

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA ECONOMICA Y CIENCIAS SOCIALES



EFICIENCIA EN MUESTRAS FINITAS EN EL MODELO DE PARAMETROS
ALEATORIOS DE HILDRETH & HOUCK: UN EXPERIMENTO MUESTRAL

TESIS

Para Optar el Título Profesional de:
Licenciado en Estadística

Luis Emilio Huamanchumo de la Cuba

Lima-Perú
2000

Eficiencia en Muestras Finitas en el Modelo de Parámetros Aleatorios de Hildreth & Houck: Un Experimento Muestral

*Luis Emilio Huamanchumo de la Cuba
Universidad Nacional de Ingeniería*

Abstract

This Thesis studies Efficiency in Finite Samples of several estimators of the Mean Response Coefficient in the Hildreth&Houck's Random Coefficient Model. An Experiment was designed to explore the Finite Sample Properties. In this context, results about Bias, Consistency, and Efficiency were obtained from 15.120 estimates. According to this, not only Two Steps Generalized Least Square (MCG2E) performed better than the other alternative estimators but also Ordinary Least Square had gotten gains in Efficiency when the Linear Regression Model without Constant Term was used. Further investigations about Maximum Likelihood Models are needed.

KEYWORDS: Random Coefficient Models, Generalized Least Square, Bias, Consistency, Efficiency, SPSS'syntax.

INDICE

| | |
|---|----|
| INTRODUCCION..... | 8 |
| ANTECEDENTES..... | 10 |
| Capitulo I Marco Teórico y Metodología..... | 18 |
| 1.1 Marco Teórico..... | 18 |
| 1.1.1 El Modelo..... | 18 |
| 1.1.1.1 Correlación Serial en los Errores..... | 21 |
| 1.1.2 Estimación Puntual..... | 23 |
| 1.1.2.1 Propiedades en Muestras Finitas..... | 25 |
| a) Insesgamiento..... | 25 |
| b) Consistencia Simple..... | 26 |
| c) Consistencia en Error Cuadrático Medio..... | 27 |
| d) Eficiencia..... | 27 |
| e) Eficiencia Relativa en ECM..... | 28 |
| 1.2 Hipótesis..... | 30 |
| 1.3 Metodología..... | 32 |
| Capitulo II Diseño del Experimento..... | 35 |
| 2.1 Consideraciones para el Espacio Parametral (Ω)..... | 35 |
| 2.2 Generación de las Observaciones..... | 39 |
| 2.2.1 Generación del Término Errático..... | 39 |
| 2.2.2 Generación de las Variables Exógenas y Endógenas..... | 41 |
| 2.3. Métodos de Estimación Puntual en un Modelo RCA..... | 43 |
| 2.3.1 Mínimos Cuadrados Ordinarios con Término Constante (MCOI)..... | 43 |
| 2.3.2 Mínimos Cuadrados Ordinarios sin Término Constante (MCOII)..... | 44 |
| 2.3.3 Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG)..... | 45 |

| | | |
|--------------|---|----|
| 2.3.4 | Mínimos Cuadrados Generalizados en Dos Etapas (MCG2E)..... | 48 |
| 2.3.5 | Mínimos Cuadrados Generalizados de Hildreth & Houck (MCGHH)..... | 51 |
| 2.3.6 | Mínimos Cuadrados por Etapas de Aitken (MCEA)..... | 53 |
| 2.3.7 | Mínimos Cuadrados Ponderados de Theil (MCPT)..... | 55 |
| Capítulo III | Análisis Comparativo de las Propiedades Muestrales para los Diferentes Métodos de Estimación..... | 57 |
| 3.1 | Sesgo y Consistencia Simple..... | 58 |
| 3.2 | Métodos de Estimación bajo el enfoque de Hildreth & Houck y la Consistencia en ECM..... | 63 |
| 3.3 | Eficiencia..... | 66 |
| | CONCLUSIONES..... | 71 |
| | RECOMENDACIONES..... | 75 |
| | BIBLIOGRAFIA..... | 77 |
| | ANEXOS | |
| Anexo 1.- | Prueba de Aleatoriedad para el Término Errático y la Variable Exógena. | 80 |
| Cuadro 1.1 | Prueba de Corridas para el Término Errático U_{i0} según Replicación | 81 |
| Cuadro 1.2 | Prueba de Corridas para el Valor Inicial de la Variable Exógena $X_{1,i,0}$ según Replicación..... | 82 |
| Cuadro 1.3 | Prueba de Corridas para el Valor Inicial de la Variable Exógena $X_{2,i,0}$ Según Replicación..... | 83 |
| Cuadro 1.4 | Prueba de Corridas para los Coeficientes Aleatorios Provenientes de una Población Normal según Escenarios..... | 84 |
| Anexo 2.- | Sesgo y Error Cuadrático Medio según Método de Estimación | |
| Cuadro 2.1 | Sesgo y Error Cuadrático Medio del Estimador del Coeficiente de Respuesta Medio por MCOI para Muestras de Tamaño 10, 20 y 50..... | 86 |

| | | |
|------------|---|----|
| Cuadro 2.2 | Sesgo y Error Cuadrático Medio del Estimador del Coeficiente de Respuesta Medio por MCOII para Muestras de Tamaño 10, 20 y 50..... | 87 |
| Cuadro 2.3 | Sesgo y Error Cuadrático Medio del Estimador del Coeficiente de Respuesta Medio por MCG para Muestras de Tamaño 10, 20 y 50. | 88 |
| Cuadro 2.4 | Sesgo y Error Cuadrático Medio del Estimador del Coeficiente de Respuesta Medio por MCG2E para Muestras de Tamaño 10, 20 y 50. | 89 |
| Cuadro 2.5 | Sesgo y Error Cuadrático Medio del Estimador del Coeficiente de Respuesta Medio por MCGHH para Muestras de Tamaño 10, 20 y 50. | 90 |
| Cuadro 2.6 | Sesgo y Error Cuadrático Medio del Estimador del Coeficiente de Respuesta Medio por MCEA para Muestras de Tamaño 10, 20 y 50. | 91 |
| Cuadro 2.7 | Sesgo y Error Cuadrático Medio del Estimador del Coeficiente de Respuesta Medio por MCPT para Muestras de Tamaño 10, 20 y 50..... | 92 |
| Cuadro 2.8 | Ratio ECM vs. ECM de los MCG para la estimación de β_1 por Método de Estimación y Tamaño de Muestra N..... | 93 |
| Cuadro 2.9 | Ratio ECM vs. ECM de los MCG para la estimación de β_1 por Método de Estimación y Tamaño de Muestra N..... | 94 |
| Anexo 3.- | Desviación Intercuartílica según Métodos de Estimación..... | 95 |
| Cuadro 3.1 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_1 por MCOI según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios..... | 96 |
| Cuadro 3.2 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_1 por MCOII según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios..... | 97 |
| Cuadro 3.3 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_2 por MCOII según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios..... | 98 |
| Cuadro 3.4 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_1 por MCG según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 99 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Cuadro 3.5 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_2 por MCG según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 100 |
| Cuadro 3.6 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_1 por MCG2E según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 101 |
| Cuadro 3.7 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_2 por MCG2E según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 102 |
| Cuadro 3.8 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_1 por MCGHH según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 103 |
| Cuadro 3.9 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_2 por MCGHH según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 104 |
| Cuadro 3.10 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_1 por MCEA según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 105 |
| Cuadro 3.11 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_2 por MCEA según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 106 |
| Cuadro 3.12 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_1 por MCPT según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios. | 107 |
| Cuadro 3.13 | Desviación Intercuartílica para las Estimaciones de β_2 por MCPT según Tamaños de Muestra (N) y Escenarios..... | 108 |
| Cuadro 3.14 | Rango Intercuartílico (RI) para las estimaciones de β_1 por MCG según Tamaño de Muestra (N)..... | 109 |
| Cuadro 3.15 | Rango Intercuartílico (RI) para las estimaciones de β_1 por MCG según Tamaño de Muestra (N)..... | 110 |

Anexo 4.- Desarrollos Matemáticos.

| | | |
|----------------|---|-----|
| Desarrollo 1.- | Distribución del Componente Aleatorio de los Parámetros del Modelo..... | 112 |
| Desarrollo 2.- | Distribución del Término Errático del Modelo..... | 112 |

| | | |
|----------------|---|-----|
| Desarrollo 3.- | Estimador del Componente No Aleatorio de los Mínimos Cuadrados Generalizados..... | 114 |
| Desarrollo 4.- | Matriz Varianza-Covarianza del Componente No Aleatorio de los Mínimos Cuadrados Generalizados..... | 115 |
| Desarrollo 5.- | Factor de Ponderación para el Estimador MCG del Componente No Aleatorio del Parámetro de Respuesta Medio..... | 116 |

Anexo 5.- Programas en Sintaxis SPSS 7.5

| | | |
|--------------|---|-----|
| Programa 1.- | Calcula el Coeficiente de Respuesta Medio β para Muestra de Tamaño 10, 20 y 50 por MCOI en 30 Replicaciones..... | 118 |
| Programa 2.- | Calcula el Coeficiente de Respuesta Medio β para Muestra de Tamaño 10, 20 y 50 por MCOII en 30 Replicaciones..... | 121 |
| Programa 3.- | Calcula el Coeficiente de Respuesta Medio β para Muestra de Tamaño 10, 20 y 50 por MCG en 30 Replicaciones..... | 123 |
| Programa 4.- | Calcula el Coeficiente de Respuesta Medio β para Muestra de Tamaño 10, 20 y 50 por MCG2E en 30 Replicaciones..... | 125 |
| Programa 5.- | Calcula el Coeficiente de Respuesta Medio β para Muestra de Tamaño 10, 20 y 50 por MCGHH en 30 Replicaciones..... | 128 |
| Programa 6.- | Calcula el Coeficiente de Respuesta Medio β para Muestra de Tamaño 10, 20 y 50 por MCEA en 30 Replicaciones..... | 130 |
| Programa 7.- | Calcula el Coeficiente de Respuesta Medio β para Muestra de Tamaño 10, 20 y 50 por MCPT en 30 Replicaciones..... | 133 |

CUADROS

| No. | | <u>Pag.</u> |
|-----|---|-------------|
| 1 | Escenarios Posibles en el Espacio Parametral Ω . | 36 |
| 2 | Casos (%) con Sesgo Relativo Mayor al 10% según Tamaño de Muestra y Técnica de Estimación. | 59 |
| 3 | Casos (%) con Sesgo Relativo Mayor al 10% según Tamaño de Muestra y Coeficiente ρ por Técnica de Estimación. | 60 |
| 4 | Comportamiento Errático (%) del Sesgo según Coeficiente ρ y Δ por Técnica de Estimación. | 62 |
| 5 | Comportamiento Errático (%) del ECM según Coeficiente ρ y Δ por Técnica de Estimación | 65 |
| 6 | Calificación del ratio RI por Parámetro Estimado según Tamaño de Muestra N, Método de Estimación y Escenarios definidos por Δ . | 67 |
| 7 | Calificación de la Eficiencia en ECM por Parámetro Estimado según Tamaño de Muestra N, Método de Estimación y Escenarios definidos por Δ . | 68 |

GRAFICOS

| <u>No.</u> | | <u>Pag.</u> |
|------------|--|-------------|
| 1 | Prueba Q-Q de Normalidad para la Distribución Marginal de β_{1i} según Escenarios. | 37 |
| 2 | Prueba Q-Q de Normalidad para la Distribución Marginal de β_{2i} según Escenarios | 37 |
| 3 | Proceso de Generación de los Coeficientes Aleatorios | 38 |
| 4 | Proceso de Generación del Término Errático | 40 |

INTRODUCCION

Los modelos de Regresión Lineal de Parámetros Aleatorios constituyen una herramienta poderosa para el análisis de información de series de tiempo y corte transversal. La diversidad existente entre los agentes económicos que conforman una muestra de corte transversal, que está relacionada con factores culturales, educativos, de asignación de recursos, etc., y que influyen en los mecanismos de toma de decisiones es considerado en los modelos de Parámetros Aleatorios al contrario del enfoque en los modelos tradicionales.

Como es común en la información relativa a unidades microeconómicas, la posibilidad de encontrar información incompleta de la serie temporal o un horizonte temporal pequeño plantea la necesidad de combinar la información de la serie temporal de cada una de las unidades de la muestra de corte transversal con el fin de obtener estimadores eficientes.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo principal la búsqueda de un modelo estadístico que permita optimizar el conjunto de datos disponible utilizando la técnica de combinación de datos de series de tiempo y corte transversal según el enfoque de parámetros aleatorios. Por otro lado, en el contexto del experimento muestral el objetivo es encontrar una clase de estimadores consistentes y eficientes mediante el estudio de sus propiedades muestrales. En este sentido, debido a la falta de un marco conceptual que desarrolle las propiedades exactas de dichos estimadores, el presente trabajo de investigación permitirá tener una base empírica para seleccionar el método que más se ajuste a determinados requerimientos entre el conjunto de estimadores alternativos.

Por otro lado, debido a la naturaleza no-experimental de las variables económicas y los objetivos planteados en el presente trabajo de investigación se diseñó un experimento el cual permitió el control de posibles factores perturbadores, aleatorización, replicación, bloqueo, etc. En este sentido, el diseño experimental permitió la generación artificial de observaciones que simulan series de tipo económico bajo las mismas condiciones experimentales así como también la imposibilidad de pérdida de las condiciones y supuestos iniciales debido al efecto temporal.

El trabajo se divide en tres capítulos, iniciando la exposición con los antecedentes relacionados a trabajos similares realizados entre los diferentes enfoques existentes en la Teoría de los Modelos de Parámetros Aleatorios. En el Primer Capítulo, se desarrolla el marco conceptual referente al modelo de Regresión Lineal de Parámetros Aleatorios formulado por Hildreth & Houck así como las propiedades en muestras finitas de los estimadores puntuales que serán de interés para el presente estudio. Paralelamente, se desarrollan algunas definiciones que harán posible la operacionalización de las variables a la luz de los resultados empíricos. Seguidamente se plantean las hipótesis de trabajo y la metodología de manera general.

El Segundo Capítulo, desarrolla de manera extensiva el diseño del experimento, la selección de los parámetros del modelo así como las definiciones de los diferentes estimadores a utilizar los cuales son complementados con el desarrollo de programas en sintaxis SPSS de modo que permita el análisis y seguimiento paso a paso de los procesos de cálculo involucrados.

Finalmente, en el Tercer Capítulo se desarrolla un análisis comparativo de los resultados obtenidos respecto al sesgo, consistencia y eficiencia. Las Conclusiones y Recomendaciones surgen de la experiencia obtenida a lo largo del desarrollo del trabajo de investigación así como también de los resultados empíricos obtenidos.

ANTECEDENTES

En la práctica es muy común encontrar datos de variables microeconómicas que contienen información relativa a 'n' agentes económicos (tales como economías domésticas, empresas, países, etc.) para un determinado período de tiempo. Por lo general, el número 'n' de agentes económicos es mucho mayor que la cantidad de observaciones temporales 't' y, en consecuencia, se plantea la necesidad de diseñar métodos para combinar datos de series de tiempo y corte transversal con el fin de obtener estimadores eficientes.

Al combinar 'n' observaciones de corte transversal y 't' de series temporales, asumiendo que los parámetros son fijos, nos permitiría obtener estimaciones eficientes al contar con una cantidad mayor de observaciones (nt). Si suponemos; por otro lado, que los parámetros son fijos pero diferentes a través de las unidades de la muestra de corte transversal, utilizaríamos 't' observaciones para estimar los 'k' parámetros en cada unidad de la muestra de corte transversal. En estas condiciones, tendríamos que estimar 'kn' parámetros desconocidos, el cual se incrementaría proporcionalmente con incrementos de 'n'.

Por la naturaleza misma del objeto de estudio en las Ciencias Sociales, es difícil sostener como supuesto que los parámetros del modelo son constantes, en este sentido, el enfoque de Análisis de Covarianza adiciona variables ficticias al modelo con el fin de medir el cambio sufrido por la ordenada en el origen de corte transversal y de series temporales. Sin embargo, la inclusión de variables ficticias agrega $(n-1) + (t-1)$ variables al modelo con lo cual los grados de libertad se reducen a $(nt-n-t)$, reduciéndose consecuentemente la potencia

estadística del modelo. Tenemos que agregar, además, que los coeficientes de las variables ficticias, a pesar de incorporar información que no se consideraba en el término errático, son de difícil interpretación.

Los Modelos de Regresión Lineal de Coeficientes Aleatorios (RCA) superan todos los inconvenientes que presentan los modelos de parámetros fijos y de variables ficticias debido a que con la información temporal y de corte transversal combinadas sólo nos interesará estimar los parámetros de la distribución de los coeficientes aleatorios con lo cual la reducción de los grados de libertad no es significativa. Desde esta perspectiva, existen diversos modelos que se diferencian por los supuestos hechos respecto a las fuentes de aleatoriedad. Así, por ejemplo, el Modelo de Componentes del Error es utilizado en paneles de datos con el fin extraer información del término errático del modelo el cual es descompuesto en dos fuentes correspondientes una a la dimensión temporal y la otra a la del corte transversal¹.

G. S. Maddala (Marzo, 1971)² uno de los investigadores que más ha desarrollado este enfoque, estudia la aplicabilidad y conveniencia del método de Máxima Verosimilitud y la técnica del Análisis de Covarianza para los modelos RCA a partir del modelo $Y_{it} = \alpha y_{i,t-1} + \beta x_{it} + u_{it}$ donde el término residual pueda ser descompuesto como: $u_{it} = \mu_i + \tau_t + v_{ij}$ donde μ_i es el efecto de las unidades microeconómicas que integran la muestra de corte transversal la cual está distribuida normalmente con media 0 y varianza σ^2_{μ} ; τ_t , el efecto temporal, está distribuido como una normal con media 0 y varianza σ^2_{τ} siendo todos los componentes del término errático independientes. Como puede verse, Maddala desarrolla su modelo particularmente cuando una de las variables explicativas es una variable dependiente rezagada³. Para ello, analiza primero un modelo

¹ Una reseña interesante que justifica la combinación de Datos de Series de Tiempo y Corte Transversal se puede ver en Mundlak, Yair (enero, 1978). Del mismo modo, una exposición didáctica del desarrollo de los modelos de regresión de parámetros aleatorios puede verse en Novales, Alfonso (1996). pp 504-528.

² En un estudio posterior G. S. Maddala (noviembre, 1971) desarrolla, bajo el enfoque bayesiano, un método para determinar la conveniencia o no de combinar datos de series de tiempo y corte transversal, un intento por resolver el problema de especificación del modelo. Se puede ver también Breusch and Pagan (setiembre, 1979) para una prueba para la aleatoriedad de los coeficientes.

³ Lee Lillard and Yoram Weiss (marzo, 1979) desarrollan una aplicación para un modelo de Componentes del Error en un Panel de Datos (Ingresos en el Sector Ciencia y Educación en los Estados Unidos 1960-70) con un estimador Máximo Verosímil y Mínimos Cuadrados Generalizados. Si bien no se incluye una variable dependiente rezagada el error se descompone en tres fuentes (1) diferencias individuales en los niveles de ingresos, (2) diferencias individuales en el incremento de sus ingresos y (3) diferencias en la correlación serial, pero transitoria.

con efectos aleatorios entre las unidades de la muestra de corte transversal y luego lo extiende añadiendo el efecto temporal llegando a conclusiones similares en ambos modelos.

Debido a la imposibilidad que significa establecer propiedades exactas que permitan llegar a conclusiones generales acerca de la covarianza entre los agentes de la muestra de corte transversal y el tiempo, Maddala diseña un experimento cuyo principal propósito es investigar el comportamiento monotónico de $\hat{\alpha}(\theta)$ y $\hat{\beta}(\theta)$ y la posibilidad de la existencia de múltiples máximos locales para la función de verosimilitud.

Los datos fueron generados a partir de los siguientes modelos:

$$Y_{it} = 1.0 + \alpha y_{i,t-1} + u_{it}$$

$$Y_{it} = \beta x_{it} + u_{it}$$

$$Y_{it} = \alpha y_{i,t-1} + \beta x_{it} + u_{it}$$

$$i=1, \dots, n ; t=1, \dots, T$$

El espacio parametral quedó definido para $\alpha=0.7$, $\beta=0.5$, $\sigma^2=1.0$, $\rho=0.4$, $n=25$ y $T=10$. Las variables exógenas fueron tomadas del estudio de Marc Nerlove (Marzo, 1971). G. S. Maddala concluye que para el valor límite $\rho=1$ la función de verosimilitud no puede alcanzar el máximo con respecto al método de Mínimos Cuadrados con Variables Ficticias. Sin embargo, este máximo se puede alcanzar en $\rho=0$ en el rango de ρ restringido a $0 < \rho < 1$. La condición para la ocurrencia de una solución límite dependerá de que las variables explicativas sean exógenas. La inclusión de variables endógenas rezagadas así como la variable explicativa permitió alcanzar soluciones límites más frecuentemente, aunque estas soluciones límites correspondían a un máximo local antes que a un máximo global.

Con respecto a la técnica del Análisis de Covarianza G. S. Maddala demostró que cuando sólo están presentes variables exógenas tanto el estimador entre unidades de corte transversal y entre series de tiempo dan estimadores insesgados de los coeficientes de pendiente lo que no ocurre cuando están presentes variables dependientes rezagadas. Específicamente, el estimador entre unidades de corte transversal da un estimado

cercano a la unidad del coeficiente de la variable dependiente rezagada y cercano a cero del coeficiente de la variable exógena.

Marc Nerlove⁴, por otro lado, encuentra evidencia adicional en los modelos dinámicos para datos de panel. Mediante un diseño experimental por el método de Monte Carlo, estudia las propiedades en pequeñas muestras de siete tipos de estimadores: (1) Mínimos Cuadrados Generalizados, (2) Mínimos Cuadrados Ordinarios sin incluir término constante individual, (3) Mínimos Cuadrados incorporando ρ y σ^2 estimados y los componentes de varianza del término errático, (4) Estimación con Variables Instrumentales utilizando $x_{i,t-1}$ como instrumento de $y_{i,t-1}$, (5) Mínimos Cuadrados Generalizados en Dos Etapas, (6) Mínimos Cuadrados en Dos Etapas con Variables Instrumentales y (7) Máxima Verosimilitud. De esta forma, encuentra en términos del sesgo relativo y el Cuadrado Medio del Error que el enfoque de Máxima Verosimilitud para los Modelos de Componentes del Error presenta serias deficiencias, a diferencia del estimador Mínimos Cuadrados Generalizados en Dos Etapas, el cual trabajó bien para un significativo rango del espacio parametral.⁵ En efecto, se pudo observar el importante papel que desempeña el parámetro ρ , de ahí que, el método de Mínimo Cuadrados Generalizados fuese tomado como base para calcular los ratios relativos correspondientes al Error Cuadrático Medio. Se pudo demostrar entonces, bajo la siguiente formulación:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \beta x_t + u$$

(donde, y_t e y_{t-1} es la variable dependiente con un rezago, x_t es la variable explicativa y 'u' el término errático) que para valores más altos de ρ , el estimador MCO de β es altamente sesgado, excepto cuando el verdadero valor de β es cero. Por otro lado, el estimador Mínimos Cuadrados Generalizados en Dos Etapas de α , β , γ y σ^2 basado en el estimador de ρ por mínimos cuadrados no representa sesgo significativo en comparación a los

⁴ Nerlove, Marc.: "Further Evidence on the Estimate of Dynamic Economic Relations from a Time Series of Cross Sections". *Econometrica*. Vol 39 No.2 Marzo 1971 pp. 359-382

⁵ El mismo autor deriva una transformación ortogonal apropiada para la matriz varianza-covarianza de modo que permita obtener las raíces características de dicha matriz para un modelo de tres componentes del error, incluye además, una interpretación de las pobres propiedades muestrales de los estimadores en modelos que incluyen variables ficticias...ver "A Note on Error Components Models" *Econometrica*. Vol.39 No.2 Marzo 1971 pp.383-396. Se recomienda ver también a Charles R, Henderson (marzo, 1971) quien desarrolla un método directo y simple para obtener la matriz varianza-covarianza en un modelo de Componentes del Error en contraposición al desarrollado por Wallace y Hussain (enero, 1969) por ensayo, error y generalización. De esta forma, pone más énfasis en las propiedades en pequeñas muestras para el estimador Mínimos Cuadrados Generalizados que en propiedades asintóticas.

otros estimadores. De esta forma, el estimador MCG2E fue superior sobre un considerable rango del espacio parametral.⁶

Hildreth y Houck (junio, 1968) consideran el siguiente modelo de regresión lineal general:

$$y(t) = \sum_{j=1} \beta_j(t)x_j(t) \quad , \quad t=1,\dots,T \quad (a)$$

donde $y(t)$ es la t -ésima observación de la variable dependiente, $x_j(t)$ es la t -ésima observación sobre la j -ésima variable explicativa y $\beta_j(t)$ es el coeficiente de regresión de la j -ésima variable explicativa para la t -ésima observación. Al asumir que los coeficientes de regresión son aleatorios tenemos que:

$$\beta_j(t) = \beta_j + \varepsilon_j(t) \quad (b)$$

$t=1,\dots,T$ y $j=1,\dots,K$

donde $\varepsilon_j(t)$ es un término de perturbación aleatorio y β_j es el coeficiente de respuesta medio para la j -ésima variable explicativa, además,

$$E(\varepsilon_j(t))=0 \quad \text{y} \quad \text{Cov}(\varepsilon_j(t), \varepsilon_{j'}(t'))= \begin{matrix} \sigma_j^2 & , & j=j' \text{ y } t=t' \\ 0 & , & \text{cvc} \end{matrix} \quad (c)$$

En notación matricial,

$$y = X\beta + u \quad (d)$$

' y ' es un vector $n \times 1$ de observaciones de la variable dependiente y ' X ' es una matriz $n \times K$ de observaciones sobre ' K ' variables independientes, β es un vector $K \times 1$ de coeficientes de respuesta media y ' u ' es un vector $n \times 1$ de perturbaciones tal que:

$$u(t) = \sum_{j=1} \varepsilon_j(t)x_j(t) \quad (e)$$

$t=1,\dots,T$ y

⁶ En otro contexto, Hausman y Taylor (noviembre, 1981) desarrollan estimadores consistentes aunque ineficientes por Mínimos Cuadrados Generalizados cuando existe correlación entre las variables explicativas y los efectos individuales inobservables en un modelo de Datos de Panel.

$$E(u) = 0 \quad \text{y} \quad E(uu') = \phi = \begin{bmatrix} \phi^2(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \phi^2(T) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Hildreth y Houck proponen tres estimadores para β cuya diferencia radica en el enfoque utilizado al estimar ϕ ⁷. Partiendo de allí, los autores estudian la consistencia de dichos estimadores cuando el tamaño de la muestra de la serie temporal aumenta. En este sentido, dichos autores daban más importancia a los cambios en los patrones de comportamiento y la toma de decisiones que los agentes económicos experimentaban a través del tiempo que a las diferencias entre los individuos de la muestra de corte transversal que pudieran deberse a factores no observables tales como costumbres, grado de instrucción, distribución geográfica, etc.

A pesar de que los autores desarrollan las propiedades exactas de los estimadores propuestos reconocen que es necesario hacer investigaciones posteriores que permitan verificar mejoras cualitativas en dichas propiedades incorporando procesos iterativos que garanticen la convergencia⁸. Como lo sugieren los autores, esto último podría ser estudiado mediante las propiedades de estimadores iterativos así como algunos problemas interesantes de distribución que tengan conexión con dicho modelo.

Estas sugerencias fueron recogidas por Raj, Baldev (marzo, 1975) quien desarrolla un experimento para comparar las propiedades en muestras finitas de un conjunto de estimadores entre los cuales figuran tres estimadores iterativos.

Sabemos que el estimador de respuesta media

⁷ De ellos, el que presenta el menor ECM es utilizado posteriormente por Raj, Baldev (marzo, 1975) en un estudio sobre propiedades de convergencia en muestras finitas.

⁸ Chelliah, Nesan (1998), propone la adición de un componente aditivo, seleccionado con un criterio optimizador, a la matriz varianza-covarianza de los errores de modo que garantice la convergencia. Otras variantes interesantes al respecto se pueden encontrar en aplicaciones de Iqbal, Zahid (1998), Cuxart, A. y Ferrer, F. (1995) y Hausman, J, Wiese, D (1979) y Heckman, James (enero, 1979).

$$\hat{\beta} = (X' \phi^{-1} X)^{-1} X' \phi^{-1} Y \quad (g)$$

es el Mejor Estimador Lineal Insesgado si ϕ es conocido. La matriz varianza-covarianza está dada por:

$$Var(\hat{\beta}) = (X' \phi^{-1} X)^{-1} \quad (h)$$

Al no conocer ϕ se puede considerar la posibilidad de estimarlo para luego ser reemplazado en la ecuación (g). El enfoque utilizado para calcular ϕ da nombre a cada uno de los estimadores analizados por Raj, B.: Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), Mínimos Cuadrados Generalizados por Etapas (MCG2E), Mínimos Cuadrados Ponderados de Theil (MCPT) y el estimador de Hildreth y Houck (HH).⁹

Las propiedades en muestras finitas fueron estudiadas a partir del Error Cuadrático Medio (ECM), la Rango Intercuartílico y un indicador estadístico de eficiencia (%E) para los diferentes estimadores en el marco de un experimento muestral.¹⁰ Esto mostraron una clara evidencia de sensibilidad frente a los verdaderos valores de los parámetros del modelo y al tamaño muestral. En efecto, el estimador MCO presentó el menor ECM para muestras de tamaño 10 y 20 mientras que el estimador MCG2E lo fue para el primer conjunto de parámetros en una muestra de 50 observaciones. Sin embargo, los resultados no fueron concluyentes para el caso del estimador MCO puesto que en muestras pequeñas se obtuvo un bajo porcentaje de varianzas no negativas (%E). Por otro lado, se estudió también el sesgo de los estimadores alternativos de la varianza del coeficiente de respuesta medio obteniéndose que aquél fue negativo para todos los tamaños muestrales y para el primer conjunto de parámetros inas no para el segundo. Además, el tamaño del sesgo para los estimadores MCPT, MCG2E y HH fue comparable al de MCO el cual es insesgado. Según la prueba 't' al 5% de significación todos los estimadores de las varianza de β fueron sesgados con excepción del SALS; y, en

⁹ Para obtener el estimador MCG2E fue necesario dos etapas, primero se estimó la varianza de los coeficientes aleatorios para obtener ϕ que luego, en una segunda etapa, fue reemplazado en la ecuación (g). MCPT se obtiene reemplazando por ceros los elementos fuera de la diagonal principal del estimador de la ecuación (c) y aplicar Mínimos Cuadrados Ponderados en la ecuación (g).

¹⁰ Se tomaron dos modelos uno bivariado (sin intercepto) y, el otro, un modelo lineal simple. Los valores de las variables explicativas se tomaron de series económicas típicas para períodos temporales de tamaño 10, 20 y 50. Además, el término de perturbación se obtuvo mediante la generación de números pseudoaleatorios provenientes de una distribución normal. Finalmente, se seleccionó dos conjuntos de valores para los parámetros $\{\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2\}$ con el fin de observar la sensibilidad de los estimadores alternativos con respecto al verdadero valor de estos.

muestras de tamaño 10, del MCO y HH. En cuanto a los estimadores de las varianzas de los coeficientes aleatorios, los resultados muestrales favorecieron siempre al estimador MCG2E y MCPT, y como se esperaba, la frecuencia de estimados negativos disminuyó con el tamaño de la muestra y aumentó con incrementos de

$$\sigma_j^2 \text{ 11}$$

Breuch y Pagan (1979) desarrollan una prueba que permite neutralizar los efectos de la Heteroscedasticidad en un Prueba Estadística de Aleatoriedad. Es importante mencionar también una interesante discusión de Kreft, Ita (enero, 1996) sobre los efectos de la correlación intragrupos, conglomerados, en la correcta especificación del modelo de parámetros aleatorios.

Capítulo I

MARCO TEORICO Y METODOLOGIA

1.1. Marco Teórico

1.1.1 El Modelo

Sea el modelo:

$$\underline{y}_i = \underline{x}_i \underline{\beta}_i + \underline{u}_i \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (1.1.1)$$

donde:

$\underline{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{it})$ es un vector $T \times 1$ de observaciones sobre la variable dependiente.

\underline{x}_i es una matriz $T \times K$ de variables independientes observadas x_{tki} tal que $\underline{x}_i = (1, x_{t1i}, x_{t2i}, \dots, x_{tki})$ para todo $i=1, \dots, n$.

$\underline{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iT})$ es un vector $T \times 1$ de perturbaciones aleatorias no observables.

$\underline{\beta}_i$ es un vector aleatorio $K \times 1$ de coeficientes de pendiente no observables con intercepto fijo.

Cada uno de los 'n' individuos (representados por el subíndice i) que conforman la muestra de corte transversal poseen 't' observaciones de serie temporal representados por el subíndice 'T'.

Supuestos 1.1

- (1) Los tamaños de las muestras 'n' y 'T' son tales que $n > k$ y $T > k$.
- (2) Las variables independientes son no estocásticas en el sentido de que las X_i son fijas en repetidas muestras sobre Y_i . El rango de X_i es K .
- (3) El vector de perturbaciones U_i están independientemente distribuidos con vector de media cero y matriz varianza-covarianza de U_i igual a $\sigma_{ii} I_T$.
- (4) Los vectores de coeficientes β_i ($i=1, \dots, n$) están independientemente e idénticamente distribuidos como una Normal Multivariada y parámetros: $E(\beta_i) = \beta$ y $\text{Var}(\beta_i) = \Delta$, el cual es no singular.
- (5) Los vectores U_i y β_j son independientes para todo $i, j=1, \dots, n$.

Según el supuesto (4) el vector de coeficientes de la regresión β_i siguen un esquema aleatorio proveniente de un población con distribución normal multivariada con coeficiente de respuesta medio β y matriz varianza-covarianza Δ .

El parámetro aleatorio β_i puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\beta_i = \beta + \delta_i \quad (1.1.2)$$

donde ' δ_i ' es un vector aleatorio, que de acuerdo al supuesto (4), estará idéntica e independientemente distribuida como una normal multivariada de media cero y matriz varianza-covarianza Δ .¹²

¹² Ver Anexo 4, Desarrollo 1

De acuerdo a la formulación (1.1.2), la ecuación (1.1.1) puede ser reformulada considerando las 'n' unidades de la muestra de corte transversal:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \bar{\beta} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

La expresión compacta de la formulación (1.1.3) es:

$$y = X\beta + D(X)\delta + u \quad (1.1.4)$$

donde,

$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vector de $n \times 1$ de observaciones de las variables dependientes, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ matriz $n \times K$ de observaciones de las variables independientes, $\underline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ vector $n \times 1$ de términos de perturbación especificado en (1.1.2) de los supuestos I.1 y $D(X)$ es la matriz bloque diagonal de dimensión $n \times n$.

Bajo los supuestos I.1 el término de perturbación $\theta = D(X)\delta + u$ de la ecuación (1.1.4) tiene como matriz varianza-covarianza a $H(\theta)$ ¹³, tal que,

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} X_1 \Delta X_1 + \sigma_{11} I_T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 \Delta X_2 + \sigma_{22} I_T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_n \Delta X_n + \sigma_{nn} I_T \end{bmatrix} \quad (1.1.5)$$

$H(\theta)$ es una matriz bloque diagonal $nT \times nT$ el cual es función de las observaciones X_i , de los $k(k+1)/2$ parámetros de Δ y 'n' parámetros σ_{ii} .

¹³ Ver Anexo 4, Desarrollo 2

1.1.1.1 Correlación Serial en los Errores.

El Modelo de Regresión de Coeficientes Aleatorios (RCA) desarrollado en la primera parte corresponde al caso en que los términos de perturbación no están correlacionados. En general, para el caso de series económicas temporales, por ejemplo, se puede presentar a nivel de las unidades de la muestra de corte transversal una estructura autoregresiva.

El desarrollo del Modelo RCA para el caso de correlación serial de errores obliga a reformular los supuestos hechos en I.1.

Supuestos 1.2

- (1) Igual que (1) de los supuestos I.1
- (2) Igual que (2) de los supuestos I.1
- (3) El vector de perturbaciones U_i están independientemente distribuidos con vector de media cero y matriz varianza-covarianza igual a $\sigma_{ii} \Omega_{ii}$.
- (4) Igual que (4) de los supuestos I.1
- (5) Igual que (5) de los supuestos I.1

El término de perturbación $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iT})$ en la muestra de corte transversal presenta el siguiente esquema autorregresivo:

$$u_{it} = \rho_i u_{i,t-1} + \varepsilon_{it} \quad ; \quad (0 < |\rho_i| < 1) , \quad i=1, \dots, n \quad (1.1.6)$$
$$E(\varepsilon_{it}) = 0 \quad \text{y} \quad E(\varepsilon_{it} \varepsilon_{it'}) = \begin{cases} \gamma_{ii} & ; \quad i = j, t = t' \\ 0 & ; \quad \text{c.o.c.} \end{cases}$$

El término ' ρ_i ' es un parámetro fijo para todo i . Además, sobre estos supuestos la matriz varianza-covarianza de los errores U_i en (1.1.1) toman la siguiente estructura:

$$E(U_i U_j) = \begin{cases} \sigma_{ii} \Omega_{ii} & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \quad (1.1.7)$$

donde,

$$\Omega_{ii} = \frac{1}{1 - \rho_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho_i & \dots & \rho_i^{T-1} \\ \rho_i & 1 & \dots & \rho_i^{T-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_i^{T-1} & \rho_i^{T-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1.8)$$

Para el modelo (1.1.4) la matriz varianza-covarianza del término de perturbación $D(X)\delta + u$ presenta la siguiente estructura matricial:

$$H(\Theta) = \begin{bmatrix} X_1 \Delta X_1' + \sigma_{11} \Omega_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 \Delta X_2' + \sigma_{22} \Omega_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_n \Delta X_n' + \sigma_{nn} \Omega_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.1.9)$$

de orden $nT \times nT$ donde Θ es un vector $(k(k+1)+4n)/2 \times 1$ de los $k(k+1)/2$ parámetros desconocidos de Δ ; y ' n ' correspondientes a σ_{ii} y ρ_i respectivamente. Los ' 0 ' son matrices nulas de orden ' T '.

Esta matriz varianza-covarianza, a diferencia de la obtenida en (1.1.5), incorpora el efecto de la correlación serial de los errores en el segundo sumando de los elementos de la diagonal principal.

1.1.2 Estimación Puntual

Dado un Experimento Aleatorio una realización es una secuencia de n observaciones que constituyen un vector aleatorio observable X que toma valores en un espacio muestral A .

$$X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Cuando ejecutamos nuestro experimento, una realización particular $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ constituye nuestros *datos*.

Un caso especial ocurre cuando realizamos un experimento aleatorio sobre una variable de interés X . Si replicamos el experimento n veces formaremos una secuencia de n variables independientes X_1, X_2, \dots, X_n , cada una de las cuales tiene la misma distribución de X . En este caso, tendremos una *muestra aleatoria de tamaño n* con la distribución de X .

Un *estadístico* es una función real - valuada (observación) de las realizaciones de la variable correspondiente a un experimento aleatorio.

$$Y=g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Un *parámetro* es una característica numérica de una distribución. En la mayoría de los casos, la distribución de la realización de un vector X tendrá uno o más parámetros de interés

$$\theta=(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

El conjunto de posibles valores del parámetro θ es llamado subespacio del espacio parametral n -dimensional. En muchos casos, uno o más de los parámetros son desconocidos, y pueden ser estimados a partir de nuestros datos (una realización de X).

Supongamos ahora que tenemos un parámetro desconocido θ que toma valores en un espacio parametral Ω . Un estadístico W usado para estimar θ es llamado un estimador de θ . Como todo estadístico, es una variable aleatoria y, en consecuencia, tiene una distribución, una media, una varianza, etc. Cuando ejecutamos un experimento y obtenemos nuestra data, el valor observado w (un número real) es el *estimado* del parámetro θ .

El *error* (aleatorio) es la diferencia entre el estimador y el parámetro:

$$W - \theta \tag{1.2.1}$$

La calidad de un estimador usualmente se mide calculando su *Error Cuadrático Medio*(ECM):

$$ECM(W) = E[(W - \theta)^2] \tag{1.2.2}$$

Afortunadamente, el conocimiento apriori de los parámetros poblacionales que definen los diferentes escenarios nos permite obtener el error aleatorio en cada replicación. De esta forma, el Error Cuadrático Medio se obtendrá promediando las realizaciones de los errores aleatorios al cuadrado en cada replicación.

Una expresión equivalente la podemos obtener en términos de la varianza y el sesgo así:

$$ECM(W) = \text{Var}(W) + \text{sesgo}^2(W) \tag{1.2.3}$$

En particular, si el estimador es insesgado, el Error Cuadrático Medio de W es simplemente la varianza de W .

1.1.2.1 Propiedades en Muestras Finitas

Para efectos que son relevantes en el presente trabajo de investigación desarrollamos el marco conceptual de las siguientes propiedades muestrales para un estimador puntual: Insesgamiento, Consistencia y Eficiencia. Adicionalmente, dicha exposición está complementada con la metodología que hace operativo dichos conceptos con los resultados provenientes del experimento muestral y cuyos detalles son expuestos en el Capítulo II.

a) Insesgamiento

El valor esperado del error aleatorio es conocido como *sesgo*, es decir:

$$\text{Sesgo}(W)=E(W - \theta) \quad (1.2.4)$$

En esas condiciones, un estimador se llamará *insesgado* si su sesgo es cero para todo valor de θ en Ω , o equivalentemente:

$$E(W)=\theta \quad (1.2.5)$$

Dado que los verdaderos valores de los parámetros son conocidos a partir de la generación artificial de las observaciones en el contexto del diseño experimental la obtención del error aleatorio es directo a partir del estimado obtenido en la muestra del panel de datos para una replicación dada. En este sentido, el sesgo se obtiene como un promedio de dichos errores en el total de las replicaciones generadas.

El sesgo podemos analizarlo relativamente con respecto al verdadero valor del parámetro lo cual es posible debido a nuestro conocimiento *apriori* de los valores de los parámetros. Matemáticamente podemos plantear el sesgo en términos porcentuales como:

$$\text{Sesgo}(w)\% = \frac{\text{sesgo}(w)}{\theta} * 100 \quad (1.2.6)$$

Dicho concepto será fundamental en la etapa de análisis comparativo de las propiedades muestrales de las diferentes técnicas de estimación fundamentalmente porque los escenarios dependen de los valores de θ .

b) Consistencia Simple

Sea $\hat{\theta}_1$ es un estimador de θ obtenido a partir de una muestra de tamaño 1, $\hat{\theta}_2$ un estimador de θ desde una muestra de tamaño 2 y $\hat{\theta}_n$ es un estimador de θ desde una muestra de tamaño 'n'. Entonces, la sucesión de estimadores de θ , $\{\hat{\theta}_n\}$, es un estimador consistente simple de θ si para todo $\epsilon > 0$ se verifica para todo $\theta \in \Omega$ que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta - \epsilon < \hat{\theta} < \theta + \epsilon) = 1 \quad (1.2.7)$$

Cuando un estimador no es consistente, a la diferencia $\text{plim } E(\hat{\theta}_n) - \theta$ se le denomina *sesgo asintótico*. Sin embargo; a pesar de que la evidencia, en algunos casos, puede no ser clara en términos del sesgo asintótico y por las condiciones establecidas en el experimento muestral será importante analizar las características de esta convergencia. En este contexto, el análisis de la consistencia se realizará a partir de las características presentadas por el estimador en el proceso de convergencia. Diremos entonces que el estimador presenta evidencias de ser consistente si en su proceso de convergencia no presenta un comportamiento errático.

En este sentido, el *comportamiento errático* del sesgo podemos definirlo como el esquema presentado en las realizaciones observadas de éste a medida que aumenta el tamaño de la muestra de corte transversal. Es decir, el comportamiento errático es evidente en la práctica cuando el sesgo cambia de signo de positivo a negativo o viceversa o cuando no converge a cero monótonicamente al aumentar el tamaño de la muestra.

c) Consistencia en Error Cuadrático Medio

Si $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ son los estimadores de θ para muestras de tamaño $1, 2, \dots, n$. Entonces $\hat{\theta}_n$ será consistente en Error Cuadrático Medio si para todo $\theta \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = 0 \quad (1.2.8)$$

Esta condición de consistencia es más fuerte que la de consistencia simple la cual establece que para muestras grandes $\hat{\theta}_n$ tiende a θ . Los resultados empíricos evidenciarán la falta de consistencia en Error Cuadrático Medio cuando éste presente comportamiento errático en su proceso de convergencia hacia cero. Es decir, cuando el Error Cuadrático Medio observado aumente conforme aumenta la muestra de corte transversal.

d) Eficiencia

Sea x_1, x_2, \dots, x_n una muestra aleatoria de una población con distribución $f(x; \theta)$ y sea $\hat{\theta} = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ el estimador del parámetro θ tal que cumple las siguientes condiciones:

- a) $E(\hat{\theta}) = \theta$, es decir, el estimador $\hat{\theta}$ es insesgado.
- b) $\text{Var}(\hat{\theta})$ es menor que la varianza de cualquier otro estimador insesgado.

En tales condiciones, $\hat{\theta}$ es un *estimador insesgado de mínima varianza* o *estimador eficiente*. El análisis del presente trabajo de investigación toma como referencia al estimador Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) por considerarlo teóricamente eficiente dado que es estimado a partir del conocimiento *a priori* de los parámetros poblacionales. Dado que el trabajo de investigación comprende el estudio de las

propiedades en muestras finitas se utilizará el rango intercuartílico como medida no paramétrica de variabilidad. A la razón de dichos rangos se le nombrará ratio RI.

e) Eficiencia Relativa en Error Cuadrático Medio

Sean $\hat{\theta}_1 = G_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\hat{\theta}_2 = G_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dos estimadores del parámetro θ .

Entonces, diremos que $\hat{\theta}_1$ es un “mejor” estimador que $\hat{\theta}_2$ si:

$$r(G_1, G_2) = \frac{E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2}{E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2} > 1 \quad (1.2.9)$$

Bajo ciertas condiciones a $\hat{\theta}_1$ se le llama también *estimador de riesgo mínimo*.¹⁴ La eficiencia Relativa será analizada tomando como referencia el Error Cuadrático Medio obtenido con el método de Mínimos Cuadrados Generalizados. En este sentido, será importante analizar el comportamiento asintótico del Error Cuadrático Medio mediante la Eficiencia Asintótica Relativa.

Podemos definir la Eficiencia Asintótica en Error Cuadrático Medio si dado una sucesión $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n, \dots$ la cual es un Estimador Consistente en Error Cuadrático de θ . Se dice que esta sucesión es un estimador asintóticamente eficiente en error cuadrático si no existe otro estimador consistente en Error Cuadrático Medio de θ , $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$ para lo cual:

¹⁴ Mood, A. y Graybill, F. (1976) pp.185-193. presentan dicho concepto desde la perspectiva de la Teoría de Decisiones. Aquí, se formula la función de Riesgo como el valor esperado de la función de pérdida cuadrática: $l(\theta, \theta) = c(\theta)(\theta - \theta)^2$, $c(\theta) > 0$. En consecuencia el problema de hallar una acción (o estimador) con riesgo mínimo es equivalente al de hallar una acción (o estimador θ) que haga mínima la cantidad $l(\theta - \theta)$, llamado error cuadrático medio.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\hat{\theta}_n - \theta)^2}{E(\theta_n^* - \theta)^2} > 1 \quad (1.2.10)$$

para todo θ de algún intervalo abierto.

1.2. Hipótesis

1. Las propiedades en Muestras Finitas de los estimadores analizados dependen del espacio parametral. Es decir, la calificación de los estimadores alternativos con respecto a sus propiedades de Insesgamiento, Consistencia y Eficiencia es sensitiva a los valores de los parámetros poblacionales.

2. Sabiendo que los Parámetros Aleatorios β_i están independiente e idénticamente distribuidos como una Normal Bivariada con parámetro de respuesta medio β y matriz varianza-covarianza Δ cuyo determinante es significativamente diferente de cero, entonces, el estimador Mínimos Cuadrados Generalizados en Dos Etapas (MCG2E) de β basado en un estimador del término errático $\theta = \mathbf{D}(\mathbf{x})\delta + \mathbf{u}$ de la ecuación $\mathbf{y} = \mathbf{x}\beta + \mathbf{D}(\mathbf{x})\delta + \mathbf{u}$ será eficiente.
 - 2.1 Una correcta especificación del modelo otorga ganancia en Eficiencia y Consistencia para el estimador Mínimos Cuadrados Ordinarios independientemente de los valores de los parámetros poblacionales.

 - 2.2 Si imponemos la condición de que la matriz varianza-covarianza Δ es cercana a la matriz nula con la misma estructura en el término errático \mathbf{u}_i para todo i ; entonces, el estimador Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCOII), sin Error de Especificación del Modelo, será eficiente aún en pequeñas muestras.

 - 2.3 Al considerar un horizonte temporal pequeño con respecto a la muestra de corte transversal ($T/N \rightarrow 0$) podemos esperar que los estimadores MCG y MCG2E no sean significativamente influenciados en sus valores estimados por el esquema autorregresivo de los errores o valores pequeños del parámetro ρ .

3. La técnica de estimación de Hildreth & Houck (MCGHH), en un contexto de Parámetros Aleatorios, tendrá propiedades Asintótica Eficientes debido a que incorporan mayor información respecto a la variabilidad de

los Parámetros Aleatorios, otorgándole una ponderación exclusiva a dichas varianzas, a diferencia de los métodos MCEA y MCPT que incluyen información del término errático $\mathbf{D}(\mathbf{x})\delta+\mathbf{u}$.

- 3.1. Las restricciones impuestas, en la primera etapa del proceso al estimar la varianza de los parámetros aleatorios por Mínimos Cuadrados Ordinarios según Hildreth & Houck, en los métodos generalizados MCGHH, MCPT y MCEA no los afecta en una pérdida de Consistencia comparado al método MCG2E.

- 3.2. Los estimadores MCEA y MCPT tendrán un comportamiento asintótico similar en cuanto a sus propiedades muestrales de eficiencia sobretodo en escenarios caracterizados por un coeficiente ρ pequeño ($\rho < 0.5$) debido a la semejanza de la matriz varianza-covarianza de los errores que ambas incorporan en el proceso de estimación.

1.3. Metodología

Para el estudio de las propiedades muestrales de los diferentes estimadores es necesario la generación de datos por simulación a partir de un conjunto de parámetros conocidos ¹⁵. Justificamos este procedimiento por la naturaleza no experimental de las variables socio-económicas lo cual haría imposible el presente estudio. Por otro lado, la utilización de series generadas artificialmente nos dará ciertas ventajas tales como la posibilidad de controlar los diferentes escenarios, mantener las mismas condiciones iniciales en cada aplicación; así como, evitar incurrir en errores de especificación del modelo.

El primer paso, consiste en ordenar las unidades individuales que conforman la muestra de corte transversal. Este orden se mantendrá fijo a través de todo el horizonte temporal y para los diferentes escenarios, diseñando de esta forma una estructura de datos de panel. Al mismo tiempo, es importante hacer un seguimiento de las características que presentan las variables exógenas (a través de la asignación adecuada de los valores iniciales de cada serie temporal) debido a que éstas pueden afectar significativamente a los estimados obtenidos por los diferentes métodos. Adicionalmente, será importante no sólo conocer su naturaleza sino mantener la heterogeneidad de los individuos de la muestra de corte transversal.

El segundo paso consiste en determinar el conjunto de valores de los parámetros el cual permitirá analizar las propiedades muestrales en un subespacio parametral. Justificado adecuadamente la selección de los parámetros en el capítulo correspondiente al diseño del experimento, tendremos 4 y 2 valores para el parámetro medio de los coeficientes aleatorios y la matriz varianza-covarianza respectivamente. Al mismo tiempo, serán analizados 3 valores para el parámetro ρ (0.1, 0.5, 0.9) correspondiente al mecanismo generador de los errores de la serie temporal manteniendo constante el valor de la varianza del ruido blanco respectivo. De esta forma,

¹⁵ Jerry Hausman and David Wise (marzo, 1979) en un estudio sobre sesgos en investigaciones con datos de panel ilustran las diferencias entre los modelos clásicos del diseño experimental y los estudios sociales que implican incorporar unidades microeconómicas en el Panel de Datos. Entre las más importantes se pueden mencionar, por ejemplo: (1) que en las investigaciones socioeconómicas cada individuo tiene que ser su propio control, (2) se obtiene más información a partir de las diferencias en el comportamiento de los individuos que respecto a cambios promedio en el comportamiento por aplicación de tratamientos, (3) es difícil la aleatorización de los escenarios (tratamientos), (4) la inclusión del efecto temporal afecta la aleatorización debido a que el panel de datos no puede mantenerse en el tiempo porque algunas personas cambian de domicilio, deciden retirarse del estudio, etc.

las 24 combinaciones que constituyen los escenarios del espacio parametral –ver cuadro 1- serán analizadas para los 3 tamaños de muestra (10, 20 y 50) y los 7 métodos de estimación considerados. Será necesario, entonces, hacer 30 replicaciones para cada uno de estos 120 combinaciones diferentes haciendo un total de 15,120 estimaciones necesarias para el presente estudio.

Luego de haber definido el conjunto de parámetros, el tercer paso consiste en generar las observaciones. Esto implica generar el término errático, las variables exógenas y endógenas del modelo las cuales requieren de la generación de números aleatorios.

Para la generación de números aleatorios provenientes de una distribución determinada se utilizará el generador de números pseudoaleatorios del *SPSS v7.5*. Se optó por no elaborar programas específicos porque no es de nuestro interés los métodos y algoritmos empleados para la generación de dichos números. En segundo lugar, creemos que dicho trabajo implicará una asignación no óptima de recursos, principalmente de tiempo, en un tema que no es de primordial interés para esta investigación. En consecuencia, considero que una sucesión es aleatoria cuando los números pseudoaleatorios satisfagan un cierto conjunto de pruebas de aleatoriedad. Desde este punto de vista, el método para generar una sucesión es totalmente independiente.

Una vez obtenido nuestros datos, procedemos a la estimación de los parámetros poblacionales con las técnicas de estimación consideradas. Para ello se ha desarrollado una serie de programas en sintaxis *SPSS* –ver anexo 5- que permitirá analizar paso a paso la metodología empleada a través de todo el proceso de cálculo para las diferentes técnicas de estimación, así como también, personalizar ciertas aplicaciones que no están disponibles en los procedimientos *SPSS v7.5* ¹⁶.

Finalmente, mediante técnicas de integración numérica se construyeron cuadros estadísticos con los resultados obtenidos referentes a precisión, sesgo, error cuadrático medio, eficiencia relativa, etc. para los

¹⁶ Marija J, Norouis (1993) y Marija J, Norouis (1994)

diferentes escenarios lo cual permitió elaborar las conclusiones referentes a las propiedades muestrales de dichos estimadores.

Capítulo II

DISEÑO DEL EXPERIMENTO

2.1. Consideraciones para el Espacio Parametral (Ω)

Como se vio en los supuestos 1.1 los vectores de coeficientes aleatorios β_i están independiente e idénticamente distribuidos como una normal bivariada de parámetros β y Δ (el cual es no singular). Es decir, dado que $\beta_i \sim N_2(\beta, \Delta)$, entonces, tenemos que definir un conjunto de valores para el coeficiente de respuesta medio β y la matriz varianza-covarianza Δ de los coeficientes aleatorios que nos permita analizar un subespacio parametral convenientemente.

Para ello se han tomado cuatro valores posibles para β de modo que estos definan un cuadrilátero en Ω . Así, los valores de β serían $\{(2.5, 12.4), (2.5, 9.1), (7.3, 9.1), (7.3, 12.4)\}$. Por otro lado, la selección de los valores de la matriz varianza-covarianza de los coeficientes aleatorios se ha basado en el hecho de que cuando la matriz varianza-covarianza es igual a la matriz nula incurriremos en un problema de especificación del modelo al tratarlo erróneamente como si fuese un modelo de parámetros aleatorios.¹⁷ En consecuencia, tomaremos dos valores para Δ tal que manteniendo su rango

¹⁷ Información respecto a una prueba para contrastar la hipótesis de aleatoriedad de los coeficientes se puede encontrar en Swamy (1971) pp.122-124.

Cuadro 1

Escenarios Posibles en el Espacio Parametral Ω

| Escenarios | Δ | $\bar{\beta}$ | ρ | Escenarios | Δ | $\bar{\beta}$ | ρ |
|------------|------------|-----------------------|------------|------------|------------|-----------------------|------------|
| 1 * | Δ_0 | $\beta_1=(2.5, 12.4)$ | $\rho=0.1$ | 13 * | Δ_1 | $\beta_1=(2.5, 12.4)$ | $\rho=0.1$ |
| 2 | Δ_0 | $\beta_1=(2.5, 12.4)$ | $\rho=0.5$ | 14 | Δ_1 | $\beta_1=(2.5, 12.4)$ | $\rho=0.5$ |
| 3 | Δ_0 | $\beta_1=(2.5, 12.4)$ | $\rho=0.9$ | 15 | Δ_1 | $\beta_1=(2.5, 12.4)$ | $\rho=0.9$ |
| 4 * | Δ_0 | $\beta_2=(2.5, 9.1)$ | $\rho=0.1$ | 16 * | Δ_1 | $\beta_2=(2.5, 9.1)$ | $\rho=0.1$ |
| 5 | Δ_0 | $\beta_2=(2.5, 9.1)$ | $\rho=0.5$ | 17 | Δ_1 | $\beta_2=(2.5, 9.1)$ | $\rho=0.5$ |
| 6 | Δ_0 | $\beta_2=(2.5, 9.1)$ | $\rho=0.9$ | 18 | Δ_1 | $\beta_2=(2.5, 9.1)$ | $\rho=0.9$ |
| 7 * | Δ_0 | $\beta_3=(7.3, 9.1)$ | $\rho=0.1$ | 19 * | Δ_1 | $\beta_3=(7.3, 9.1)$ | $\rho=0.1$ |
| 8 | Δ_0 | $\beta_3=(7.3, 9.1)$ | $\rho=0.5$ | 20 | Δ_1 | $\beta_3=(7.3, 9.1)$ | $\rho=0.5$ |
| 9 | Δ_0 | $\beta_3=(7.3, 9.1)$ | $\rho=0.9$ | 21 | Δ_1 | $\beta_3=(7.3, 9.1)$ | $\rho=0.9$ |
| 10 * | Δ_0 | $\beta_4=(7.3, 12.4)$ | $\rho=0.1$ | 22 * | Δ_1 | $\beta_4=(7.3, 12.4)$ | $\rho=0.1$ |
| 11 | Δ_0 | $\beta_4=(7.3, 12.4)$ | $\rho=0.5$ | 23 | Δ_1 | $\beta_4=(7.3, 12.4)$ | $\rho=0.5$ |
| 12 | Δ_0 | $\beta_4=(7.3, 12.4)$ | $\rho=0.9$ | 24 | Δ_1 | $\beta_4=(7.3, 12.4)$ | $\rho=0.9$ |

(*) Casos considerados en el Proccso de Generación de los Parámetros Aleatorios

completo en un caso el determinante sea cercano a cero y, en el otro caso, no. Los valores de Δ seleccionados serán entonces,

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.90 \end{pmatrix} \text{ y } \Delta_1 = \begin{pmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 8.5 \end{pmatrix}$$

Definido los posibles valores para β y Δ procedemos a la generación de los parámetros aleatorios. De acuerdo al supuesto 1.1-(4) los vectores de coeficientes aleatorios β_i están independientemente e idénticamente distribuidos como una normal bivariada. Valiéndonos de esto generamos cada componente del vector aleatorio β_i independientemente teniendo en cuenta los

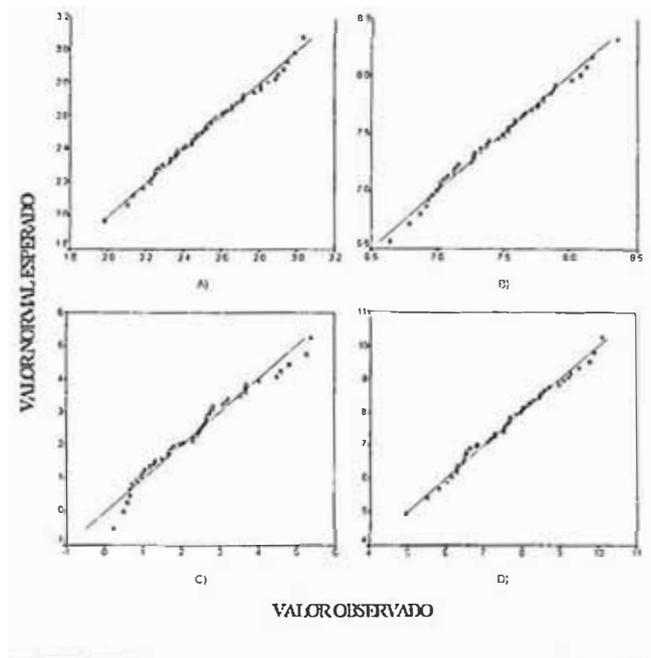


Gráfico 1.- Prueba Q-Q de Normalidad para la Distribución Marginal de β_{11} según Escenarios. A) Escenarios del 1 al 6, B) Escenarios del 7 al 12 C) Escenarios del 13 al 18, D) Escenarios del 19 al 24.

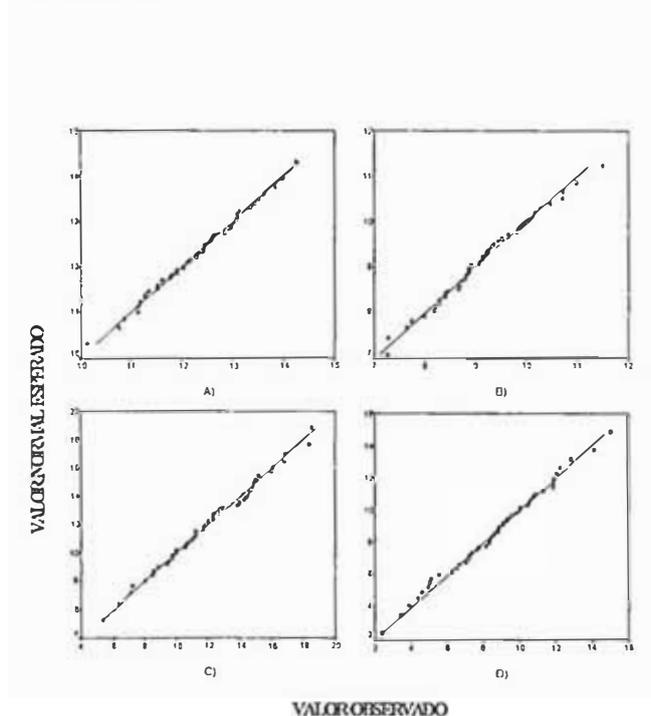


Gráfico 2.- Prueba Q-Q de Normalidad para la Distribución Marginal de β_{21} según Escenarios. A) Escenarios del 1 al 6, B) Escenarios del 7 al 12 C) Escenarios del 13 al 18, D) Escenarios del 19 al 24.

parámetros que definen cada población¹⁸. Los casos posibles en este proceso se muestran (en asteriscos) en el cuadro 1. En cada caso, el proceso de generación sigue el esquema mostrado en el gráfico 1.

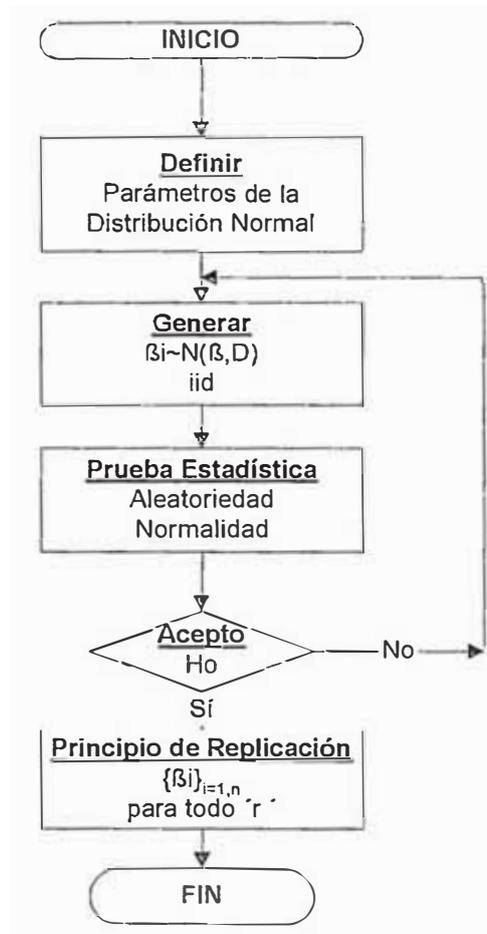


Gráfico 3.- Proceso de Generación de los Coeficientes Aleatorios

Es decir, una vez que este conjunto de parámetros β_i haya pasado la prueba de aleatoriedad¹⁹ y bondad de ajuste se mantendrá fijo en cada una de las 30 replicaciones.

¹⁸ En Mardia, K.V.(1982) pp.59-66 podemos encontrar una justificación formal que nos permite generar independientemente cada componente de los parámetros ' β_i ' sólo si estos se distribuyen como una Normal Bivariada. Ejemplos prácticos al respecto así como una explicación gráfica se puede encontrar en Jolison, R. (1992)

¹⁹ La prueba de aleatoriedad correspondiente se baso en la prueba de corridas. Ver Siegel, Sidney (1969)

2.2 Generación de las Observaciones

El proceso de generación de las observaciones se ha dividido en dos etapas fundamentales: la primera, que involucra al término errático y , la segunda, a las variables exógenas y endógenas. Dado el Principio de Replicación las realizaciones del valor inicial se generaron de una corrida para las 30 replicaciones manteniéndose aquellas para los diferentes escenarios estudiados. El tamaño de muestra para el Corte Transversal, tanto en la generación de las observaciones como en las Pruebas Estadísticas involucradas, fue de 50. La obtención de los tamaños de muestra de 10 y 20 se realizó tomando los 10 y 20 primeros individuos de la muestra respectivamente.

2.2.1 Generación del Término Errático

A partir de la ecuación (1.1.1) se tiene que el término errático u_i es un vector $T \times 1$ para cuya obtención será necesario la generación de las observaciones iniciales en el momento $t=0$.

Dado el carácter del Panel de Datos la generación de las observaciones iniciales $u_{0,i}$ seguirán un esquema aleatorio con distribución uniforme para la muestra de tamaño 50 a través de las 30 replicaciones, es decir se realizará una corrida de 1500 realizaciones.

Los resultados de la Prueba de Rachas se presenta en el Anexo 1. Como puede observarse, sólo en las replicaciones 6 y 24 la serie generada no pasa la prueba de aleatoriedad al 5% de significación. Sin embargo, dado que la generación se realizó de una corrida para todas las replicaciones (1500 realizaciones en total) dichas observaciones se han mantenido en la muestra por considerarse óptimo la producción de toda la corrida.

De acuerdo al modelo desarrollado para el término de perturbación no observable u_i tomaremos ρ_i fijo e igual a ρ para todo 'i'. Esto nos permitirá reducir el número de escenarios que tendrían que simularse en el momento de la ejecución del experimento.

Según el esquema autorregresivo de los errores u_i especificado en la ecuación (1.1.6) tenemos que:

$$u_{it} = \rho u_{i,t-1} + \varepsilon_{it} \quad ; \quad \varepsilon \sim N(0,5) \quad , \quad 0 < |\rho| < 1 \quad (2.2.1)$$

donde se analizará todos los casos para los cuales ρ toma los siguientes valores: 0.1, 0.5, 0.9.

Para obtener la matriz varianza-covarianza del término de perturbación no observable 'u_i' tendremos que:

$$E(U_i U_j) = \begin{cases} \sigma_u^2 \Omega & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \quad (2.2.2)$$

donde

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{1-\rho^2} \sigma^2 \quad , \quad \sigma^2 = \text{Var}(\varepsilon_{ij}) = 5 \quad (2.2.3)$$

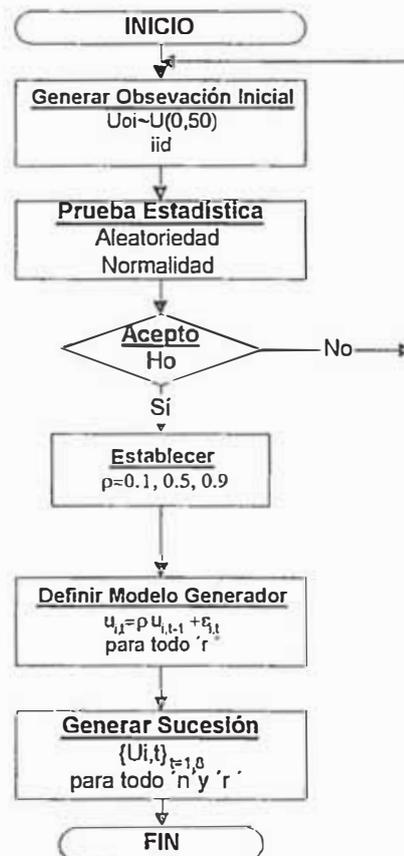


Gráfico 4.- Proceso de Generación del Término Errático.

La matriz varianza-covarianza de U será:

$$E(UU') = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \Omega \otimes I_n \quad (2.2.4)$$

Finalmente, a partir del modelo (1.1.4) la matriz varianza-covarianza del término de perturbación $(D(x)\delta+u)$ presenta la siguiente estructura matricial:

$$H_{(nTxnT)}(\theta) = \begin{bmatrix} X_1 \Delta X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 \Delta X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_n \Delta X_n \end{bmatrix} + \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \Omega_{(TxT)} \otimes I_n \quad (2.2.5)$$

donde Ω es como se definió en (1.1.8) para $\rho_i = \rho$.

2.2.2 Generación de las Variables Exógenas y Endógenas

La variable exógena será generada de tal modo que presente las mismas características de una variable económica: correlación serial, tendencia, etc. Para ello planteamos el siguiente esquema generador:

$$\begin{aligned} x_{1it} &= 0.5t + 1.2x_{1,i,t-1} + \omega_{it} \\ x_{2it} &= 2.5t + 7.6x_{1,i,t-1} + \omega_{it} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

donde, $\omega \sim N_2(0, \Lambda)$ para $\Lambda = \begin{bmatrix} 7.0 & 0 \\ 0 & 30.0 \end{bmatrix}$.

La observación inicial $X_{i,0}$ es generada bajo las mismas condiciones para la muestra de corte transversal mediante una corrida de números pseudoaleatorios para cada una de las 30 replicaciones. De esta forma, obtendremos 30 muestras de tamaño 50 de la variable X_{it} debido a que provienen de diferentes puntos iniciales. El modelo generador de las observaciones iniciales está dado por la siguiente relación:

$$\begin{aligned}x_{1,i,0} &= 10 + \omega_{1,i} \\x_{2,i,0} &= 50 + \omega_{2,i}\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

El término aleatorio ω , el cual fue definido en (2.2.6), será replicado 30 veces para cada uno de los escenarios posibles del espacio parametral y bajo las mismas condiciones.

La prueba no-paramétrica de corridas se aplicó a dichas series las cuales se generaron de una corrida en cada una de las 30 replicaciones. Los resultados, presentados en los cuadros 2 y 3 del anexo 1, muestran que el 98% de las replicaciones pasan la prueba de aleatoriedad al 5% de significación.

En cuanto a las variables endógenas, las observaciones se generaron siguiendo un modelo lineal de parámetros aleatorios sin intercepto. Expresando la relación (1.1.1) de manera explícita tenemos:

$$y_{i,t} = \beta_{1,i}x_{1,i,t} + \beta_{2,i}x_{2,i,t} + u_{it}\tag{2.2.8}$$

donde $u_{it} \sim U(0,5)$ y la distribución de los coeficientes β_i de pendiente se definieron en el acápite anterior.

2.3 Métodos de Estimación Puntual en un modelo RCA

A partir de los trabajos ya realizados por G.S. Maddala, Marc Nerlove, Wallace y Baldev Raj en el contexto de un diseño experimental, así como también, tomando como base los desarrollos teóricos de Hildreth & Houck y sistematización de todos estos modelos trabajado posteriormente por P.V Swamy haremos seguidamente un desarrollo de los métodos de estimación considerados en el presente trabajo de investigación. Adicionalmente, dicho desarrollo teórico hará referencia a los programas desarrollados en sintaxis SPSS v7.5, detallados en el anexo 5, y que constituirán una guía importante para el análisis de los proceso de cálculo involucrados en cada una de dichas técnicas de estimación.

2.3.1 Mínimos Cuadrados Ordinarios con Término Constante (MCOI)

La formulación apropiada para este proceso de estimación sería:

$$Y_{it} = \beta_{0,i} + \beta_{1,i} X_{1,i,t} + u_{it} \quad (2.3.1)$$

donde β_0 constituye el término independiente de este modelo lineal simple y $X_{1,i,t}$ sería la variable exógena.

Según la ecuación (2.3.1) el estimador MCOI de β sería:

$$b = (X'X)^{-1} X'Y \quad (2.3.2)$$

donde X es una matriz ($nT \times 2$) cuya primera columna son unos e Y es un vector ($nT \times 1$). Expresando la relación (2.3.1) en términos de la muestra de corte transversal tendremos que:

$$b = (\sum X_j' X_j)^{-1} \sum X_i' Y_i \quad (2.3.3)$$

o también,

$$b = \sum (\sum X'_j X_j)^{-1} (X'_i X_i) b_i \quad (2.3.4)$$

el cual expresa al estimador del parámetro β como una combinación lineal de los estimadores de los parámetros aleatorios para cada unidad de la muestra de corte transversal. En este sentido, manteniendo los supuestos de los Mínimos Cuadrados Ordinarios la ecuación (2.3.5)

$$\text{Var}(b) = \sigma^2 (X'X)^{-1} \quad (2.3.5)$$

expresaría la matriz varianza-covarianza para el estimador formulado en (2.3.2).

Para el cálculo del término de ponderación de la ecuación (2.3.4), según el programa 1 del anexo 5, fue necesario dos etapas: primero, se calculó el término constante que en dicha ecuación figura en la sumatoria con índice 'j' para luego, en una segunda etapa, ser éste incorporado en el cálculo del ponderador de la observación 'i' de la muestra de corte transversal simultáneamente con su respectivo estimador b_i .

2.3.2 Mínimos Cuadrados Ordinarios sin Término Constante (MCOII)

Reformulando explícitamente el modelo dado en (1.1.1) tenemos que:

$$Y_{it} = \beta_{1,i} X_{1,i,t} + \beta_{2,i,t} X_{2,i,t} + u_{it} \quad (2.3.6)$$

el cual mantiene las precisiones establecidas en los supuestos 1.1. En estas condiciones, el estimador del parámetro de respuesta medio β sería:

$$b = (X'X)^{-1} X'Y \quad (2.3.7)$$

donde $X=(X'_1, X'_2)'$ es una matriz ($nT \times 2$) e Y es un vector ($nT \times 1$). Expresando (2.3.7) en términos de las observaciones individuales de la muestra de corte transversal obtendremos una expresión similar a (2.3.4)

donde sólo cambia la estructura de la matriz $X_{i,t}$, lo que sucede también con su respectiva varianza que está dada por la ecuación (2.3.5).

Con respecto a los cálculos involucrados en este caso, y que figuran en el programa 2 del anexo 5, tenemos que mencionar que el proceso involucrado es el mismo que para los Mínimos Cuadrados Ordinarios con término constante.

2.3.3 Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG)

Aplicando el método de MCG para el modelo formulado en (1.1.4) bajo los supuestos I.1 obtenemos el estimador de β .²⁰

$$b(\theta) = (X'H(\theta)^{-1}X)^{-1}X'H(\theta)^{-1}Y \quad (2.3.8)$$

donde $H(\theta)$ es el especificado en (1.1.5).

La expresión anterior puede expresarse en términos de las observaciones de las variables independientes y dependientes así como también de los parámetros Δ y σ_{ii} , de ahí tenemos que:

$$b(\theta) = [\sum X_j'(X_j'\Delta X_j + \sigma_{jj}I_T)^{-1}X_j]^{-1}[\sum X_i'(X_i'\Delta X_i + \sigma_{ii}I_T)^{-1}Y_i] \quad (2.3.9)$$

Dicho estimador puede también ser expresado como una suma ponderada de los estimadores de los parámetros de la muestra de corte transversal 'bi'. Para ello se hará uso del siguiente resultado matricial:²¹

²⁰ Montgomery, D. 1992

²¹ Rao, 1971 p.21

$$(\sigma_{ii} I_T + X_i \Delta X_i)^{-1} = \frac{M_i}{\sigma_{ii}} + X_i (X_i' X_i)^{-1} \{\Delta + \sigma_{ii} (X_i' X_i)^{-1}\} (X_i' X_i)^{-1} X_i' \quad (2.3.10)$$

donde
$$M_i = I_T - X_i (X_i' X_i)^{-1} X_i' \quad (2.3.11)$$

Sustituyendo (2.2.4) en (2.2.3) tenemos:

$$b(\theta) = \sum_{i=1}^n W_i(\theta) b_i \quad (2.3.12)$$

donde

$$W_i(\theta) = \left[\sum_{j=1}^n \{\Delta + \sigma_{jj} (X_j' X_j)^{-1}\}^{-1} \right] \{\Delta + \sigma_{ii} (X_i' X_i)^{-1}\}^{-1} \quad (2.3.13)$$

$$\underline{b}_i = (X_i' X_i)^{-1} X_i' Y_i \quad (2.3.14)$$

La matriz varianza-covarianza del estimador MCG $b(\theta)$ está dado por:

$$V(\underline{b}(\theta)) = [X' H(\theta)^{-1} X]^{-1} \quad (2.3.15)$$

o también²²,

$$V(b(\theta)) = \left[\sum_{i=1}^n \{\Delta + \sigma_{ii} (X_i' X_i)^{-1}\}^{-1} \right]^{-1} \quad (2.3.16)$$

²² Ver Apéndice Matemático: desarrollo 5

Por otro lado, para el caso de correlación serial en los errores la matriz varianza-covarianza del i -ésimo término errático es $X_i \Delta X_i' + \sigma_{ii} \Omega_{ii}$. De ahí que, para obtener los parámetros de la i -ésima unidad individual 'bi' aplicamos MCG en los datos de las series temporales. De esta forma, obtenemos:

$$\underline{b}_i(\rho_i) = [X_i'(X_i \Delta X_i' + \sigma_{ii} \Omega_{ii})^{-1} X_i]^{-1} [X_i'(X_i \Delta X_i' + \sigma_{ii} \Omega_{ii})^{-1} \underline{y}_i] \quad (2.3.17)$$

aplicando el resultado matricial de Rao obtenemos la expresión compacta ²³:

$$\underline{b}_i(\rho_i) = (X_i' \Omega_{ii}^{-1} X_i)^{-1} X_i' \Omega_{ii}^{-1} Y_i \quad (2.3.18)$$

Por otro lado, la expresión de la matriz varianza-covarianza de $b_i(\rho_i)$ es:

$$V(\underline{b}_i(\rho_i)) = \sigma_{ii} (X_i \Omega_{ii}^{-1} X_i')^{-1} \quad (2.3.19)$$

El estimador de β en este caso será:

$$\underline{b}(\theta) = (X' H(\theta)^{-1} X)^{-1} X' H(\theta)^{-1} \underline{Y} \quad (2.3.20)$$

donde $H(\theta)$ es el especificado en la ecuación (1.1.8).

Desarrollando la ecuación anterior y haciendo uso del resultado de Rao tendremos que ²⁴:

$$\underline{b}(\theta) = \left[\sum_j (\Delta(\rho) + \sigma_{jj} (X_j' \Omega_j^{-1} X_j)^{-1})^{-1} \right]^{-1} \left[\sum_j \{ \Delta(\rho) + \sigma_{ii} (X_i' \Omega_{ii}^{-1} X_i)^{-1} \}^{-1} b_i(\rho_i) \right] \quad (2.3.21)$$

²³ Ver Maddala, G.S. (enero, 1971)

²⁴ Ver el Anexo 4: Desarrollo 5.

Expresando el estimador $b(\theta)$ como un promedio ponderado de los estimadores de las muestras de corte transversal se tiene:

$$b(\theta) = \sum_{i=1}^n W_i(\theta) b_i(\rho_i) \quad (2.3.22)$$

donde:

$$W_i(\theta) = \left[\sum_{j=1}^n (\Delta(\rho) + \sigma_{jj} (X_j' \Omega_{jj}^{-1} X_j)^{-1}) \right] (\Delta(\rho) + \sigma_{ii} (X_i' \Omega_{ii}^{-1} X_i)^{-1}) \quad (2.3.23)$$

En el programa 3 del anexo 5, se puede observar que la estimación requiere de la definición previa de la matriz Ω de la ecuación (1.1.8) para luego ser incorporada en la estimación de los parámetros aleatorios correspondientes a cada unidad 'i' de la muestra de corte transversal como figura en la ecuación (2.3.18). Luego, el proceso de estimación es similar al realizado para los Mínimos Cuadrados Ordinarios.

2.3.4 Mínimos Cuadrados Generalizados en Dos Etapas (MCG2E)

El estimador MCG2E equivale al estimador Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) pero haciendo uso de los estimadores de ρ , Δ y σ_{ii} . En consecuencia, tendremos que el estimador MCG2E de β será:

$$b(\hat{\theta}) = (X' H(\hat{\theta})^{-1} X)^{-1} X' H(\hat{\theta})^{-1} Y \quad (2.3.24)$$

Expresando el estimador $b(\theta)$ en términos de $\hat{\rho}$, $\hat{\Delta}$ y s_{ii} tendremos:

$$b(\hat{\theta}) = \left[\sum_{j=1}^n (\hat{\Delta}(\hat{\rho}) + s_{jj} (X_j' \hat{\Omega}_{jj}^{-1} X_j)^{-1})^{-1} \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \{ (\hat{\Delta}(\hat{\rho}) + s_{ii} (X_i' \hat{\Omega}_{ii}^{-1} X_i)^{-1})^{-1} \} b(\hat{\rho}_i) \right] \quad (2.3.25)$$

Expresando este estimador como un promedio ponderado de los estimadores de las muestras de corte transversal;

$$b(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n W_i(\hat{\theta}) b_i(\hat{\rho}_i) \quad (2.3.26)$$

donde:

$$W_i(\hat{\theta}) = \left[\sum_{j=1}^n (\hat{\Delta}(\hat{\rho}) + \hat{\sigma}_{jj} (X_j' \hat{\Omega}_{jj}^{-1} X_j)^{-1}) \right]^{-1} (\hat{\Delta}(\hat{\rho}) + \hat{\sigma}_{ii} (X_i' \hat{\Omega}_{ii}^{-1} X_i)^{-1}) \quad (2.3.27)$$

representa las ponderaciones correspondientes a los coeficientes de la muestra de corte transversal $\underline{b}_i(\hat{\rho}_i)$. Al respecto, dicho estimador está expresado por:

$$\underline{b}_i(\hat{\rho}_i) = (X_i' \hat{\Omega}_{ii}^{-1} X_i)^{-1} X_i' \hat{\Omega}_{ii}^{-1} Y_i \quad (2.3.28)$$

y su matriz varianza-covarianza como:

$$V(\underline{b}_i(\hat{\rho}_i)) = \hat{\sigma}_{ii} (X_i' \hat{\Omega}_{ii}^{-1} X_i)^{-1} \quad (2.3.29)$$

Por otro lado, el estimador de Ω_{ii} ($\hat{\Omega}_{ii}$) se obtiene reemplazando ' ρ_i ' por $\hat{\rho}_i$ en Ω_{ii} . Más aún,

$$\hat{\rho}_i = \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_{it} \hat{u}_{i,t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{u}_{i,t-1}^2} \quad (2.3.30)$$

donde \hat{u}_{it} es el t -ésimo elemento de

$$\hat{u}_i = y_i - X_i \underline{b}_i \quad (2.3.31)$$

Sabiendo que $\hat{R}_i' \hat{R}_i = \hat{\Omega}_{ii}^{-1}$ tenemos que:

$$\hat{R}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \hat{\rho}_i^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\hat{\rho}_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\rho}_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\rho}_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{\rho}_i & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.32)$$

Consecuentemente podemos estimar σ_{ii} por:

$$s_{ii} = \frac{\hat{\varepsilon}_i' \hat{\varepsilon}_i}{T - K} \quad i=1, \dots, n \quad (2.3.33)$$

donde:

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{R}_i y_i - \hat{R}_i X_i \underline{b}_i(\hat{\rho}_i) \quad (2.3.34)$$

y $\underline{b}_i(\hat{\rho}_i)$ es el expresado en la ecuación (2.3.28).

El estimador de Δ^{25} podemos obtenerlo por:

$$\hat{\Delta}(\hat{\rho}) = \frac{S_b(\hat{\rho})}{n-1} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{ii} (X_i' \hat{\Omega}^{-1} X_i)^{-1} \quad (2.3.35)$$

donde:

$$S_b(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^n b_i(\hat{\rho}_i) b_i'(\hat{\rho}_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i(\hat{\rho}_i) \sum_{i=1}^n b_i'(\hat{\rho}_i) \quad (2.3.36)$$

El proceso de estimación es más complicado en este caso por que están involucrados dos etapas. En la primera etapa, tal como se muestra en el programa 4 del anexo 5, se estima la matriz Ω que en el caso de los MCG, ver programa 3, sólo se hace un reemplazo de valores de los parámetros poblacionales según los diferentes escenarios. En esta primera etapa, además tiene que estimarse la varianza de los errores para cada observación 'i', para luego ser incorporado en la segunda etapa del proceso de estimación que involucra básicamente la ecuación (2.3.24).

2.3.5 Mínimo Cuadrados Generalizados de Hildreth & Houck (MCGHH)

La ecuación (2.3.37) muestra el modelo planteado por Hildreth & Houck ²⁶ para una observación de la muestra de corte transversal:

$$y_i = x_i (\beta + \delta_i) \quad (2.3.37)$$

donde, el parámetro aleatorio β_i se expresa como la suma de dos componentes: el vector de respuesta medio β y el componente aleatorio δ_i . Así, la ecuación (2.3.37) puede expresarse equivalentemente como:

$$S_b(\rho) = \sum_{i=1}^n b_i(\rho_i) b_i'(\rho_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i(\rho_i) \sum_{i=1}^n b_i'(\rho_i) \quad (2.3.38)$$

tal que,

²⁵ Una prueba de insesgamiento para el estimador (2.3.35) puede encontrarse en Swamy P.A.V.B. (1971)

²⁶ Hildreth & Houck (Junio, 1968)

$$u_i = x_i \delta_i \quad (2.3.39)$$

A partir del vector residual u_i definido como:

$$\hat{u}_i = y_i - x_i \beta = M u_i \quad (2.3.40)$$

(donde $M=I-X'(X'X)^{-1}X'$ es una matriz $T \times T$ idempotente) podemos calcular la matriz varianza-covarianza estimada del término u_i . Sea,

$$\hat{u}_i = y_i - x_i \beta = M u_i \quad (2.3.41)$$

donde,

$$H_i = X_i \Delta X_i' \quad (2.3.42)$$

es la matriz varianza-covarianza del término de perturbación u_i en (2.3.38) y Δ el parámetro especificado en el supuesto 1.1-(4)

De acuerdo a la metodología de Hildreth & Houck²⁷ la ecuación (2.3.42) se expresaría como:

$$H_i(\hat{\Delta}_{hh}) = X_i \hat{\Delta}_{hh} \quad (2.3.43)$$

con lo cual se da una ponderación exclusiva a las varianzas de los parámetros aleatorios. Bajo esta perspectiva la formulación (2.3.41) estaría dada por:

$$E \hat{u}_i = M \underline{h} \quad (2.3.44)$$

donde ' \underline{h} ' es un vector $T \times 1$ cuyos elementos están conformados por la diagonal principal de H .

Estableciendo el término aleatorio ε como:

$$\varepsilon = \hat{u} - E(\hat{u}) \quad (2.3.45)$$

y redefiniéndolo según (2.3.44) y (2.3.45) tenemos,

$$\hat{u} = M X d + \varepsilon = G d + \varepsilon \quad (2.3.46)$$

donde $E(\varepsilon)=0$ y $E(\varepsilon\varepsilon')=\varphi$.

²⁷ Idem. p.586

Estimamos \underline{d} por Mínimos Cuadrados Ordinarios en (2.3.46),

$$\underline{d} = (\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\underline{u} \quad (2.3.47)$$

Finalmente, el estimador del vector de respuesta medio β puede ser obtenido reemplazando los estimados \underline{d} en \mathbf{H} de modo que:

$$\mathbf{b}_{hh}(\hat{\Delta}_{hh}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_i(\hat{\Delta}_{hh})\mathbf{b}_i \quad (2.3.48)$$

donde,

$$\mathbf{W}_i(\hat{\Delta}_{hh}) = \left[\sum_j \mathbf{X}_j \mathbf{H}^{-1}(\Delta_{hh}) \mathbf{X}_j' \right]^{-1} \mathbf{X}_i \mathbf{H}^{-1}(\Delta_{hh}) \mathbf{X}_i' \quad (2.3.49)$$

es el término de ponderación correspondiente al i -ésimo elemento de la muestra de corte transversal y \mathbf{b}_i su respectivo coeficiente de respuesta aleatorio.

Para el cálculo del estimado bajo este enfoque es necesario dos etapas tal como se muestra en el programa 5. Primero será necesario estimar la matriz varianza-covarianza en función del estimado de Δ como se ve en la ecuación (2.3.43). Como puede verse primero se calcula \underline{d} por MCO en la ecuación (2.3.47). En segundo lugar, se calculará el estimado del coeficiente de respuesta medio según la ecuación (2.3.48) respetando el término de ponderación de la ecuación (2.3.49) tal como se realizó en la técnica MCG2E.

2.3.6 Mínimos Cuadrados por Etapas de Aitken (MCEA)

Según el enfoque de Aitken las perturbaciones ε de la ecuación (2.3.46) son heteroscedásticas y serialmente correlacionadas, en consecuencia, la matriz φ es no escalar lo cual sugiere un método alternativo por etapas para obtener los estimadores de \underline{d} y β .

En una primera etapa, el estimador de φ se obtiene utilizando el estimador de Hildreth & Houck especificado en la ecuación (2.3.41). Es decir,

$$\hat{\phi} = MH(\Delta_{hh})M \quad (2.3.50)$$

La segunda etapa, consiste en utilizar el estimador de ϕ en la formula de Aitken para d :

$$d_{\text{AITKEN}} = (G\hat{\phi}^{-1}G')^{-1}G\hat{\phi}u \quad (2.3.51)$$

De (2.3.51) tenemos que $\hat{\Delta}_{\text{AITKEN}} = \text{Diag}(d_{\text{AITKEN}})$ el cual nos permitirá estimar el coeficiente de respuesta medio β de manera similar al obtenido por Hildreth & Houck.

Como se vió en el desarrollo de H&H la matriz varianza-covarianza H del término de perturbación u en (2.3.38) está dado por:

$$H_i(\hat{\Delta}_{\text{AITKEN}}) = X_i\hat{\Delta}_{\text{AITKEN}} \quad (2.3.52)$$

Finalmente, el estimador del coeficiente de respuesta medio está dado por:

$$b_{\text{AITKEN}} = \sum W_i(\hat{\Delta}_{\text{AITKEN}})b_i \quad (2.3.53)$$

donde el término de ponderación W_i está definido como:

$$W_i(\hat{\Delta}_{\text{AITKEN}}) = \left[\sum_j X_j'H^{-1}(\hat{\Delta}_{\text{AITKEN}})X_j \right]^{-1} X_i'H^{-1}(\hat{\Delta}_{\text{AITKEN}})X_i \quad (2.3.54)$$

El proceso de cálculo involucrado es similar al correspondiente MCGHH con la diferencia que se añade un paso más que tiene que ver con la incorporación de la información respecto a ϕ como puede verse en la ecuación (2.3.50). El programa 6 del anexo 5 muestra paso a paso todo este proceso.

2.3.7 Mínimos Cuadrados Ponderados de Theil (MCPT)

Theil propone un procedimiento mediante el cual los elementos fuera de la diagonal principal de $\hat{\phi}$ en (2.3.50) son reemplazados por ceros obteniéndose ${}^2\hat{\phi}_{MCPT}$, el cual es utilizado para estimar σ_{MCPT} por Mínimos Cuadrados Ponderados:

$$\hat{\sigma}_{MCPT} = Z'({}^2\hat{\phi}_{MCPT})^{-1}Z)^{-1}Z({}^2\hat{\phi}_{MCPT})^{-1}\hat{\sigma} \quad (2.3.55)$$

Los estimados obtenidos a partir de (2.3.51) corresponderán a las varianzas estimadas de los parámetros aleatorios a partir del cual tendremos el estimador de Theil para Δ : $\hat{\Delta}(\sigma_{MCPT})$.

Utilizando dicho estimador obtendremos el estimador de Theil del parámetro de respuesta medio β :

$$b(\sigma_{MCPT}) = (X'\hat{H}(\hat{\Delta}(\sigma_{MCPT}))^{-1}X)^{-1}X'\hat{H}(\hat{\Delta}(\sigma_{MCPT}))^{-1}Y \quad (2.3.50)$$

La ecuación (2.3.52) podemos expresarla en términos de la muestra de corte transversal,

$$b(\Delta(\sigma_{MCPT})) = \sum_{i=1} W_i(\hat{\Delta}(\sigma_{MCPT})) b_i(\rho_1) \quad (2.3.51)$$

donde el término de ponderación W_i está definido como:

$$W_i(\hat{\Delta}(\sigma_{MCPT})) = \left\{ \sum_{j=1} (\hat{\Delta}(\sigma_{MCPT}) + \sigma^2(X_j'\Omega^{-1}X_j)^{-1}) \right\} / (\hat{\Delta}(\sigma_{MCPT}) + \sigma^2(X_i'\Omega^{-1}X_i)^{-1}) \quad (2.3.52)$$

El proceso de cálculo en esta técnica es similar a la de MCEA con la única diferencia de que los elementos fuera de la diagonal principal de (2.3.50) se igualan a cero, ver programa 7 del anexo 5.

Capítulo III

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS PROPIEDADES MUESTRALES PARA LOS DIFERENTES METODOS DE ESTIMACION

Para efectos del proceso de estimación se plantearon dos modelos lineales especificados en el Capítulo II, acápite 3:

$$\text{Modelo I} \quad y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u$$

$$\text{Modelo II} \quad y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

de los cuales, el Modelo I fue utilizado con la técnica de estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCOI) y el Modelo II en las seis técnicas de estimación restantes una de las cuales corresponde también a la de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCOII).

El análisis comparativo de las propiedades muestrales de los diferentes estimadores nos lleva a organizar la exposición en tres partes. En la primera, se hará un análisis del sesgo basado en la definición de sesgo relativo especificado en la ecuación (1.2.6) lo cual nos permitirá comparar no sólo la precisión de los diferentes métodos de estimación sino también cómo estos son afectados por los diferentes escenarios. Por otro lado, se complementará los resultados obtenidos en esta parte mediante el análisis de la Consistencia Simple.

En la segunda parte, se reforzarán los resultados obtenidos para los métodos basados en el enfoque de Hildreth & Houck mediante el análisis de la Consistencia en Error Cuadrático Medio.

Finalmente, las propiedades de Eficiencia bajo el enfoque del Error Cuadrático Medio serán analizadas tomando como referencia el Error Cuadrático Medio obtenido por el Método de Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG). Por otro lado, el análisis de la Eficiencia se desarrollará también sobre la base de estadísticos no-paramétricos: el rango intercuartílico, como medida de dispersión en lugar de la varianza. La justificación de esto radica en el hecho que conlleva los problemas involucrados en la verificación de la existencia del segundo momento para una determinada población y no del rango intercuartílico cuya existencia es segura. El problema radica en probar la existencia del segundo momento para una determinada población lo cual implica el conocimiento *a priori* de su distribución; más aún, en pequeñas muestras esto puede ser más complicado por los casos de asimetría, curtosis que difieren de esquemas mesocúrticos y distribuciones bimodales los cuales caracterizan a las muestras pequeñas.

3.1 Sesgo y Consistencia Simple

El método de estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios ha sido utilizado bajo los dos modelos especificados anteriormente, en este sentido, dado que el mecanismo generador de la variable endógena se basó en el Modelo II (ver acápite 2.2) podemos considerar que la técnica MCOI incurre en un error de especificación del modelo. El cuadro 2 muestra los casos, en términos porcentuales, donde el sesgo relativo ha sido mayor al 10% del verdadero valor del coeficiente de respuesta medio.

Los Mínimos Cuadrados Ordinarios presentan una significativa pérdida de precisión al hacerse una incorrecta especificación del modelo. En efecto, como puede observarse el modelo MCOI presenta pérdidas de precisión, si lo comparamos con el modelo MCOII, evidenciado esto último por los niveles más altos de sesgo relativo mayor al 10% con respecto al conjunto de técnicas de estimación para los tamaños de muestra

especificados. Así, a pesar de que la precisión mejora conforme el tamaño de muestra aumenta, para el caso Mínimos Cuadrados Ordinarios con el Modelo I los casos de pérdida de precisión siempre se mantienen por encima del promedio conjunto.

Cuadro 2

Casos (%) con Sesgo Relativo Mayor al 10% según Tamaño de Muestra y Técnicas de Estimación

| Técnica de Estimación | Tamaño de Muestra | | | TOTAL |
|-----------------------|-------------------|----|----|-------|
| | 10 | 20 | 50 | |
| MCOI | 50 | 25 | 13 | 29 |
| MCOII | 19 | 6 | 2 | 9 |
| MCG | 17 | 15 | 2 | 11 |
| MCG2E | 21 | 17 | 4 | 14 |
| MCGHH | 19 | 13 | 23 | 18 |
| MCEA | 44 | 38 | 25 | 35 |
| MCPT | 44 | 38 | 25 | 35 |
| TOTAL | 29 | 21 | 13 | 21 |

FUENTE: Anexo 2, Cuadros 2.1 al 2.7

La pérdida de precisión es más importante aún, cuando la muestra de corte transversal se reduce comparado a la muestra de series temporales $T/N \rightarrow 1$ debido a que la información relativa al mecanismo generador de los errores, resumido en ρ , es más relevante. Por esa razón, el método MCOI presenta en el 50% de los casos pérdidas de precisión cuando el tamaño de muestra es 10. Inverso es el resultado mostrado por MCOII, puede verse que cuando $(T/N \rightarrow 0)$ la producción de éste se manifiesta en un 2% de casos de pérdida de precisión, esto último refleja la pérdida de importancia de la información de ρ cuando la muestra de corte transversal aumenta en la combinación de datos.

Como se podía esperar el Método de Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) y Mínimos Cuadrados Generalizados en Dos Etapas (MCG2E) muestran los niveles de precisión más altos -las pérdidas de precisión se mantiene significativamente bajos comparado al promedio general por tamaño de muestra- con respecto al conjunto de técnicas de estimación.

Cuadro 3

Casos (%) con Sesgo Relativo Mayor al 10% según Tamaño de Muestra y Coeficiente ρ por Técnicas de Estimación

| Técnicas de Estimación | Tamaño de Muestra | | | | | | | | |
|------------------------|-------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 10 | | | 20 | | | 50 | | |
| Coeficiente ρ | 0.1 | 0.5 | 0.9 | 0.1 | 0.5 | 0.9 | 0.1 | 0.5 | 0.9 |
| MCG | 19 | 19 | 13 | 19 | 19 | 6 | | | 6 |
| MCG2E | 19 | 25 | 19 | 19 | 19 | 13 | | 13 | |
| MCGHH | 19 | 19 | 19 | 13 | 13 | 13 | 25 | 25 | 19 |
| MCEA | 44 | 44 | 44 | 38 | 38 | 38 | 25 | 25 | 25 |
| MCPT | 44 | 44 | 44 | 38 | 38 | 38 | 25 | 25 | 25 |
| TOTAL | 29 | 30 | 28 | 22 | 22 | 19 | 13 | 14 | 13 |

FUENTE: Anexo 2, Cuadros 2.1 al 2.7

En el cuadro 3, puede verse que para los Mínimos Cuadrados Generalizados, a diferencia de lo visto para los Mínimos Cuadrados Ordinarios, la información respecto a ' ρ ' sólo es relevante, en muestras pequeñas, cuando sus valores son cercanos a 1, es decir, en este caso las ganancias son significativas en precisión. Este resultado era previsible en la medida que el efecto de ' ρ ' pueda hacerse evidente en muestras pequeñas sólo cuando toma valores altos. Por otro lado, cuando la estimación por Mínimos Cuadrados Generalizados se hace en dos etapas (MCG2E) las ganancias de precisión se dan para valores extremos de ' ρ ' inclusive en muestras de corte transversal grandes. En otras palabras, para ' ρ ' cercano a 0.5 las pérdidas de precisión para MCG2E son evidentes.

Por razones metodológicas se ve conveniente analizar los métodos MCGHH, MCPA y MCET conjuntamente, esto último justificado además por el hecho de que la información incorporada en el proceso de

estimación por el estimador de la matriz varianza-covarianza de los parámetros aleatorios Δ se basa en el modelo de Hildreth & Houck.

La incorporación de mayor información respecto al término errático del modelo de parámetros aleatorios formulado en (1.1.4) en los métodos MCPA y MCET, se manifiesta en la estabilidad observada por dichos estimadores en todo el rango de variación de ρ . Al respecto MCGHH muestra los niveles de precisión más altos en muestras pequeñas. Esto último puede explicarse también por el hecho de no cumplirse algunos de los supuestos iniciales. Por ejemplo, el aumento del tamaño de muestra confirma los supuestos iniciales respecto a la distribución de los parámetros aleatorios, es decir, el supuesto 1.1-(4) no está asegurado en pequeñas muestras. Así, para muestras de tamaño 10 y 20 pueden observarse distribuciones asimétricas y/o con problemas de curtosis que pueden influir en la pérdida de precisión observada para los métodos MCPA y MCET.

Por otro lado, a partir de la evidencia empírica podemos analizar la consistencia de los diferentes estimadores. Así, cuando el sesgo presente un comportamiento errático significativo, entendido éste como los cambios de signo observados en el sesgo o cuando no existe una convergencia monótona hacia cero al aumentar el tamaño de muestra, será un indicador de que el estimador no es consistente.

Con el fin de orientar el análisis al impacto que el espacio parametral puede tener sobre el sesgo se ha diseñado el cuadro 4 donde se muestra, en términos porcentuales, los casos en que se ha observado un comportamiento errático del sesgo cuando la muestra aumenta. De esta forma, dentro de dos escenarios definidos por la matriz varianza-covarianza de los parámetros aleatorios se estudia un rango de valores para ρ .

Una primera aproximación del problema nos muestra que cuando el determinante de la varianza-covarianza de los parámetros aleatorios Δ es significativamente diferente de cero; es decir, la variabilidad de los parámetros aleatorios es mayor, y se opta por un modelo de regresión de parámetros aleatorios se reducen los casos de comportamiento errático del 42% al 29%. Más allá de este resultado general, podemos observar que

con respecto a las técnicas de estimación éstas presentan una reducción bastante significativa a excepción de los métodos MCPA y MCET.

El caso MCG es importante analizar no sólo a raíz de los resultados obtenidos sino porque constituye el caso ideal entre las técnicas estudiadas debido a que utiliza en el proceso de estimación los verdaderos valores de los parámetros poblacionales de Ω . En efecto, dicha información incorporada en la matriz varianza-covarianza del término errático del modelo RCA mostrado en la ecuación (1.1.9) es utilizado en la ecuación (2.3.21) al estimar el coeficiente de respuesta medio.

Cuadro 4

Comportamiento Errático (%) del Sesgo según Coeficiente ρ y Δ ^a por Técnica de Estimación

| Coeficiente ρ | Parámetro Poblacional Δ | | | | | | | | TCTAL |
|------------------------------|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Δ_0 | | | | Δ_1 | | | | |
| | 0.1 | 0.5 | 0.9 | TOTAL | 0.1 | 0.5 | 0.9 | TOTAL | |
| Técnica de Estimación | | | | | | | | | |
| MCOI | 50 | 50 | 50 | 50 | 25 | 25 | 25 | 25 | 38 |
| MCOII | 38 | 38 | 50 | 42 | 13 | 13 | 13 | 13 | 27 |
| MCG | 25 | 38 | 38 | 33 | 25 | 13 | 25 | 21 | 27 |
| MCG2E | 25 | 25 | 50 | 33 | 25 | 13 | 13 | 17 | 25 |
| MCGHH | 38 | 38 | 38 | 38 | 25 | 13 | 38 | 25 | 31 |
| MCEA | 63 | 63 | 25 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| MCPT | 63 | 63 | 25 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| TOTAL | 42 | 44 | 38 | 42 | 31 | 25 | 31 | 29 | 35 |

FUENTE: Anexo 2, Cuadro 2.1 al 2.7

^a Matriz Varianza-Covarianza de los Parámetros Aleatorios

En el cuadro 4 podemos ver que, en términos promedio, ambos métodos tienen niveles más bajos de comportamiento errático. Sin embargo, dentro de cada uno de los escenarios se observa que el efecto de ρ es significativo para MCG2E, lo que no ocurre con MCG donde los casos de comportamiento errático se

mantienen para los diferentes valores de ρ . Así, en escenarios donde la variabilidad de los coeficientes aleatorios es mayor (Δ_1) la estructura de correlación del término errático caracterizado por un ρ cercano a 0.5 mejora significativamente la consistencia en el método de MCG2E al igual que MCG quien presenta un esquema más estable en escenarios donde la variabilidad de los parámetros aleatorios es menor (Δ_0) inclusive.

3.2 Métodos de Estimación bajo el Enfoque de Hildreth & Houck y la Consistencia en Error Cuadrático Medio

Los métodos de estimación basados en el enfoque de Hildreth & Houck (MCGHH, MCEA y MCPT) se caracterizan por utilizar la metodología de estos investigadores en la estimación de la matriz varianza-covarianza de los parámetros aleatorios en la primera etapa del proceso de estimación. En este sentido, desarrollaremos un análisis de la Consistencia Simple y en Error Cuadrático Medio de modo que nos permita evaluar las ventajas de dicho enfoque con respecto a las otras técnicas analizadas.

Con respecto a la Consistencia Simple se observa, en el cuadro 4, que sólo en el caso de MCGHH la reducción del comportamiento errático es significativa del 38% al 25%; para MCPA y MCET, en cambio, el 50% de los casos presentan evidencia de este esquema errático en los dos escenarios considerados y, por lo tanto, a partir de la evidencia podemos decir que no hay ganancias en consistencia aun cuando Δ , la matriz varianza-covarianza de los parámetros aleatorios, presente un determinante significativamente diferente de cero.

Cuando $\det(\Delta) \rightarrow 0$, que corresponde al caso $\Delta = \Delta_0$, la información respecto a la estructura del término errático se hace más relevante cuando ρ tiende a 1: los casos de comportamiento errático se reducen significativamente del 63% al 25%. En efecto, como se vió en los acápite 3.6 y 3.7 del Capítulo II, tanto la técnica MCPA como MCET incorporan información respecto a la estructura del término errático en la segunda etapa del proceso de estimación como se observa en la ecuaciones (2.3.47) y (2.3.51) respectivamente. En este

sentido, el mismo esquema seguido por ambas metodologías se explica por el hecho que para valores de ρ menores a 0.5 la estructura de la matriz varianza-covarianza del término errático es aproximadamente la misma. Es decir, por un lado, los elementos fuera de la diagonal principal en la ecuación (2.3.45) para la metodología de Aitken se aproximan a cero; y, por otro, en la metodología de los Mínimos Cuadrados Ponderados de Theil, los elementos fuera de la diagonal principal se restringen a cero. Por otro lado, se puede observar que para el caso de los MCGHH las ganancias en Consistencia Simple son importantes para una vecindad de $\rho=0.5$ cuando $\det(\Delta) \rightarrow +\infty$, en nuestro caso $\Delta=\Delta_1$

Si bien los métodos basados en el enfoque de Hildreth & Houck presentan la mayor incidencia de comportamiento errático en el sesgo comparado a los demás métodos de estimación lo contrario sucede cuando analizamos la Consistencia en Error Cuadrático Medio (ECM) que podemos considerarlo como la condición fuerte de Consistencia, es decir, la Consistencia en ECM implica que tanto el sesgo como la varianza del estimador tienden a cero. En nuestro caso, específicamente nos basaremos en la convergencia monótonica hacia cero lo cual evidencia la propiedad de Consistencia en ECM.

El cuadro 5, muestra los casos en términos porcentuales donde se observa comportamiento errático del ECM. Dado la orientación del análisis en el presente acápite presentamos explícitamente los casos correspondientes a los métodos basados en el enfoque de H&H y de manera conjunta para los otros métodos.

Los niveles de comportamiento errático en ECM corresponden al 18% de los casos, considerando el conjunto de técnicas de estimación analizadas, lo cual es significativamente menor a lo observado en la Consistencia Simple cuyos casos de comportamiento errático eran del orden del 35%, ver cuadro 4. En este contexto, al contrario de lo observado para la Consistencia Simple, los métodos basados en el enfoque de H&H muestran los niveles más bajos de comportamiento errático con respecto a los demás métodos.

Un cambio de escenario debido a la matriz varianza-covarianza de los parámetros aleatorios Δ afecta el comportamiento errático del ECM aumentando los casos del 14% al 21% en el conjunto de técnicas de estimación.

Con respecto a los efectos que la estructura del término errático pueda tener sobre los métodos basados en el enfoque de H&H la evidencia es clara: no hay efectos significativos sobre la consistencia

Cuadro 5

Comportamiento Errático (%) del ECM según Coeficiente ρ y Δ ^a por Técnica de Estimación

| Coeficiente ρ | Parámetro Poblacional Δ | | | | | | | | TOTAL |
|------------------------------|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Δ_0 | | | | Δ_1 | | | | |
| | 0.1 | 0.5 | 0.9 | TOTAL | 0.1 | 0.5 | 0.9 | TOTAL | |
| Técnica de Estimación | | | | | | | | | |
| MCGHH | | | | | 25 | 25 | 25 | 25 | 13 |
| MCEA | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| MCPT | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| OTROS (MCOII,MCG,MCG2E) | 21 | 21 | 25 | 22 | 29 | 29 | 29 | 29 | 26 |
| TOTAL | 13 | 13 | 15 | 14 | 21 | 21 | 21 | 21 | 18 |

FUENTE: Anexo 2, Cuadro 2.1 al 2.7

^a Matriz Varianza-Covarianza de los Parámetros Aleatorios

en ECM para el rango de ρ y escenarios analizados. Es decir, los métodos MCEA y MCPT dan evidencia de una Consistencia significativa en ECM: el efecto combinado del sesgo y la varianza. Podemos inferir entonces, que para los casos MCOII, MCG y MCG2E la mayor proporción de casos de comportamiento errático son atribuibles a la varianza de los respectivos estimadores, sustentado además, por los resultados del cuadro 4.

3.3 Eficiencia

Una primera aproximación con respecto a la variabilidad de los diferentes estimadores y sus efectos en la precisión nos lo da el cuadro 6. La utilización del rango intercuartílico como medida de dispersión utilizado en el ratio RI (Rango Intercuartílico de un Estimador determinado con respecto al Rango Intercuartílico observado para el estimador MCG) se justifica por tres razones principales:

1. Evitaremos los problemas involucrados en la justificación formal de la existencia del segundo momento en una población determinada que implica el conocimiento *apriori* de su distribución lo cual es difícil que se de en la práctica. Esto no ocurre con el Rango Intercuartílico como medida de dispersión no paramétrica cuya existencia es segura
2. La estabilidad mostrada por el Rango Intercuartílico, con respecto a la Varianza, en muestras pequeñas nos permitirá asegurar que esta medida incorpora efectos puramente debidos a la dispersión. Sobretudo, sabiendo que en pequeñas muestras esto puede ser más complicado por los casos de asimetría, curtosis que difieren de esquemas mesocúrticos y distribuciones bimodales.
3. La utilización de la variabilidad por rango intercuartílico y el ECM de los Mínimos Cuadrados Generalizados tiene como objetivo neutralizar los efectos debidos a los parámetros poblacionales seleccionados en la simulación de los diferentes escenarios tomando como referencia las propiedades exactas de eficiencia que posee dicho estimador, es decir, el estimador MCG constituye el caso ideal.

Sobre la base del ratio RI podemos observar la evidente superioridad del estimador MCG2E en un rango considerable del espacio parametral y tamaños de muestra. Del mismo modo, la evidencia empírica muestra las significativas ganancias en eficiencia del estimador Mínimos Cuadrado Ordinarios cuando el modelo utilizado es el correcto. En efecto, puede verse que el estimador Mínimos Cuadrados Ordinarios en el Modelo I (con error de especificación) califica en último lugar teniendo una significativa mejora cuando $\det(\Delta) \rightarrow +\infty$ aunque

no hay ganancias asintóticas para este caso. Sin embargo, cuando se utiliza el Modelo II, las ganancias en eficiencia son importantes: los Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCOII) ocupan el segundo lugar en todo el rango considerado del espacio parametral y tamaños de muestra.

Cuadro 6

Calificación del RI^a por Parámetro Estimado según Tamaño de Muestra N
Método de Estimación y Escenarios definido por Δ ^b

| N | | Parámetro Poblacional Δ | | | | | |
|----|-------|--------------------------------|-----------|-------|------------|-----------|-------|
| | | Δ_0 | | | Δ_1 | | |
| | | β_1 | β_2 | TOTAL | β_1 | β_2 | TOTAL |
| 10 | MCOI | 6 | n.a | n.a | 4 | n.a | n.a |
| | MCOII | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | MCG2E | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | MCGHH | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | MCEA | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 | 5 |
| | MCPT | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 |
| 20 | MCOI | 6 | n.a | n.a | 4 | n.a | n.a |
| | MCOII | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | MCG2E | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | MCGHH | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | MCEA | 5 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 |
| | MCPT | 4 | 5 | 4 | 6 | 4 | 5 |
| 50 | MCOI | 6 | n.a | n.a | 4 | n.a | n.a |
| | MCOII | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | MCG2E | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | MCGHH | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | MCEA | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 | 5 |
| | MCPT | 5 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 |

FUENTE: Anexo 3, Cuadros 3.14 - 3.15

a Ratio Rango Intercuartillico vs. Rango Intercuartillico de los MCG

b Matriz Varianza-Covarianza de los Parámetros Aleatorios

Para los métodos basados en el enfoque de Hildreth & Houck podemos ver que MCEA y MCPT presentan ventajas relativas dependiendo del contexto lo cual responde satisfactoriamente a nuestras expectativas sustentadas en las características que posee la matriz varianza-covarianza del término errático en cada uno de los casos.

Así, por ejemplo, mientras MCEA tiene mejor calificación respecto a eficiencia asintótica que MCPT en escenarios caracterizados por una menor variabilidad en los parámetros aleatorios (Δ_0), éste lo supera a

aquél en escenarios cuya variabilidad de los parámetros aleatorios es mayor (Δ_1). La razón radica, como ya lo mencionamos, en que la matriz varianza-covarianza del término errático para MCEA posee mayor información respecto a los errores que el método MCPT ya que este último sólo le da importancia a las varianzas con las cuales pondera la estimación y no a la correlación entre ellos, en consecuencia, cuando las varianzas de los parámetros aleatorios son más significativas MCPT mejora en la estimación.

Cuadro 7

**Calificación de la Eficiencia en ECM por Parámetro Estimado según Tamaño de Muestra N
Método de Estimación y Escenario definido por Δ^a**

| N | | Parámetro Poblacional Δ | | | | | |
|----|-------|--------------------------------|-----------|-------|------------|-----------|-------|
| | | Δ_0 | | | Δ_1 | | |
| | | β_1 | β_2 | TOTAL | β_1 | β_2 | TOTAL |
| 10 | MCOI | 6 | n.a | n.a | 4 | n.a | n.a |
| | MCOII | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | MCG2E | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | MCGHH | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | MCEA | 5 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 |
| | MCPT | 4 | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 |
| 20 | MCOI | 6 | n.a | n.a | 4 | n.a | n.a |
| | MCOII | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | MCG2E | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | MCGHH | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | MCEA | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 |
| | MCPT | 5 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 |
| 50 | MCOI | 6 | n.a | n.a | 4 | n.a | n.a |
| | MCOII | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | MCG2E | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | MCGHH | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | MCEA | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 |
| | MCPT | 4 | 5 | 5 | 6 | 4 | 5 |

FUENTE: Anexo 2, Cuadros 2.8 - 2.9

^a Matriz Varianza-Covarianza de los Parámetros Aleatorios

A pesar de la evidencia empírica vista en el acápite 3.1 respecto a la precisión, sesgo y, por otro lado, dado la naturaleza experimental de la presente investigación, no podemos determinar las propiedades exactas de los diferentes estimadores. De ahí que en esta parte de la investigación desarrollaremos la Eficiencia en Error Cuadrático Medio (ECM) por dos motivos principalmente:

1. Desde un punto de vista práctico el cálculo del ECM es directo debido a que podemos utilizar el verdadero valor de los parámetros poblacionales que fueron utilizados en la creación de los diferentes escenarios. Adicionalmente, dado que se dispone de 30 replicaciones para cada uno de dichos escenarios la estimación del valor esperado del estimador es bastante confiable.
2. El ECM conjuga tanto el sesgo de un estimador con su respectiva varianza en una medida. Desde esta perspectiva, dada la imposibilidad de disponer siempre de un estimador insesgado estaremos dispuestos a utilizar un estimador sesgado si su sesgo es compensado con una menor varianza. Es decir, para decidir utilizar un estimador se evalúa su ECM y se prefiere sobre un estimador insesgado si su varianza es suficientemente pequeña para compensar su sesgo.

El cuadro 7 resume la calificación obtenida por los diferentes procesos de estimación con respecto a la Eficiencia Relativa en ECM según escenarios y tamaños de muestra. Se puede observar que las calificaciones son muy similares a la evidencia obtenida en la variabilidad sobre la base del ratio RI.

Puede verse que el método MCG2E presenta el ratio más pequeño, y por lo tanto califica como 1, con respecto a los demás estimadores en todos los escenarios considerados del espacio parametral y tamaños de muestra.

El caso de los Mínimos Cuadrados Ordinarios es importante destacar en la medida que la calificación respecto a la Eficiencia en ECM es similar a la obtenida en los resultados respecto al ratio RI. Sin embargo, las ganancias en Eficiencia Relativa en ECM para los MCO sin error de especificación del modelo (MCOII) implica que las ganancias en eficiencia para dicha metodología son atribuibles no sólo a una reducción de la varianza de dicho estimador sino también del sesgo respectivo.

Con respecto a los métodos basados en el enfoque de Hildreth & Houck podemos observar que la calificación obtenida por MCGHH es superada por el Método Generalizado en Dos Etapas. El hecho de

imponer restricciones en el estimador del parámetro poblacional Δ en el enfoque de H&H limita la obtención de propiedades asintóticas deseables para este grupo de estimadores. Al respecto, podemos ver también que el método MCEA incluye una etapa adicional , ecuación (2.3.51), para estimar la varianza de los errores, inclusive el método MCPT adiciona una restricción más al igualar a cero los elementos fuera de la diagonal principal de la ecuación (2.3.50) antes de iniciar la segunda etapa de la estimación. De ahí que, los estimadores MCEA y MCPT tengan un comportamiento asintótico similar respecto a la Eficiencia Relativa en ECM, sin embargo, MCEA mejora a MCPT cuando el tamaño de muestra aumenta. Sólo en el caso en que la varianza de los parámetros aleatorios es mínima (Δ_0) y la muestra de corte transversal es pequeña respecto a la serie temporal el método MCEA pierde en calificación debido a que en estas condiciones la varianza de los errores es más relevante y es incorporada únicamente por la matriz varianza covarianza de MCPT como ponderadores en el proceso de estimación. Por otro lado, la calificación obtenida por MCEA y MCPT nos es exactamente la misma que la obtenida por el ratio RI, que sólo incluye variabilidad, posiblemente porque las ganancias en variabilidad de MCPT se vean compensadas por un aumento del sesgo sobre todo en escenarios caracterizados por una variabilidad mayor de los parámetros aleatorios.

CONCLUSIONES

1. En términos generales y en el contexto de los resultados experimentales queda demostrado, por un lado, que los métodos de estimación de coeficientes aleatorios producen estimadores con propiedades deseables en muestras finitas tales como: Eficiencia, Consistencia y/o Insesgamiento; y, por otro lado, que dichos resultados muestrales respecto a las propiedades de los estimadores son a veces afectados por los valores de los parámetros poblacionales. Adicionalmente, la evidencia muestra que el supuesto de aleatoriedad de los parámetros poblacionales mejora la adecuación del modelo, incorporando mayor información en la combinación de datos de series de tiempo y corte transversal, al producir estimados que reflejan la diversidad existente en las unidades microeconómicas de la muestra de corte transversal que responden a cuestiones culturales, educativas, geográficas, etc. que no son consideradas en los modelos de parámetros fijos.
2. El estimador Mínimos Cuadrados Generalizados en Dos Etapas (MCG2E) obtiene la mejor calificación con respecto a Eficiencia tanto en variabilidad por Rango Intercuartílico como en Eficiencia Relativa en Error Cuadrático Medio para todo el subespacio parametral y tamaños de muestra considerados. Estos resultados respaldados además por los obtenidos para el sesgo, en donde se observó que los casos de sesgo relativo mayores al 10% del verdadero valor del parámetro se redujeron del 21% al 4% cuando aumentaba el tamaño de la muestra, nos permiten inferir que las ganancias en Eficiencia en ECM se deben también a una reducción significativa de la varianza del estimador. Consecuentemente, tal como se planteó en la hipótesis 2 la evidencia empírica respalda las propiedades teóricas de eficiencia para el estimador MCG2E.

3. Los resultados obtenidos para el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios superaron las expectativas. Como la evidencia empírica lo demuestra, dicho método obtiene ganancias considerables en Eficiencia cuando los estimados fueron obtenidos a partir del Modelo II, es decir, sin error de especificación del modelo. En efecto, cuando se utiliza el estimador MCOI dicha metodología se ubica en el último lugar en Eficiencia -calificación 6 tanto en Eficiencia por Rango Intercuartílico como en Error Cuadrático Medio; sin embargo, cuando se utiliza MCOII la metodología se ubica en segundo lugar después del método MCG2E lo cual sustenta sólidamente el planteamiento de la hipótesis 2.1. Estos resultados se observan también en muestras pequeñas ($n=10, 20$) lo cual respalda la formulación hecha en la hipótesis 2.2. Es importante mencionar, que la evidencia empírica también favorece los resultados obtenidos para el sesgo. Así, el indicador de sesgo relativo, según el modelo 1.2.6, el método MCOII muestra que sólo el 19% de casos en muestras pequeñas son mayores al 10% comparado al 50% obtenido por MCOI. Por otro lado, el estimador MCOII mostró el nivel más bajo (13% de los casos) de comportamiento errático del sesgo lo cual sustenta la Consistencia Simple sobretodo si lo comparamos con el 17% obtenido por MCG2E.

4. Como se precisó en la hipótesis 2.3, la información incorporada respecto al término errático por los métodos generalizados MCG y MCG2E son más relevantes en escenarios donde el tamaño de la muestra de corte transversal es menor ($T/N \rightarrow 1$), es más, dicha información favorece la Consistencia a la luz de los resultados obtenidos. Al respecto, los casos de comportamiento errático en el sesgo se reducen del 33% para ambos métodos de estimación al 21% y 17%, respectivamente, lo cual está por debajo de los niveles generales. Es importante recalcar, sin embargo, que el método de los MCG2E evidenció pérdidas de precisión para valores del coeficiente de correlación de los errores u_i ' ρ ' iguales a 0.5.

5. De acuerdo a los resultados de Eficiencia a partir del experimento muestral el estimador Mínimos Cuadrados Generalizados de Hildreth & Houck (MCGHH) califica en tercer lugar para el subespacio parametral y tamaños de muestra considerados. Dichos resultados sorprenden en la medida que la metodología de Hildreth & Houck incluye información respecto a la estructura errática de la serie temporal y la varianza de los parámetros aleatorios en su segunda etapa del proceso de estimación a través de la

matriz varianza-covarianza $H(\Delta_{1h})$ que no lo incluye los Mínimos Cuadrados Ordinarios. Sin embargo, esta característica del estimador MCGHH son evidentes en los resultados respecto a la Consistencia en ECM. Así, esta metodología presenta el 13% de casos totales de comportamiento errático que es muy inferior al 26% obtenido por las otras técnicas generalizadas incluyendo también a los MCOII.

6. Adicionalmente, con respecto al conjunto de métodos basados en la metodología de Hildreth & Houck y lo especificado en la hipótesis 3.1 la evidencia empírica muestra que, a diferencia de los resultados obtenidos por Raj, Baldev (1975), el método MCGHH presenta evidencias de Consistencia a diferencia de los métodos MCEA y MCPT cuyos resultados no son tan contundentes. La razón se sustenta en el hecho de que aquél incorpora información respecto a la variabilidad de los parámetros aleatorios en la matriz varianza-covarianza del término errático que toma mayor relevancia con aumentos de 'N', a diferencia de los métodos MCEA y MCPT que dan mayor importancia a la información del componente temporal del término errático y, consecuentemente, sus propiedades de consistencia serían visibles en un contexto donde la muestra de Serie Temporal aumenta como es el caso de Raj, Baldev. Por otro lado, de la conclusión anterior, tenemos que puntualizar que en el caso de los MCGHH la reducción del comportamiento errático del sesgo fue significativo del 63% al 25% por efectos de un cambio de escenarios caracterizado por un aumento de la variabilidad de los parámetros aleatorios. Es decir, que la información respecto a la distribución de los parámetros aleatorios es fundamental para la Consistencia en el método de MCGHH, al contrario de lo que la evidencia muestra para MCEA y MCPT.

7. Los resultados obtenidos para la Consistencia en ECM son más alentadores. Mientras en el conjunto de estimadores aumentaban los casos de comportamiento errático del 14% al 21%, por un aumento de la variabilidad de los parámetros aleatorios, los métodos MCEA y MCPT se mantienen en un 13%. En general, los métodos basados en la metodología de Hildreth & Houck dan evidencia empírica de ser Consistentes en ECM. Es decir, mientras que las técnicas MCOII, MCG y MCG2E mejoran sus resultados con respecto al sesgo asintótico, las técnicas MCGHH, MCEA y MCPT compensan esta Consistencia con

una reducción todavía más significativa de la varianza del estimador del coeficiente de respuesta medio de los parámetros aleatorios.

8. Aunque en las pruebas respecto a la Consistencia y el Sesgo los métodos MCEA y MCPT tienen el mismo comportamiento asintótico lo cual estaba previsto en la hipótesis 3.2, es importante resaltar que en las pruebas Asintóticas de Eficiencia en ECM el método MCEA gana en calificación debido a que incorpora mayor información del término errático en la matriz varianza-covarianza $H(\Delta_{MCEA})$ en comparación a MCPT quien presenta ganancias en Eficiencia cuando las varianzas de los parámetros aleatorios son mayores.

RECOMENDACIONES

1. El presente trabajo de investigación, en el marco de un diseño experimental, ha proporcionado criterios que nos permitirán seleccionar con base empírica entre los métodos alternativos cuál se ajusta más a nuestras necesidades específicas en el contexto de un modelo de parámetros aleatorios. Sin embargo, sería muy importante desarrollar un análisis con los datos simulados en el presente estudio para el Método de Máxima Verosimilitud el cual fue excluido del presente estudio debido a los altos requerimientos de programación que exige dicha metodología.
2. Es necesario ampliar los alcances del presente trabajo de investigación estudiando las propiedades muestrales de la varianza del estimador del coeficiente de respuesta medio de los parámetros aleatorios para determinar sus efectos en la precisión con fines puramente predictivos.
3. La hipótesis de los Parámetros Aleatorios fue la base del desarrollo experimental en el presente estudio. A partir de allí, se desarrollaron los escenarios y las respectivas simulaciones. El criterio utilizado en la selección de la matriz varianza-covarianza de los Parámetros Aleatorios se basó en el hecho de que un Δ igual a la matriz cero, en nuestro caso $\det(\Delta)=0$ porque se trató de una matriz diagonal, era equivalente a la hipótesis de parámetros fijos:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n$$

Sin embargo, sería importante desarrollar trabajos respecto a una Prueba de Aleatoriedad de Parámetros Aleatorios de modo que facilite la aplicación de este modelo en trabajos prácticos y que permita

discriminar con sustento estadístico hasta que punto un ' Δ ' estimado cercano a la matriz cero puede considerarse como una varianza de los parámetros aleatorios.

4. Las propiedades muestrales de eficiencia de los diferentes métodos de estimación se realizaron sobre la base de los resultados obtenidos por MCG debido al conocimiento *a priori* de sus propiedades exactas sustentadas por el marco teórico existente. Excluyendo el estimador MCG la evidencia empírica favorece al método MCG2E. Sin embargo, es importante recalcar para futuras investigaciones sobre la base de un diseño experimental o en aplicaciones reales que es posible encontrar estimados de la matriz varianza covarianza de los parámetros aleatorios semidefinida negativa, ver ecuación (2.3.29), sobretudo en muestras pequeñas en donde la estructura del término errático puede ser más relevante que la variabilidad de los parámetros aleatorios. Si este problema se presenta con mucha frecuencia puede ser también un indicador de Error de Especificación del modelo, es decir, que hemos optado por un modelo de Parámetros Aleatorios cuando realmente es de parámetros fijos.
5. En un contexto de parámetros aleatorios con muestras pequeñas es recomendable la utilización del método MCGHH puesto que no presenta el problema de obtener estimados de la varianza-covarianza de los parámetros aleatorios semidefinidos negativos.

BIBLIOGRAFIA

- Breusch, T. S. y Pagan, A. R. (setiembre, 1979) A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation. *Econometrica*. Vol 47 No. 5, pp. 1287-1294.
- Chelliah, Nesan. Random Coefficient Regression Model for Pedigree Analysis. INTER STATS [octubre, 1998].
- Cuxart, A. , Martí, M. y Ferrer, F. (1995) Algunos Factores que inciden en el Rendimiento y en la Evaluación de los Alumnos en las PAAU. *Journal of Economic Literature Classification* [1998, octubre].
- Hausman, Jerry y Taylor, William (noviembre, 1981) Panel Data and Unobservable Individual Effects. *Econometrica*. Vol 49 No.6 pp.1377-1397
- Hausman, Jerry y Wiese, David (marzo, 1979) Attrition Bias in Experimental and Panel Data: The Gary Income Maintenance Experiment. *Econometrica*. Vol. 47 No. 2, pp.455-472
- Heckman, James (enero, 1979) Sample Selection Bias as a Specification Error. *Econometrica* Vol.47 No.1, pp.153-161
- Henderson, Charles (marzo, 1991) Comment on The Use of Error Components Models in Combining Cross Section with Time Series Data. *Econometrica*, Vol 39. No. 2 pp. 397-401
- Hildreth, Clifford y Houck, James (junio, 1968) Some Estimators for a Linear Model with Random Coefficients. *Journal of the American Statistical Association*, pp. 584-595
- Iqbal, Zahid y Dheeriyaa, Prakash. A Comparison of The Market Model and Random Coefficients Model Using Mergers as an Event [Online]. Disponible: <http://som1.csudh.edu/finance/pdheeriyaa/business/zahid.htm> [octubre, 1998].
- Johson, Richard A. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Third Edition. Prentice Hall International Inc. 1992

- Kreft, Ita (1996, enero) Parameters in The Random Slope Model [Online] Disponible: <http://www.calstatela.edu/faculty/ikreft/quarterly/node10.html> [octubre, 1998]
- Lillard, Lee (marzo, 1979) Components of Variation in Panel Earnings Data: American Scientists 1960-70. *Econometrica*. Vol.47 No.2, pp. 437-454
- Maddala, G.S. (marzo, 1971) The Use of Variance Components Models in Pooling Cross Section and Time Series Data. *Econometrica* Vol 39 No 2 pp. 341-357
- Maddala, G.S. (enero, 1971) Generalized Least Squares with an Estimated Variance Covariance Matrix. *Econometrica*. Vol 39 No 1, pp. 23-33
- Maddala, G.S. (noviembre, 1971) The Likelihood approach to Pooling Cross-Section and Time Series Data. *Econometrica*. Vol 39 No 6, pp. 939-952
- Mardia, K.V, *Multivariate Analysis*. Third Edition. Academic Press, Inc. 1982
- Marija J. Norousis. SPSS Advanced Statistics 6+.1 SPSS Inc. 1994
- Marija J, Norousis. SPSS for Windows Professional Statistics Release 6.0 SPSS Inc. 1993
- Montgomery, Douglas C. *Introduction to Linear Regression Analysis*. Second Edition Jhon Wiley & Sons Inc. 1992.
- Mood, A. y Braybill, F. *Introducción a la Teoría de la Estadística*. Tercera Edición, McGraw Hill. 1976.
- Mundlak, Yair (enero, 1978). On The Pooling of Time Series and Cross Section Data. *Econometrica* Vol 46 No 1 pp. 69-85.
- Nerlove, Marc. (marzo, 1971) A Note on Error Components Models. *Econometrica*. Vol 39 No 2 pp. 378-401
- Nerlove, Marc. (marzo, 1971) Further Evidence on the Estimation of Dynamic Economic Relations From A Time Series of Cross Sections. *Econometrica*. Vol 39 No 2, pp. 359-382
- Novalés, Alfonso *Econometría* Segunda Edición McGraw-Hill, 1996
- Raj, Baldev (marzo, 1975) Linear Regression with Random Coefficients: The Finite Sample and Convergence Properties. *Journal of the American Statistical Association*. Vol 70, No 349, pp. 127-137.
- Rao, C.R. *Linear Statistical Models and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons. 1971
- Siegel, Sidney. *Estadística No Paramétrica. Aplicada a las Ciencias de la Conducta*. Primera Edición. Editorial Trillas, 1991.

Swamy, P.A.V.B. *Statistical Inference in Random Coefficient Regression Models*. Springer Verlag, 1971.

Wallace, T.D. Asmiq Hussain. The Use of Error Components Models in Combining Cross Section with Time Series Data. *Econometrica* Vol 37 (1969, enero) pp.55-72