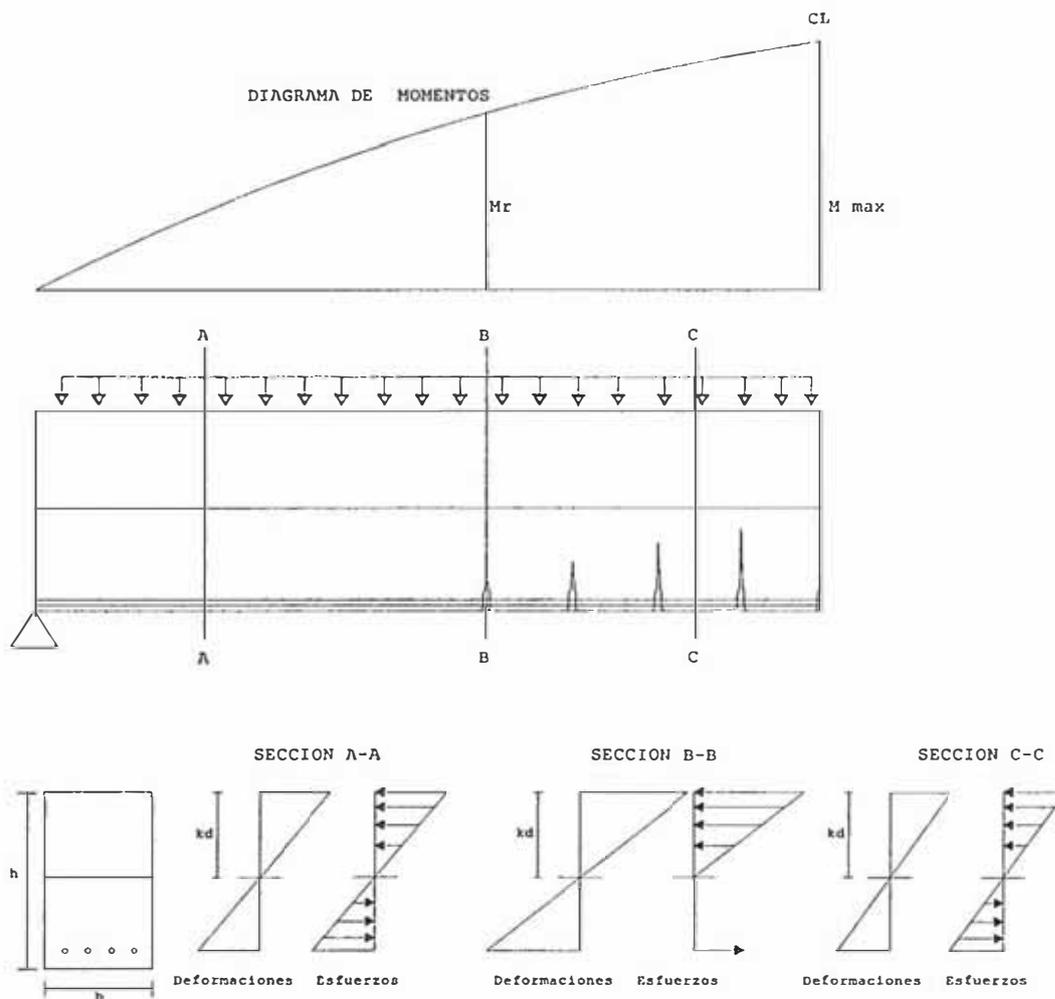


Fig. 5.1 Diversas zonas de esfuerzos y agrietamiento en una viga de concreto reforzado en condicion de servicio.

En las regiones en las que el momento externo es menor que el momento de agrietamiento, M_{cr} , el miembro no está fisurado y el concreto en zona de tensión contribuye efectivamente a resistir el momento externo, siendo las deformaciones bastante pequeñas (corte A - A).

En aquellas regiones en las que el momento externo es mayor que el momento de agrietamiento pueden distinguirse dos casos: el primer caso (corte B - B) corresponde a las secciones transversales donde la tensión ha producido fisuración. En estos casos la zona de tensión del concreto no contribuye mucho a la resistencia del momento externo. El segundo caso (corte C - C) corresponde a secciones entre las grietas de tensión. En estas secciones el concreto de la zona de tensión proporciona parte de la resistencia al momento y las deformaciones y los esfuerzos son menores que los que existen en una sección que coincide con una fisura.



De alguna manera se puede apreciar en la Fig. 5.1 que las grietas van prolongándose más cerca al eje neutro conforme el momento flexional aumenta. Además, se puede decir que la profundidad y el ancho de las grietas varían de algún modo con el diagrama de momentos flectores. Por lo tanto, la rigidez axial y flexional del elemento también son variables a lo largo de la luz de la viga, alcanzando su valor máximo cuando la inercia y el área de la sección transversal corresponden a las secciones de corte A - A; sin embargo cuando la grieta se prolonga totalmente hasta el eje neutro (sólo considerando concreto en compresión y el acero de refuerzo) las rigideces en la sección son mínimas.

Las secciones en los cortes B - B y C - C representan un estado parcialmente fisurado, donde las rigideces se obtienen mediante la interpolación de los estados 1 y 2 de la sección transversal. La rigidez axial y flexional de la sección transversal es máxima en el estado 1 y mínima en el estado 2. Ambos estados se explican a continuación.

5.1.1 ESTADO 1

En esta condición el esfuerzo en la fibra extrema en tensión aún es menor que el módulo de ruptura del concreto. El área A e inercia I de la sección transversal se calculan considerando que todo el concreto conjuntamente con el acero resisten las acciones externas (M y N). La deformación axial media en el tiempo t_0 es $\varepsilon_{o(t_0)}$ y la curvatura respectiva está representada por $\Psi_{(t_0)}$. Además, debido al cambio de posición del centro de gravedad con el tiempo se obtiene una nueva área total transformada no fisurada A_t y un momento de inercia final I_t en el tiempo final t . El flujo plástico ocurre sólo en el concreto, los efectos directos son sobre el área neta de concreto y las propiedades se determinan tomando como referencia el centroide de la sección transformada en el tiempo t . Estas propiedades son: el área de concreto A_c , el momento de inercia I_c y el radio de giro r_c^2 .

El gráfico a continuación muestra el cambio en la posición del eje neutro con el tiempo en una sección transversal cualquiera. También, se realiza una comparación de los parámetros usados en cada tiempo de análisis (tiempos t y t_0) para el cálculo de las deformaciones medias, el incremento de deformaciones debido al flujo plástico y las deformaciones finales en el tiempo t .



Estado 1: No Fisurado

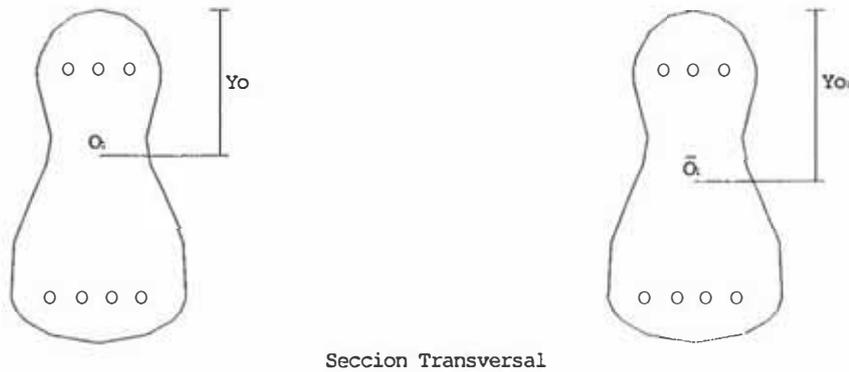


Fig. 5.2 Cambio del centroide de gravedad con el tiempo para el estado 1

E_c : módulo de elasticidad en t_0

α : razón modular en t_0 (E_s / E_c)

O_1 : centroide de la sección transformada en el tiempo t_0

Propiedades con respecto a O_1 .

Y_{o1}, A_{o1}, I_{o1}

Al inicio: $\varepsilon_{o1}, \psi_{o1}$

\bar{E}_c : módulo de elasticidad en t

$\bar{\alpha}$: razón modular en t (E_s / \bar{E}_c)

\bar{O}_1 : centroide de la sección transformada en el tiempo t

Propiedades con respecto a \bar{O}_1

Y_{o1}, A_{o1}, I_{o1}

$Y_{c1}, A_{c1}, I_{c1}, r_c^2$ (propiedades del concreto)

$$\varepsilon_{o1}^- = \varepsilon_{o1} + (Y_{o1} - Y_o) \cdot \psi_{o1} \quad (5.1)$$

$$\Delta \varepsilon_{o1}^- = \eta_1 \cdot \phi \cdot (\varepsilon_{o1}^- + \psi_{o1} \cdot Y_c) \quad Y_c = Y_{c1} - Y_{o1} \quad (5.2)$$

$$\Delta \psi_{o1}^- = \kappa_1 \cdot \phi \cdot (\varepsilon_{o1}^- \cdot Y_c / r_c^2 + \psi_{o1}) \quad \eta_1 = A_{c1} / A_{o1}, \kappa_1 = I_{c1} / I_{o1} \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_{\bar{\alpha}}^- = \varepsilon_{o1}^- + \Delta \varepsilon_{o1}^- \quad (5.4)$$

$$\psi_{\bar{\alpha}}^- = \psi_{o1} + \Delta \psi_{o1}^- \quad (5.5)$$

5.1.2 ESTADO 2

Contrariamente al estado 1, la fibra extrema en tensión sobrepasa el módulo de ruptura del concreto y se considera que la zona en compresión de la sección y el acero de refuerzo resisten las acciones internas (M y N). Además, la zona en compresión de la sección está definida por la posición del eje neutro cuyo valor es variable con el tiempo;



sin embargo en el análisis de pórticos planos por el método simplificado de Ghali - Favre se considera que el área de concreto inicial permanece constante durante el intervalo de tiempo $t - t_0$. El cálculo de las propiedades en los tiempos t_0 y t se realiza en forma similar al estado 1 teniendo como área efectiva de sección la zona en compresión del concreto más el área del acero de refuerzo en tensión y/o compresión.

Estado 2: Fisurado

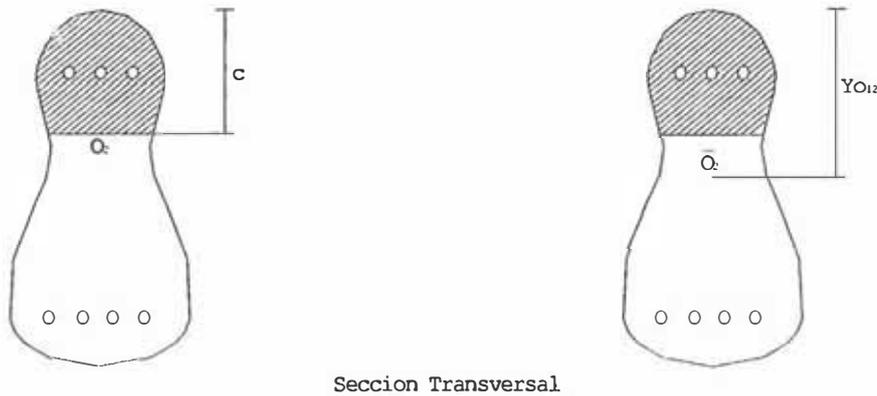


Fig. 5.3 Cambio del centroide de gravedad con el tiempo para el estado 2

E_c : módulo de elasticidad en t_0

α : razón modular en t_0 (E_s / E_c)

O_2 : centroide de la sección transformada en el tiempo t_0

Propiedades con respecto a O_2

$c, Y_{O2}, A_{O2}, I_{O2}$

E_c : módulo de elasticidad en t

α : razón modular en t (E_s / E_c)

O_2 : centroide de la sección transformada en el tiempo t

Propiedades con respecto a O_2

$Y_{O12}, A_{O12}, I_{O12}$

$Y_{c12}, A_{c12}, I_{c12}, r_c^{22}$ (Prop. del concreto)

Al inicio: $\varepsilon_{O2}, \psi_{O2}$

$$\varepsilon_{O2}^- = \varepsilon_{O2} + (Y_{O12} - Y_{O2}) \cdot \psi_{O2} \quad (5.6)$$

$$\Delta \varepsilon_{O2}^- = \eta_2 \cdot \phi \cdot (\varepsilon_{O2}^- + \psi_{O2} \cdot Y_c) \quad Y_c = Y_{c12} - Y_{O12} \quad (5.7)$$

$$\Delta \psi_{O2}^- = \kappa_2 \cdot \phi \cdot (\varepsilon_{O2}^- \cdot Y_c / r_c^{22} + \psi_{O2}) \quad \eta_2 = A_{c12} / A_{O12}, \kappa_2 = I_{c12} / I_{O12} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{O2t}^- = \varepsilon_{O2}^- + \Delta \varepsilon_{O2}^- \quad (5.9)$$

$$\psi_{O2t}^- = \psi_{O2} + \Delta \psi_{O2}^- \quad (5.10)$$



5.1.3 COEFICIENTE DE INTERPOLACION ζ

El coeficiente ζ es un coeficiente de interpolación adimensional propuesto por el Eurocode 2 - 1991 (EC2 - 91) para determinar valores interpolados de ciertos parámetros entre los estados 1 y 2 como deformaciones, fuerzas y rigideces. El rango de variación de ζ es entre 0 y 1, con $\zeta = 0$ para una sección no fisurada y $0 < \zeta < 1$ para una sección totalmente fisurada.

$$\zeta = 1 - \left(\frac{f_{ct}}{\sigma_{\max}} \right)^2 \quad \text{con } \sigma_{\max} > f_{ct} \quad (5.11)$$

Donde σ_{\max} representa el valor del esfuerzo en la fibra extrema en tensión producida debido a la acción de N y/o M en el estado 1 con la resistencia a tensión del concreto igual a f_{ct} . Si el esfuerzo es causado principalmente por flexión, entonces f_{ct} representa el esfuerzo en tensión por flexión conocido algunas veces como módulo de ruptura y considerado mayor que el valor para tensión uniaxial.

Con la finalidad de tomar en cuenta las propiedades de adherencia de las barras de acero y la influencia de la duración de la aplicación o repetición de la carga actuante, el Eurocode 2 - 1991 (EC2 - 91) introduce los coeficientes β_1 y β_2 dentro de la ecuación (5.11) como sigue:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 \quad (5.12)$$

Donde $\beta_1 = 1$ y 0.5 para barras de alta adherencia y para barras planas respectivamente, $\beta_2 = 1$ y 0.5 para cargas iniciales y para cargas permanentes respectivamente durante un período de tiempo. Para el caso de una sección parcialmente fisurada, la curvatura y deformación axial media quedan definidas mediante las siguientes expresiones:

$$\psi_m = (1 - \zeta) \cdot \psi_1 + \zeta \cdot \psi_2 \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_m = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_1 + \zeta \cdot \varepsilon_2 \quad (5.14)$$

Donde:

ψ_m, ε_m : curvatura y deformación axial media interpolada en la sección transversal.



Ψ_1, Ψ_2 : curvatura en los estados 1 y 2 respectivamente, debido al momento actuante M respecto al centroide de la sección transformada de cada estado.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$: deformación axial media en los estados 1 y 2 respectivamente, debido a la fuerza axial N aplicada en el centroide de la sección transformada de cada estado.

$$\Psi_i = \frac{M}{E.I} \quad (5.15)$$

$$\varepsilon_i = \frac{N}{E.A} \quad (5.16)$$

Para el tiempo t_0 :

$$\Psi_m = (1 - \zeta_1) \cdot \Psi_{o1} + \zeta_2 \cdot \Psi_{o2} \quad \varepsilon_m = (1 - \zeta_1) \cdot \varepsilon_{o1} + \zeta_1 \cdot \varepsilon_{o2} \quad (5.17)$$

Para el tiempo t :

$$\Psi_m = (1 - \zeta_2) \cdot \Psi_{ot} + \zeta_1 \cdot \Psi_{o2t} \quad \varepsilon_m = (1 - \zeta_2) \cdot \varepsilon_{ot} + \zeta_2 \cdot \varepsilon_{o2t} \quad (5.18)$$

5.2 PREDICCIÓN DE DEFLEXIONES EN VIGAS CONTINUAS

El análisis de vigas continuas se avoca principalmente a dos campos: el control de las deflexiones en secciones determinantes, es decir en secciones de máximo momento flexionante y al análisis de las fuerzas internas dependientes del tiempo que se producen como consecuencia de la redistribución interna de los esfuerzos del concreto. A partir de esta sección hacia adelante el término fuerzas implicará momentos flexionantes, fuerzas cortantes y/o fuerzas axiales. En forma similar, la palabra desplazamiento se referirá a desplazamientos verticales, deformaciones axiales y/o giros respectivamente.

El control de las deflexiones en miembros sometidos a flexión unidireccional se puede lograr a través de las limitaciones de ciertos parámetros como: la cuantía de refuerzo, la relación luz - deflexión y los requerimientos mínimos de peralte de la sección. La deflexión total que se produce en una sección de un miembro sometido a flexión en un tiempo cualquiera t es la suma de la deflexión a corto tiempo más la deflexión diferida debido al flujo plástico.



La deflexión a corto tiempo en miembros no fisurados sometidos a flexión pura se puede calcular a través de la teoría convencional de Resistencia de Materiales, en el que la inercia de la sección es un parámetro necesario para el cálculo de ésta. Cuando el momento flexionante máximo en carga de servicio de una viga o losa causa un esfuerzo de tensión menor que el módulo de ruptura del concreto " f_{ct} ", no se desarrolla ninguna fisura en la zona de tensión del elemento. Razón por la cual, se utilizará para el cálculo de las deflexiones, el momento de inercia de la sección transformada no fisurada " I_t "; a pesar que en la mayoría de los casos se use la inercia geométrica (ignorando el área ocupada por el reforzamiento) de la sección.

El código ACI ha desarrollado expresiones y tablas para determinar la deflexión a corto y largo plazo para miembros no fisurados sujetos a flexión. La deflexión elástica a corto plazo en miembros no fisurados se puede expresar en la siguiente forma general:

$$\delta = \kappa \cdot \frac{M L^2}{E_c \cdot I_g} \quad \kappa = 1.20 - 0.20 \cdot \frac{M_o}{M} \quad (5.19)$$

Donde k es un factor que depende de las condiciones de apoyo y las condiciones de carga, M es el momento de flexión máximo a lo largo de la luz, E_c es el módulo de elasticidad del concreto, I_g la inercia geométrica de la sección y M_o es el momento estático en el centro de luz igual a $wL^2 / 8$.

5.2.1 MODELO MODIFICADO ACI (435)

La deflexión a largo plazo propuesta por el Método Modificado del ACI comité 435 (Branson, 1963, 1977), establece que la deflexión adicional en el tiempo es:

$$\Delta\delta = \left(\frac{0.85 \cdot \phi_{(t,t_0)}}{1 + 50 \cdot \rho'} \right) \cdot \delta_i \quad (5.20)$$

5.2.2 MODELO ACI DE 1971

El método del reglamento del ACI de 1971 propone otra expresión para calcular la deformación en el tiempo debido a flujo plástico, basado en el método propuesto por You y Winter. Las deflexiones adicionales se calculan de la siguiente manera para una carga de duración de 5 años.



$$\Delta\delta = \left[2 - 1.2 \cdot \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \right] \cdot \delta_i \quad (5.21)$$

5.2.3 MODELO CEB-FIP

La deflexión total en el tiempo para vigas de concreto reforzado o losas unidireccionales, según el CEB - FIP:

$$\delta_t = \left(\frac{h}{d} \right)^3 \cdot \eta \cdot (1 - 20 \cdot \rho') \cdot \delta_g \quad (5.22)$$

En las ecuaciones anteriores:

- δ_t Deflexión total en el tiempo t .
- δ_g Deflexión elástica calculada con la rigidez $E_c \cdot I_g$ de la sección geométrica, despreciando el área ocupada por el acero.
- δ_i Deflexión elástica calculada con la rigidez $E_c \cdot I_e$ de la sección geométrica.
- η Coeficiente de corrección global que depende del nivel de carga expresado por la relación (M_r / M) en la sección determinante, coeficiente de flujo plástico ϕ , el producto $\alpha \cdot \rho$ con $\alpha = E_s / E_{c(t_0)}$ y $\rho = A_s / b \cdot d$, A_s es el área de refuerzo en tensión.
- h Altura total de la sección transversal.
- d Distancia entre el reforzamiento a tensión y la fibra extrema en compresión.
- ρ' $A_s' / b \cdot d$; b es el ancho de la sección transversal y A_s' es el área del acero en compresión.
- M_{cr} / M : Relación de momento resistente a tensión máxima del concreto con respecto al momento actuante en la sección determinante, M_{cr} es aproximadamente igual $(b \cdot h^2 / 6)$ o en forma más exacta $M_r = f_{ct} \cdot I_g / y_t$, y_t , f_{ct} , siendo f_{ct} el módulo de ruptura del concreto.

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^3 \cdot I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^3 \right] \cdot I_{cr} \leq I_g \quad (5.23)$$

La deflexión total en el tiempo t para los modelos anteriores, está dada por:

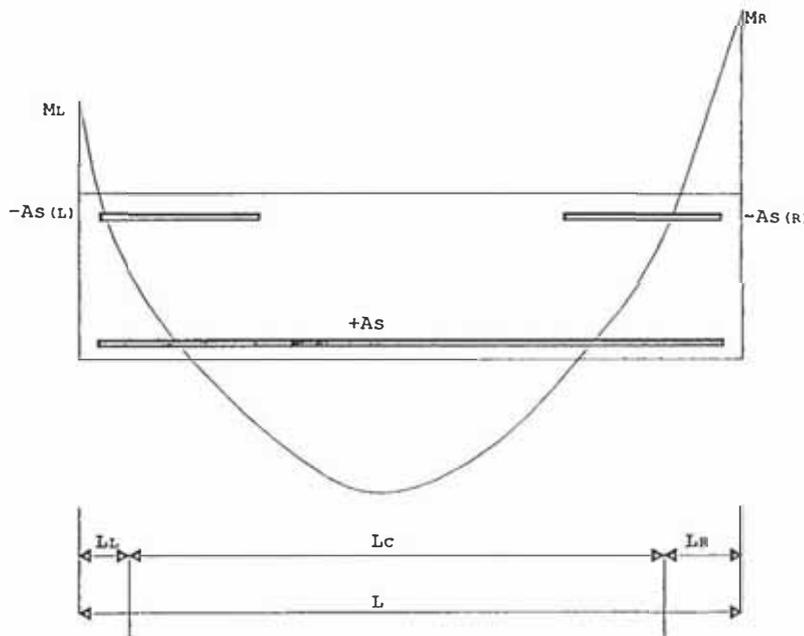
$$\delta_t = \delta_i + \Delta\delta \quad (5.24)$$



5.2.4 MODELO SIMPLIFICADO CEB-FIP

Existe una versión simplificada del modelo de predicción anterior denominado: Método Simplificado del *CEB - FIP* (método gráfico) que se basa en una relación bilineal carga - deflexión para obtener las deflexiones en un tiempo t cualquiera en miembros fisurados. La discrepancia de este método simplificado con el anterior es sólo en la obtención del factor de corrección η . En esta sección, η representa una cuantía media de refuerzo calculado de acuerdo al diagrama de momento flexionante cuya expresión es:

$$\rho_m = \rho_L \cdot \left(\frac{L_L}{L}\right) + \rho_c \cdot \left(\frac{L_c}{L}\right) + \rho_R \cdot \left(\frac{L_R}{L}\right) \tag{5.25}$$



(a) Definición del diagrama de momento flexionante L_L, L_c, L_R

$\rho_m(t)$	0.15	0.20	0.30	0.50	0.75	1.0	1.5
η	10	8	6	4	3	2.5	2

(b) Porcentaje promedio de reforzamiento en tensión

Fig. 5.4 Método Simplificado de cálculo de deflexiones (CEB-FIP 1990).

Donde:

ρ_L, ρ_R : cuantía del acero en tensión en el apoyo izquierdo y derecho respectivamente.

ρ_C : cuantía del acero en tensión en la sección de máximo momento positivo.



L_L, L_C longitud de los segmentos en los puntos de inflexión como se indica en la Fig. 5.4 (un estimado es generalmente suficiente).

5.3 ANALISIS DE PORTICOS PLANOS

El método de los desplazamientos o matriz de rigideces para el análisis de pórticos planos es adecuado en el cálculo de las fuerzas y los desplazamientos de los elementos de concreto armado que incluyen la acción del flujo plástico. Dependiendo de la magnitud de la estructura, es necesario realizar el análisis con un programa de cómputo que calcule las variaciones de las fuerzas y desplazamientos en cada intervalo de tiempo.

Existen dos posibilidades para realizar el análisis estructural de pórticos planos: la primera posibilidad es siguiendo la metodología simplificada de Ghali - Favre desarrollada en los capítulos anteriores. En esta metodología principalmente se supone que la forma de la función del coeficiente de envejecimiento χ tiene la misma forma que la curva de relajación del concreto. La segunda posibilidad es realizar un análisis con el método paso a paso, el cual trabaja independientemente del coeficiente de envejecimiento χ . En este método, el análisis de la estructura se realiza en cada intervalo de tiempo, contrariamente al método simplificado donde sólo se realizan dos análisis.

Para la obtención de resultados, se hace necesario contar con un programa de cómputo que tome en cuenta los efectos del flujo plástico. Por tal motivo, el algoritmo del programa *Porticos.xls* desarrollado por el Ph D. Hugo Scaletti ha sido implementado con funciones del flujo plástico y funciones que describen las propiedades del concreto con el tiempo. Algunos resultados calculados con el programa de cómputo *Creep.xls*, que incluye las implementaciones mencionadas arriba, se muestran en las aplicaciones del capítulo 6 con excepción de los ejemplos 6.2 y 6.4. A continuación se enuncian los pasos necesarios para incorporar en el análisis convencional la influencia del flujo plástico por el método simplificado de Ghali - Favre.

1. Utilizando un programa de análisis elástico convencional, introducimos la geometría y cargas permanentes del pórtico a analizar.

Se ingresan los datos geométricos de las secciones como: la base y altura en caso de secciones rectangulares o la altura, ancho de alma y espesor del ala en



el caso de secciones T, acero en compresión y/o tensión, módulo de elasticidad del acero, humedad relativa promedio a la que esta sometida la estructura, tiempo de carga inicial t_o , tiempo final t donde se quieren observar los cambios producidos por el flujo plástico y como último parámetro la resistencia a la compresión del concreto a los 28 días.

Con los valores de la humedad relativa, t_o , t y la resistencia a la compresión del concreto se calculan los coeficientes de flujo plástico para cada miembro del pórtico: El primero es el coeficiente de flujo plástico ϕ dependiente de las características de la mezcla de concreto de acuerdo al código de diseño escogido, el segundo es el coeficiente de edad ajustada χ obtenido mediante un proceso iterativo desde t_o hasta t durante el cual se calcula múltiples veces el coeficiente de flujo plástico ϕ para diferentes intervalos de tiempo. Otros parámetros como el módulo de elasticidad del concreto son calculados a partir de expresiones propuestas por el ACI o algún otro código de diseño.

Se calculan las propiedades geométricas de cada sección transversal (A e I respectivamente en el estado 1) con respecto al centroide de la sección transformada en t_o (no es el punto de referencia final)

2. Realizamos un análisis elástico convencional utilizando el Método de los desplazamientos.
3. Conociendo las fuerzas resultantes de sección M (momento flexional inicial) y N (fuerza axial inicial) provenientes del análisis inicial, se procede a calcular el diagrama de deformaciones y esfuerzos de la sección a partir de la deformación axial media y la curvatura respectiva $(\varepsilon_{o(t_o)}; \psi_{(t_o)})$ inicialmente en el estado 1. Las deformaciones plásticas que se producen en el período $(t - t_o)$, se obtienen mediante la multiplicación de la deformación inicial en cada fibra por el coeficiente de flujo plástico $\phi_{(t,t_o)}$ (se considera que cada fibra es libre de deformarse con el tiempo y no existe ningún impedimento físico para su libre deformación).

Entonces, las deformaciones adicionales producidas en cada fibra pueden ser restringidas en la sección por medio de un par de fuerzas internas de restricción $\Delta N, \Delta M$ (ecuación 3.9). Además, en el diagrama inicial de esfuerzos se verifica si



la fibra extrema en tensión (si existiera) de la sección ha sobrepasado la resistencia máxima de tensión del concreto. Si lo anterior ocurre, entonces la sección se encuentra parcial o totalmente fisurada y podría hablarse de un estado interpolado. Si no se produce fisuramiento en la sección transversal o no se cree conveniente considerarlo, el valor del coeficiente ζ es cero y las deformaciones, rigideces y fuerzas internas de restricción interpoladas coincidirían con las obtenidas en el estado 1 independientemente del tiempo de análisis.

El coeficiente de interpolación ζ formulado anteriormente es utilizado para determinar deformaciones y rigideces interpoladas en las secciones de un elemento en los tiempos t_0 y t respectivamente. El CEB determina que existe un coeficiente ζ diferente para cada tiempo de análisis, ζ_1 en t_0 y ζ_2 en el tiempo final t . Donde las fuerzas de restricción por sección son:

$$\Delta N_{\text{flujoplastico}} = -\varepsilon_m \cdot E_{\text{ref}} \cdot A_m \quad (5.26)$$

$$\Delta M_{\text{flujoplastico}} = -\psi_m \cdot E_{\text{ref}} \cdot J_m \quad (5.27)$$

Las rigideces medias del elemento son:

$$A_m = \frac{A_{o1} \cdot A_{o12}}{\zeta_2 \cdot A_{o1} + (1 - \zeta_2) \cdot A_{o12}} \quad (5.28)$$

$$J_m = \frac{J_{o1} \cdot J_{o12}}{\zeta_2 \cdot J_{o1} + (1 - \zeta_2) \cdot J_{o12}} \quad (5.29)$$

$$E_{\text{ref}} = E_{c(t,t_0)} = \frac{E_c}{(1 + \phi \cdot \chi)} \quad (5.30)$$

cuando $\zeta_2 = 0$ significa que la sección no está fisurada.

Conociendo un par de fuerzas restringidoras por sección ΔN y ΔM se elige un número de secciones a tener en cuenta en el análisis. En todos los cálculos mostrados en este trabajo se consideraron tres secciones por elemento (Fig. 4.6 y 4.7): extrema izquierda en el nudo i , central y extrema derecha en el nudo j . Lo anterior define un juego de tres pares de fuerzas restringidoras que pueden ser



representadas a través de fuerzas nodales restringidoras de acuerdo a la ecuación (4.19).

4. Obtenidas 6 fuerzas nodales de restricción por elemento (3 por cada nudo), éstas se aplican en sentido contrario sobre el mismo, para ser ensambladas en la matriz de fuerzas de la estructura. Este procedimiento de ensamblaje se repite para cada elemento del pórtico y también para el ensamblaje de la nueva matriz de rigideces de la estructura considerando un módulo de elasticidad transformado $E_{c(t,t_0)}$. En esta parte del análisis se consideran las propiedades de las secciones transversales transformadas de cada elemento en el tiempo t especificado.
5. Realizando un segundo análisis convencional con las fuerzas restringidoras aplicadas en sentido contrario sobre el pórtico, se obtienen nuevos desplazamientos y nuevas fuerzas internas en los elementos. Posteriormente, las fuerzas obtenidas recientemente son superpuestas con las fuerzas restringidoras iniciales para obtener el efecto final de flujo plástico (variación debido a flujo plástico) en cada elemento del pórtico.
6. El diagrama de fuerzas y los desplazamientos en el tiempo t se obtienen al superponer las variaciones debido a flujo plástico (5) tanto en fuerzas como en desplazamientos con los obtenidos del análisis elástico inicial (2).

Con respecto al segundo método de análisis, el método paso a paso requiere más tiempo de cálculo debido a que en cada intervalo de tiempo se realiza un análisis elástico completo de la estructura. El tiempo $(t - t_0)$ se divide en intervalos de tiempo siguiendo la función de Chiorino y considerando que los cambios en los esfuerzos ocurren en el medio de los intervalos como lo ilustra la Fig. 2.9.

El cambio en la deformación en el intervalo i ésimo puede ser obtenido por diferencia de las deformaciones en los extremos de los intervalos $i-1$ y i mediante la ecuación (5.31), obteniéndose:

$$(\Delta \varepsilon_c)_i = \left(\frac{1 + \phi(t_i + \frac{1}{2}, t_j)}{E_{c(t)}} \right) (\Delta \sigma_c)_i + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\frac{(\Delta \sigma_c)_j}{E_{c(t_j)}} \right) (\phi(t_i + \frac{1}{2}, t_j) - \phi(t_i - \frac{1}{2}, t_j)) \right) \quad (5.31)$$



La ecuación anterior puede ser rescrita en una forma pseudo - lineal como sigue:

$$(\Delta \varepsilon_c)_i = \frac{(\Delta \sigma_c)_i}{(E_{cc})_i} + (\Delta \bar{\varepsilon}_c)_i \quad (5.32)$$

Donde $(E_{cc})_i$ es el módulo de elasticidad del concreto usado en el análisis elástico para el intervalo $i_{ésimo}$

$$(E_{cc})_i = \frac{E_{c(t_i)}}{1 + \phi(t_i + \frac{1}{2}, t_i)} \quad (5.33)$$

$(\Delta \varepsilon_c)_i$ representa la deformación "inicial" independiente del incremento de esfuerzo en el intervalo $i_{ésimo}$. Por lo tanto, si los incrementos en los intervalos precedentes son conocidos, entonces $(\Delta \varepsilon_c)_i$ también lo es.

Como se mencionó anteriormente, en el análisis paso a paso se realiza un completo análisis de la estructura para cada intervalo de tiempo. Así, cuando se analiza el intervalo $i_{ésimo}$, los incrementos de esfuerzos en los intervalos precedentes han sido previamente determinados. De esta manera, las deformaciones "iniciales" $(\Delta \varepsilon_c)_i$ son valores conocidos que pueden ser tratados como si fueran producidos por un cambio de temperatura de magnitud conocida.

En el análisis de un pórtico plano por el método de los desplazamientos, se calculan tres desplazamientos en cada nudo con la suposición usual de que la sección permanece plana durante la deformación. En forma similar al método simplificado, las fuerzas restringidoras en los nudos son calculadas de acuerdo a la ecuación (4.19). A partir de este punto hacia delante se sigue la misma secuencia de procesos descrito para el método simplificado (4). Donde las propiedades de las secciones transversales utilizadas para el análisis del intervalo $i_{ésimo}$ se determinan considerando la relación modular α_i .

$$\alpha_i = \frac{E_s}{(E_{cc})_i} \quad (5.34)$$

Siendo E_s el módulo de elasticidad del acero de refuerzo invariable en el tiempo.



De otra manera, en el intervalo $i_{ésimo}$ el concreto y el acero se consideran sujetos a un cambio de temperatura que produce el cambio de deformación $(\Delta\varepsilon_c)_i$ de magnitud conocida. Los esfuerzos correspondientes $(\Delta\sigma_c)_i$ en los materiales envueltos, aún desconocidos, son determinados en el análisis del intervalo $i_{ésimo}$.

El análisis de esfuerzos debido a una distribución arbitraria de temperatura envuelve las siguientes etapas: una primera etapa, donde la deformación debido a temperatura $(\Delta\varepsilon_c)_i$ es restringida artificialmente por fuerzas internas de restricción ΔN y ΔM en cada sección, las cuales pueden representarse mediante fuerzas nodales para cada elemento. La segunda etapa consiste en la aplicación de estas mismas fuerzas en sentido contrario produciéndose los desplazamientos y los cambios de esfuerzo en cada sección.

Independientemente del método de análisis escogido, el flujo plástico produce una redistribución en el diagrama de esfuerzos de cada sección. En estructuras determinadas estáticamente esta redistribución no produce cambios en las fuerzas resultantes de sección como ocurre en las estructuras indeterminadas estáticamente, debido a la restricción que tiene las fibras a deformarse libremente.



CAPITULO 6

APLICACIONES

6.1 ESTUDIO DE DEFLEXIONES DIFERIDAS

El análisis de deflexiones producidas por flujo plástico a largo tiempo es estudiado en una viga simplemente apoyada sujeta a carga permanente, tomando en cuenta la influencia de las cuantías de refuerzo. Se realizan comparaciones en el cálculo de deflexiones por el método simplificado, por el método paso a paso y con las expresiones propuestas por el ACI y CEB para la deflexión de la sección central. Así como también se estudian los efectos del nivel de esfuerzo.

La viga de la Fig. 6.1 es sometida en $t_o = 24$ días a una carga distribuida $w = 0.017$ MN/m, la humedad relativa del elemento es 90%, el módulo de elasticidad del acero es 200 GPa y la resistencia a la compresión del concreto a los 28 días es 20 MPa.

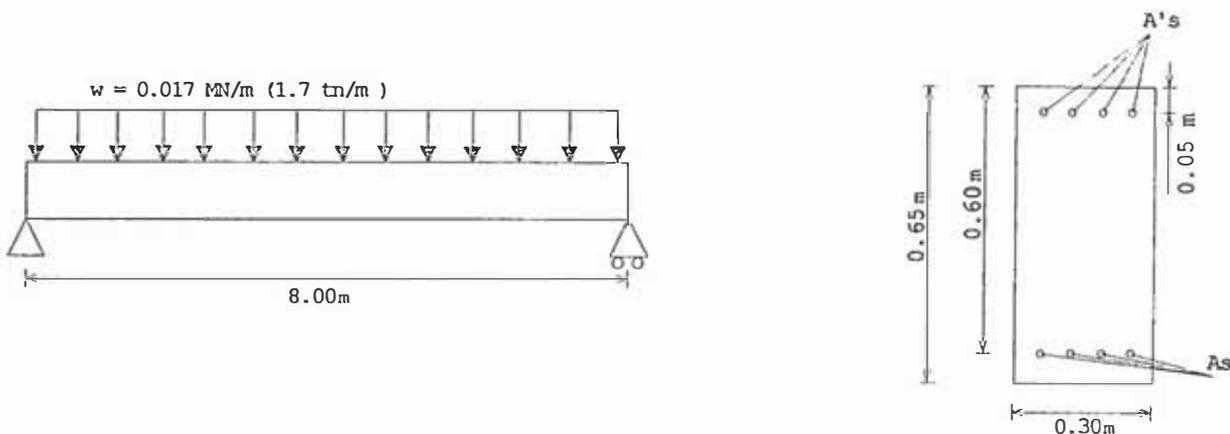


Fig. 6.1 Viga simplemente apoyada con refuerzo en tensión y compresión

Los resultados mostrados a continuación se obtuvieron utilizando el programa *Creep.xls* usando la metodología simplificada de Ghali - Favre. Aquellas secciones donde el momento de flexión supera al momento de agrietamiento, M_{cr} , fueron consideradas parcialmente fisuradas y las rigideces, entonces, fueron obtenidas por interpolación de los estados 1 y 2. Los parámetros del concreto en una primera etapa de análisis son:



Modelo	ACI	B3	GZ	CEB
φ	1.17	1.76	1.37	1.54
χ	0.85	0.53	0.92	0.78
$\chi \cdot \varphi$	0.99	0.93	1.25	1.20
$E_{c(t_0)}$ MPa	25216.81	27102.04	25938.99	30001.40
$\bar{E}_{(f,t_0)}$ MPa	12672.89	14024.48	11506.61	13626.85

El cuadro siguiente muestra las cuantías usadas en la sección rectangular genérica y el momento máximo obtenido por el método de resistencia última. En todos los casos el momento en la sección central de la viga es $M = 0.136$ MN.m.

Viga	ρ	ρ'	A_s (m ²)	A_s' (m ²)	M resistente (MN-m)	M fisuración (MN-m)
1	0.0125	0.01250	0.00225	0.00225	0.4700	0.0754
2	0.0125	0.00625	0.00225	0.00113	0.4618	0.0730
3	0.0125	0.00000	0.00225	0.00000	0.4176	0.0703
4	0.008	0.00800	0.00144	0.00144	0.3030	0.0694
5	0.008	0.00600	0.00144	0.00108	0.3023	0.0687
6	0.008	0.00400	0.00144	0.00072	0.3006	0.0679
7	0.008	0.00200	0.00144	0.00036	0.2968	0.0670
8	0.008	0.00000	0.00144	0.00000	0.2886	0.0662
9	0.006	0.00600	0.00108	0.00108	0.2289	0.0668
10	0.006	0.00450	0.00108	0.00081	0.2285	0.0662
11	0.006	0.00300	0.00108	0.00054	0.2279	0.0656
12	0.006	0.00150	0.00108	0.00027	0.2265	0.0650
13	0.006	0.00000	0.00108	0.00000	0.2236	0.0644

Los resultados del desplazamiento central de acuerdo a cada modelo de predicción son:

Viga	Deflexión en el centro de luz $\Delta_{(0)}$							
	No fisuramiento				Fisuramiento			
	ACI	B3	GZ	CEB	ACI	B3	GZ	CEB
1	-6.39E-03	-7.43E-03	-6.56E-03	-6.43E-03	-8.14E-03	-8.84E-03	-8.26E-03	-8.30E-03
2	-7.24E-03	-8.47E-03	-7.48E-03	-7.27E-03	-9.19E-03	-1.01E-02	-9.37E-03	-9.32E-03
3	-8.54E-03	-1.01E-02	-8.93E-03	-8.51E-03	-1.08E-02	-1.20E-02	-1.12E-02	-1.09E-02
4	-7.59E-03	-8.91E-03	-7.85E-03	-7.61E-03	-1.17E-02	-1.26E-02	-1.18E-02	-1.18E-02
5	-7.93E-03	-9.32E-03	-8.22E-03	-7.94E-03	-1.21E-02	-1.31E-02	-1.23E-02	-1.23E-02
6	-8.32E-03	-9.79E-03	-8.65E-03	-8.31E-03	-1.27E-02	-1.38E-02	-1.29E-02	-1.28E-02
7	-8.76E-03	-1.03E-02	-9.15E-03	-8.74E-03	-1.33E-02	-1.45E-02	-1.36E-02	-1.35E-02
8	-9.29E-03	-1.10E-02	-9.74E-03	-9.23E-03	-1.41E-02	-1.54E-02	-1.45E-02	-1.42E-02
9	-8.28E-03	-9.75E-03	-8.60E-03	-8.28E-03	-1.47E-02	-1.58E-02	-1.49E-02	-1.49E-02
10	-8.58E-03	-1.01E-02	-8.93E-03	-8.56E-03	-1.52E-02	-1.63E-02	-1.54E-02	-1.54E-02
11	-8.91E-03	-1.05E-02	-9.30E-03	-8.88E-03	-1.57E-02	-1.69E-02	-1.60E-02	-1.59E-02
12	-9.28E-03	-1.10E-02	-9.71E-03	-9.23E-03	-1.63E-02	-1.76E-02	-1.66E-02	-1.64E-02
13	-9.69E-03	-1.15E-02	-1.02E-02	-9.62E-03	-1.70E-02	-1.84E-02	-1.74E-02	-1.71E-02



De los resultados anteriores se aprecia que el acero en tensión y compresión restringen las deflexiones diferidas y la discrepancia máxima entre deflexiones al considerar en el análisis fisuramiento es aproximadamente 80% con respecto al caso no fisurado correspondiente al CEB para la viga 9.

Se ha elaborado un cuadro comparativo mostrando la exactitud que tienen las fórmulas de predicción propuestas por los códigos ACI y CEB, según corresponda, para el cálculo de la deflexión central en la viga con respecto a los valores obtenidos mediante el método simplificado. La primera parte del cuadro muestra las deflexiones calculadas utilizando las fórmulas que predicen las propiedades del concreto propuestas por el CEB conjuntamente con el coeficiente de flujo plástico ϕ_{CEB} ; a pesar de que la ecuación (5.20) corresponde al código ACI. En forma análoga se calcularon las deflexiones en la segunda parte del cuadro usando expresiones exclusivamente del ACI.

Viga	Método CEB				Método ACI			
	$\Delta_{(t)}$	$\Delta_{(t)}$			$\Delta_{(t)}$	$\Delta_{(t)}$		
		Creep.xls	Ecuaciones 5.20-5.24	Ec. 5.22		Creep.xls	Ecuaciones 5.20-5.24	Ecuaciones 5.21-5.24
1	-3.44E-03	-8.30E-03	-1.19E-02	-6.88E-03	-3.90E-03	-8.14E-03	-1.06E-02	-1.19E-02
2	-3.64E-03	-9.32E-03	-1.37E-02	-8.51E-03	-4.17E-03	-9.19E-03	-1.24E-02	-1.70E-02
3	-3.89E-03	-1.09E-02	-1.69E-02	-1.04E-02	-4.52E-03	-1.08E-02	-1.53E-02	-2.31E-02
4	-3.73E-03	-1.18E-02	-1.82E-02	-1.16E-02	-4.29E-03	-1.17E-02	-1.64E-02	-1.73E-02
5	-3.80E-03	-1.23E-02	-1.92E-02	-1.23E-02	-4.39E-03	-1.21E-02	-1.73E-02	-2.06E-02
6	-3.88E-03	-1.28E-02	-2.04E-02	-1.32E-02	-4.50E-03	-1.27E-02	-1.84E-02	-2.41E-02
7	-3.96E-03	-1.35E-02	-2.18E-02	-1.40E-02	-4.62E-03	-1.33E-02	-1.96E-02	-2.78E-02
8	-4.05E-03	-1.42E-02	-2.34E-02	-1.49E-02	-4.74E-03	-1.41E-02	-2.11E-02	-3.17E-02
9	-3.88E-03	-1.49E-02	-2.41E-02	-1.43E-02	-4.50E-03	-1.47E-02	-2.16E-02	-2.21E-02
10	-3.94E-03	-1.54E-02	-2.51E-02	-1.50E-02	-4.58E-03	-1.52E-02	-2.26E-02	-2.62E-02
11	-4.00E-03	-1.59E-02	-2.63E-02	-1.58E-02	-4.66E-03	-1.57E-02	-2.36E-02	-3.04E-02
12	-4.06E-03	-1.64E-02	-2.77E-02	-1.65E-02	-4.75E-03	-1.63E-02	-2.48E-02	-3.49E-02
13	-4.13E-03	-1.71E-02	-2.93E-02	-1.73E-02	-4.85E-03	-1.70E-02	-2.62E-02	-3.94E-02

Los valores obtenidos mediante fórmulas son del orden de magnitud de las deflexiones calculadas mediante el método simplificado, siendo más próxima las deflexiones obtenidas por la ecuación (5.22). La ecuación (5.20) propuesta por el ACI toma sólo en cuenta la cuantía a compresión en el cálculo de la deflexión diferida, contrariamente a las otras expresiones.

En general para la ecuación (5.20), cuando la cuantía en tensión se vuelve más significativa, la discrepancia con el método simplificado es menor y que para una misma cuantía en tensión, la cuantía en compresión aproxima los valores conforme éste



aumenta. La deflexión diferida calculada por la ecuación (5.20) difiere aproximadamente en un 70% para el caso del CEB y en un 50% para el método ACI en la viga 13. Los valores obtenidos por el método ACI de 1971 (ecuación 5.21) proporcionan valores mayores para las deflexiones en todos los casos; a pesar de que toma en cuenta ambas cuantías de refuerzo. En forma general, se puede establecer que las fórmulas directas de predicción son relativamente útiles para la ingeniería y específicamente para el código ACI, la ecuación (5.20) resulta más exacta que la ecuación (5.21); aunque tome en cuenta menos variables de entrada.

Por otro lado, en un análisis paso a paso no es necesario suponer la forma de la función de relajación del concreto como se hace para el cálculo del coeficiente de envejecimiento en el método simplificado. Dividir el intervalo de tiempo de análisis en seis intervalos siguiendo una función exponencial a una razón creciente es suficiente para el análisis; aunque el uso de una computadora nos permite incrementar la subdivisión del período $t - t_0$. Los cálculos de la deflexión en la sección central de la viga utilizando un análisis paso a paso sin considerar fisuramiento se muestran a continuación:

Viga	M. Aprox. $\gamma=0.78$	Paso a Paso		Método Aproximado				
		6 intervalos	45 intervalos	$\chi=0.0$	$\chi=0.6$	$\chi=0.75$	$\chi=0.9$	$\chi=1.0$
1	-6.43E-03	-6.72E-03	-6.73E-03	-7.36E-03	-6.61E-03	-6.46E-03	-6.33E-03	-6.25E-03
2	-7.27E-03	-7.53E-03	-7.54E-03	-8.12E-03	-7.43E-03	-7.29E-03	-7.17E-03	-7.08E-03
3	-8.51E-03	-8.69E-03	-8.70E-03	-9.11E-03	-8.63E-03	-8.53E-03	-8.44E-03	-8.38E-03
4	-7.61E-03	-7.87E-03	-7.87E-03	-8.45E-03	-7.78E-03	-7.64E-03	-7.51E-03	-7.43E-03
5	-7.94E-03	-8.18E-03	-8.19E-03	-8.73E-03	-8.10E-03	-7.96E-03	-7.84E-03	-7.76E-03
6	-8.31E-03	-8.53E-03	-8.54E-03	-9.03E-03	-8.46E-03	-8.33E-03	-8.22E-03	-8.14E-03
7	-8.74E-03	-8.93E-03	-8.94E-03	-9.37E-03	-8.87E-03	-8.76E-03	-8.66E-03	-8.59E-03
8	-9.23E-03	-9.39E-03	-9.39E-03	-9.73E-03	-9.34E-03	-9.25E-03	-9.17E-03	-9.12E-03
9	-8.28E-03	-8.51E-03	-8.51E-03	-9.02E-03	-8.43E-03	-8.30E-03	-8.18E-03	-8.11E-03
10	-8.56E-03	-8.77E-03	-8.78E-03	-9.25E-03	-8.71E-03	-8.59E-03	-8.47E-03	-8.40E-03
11	-8.88E-03	-9.07E-03	-9.07E-03	-9.50E-03	-9.01E-03	-8.32E-05	-8.80E-03	-8.73E-03
12	-9.23E-03	-9.40E-03	-9.40E-03	-9.76E-03	-9.34E-03	-9.25E-03	-9.16E-03	-9.10E-03
13	-9.62E-03	-9.76E-03	-9.76E-03	-1.00E-02	-9.71E-03	-9.64E-03	-9.57E-03	-9.52E-03

La parte derecha del cuadro anterior muestra la deflexión obtenida con valores supuestos de $\chi = 0.0, 0.6, 0.75, 0.9$ y 1.0 . El valor $\chi = 0.0$ supone que el módulo de elasticidad es constante en el tiempo y como consecuencia el centroide de gravedad de la sección permanece constante, mientras que $\chi = 1.0$ implica que el esfuerzo incremental $\Delta\sigma_c$ de la Fig. 2.7 se introduce en t_0 y se mantiene constante desde entonces.

El suponer los valores extremos de $\chi = 0.6$ y 0.9 conlleva a un error aproximado de 17% y 10% respectivamente en el cálculo de la deflexión en todos los casos. Para cálculos prácticos un valor supuesto de χ entre 0.6 y 0.9 conlleva generalmente a un error aceptable.

La incorporación del flujo plástico en el análisis hace que las deformaciones en cada una de las secciones de la viga varíen en el tiempo conforme el esfuerzo en la fibra lo hace. La variación del centroide de gravedad con el tiempo en una sección de concreto reforzado permite la aparición de un nuevo punto de referencia conforme transcurre el tiempo. Cuando no existe fisuramiento alguno o este se omite, la aparición de deformaciones axiales interpoladas es nula. Sin embargo, la curvatura se incrementará conforme se aumente la carga externa actuante a una razón igual a la rigidez flexional de la sección, debido al comportamiento lineal supuesto para los materiales envueltos.

Las líneas continuas de la Fig. 6.2 representan la curvatura en el tiempo inicial t_0 debido a la carga externa actuante de 0.017 MN/m . En las cercanías a los apoyos la curva sigue una línea recta debido al estado no fisurado de las secciones; contrariamente a la parte central donde la curvatura ha sido interpolada entre los estados 1 y 2. La deflexión en cualquier sección puede ser obtenida por integración directa de la curva curvatura - luz de la Fig. 6.2, en la cual las líneas punteadas representan la curvatura interpolada para 5 años.

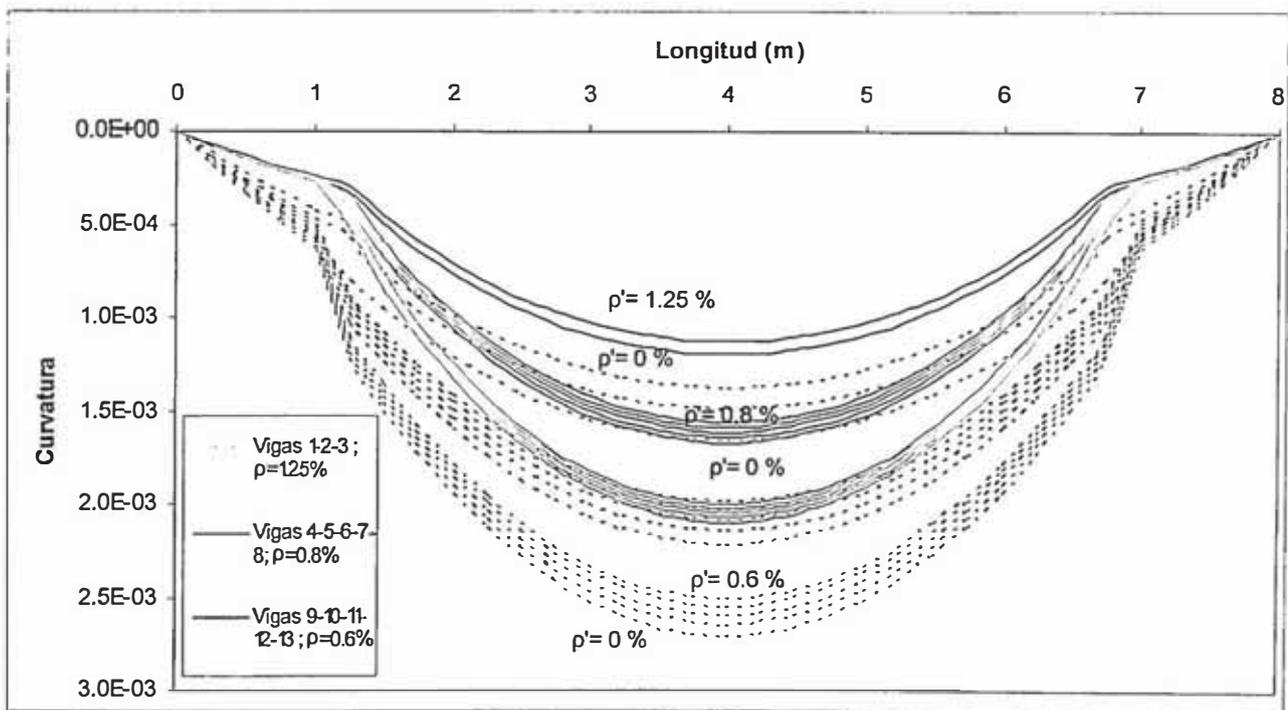


Fig. 6.2 Variación de la curvatura interpolada con la luz de la viga.



En forma similar a la curvatura, la rigidez de la viga varía en la luz en los mismos tramos como se representa en la Fig. 6.3 para el tiempo t_0 y t . Para el análisis se ha considerado como rigidez representativa del elemento a la altura de un rectángulo de área equivalente al área bajo la curva de la Fig. 6.3 tanto para el caso axial y de flexión. Los valores altos y bajos en los gráficos representan las rigideces correspondientes a secciones en el estado 1 y 2 respectivamente.

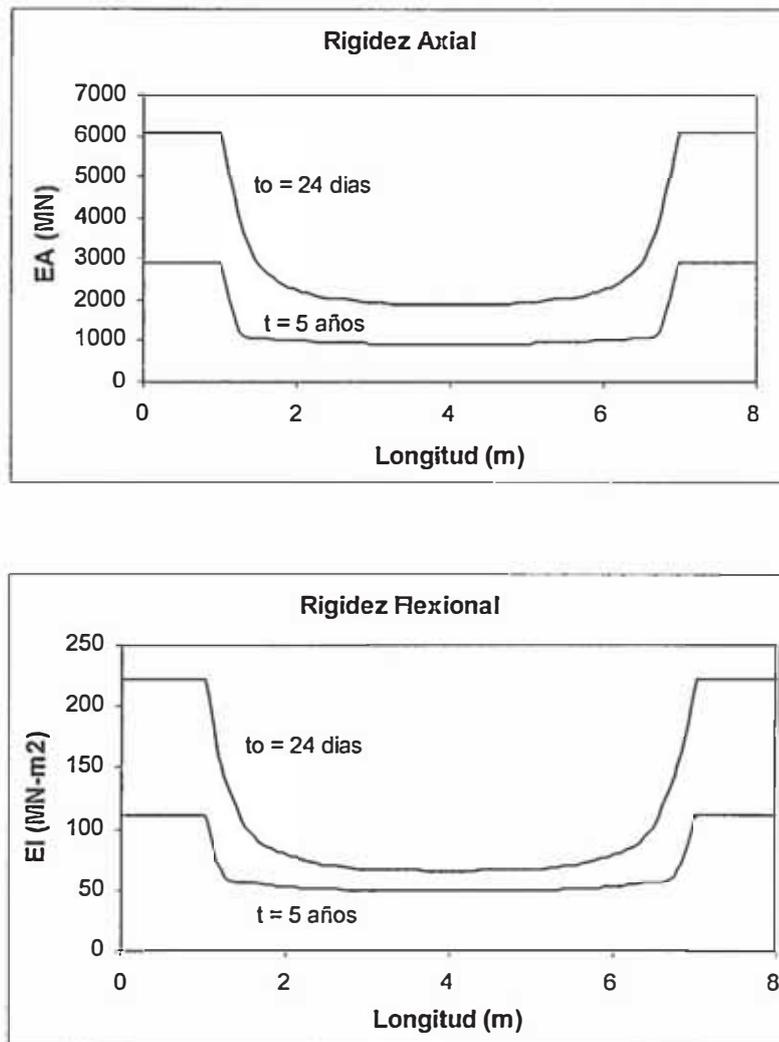


Fig. 6.3 Variación de la rigidez axial y a flexión con la luz de la viga 12.

La Fig. 6.4 muestra la redistribución de esfuerzos con el tiempo para la sección central de la viga 12 sometida a un momento flexional $M = 0.136$ MN-m mayor a M_{cr} . En el caso del estado 1 se considera que las fibras en tensión tienen un comportamiento similar a las fibras en compresión desde el inicio del período hasta el final. La reducción de la fibra extrema en compresión es aproximadamente 10% y 40% para los estados 1 y 2 respectivamente.

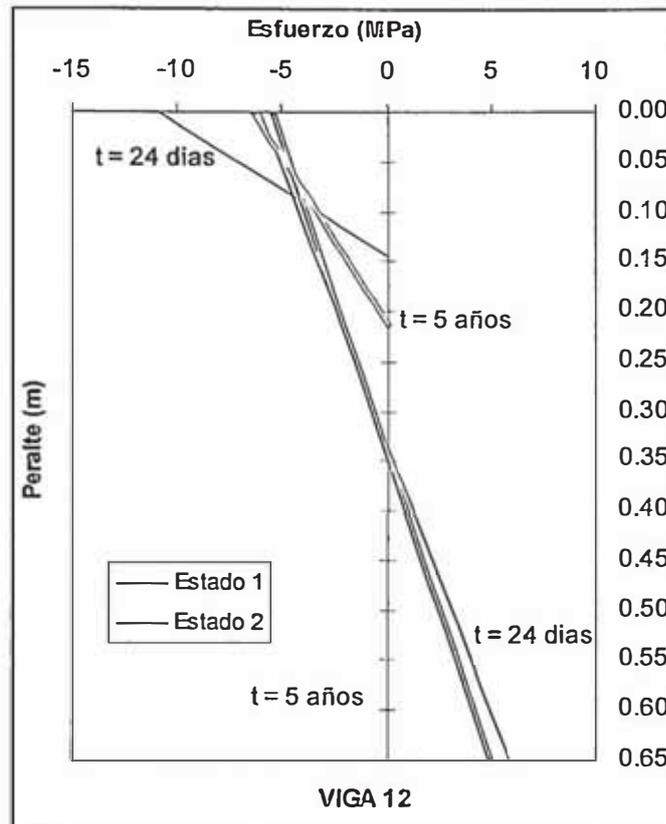


Fig. 6.4 Redistribución de esfuerzos en la sección central de la viga 12

Para un juego diverso de cargas externas sobre la viga $W = 0.005, 0.007, 0.009, 0.01, 0.017$ MN/m se pudo apreciar que el flujo plástico produce mayores deflexiones en el tiempo en secciones con poca cuantía a compresión y que el acero en tensión también restringe las deflexiones a largo plazo. Además, los diagramas de fuerzas permanecen inalterables en el tiempo.

RESUMEN

En la aplicación anterior se ha estudiado la influencia del flujo plástico en la sección central de una viga rectangular de concreto armado con diferentes cuantías de acero. Las deflexiones diferidas calculadas por expresiones propuestas por el CEB y el ACI son relativamente próximas a las calculadas con el método simplificado de Ghali - Favre. La ecuación (5.20) correspondiente al ACI (435) presenta valores más cercanos que el modelo propuesto por You y Winter (ecuación 5.21); a pesar de que sólo toma en cuenta la cuantía a compresión. El método paso a paso fue usado para corroborar los valores obtenidos por el método simplificado con valores supuestos para el coeficiente de envejecimiento, encontrándose un rango aceptable para χ entre 0.6 y 0.9.



6.2 REDISTRIBUCION DE ESFUERZOS CON EL TIEMPO

Conforme el concreto envejece, los esfuerzos se relajan mientras el acero resiste un incremento de carga para mantener el equilibrio interno. El cambio de esfuerzos en secciones rectangulares de concreto en compresión y/o flexo - compresión debido al efecto del flujo plástico es estudiado en la presente aplicación para cargas sostenidas durante 30 años. El análisis de las secciones se realizó utilizando el método paso a paso, considerando sólo el efecto del flujo plástico básico de acuerdo al modelo B3.

6.2.1 CONSIDERACIONES BASICAS

El comportamiento del concreto en el tiempo se modela mediante el modelo B3 propuesto por Bazant. En el presente análisis se excluyen los efectos de contracción, flujo plástico por secado y expansión térmica considerando que la humedad ambiental se mantiene cerca del punto de saturación y la temperatura es mantenida constante en un nivel moderado. Además, el acero se comporta linealmente en el tiempo con un módulo de elasticidad constante y la deformación del concreto se determina como la suma algebraica de la deformación elástica como término independiente del tiempo y la deformación por flujo plástico básico. La exposición a un medio ambiente natural conllevará a la superposición de los efectos anteriormente mencionados acompañados por cambios de mayor magnitud que considerando sólo el flujo plástico básico.

La deformación en el tiempo para esfuerzos compresivos uniaxiales puede ser escrita para un esfuerzo aplicado en t_0 y mantenido constante hasta t como:

$$\varepsilon_{c(t)} = \varepsilon_c + J_{(t, t_0)} \sigma_{(t_0)} \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_c = q_1 \cdot \sigma_{(t_0)} \quad (6.2)$$

Donde ε_c es la deformación elástica independiente del tiempo y el segundo término en la ecuación (6.1) representa la deformación debida a flujo plástico básico. Para el modelo B3, la función de deformación por esfuerzo unitario es:

$$J_{(t, t_0)} = \left[q_2 \cdot Q_{(t, t_0)} + q_3 \cdot \ln(1 + (t - t_0)^{0.1}) + q_4 \cdot \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \right] \quad (6.3)$$



Los multiplicadores q_1 , q_2 , q_3 y q_4 son constantes de los materiales expresados en unidades de (esfuerzos)⁻¹ cuya formulación puede ser encontrada en el anexo. El modelo B3 es aplicable a un rango de esfuerzos del concreto en condiciones de servicio hasta un valor de $0.45.f_c$. La magnitud de la deformación por flujo plástico del concreto bajo esfuerzos de tensión no es tomada en cuenta por el modelo B3; sin embargo en la presente aplicación la deformación desarrollada debido a una historia de esfuerzos de tensión tiene el mismo tratamiento como la deformación desarrollada por una historia idéntica de esfuerzos compresivos. La componente de deformación elástica en la ecuación (6.2) es reemplazada por la deformación instantánea ilustrada en la Fig. 2.1 considerando la curva en tensión y sólo la parte lineal de la zona de compresión. La parte descendente de la curva esfuerzo - deformación en tensión de la Fig. 2.1 posee un módulo de tensión igual a:

$$E_t = \frac{70}{q_1 \cdot (57 + 145f_c)} \quad (6.4)$$

La deformación para el intervalo i ésimo puede ser expresado como sigue:

$$\varepsilon_{c(t_i + \frac{1}{2})} = q_1 \cdot \sigma_{(t_i + \frac{1}{2})} + J_{(t_i + \frac{1}{2}, t_i)} \left(\sigma_{(t_i + \frac{1}{2})} - \sigma_{(t_i + \frac{1}{2})} \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \left((\Delta \sigma_c)_j \cdot J_{(t_i + \frac{1}{2}, t_j)} \right) \quad (6.5)$$

6.2.2 COMPRESION PURA

Una columna de concreto con acero de refuerzo ubicado simétricamente se somete a una fuerza axial concentrada. Se supone que existe compatibilidad entre las deformaciones del acero y del concreto, además ambos materiales se comportan elásticamente en el tiempo. Así, el esfuerzo en el concreto en el tiempo puede escribirse como:

$$\sigma_{(t_i + \frac{1}{2})} = \frac{\sigma_A - \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left((\Delta \sigma_c)_j \cdot \left(J_{(t_i + \frac{1}{2}, t_j)} - J_{(t_i + \frac{1}{2}, t_i)} \right) \right) \right)}{\left(q_1 + J_{(t_i + \frac{1}{2}, t_i)} \right) \rho E_s + (1-n)} \quad (6.6)$$

Donde σ_A es la carga axial aplicada por unidad de área, ρ es la cuantía de acero y E_s es el módulo de elasticidad del concreto igual a 200 GPa para todos los cálculos.



Propiedades del Concreto

Mezcla	f'c Mpa	Agua: cemento Arena: agregado grueso	Constantes de los materiales (10 ⁻⁶ MPa ⁻¹)			
			q ₁	q ₂	q ₃	q ₄
A	26.7	0.746:1; 2.83:3.18	21.40	149.00	13.38	5.04
B	37.9	0.532:1; 2.48:2.93	37.80	236.40	5.49	11.43
C	45.3	0.568:1; 1.976:2.32	20.90	133.50	4.03	8.10
D	48.1	0.491:1; 2.36:2.78	27.30	161.60	2.72	9.64

La Fig. 6.5 y 6.6 muestran la variación del esfuerzo del concreto elaborado con la mezcla tipo A y la variación de la deformación y del esfuerzo del acero con el tiempo en una columna cargada axialmente con $\sigma_A = 0.3 f'_c$. Las ordenadas en los gráficos han sido obtenidos como razones de dividir los esfuerzos y deformaciones obtenidos con la ecuación (6.6) respecto a los calculados suponiendo que el concreto es un material elástico cuyo módulo de elasticidad a los 28 días es $0.6 / q_1$. Por otro lado, el logaritmo del tiempo respecto al día 28 es graficado en el eje de las abscisas para una mejor visualización. Así, la Fig. 6.5 muestra que el decremento del esfuerzo del concreto respecto al esfuerzo elástico inicial a los 28 días aumenta conforme la cuantía en la sección se hace mayor. En forma similar en la Fig. 6.6 se aprecia que el incremento relativo en la deformación axial aumenta conforme la cuantía de refuerzo disminuye.

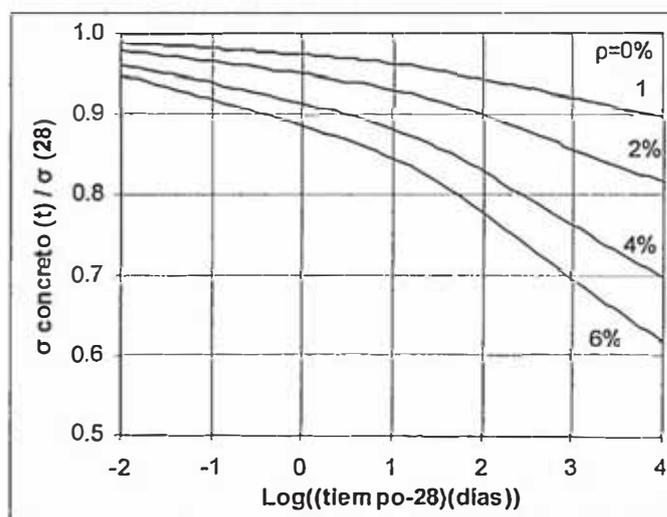


Fig. 6.5 Variación del esfuerzo en el concreto.

La Fig. 6.7 muestra el decrecimiento relativo del esfuerzo del concreto con el tiempo para secciones con $\rho = 6.0 \%$. Aproximadamente para un período de 30 años el esfuerzo en el concreto se ha reducido en un 40% para todas las mezclas analizadas; a pesar de la gran diferencia en el esfuerzo de compresión del cilindro ensayado a los 28 días.

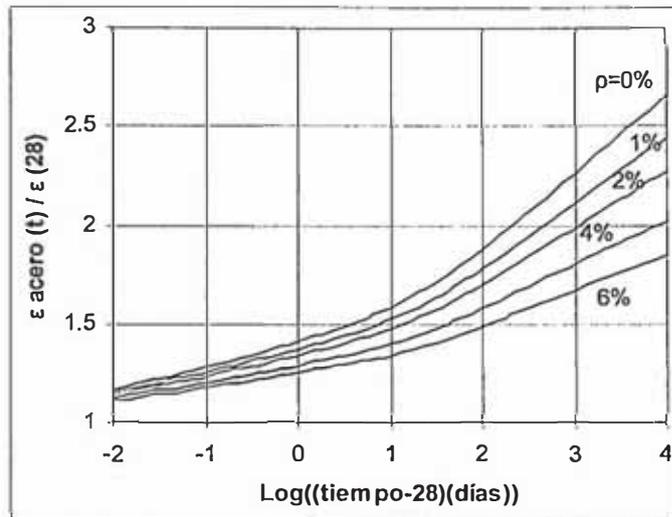


Fig. 6.6 Variación del esfuerzo y deformación del acero.

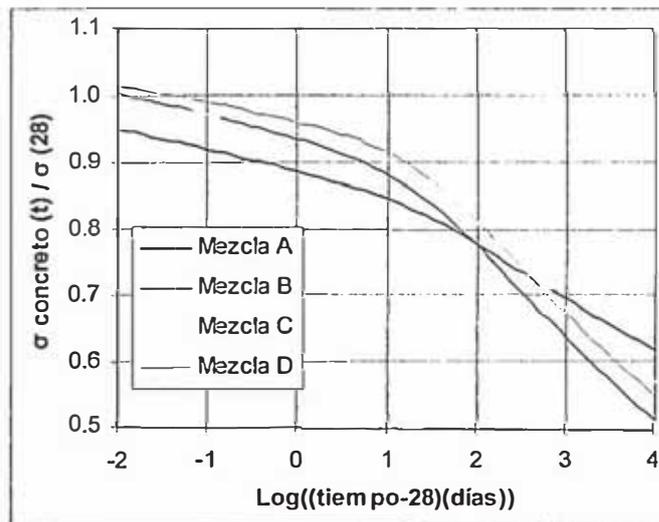


Fig. 6.7 Esfuerzo del concreto en columnas

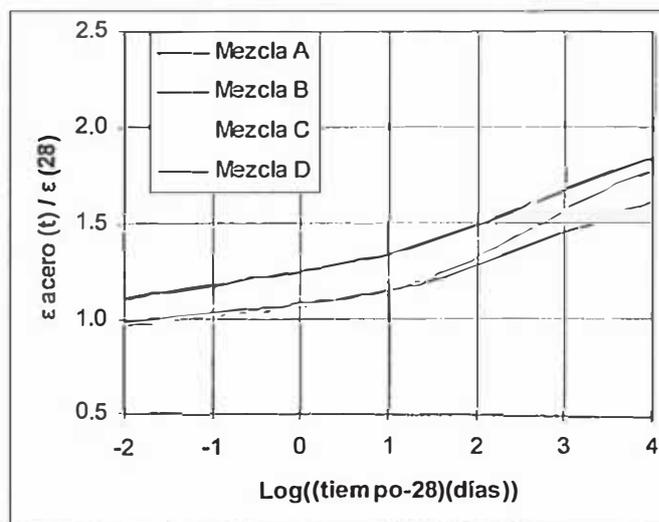


Fig. 6.8 Deformación del concreto en columnas



De otro lado, la Fig. 6.8 muestra que el incremento en la deformación axial es alrededor de un 80% para todas las mezclas analizadas y que el esfuerzo en el acero se incrementará el mismo porcentaje para un período de 30 años. Las curvas de la Fig. 6.7 y Fig. 6.8 caen en una misma banda angosta, independientemente de la gran diferencia en la resistencia a la compresión de cada mezcla, lo que sugiere que la variación del esfuerzo relativo en el tiempo generalmente no depende de la resistencia del espécimen.

Aunque en la práctica de diseño convencional, cuantías mayores a 6 % son anormales. Hay casos donde las columnas se construyen con grandes porcentajes de acero usando secciones de acero en vez de barras. En cualquier caso, se complementó el análisis anterior considerando cuantías hasta de 10 % con la finalidad de ver la tendencia del comportamiento desde un punto de vista teórico. Los resultados muestran la misma tendencia en todos los gráficos anteriores llegando aproximadamente a decrecer el esfuerzo en el concreto en un 50 % en 30 años para $\rho = 10.0 \%$. Mientras el incremento en la deformación axial es aproximadamente igual a 60 %.

RESUMEN

El método paso a paso fue utilizado para encontrar los cambios en esfuerzos y deformaciones en columnas sometidas a fuerza axial constante, sin excentricidad, para diferentes cuantías de refuerzo. Los resultados muestran que los esfuerzos del acero se incrementan en el tiempo y que estos incrementos serán menores conforme la cuantía de refuerzo aumente. Se observó que en columnas con cuantías tan altas como $\rho = 6.0 \%$, el incremento en el esfuerzo del acero es aproximadamente 80% para un período de 30 años. Este porcentaje aumenta si se reduce la cuantía de refuerzo. En casos extremos de columnas con cuantía mínima y esfuerzos elevados, podría producirse la fluencia del refuerzo. Los resultados son prácticamente independientes de la resistencia a la compresión del concreto.

6.2.3 FLEXO - COMPRESION

El análisis de secciones de concreto armado sujetas a fuerza axial y momento flexionante es más complicado; sin embargo el método paso a paso y el uso de un algoritmo adecuado simplifican grandemente los cálculos. Las consideraciones para el acero y el concreto son las mencionadas anteriormente siguiendo un comportamiento de acuerdo a la ecuación (6.5).



El algoritmo usado para el cálculo de los diagramas de esfuerzos y deformaciones en secciones de concreto armado fue realizado por prueba y error, suponiendo valores iniciales de la deformación axial media y la curvatura en la sección. Para cada juego de deformación axial y curvatura se calculan los esfuerzos del concreto a lo largo del peralte en un número de puntos igualmente espaciados y el esfuerzo en el acero es obtenido suponiendo un comportamiento lineal con módulo de elasticidad constante. La fuerza axial y momento flexionante resultante de estos esfuerzos es comparada con los valores reales para obtener el equilibrio. El juego de deformación axial media y curvatura que produce las fuerzas reales en la sección se obtuvieron mediante dos ciclos iterativos adoptando el método de Newton - Rapson. En el anidado interior la deformación axial media fue variada hasta obtener la fuerza axial real y en forma similar se obtuvo la curvatura en el anidado externo para el cálculo del momento flexionante. Alternativamente cualquier otro método de solución de ecuaciones lineales pudo haber sido utilizado.

Se ha realizado el análisis de secciones rectangulares sometidas a flexión y fuerza axial de acuerdo a la metodología anterior para los siguientes casos:

CASO	N (MN)	M (MN-m)
1	F	$0.125.F.H$
2	F	$0.250.F.H$
3	0	$0.125.F.H$
4	0	$0.250.F.H$

La mezcla tipo A fue usada en el análisis con un módulo de ruptura igual a $0.1 \cdot f'_c$ y $\rho = 8 \%$. El acero fue ubicado simétricamente a una distancia $H/8$ de cada borde extremo en el plano de flexión, obteniéndose una sección doblemente reforzada. En todos los caso H es el peralte del miembro en el plano de flexión, N es la fuerza axial, M el momento flexionante, $F = 0.3 \cdot A \cdot f'_c$ y A el área total de la sección. Los diagramas de esfuerzos se muestran en la Fig. 6.9 y Fig. 6.10 para los cuatro casos considerados.

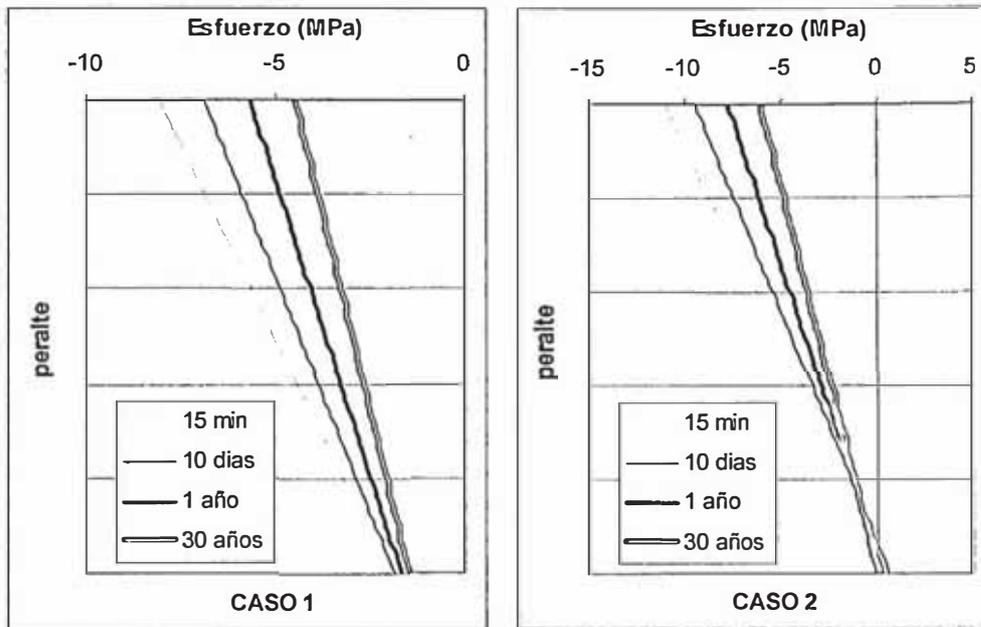


Fig. 6.9 Redistribución de esfuerzos con el tiempo en secciones sometidas a flexo - compresión.

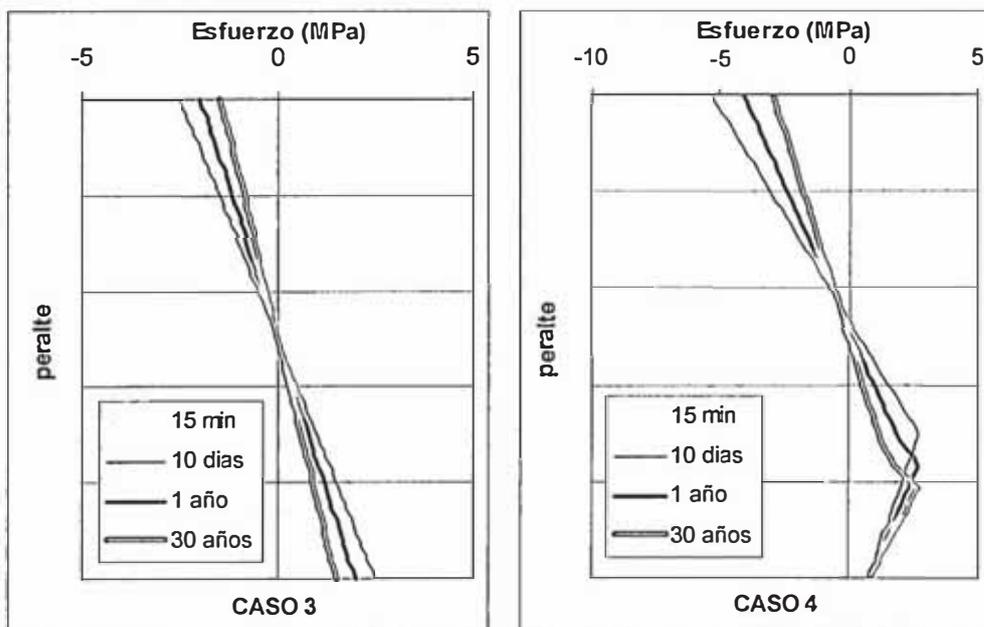


Fig. 6.10 Redistribución de esfuerzos con el tiempo en secciones sometidas a flexión pura.

Los perfiles de esfuerzo del concreto muestran que la fibra extrema en compresión se reduce en un 50 % aproximadamente para todos los casos durante 30 años. En los casos de flexo – compresión (1 y 2), los esfuerzos del concreto casi no ingresan a la zona de tensión y el esfuerzo en el acero de compresión se incrementa aproximadamente en 60 % durante 30 años. En el caso 3 aproximadamente la dieciseisava parte de la altura de la sección ingresa a la zona de tensión y retoma su forma lineal rápidamente después de 10 días, mientras que para el caso 4 más de la



mitad del peralte de la viga entra en la zona de tensión de la curva esfuerzo - deformación sin llegar a recuperar alguna forma lineal. Para un período de 30 años el esfuerzo en el acero de compresión se incrementa en aproximadamente 45 % para los casos de flexión pura (3 y 4). En todos los casos anteriores el esfuerzo en el acero de tensión se incrementa, pero este incremento varía de caso a caso.

La Fig. 6.11 muestra el desarrollo de las deformaciones con el tiempo para los casos estudiados. El desarrollo de la curvatura para el caso 1 y 2 es igual; a pesar del gran incremento del momento flexionante.

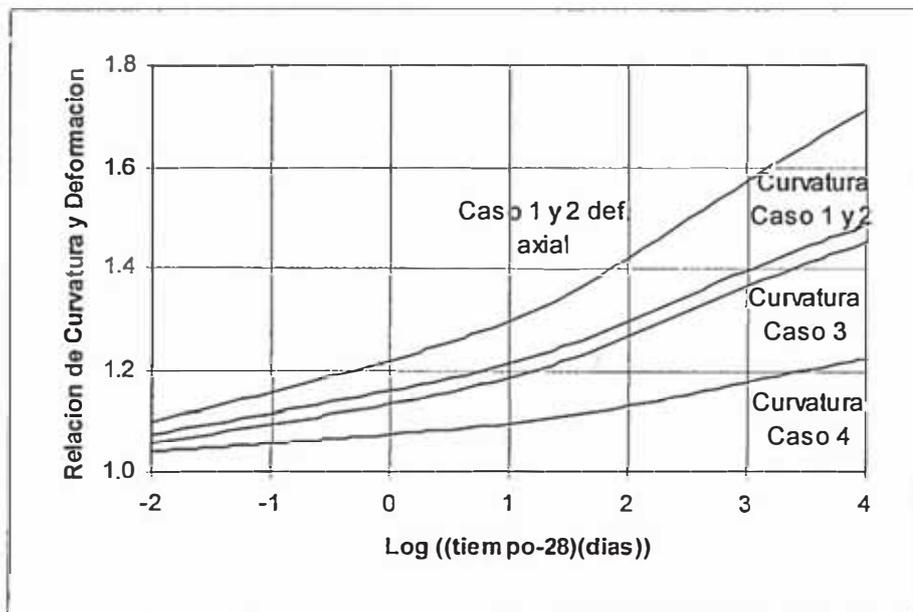


Fig. 6.11 Desarrollo de deformaciones con el tiempo en secciones sometidas a carga combinada

RESUMEN

El análisis de redistribución de esfuerzos debido al flujo plástico en secciones rectangulares de concreto armado sometidas a cargas combinadas fue realizado utilizando el método paso a paso. Se consideró que las fibras en tensión tienen un comportamiento similar a las fibras en compresión y pueden ser modeladas por el modelo B3 propuesto por Bazant. Los resultados muestran que en todos los casos estudiados el esfuerzo en la fibra extrema en compresión se reduce aproximadamente 50 % en 30 años y que el esfuerzo en el acero en compresión se incrementa aproximadamente 45 % y 60 % para los casos de flexión pura y flexo - compresión respectivamente durante 30 años. Mientras que el incremento de esfuerzo en el acero de tensión varía de caso a caso.



6.3 ANALISIS DE VIGAS CONTINUAS

En esta sección se estudian casos de vigas continuas con las características que se observan en estructuras reales, confirmándose las conclusiones de las secciones precedentes.

6.3.1 VIGA CON VOLADIZO

La viga con voladizo de la Fig. 6.12 ha sido diseñada de acuerdo al reglamento ACI (318 - 83). Por lo tanto la deflexión en la sección extrema en volado no es crítica. En la presente aplicación se considera que la viga ingresa a la condición de servicio en $t = 28$ días con humedad relativa promedio de 90% y $f'_c = 20$ MPa. Los resultados de la deflexión en la viga se van a reproducir de acuerdo al método simplificado (*Creep.xls*) para $t = \infty$.

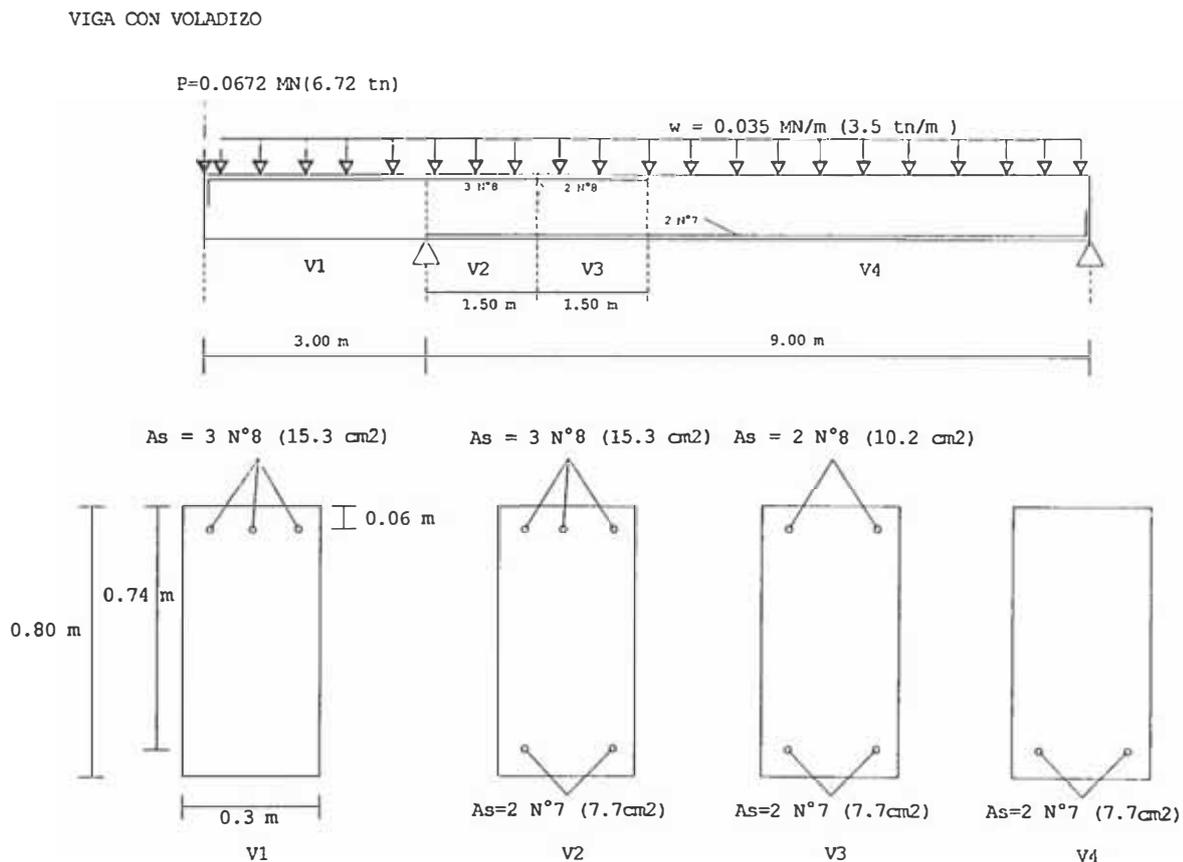


Fig. 6.12 Viga con voladizo con refuerzo en tensión y compresión variable a lo largo de la luz



La variación de la deflexión en la luz de la viga con el tiempo se muestra en las figuras 6.13 y 6.14.

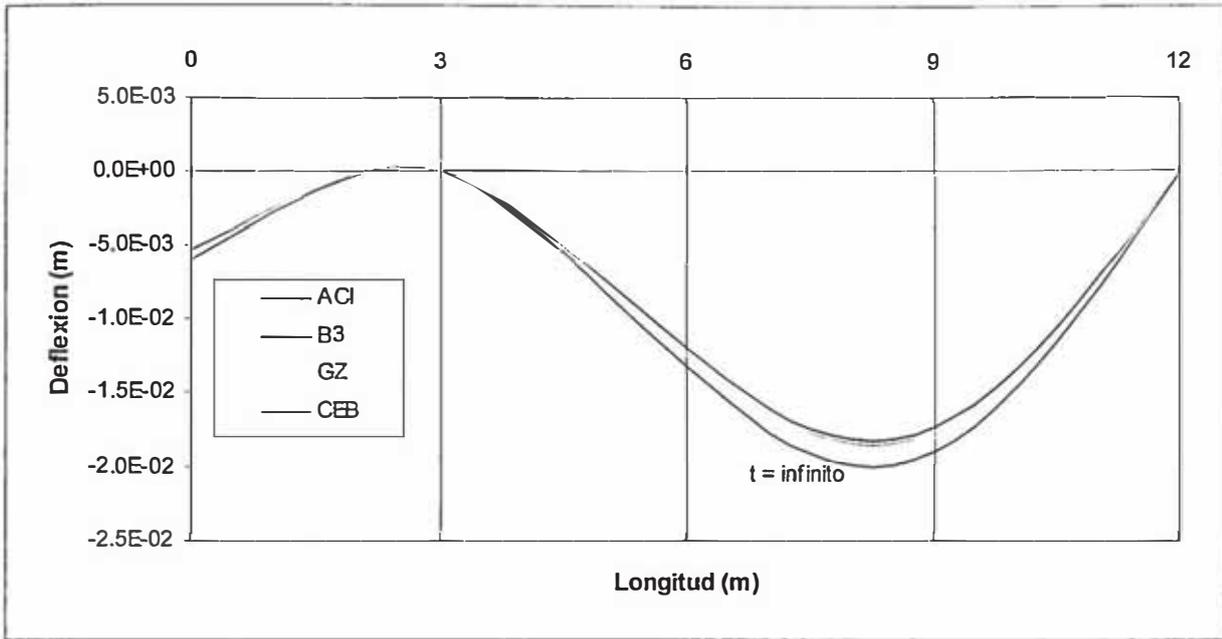


Fig. 6.13 Variación de la deflexión a lo largo de la viga para $t = \infty$

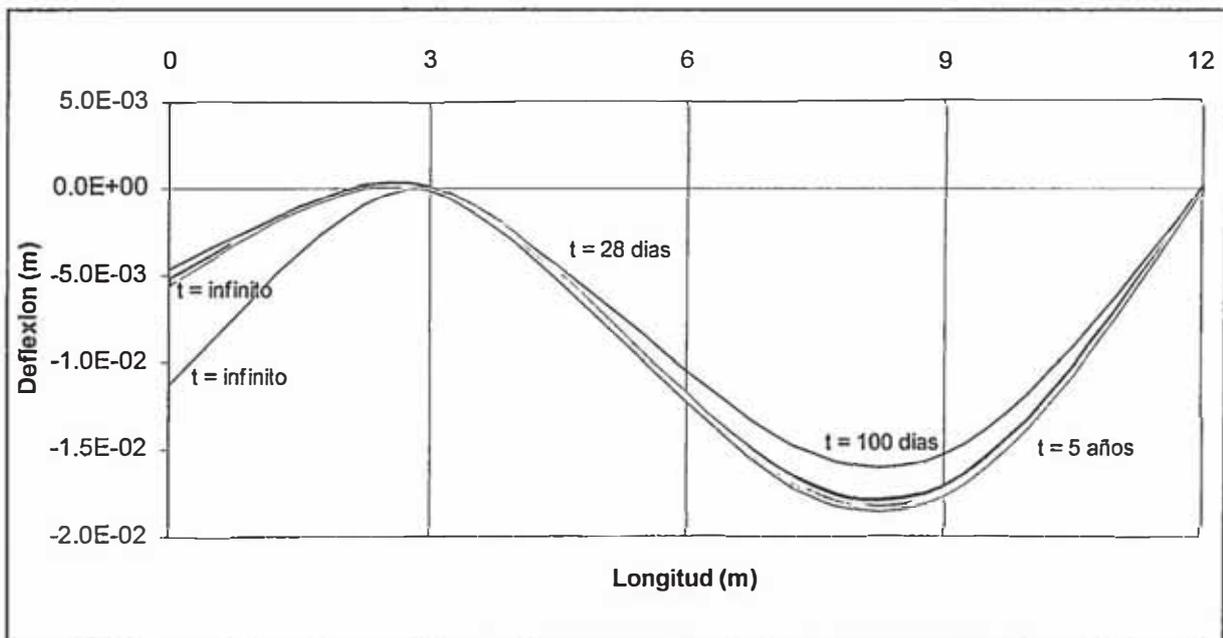


Fig. 6.14 Progreso de la deflexión con el tiempo usando el modelo CEB.

De la Fig. 6.13 se aprecia que la deflexión predicha por los diferentes modelos son próximos entre si, siendo el modelo de B3 el que mayores valores produce. En realidad, el coeficiente de flujo plástico calculado por el modelo de B3 depende del módulo de



elasticidad del concreto obtenido experimentalmente a los 28 días. Para el presente ejemplo se uso un módulo de elasticidad igual a 27052 MPa cuyo valor se encuentra muy próximo a los valores teóricos obtenidos con los demás modelos (ACI, CEB y GZ).

La Fig. 6.14 muestra el aumento de la deflexión en la sección extrema en voladizo debido al retiro de una barra de acero en las secciones V1 y V2. La deflexión en esta sección se incrementa aproximadamente en un 100 % para $t = \infty$, lo que sugiere que esta barra de refuerzo tiene gran participación en el control de la deflexión. Con respecto al diagrama de fuerzas, éste permanece inalterable para los momentos de flexión y fuerzas de corte; sin embargo aparecen fuerzas axiales indeterminadas con el tiempo debido a la restricción que ofrecen los apoyos fijos de la viga.

6.3.2 PORCION DE PORTICO

La Fig. 6.15 podría ser el modelo estructural de una viga continua de tres tramos en un piso típico de una edificación. Las columnas son de 3 m de altura y se supone que el flujo plástico no tiene incidencia sobre ellas. Las vigas son de 12 m de longitud cada una y la sección transversal de la viga exterior se muestra en la Fig. 6.16. Además, la estructura ingresa a la condición de servicio en $t_0 = 28$ días y los efectos del flujo plástico en la deflexión máxima de la viga exterior y la redistribución de momentos son calculados para $t = 30000$ días.

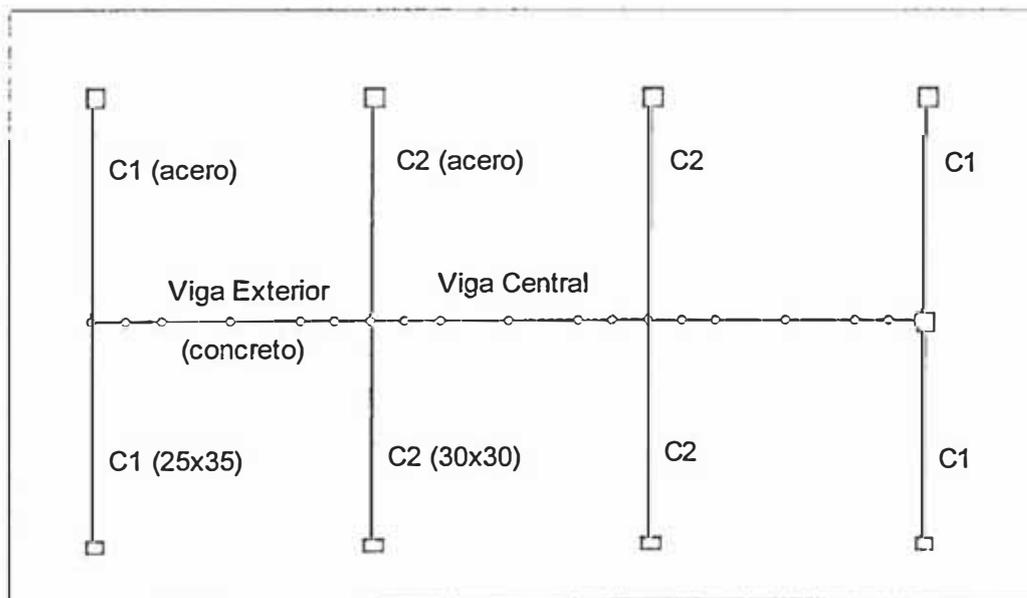


Fig. 6.15 Geometría de porción de pórtico



Propiedades del concreto a los 28 días (vigas)

$f'_{ck} = 20 \text{ MPa}$

$f_{ct} = 2.78 \text{ MPa}$

$E_c =$ variable de acuerdo al código de diseño e igual a 30303.384 MPa para el CEB

$E_s = 200 \text{ GPa}$

$\alpha = E_s / E_c = 6.6$

Carga muerta $W_D = (0.36 \times 0.58 + 0.12 \times 3) \times (2.320 \text{ tn} / \text{m}^3) = 1.32 \text{ tn} / \text{m}$ o 0.013 MN / m

Carga viva $W_L = 0.4 \text{ tn} / \text{m}^2 \times 3 \text{ m} = 1.20 \text{ tn} / \text{m}$ o 0.012 MN / m

La deflexión inicial en la viga se determina considerando una inercia efectiva de acuerdo a la ecuación (5.23). A partir de la deflexión inicial cualquier fórmula directa propuesta por el CEB y ACI puede ser utilizada para predecir la deflexión diferida para $t = 30000$ días.

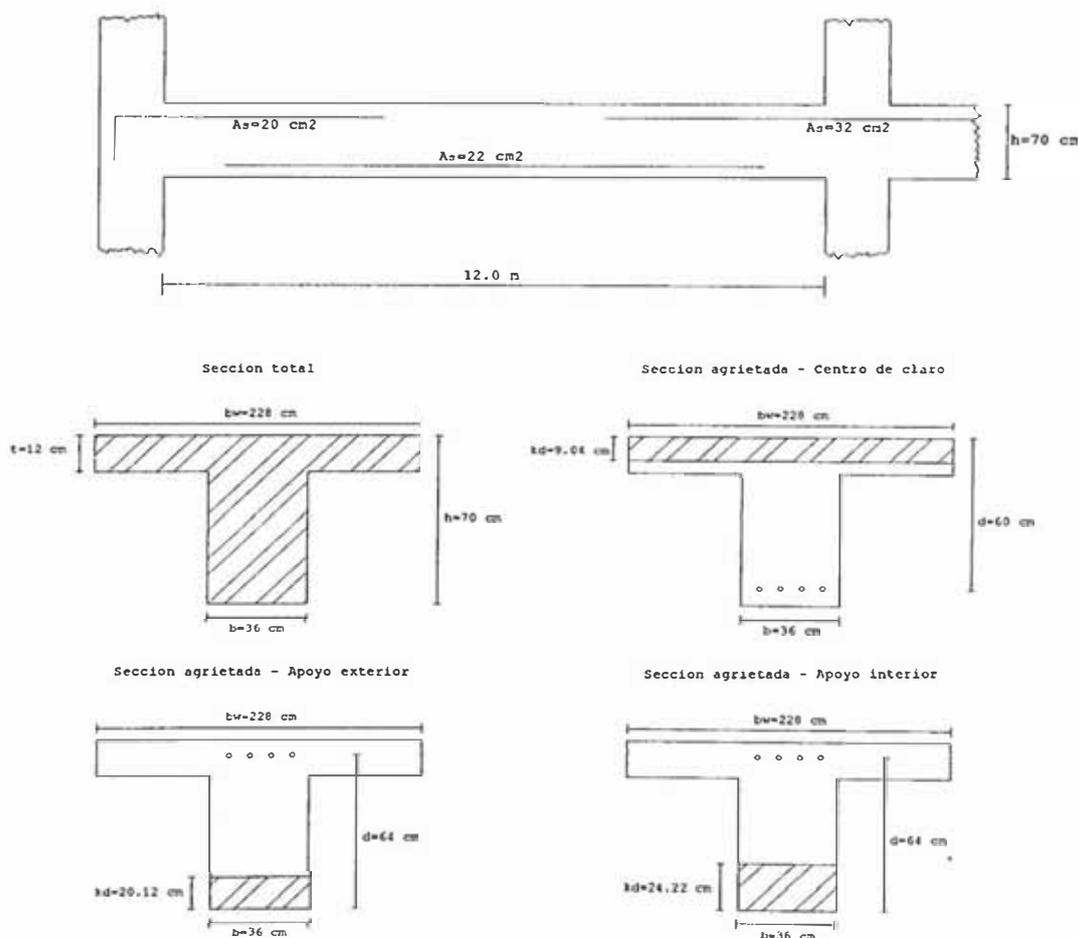


Fig. 6.16 Detalles del la luz exterior para la viga continua



CÁLCULO DE LA DEFLEXION INICIAL

Para la viga exterior se presentan tres tipos de secciones de acuerdo a la posición del eje neutro. La sección del apoyo exterior cuyas fibras superiores están sometidas a tensión debido al momento negativo que se produce en ésta. En forma similar, la sección del apoyo interior, pero con diferente cantidad de refuerzo y por último la sección central cuyas fibras inferiores están sometidas a tensión presentando solamente refuerzo en la parte más baja. Además, los momentos de agrietamiento son 0.117 MN.m y 0.272 MN.m para el momento positivo y negativo respectivamente.

El siguiente cuadro resume los cálculos de la inercia efectiva para cada sección mencionada

Inercia Efectiva en las secciones

Apoyo	I_g m ⁴	I_{cr} m ⁴	M_{D+L} MN-m	M_{cr} MN-m	$(M_{cr} / M_{D+L})^3$ MN-m	I_e m ⁴
Exterior	0.02069	0.00349	0.21000	0.27194	2.17140	0.02069
Central	0.02069	0.00432	0.18300	0.11774	0.26631	0.00868
Interior	0.02069	0.00500	0.33200	0.27194	0.54952	0.01362

La inercia efectiva de la viga exterior de acuerdo a las fórmulas propuestas por el ACI es:

$$I_e = 0.70 * 8.68.E-03 + 0.15 * (1.362.E-02 + 2.069.E-02) = 0.0112 \text{ m}^4$$

Entonces la deflexión inicial (ACI) en metros es:

$$(\Delta_i)_{D+L} = \frac{0.704 \cdot \left(\frac{5}{48}\right) \cdot (0.183) \cdot 12^2}{(30303.384) \cdot (0.0112)} = 5.680E-03$$

CÁLCULO DE LA DEFLEXION TOTAL

La deflexión total para $t = 30000$ días es:

Deflexión total de acuerdo al ACI ($\Phi=1.672$)

Modelo	Δ_i (m)	Δ_t (m) ACI (435)	Δ_t (m) ACI (1971)
ACI	5.680E-03	1.375E-02	1.704E-02



Los resultados de la deflexión máxima en la viga exterior utilizando el método simplificado de Ghali - Favre se presentan en el siguiente cuadro.

Deflexión total de acuerdo al Método Simplificado

Modelo	$E_{(t_0)}$ MPa	ϕ	χ	Δ_i (m)	Δ_t (m)
CEB	3.03E+04	2.679	0.871	-3.838E-03	-7.547E-03
ACI	2.55E+04	1.672	0.870	-4.079E-03	-6.833E-03
BAZANT	2.71E+04	3.371	0.703	-3.996E-03	-9.193E-03
GADNER	2.63E+04	3.048	0.812	-4.039E-03	-8.866E-03

Los resultados muestran que la deflexión es sobrestimada en casi 2 y 2.5 veces por las fórmulas directas del ACI con respecto al método simplificado. Esta sobrestimación disminuiría aproximadamente a 1.5 y 1.8 respectivamente si se utilizara la misma deflexión inicial para ambos métodos. Para este ejemplo, la deflexión calculada con los parámetros del modelo B3 es la más cercana.

La variación de la curvatura y la redistribución del diagrama de momentos flectores con el tiempo para la mitad de la viga continua se aprecian en las figuras 6.17 y 6.18 respectivamente.

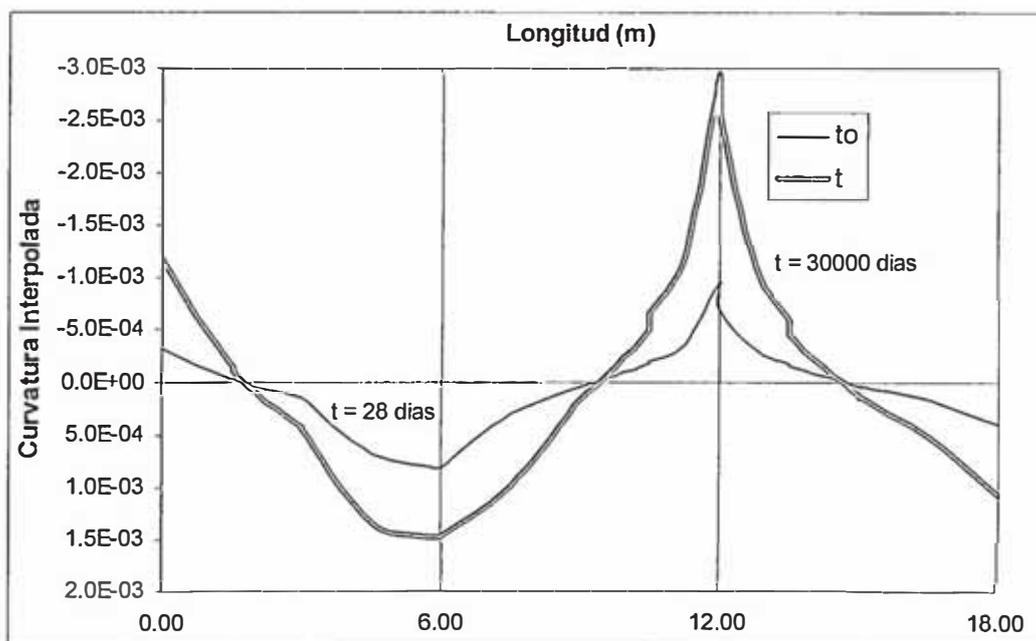


Fig. 6.17 Variación de la curvatura con la longitud

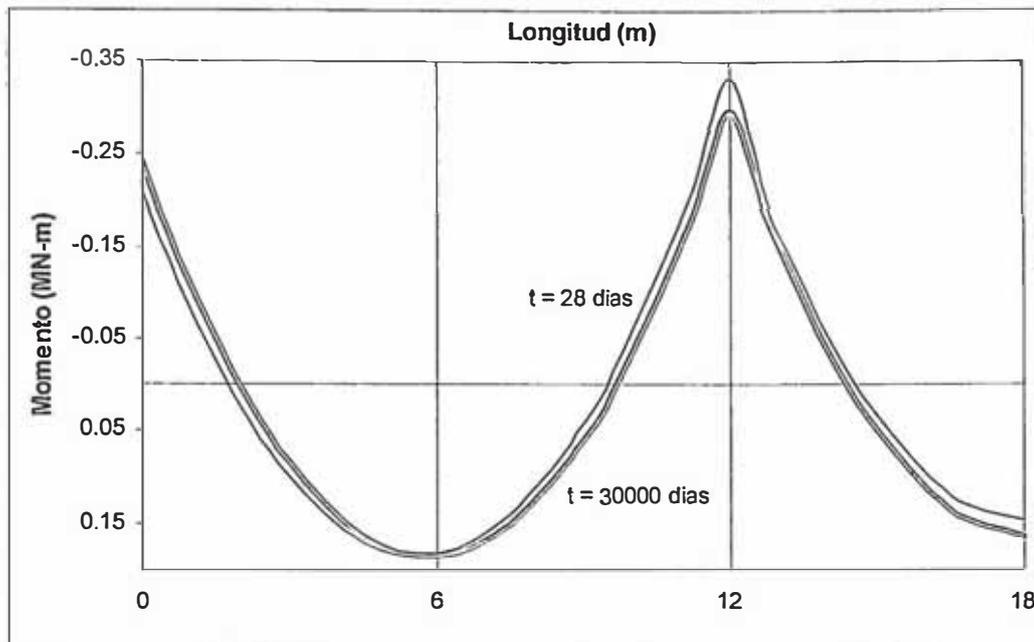


Fig. 6.18 Redistribución del diagrama de momentos flectores

Los resultados muestran que se produce un ligero incremento del momento negativo en los apoyos exteriores; mientras que los momentos negativos en los apoyos interiores disminuyen. Para este caso particular, el flujo plástico no ha tenido gran influencia en la modificación de los diagramas de momentos flectores.

RESUMEN

Los ejemplos desarrollados son enfocados directamente al cálculo de las deflexiones diferidas en casos reales de estructuras de concreto armado. Los resultados corroboran que el acero de refuerzo restringe la deformación en el tiempo. Los valores obtenidos con los diferentes códigos de diseño son próximos entre si. Las fórmulas directas establecidas, en este caso por el ACI, sobrestiman las deflexiones dentro de un rango aceptable. Además, se encontró que en una viga continua de tres tramos los momentos en los apoyos interiores disminuyen con el tiempo.



6.4 ANALISIS DE VIGA CONTINUA CON ASENTAMIENTO

La influencia del flujo plástico no sólo está enfocada al cálculo de deflexiones y/o fuerzas resultantes de sección; si no también a la influencia que éste produce en estructuras que presentan asentamientos. En la presente aplicación se enfoca la influencia del flujo plástico en la variación de la reacción interna del apoyo central de una viga continua de dos tramos de acuerdo al progreso del asentamiento con el tiempo.

En un primer caso se considera que el asentamiento ocurre rápidamente en el tiempo inicial t_0 y se mantiene constante hasta $t = \infty$, produciéndose el fenómeno de relajación durante este intervalo de tiempo. El segundo caso considera que el asentamiento se produce gradualmente desde cero en el tiempo t_0 hasta alcanzar su valor máximo en $t = t_1$ y a partir de allí ser mantenido constante hasta el tiempo de análisis $t = t_2$.

Las consideraciones mencionadas anteriormente se aplican a la viga de la Fig. 6.19, en la que se muestra que el apoyo intermedio B sufre un asentamiento inicial en $t_0 = 28$ días con $t_1 = 128$ días y $t_2 = 10028$ días. La resistencia a la compresión uniaxial de la viga es 20 MPa, la humedad relativa promedio (50%) y la relación volumen - superficie es de 206 mm. Las características de la sección transversal de la viga corresponden a la viga 12 de la sección 6.1

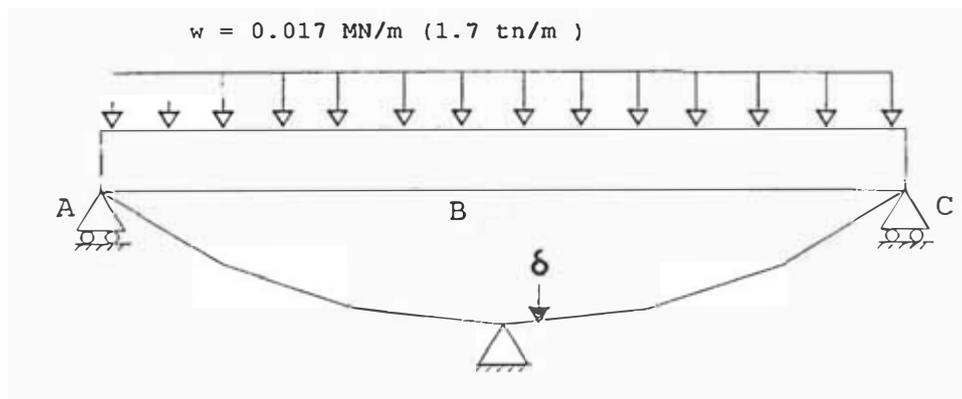


Fig. 6.19 Viga continua sujeta ha asentamiento en su apoyo central.

El diagrama inicial de momentos flectores en función del asentamiento se muestra en la Fig. 6.20.

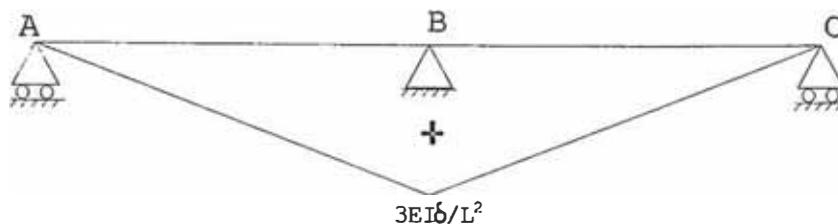


Fig. 6.20 Diagrama de momento flector debido al asentamiento δ en B

Debido a que el asentamiento es una función del tiempo, la fuerza de reacción F en el apoyo central varía de mayor a menor, siempre y cuando se considere que el asentamiento total se produce en el tiempo t_0 . Lo anterior no es tan preciso como lo que sucede en la realidad, es decir el asentamiento se produce gradualmente. Para modelar la variación de reacción del apoyo interno, específicamente para obtener el valor más crítico, es necesario utilizar un método aproximado como el explicado en la sección 3.4 o realizar un análisis paso a paso utilizando alguna función que describa el comportamiento del suelo en función del tiempo. La variación del apoyo interno se analizó a través del método simplificado y paso a paso.

ANÁLISIS SIMPLIFICADO

El efecto del asentamiento en la variación de la reacción interna y por ende en el momento flector depende exclusivamente si éste se produce rápidamente o gradualmente en el tiempo. En el primer caso, la variación de la reacción interna es tabulada para diferentes valores del tiempo ($t = 128, 228, 328, 828, 1628, 3228, 6428$ y 10028 días) de acuerdo a la ecuación (3.20). Por otro lado, cuando el asentamiento es introducido gradualmente, el valor inicial de la reacción en el apoyo central F es cero en $t_0 = 28$ días. La sustitución en la ecuación (3.17) con $t_0 = 28$ días y $t_1 = 128$ días determina el valor de $F_{(1)}$ en el final del período del asentamiento. Los valores de $F_{(2)}$ son obtenidos a través de la ecuación (3.18) con $t_e = 37.5$ días, $t_1 = 128$ días y $t_2 = 228, 428, 828, 1628, 3228, 6428$ y 10028 días.

ANÁLISIS PASO A PASO

Como se explicó anteriormente en el método paso a paso el tiempo es dividido en intervalos y las fuerzas internas, esfuerzos o desplazamientos en el final de cada intervalo son calculados en términos de las fuerzas o esfuerzos aplicados en el primer



intervalo y de los incrementos que han ocurrido en los intervalos precedentes. El método general de las fuerzas del Análisis Estructural fue utilizado para determinar la reacción del apoyo interno en cada intervalo de tiempo conjuntamente con la ecuación (6.7) que describe aproximadamente la curva de consolidación estándar para arcillas dada por Terzaghi y Peck.

$$\frac{\delta(t)}{\delta(\infty)} = 1 - \exp\left(-\frac{3 \cdot (t - t_o)}{t_{0.95} - t_o}\right) \quad (6.7)$$

Donde $\delta(t)$ y $\delta(\infty)$ son el asentamiento en cualquier tiempo t y el asentamiento en el infinito, t_o es el tiempo de inicio del asentamiento, $t_{0.95}$ es el tiempo en el que se produce el 95% del asentamiento total. Los resultados de la variación de la reacción interna para la viga de la Fig. 6.19 se grafican en la Fig. 6.21.

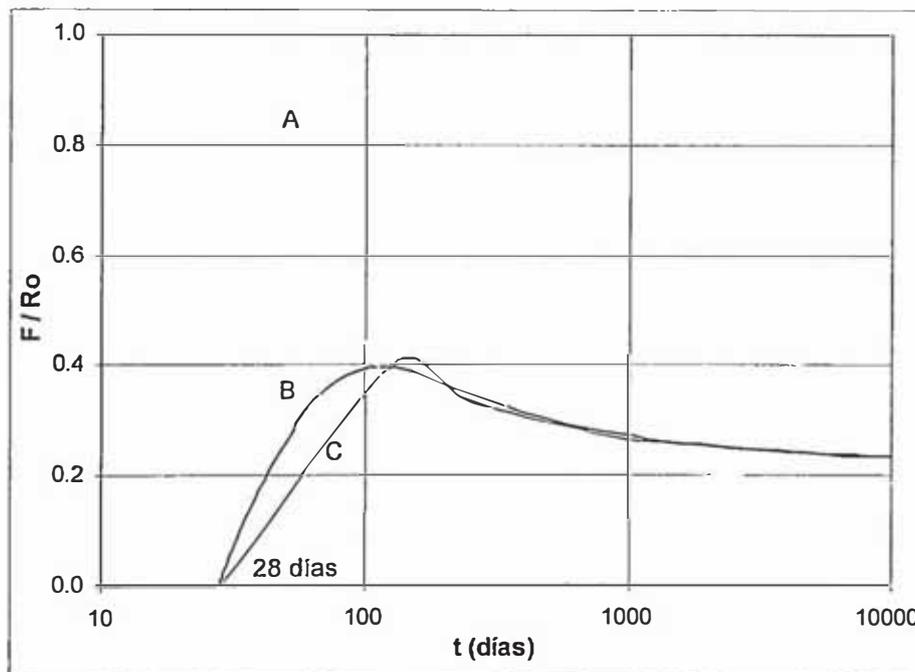


Fig. 6.21 Variación de la reacción interna F respecto a la reacción inicial R_o .

La curva A de la Fig. 6.21 representa la relajación que sufre la reacción interna del apoyo central en el tiempo con respecto a la reacción inicial calculada a los 28 días considerando todo el asentamiento. Aquí se supone que el asentamiento total ocurre en $t_o = 28$ días y que las fuerzas inducidas son relajadas por el flujo plástico para cualquier tiempo posterior. En el mismo gráfico, las curvas B y C representan un caso más real de la variación de la reacción interna utilizando el método aproximado y paso a paso



respectivamente. El asentamiento se introduce gradualmente siguiendo la curva de la ecuación (6.7).

Los resultados de la Fig. 6.21 muestran que la fuerza de reacción interna en el apoyo central se relaja aproximadamente en un 60 % durante 100 días desde el inicio del asentamiento. Además, el método aproximado coincide aceptablemente con el método paso a paso, especialmente para el valor crítico de la reacción interna que corresponde al pico de la curva en la ordenada 0.4.

Con la finalidad de ver la respuesta del flujo plástico en la relajación de la reacción interna con la variación del intervalo de duración ($t_{0.95} - t_0$) se utilizó el procedimiento paso a paso usando la fórmula para suelos de Terzaghi y Peck. Estos resultados son mostrados en la Fig. 6.22 donde ($t_{0.95} - t_0$) es igual a 0, 10, 50, 365 días y 5 años respectivamente. La variación de F con el tiempo se expresa en términos de R_0 . Esta misma variación de la reacción interna también representa la variación del momento flector en el apoyo B en función del momento flector M_0 calculado a los 28 días, donde $M_0 = R_0.L / 2$.

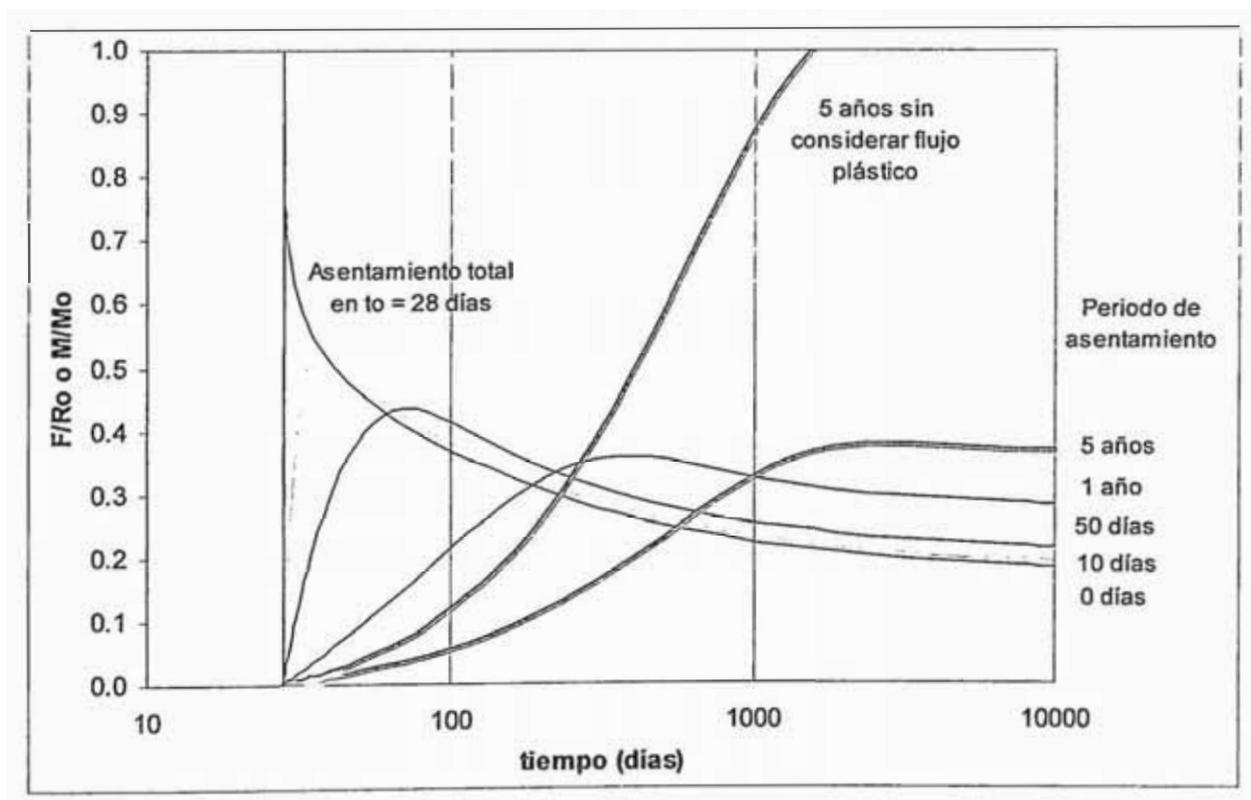


Fig. 6.22 Variación de la reacción interna F y del momento flector M para diferentes lapsos de duración de asentamiento.



La relajación de la reacción interna F disminuye conforme el intervalo de duración del asentamiento aumenta. Esta disminución en la reacción comienza desde un valor máximo al final del asentamiento hasta permanecer casi constante en el tiempo. Un caso especial es el incremento súbito de la reacción interna para un asentamiento introducido gradualmente en 5 años sin considerar la acción del flujo plástico. Aproximadamente para $t = 5$ años el flujo plástico disminuye la reacción interna en un 60%. Por lo tanto, se aprecia claramente la tendencia positiva que tiene el flujo plástico en disminuir los momentos flectores en la estructura generados por posibles asentamientos.

RESUMEN

En la presente sección se estudió la influencia positiva que tiene el flujo plástico en una viga continua de dos tramos que sufre asentamiento en su apoyo central. Los resultados muestran que el flujo plástico relaja la reacción interna del apoyo central hasta en un 60 % durante un período de 5 años. Para el análisis se compararon la exactitud entre el método paso a paso y el procedimiento simplificado de Ghali - Favre en la predicción del valor máximo de la reacción interna del apoyo que sufre asentamiento. Encontrándose valores muy próximos por ambos métodos.



CAPITULO 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Mediante el presente estudio se obtuvieron las siguientes conclusiones:

Las expresiones formuladas en el capítulo 4 para el cálculo de las fuerzas de restricción nodales en los elementos de una estructura son manejables para su inclusión en el algoritmo de un programa de cómputo que realice análisis elástico convencional de pórticos planos.

El flujo plástico del concreto es considerado como un fenómeno de importancia cuando las deformaciones en las estructuras de concreto armado son relevantes. El presente estudio demuestra que los esfuerzos en una sección transversal pueden cambiar significativamente, inclusive en las estructuras más simples. En el caso de columnas sometidas a compresión pura, los esfuerzos en el acero y en el concreto se incrementan y decrecen, respectivamente, con el tiempo. En columnas con cuantía máxima de acuerdo al RNC $\rho = 6\%$, el esfuerzo en el acero aumenta aproximadamente en un 80 % durante 30 años. Este porcentaje aumenta si se reduce la cuantía de refuerzo. De otro lado, en columnas con cuantía mínima $\rho = 1\%$ y esfuerzos elevados, podría producirse la fluencia del refuerzo. Con respecto al esfuerzo del concreto, éste decrece en un 50%, casi independientemente de la resistencia a la compresión de la mezcla a los 28 días. Además, en secciones rectangulares doblemente reforzadas con $\rho = 8\%$ sujetas a cargas combinadas, el esfuerzo en la fibra extrema en compresión se reduce aproximadamente en un 50 % durante 30 años y el incremento en el esfuerzo del acero de compresión está en el rango de 45 a 60 % para un caso de flexión pura y para un caso de flexo - compresión.

El acero de refuerzo usado en secciones de concreto armado restringe las deflexiones diferidas. Las deflexiones calculadas con fórmulas directas propuestas por el CEB y el ACI determinan valores que sobrestiman en un rango aceptable las deflexiones calculadas con el método simplificado, siendo el método del ACI (1971) el que más se acerca, a pesar que sólo toma en cuenta la cuantía a compresión del concreto.



Aún cuando el flujo plástico produce grandes cambios de esfuerzos en las estructuras más simples, en algunos casos la redistribución en los diagramas de fuerzas es insignificante, siendo sólo problema el control de la deflexión diferida producida. En el caso de edificios, el efecto del flujo plástico se vuelve más relevante conforme se incrementa la altura de la estructura, llegando a producir efectos negativos en las vigas y losas debido al acortamiento diferencial entre columnas adyacentes de diferente cuantía de refuerzo que se produce. Pero, también el flujo plástico tiene acciones positivas como en el caso de estructuras que sufren asentamiento gradual con el tiempo, ya que el flujo plástico tiende a reducir notablemente los esfuerzos inducidos por el asentamiento.

En la realidad el flujo plástico actúa conjuntamente con la contracción y los cambios que producen los efectos térmicos debido a una historia de temperatura. La acción conjunta podría producir cambios aún más importantes que los calculados en los ejemplos desarrollados anteriormente.

A través del presente estudio se hacen las siguientes recomendaciones:

El flujo plástico es un fenómeno de importancia inclusive en las estructuras más simples. El RNC considera el efecto del flujo plástico solamente en el control de deflexiones a largo plazo. Sin embargo, se podrían proyectar estructuras más eficientes y seguras utilizando un programa de cómputo que tome en cuenta los efectos del flujo plástico, siendo recomendable analizar tales efectos para un tiempo no menor que 5 años. Adicionalmente al análisis anterior se deben superponer los esfuerzos obtenidos por la variación de la temperatura en las superficies del elemento del concreto con el tiempo, así como también los esfuerzos producidos por la contracción. Es aceptable para cálculos prácticos suponer un valor del coeficiente de envejecimiento entre 0.6 y 0.9.

Especial énfasis se debe tener en los casos extremos de columnas con cuantía mínima ($\rho = 1\%$) y esfuerzos elevados, ya que podría producirse la fluencia del refuerzo. Los resultados aquí obtenidos son cualitativamente consistentes con los observados experimentalmente y reportados por el comité ACI – 105 en 1933. Sin embargo, dada la tendencia a emplear concretos de más alta resistencia, se requiere mayor investigación analítica y experimental sobre el tema de las cuantías mínimas.

BIBLIOGRAFIA

ACI (comité 209). *Prediction of Creep, and Temperatura Effects in Concrete Structures*; Detroit, 1997.

Branson D.E.; *Deflexiones de Estructuras de Concreto Reforzado y Presforzado*; Esqueda, H. y Huerta, R. Editores; México, 1992.

Bresler B.; *Concreto Reforzado en Ingeniería - Volumen 1*; Limusa; México, 1981.

Fintel M.; *Handbook of concrete Engineering*; Van Nostrand Reinhold Company; New York, 1974.

Ulm F., Bazant Z. y Wittmann F.; *Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of Concrete and Other Quasi - Brittle Materials* - primera edición; Londres, 2001

Ghali A. y Favre R.; *Stresses and Deformations* - second edition; E & F Spon; Londres, 1994.

Gonzáles O.; *Concreto Reforzado* - segunda edición; Limusa; México, 1989.

Mc Guire W. Gallagher R. Ziemian R.; *Matrix Structural Analisis* - segunda edición; John Wiley & Sons Inc.; New Cork, 2000.

Park R. y Paulay T.; *Estructuras de Concreto Reforzado*; Limusa; México, 1980.