UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“COHOMOLOGÍA ÉTALE Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE GROTHENDIECK-LEFSCHETZ”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR:

Miguel Angel Yépez Veli

ASESOR:

Dr. Joe Albino Palacios Baldeón

LIMA-PERÚ
2019

DEDICATORIA

El presente trabajo va dedicado a mis padres, por su esfuerzo en brindarme una buena educación y enseñarme valores como la responsabilidad y la disciplina, que han sido guías durante mi vida.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por su apoyo incondicional, al IMCA por darme la oportunidad de elaborar el presente trabajo y por las facilidades que me brindaron a lo largo de estos dos años de maestría, en especial al profesor Joe Palacios por su apoyo, paciencia y sugerencias.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo desarrollaremos el teorema de Grothendieck-Lefschetz. La importancia de este teorema radica en que fue el camino para resolver uno de los problemas más significativos del siglo pasado: las conjeturas de Weil. Para lograr este objetivo daremos la construcción de la cohomología étale, la cohomología ℓ-ádica y veremos sus propiedades, de las cuales se deduce el teorema del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz. Finalmente, como aplicación de este teorema se probará una de las conjeturas de Weil, específicamente la que habla sobre la racionalidad de las funciones zeta sobre variedades.

Introducción

El teorema del punto fijo de Lefschetz es un resultado clásico de la topología algebraica, y como todo teorema de puntos fijos, estos nos sirven para encontrar soluciones a ecuaciones. Unas de las ecuaciones más importantes de las matemáticas son las ecuaciones diofánticas, las cuales han maravillado a los matemáticos por siglos. Los resultados que se obtienen con respecto a estas ecuaciones son muy particulares, sin embargo, a principios del siglo pasado Weil demostró algunas propiedades sobre un tipo especial de estas ecuaciones en su artículo titulado "Numbers of solutions of equations in finite fields" y analizando ecuaciones similares sobre ciertas variedades algebraicas conjeturó las llamadas conjeturas de Weil, que versan sobre las propiedades de las funciones zeta sobre variedades; entre dichas propiedades están la racionalidad, la ecuación funcional y el análogo a la hipótesis de Riemann para estas funciones. Estas conjeturas abrieron paso a una gran cantidad de trabajos y artículos en geometría algebraica, especialmente en el grupo de Grothendieck, que acabaron resolviendo definitivamente estas cuestiones. Es en base al trabajo de Grothendieck y sus compañeros que se desarrollan la teoría de haces, la teoría de esquemas, la cohomología étale, los topos, la teoría de motivos y muchas otros objetos, que dieron lugar a una completa revolución en la geometría algebraica.

En el presente trabajo exponemos principalmente la cohomología étale y la fórmula del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz, para probar como aplicación de ellas una de las conjeturas de Weil, que es la que trata sobre la racionalidad de la función zeta sobre variedades. El mérito de Grothendieck para resolver las conjeturas de Weil fue el de adaptar la fórmula del punto fijo de Lefschetz a la teoría de números por medio de los esquemas, fue así como se logró probar las propiedades de las funciones zeta en variedades. Sin embargo la prueba de la racionalidad de las funciones zeta sobre variedades se alcanzó antes con Dwork en 1960 por medio del análisis p-ádico, posteriormente, Grothendieck probó nuevamente la racionalidad y la ecuación funcional mediante la cohomología étale; y finalmente Deligne acabó con las conjeturas de Weil probando el análogo a la hipótesis de Riemann.

A continuación presentaremos la descripción del contenido por capítulos de la presente tesis: en el primer capítulo se desarrolla rápidamente las cuestiones concernientes al álgebra homológica que nos servirán para definir los funtores derivados, en el segundo capítulo daremos un repaso rápido de cuestiones de geometría algebraica que usaremos, tales como los morfismos étale y el producto de intersección, que son vitales en el lenguaje y en los conceptos en los que se expresa la fórmula del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz, así como en la prueba de este resultado; el tercer capítulo esta destinado a ofrecer una construcción rápida de la cohomología étale, la cohomología ℓ-ádica y sus propiedades. El capítulo más importante es el cuarto, en el cual probaremos el teorema del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz y daremos como aplicación de esta la prueba de la racionalidad de las funciones zeta sobre variedades. Finalmente en el último capítulo presentaremos las conclusiones del trabajo además de los proyectos a futuro relacionados con este trabajo.

Capítulo 1

Aspectos de Álgebra Homológica

1.1. Categorías

En el presente texto entendemos a una clase como una familia de conjuntos que no es necesariamente un conjunto, como ejemplo de este concepto tenemos a la clase de los conjuntos (que no es un conjunto). La definición precisa de este concepto descansa sobre los axiomas con los cuales se trabaja, en nuestro caso usamos la axiomática de Von Neumann-Bernays-Godel (NBG); sin embargo, para la lectura de este texto es suficiente tener en mente la noción de clase como una colección que podría ser tan grande que ya no es un conjunto.
El lector curioso puede leer sobre "la paradoja del barbero" de Bertrand Rusell, paradoja que dio lugar a que se fundamente mejor la axiomática de la teoría de conjuntos que se tenía hasta ese entonces. También, de manera complementaria, recomendamos al lector textos sobre teoría de conjuntos que esclarecen mejor todos estos conceptos.

Definición 1.1.1. Una *categoría*, $\mathcal{C}$, esta dada por:

(i) Una clase, llamada *clase de objetos* de $\mathcal{C}$ y denotada por $Obj\,\mathcal{C}$.

(ii) Para cualesquiera $A, B, C \in Obj\,\mathcal{C}$: existe un conjunto, llamado *conjunto de morfismos* entre A y B, denotado por $Hom(A, B)$. Cumpliendo estos conjuntos que $Hom(A, B) = Hom(C, D)$ si y solo si $A = C$ y $B = D$.

(iii) Para cualesquiera $A, B, C \in Obj\,\mathcal{C}$, hay una aplicación:

$$\begin{aligned} \circ : Hom(A, B) \times Hom(B, C) &\longmapsto Hom(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

Llamada *composición de morfismos*, que cumple:

(1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, siempre que las composiciones estén definidas.

(2) Para todo $A \in Obj\mathcal{C}$ existe $Id_A \in Hom(A, A)$ tal que para cualquier $f \in Hom(A, B)$, se tiene $f = Id_B \circ f$ y $f = f \circ Id_A$.

Ejemplo 1.1.1. Como ejemplos de categorías tenemos a muchos de los entes más importantes de las matemáticas, a continuación mencionaremos algunos de ellos.

1. La categoría Set con objetos conjuntos y como morfismos las funciones entre conjuntos.

2. La categoría Gr con objetos grupos y como morfismos los homomorfismo de grupos.

3. La categoría Ab con objetos grupos abelianos y como morfismos sus homomorfismos de grupos.

4. la categoría Rng con objetos anillos y como morfismos los homomorfismo de anillos.

5. Dado un anillo R, las categorías R-Mod y R-Álg, de R-módulos y R-Álgebras con sus respectivos homomorfismos.

6. La categoría Top con objetos espacios topológicos y como morfismos las aplicaciones continuas.

Observación 1.1.1. Cuando haya posibilidad de confusión, denotaremos a $Hom(A, B)$, $\circ$ e Id_A por $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\circ_{\mathcal{C}}$ e $Id_A^{\mathcal{C}}$ respectivamente, para aclarar que estamos trabajando en la categoría $\mathcal{C}$.

Subcategorías

Definición 1.1.2. Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, diremos que $\mathcal{B}$ es una *subcategoría* de $\mathcal{A}$ si:

(*i*) $Obj(\mathcal{B})$ es una subclase de $Obj(\mathcal{A})$.

(*ii*) Para cualesquiera $A, B \in Obj(\mathcal{B})$, tenemos $Hom_{\mathcal{B}}(A, B) \subset Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$.

(*iii*) Para cualesquiera $A, B, C \in Obj(\mathcal{B})$, y para cualesquiera dos morfismos se tiene
$f \in Hom_{\mathcal{B}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{B}}(B, C)$ se tiene $f \circ_{\mathcal{B}} g = f \circ_{\mathcal{A}} g$.

(*iv*) Para cualquier $A \in Obj(\mathcal{B})$ tenemos $Id_A^{\mathcal{B}} = Id_A^{\mathcal{A}}$.

Definición 1.1.3. Decimos que una subcategoría es *llena*, si

$$Hom_{\mathcal{B}}(A, B) = Hom_{\mathcal{A}}(A, B).$$

Ejemplo 1.1.2.

1. La categoría Ab es una subcategoría de la categoría Gr.

2. La categoría $\mathbb{K}$-Vec, de espacios vectoriales, es una subcategoría de la categoría R-Mod.

Observación 1.1.2. *La categoría Gr no es una subcategoría de la categoría Set, ya que un grupo no es un conjunto, sino más bien un par $(G, *)$.*

Definición 1.1.4. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *pequeña*, si $Obj(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Tipos de morfismos

Dada un categoría $\mathcal{C}$ y $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, diremos que un morfismo $f \in Hom(A, B)$ es:

(*i*) *monomorfismo*, si para todo $C \in Obj(\mathcal{C})$ y para cualesquiera dos morfismos $g, h \in Hom(C, A)$ que cumplen $f \circ g = f \circ h$; entonces se tiene, $g = h$.

(*ii*) *epimorfismo*, si para todo $C \in Obj(\mathcal{C})$ y para cualesquiera dos morfismos $g, h \in Hom(B, C)$ que cumplen $g \circ f = h \circ f$; entonces se tiene, $g = h$.

(*iii*) *isomorfismo*, si existe $f \in Hom(B, A)$ tal que $f \circ g = Id_B$ y $g \circ f = Id_A$.

(*iv*) *endomorfismo*, si $A = B$.

(*v*) *automorfismo*, si f es isomorfismo y $A = B$.

Observación 1.1.3. Cuando existe un isomorfismo $f \in Hom(A, B)$, diremos que los objetos A y B son isomorfos en la categoría $\mathcal{C}$.

Proposición 1.1.1. *Dado un isomorfismo en la categoría $\mathcal{C}$, y dados $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ y $f \in Hom(A, B)$, se cumple:*

(*a*) *para todo $C \in Obj(\mathcal{C})$ y para todo $g \in Hom(B, C)$ tal que $g \circ f$ es monomorfismo, entonces se tiene que f es monomorfismo;*

(*b*) *para todo $C \in Obj(\mathcal{C})$ y para todo $g \in Hom(C, A)$ tal que $f \circ g$ es epimorfismo, entonces se tiene que f es monomorfismo;*

(c) *todo isomorfismo f, es también monomorfismo y epimorfismo.*

Demostración. (a) Dados $h_1, h_2 \in Hom(C, A)$ tales que $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Como $g \circ f$ es monomorfismo, se tiene que $h_1 = h_2$. Por tanto, f es un monomorfismo.

(b) Dados $h_1, h_2 \in Hom(B, C)$ tales que $h_1 \circ f = h_2 \circ f$. Como $f \circ g$ es epimorfismo, $h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g)$ implica que $h_1 = h_2$. Por lo tanto f es epimorfismo.

(c) Sean h_1, $h_2 \in Hom(C, A)$ tales que $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Como existe, g tal que $g \circ f = Id_A$, tenemos que $(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2$ implica que $Id_A \circ h_1 = Id_A \circ h_2$ y esto a su vez nos da que $h_1 = h_2$. Por lo tanto f es monomorfismo. De forma análoga se prueba que f es epimorfismo.

□

Observación 1.1.4. Existe morfismos que son monomorfismos y epimorfismos a la vez, pero que no son isomorfismos.
Por ejemplo, $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la inclusión en la categoría Rng.

Proposición 1.1.2. *En la categoría Set se cumple:*

(a) *f es monomorfismo si y solo si es inyectivo.*

(b) *f es epimorfismo si y solo si es sobreyectivo.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ nuestro morfismo.

(a) ($\rightarrow$) Dados f monomorfismo y $f(x_1) = f(x_2)$, sea $\{a\}$ un conjunto unitario, y definimos $u, v : \{a\} \longrightarrow X$ por $u(a) = x_1$, $v(a) = x_2$ tenemos que $f \circ u = f \circ v$, por lo cual $u = v$, evaluando en a, tenemos $x_1 = x_2$ y esto implica que f es inyectiva. ($\leftarrow$) Si f es inyectiva y $f \circ u = f \circ v$, con $u, v : W \longrightarrow X$ tenemos que $f(u(w)) = f(v(w))$ para todo $w \in W$ y por la inyectividad de f, $u(w) = v(w)$, así $u = v$ y por lo tanto f es monomorfismo.

(b) Sea f un epimorfismo y supongamos que no es sobreyectiva, entonces existe $y_0 \in Y - f(x)$, sea $Z = \{a, b\}$ definimos.

$$u : Y \longrightarrow Z, u(y) = a \text{ para todo } y \in Y$$

$$v : Y \longrightarrow Z, v(y) = a \quad \text{si } y \neq y_0, \;\; v(y_0) = b$$

Notemos que $u \circ f = v \circ f$ (ya que $y_0 \notin f(x)$), pero $u \neq v$ y como f es un epimorfismo tenemos una contradicción. Por lo tanto f es sobreyectiva.

Si f es sobreyectiva y $u \circ f = v \circ f$ tenemos que para todo $y \in Y$, existe un $x \in X$ tal que $y = f(x)$, entonces $u(y) = u(f(x)) = v(f(x)) = v(y)$, esto implica que $u = v$. Por lo tanto f es epimorfimo.

$\square$

Tipos de objetos

Dada una categoría $\mathcal{C}$, diremos que un objeto A de $\mathcal{C}$ es:

(i) *inicial*, si para todo $B \in Obj(\mathcal{C})$, existe un único $f \in Hom(A, B)$.

(ii) *final*, si para todo $B \in Obj(\mathcal{C})$, existe un único $f \in Hom(B, A)$.

(iii) *cero*, si es objeto inicial y final a la vez.

Ejemplo 1.1.3. En la categoría Set, el conjunto vacío es un objeto inicial y todo conjunto unitario es un objeto final.
En la categoría Gr, el grupo $\{e\}$ es inicial y final a la vez.

Observación 1.1.5. Dos objetos iniciales son isomorfos y dos objetos finales también son isomorfos. Así el objeto cero es único salvo isomorfismo.

Definición 1.1.5. Sea $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, y $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero O, el morfismo $A \to O \to B$ es llamado *morfismo cero* de A hacia B y lo denotaremos por O_A^B o también por O_{AB}.

Ahora veremos un ejemplo especial de categoría que nos será fundamental en los capítulos posteriores.

Definición 1.1.6. (Categoría tajada)
La categoría tajada de una categoría $\mathcal{C}$ sobre un objeto $c \in \mathcal{C}$ tiene como objetos a los morfismos $f \in \mathcal{C}$ tal que su codominio es c, y tiene como morfismos a los $g : X \longrightarrow X'$, que van de $f : X \longrightarrow c$ hacía $f' : X' \longrightarrow c$ tal que $f' \circ g = f$ en $\mathcal{C}$. Denotamos a esta categoría por $\mathcal{C}/c$.

La noción de categoría tajada la usaremos para definir los sitios posteriormente.

Ejemplo 1.1.4. *Tenemos la categoría de los X-esquemas, que se denota por Sch/X y cuyos objetos son los morfismos de esquemas $Y \to X$.*

1.2. Funtores

La definición del concepto de funtor aparece por vez primera en la topología algebraica, en un principio la utilidad de este concepto fue tomada con cierto escepticismo hasta que posteriormente se encontró muchas aplicaciones en la geometría algebraica y luego a otras ramas de las matemáticas.
La idea de funtor es la de una aplicación entre categorías que envía diagramas conmutativos de una categoría a otra. De manera informal podemos decir que un funtor es un puente que nos permite transformar un problema en una categoría a otro problema, de cierto modo equivalente, en otra categoría donde muchas veces es más fácil de abordar. Podemos poner como ejemplo al funtor que asocia a un espacio topológico sus grupos de homología o cohomología, en este caso el funtor va de la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos y la forma en la que usamos este funtor para distinguir nuestros espacios topológicos, es basándonos en la propiedad de todo funtor, que es llevar isomorfismos en isomorfismos, así que si asociamos a dos espacios topológicos dos grupos por medio de un funtor y si los grupos resultan no ser isomorfos, esto nos quiere decir que los espacios topológicos no son homeomorfos.

Definición 1.2.1. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías, un funtor *covariante* entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es una aplicación $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, que lleva objetos de $\mathcal{A}$ en objetos de $\mathcal{B}$ y transforma morfismos $A \rightarrow B$ en morfismos $\mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(B)$ respetando la composición y la identidad, esto es, $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ y $\mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}$.
Podemos expresar esto en el siguiente diagrama a modo explicativo:

$$\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$A \in Obj(\mathcal{A}) \longmapsto \mathcal{F}(A) \in Obj(\mathcal{B})$$

$$f : A \longrightarrow B \in Hom(A, B) \longmapsto \mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B) \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}$$

Gráficamente

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] & \\ B \arrow[rr, "g"'] & & C \arrow[ul, "g \circ f"'] \end{tikzcd} \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{tikzcd} & \mathcal{F}(A) \arrow[dl, "\mathcal{F}(f)"'] & \\ \mathcal{F}(B) \arrow[rr, "\mathcal{F}(g)"'] & & \mathcal{F}(C) \arrow[ul, "\mathcal{F}(g \circ f)"'] \end{tikzcd}$$

$$Id_A \longrightarrow Id_{\mathcal{F}(A)}$$

Análogamente, el funtor $\mathcal{F}$ se dice *contravariante*, cuando invierte la composición. Para visualizarlo mejor tenemos el siguiente diagrama:

$$\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$A \in Obj(\mathcal{A}) \longmapsto \mathcal{F}(A) \in Obj(\mathcal{B})$$

$$f : A \longrightarrow B \in Hom(A, B) \longmapsto \mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(A) \in Hom(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A))$$

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$$

$$\mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ B \arrow[rr, "g"'] & & C \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \begin{tikzcd} & A & \\ B \arrow[ur, "\mathcal{F}(f)"] & & C \arrow[ul, "\mathcal{F}(g\circ f)"'] \arrow[ll, "\mathcal{F}(g)"] \end{tikzcd}$$

$$Id_A \quad \longrightarrow \quad Id_{\mathcal{F}(A)}$$

1.3. Complejos de cadena

Definición 1.3.1. Dada una categoría $\mathcal{C}$ con objeto Cero. Un *complejo de cadenas* $A_\bullet$ es una sucesión de objetos $(A_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ y morfismos entre ellos $d_i : A_i \to A_{i-1}$, llamados diferenciales, tales que $d_{i-1} \circ d_i = 0$, o en otras palabras $Im(d_i) \subset Ker(d_{i-1})$.

$$\cdots \to A_{i+1} \to A_i \to A_{i-1} \to \cdots$$

De forma dual tenemos a un *complejo de cocadenas* $A^\bullet$ que es una sucesión de objetos $(A_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ y morfismos entre ellos $d_i : A_i \to A_{i+1}$, llamados diferenciales, tales que $d_{i+1} \circ d_i = 0$, o en otras palabras $Im(d_i) \subset Ker(d_{i+1})$.

$$\cdots \to A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots$$

Observación 1.3.1. Que la composición de dos morfismos sea cero, se refiere a que esta composición es el morfismo cero y al tener la categoría el objeto cero, esto es admisible.

Definición 1.3.2. Un *morfismo de complejos* de cadena $\varphi : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ es un conjunto de morfismos tales que $\varphi \circ d^C = d^D \circ \varphi$, donde d^C denota al diferencial en C y d^D al diferencial en D.
Así un morfismo de cadenas es una familia indexada en los enteros $\{\varphi_n : C_n \longmapsto D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de morfismos tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "d_n^C"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\
D_n \arrow[r, "d_n^D"'] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Definición 1.3.3. La *composición de morfismos* $\varphi : C \longrightarrow D$ y $\psi : D \longrightarrow E$ de complejos de cadenas es el morfismo $\psi \circ \varphi : C \longrightarrow E$ que cumple $\psi \circ \varphi \circ d^C = d^D \circ \psi \circ \varphi$.

Definición 1.3.4. Dada una categoría $\mathcal{C}$, tenemos una categoría $\mathcal{C}$-Ch cuyos objetos son los complejos de cadenas y cuyos morfismos son precisamente los morfismos entre complejos de cadenas. De forma análoga tenemos la categoría $\mathcal{C}$-$coCh$ de cocadenas.

Homotopía de cadenas

Cuando tenemos complejos de cadenas (o cocadenas) tenemos una relación de isomorfismo entre estos, sin embargo, muchas veces no se tiene el isomorfismo de cadenas pero si se tiene un isomorfismo entre los grupos de cohomología que surgen a partir de ellos, y sobre esto hablaremos en esta sección.

Definición 1.3.5. Dados dos complejos de cocadenas $(A^\bullet, d)$ y $(B^\bullet, \hat{d})$ sobre una categoría $\mathcal{C}$ y dos aplicaciones $\alpha,\ \beta : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$, una *homotopía* de cadenas entre α y β es una colección de morfismos $F^i : A^i \longrightarrow B^{i-1}$ tales que $\alpha - \beta = Fd + \hat{d}F$. Graficamente:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "F^{n-1}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & A^{n} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "F^{n}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "F^{n+1}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \cdots \arrow[dl, dashed] \\
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r] & B^{n} \arrow[r] & B^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.3.1. *Si α y β son homotopicos entonces inducen la misma aplicación en cohomologías.*

Demostración. Ver Weibel [11]. □

1.4. Categorías abelianas

Las categorías abelianas son un tipo de categorías que tienen propiedades especiales y análogas a las propiedades de la categoría de grupos abelianos. Notemos que en la categoría de grupos abelianos, al igual que en la categoría de R-módulos, tenemos sucesiones exactas, el kernel y el cokernel, la imagen de un morfismo, productos, etc; y estos conceptos nos dan una teoría rica para desarrollar el álgebra homológica en estas categorías, entonces la idea es capturar algunas propiedades análogas a las propiedades de la categoría de R-módulos para desarrollar una teoría homológica y cohomológica y precisamente eso haremos en esta sección.

Kernel y Cokernel

En este apartado nuestra categoría $\mathcal{C}$ tiene objeto cero.
Conocemos estos conceptos para distintos objetos algebraicos, esta idea será generalizada para el caso de categorías.
Recordemos que en la categoría de grupos el $Ker(f)$, donde $f \in hom(A, B)$, es

$$kerf := \{x \in A / f(x) = e_B, \text{ donde } e_B \text{ es el neutro de } B\}.$$

También podemos escribir $Ker(f) = f^{-1}(e_b)$. Pero para el caso de las categorías no tenemos necesariamente el neutro, por lo cual trabajaremos con los morfismos.
Cuando $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo, la denotaremos por $f : A \hookrightarrow B$ o por $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$. De esta manera en lugar de decir que $ker(f)$ es subgrupo de A, que cumple $ker(f) = f^{-1}(e_B)$, podemos escribir así:

Sea $f : A \longrightarrow B$, si existe un monomorfismo $K : Kerf \hookrightarrow A$ tal que en el siguiente diagrama se cumple:

$$
\begin{tikzcd}
Kerf \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend left, "0^B_{Kerf}"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
L \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "0^B_L"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(I) $f \circ k = 0^B_{Kerf}$

(II) Sea $g : L \longrightarrow A$, si $f \circ g = 0^B_L$ entonces $g = K \circ h$ para algún $h : L \longrightarrow Kerf$ (esta segunda propiedad nos garantiza la "maximalidad" del kernel).

Cuando existe este monomorfismo $K : Kerf \hookrightarrow A$, diremos que f posee kernel.

Observación 1.4.1. Notemos que no toda categoría tiene objeto cero, por lo cual tampoco tiene kernel; sin embargo no es difícil darse cuenta que cuando existe $Kerf$ es único salvo isomorfismos.

Ejemplo 1.4.1. Las categorías *Gr*, *Ab*, *Rng*, *R-Mod*, *R-Alg* tienen por kernel al usual que definimos en ellos, que es $f^{-1}(e)$.

Definimos ahora, de manera análoga al Coker de un morfismo f en una categoría $\mathcal{C}$ con objeto cero.
Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo, si existe $P : B \longrightarrow Coker(f)$ epimorfismo, que cumple:

(I) $p \circ f = 0_A^{Coker(f)}$

(II) Sea $g : B \longrightarrow L$, si $g \circ f = 0^L_A$ entonces $g = h \circ P$ para algún $h : Coker(f) \longrightarrow L$.

Se dice que f tiene Cokernel y este es $Coker(f)$.
Gráficamente

$$\begin{tikzcd}
Coker f \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, "g"] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dll, "0_A^L"] \arrow[ll, bend right, "0_A^{Coker f}"'] \\
L & &
\end{tikzcd}$$

No es difícil notar que cuando existe el $Coker f$, este es único salvo isomorfismo.

Observación 1.4.2. Usualmente llamaremos a $Ker f$ al Kernel de f y a $Coker f$ al Cokernel de f,

Proposición 1.4.1. *Sea C un categoría con objeto cero, entonces:*

(*a*) *Si $f \in Hom(A, B)$ es monomorfismo, entonces $Ker f = 0$.*

(*b*) *Si $f \in Hom(A, B)$ es epimorfismo, entonces $Coker f = 0$.*

Demostración. (*a*) Probaremos que existe un monomorfismo $Ker f \xrightarrow{Ker(f)} A$ y para esto tomaremos $Ker(f) = 0$, como el objeto cero de C y a K como el monomorfismo que va de 0 a A.
Ahora sea $g : W \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = 0_W^Y$ y $f \circ 0_0^X \circ 0_W^0 = 0_W^Y$, por ser f monomorfismo tenemos que $g = 0_0^X \circ 0_W^0 = 0_W^X$ luego podemos considerar $h : W \longrightarrow 0$ como el único morfismo que va de W a 0, que es 0_W^0, por lo tanto $Ker f = 0$.

(*b*) Análoga a la anterior.

□

Categoría Abelianas

Definición 1.4.1. Una $Ab-$categoría, es una categoría en la que cada $Hom(A, B)$ es un grupo abeliano (estamos considerando una categoría localmente pequeña) y la composición es lineal relativamente a la operación del grupo, esto es:

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h; f, g \in Hom(B, C) \text{ y } h \in Hom(A, B)$$

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h; f \in Hom(B, C) \text{ y } g, h \in Hom(A, B)$$

Cada grupo abeliano $Hom(A, B)$ tiene un elemento $\mathcal{O} : A \longrightarrow B$ (este elemento no necesariamente 0_A^B ya que en principio la categoría puede no tener elementos ceros).

Proposición 1.4.2. *Las siguientes propiedades de un objeto z un una $Ab-$categoría son equivalentes:*

(*a*) *z es inicial.*

(*b*) *z es terminal.*

(*c*) $Id_z = 0 : z \longrightarrow z$.

(*d*) *El grupo abeliano $Hom(z, z)$ es el grupo cero.*

En particular, todo objeto inicial (o terminal) es objeto zero.

Demostración. Si z es inicial, existe un único morfismo $z \longrightarrow z$; luego $Id_z = 0$ y $Hom(z, z) = \{0\}$, como $Hom(z, z)$ tiene un solo elemento entonces z es inicial. □

Observación 1.4.3. Cuando existe elemento cero, el elemento nulo del grupo $Hom(A, B)$ coincide con 0_A^B.

Definición 1.4.2. Un biproducto para los objetos $A, B \in \mathcal{C}$, es un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend right, "i_1"'] & C \arrow[l, bend right, "P_1"'] \arrow[r, bend right, "i_2"'] & B \arrow[l, bend right, "P_2"'] \end{tikzcd}$$

Que satisface:

$$P_1 \circ i_1 = Id_A,\ P_2 \circ i_2 = Id_B,\ i_1 \circ P_1 + i_2 \circ P_2 = Id_C.$$

Proposición 1.4.3. *Dos objetos A, B en una $Ab-$categoría $\mathcal{C}$ tienen productos en $\mathcal{C}$ si y solo si tiene un biproducto en $\mathcal{C}$. Específicamente, dado un diagrama del biproducto, el objeto C con la proyección P_1 y P_2 es un producto de A y B, mientras que C con i_1 e i_2 es un coproducto. En partícular, dos objetos A y B tienen un producto en $\mathcal{C}$ si solo si tiene un coproducto $\mathcal{C}$.*

Demostración. Ver Weibel [11]. □

Definición 1.4.3. Una categoría *aditiva* es una $Ab-$categoría que tiene objetos ceros y biproductos para cualesquiera $A, B \in Obj(\mathcal{C})$.

Ejemplo 1.4.2. Las siguientes categorías son aditivas:

1. La categoría *Ab* es aditiva.

    (I) El objeto cero es el grupo $\{e\}$.

(II) $Hom(A, B)$ es un grupo abeliano.

(III) La composición es bilineal respecto a la adición.

(IV) Si A, B son grupos abelianos, el productos $A \times B$ también lo es.

2. La categoría $R-$Mód es aditiva.

(I) El objeto cero es $\{0\}$.

(II) $Hom(A, B)$ es un grupo aditivo.

(III) La composición es bilineal respecto a la adición.

(IV) Si A, B son $R-$módulos, el producto $A \times B$ también los es.

Definición 1.4.4. Una categoría abeliana es una categoría aditiva que satisface lo siguiente:

(*i*) Todo morfismo tiene kernel y cokernel.

(*ii*) Todo monomorfismo es un kernel y todo epimorfismo es un cokernel.

En las categorías abelianas se cumple propiedades que son bastantes similares a las propiedades de la categoría de grupos abelianos.

Observación 1.4.4. Se puede mostrar también que todo monomorfismo es kernel de su cokernel y cada epimorfismo es el cokernel de su kernel. El lector interesado puede encontrar la prueba en [11].

Proposición 1.4.4. *En una categoría abeliana $\mathcal{C}$, toda morfismo f tiene una factorización $m \circ e$, donde m es un monomorfismo y e es un epimorfismo, más aún:*

$$m = ker(coker f), \ e = coker(ker f)$$

Demostración. Ver el libro Categorias for the working of a mathematician de Saunder Mac Lane [6]. □

Definición 1.4.5. Sea $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $Ab-$categorías, un funtor *aditivo* $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor de $\mathcal{A}$ hacia $\mathcal{B}$ que cumple:

$$T(f + f') = T(f) + T(f')$$

para cualesquiera f y f' morfismos en $\mathcal{A}$. Se sigue que $T(0) = 0$.

Proposición 1.4.5. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $Ab-$categorías, con $\mathcal{A}$ teniendo siempre biproductos, y si $T : A \longmapsto B$ es aditivo, entonces T lleva el biproductos de A en biproductos de B.*

Demostración. Es directa de las propiedades de los biproductos y de la aditividad de T. □

Ejemplo 1.4.3.

1. Si $\mathcal{A}$ es una $Ab-$categoría localmente pequeña, el funtor

$$Hom(A, \_) : \mathcal{A} \longrightarrow Ab$$

y el funtor

$$Hom(\_, A); \mathcal{A}^{op} \longmapsto Ab$$

son funtores aditivos.

2. Si A y B son $Ab-$categorías, también lo es $A \times B$, y las proyecciones $A \times B \longmapsto A$, $A \times B \longmapsto B$ son funtores aditivos.

Proposición 1.4.6. *Un funtor aditivo $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías abelianas cumple que para cualesquiera $A, A' \in Obj(\mathcal{A})$, la aplicación inducida $Hom_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow Hom_{\mathcal{B}}(T(A), T(A'))$ es un homomorfismo de grupo abelianos.*

Demostración. La prueba es directa de la definición. □

En las categorías abelianas también se cumple el famoso Lema de la serpiente.

Lema 1.4.1. (de la serpiente) *En una categoría abeliana, sea al diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

donde las filas son sucesiones exactas. Entonces existe un morfismo natual $d : Ker(c) \longmapsto Coker(a)$ que nos da la sucesión exacta,

Demostración. Su prueba es totalmente análoga al caso clásico. □

$$\begin{tikzcd}
 & \ker a \arrow[r] \arrow[d] & \ker b \arrow[r] \arrow[d] & \ker c \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "d"] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} a \arrow[r] & \operatorname{coker} b \arrow[r] & \operatorname{coker} c &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.4.6. Sea $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor, este se dice que es exacto por la izquierda si lleva la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(C)$$

Similarmente, se dice que un funtor es exacto por la derecha si lleva a la sucesión exacta inicial en la sucesión exacta

$$\mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(C) \longrightarrow 0.$$

Objetos de cohomología

Definición 1.4.7. Sea $(A^\bullet, d)$ un complejo de cocadenas. Se define el enésimo objeto de *cohomología* como

$$H_n(A^\bullet, d) = Coker(\alpha_n) = Ker(\beta_n)$$

donde $\alpha_{n-1} : A^{n-1} \longrightarrow Ker(d^n)$ y $\beta_n : Coker(d^{n-1}) \longrightarrow A^{n+1}$ son las aplicaciones que hacen conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & Coker(d^{n-1}) \arrow[dr, dotted, "\beta_n"] & & \\
\cdots \arrow[r, "d^n"] & A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dr, dotted, "\alpha_{n-1}"] & A^n \arrow[u] \arrow[r, "d^n"] & A^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & \cdots \\
 & & Ker(d^n) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.4.5. Notemos que para la buena definición del objeto de cohomología requerimos que $Coker(\alpha_n)$ sea isomorfo a $Ker(\beta_n)$, lo cual efectivamente se verifica. Ver [6].

1.5. Inyectivos y proyectivos

En esta sección daremos los conceptos de objetos inyectivos y proyectivos que nos servirán para poder definir los funtores derivados.

Definición 1.5.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un objeto I de $\mathcal{C}$ se dice *inyectivo* si para cualquier monomorfismo $i : A \longrightarrow B$ y cualquier morfismo $\phi : A \longrightarrow I$, existe un morfismo $\hat{\phi} : B \longrightarrow I$, tal que $\hat{\phi} \circ i = \phi$.

Definición 1.5.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un objeto P de $\mathcal{C}$ se dice *proyectivo* si para cualquier epimorfismo $\pi : A \longrightarrow B$ y cualquier morfismo $\phi : P \longrightarrow B$, existe un morfismo $\hat{\phi} : P \longrightarrow A$, tal que $\pi \circ \hat{\phi} = \phi$.

Definición 1.5.3. Dada una categoría abeliana $\mathcal{C}$, se dice que $\mathcal{C}$ *tiene suficientes inyectivos* si para todo A objeto de $\mathcal{C}$, existe un objeto inyectivo I de $\mathcal{C}$ y un monomorfismo $\psi : A \longrightarrow I$.
Decimos que $\mathcal{C}$ *tiene suficientes proyectivos* cuando para todo objeto B de $\mathcal{C}$, existe un objeto proyectivo P de $\mathcal{C}$ y un epimorfismo $\phi : P \longrightarrow B$.

Proposición 1.5.1. *Un objeto P es proyectivo si y solo si el funtor $Hom(P, \_)$ es exacto. Un objeto I es inyectivo si y solo si el funtor $Hom(\_, I)$ es exacto.*

Demostración. Ver [11]. $\square$

Definición 1.5.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Una *resolución inyectiva* de A es un complejo de cocadenas $(I^\bullet, d)$ y un monomorfismo $d_0 : A \longrightarrow I_0$ tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots$$

es exacta.
Análogamente una *resolución proyectiva* de A es un complejo de cadenas $(P_\bullet, d)$ y un epimorfismo $d_0 : P_0 \longrightarrow A$ tal que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

es exacta.

En algunas categorías los objetos proyectivos e inyectivos están perfectamente caracterizados. Veremos esta caracterización en los módulos.

Ejemplo 1.5.1. (1) Un R-módulo P es proyectivo si y solo si es sumando directo de un módulo libre.

(2) Un R-módulo I es inyectivo si y solo si para cada ideal J de R, todo homomorfismo de R-módulos $\phi : J \longrightarrow I$ se extiende a un homomorfismo de R-módulos $\hat{\phi} : R \longrightarrow I$.

Observación 1.5.1. La categoría de R-módulos tiene suficientes proyectivos y la categoría Ab tiene suficientes inyectivos.

Proposición 1.5.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con suficientes inyectivos, entonces todo objeto tiene una resolución inyectiva. Análogamente, si $\mathcal{C}$ tiene suficientes proyectivos, entonces todo objeto tiene una resolución proyectiva.*

Demostración. Ver [11]. □

1.6. Funtores derivados

Definición 1.6.1. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas, y supongamos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos y suficientes proyectivos. Sea $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor exacto por la izquierda, definimos el k-ésimo *funtor derivado de $\mathcal{F}$ por la derecha*, $\mathcal{R}^k\mathcal{F}$ como el funtor que a cada objeto A le hace corresponder $H^k(\mathcal{F}(I^\bullet))$, donde $A \longrightarrow I^\bullet$ es una resolución inyectiva de A.

Si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor exacto por la derecha, definimos el k-ésimo *funtor derivado de $\mathcal{F}$ por la izquierda*, $\mathcal{L}_k\mathcal{F}$ como el funtor que a cada objeto A le hace corresponder $H_k(\mathcal{F}(P_\bullet))$, donde $P_\bullet \longrightarrow A$ es una resolución proyectiva de A.

Observación 1.6.1. Como podemos apreciar la definición de los funtores derivados depende de la resolución inyectiva o proyectiva que se tome, sin embargo estos funtores están bien definidos ya que se puede probar que cualquiera resolución que se tome estas nos darán los mismos grupos de cohomología.

Ejemplo 1.6.1. El funtor derivado del funtor Hom es el funtor Ext y el funtor derivado del funtor producto tensorial es el funtor Tor.

Proposición 1.6.1. *Si $\mathcal{F}$ es un funtor exacto por derecha entonces se cumple que $\mathcal{R}^0\mathcal{F} = \mathcal{F}$ y si fuese exacto por izquierda tendríamos que $\mathcal{L}_0\mathcal{F} = \mathcal{F}$.*

Demostración. Ver [11]. □

Proposición 1.6.2. *Si $\mathcal{I}$ es un objeto inyectivo, se tiene que $\mathcal{R}^k\mathcal{I} = 0$ para todo $k > 0$, análogamente si P es un objeto proyectivo, entonces $\mathcal{L}_k\mathcal{P} = 0$ para todo $k > 0$.*

Demostración. Ver [11]. □

Capítulo 2

Aspectos de geometría algebraica

Los morfismos étale son una parte fundamental del aporte de Grothendieck a las matemáticas, la formulación de este concepto proviene de la geometría diferencial, la teoría algebraica de números y de la geometría algebraica. Para definir lo que es un morfismo étale, necesitaremos dos definiciones previas, estas definiciones son la de morfismo plano y la de morfismo no-ramificado. Luego hablaremos un poco sobre la teoría de la intersección para poder definir el producto de intersección que nos será de gran utilidad a la hora de probar el teorema del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz. En esta sección supondremos que el lector posee conocimientos generales de geometría algebraica y álgebra conmutativa, y mencionaremos brevemente los resultados que necesitaremos para las siguientes secciones. Remitiremos al lector interesado a los textos clásicos de geometría algebraica, tales como el Harsthorne [5] y el de Milne [10]. En la parte de álgebra conmutativa referimos los libros de Atiyah [1] y el de Matsumura [7] y por último sobre teoría de intersección referimos al libro de Fulton [4].

2.1. Morfismos planos

La noción de morfismos planos proviene del álgebra y es muy importante en geometría; es de las pocas nociones que no tienen una visualización geométrica tan evidente, sin embargo son de vital importancia. Para entender un poco más este concepto parafrasearemos a Mummford, cuando menciona a la planitud en su Libro Rojo de las Variedades y los Esquemas:

"The concept of flatness is a riddle that comes out of algebra, but which technically is the answer to many prayers".

Definición 2.1.1. Un morfismo de anillos $A \to B$ se dice que es *plano* si B es un A-módulo plano.

Definición 2.1.2. Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ se dice que es *plano*, si el morfismo inducido en los tallos $f_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ es un morfismo de anillos plano, para todo punto x en X.

Proposición 2.1.1. *Las siguientes propiedades se cumplen para morfismos planos:*

(a) *La composición de dos morfismos planos es también un morfismo plano.*

(b) *La planitud es preservada por el cambio de base.*

(c) *Toda inmersión abierta es plana.*

Ejemplo 2.1.1. Sea $A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Entonces $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es plano si y solo si $A \longrightarrow B$ es plano.

Ejemplo 2.1.2. El morfismo estructural $X \longrightarrow \mathrm{Spec(k)}$ de una variedad algebraica sobre k es plano.

Proposición 2.1.2. *Sean V y W variedades irreducibles no singulares, entonces $\phi : V \to W$ es plano si y solo si*

$$dim(\phi^{-1}(Q)) = dim(V) - dim(W)$$

para todo $Q \in W$.

Demostración. Ver [10]. □

Ejemplo 2.1.3. La inclusión de un subesquema cerrado es plano si y solo si el subesquema es una componente conexa.

Proposición 2.1.3. *Sean X e Y variedades, Y es suave de dimensión 1, entonces $f : X \to Y$ es plano si y solo si la imagen de toda componente irreducible de X es densa en Y.*

Demostración. Ver [5]. □

Ejemplo 2.1.4. El morfismo $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ que lleva $x \mapsto x^2$ es plano.

Ejemplo 2.1.5. El morfismo $f : \mathbb{A}^2 \to V(x_1x_3 - x_2^2) \subset \mathbb{A}^3$ que lleva $(x, y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$ no es plano.

2.2. Morfismos no-ramificados

La noción de morfismos no-ramificados de esquemas proviene del concepto no-ramificado en extensión de cuerpos, y esta a su vez es de gran utilidad en la teoría algebraica de números.

Definición 2.2.1. Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ localmente de tipo finito se dice que es *no-ramificado*, si para todo $x \in X$ tenemos que $\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$ y el morfismo inducido en los cuerpos residuales

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$$

es una extension finita y separable.

Proposición 2.2.1. Las siguientes propiedades se cumplen para morfismos no-ramificados:

(*a*) La composición de dos morfismos no-ramificados es también no-ramificado.

(*b*) La no-ramificación es preservada por el cambio de base.

(*c*) Toda inmersión cerrada es no-ramificada.

Ejemplo 2.2.1. Sea $L|K$ una extensión finita de cuerpos. Entonces $\mathrm{Spec}(L) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ es no-ramificado si y solo si la extensión es separable.

Ejemplo 2.2.2. Sea $L|K$ una extensión de cuerpos numéricos, y sean $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K$ sus respectivos anillos de enteros, entonces el morfismo inducido $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ es plano. Esta es la noción usual de no-ramificado en teoría algebraica de números.

2.3. Morfismos étale

Definiremos ahora una de la nociones más importantes de la geometría algebraica: los morfismos étale, estos fueron definidos por Grothendieck y el nombre se refiere a que son en cierto modo suaves; su construcción vino a solucionar las conjeturas más importantes en su tiempo llamadas las conjeturas de Weil.

Definición 2.3.1. Un morfismo de esquemas que es plano y no-ramificado se llama morfismo *étale.*

Proposición 2.3.1. *Las siguientes propiedades se cumplen para morfismos étale:*

(*a*) *La composición de dos morfismos étale es también étale.*

(*b*) *La propiedad de ser étale es preservada por el cambio de base.*

(*c*) *Toda inmersión abierta es étale.*

(*d*) *Si $f \circ g$ es étale y f es étale, entonces también lo es g.*

Proposición 2.3.2. *Sean V y W variedades algebraicas no singulares sobre k. El morfismo $f : V \to W$ es étale si y solo si $df : T_vV \to T_{f(v)}W$, el morfismo inducido en los espacios tangentes, es un isomorfismo para todo punto $v \in V$.*

Ejemplo 2.3.1. El morfismo $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ que lleva $x \mapsto x^n$ no es étale en ningún punto si la característica del cuerpo es n y es étale en todo x no nulo en el otro caso.

Ejemplo 2.3.2. Sea $L|K$ una extensión de cuerpos separable y finita $X = \mathrm{Spec}(L)$, $Y = \mathrm{Spec}(K)$, $K \hookrightarrow L$ induce un morfismo $f : X \to Y$, este morfismo es étale.

Ejemplo 2.3.3. La proyección de $\mathrm{Spec}(K[x,y]/(x-y^2))$ en $\mathrm{Spec}(K[x])$ es un morfismo plano, pero no es étale.

Ejemplo 2.3.4. La proyección de $\mathrm{Spec}(K[x,y]/(x-y^2)) - \{\mathfrak{p}_{(0,0)}\}$ en $\mathrm{Spec}(K[x]) - \{\mathfrak{p}_0\}$ es un morfismo étale, donde $\mathfrak{p}_{(0,0)}$ y $\mathfrak{p}_0$ son los ideales primos asociados a los puntos cerrados $(0,0)$ y 0.

2.4. Ciclos y producto de intersección

Con el desarrollo de la cohomología ℓ-ádica, las conjeturas de Weil se redujeron a consecuencias formales de propiedades sobre la teoría de ciclos algebraicos, y en esta sección hablaremos sobre esto.

Ciclos algebraicos

En esta sección veremos conceptos sobre teoría de intersección que nos serán fundamentales posteriormente: Sea X una variedad no-singular sobre k. Un ciclo primo sobre X es una subvariedad irreducible y cerrada. Sea $C^r(X)$ el grupo abeliano libre generado por los ciclos primos de codimensión r, sus elementos son llamados ciclos algebraicos de codimensión r en X. Así $C^1(X) = \mathrm{Div}(X)$.
Y consideremos $C^*(X) = \bigoplus_{r \geqslant 0} C^r(X)$.
Dos subesquemas cerrados e integrales Z, W de X se dice que se intersectan propiamente si toda componente Y de $Z \cap W$ tiene codimensión

igual a la suma de codimensiones de Z y W. Cuando Z y W se intersectan propiamente, su producto de intersección es el ciclo definido por

$$(Z.W) = \sum \mu(Y; Z, W)Y$$

donde $\mu(Y; Z, W)$ es la multiplicidad de intersección. Este producto se extiende sobre $C^*(X)$ y cumple asociatividad y conmutatividad.

Existe una noción llamada equivalencia racional de ciclos, sin embargo, en el presente trabajo no la desarrollaremos, para ello referimos al lector al libro de Hartshorne [8], apéndice A y al libro de Fulton, Intersection Theory [9], esta equivalencia racional llega a ser una relación de equivalenccia.

El cociente $CH^*(X)$ de $C^*(X)$ por la relación de equivalencia racional da lugar a un anillo con el producto de intersección. Este anillo es llamado anillo de Chow.

Capítulo 3

Cohomología étale

Uno de los problemas que aparecen cuando trabajamos con la topología de Zariski es que es demasiado gruesa para nuestros propósitos, y no nos da suficiente información; por ejemplo cuando X es una variedad irreducible un teorema de Grothendieck nos dice que los grupos de cohomología con la topología de Zariski, $H^r(X, \mathcal{F})$, se anulan para cualquier haz constante y para todo $r > 0$; es por ello que requerimos otra "topología" lo suficientemente fina para que con ella definamos nuestros haces y usemos la poderosa herramienta de la cohomología de haces. Para esto notemos que lo que en realidad lo que necesitamos son haces y no necesariamente una topología propiamente dicha y esto nos lleva a relajar nuestros requerimientos a fin de obtener una cohomología de haces. El concepto de "sitio" es el que surge para resolver este problema, este concepto fue introducido por Grothendieck y ha sido bastante revolucionario, en la actualidad es uno de los conceptos fundamentales en geometría algebraica y esta bastante ligado al concepto de topología de Grothendieck, el cual, en cierto modo generaliza nuestro concepto usual de topología.

3.1. Sitios

Consideremos la clase M de morfismos que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Todos los isomorfismos están en M.

(ii) La composición de dos morfismos en M también esta en M.

(iii) Todo cambio de base de un morfismo en M también esta en M.

Un morfismo en la clase M se llamará M-morfismo. La subcategoría llena de Sch/X (esta es la "categoría tajada"que definimos en el primer capítulo), cuyos morfismos estructurales son los M-morfismos será representada por M/X.

Ejemplo 3.1.1. Veamos ahora ejemplos de tales clases de morfismos:

(i) La clase $M = Zar$ de las inmersiones abiertas.

(ii) La clase $M = ét$ de morfismos étales de tipo finito.

(iii) La clase $M = fl$ de morfismos planos que son localmente de tipo finito.

Definición 3.1.1. Dado un esquema X y una clase M de M-morfismos. Sea C/X una subcategoría llena de Sch/X tal que C/X es cerrada bajo cambio de base y para todo morfismo $f : Y \to X$ en C/X y para todo M-morfismo $g : U \to Y$, se tiene que la composición $f \circ g : U \to X$ está en C/X. Tenemos las siguientes definiciones:

(*i*) Un *M-cubrimiento* de un objeto Y de C/X es una familia $(g_i : Y_i \to Y)_{i\in I}$ de M-morfismos tal que $Y = \bigcup_{i\in I} g_i(U_i)$. La clase de tales objetos es llamada una M-topología en C/X.

(*ii*) La categoría C/X junto con los M-morfismos es llamado un *M-sitio* sobre X y lo denotaremos como $(C/X)_M$ o simplemente como X_M.

(*iii*) El *M-sitio pequeño* en X es $(M/X)_M$, en el caso que todos los M-morfismos son localmente de tipo finito.

El sitio de Zariski X_{Zar} es el (Zar)-sitio pequeño, el sitio étale $X_{ét}$ es el *ét*-sitio pequeño y el sitio plano X_{fl} es el (fl)-sitio grande.

Observación 3.1.1. La importancia del producto fibrado en esta definición se debe a que este concepto generaliza la idea usual de intersección en el caso de una topología usual.

Observación 3.1.2. Podemos pensar en un sitio pequeño como el análogo a un espacio topológico. Notemos también que el (Zar)-sítio se puede ver como la topología de Zariski mediante la identificación de toda inmersión abierta con su imagen.

Proposición 3.1.1. *La categoría C/X, junto con la familia de M-cubrimientos, satisfacen lo siguiente:*

(*a*) *Si* $f : V \to U$ *es un isomorfismo en* C/X*, entonces es un cubrimiento de* U.

(*b*) *Si* $(f_i : U_i \to U)_i$ *es un cubrimiento, y, para cada* i,
$(f_{ij} : V_{ij} \to U_i)_j$ *es un cubrimiento, entonces* $(f_{ij} : V_{ij} \to U_i)_{i,j}$ *es un cubrimiento.*

(*c*) *Si* $(f_i : U_i \to U)_i$ *es un cubrimiento, entonces para todo morfismo* $(g : V \to U)$ *en* C/X,

$$(f_i \times_U g : U_i \times_U V \to U)_i$$

es un cubrimiento.

3.2. Haces

Definición 3.2.1. Un *prehaz* P de grupos abelianos en un sitio $(C/X)_M$ es un funtor contravariante $C/X \to Ab$. Así P asocia a cada U in C/X un grupo abeliano $P(U)$, que algunas veces se escribe como $\Gamma(U, P)$ y cuyos elementos se conocen como secciones de P en U. Un morfismos de prehaces $\phi : P \to P'$ es simplemente un morfismo de funtores $\phi : P \to P'$.

Los prehaces y morfismos de prehaces sobre $(C/X)_M$ forman una categoría $P(X_M) = P((C/X)_M)$, que hereda la propiedad de Ab de ser una categoría abeliana.

Ejemplo 3.2.1. Sea X_M un M-sitio. tenemos los siguientes haces especiales:

1. Prehaz constante: Dado un grupo abeliano A, el prehaz constante P_A en X_A es definido por $P_A(U \to X) = A$ para todo U no vacío, y $P_A(f) = Id_A$ para todo f.

2. Prehaz $\mathbb{G}_a$: Esta dado por $\mathbb{G}_a(U \to X) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ visto como grupo aditivo, y para todo morfismo $f : U \to U'$, $\mathbb{G}_a(f)$ es el morfismo inducido por f, $\Gamma(U', \mathcal{O}_{U'}) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$.

3. Prehaz $\mathbb{G}_m$: Esta dado por $\mathbb{G}_m(U \to X) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$ y para todo morfismo f las restricción natural inducida.

Definición 3.2.2. Un prehaz P en X_M se dice que es un *haz* si satisface:

1. Si $s \in P(U)$ y existe un cubrimiento $(U_i \to U)_i$ de U tal que

$$res_{U_i,U}(s) = 0$$

para todo i, entonces $s = 0$.

2. Si $(U_i \to U)$ es un cubrimiento y la familia $(s_i)_{i \in I}$, $s_i \in P(U_i)$ es tal que

$$res_{U_i \times_U U_j, U_i}(s_i) = res_{U_i \times_U U_j, U_j}(s_j)$$

para todo i y j, entonces existe un $s \in P(U)$ tal que $res_{U_i,U}(s) = s_i$ para todo i.

Otra forma de definir esto es diciendo que la siguiente sucesión

$$P(U) \to \prod_i P(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} P(U_i \times_U U_j)$$

es exacta para todo cubrimiento $(U_i \to U)$.

En el caso que M contenga todas las inmersiones abiertas, todo cubrimiento en $U = \bigcup U_i$ en el sentido usual de la topología de Zariski es un cubrimiento en el sentido de la M-topología, y así un haz F en X_M se define por restricción de haces en todos los esquemas U en C/X.

Proposición 3.2.1. *Sea P un prehaz para el sitio étale en X. Entonces P es un haz si y solo si satisface las siguientes dos condiciones:*

(*a*) *Para todo U en C/X, la restriccion de P a la topologia de Zariski en U es un haz.*

(*b*) *Para todo cubrimiento $(U' \to U)$ con U y U' ambos afines,*

$$P(U) \to P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U')$$

es exacta.

Corolario 3.2.1. *En la étale topología, ambos prehaces $\mathbb{G}_a$ y $\mathbb{G}_m$ son haces.*

Demostración. Ver Milne [8]. □

Observación 3.2.1. El prehaz constante no es un haz en general. Por ello, definimos el haz constante de la siguiente manera: Sea X una variedad o un esquema cuasi-compacto, y para todo grupo abeliano M, definimos $\mathcal{F}_M(U) = M^{\pi_0(U)}$, el producto de copias de M indexadas por el conjunto $\pi_0(U)$ de componentes conexas de U, con los morfismos restricción. Este es un haz llamado el haz constante en $X_{ét}$ definido por M.

Proposición 3.2.2. *La categoría de haces de grupos abelianos en $X_{ét}$, que denotaremos por $Sh(X_{ét})$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos.*

Demostración. Ver Milne [8]. □

3.3. Cohomología étale

Tenemos un functor de secciones globales $\Gamma(X, -) : Sh(X_{ét}) \to Ab$ que es exacto por izquierda y recordando que nuestra categoría de haces étales tiene suficientes inyectivos, podemos definir el r-ésimo funtor derivado por derecha $H^r(X_{ét}, -)$.
Tenemos las siguientes propiedades que se siguen de la teoría de los funtores derivados:

(*i*) Par todo haz $\mathcal{F}$, se tiene $H^0(X_{ét}, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$.

(*ii*) Si $\mathcal{I}$ es inyectivo, entonces $H^r(X_{ét}, \mathcal{I}) = 0$, para todo $r > 0$.

(*iii*) Una sucesión exacta corta de haces

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

da lugar a la sucesión exacta larga

$$0 \to H^0(X_{ét}, \mathcal{F}_1) \to H^0(X_{ét}, \mathcal{F}_2) \to H^0(X_{ét}, \mathcal{F}_3) \to H^1(X_{ét}, \mathcal{F}_1)$$
$$\to H^1(X_{ét}, \mathcal{F}_2) \to H^1(X_{ét}, \mathcal{F}_3) \to \cdots$$

y la asociación de la cadena exacta corta con la cadena exacta larga es funtorial.

Ejemplo 3.3.1. Veamos ahora algunos ejemplos

1. Sea $\phi : U \to X$ un morfismo étale. Entonces

$$\phi^* : Sh(X_{ét}) \to Sh(U_{ét})$$

es exacto y preserva inyectivos. Mas aún ϕ^* es solo la restricción, veamos que la composición

$$Sh(X_{ét}) \xrightarrow{\phi^*} Sh(U_{ét}) \xrightarrow{\Gamma(U,-)} Ab$$

es $\Gamma(U, -)$. Así los funtores derivados por derecha de $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(U) : Sh(X_{ét}) \to Ab$ son $\mathcal{F} \to H^r(U_{ét}, \mathcal{F}|U)$. Nosotros denotaremos a $H^r(U_{ét}, \mathcal{F}|U)$ por $H^r(U_{ét}, \mathcal{F})$.

2. Sea $\phi : Y \to X$ un morfismo. Sabemos que ϕ^* es exacta, por lo cual la sucesión exacta corta de haces $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ da lugar a la sucesión exacta larga,

$$0 \to H^0(Y_{ét}, \phi^*\mathcal{F}_1) \to H^0(Y_{ét}, \phi^*\mathcal{F}_2) \to H^0(Y_{ét}, \phi^*\mathcal{F}_3) \to H^1(Y_{ét}, \phi^*\mathcal{F}_1) \cdots$$

$$\cdots \to H^r(Y_{ét}, \phi^*\mathcal{F}_2) \to H^{r+1}(Y_{ét}, \phi^*\mathcal{F}_3) \to \cdots$$

de grupos de cohomología.

3. (Cohomología de un punto geométrico) Sea x un punto geométrico de X, entonces $H^r(x, \mathcal{F}) = 0$ para todo $r > 0$.

Cohomología con soporte en un subesquema cerrado

Sea Z un subesquema cerrado de X, y sea $U = X - Z$. Para todo haz $\mathcal{F}$ en $X_{ét}$, definimos

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = Ker(\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})).$$

El funtor $\mathcal{F} \mapsto \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ es exacto por izquierda, y nosotros denotamos su r-ésimo funtor derivado por la derecha por $H_Z^r(X, -)$, llamada la cohomología de $\mathcal{F}$ con soporte en Z.

Proposición 3.3.1. *Para todo haz $\mathcal{F}$ en $X_{ét}$ y para todo subesquema cerrado $Z \hookrightarrow X$, existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \to H_Z^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F}) \to H_Z^{r+1}(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

y la sucesión es funtorial en el par $(X, X - Z)$ y $\mathcal{F}$.

Demostración. Ver Milne [9]. □

Cohomología con soporte compacto

Definición 3.3.1. Para todo haz $\mathcal{F}$ de torsión en una variedad U, definimos:

$$H_c^r(U) = H^r(X, j!\mathcal{F})$$

donde X es variedad completa conteniendo a U como subvariedad densa y abierta, y j es el morfismo inclusión.

Llamamos a los grupos $H_c^r(U)$ grupos de cohomología de $\mathcal{F}$ con soporte compacto. La siguiente proposición muestra la buena definición de este concepto.

Proposición 3.3.2. *Cuando $\mathcal{F}$ es un haz de torsión, los grupos $H^r(X, j!\mathcal{F})$ son independientes de la elección de la inclusión j.*

Demostración. Ver Milne [9]. □

3.4. Cohomología de curvas

En esta sección veremos los grupos de cohomología de algunas curvas importantes, los calculos de estos grupos se encuentran en [9].

Proposición 3.4.1. *Sea X una curva no-singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, se tiene:*

$$H^r(X_{\acute{e}t}, G_m) = \begin{cases} \Gamma(X, \mathcal{O}_X^{\times}), & \text{si } r = 0 \\ Pic(X), & \text{si } r = 1 \\ 0, & \text{si } r \geqslant 2 \end{cases}$$

Proposición 3.4.2. *Sea X una curva no-singular completa y conexa sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, para cualquier n coprimo con la característica de k tenemos:*

$$H^r(X_{\acute{e}t}, \mu_n) = \begin{cases} \mu_n(k), & \text{si } r = 0 \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}, & \text{si } r = 1 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & \text{si } r = 2 \\ 0, & \text{si } r > 2 \end{cases}$$

donde g es el género de X.

Demostración. Ver [9]. □

3.5. Tate twist

Fijemos un entero positivo n, sea $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Para todo anillo R tal que $n \cdot 1$ es una unidad en R, definimos $\mu_n(R)$ como el grupo de las enésimas raices de 1 en R, y definimos el r-ésimo Tate twist como:

$$\mu_n(R)^{\otimes r} = \begin{cases} \mu_n(R) \otimes \mu_n(R) \otimes \ldots \otimes \mu_n(R), \; r \text{ veces}, & r > 0 \\ \Lambda, & r = 0 \\ Hom_\Lambda(\mu_n(R)^{\otimes r}, \Lambda), & r < 0 \end{cases}$$

Sea X una variedad sobre un cuerpo k cuya característica no divide a n. Definimos $\Lambda(r)$ como el haz en $X_{\acute{e}t}$ tal que

$$\Gamma(U, \Lambda(r)) = \mu_n(\Gamma(U, \mathcal{O}))^{\otimes r}$$

para todo $U \to X$ étale y afín. Si k contiene todas las raíces n-ésimas de la unidad, entonces cada haz es isomorfo al haz constante Λ y en general el haz $\Lambda(r)$ es localmente constante. Para un haz $\mathcal{F}$ en $X_{ét}$, definimos:

$$\mathcal{F}(r) = \mathcal{F} \otimes \Lambda(r)$$

para todo r entero.

Definición 3.5.1. Un par suave de k variedades (Z, X) es una variedad no-singular X junto con una subvariedad no-singular Z. Decimos que (Z, X) tiene *codimensión* c si toda componente conexa de Z tiene codimensión c en la correspondiente componente conexa de X.

Proposición 3.5.1. *Para todo par de k variedades suaves (Z, X) de codimensión c y el haz localmente constante $\mathcal{F}$ de Λ-módulos en X, existen isomorfismos canónicos llamados morfismos de Gysin*

$$H^{r-2c}(Z, \mathcal{F}(-c)) \to H^r_Z(X, \mathcal{F})$$

para todo $r \geqslant 0$.

Demostración. Ver Milne [9]. □

Haces construibles

La clase de haces constantes o localmente constantes no es cerrada bajo la imagen directa con respecto a morfismos propios. Es por esta razón que estudiamos un tipo especial de haces, llamados haces construibles que generalizan a los mencionados anteriormente y que además posee un apropiedad bastante adecuada, llamada propiedad de finitud.

Definición 3.5.2. Un *punto geométrico* x en X es un morfismo desde $\operatorname{Spec}(\bar{k})$ a X.

Definición 3.5.3. Un haz $\mathcal{F}$ en $X_{\acute{e}t}$ tiene *tallos finitos*, si $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ es finito para todo punto geométrico $\bar{x}$ de X.

Definición 3.5.4. Un haz $\mathcal{F}$ en $X_{\acute{e}t}$ es *localmente constante* si existe un cubrimiento $(U_i \to X)_i \in I$ tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es constante para todo $i \in I$.

Definición 3.5.5. Un haz $\mathcal{F}$ en $X_{\acute{e}t}$ es *construible* si:

1. Para toda inmersión cerrada $i : Z \to X$ con Z irreducible, existe un subconjunto abierto no vacío $U \subset Z$ tal que $i^*(\mathcal{F})|_U$ es localmente constante.

2. $\mathcal{F}$ tiene tallos finitos.

Proposición 3.5.2. *(Finitud) Sea X una variedad completa sobre un cuerpo separablemente cerrado k y sea $\mathcal{F}$ un haz construible en X. Entonces los grupos $H^r(X_{\acute{e}t}, \mathcal{F})$ son finitos.*

Demostración. Ver Milne [8]. □

Proposición 3.5.3. *Los haces construibles en un esquema X forman una categoría abeliana, que es Noetheriana cuando X es cuasi compacto.*

Demostración. Ver Milne [8]. □

Proposición 3.5.4. *Cuando $\mathcal{F}$ es construible, los grupos $H_c^r(X, \mathcal{F})$ son finitos.*

Demostración. Ver Milne [8]. □

3.6. Cohomología ℓ-ádica

Un inconveniente que tenemos con la cohomología étale, es que no posee algunas propiedades que deseariamos en toda cohomología, por ejemplo no es una cohomología de Weil (veremos en este capítulo que significa esto). Y es por esta razón que surge la cohomología ℓ-ádica para resolver estas dificultades.

Definición 3.6.1. Un *haz de $\mathbb{Z}_\ell$-módulos* en X (o un haz ℓ-ádico) es una familia $(M_n, f_{n+1} : M_{n+1} \to M_n)_n$ tal que:

(*i*) Para cada n, M_n es un haz construible de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-módulos.

(*ii*) Para cada n, el mapa $f_{n+1} : M_{n+1} \to M_n$ induce un isomorfismo $M_{n+1}/\ell^n M_{n+1} \to M_n$, donde $M_{n+1}/\ell^n M_{n+1}$ es la hacificación del prehaz definido por $U \mapsto M_{n+1}(U)/\ell^n M_{n+1}(U)$.

Proposición 3.6.1. *La categoría de haces ℓ-ádicos en X, esquema noetheriano, es una categoría abeliana.*

Definición 3.6.2. Para un haz $M = (M_n)$ de $\mathbb{Z}_\ell$-módulos, tenemos un morfismo canónico $H^r(X_{\acute{e}t}, M_{n+1}) \to H^r(X_{\acute{e}t}, M_n)$ inducido por el morfismo f_{n+1}. Así, nosotros podemos definir la *cohomología ℓ-ádica* por

$$H^r_\ell(X_{ét}, M) := \varprojlim_n H^r(X_{ét}, M_n).$$

Por ejemplo, si denotamos por $\mathbb{Z}_\ell$ al haz de $\mathbb{Z}_\ell$-módulos, donde los M_n son los haces constantes $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ y los f_n son los obviamente definidos entre ellos, entonces:

$$H^r_\ell(X_{ét}, \mathbb{Z}_\ell) := \varprojlim_n H^r(X_{ét}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}).$$

Observación 3.6.1. Tengamos en cuenta que la cohomología ℓ-ádica no es la cohomología étale considerando el haz constante $\mathbb{Z}_\ell$, ya que la cohomología no conmuta con el limite inverso y estas dos cosas son totalmente distintas. En particular cuando consideramos la cohomología étale sobre el haz constante $\mathbb{Z}_\ell$, obtenemos algo muy distinto a la cohomología ℓ-ádica.

Haces de $\mathbb{Q}_\ell$-módulos

Un haz de $\mathbb{Q}_\ell$-espacios vectoriales es simplemente un $\mathbb{Z}_\ell$-haz $M = M_n$, donde definimos:

$$H^r_\ell(X_{ét}, M) = \left(\varprojlim_n H^r(X_{ét}, M_n)\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

Y así tenemos

$$H^r_\ell(X_{ét}, \mathbb{Q}_\ell) = \left(\varprojlim_n H^r(X_{ét}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell = H^r_\ell(X_{ét}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

Tenemos que $H^r_\ell(X_{ét}, M)$ es un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial de dimensión finita.

Proposición 3.6.2. (*Teorema de finitud*) *Sea X una variedad sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y separable k, y sea $\mathcal{F}$ un haz construible en $X_{\acute{e}t}$. Los grupos $H^r_\ell(X_{\acute{e}t}, \mathcal{F})$ son finitos en cada uno de los siguientes casos:*

(a) X es completo.

(b) $\mathcal{F}$ no tiene p-torsión, donde p es la caracteristica de k.

Por lo cual la cohomología ℓ-ádica es un $\mathbb{Z}_\ell$-módulo finitamente generado.

Demostración. Ver Milne [9]. □

Teoría de cohomología de Weil

Una teoría de cohomología de Weil es un funtor contravariante

$$H^* : \{\text{variedades proyectivas suaves sobre } k\} \longrightarrow \{K\text{-álgebras graduadas}\}$$

que cumple ciertos axiomas (tenga en cuenta que el cuerpo K no debe confundirse con k; el primero es un campo de característica cero, llamado cuerpo de coeficientes, mientras que el cuerpo base k puede ser arbitrario). Sea X una variedad algebraica proyectiva suave de dimensión n, entonces el K-álgebra graduada $H^*(X) = \bigoplus H^i(X)$ debe cumplir los siguiente:

1. $H^i(X)$ es un K-espacio vectorial finito dimensional;

2. $H^i(X)$ es nulo para $i < 0$ o para $i > 2n$;

3. $H^{2n}(X)$ es isomorfo a K;

4. la dualidad de Poincaré, $H^i(X) \times H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^{2n}(X) \cong K$;
5. existe el isomorfismo de Künneth,

$$H(X) \otimes_K H(Y) \longrightarrow H(X \times Y);$$

6. existe un morfismo ciclo $\gamma_X : C^i \longrightarrow H^{2i}$ satisfaciendo condiciones de compatibilidad con la funtorialidad de H, con el isomorfismo de Künneth y tal que para todo punto X, el morfismo de ciclo

$$\gamma(P) : C^*(P) = \mathbb{Z} \longrightarrow H^*(P) = k$$

es la inclusión $\mathbb{Z} \subset K$;
7. axioma débil de Lefschetz: Para toda sección por hiperplano suave, esto es $j : W \subset X$, $W = X \cap H$, donde H es un hiperplano en el espacio proyectivo ambiente, los morfismos $j^* : H^i(X) \longrightarrow H^i(W)$ son isomorfismos para $i < n-1$ y epimorfismo para $i = n-1$.

Ejemplos clásicos de cohomologías de Weil son las cohomologías singular y de De Rham. Un resultado profundo es el que nos dice que la cohomología ℓ-ádica es también una cohomología de Weil.
El lector interesado puede encontrar más información al respecto en el artículo Kleiman, S. L. (1968), Algebraic cycles and the Weil conjectures, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Amsterdam: North-Holland, pp. 359–386.

Capítulo 4

Fórmula de Grothendieck-Lefschetz

En esta sección probaremos la llamada fórmula del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz, también conocida como la fórmula de la traza de Grothendieck-Lefschetz que nos dice

$$(\Gamma_\phi.\Delta) = \sum_{r\geqslant 0}(-1)^r Tr(\phi^*|H_\ell^r(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

La cohomología con la que trabajaremos en esta sección es la cohomología ℓ-ádica.

4.1. Fórmula de Künneth

La teoría de la fórmula de Künneth es la misma para espacios topológicos que para la topología étale.
La fórmula clásica nos dice que si tenemos dos haces $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ en X.

Entonces existen los morfismos productos cup,

$$H^r(X_{\acute{e}t}, \mathcal{F}) \times H^s(X_{\acute{e}t}, \mathcal{G}) \to H^{r+s}(X_{\acute{e}t}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

la forma más fácil de definirlos es identificando los grupos con los grupos de la cohomología de Čech y establecer

$$(f \cup g)_{i_0 i_1 \ldots i_{r+s}} = f_{i_0 i_1 \ldots i_r} \otimes g_{i_r \ldots i_{r+s}}.$$

La fórmula de Künneth

Sean X e Y variedades algebraicas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces en X e Y respectivamente. Consideremos:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Con los cuales obtenemos:

$$H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(X \times Y, p^*\mathcal{F})$$

$$H^s(Y, \mathcal{G}) \to H^s(X \times Y, q^*\mathcal{G})$$

también tenemos los productos cup que nos dan:

$$H^r(X \times Y, p^*\mathcal{F}) \times H^s(X \times Y, q^*\mathcal{F}) \to H^{r+s}(X \times Y, p^*\mathcal{F} \otimes q^*\mathcal{F})$$

y con estos obtenemos

$$H^r(X, \mathcal{F}) \times H^s(Y, \mathcal{G}) \to H^{r+s}(X \times Y, p^*\mathcal{F} \otimes q^*\mathcal{F})$$

La fórmula de Künneth nos dice que el morfismo extendido

$$\bigoplus_{r+s=n} H^r(X, \mathcal{F}) \otimes H^s(Y, \mathcal{G}) \to H^n(X \times Y, p^*\mathcal{F} \otimes q^*\mathcal{F})$$

es un isomorfismo.

4.2. El morfismo de clase de ciclos

En esta sección tomaremos a Λ como $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, con ℓ distinto a la característica de k, también tomaremos a Λ como $\mathbb{Z}_\ell$ o $\mathbb{Q}_\ell$, cuando lo requiramos. Sea $H^*(X) = \bigoplus_{r\geqslant 0} H^{2r}(X, \Lambda(r))$. Y recordemos que dada una variedad X y subvariedades abiertas U, V, tales que $X \supset U \supset V$, entonces obtenemos una sucesión exacta de grupos de cohomología étale

$$\cdots \to H^r_{X-U}(X) \to H^r_{X-V}(X) \to H^r_{U-V}(U) \to \cdots$$

cuando V es vació esta es la sucesión exacta del par (X, U).
Nuestro objetivo ahora será definir el morfismo ciclo de anillos graduados

$$cl^*_X : CH^*(X) \to H^*(X)$$

Recordemos que $CH^*(X)$ es un anillos con el producto de intersección.

Definición del morfismo ciclo

Sea X no-singular. Cuando Z es no-singular, definimos $cl_X(Z)$ como la imagen de 1 bajo el morfismo de Gysin, tomando $\Lambda = \mathcal{F}(-c)$ y $r = 2c$

$$\Lambda = H^0(Z, \Lambda) \to H^{2c}_Z(X, \Lambda(c)) \to H^{2c}(X, \Lambda(c))$$

Para extender la definición a subvariedades singulares, requerimos el siguiente lema:

Lema 4.2.1. *Para toda subvariedad cerrada Z de codimensión c en X, $H^r_Z(X, \Lambda) = 0$, para todo $r < 2c$.*

Demostración. Cuando Z es no-singular tenemos gracias al morfismo de Gysin,

$$H^s_Z(X, \Lambda) \simeq H^{s-2c}(Z, \Lambda(-c))$$

que es 0 para $s - 2c < 0$.

Probaremos el lema para un Z en general y lo haremos por inducción sobre la dimensión de Z.

Si Z tiene dimensión 0, este es no-singular por lo cual en este caso el lema es cierto. Sea Z un subvariedad cerrada de codimensión c, supongamos el resultado cierto para toda subvariedad cerrada de dimensión menor a la de Z o, lo que es lo mismo, de codimensión mayor que Z. Sea el lugar singular $Y := sing(Z)$, es una subvariedad cerrada no-singular de dimensión menor que Z (ya que Z es singular), y la terna $(X, X - Y, X - Z)$ nos genera la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \to H^r_Y(X, \Lambda) \to H^r_Z(X, \Lambda) \to H^r_{Z-Y}(X - Y, \Lambda) \to \cdots$$

Como $H^r_{Z-Y}(X-Y, \Lambda) = 0$ para $r < 2c$ porque $Z - Y$ es no-singular, y $H^r_Y(X, \Lambda) = 0$ para $r < 2c + 2$, pues $codim(Y) \geqslant c + 1$, y esto implica que $H^r_Z(X, \Lambda) = 0$, para $r < 2c$. □

Ahora sea Z un ciclo primo de codimensión r en X, y sea $Y = Sing(Z)$. De la terna $(X, X - Y, X - Z)$, usando el lema anterior y la sucesión exacta generada, obtenemos un isomorfismo

$$H^{2r}_Z(X, \Lambda) = H^{2r}_{Z-Y}(X - Y, \Lambda)$$

Definimos el morfismo de ciclo $cl_X(Z)$ como la imagen de 1 bajo la composición de los siguientes morfismos

$$\Lambda \cong H^0(Z-Y, \Lambda(r)) \cong H^{2r}_{Z-Y}(X-Y, \Lambda(r)) \cong H^{2r}_Z(X, \Lambda(r)) \to H^{2r}(X, \Lambda(r))$$

Que extendemos por linealidad al morfismo

$$cl^r : C^r(X) \to H^{2r}(X, \Lambda(r))$$

Ahora veamos que si podemos definir el morfismo de $CH^1(X) \longrightarrow H^2(X, \Lambda(2))$, $dim(X) = n$; entonces podemos definir el morfismo de $CH^r(X) \longrightarrow H^{2r}(X, \Lambda(r))$. Para esto tomemos $Z \in C^r(X) \longrightarrow H^{2r}(X, \Lambda(r))$, que sea racionalmente equivalente a cero, debemos mostrar que su imagen es cero. Como Z es racionalmente equivalente a cero, existe un $W \subset X$ subesquema cerrado e irreducible, $dim(W) = n - r + 1$ y $f \in K(W)^*$ tal que $Z = \text{div}(f)$, como $Z \in C^1(W) \longrightarrow H^2(W, \Lambda(1))$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C^1(W) \arrow[r] \arrow[d, "\subset"'] & H^2(W, \Lambda(1)) \arrow[d] \\
C^r(X) \arrow[r] & H^{2r}(X, \Lambda(r))
\end{tikzcd}$$

con el cual obtenemos que la imagen de Z es cero. Para definir el morfismo de $CH^1(X) \longrightarrow H^2(X, \Lambda(2))$ remitimos al lector al libro de Milne [9].

4.3. Dualidad de Poincaré

Recordemos la dualidad de Poincaré en espacios topológicos, esta nos dice que para una variedad U, m-dimensional conexa y orientada, existe un isomorfismo canónico

$$H_c^r(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_{m-r}(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

que es lo mismo que

$$H_c^r(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times H^{m-r}(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^m(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Dualidad de Poincaré para variedades algebraicas no-singulares

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, y sea $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, para n coprimo con la característica de k. Para un haz $\mathcal{F}$ de Λ-módulos, sea $\check{\mathcal{F}} = Hom(\mathcal{F}, \Lambda(m))$, donde $\Lambda(m) = \mu_n^{\otimes m}$.
Sea X una variedad no-singular de dimensión d. Para todo punto cerrado $P \in X$, el morfismo de Gysin es un isomorfismo

$$H^0(P, \Lambda) \to H_P^{2d}(X, \Lambda(d))$$

Existe un morfismo canónico

$$H_P^{2d}(X, \Lambda(d)) \to H_c^{2d}(X, \Lambda(d))$$

y dejamos a $cl(P)$ como la imagen de 1 bajo la composición de estos dos morfismos.

Proposición 4.3.1. *Sea X una variedad no-singular de dimensión d sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, se tiene que:*

(*a*) *existe un único morfismo $\eta(X) : H_c^{2d}(X, \Lambda(d)) \to \Lambda$ enviando $cl(P)$ a 1 para todo punto cerrado P en X; este es un isomorfismo (η es llamado el morfismo traza);*

(*b*) *para todo haz localmente constante $\mathcal{F}$ de Λ-módulos, existe un emparejamiento canónico*

$$H_c^r(X, \mathcal{F}) \times H^{2d-r}(X, \check{\mathcal{F}}) \to H_c^{2d}(X, \Lambda(d)) \cong \Lambda$$

El Gysin map

Sea $\pi : Y \to X$ un morfismo propio de variedades suaves sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k; sea $a = dimX$, $d = dimY$ y $c = d - a$. Existe un morfismo restricción

$$\pi^* : H_c^{2d-r}(X, \Lambda(d)) \to H_c^{2d-r}(Y, \Lambda(d))$$

por dualidad obtenemos el morfismo

$$\pi_* : H^r(Y, \Lambda) \to H^{r-2c}(X, \Lambda(-c))$$

que cumple las siguientes propiedades:
i) El morfismo π_* esta únicamente determinado por la ecuación:

$$\eta_X(\pi_*(y) \cup x) = \eta_Y(y \cup \pi^*(x)), x \in H_c^{2d-r}(X, \Lambda(d)), y \in H^r(Y, \Lambda)$$

ii) Se tiene que $\pi_*(1_Y) = cl_X(Y)$, donde 1_Y es el elemento identidad de $H^0(Y, \Lambda) = \Lambda$
iii) Para la composición de morfismos,

$$\pi_{1*} \circ \pi_{2*} = (\pi_1 \circ \pi_2)_*$$

iv) Si X e Y son completos entonces:

$$\eta_X(\pi_*(y)) = \eta_Y, \text{para todo } y \in H^{2d}(Y, \Lambda(d))$$

v) (Fórmula de proyección) Si Y y X son completos, entonces

$$\pi_*(y \cup \pi^*(x)) = \pi_*(y) \cup x$$

para $x \in H^r(X)$ e $y \in H^s(Y)$.
vi) Si $\pi : Y \to X$ es un morfismo finito de grado δ, entonces

$$\pi_* \circ \pi^* = \delta.$$

Llamaremos a π_* como el *Gysin map.*

4.4. Fórmula de Grothendieck-Lefschetz

En esta sección probaremos la fórmula del punto fijo de Lefschetz, conocido también como la formula de la traza de Lefschetz.
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea $\phi : V \to V$ un morfismo lineal. Si (a_{ij}) es la matriz asociada a V con respecto a la base (e_i) de V, entonces la traza de ϕ, denotada por $Tr(\phi|V)$, es $\sum a_{ii}$. Que es independiente de la elección de la base. Si (f_i) es la base dual del espacio vectorial dual V^*, se tiene que $e_i f_j = \delta_{ij}$, entonces

$$\sum_i \phi(e_i) f_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} e_j \right) f_i = \sum_i a_{ii} = Tr(\phi|V)$$

Ejemplo 4.4.1. Consideremos el morfismo

$$\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, (x_0 : x_1) \longmapsto (x_0 + x_1 : x_1)$$

En la parte afín donde $x_1 \neq 0$, $\phi : x \longmapsto x+1$, y en la parte afín donde $x_0 \neq 0$, $\phi : x \longmapsto x/(x+1)$. Ya que ϕ actúa como 1 en $H^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell)$ y en $H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell)$ (porque tiene grado uno y género 0), de esta forma $\sum(-1)^r Tr(\phi|H^r(X, \mathbb{Q}_\ell))$ es igual a 2. El único punto fijo de ϕ es $(1 : 0)$. Para hallar $(\Gamma_\phi.\Delta)$ debemos de calcular los números de intersección de las curvas

$$y(1+x) = x, \; y = x$$

en $(0,0)$. Y esto es la dimensión de

$$k[x,y]/(y-x, y(1+x)-x) = k[x]/(x^2)$$

que es 2.

Observación 4.4.1. Notemos que (Γ_ϕ, Δ) es el número de puntos fijos contando con sus multiplicidades.

Antes de empezar la prueba del teorema haremos la identificación, a la hora de aplicar el morfismo de Gysin, de $\mathbb{Q}_\ell$ con $\mathbb{Q}_\ell(1)$, debido a que

$$H^r(X, \mathbb{Q}_\ell(s)) = H^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell(s)$$

y ϕ actúa a través de $H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$, y tensorizando con el $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial uno dimensional, $\mathbb{Q}_\ell(s)$, no hay cambio de traza.
Con motivo de simplificar la notación, fijamos un isomorfismo $\mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell(1)$, esto es lo mismo que elegir isomorfismos compatibles $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \to \mu_{\ell^n}(k)$ para todo n.
Escribimos $H^*(X) = \bigoplus H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$ que es un $\mathbb{Q}_\ell$ álgebra. La fórmula de Künneth nos permite identificar $H^*(X \times X)$ con $H^*(X) \otimes H^*(X)$ por la identificación $p^*(a) \cup q^*(b)$ con $a \otimes b$. Aquí p y q son las proyecciones $X \times X \rightrightarrows X$.
La dualidad de Poincaré nos da un emparejamiento no degenerado,

$$H^*(X) \times H^*(X) \to H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell.$$

Escribiremos e^{2d} para el generador canónico de $H^{2d}(X)$ (la clase de todo punto P).

Lema 4.4.1. *Para todo morfismo regular $\phi : X \to Y$ e $y \in H^*(Y)$,*

$$p_*(cl_{X\times Y}(\Gamma_\phi) \cup q^*y) = \phi^*(y).$$

Demostración. Calculemos usando las propiedades del Gysin map:

$$\begin{aligned}
p_*(cl_{X\times Y}(\Gamma_\phi) \cup q^*y) &= p_*((1,\phi)_*(1) \cup q^*y) \\
&= p_*(1,\phi)_*(1 \cup (1,\phi)^*q^*y) \\
&= (p\circ(1,\phi))_*(1 \cup (q\circ(1,\phi))^*y) \qquad (4.1)\\
&= id_*(1_X \cup \phi^*y) \\
&= \phi^*y.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.4.2. *Sea (e_i) una base de $H^*(X)$, y sea (f_i) la base de $H^*(X)$ que es la base dual relativa al producto cup, así que $e_i \cup f_i = \delta_{ij}e^{2d}$. Para todo morfismo regular $\phi : X \to X$,*

$$cl_{X\times X}(\Gamma_\phi) = \sum \phi^*(e_i) \otimes f_i$$

Demostración. Como los f_i forman una base para $H^*(X)$ como un $\mathbb{Q}_\ell$ espacio vectorial, ellos también forman una base para $H^*(X \times X) = H^*(X) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^*(X)$ como un $H^*(X)$-módulo. Por lo tanto,

$$cl_{X\times X}(\Gamma_\phi) = \sum a_i \otimes f_i$$

para elementos únicos $a_i \in H^*(X)$. De acuerdo al Lema 4.4.1,

$$\phi^*(e_j) = p_*\left(\left(\sum_i a_i \otimes f_i\right) \cup (1 \otimes e_j)\right) = p_*(a_j \otimes e^{2d}) = a_j.$$

□

Teorema 4.4.1 (Teorema del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz). *Sea X una variedad no-singular completa sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, y sea $\phi : X \to X$ un morfismo regular. Entonces, se tiene la fórmula*

$$(\Gamma_\phi.\Delta) = \sum_{r \geqslant 0} (-1)^r Tr(\phi^* | H_\ell^r(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell)),$$

donde Γ_ϕ es el gráfico de ϕ, y Δ es la diagonal en $X \times X$.

Demostración. Sea $\phi : X \to Y$ un morfismo regular.
Sea e_i^r una base para H^r, y sea f_i^{2d-r} la base dual para H^{2d-r}. Entonces por el Lema 4.4.2 tenemos:

$$cl(\Gamma_\phi) = \sum_{r,i} \phi^*(e_i^r) \otimes f_i^{2d-r}$$

y además tenemos

$$cl(\Delta) = \sum_{r,i} e_i^r \otimes f_i^{2d-r} = \sum_{r,i} (-1)^{r(2d-r)} f_i^{2d-r} \otimes e_i^r = \sum_{r,i} (-1)^r f_i^{2d-r} \otimes e_i^r.$$

Tomando el producto de estas dos expresiones tenemos que:

$$cl_{X \times X}(\Gamma_\phi.\Delta) = \sum_{r,i} (-1)^r \phi^*(e_i^r) f_i^{2d-r} \otimes e^{2d} = \sum_r (-1)^r Tr(\phi^* | H^r)(e^{2d} \otimes e^{2d}).$$

Ahora apliquemos $\eta_{X \times X}$(donde este η es el definido en la Proposición 4.3.1, la dualidad de Poincare) a cada lado y obtenemos la fórmula deseada

$$(\Gamma_\phi.\Delta) = \sum (-1)^r Tr(\phi^* | H_\ell^r(X, \mathbb{Q}_\ell)).$$

□

4.5. Aplicaciones

Morfismo de Frobenius

Definición 4.5.1. Un esquema X es llamado de *característica* p si cumple $p\mathcal{O}_X = 0$

Ejemplo 4.5.1. *La variedad* $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}[X,Y]/(X - Y^2)$ *tiene característica* p.

Definición 4.5.2. Sea X un esquema de característica p. Definimos el *morfismo de Frobenius* de X, $F : X \to X$ como el morfismo que es la función identidad en el espacio topológico X y es la p-ésima potencia en $\mathcal{O}_X$.

Sea k un cuerpo de q elementos, sea $\bar{k}$ la cerradura algebraica de k. Si X es un esquema sobre k, podemos extender los escalares para obtener $\bar{X}$ un esquema sobre $\bar{k}$, de la siguiente forma $\bar{X} := X \times_k \bar{k}$.

Ejemplo 4.5.2. Cuando $X = \operatorname{Spec}(A)$ donde $A = k[t_1, t_2, ..., t_n]$, se tiene que $\bar{X} = \operatorname{Spec}(\bar{k} \otimes_k A) = \operatorname{Spec}(\bar{k}[t_1, t_2, ..., t_n])$.

Definición 4.5.3. Sea X una variedad sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$. Para todo $n \geqslant 1$, sea $v_n(X) = X(\mathbb{F}_p^n)$. Definimos la *función zeta* de X como

$$Z(X,t) = exp(\sum_{m \geqslant 1} v_m(X)\frac{t^m}{m}).$$

Lema 4.5.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y ϕ : $V \longrightarrow V$ un endomorfismo, entonces*

$$log(det(id - \phi.t)^{-1}) = \sum_{n>0} Tr(\phi^n)\frac{t^n}{n}$$

Demostración. Ver el libro de Milne [8]. □

Teorema 4.5.1. *Si X es una variedad suave, geométricamente conexa, proyectiva de dimensión n sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_q$. Entonces $Z(X,t)$ es una función racional.*

Demostración. Sea $v_n(X) = \#X(F_{q^n})$ (número de puntos de X con coordenadas en F_{q^n})) y sea $F : X \longrightarrow X$ el morfismo de Frobenius, ademas sea $\bar{k}^s$ la clausura separable de k, al ser k un cuerpo finito esta coincide con la clausura algebraica $\bar{k}$. El morfismo de Frobenius induce un morfismo $\bar{F} : X(\bar{k}) \longrightarrow X(\bar{k})$ y sea $\bar{F}^n$ la composición de n veces el morfismo $\bar{F}$. Sabemos que $v_m(X)$ es el número de puntos fijos de $\bar{F}^m$, además $\#X(\bar{k}) = (\Gamma_F.\Delta_X)$.
Ahora por la fórmula del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz tenemos que

$$(\Gamma_F.\Delta_X) = \sum_{r\geqslant 0}(-1)^r Tr(F^*|H^r(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell))$$

Además

$$Z(X,t) = exp\left(\sum_{n>0} v_n(X)\frac{t^n}{n}\right)$$

$$= exp\left[\sum_{n>0}(\sum_{r=0}^{2d}(-1)^r Tr(F^{n*}|H^r))\frac{t^n}{n}\right]$$

$$= exp\left[\sum_{r=0}^{2d}(-1)^r\sum_{n>0}Tr(F^{n*}|H^r)\frac{t^n}{n}\right]$$

$$= exp\left[\sum_{r=0}^{2d}(-1)^r log(det(id-(F^*|H^r).t)^{-1})\right]$$

y aplicando el lema anterior

$$=\prod_{r=1}^{d}\frac{det(id-(F^*|H^{2r+1}).t)}{det(id-(F^*|H^{2r}).t)}$$

notemos que $det(id-(F^*|H^r).t)$ son polinomios en t, por lo cual $Z(X,t)$ es una función racional, que es lo que queríamos mostrar.

$\square$

Capítulo 5

Conclusiones

La cohomología étale fue ideada para resolver las conjeturas de Weil; es por ello que una de sus aplicaciones más inmediatas es la prueba de la racionalidad de las funciones zeta sobre variedades; pero sus aplicaciones no quedan ahí con estas herramientes se pueden probar todas las conjeturas de Weil incluida la Hipótesis de Riemann para variedades algebraicas que la probó Deligne. El alcance de los objetos estudiados en esta tesis no queda acá, por ejemplo los sitios étales son bastante útiles a la hora de estudiar los stacks algebraicos, que son objetos de intenso estudio actualmente en matemáticas, también hay diversas generalizaciones del teorema del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz, entre ellas alguno en la que intervienen las categorías derivadas que tienen que ver con categorías trianguladas (Ver [3]). Un objetivo a futuro con respecto a este trabajo es el desarrollar estas generalizaciones y estudiar las relaciones de las conjeturas de Weil con la teoría de intersección, la teoría de motivos y los stacks algebraicos. Entre las aplicaciones más recientes de la fórmula que hemos estudiado en esta tesis se encuentra la prueba del conocido como lema fundamental del programa de Langlands debida a Gérard Laumon and Ngo Bao Chau en el 2009 (Ver [12]).

Bibliografía

[1] Atiyah, Michael Francis, and Ian Grant Macdonald. Introducción al álgebra conmutativa. Reverté, 1973.

[2] Cartan, Henry, and Samuel Eilenberg. Homological Algebra (PMS-19). Vol. 19. Princeton University Press, 2016.

[3] Fu, Lei. Etale cohomology theory. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 13. 2011.

[4] Fulton, William. Intersection theory. Vol. 2. Springer Science and Business Media, 2013.

[5] Hartshorne, Robin. Algebraic geometry. Vol. 52. Springer Science and Business Media, 2013.

[6] Mac Lane, Saunders. Categories for the working mathematician. Vol. 5. Springer Science y Business Media, 2013.

[7] Matsumura, Hideyuki. Commutative algebra. Vol. 120. New York: WA Benjamin, 1970.

[8] Milne, James S. Lectures on étale cohomology. Available on-line at http://www. jmilne. org/math/CourseNotes/LEC. pdf (1998).

[9] Milne, James S. Etale cohomology (PMS-33). Vol. 33. Princeton university press, 2016.

[10] Milne, James S. Algebraic geometry. Allied Publishers, 1996.

[11] Weibel, Charles A. An introduction to homological algebra. Cambridge university press, 1995.

[12] James Arthur,The Work of Ngo Bao Chau. Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010.