

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE
INGENIERIA**

Facultad de Ciencias



TESIS

**“MODELOS HOMOTÓPICOS QUE
REPRESENTAN LA HOMOTOPÍA
ESTABLE”**

Para optar el grado académico de Maestro en Ciencias
en Matemática Aplicada

ELABORADA POR
Victor Antonio Torres Castillo

ASESOR
Dr. Joe Albino Palacios Baldeón

Lima - Perú
2018

CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

Torres Castillo, Victor Antonio

Modelos homotópicos que representan la homotopía estable / Victor Antonio Torres Castillo. – EPM - FC - UNI, 2018.

114 p.

Tesis (Maestría)—Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática, Lima, 2018. Asesor: Dr. Joe Albino Palacios Baldeón.

A mis padres, Victor y Elena.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los profesores del IMCA Eladio Ocaña, Roger Metzger y Félix Escalante por depositar su confianza en mi para ingresar al programa de Maestría financiado por el CONCYTEC, institución a la cual también le debo mi gratitud. Por supuesto quiero agradecer a mi asesor, el profesor Joe Palacios Baldeón, quien siempre me exigió y apoyó para hacer la presente tesis, demostrando en el camino un genuino amor por su trabajo. Agradezco a mis padres, mis hermanos y mis abuelos por siempre estar conmigo, como una familia unida.

RESUMEN

En el presente trabajo desarrollamos el concepto de conjunto simplicial como herramienta fundamental en el desarrollo moderno de la topología algebraica, bajo un punto de vista categórico, que nos introduce a líneas como el álgebra homotópica, teoría categórica de homotopía, K-teoría de Quillen y \mathbf{A}^1 -homotopía (donde esta última línea ligada también a la geometría algebraica). La categoría de conjuntos simpliciales representa una construcción algebraica que rescata las propiedades más importantes de los CW-complejos, sin hacer uso de topología, pero aludiendo siempre a ella. Esta categoría forma un clásico ejemplo de categoría de modelo cerrada, la cual estudiaremos para ofrecer un panorama general de los alcances del álgebra homotópica. Los resultados más importantes son el Teorema B de Quillen (base primordial de la K-teoría de Quillen), Teorema del Grupo de Compleción y la equivalencia del funtor producto simétrico infinito de Schlichtkrull con al funtor Γ de Barratt-Eccles, los cuales representan la homotopía estable.

Índice general

1. PRELIMINARES	1
1.1. COLÍMITE DE UN FUNTOR	1
1.1.1. FUNTORES ADJUNTOS	3
1.1.2. LEMA DE YONEDA	3
1.2. TRANSFORMACIONES DINATURALES	4
1.2.1. END Y COEND	5
1.3. EXTENSIONES DE KAN	9
1.3.1. CATEGORÍA COMA	10
1.4. CATEGORÍA DE OBJETOS PUNTEADOS	12
1.5. SUCESIONES ESPECTRALES	12
1.5.1. MÓDULOS FILTRADOS	14
1.5.2. BICOMPLEJOS DE CADENAS	15
2. HOMOTOPÍA SIMPLICIAL	17
2.1. HOMOTOPÍA DE COMPLEJOS DE KAN	19
2.2. HOMOTOPÍA ENTRE MAPAS SIMPLICIALES	24
2.3. COMPLEJO DE FUNCIONES	27
2.3.1. FIBRACIONES DE KAN	29
2.3.2. COMPLEJOS MINIMALES	32
2.3.3. GRUPOS SIMPLICIALES	32
2.3.4. LA SUCESIÓN FIBRA PATH-LOOP	34
2.3.5. REALIZACIÓN GEOMÉTRICA	36
2.3.6. ESPACIO CLASIFICANTE	38
2.4. SUSPENSIÓN DE KAN	40
3. TEOREMA DEL GRUPO DE COMPLECIÓN	44
3.1. CATEGORÍAS DE MODELOS	46
3.1.1. HOMOTOPÍAS	48
3.1.2. CATEGORÍA HOMOTÓPICA	52
3.2. CATEGORÍAS SIMPLICIALES	54
3.2.1. COLÍMITE HOMOTÓPICO EN CATEGORÍAS SIMPLICIALES	56
3.2.2. CATEGORÍAS DE MODELOS SIMPLICIALES	57
3.2.3. FUNTOR TOTAL DERIVADO DE QUILLEN	60
3.2.4. CATEGORÍAS DE MODELOS PROPIAS	61

3.2.5. DIAGRAMAS CARTESIANOS HOMOTÓPICOS	64
3.3. CONJUNTOS BISIMPLICIALES	66
3.4. GRUPOS ABELIANOS SIMPLICIALES	67
3.4.1. LA CORRESPONDENCIA DE DOLD-KAN	67
3.4.2. HOMOMORFISMO DE HUREWICZ	69
3.4.3. GRUPOS ABELIANOS BISIMPLICIALES	69
3.4.4. EL OBJETO TRASLACIÓN	70
3.5. DIAGRAMAS DE ESPACIOS	72
3.5.1. TEOREMA B DE QUILLEN	73
3.5.2. DIAGRAMAS CARTESIANOS HOMOLÓGICOS	77
3.6. TEOREMA DEL GRUPO DE COMPLECIÓN	80
4. FUNTOR GAMMA DE BARRATT-ECCLES	86
4.1. EL FUNTOR MONOIDE LIBRE Γ^+	89
4.2. EL FUNTOR GRUPO LIBRE Γ	94
5. PRODUCTO SIMÉTRICO INFINITO HOMOTÓPICO	106
A. APLICACIONES	110
Bibliografía	112

INTRODUCCIÓN

La presente tesis tiene como uno de sus propósitos introducir la teoría de homotopía en otro contexto aparte del de espacios topológicos, esta idea fue originalmente propuesta por Whitehead en el International Congress of Mathematics (ICM) de 1950. Posteriormente en los finales de los 60, Quillen desarrolla una teoría axiomática en la cual dentro de cierta clase de categorías (llamadas categorías de modelos) puede desarrollarse la noción de homotopía, rescatando muchas de las propiedades estudiadas para espacios topológicos. Otra meta planteada en esta tesis es conocer las bases de la K-teoría de Quillen y la homotopía estable, líneas que han venido desarrollándose considerablemente los últimos años.

La inspiración de esta tesis son principalmente los artículos [1] y [2], usando como medio para comprender las nociones empleadas, los libros [3] y [4] principalmente. En [2], Schlichtkrull rescata el famoso functor 'Producto simétrico infinito', el cual responde a la pregunta: Dado un espacio X , ¿es posible encontrar otro espacio Y tal que los grupos de homología del primero sean los grupos de homotopía del segundo?. La primera respuesta afirmativa fue el famoso Teorema de Dold-Thom [5], cuando X es un CW-complejo conexo (punteado) y la homología es reducida, tenemos $Y = SP(X)$, es decir:

$$\pi_n(SP(X)) \cong \tilde{H}_n(X)$$

Posteriores generalizaciones de este teorema se encuentran en [6] y en el reciente artículo [7] mediante herramientas categóricas.

$SP(X)$ es un colímite, pero una versión en colímite homotópico, llamado 'Producto simétrico infinito homotópico' por Schlichtkrull y denotado $SP_h(X)$, resulta ahora, representar la homotopía estable de un espacio X . Sin embargo, en [1] Barratt y Eccles también habían desarrollado un functor que representaba la homotopía estable, denotado Γ . Nuestro propósito es encontrar la equivalencia

$$SP_h^\wedge(X) \simeq \Gamma X \simeq \Omega^\infty \Sigma^\infty X \tag{1}$$

El primer capítulo desarrolla los preliminares categóricos y algebraicos necesarios para continuar con el estudio de los conceptos a tratar. Por su condición de preliminares, se ofrecen pocas pruebas, pero las mejores referencias para los temas son [8] para teoría de categorías y [9], para sucesiones espectrales.

El segundo capítulo trabaja la categoría de conjuntos simpliciales, resaltando su cercana relación a la categoría de espacios topológicos. La sección de suspensión de Kan no es necesaria para continuar con la lectura, sin embargo está inspirado en quien desee estudiar un poco de Kan Spectra.

El tercer capítulo estudia las categorías de modelos, dentro de la cual $s\text{Set}$ juega un rol importante, el principal resultado aquí es el Teorema del Grupo de Compleción, apoyándose en las pruebas de Jardine en [10] y de McDuff-Segal en [11].

El cuarto capítulo se enfoca en el funtor Γ de Barrat-Eccles, comparando la formulación original y la planteada por Schlichtkrull.

El quinto capítulo alcanza nuestro resultado principal, para a continuación presentar como aplicación el Teorema de Barratt-Priddy-Quillen-Segal.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Nuestros preliminares comprenden una revisión rápida de teoría de categorías y sucesiones espectrales. Si bien la teoría de categorías es a la actualidad todo un campo que puede estudiarse sin buscar ninguna conexión con topología algebraica, sus orígenes se remontan a esta última, pues fue introducida formalmente por Eilenberg y MacLane con el fin de describir la principal motivación de la topología algebraica (para el momento), esto es el estudio de funtores (del tipo algebraico) que con la propiedad de *ser invariantes salvo equivalencia homotópica*. Introducimos rápidamente los conceptos de límite y colímite de funtores, y mencionaremos algunos resultados y definiciones vitales para el avance de el presente trabajo.

1.1. COLÍMITE DE UN FUNTOR

Sea A una categoría, si $Obj(A)$ es un conjunto (recordemos que no toda clase es un conjunto), a la categoría la llamamos *pequeña*.

Dado un funtor $F : A \rightarrow C$ donde A es pequeña, en este caso usaremos el nombre de *sistema* (o *diagrama*) para F y *categoría de índices del sistema* para A . Un *cocono* $(Y, \{f_\alpha\})$ del sistema $F: \alpha \mapsto F_\alpha$ es un objeto Y con flechas (llamadas *componentes del cocono*) $f_\alpha : F_\alpha \rightarrow Y$ ($\alpha \in A$) tal que si tenemos la flecha $\alpha \xrightarrow{\phi} \beta$, entonces $f_\beta \circ F_\phi = f_\alpha$, es decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & Y \\ F_\phi \downarrow & \nearrow f_\beta & \\ F_\beta & & \end{array}$$

Sean $(Y, \{f_\alpha\})$ y $(Z, \{g_\alpha\})$ dos coconos del sistema F , un morfismo de coconos es una flecha $\psi : Y \rightarrow Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $\alpha \in \text{Obj}(\Lambda)$:

$$\begin{array}{ccc} F_\alpha & & \\ f_\alpha \downarrow & \searrow g_\alpha & \\ Y & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array}$$

Un **cocono colímite** $(X, \{h_\alpha\})$ de F del sistema F es un objeto inicial de la categoría de coconos del sistema, es decir que existe una (única) flecha $\varphi : X \rightarrow Y$ que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccc} F_\alpha & & & & \\ & \searrow h_\alpha & & \searrow f_\alpha & \\ & & X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \nearrow h_\beta & & \nearrow f_\beta & \\ F_\beta & & & & \end{array}$$

Denotaremos a X como $\text{colim}_\Lambda F_\alpha$ (llamándolo *colímite de los F_α*) a lo largo de este capítulo, y más adelante (en concordancia con los artículos que inspiran este trabajo) llamaremos también a X **límite directo** de Λ y lo denotaremos $\varinjlim_\Lambda F_\alpha$.

Hablamos en realidad de ‘el’ colímite porque se demuestra fácilmente que todos los colímites de un sistema son isomorfos (cuando estos existan).

Un **límite** de un sistema $G : \Omega \rightarrow D$ es (se puede definir así) el colímite de su diagrama opuesto $G^{op} : \Omega^{op} \rightarrow D^{op}$.

Ejemplo:

(Colímites filtrantes) Sea I un conjunto parcialmente ordenado, decimos que I es dirigido si $\forall \alpha, \beta \in I, \exists \delta \in I / \alpha \leq \delta, \beta \leq \delta$.

Vamos a tomar esta idea para un tipo especial de categorías, que también denotaremos como I .

Decimos que la categoría (pequeña) I es filtrante si:

a) $\text{Obj}(I) \in \text{Set}$ es dirigido y sus flechas coinciden con la relación de orden.

b) Dados $\alpha \xrightarrow[\psi]{\varphi} \beta$, existe $\beta \xrightarrow{\tau} \delta$ tal que $\tau \circ \varphi = \tau \circ \psi$. Llamaremos a un colímite filtrante cuando su categoría de índices lo es.

PROPOSICIÓN 1.1.1. Sea $\Lambda \rightarrow \text{Cat}$ sistema filtrante, entonces existe $\text{colim}_\Lambda X_\alpha$

Prueba: [12]. □

1.1.1. FUNTORES ADJUNTOS

Sean C, D categorías y los funtores $C \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} D$ y τ un isomorfismo natural tal que:

$$C^{op} \times D \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{hom}_C(-, G-)} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{\text{hom}_D(F-, -)} \end{array} \text{Set}$$

Es decir, se tiene una biyección natural $[F(X), Y]_D \xrightarrow{\tau_X^Y} [X, G(Y)]_C$. Decimos que (F, G, τ) es una *adjunción*. Diremos que (F, G) es un *par adjunto*, F es *adjunto a izquierda* de G , o que G es *adjunto a derecha* de F cuando existe un isomorfismo natural τ tal que (F, G, τ) sea una adjunción. La importancia de los funtores adjuntos es enorme, y acerca del tema uno puede extenderse bastante. En [12] podemos encontrar una tesis basada completamente en funtores adjuntos, donde se prueba el siguiente teorema fundamental:

TEOREMA 1.1.2. Si (F, G) es un par adjunto, entonces F preserva colímites y G preserva límites.

Prueba: [12]. □

Ejemplo 1.1. Un caso conocido de funtores adjuntos proveniente del Álgebra conmutativa es el de los funtores $L : - \otimes N$ y $R = \text{hom}(N, -)$, esto nos permitirá probar que el producto tensorial conmuta con colímites filtrantes:

$$\text{hom}(\varinjlim(M_i \otimes N), P) \cong \varprojlim \text{hom}(M_i \otimes N, P) \quad (1.1)$$

$$\cong \varprojlim \text{hom}(N, \text{hom}(M_i, P)) \quad (1.2)$$

$$\cong \text{hom}(N, \varprojlim \text{hom}(M_i, P)) \quad (1.3)$$

$$\cong \text{hom}(N, \text{hom}(\varinjlim M_i, P)) \quad (1.4)$$

$$\cong \text{hom}((\varinjlim M_i) \otimes N, P) \quad \forall P \in \text{Mod}_A \quad (1.5)$$

$$\implies \varinjlim(M_i \otimes N) \cong (\varinjlim M_i) \otimes N$$

Mencionemos brevemente algunos ejemplos muy importantes de colímites que poseen diversas propiedades, las cuales pueden ser estudiadas en [8, 12].

1.1.2. LEMA DE YONEDA

LEMA 1.1.3. (YONEDA) Sea $F : C^{op} \rightarrow \text{Set}$ un funtor (conocido como funtor *contravariante*, o $F \in \text{Set}^{C^{op}}$), y $A \in \text{Obj}(C)$, entonces existe una biyección natural

Nombre	Diagrama
Coproducto (binario)	* *
Objeto inicial	0
Push Out	$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$
Coecualizador	* \rightrightarrows *

CUADRO 1.1: Colímites comunes.

$$\text{Nat}(\text{hom}_C(-, A), F) \cong F(A)$$

Definida mediante $\tau \mapsto \tau(id_A)$, con inversa $a \mapsto \theta_a$, donde $\theta_a : \text{hom}_C(-, A) \rightarrow F$ que lleva $h \in \text{hom}_C(X, A)$ a $(Fh)(a) \in F(X)$ para cualquier $X \in \text{Obj}(C)$. \square

A los funtores del tipo $\text{hom}_C(-, A)$, que denotaremos simplemente como $[-, A]$ los llamaremos *funtores representables* y el teorema siguiente dice que cualquier objeto de la categoría $\text{Set}^{C^{op}}$ se puede obtener como colímite de representables. Primero daremos una pequeña definición.

DEFINICIÓN 1.1.4. Con el mismo F del lema anterior, se define Λ_F llamado *diagrama de F* a la categoría de pares (X, x) con $X \in \text{Obj}(C)$ y $x \in F(X)$ con morfismos

$$\text{hom}_{\Lambda_F}((X, x), (Y, y)) = \{f \in \text{hom}_C(X, Y) / F(f)(y) = x\}$$

TEOREMA 1.1.5. $F = \text{colim}_{\Lambda_F} [-, X]$

Prueba: [8]. \square

1.2. TRANSFORMACIONES DINATURALES

Dadas las categorías C, B y funtores $S, T : C^{op} \times C \rightarrow B$, una transformación dinatural $\alpha : S \xrightarrow{\bullet} T$ es una aplicación que asigna todo objeto $c \in \text{Obj}(C)$, un morfismo $\alpha_c : S(c, c) \rightarrow T(c, c)$ en B , llamado *componente de α en c* tal que para cada flecha $f : c \rightarrow c'$ en C , el diagrama hexagonal

$$\begin{array}{ccccc} & & S(c, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & T(c, c) \\ & \nearrow^{S(f, id)} & & & \searrow^{T(id, f)} \\ S(c', c) & & & & T(c, c') \\ & \searrow_{S(id, f)} & & & \nearrow_{T(f, id)} \\ & & S(c', c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & T(c', c') \end{array}$$

1.2.1. END Y COEND

DEFINICIÓN 1.2.1. Dada una categoría C , un *end* de $S : C^{op} \times C \rightarrow X$ es un par $\langle e, \omega \rangle$, donde e es un objeto de C y $\omega : e \rightrightarrows S$ es una transformación dinatural (donde consideramos $e : C^{op} \times C \rightarrow X$ functor constante a e) con la propiedad de que para cualquier $\beta : x \rightrightarrows S$ existe una única flecha $h : x \rightarrow e$ en X tal que $\beta_a = \omega_a h$ para todo $a \in \text{Obj}(C)$.

A las transformaciones dinaturales de la forma $\beta : x \rightrightarrows S$ las nombramos por *cuña* o *wedge*. Para cada flecha $f : b \rightarrow c$, tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\beta_b} & S(b, b) \\
 \downarrow h & \searrow \omega_b & \nearrow S(id, f) \\
 & & S(b, c) \\
 \downarrow h & \searrow \beta_c & \nearrow S(f, id) \\
 e & \xrightarrow{\omega_c} & S(c, c)
 \end{array}$$

Haciendo un pequeño abuso de lenguaje, el objeto e es llamado también end, y lo denotaremos $e = \int S(c, c)$. Dados dos funtores $U, V : C \rightarrow X$, estos definen un functor $\text{hom}_X(U-, V-)^c : C^{op} \times C \rightarrow \text{Set}$, entonces tomando un conjunto Y , un wedge $\tau : Y \rightrightarrows \text{hom}_X(U-, V-)$, con componentes $\tau_c : Y \rightrightarrows \text{hom}_X(Uc, Vc)$ (c en C), el cual asigna a cada $y \in Y$ y cada c en C , una flecha $\tau_{c,y} : Uc \rightarrow Vc$ en X , y ya que manera que el rombo siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{hom}_X(Uc, Vc) & \\
 \tau_c \nearrow & & \searrow - \circ Uf \\
 Y & & \text{hom}_X(Ub, Vc) \\
 \tau_b \searrow & & \nearrow Vf \circ - \\
 & \text{hom}_X(Ub, Vb) &
 \end{array}$$

evaluado en y , tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Ub & \xrightarrow{\tau_{b,y}} & Vb \\
 Uf \downarrow & & \downarrow Vf \\
 Uc & \xrightarrow{\tau_{c,y}} & Vc
 \end{array}$$

lo cual declara que $\tau_{-,y} : U \rightrightarrows V$ (es una transformación natural), por lo que hemos encontrado una función $Y \rightarrow \text{Nat}(U, V)$ ($y \mapsto \tau_{-,y}$) y es la única que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{\tau_c} & \text{hom}_X(Uc, Vc) \\
\vdots \downarrow & & \downarrow = \\
\text{Nat}(U, V) & \xrightarrow{\omega_c} & \text{hom}_X(Uc, Vc)
\end{array}$$

conmute, donde ω_c lleva cada $U \xrightarrow{\lambda} V$ a su componente $Uc \xrightarrow{\lambda_c} Vc$, con lo cual concluimos que

$$\text{Nat}(U, V) = \int_c \text{hom}(Uc, Vc)$$

PROPOSICIÓN 1.2.2. (End de una transformación natural). Dada una transformación natural $\gamma : S \Rightarrow S'$ entre funtores $S, S' : C^{op} \times C \rightarrow X$ donde ambos poseen ends $\langle e, \omega \rangle$ y $\langle e', \omega' \rangle$, existe una única flecha $g = \int_c \gamma_{c,e'} : e \rightarrow e'$ en X tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\int_c S(c, c) & \xrightarrow{\omega_c} & S(c, c) \\
\downarrow \int_c \gamma_{c,c} & & \downarrow \gamma_{c,e'} \\
\int_c S'(c, c) & \xrightarrow{\omega'_c} & S'(c, c)
\end{array}$$

Prueba: La composición $\gamma_{c,e'} \circ \omega_c$ define un wedge, y ya que ω' es el wedge universal para S' , se induce el morfismo que denotamos $\int_c \gamma_{c,e'}$ y llamaremos *end de la transformación natural* γ . Ahora, si tenemos otra transformación $\gamma' : S' \xrightarrow{\bullet} S''$

$$\begin{array}{ccc}
\int_c S(c, c) & \xrightarrow{\omega_c} & S(c, c) \\
\downarrow \int_c \gamma_{c,c} & & \downarrow \gamma_{c,e'} \\
\int_c S'(c, c) & \xrightarrow{\omega'_c} & S'(c, c) \\
\downarrow \int_c \gamma'_{c,c} & & \downarrow \gamma'_{c,c} \\
\int_c S''(c, c) & \xrightarrow{\omega''_c} & S''(c, c)
\end{array}$$

□

así se deduce la regla $\int_c (\gamma' \circ \gamma)_{c,c} = \int_c \gamma'_{c,c} \circ \int_c \gamma_{c,c} \dots$ (*)

TEOREMA 1.2.3. (Teorema del parámetro para ends). Sea $T : P \times C^{op} \times C \rightarrow X$ un funtor tal que, para cada $p \in P$, $T(p, -, -)$ posea un end

$$\omega_p : \int_c T(p, c, c) \xrightarrow{\bullet} T(p, -, -)$$

en X , entonces existe un único functor $U : P \rightarrow X$ con $Up = \int_c T(p, c, c)$ tal que las componentes $(w_p)_c$ del wedge, definen una transformación natural en p .

Prueba: Cada morfismo $f : s : p \rightarrow q$ en P , define una transformación natural $\gamma = T(s, -, -) : T(p, -, -) \Rightarrow T(q, -, -)$, entonces gracias a la proposición anterior existe un functor $U : P \rightarrow X$ con $Up = \int_c T(p, c, c)$ (para objetos p de P) y $Us = \int_c T(s, c, c)$ con s morfismo como antes, U resulta ser functorial por la regla de composición (*) y podemos resumir lo anterior denotando $U = \int_c T(-, c, c)$. \square

PROPOSICIÓN 1.2.4. Sea $S : P^{op} \times P \times C^{op} \times C \rightarrow X$ un functor tal que el end $\int_c S(p, q, c, c)$ existe para todo par (p, q) de objetos de P , lo cual nos permite, por el teorema del parámetro, inducir un functor (bifunctor) $P^{op} \times P \rightarrow X$, y considerando a S como un bifunctor $(P \times C)^{op} \times (P \times C) \rightarrow X$, entonces existe un isomorfismo

$$\theta : \int_{(p,c)} S(p, c, p, c) \cong \int_p \left[\int_c S(p, p, c, c) \right]$$

Donde el 'end doble' en la izquierda existe si y solo si existe el end derecho, y θ es el único morfismo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \int_{(p,c)} S(p, c, p, c) & \xrightarrow{\xi_{(p,c)}} & S(p, p, c, c) \\ \downarrow \theta & & \downarrow = \\ \int_p \left[\int_c S(p, p, c, c) \right] & \xrightarrow{\rho_p} \int_c S(p, p, c, c) & \xrightarrow{\omega_{p,p,c}} S(p, p, c, c) \end{array}$$

conmuta, donde los morfismos ξ, ρ y ω son los wedges universales pertenecientes a sus respectivos ends

Prueba: Para cada par (p, q) en $P \times P$, existe un end

$$\omega_{p,q} : \int_c S(p, q, c, c) \xrightarrow{\bullet} S(p, q, -, -)$$

para cada x , cada familia P -indexada $\rho_p : x \rightarrow \int_c S(p, p, c, c)$ de flechas en X determina una familia $(P \times C)$ -indexada $\xi_{p,c}$ como las composiciones

$$\xi_{p,c} : x \xrightarrow{\rho_p} \int_c S(p, p, c, c) \xrightarrow{\omega_{p,p,c}} S(p, p, c, c)$$

donde $\omega_{p,p,c} = (\omega_{p,p})_c$, fijando p , $\xi_{p,-}$ es wedge en c (es constante). Recíprocamente, ya que $\omega_{p,p}$ es universal, cada familia $(P \times C)$ -indexada que es natural en c , tiene justo esa forma de composición, para un único ρ .

Además, ρ es wedge si y solo si el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\rho_p} & \int_c S(p, p, c, c) \\
 \downarrow \rho_q & & \downarrow \int_c S(p, s, c, c) \\
 \int_c S(q, q, c, c) & \xrightarrow{\int_c -} & \int_c S(p, q, c, c)
 \end{array}$$

para cualquier flecha $s : p \rightarrow q$. Correspondientemente, ξ es wedge (para algún c) si y solo si

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\xi_{p,c}} & S(p, p, c, c) \\
 \downarrow \xi_{q,c} & & \downarrow S(p, s, c, c) \\
 S(q, q, c, c) & \xrightarrow{S(s, q, c, c)} & S(p, q, c, c)
 \end{array}$$

conmuta.

Ahora con estos dos cuadrados, formamos un cubo conmutativo con las aristas

$$id_x, \omega_{p,p,c}, \omega_{p,q,c}, \text{ y } \omega_{q,q,c}$$

como a continuación:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x & \xrightarrow{\rho_p} & \int_c S(p, p, c, c) \\
 & \swarrow id_x & \vdots & & \swarrow \omega_{p,p,c} \\
 x & \xrightarrow{\xi_{p,c}} & S(p, p, c, c) & & \downarrow \int_c S(p, s, c, c) \\
 \downarrow \xi_{q,c} & & \downarrow \rho_q & & \downarrow \int_c S(p, s, c, c) \\
 & & \int_c S(q, q, c, c) & \xrightarrow{\quad} & \int_c S(p, q, c, c) \\
 & \swarrow \omega_{q,q,c} & \vdots & & \swarrow \omega_{p,q,c} \\
 S(q, q, c, c) & \xrightarrow{\quad} & S(p, q, c, c) & &
 \end{array}$$

Ya que las caras izquierda, derecha, superior e inferior conmutan, entonces la cara posterior conmuta si y solo si conmuta la cara anterior conmuta para todo c . Por lo tanto ρ es un wedge (en p) si y solo si ξ es un wedge (en (p, c)), esto dice que existe una correspondencia biyectiva entre los wedges de x a $\int_c S(-, -, c, c)$ y los wedges de x a S . Esto implica el isomorfismo por la propiedad universal del end. \square

COROLARIO 1.2.5. (FUBINI) Sea $S : P^{op} \times P \times C^{op} \times C \rightarrow X$ un functor tal que los ends $\int_c S(p, q, c, c)$ y $\int_c S(p, q, c, c)$ existen para todos p, q objetos en P , y b, c objetos en C . Por el teorema del parámetro, podemos considerar estos ends como bifuntores (de p, q o b, c , respectivamente), entonces existe un isomorfismo

$$\theta : \int_p [\int_c S(p, p, c, c)] \cong \int_c [\int_p S(p, p, c, c)]$$

donde el end exterior de la derecha existe si y solo si existe también el end exterior de la izquierda, y θ es el único morfismo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \int_p \int_c S(p, p, c, c) & \xrightarrow{\xi(p,c)} & \int_c S(p, p, c, c) & \longrightarrow & S(p, p, c, c) \\ \downarrow \theta & & & & \downarrow = \\ \int_c \int_p S(p, p, c, c) & \xrightarrow{\rho_p} & \int_p S(p, p, c, c) & \xrightarrow{\omega_{p,p,c}} & S(p, p, c, c) \end{array}$$

1.3. EXTENSIONES DE KAN

Dados los funtores $F : C \rightarrow E$ y $K : C \rightarrow D$, una *Extensión de Kan izquierda de F a lo largo de K* es un functor $\text{Lan}_K F : D \rightarrow E$ junto con una transformación natural $\eta : F \Rightarrow \text{Lan}_K F \circ K$ tal que cualquier otro par $(G : D \rightarrow E, \gamma : F \Rightarrow GK)$, existe una única transformación natural $\alpha : \text{Lan}_K F \Rightarrow G$, como se aprecia en la siguiente ilustración.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{K} & D \\ & \searrow F & \downarrow \text{Lan}_K F \\ & & E \end{array} & & \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{K} & D \\ & \searrow F & \downarrow G \\ & & E \end{array} \\ & & \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{Lan}_K F} & \\ D & \downarrow \alpha & E \\ & \xrightarrow{G} & \end{array} \end{array}$$

Dualmente, se define una *extensión de Kan derecha de F a lo largo de K* $\text{Ran}_K F$.

Para el siguiente resultado, vamos a suponer K fijo.

TEOREMA 1.3.1. Si las extensiones de Kan (derechas o izquierdas) existen para todo F , entonces los funtores $\text{Lan}_K -$ y $\text{Ran}_K -$ son, respectivamente, los adjuntos izquierdo y derecho del functor $- \circ K$.

Prueba: Cualquier par (G, γ) como en la definición de extensión izquierda de Kan, induce una transformación natural

$$\gamma^* : \text{Nat}(G, -) \Rightarrow \text{Nat}(F, - \circ K)$$

En efecto, si tenemos $G' : D \rightarrow E$ y $\beta : G \Rightarrow G'$, entonces, $\gamma^*(\beta) = \beta K \circ \gamma$.

La propiedad universal de la extensión izquierda de Kan nos dice que la transformación

natural dada por el par $(\text{Lan}_K F, \eta)$, osea η^* , es isomorfismo natural. Así tenemos para cada G , un isomorfismo

$$\text{Nat}(\text{Lan}_K F, G) \cong \text{Nat}(F, G \circ K)$$

natural en G , lo cual es lo que se buscaba. Análogamente se concluye lo buscado para $\text{Ran}_K F$. \square

1.3.1. CATEGORÍA COMA

DEFINICIÓN 1.3.2. Dadas las categorías y funtores

$$E \xrightarrow{T} C \xleftarrow{S} D$$

la *categoría coma* $(T \downarrow S)$ tiene como objetos todas las ternas $\langle e, d, f \rangle$, con $d \in \text{Obj}D, e \in \text{Obj}E$ y $f : Te \rightarrow Sd$; y como flechas $\langle e, d, f \rangle \rightarrow \langle e', d', f' \rangle$ todos los pares $\langle h, k \rangle$ de flechas $k : e \rightarrow e', h : d \rightarrow d'$ tales que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} Te & \xrightarrow{Tk} & Te' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Sd & \xrightarrow{Sh} & Sd' \end{array}$$

Si consideramos la categoría $\mathbf{1}$ como la cual posee un único objeto y como único morfismo, la identidad. Un objeto b de C puede ser visto como un functor $B : \mathbf{1} \rightarrow C$, entonces haciendo $T = b$ obtenemos la categoría coma $(b \downarrow S)$ y, haciendo $S = id$, la categoría $(b \downarrow C)$

TEOREMA 1.3.3. Dado $K : C \rightarrow D$, sea $F : C \rightarrow E$ un functor tal que la composición $(K \downarrow d) \xrightarrow{p} C \xrightarrow{F} E$ tiene, para cada $d \in D$, un colímite en E , y hacemos

$$Ld = \varinjlim((K \downarrow d) \xrightarrow{p^d} C \xrightarrow{F} E)$$

Cada $g : d \rightarrow d'$ induce un morfismo $Lg : \varinjlim(Fp^d) \rightarrow \varinjlim(Fp^{d'})$, con esto se define un functor $L : D \rightarrow E$ y para cada $c \in C$, las componentes $\lambda_{id_{Kc}} = \epsilon_c$ del cocono colímite definen una transformación natural ϵ y (L, ϵ) es la extensión izquierda de F a lo largo de K , y tenemos

Prueba: [13]. \square

TEOREMA 1.3.4. Dados los funtores $K : M \rightarrow C$ y $T : M \rightarrow A$ tal que para cualquier par m, m' en M y cualquier c en C , las copotencias $C(Km', c).Tm = \bigsqcup_{C(Km, c)} Tm$ existen en A , entonces T posee una extensión izquierda de Kan $L = \text{Lan}_K T$ a lo largo de K si para cada c en C el coend $\int^m C(Km, c).Tm$ existe

$$Lc = (\text{Lan}_K T)c = \int^m C(Km, c).Tm$$

Prueba: Por el teorema del parámetro (para coends), podemos considerar este coend como functor de c , si consideramos un functor $S : C \rightarrow A$, vemos

$$A(Tm, SKm) \cong \text{Nat}(C(Km, -), A(Tm, S-)) \cong \int_c \text{Ens}(C(Km, c), A(Tm, Sc)) \quad (1.6)$$

Donde la categoría **Ens** es aquella definida por MacLane en [8], muy cercana a **Set** pero con diferencias técnicas importantes. La siguiente sucesión de isomorfismos

$$\begin{aligned} \text{Nat}(L, S) &\cong \int_c A(Lc, Sc) \quad (\text{Fórmula de Nat como end}) \\ &\cong \int_c A\left(\int^m C(Km, c).Tm, Sc\right) \quad (\text{Definición de } L) \\ &\cong \int_c \int_m A(C(Km, c).Tm, Sc) \quad (\text{Continuidad de } A(-, Sc)) \\ &\cong \int_c \int_m \text{Ens}(C(Km, c), A(Tm, Sc)) \quad (\text{Definición de copotencia}) \\ &\cong \int_m \int_c \text{Ens}(C(Km, c), A(Tm, Sc)) \quad (\text{Fubini}) \\ &\cong \int_m A(Tm, SKm) \quad (\text{Por (1.6)}) \\ &\cong \text{Nat}(T, SK) \quad (\text{Fórmula de Nat como end}) \end{aligned}$$

nos permiten concluir. □

TEOREMA 1.3.5. (EXTENSÓN DE YONEDA) Sea $F : D \rightarrow E$ functor, donde E es cocompleta, entonces:

1. Existe un functor $\hat{F} : \text{Set}^{D^{op}} \rightarrow E$, el cual preserva colímites, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \text{Set}^{D^{op}} & \\ Y \nearrow & & \searrow \hat{F} \\ D & \xrightarrow{F} & E \end{array}$$

conmuta salvo isomorfismo natural, donde Y denota el encaje de Yoneda.

2. La extensión \hat{F} es única salvo isomorfismo natural y está dado por la extensión izquierda de Kan $\text{Lan}_Y F$ de F a lo largo de Y .

3. El funtor $U : E \rightarrow \text{Set}^{D^{op}}$ que envía un objeto ξ de E a $E(F-, \xi)$ es adjunto derecho de la extensión de Yoneda \hat{F} . \square

1.4. CATEGORÍA DE OBJETOS PUNTEADOS

DEFINICIÓN 1.4.1. Sea C una categoría con objeto final 1 , Un objeto punteado $(X, *)$ es un objeto X de C junto a un morfismo $* : 1 \rightarrow X$, llamado *punto base de X* . La categoría de objetos punteados de C , denotado C_* , es definida como la categoría coma $1 \downarrow C$.

PROPOSICIÓN 1.4.2. Sea $F : C \rightleftarrows D : U$ una adjunción entre categorías co-completas con objetos finales. Existe una adjunción inducida $F_* : C_* \rightleftarrows D_* : U_*$

Prueba: Definiremos primero U_* , si 1 es el objeto final de D , entonces $U(1)$ es objeto final de C , pues adjunciones derechas preservan límites. Definimos $U_* : D_* \rightarrow C_*$ el funtor $(Y, *) \mapsto (UY, U*)$. Sea F_* el funtor que envía un objeto $(X, *)$ de C_* al pushout

$$\begin{array}{ccc} F(U(1)) & \xrightarrow{F_*} & FX \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & F_*(X, *) \end{array}$$

en D con su punto base el morfismo inferior del diagrama. Comprobar la adjunción es un ejercicio de rutina. \square

El propósito de la tesis no es profundizar en el tema de Categorías y Funtores sino mencionar los conceptos necesarios para continuar con la lectura, sin embargo resalto la importancia y belleza de la Teoría de Categorías, que todo interesado en tópicos avanzados (y no tan avanzados) de Topología Algebraica, Geometría Algebraica, K-Teoría, etc. debe leer. Una obra clásica y muy completa es *Categories for working mathematician* de MacLane [8].

1.5. SUCESIONES ESPECTRALES

Un módulo \mathbb{Z} -bigrado es una familia $E = \{E_{p,q}\}$ de módulos, uno por cada par de índices $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Un *diferencial* $d : E \rightarrow E$ de bígado $(-r, r - 1)$ es una familia de homomorfismos

$\{d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r,q+r-1}\}$, uno por cada p, q tal que $d^2 = 0$.

El módulo de homología $H(E) = H(E, d)$ de E bajo este diferencial, es el módulo \mathbb{Z} -bigraduado $\{H_{p,q}(E)\}$ definido de forma natural como

$$H_{p,q}(E) = \text{Ker}[d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r,q+r-1}] / dE_{p+r,q-r+1}$$

Una k -sucesión espectral $E = E^r, d^r$ es una sucesión E^k, E^{k+1}, \dots de módulos \mathbb{Z} -bigraduados, cada uno con una diferencial

$$d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r, \quad r = k, k+1, \dots$$

de bígado $(-r, r-1)$, con isomorfismos

$$H(E^r, d^r) \cong E^{r+1}, \quad r = k, k+1, \dots$$

Esto quiere decir que cada E^{r+1} es el módulo de homología bigraduado del precedente (E^r, d^r) .

El módulo bigraduado E^k es el *término inicial* de la sucesión espectral. Si E' es otra sucesión espectral, un *homomorfismo de sucesiones espectrales* es una familia de homomorfismos

$$f^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}'^r, \quad r = k, k+1, \dots$$

con $d^r f^r = f^r d^r$ y tal que cada $f_*^r = H(E^r) \rightarrow H(E'^r)$ corresponde a $f^{r+1} = E^{r+1} \rightarrow E'^{r+1}$ (mediante el isomorfismo por definición).

Consideramos E^{r+1} identificado con $H(E^r)$, sea Z^k el módulo bigraduado $Z_{p,q}^k = \text{Ker}[d^k : E_{p,q}^k \rightarrow E_{p-k,q+k-1}^k]$ y sea B^k el módulo bigraduado $B_{p,q}^k = d^k(E_{p+k,p-k+1}^k)$, entonces $B^k \subset Z^k$ y $E^{k+1} = Z^k / B^k$.

Sea $Z(E^{k+1})$ el módulo bigraduado $Z(E^{k+1})_{p,q} = \text{Ker}[d^{k+1} : E_{p,q}^{k+1} \rightarrow E_{s-k-1,q+k}^{k+1}]$ y sea $B(E^{k+1})$ el módulo bigraduado $B(E^{k+1})_{p,q} = d^{k+1}(E_{p+k+1,t-k}^{k+1})$.

Por el teorema de isomorfismo de Noether, existen módulos bigraduados Z^{k+1} y B^{k+1} de Z^k conteniendo B^k tales que $Z(E^{k+1})_{p,q} = Z_{p,q}^{k+1} / B_{p,q}^k$ y $B(E^{k+1})_{p,q} = B_{p,q}^{k+1} / B_{p,q}^k$ para todo par p, q . Se sigue que $B^{k+1} \subset Z^{k+1}$ y tenemos

$$B^k \subset B^{k+1} \subset Z^{k+1} \subset Z^k$$

Procediendo por inducción, obtenemos la cadena de submódulos

$$B^k \subset B^{k+1} \subset \dots \subset B^r \subset \dots \subset Z^r \subset \dots \subset Z^{k+1} \subset Z^k$$

tal que $E^{r+1} = Z^r/B^r$. Definimos los módulos bigraduados $Z^\infty = \bigcap_r Z^r$, $B^\infty = \bigcup_r B^r$ y $E^\infty = Z^\infty/B^\infty$.

1.5.1. MÓDULOS FILTRADOS

Una *filtración* de un módulo A es una familia de submódulos $F_p A$, uno por cada $p \in \mathbb{Z}$, con

$$\cdots \subset F_{p-1}A \subset F_p A \subset F_{p+1}A \subset \cdots \quad (1.7)$$

Toda filtración F de A determina un módulo asociado graduado $G^F A = \{(G^F A)_p = F_p A/F_{p-1}A\}$. Si F y F' son filtraciones de A y A' respectivamente, un *homomorfismo de módulos filtrados* $\alpha : A \rightarrow A'$ es un homomorfismo de módulos tal que $\alpha(F_p A) \subset F'_p A'$.

Una *filtración de un complejo de cadenas* (A, ∂) , es una familia de subcomplejos de cadenas $F_p A$ satisfaciendo (1.7) en cada dimensión n . Esta filtración induce una filtración en el módulo graduado de homología $H(A)$, con $F_p(H(A))$ definido como la imagen de $H(F_p A)$ bajo la inyección $F_p A \rightarrow A$.

La filtración del complejo de cadenas (A, ∂) determina una filtración $\{F_p A_n\}$ para cada A_n , y el diferencial ∂ de A induce homomorfismos $\partial : F_p A_n \rightarrow F_p A_{n-1}$ para cada par p, n .

La familia $\{F_p A_n\}$ es un módulo \mathbb{Z} -bigraduado, pero resultará conveniente indexarla mediante (p, q) donde p es como antes y $q = n - p$, luego este módulo bigraduado tiene la forma $\{F_p A_{p+q}\}$.

Una filtración de (más generalmente) un módulo \mathbb{Z} -graduado es llamada *acotada* si para cada grado n existen $s = s(n) < t = t(n)$ tal que $F_s A_n = 0$ y $F_t A_n = A_n$, es decir

$$0 = F_s A_n \subset F_{s+1} A_n \subset \cdots \subset F_t A_n = A_n$$

Particularmente, llamamos a F *canónicamente acotada* si $F_{-1} A_n = 0$ y $F_n A_n = A_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Decimos que una sucesión espectral $\{E^r, d^r\}$ converge a un módulo graduado H ($E_p^r \Rightarrow H$) si existe una filtración F de H y para cada p , isomorfismos $E_p^\infty \cong F_p H/F_{p-1} H$ de módulos graduados. Aquí, E_p^r denota el módulo graduado $\{E_{p,q}^r, q = 0, \pm 1, \dots\}$, entonces

TEOREMA 1.5.1. Toda filtración F de un complejo de cadenas (A, ∂) determina una sucesión espectral (E^r, d^r) , $r = 1, 2, \dots$ tal que

$$E_p^1 \cong H(F_p A/F_{p-1} A)$$

es decir $E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(F_p A / F_{p-1} A)$. Si F es acotada, entonces $E_p^r \Rightarrow H(A)$, lo cual se entiende de la definición como

$$E_{p,q}^\infty \cong F_p(H_{p+q} A) / F_{p-1}(H_{p+q} A)$$

o simplemente $E_p^\infty \cong F_p(HA) / F_{p-1}(HA)$.

Prueba: [9, 14, 15]. □

1.5.2. BICOMPLEJOS DE CADENAS

DEFINICIÓN 1.5.2. Un bicomplejo de cadenas K es una familia $\{K_{p,q}\}$ de módulos con dos familias de diferenciales

$$\partial_h : K_{p,q} \rightarrow K_{p-1,q} \text{ y } \partial_v : K_{p,q} \rightarrow K_{p,q-1}$$

los cuales son homomorfismos definidos para todos los pares de enteros p, q , cumpliendo que

$$\partial_v \partial_v = 0, \partial_h \partial_h = 0, \partial_v \partial_h + \partial_h \partial_v = 0$$

Un bicomplejo de cadenas es *positivo* si reposa en el primer cuadrante ($K_{p,q} = 0$ cuando $p < 0$ o $q < 0$). Un homomorfismo $f : K \rightarrow L$ de bicomplejos de cadenas es una familia de homomorfismos $\{f : K_{p,q} \rightarrow L_{p,q}\}$ tal que $f \partial_h = \partial_h f$ y $f \partial_v = \partial_v f$.

La *homología vertical* H^v de K es formada respecto de ∂_v como

$$H_{p,q}^v(K) = \text{Ker}(\partial_v : K_{p,q} \rightarrow K_{p,q-1}) / \partial^v K_{p,q+1}$$

la cual es un módulo bigraduado con diferencial $\partial_h : H_{p,q}^v \rightarrow H_{p-1,q}^v$ inducido por el ∂_h original de K , e inducimos una nueva homología, llamada *homología horizontal* H^h , donde

$$H_p^h H_q^v(K) = \text{Ker}(\partial_h : H_{p,q}^v \rightarrow H_{p-1,q}^v) / \partial_h H_{p+1,q}^v$$

Cada bicomplejo de cadenas K determina un complejo de cadenas $\text{Tot}(K)$, donde

$$\text{Tot}(K)_n = \bigoplus_{p+q=n} K_{p,q}, \quad \partial = \partial_h + \partial_v : X_n \rightarrow X_{n-1}$$

La *filtración horizontal* F^h de $\text{Tot}(K)_n$ es definida por los subcomplejos $F_p^h \text{Tot}(K)_n = \bigoplus_{m \leq p} K_{h,n-m}$.

La sucesión espectral asociada a F^h es llamada *sucesión espectral horizontal* E^h .

TEOREMA 1.5.3. Para la sucesión espectral horizontal E^h de un bicomplejo de cadenas K , existen isomorfismos naturales

$$E_{p,q}^{h^2} \cong H_p^h H_q^v(K)$$

Si $K_{p,q} = 0$ cuando $p < 0$, $E^{h^2} \Rightarrow H(\text{Tot}(K))$. Si K es positivo, E^h reposa en el primer cuadrante.

Prueba: [9]. □

Capítulo 2

HOMOTOPÍA SIMPLICIAL

La categoría \mathbf{sSet} será un primer ejemplo de que se puede encontrar la homotopía fuera de \mathbf{Top} , pero estando cercanamente relacionada a una subcategoría de esta (los CW-complejos). Aunque originalmente su concepción y la manera de probar los resultados eran más un asunto de combinatoria, el desarrollo acelerado de la teoría de categorías permitió aplicar sus herramientas en \mathbf{sSet} para definir y demostrar en términos categóricos. En este capítulo combinamos ambas perspectivas, pues para trabajar completamente en términos categóricos, tendríamos que definir *extensiones anodinas* (ver [3, 16]), lo cual no es indispensable para los demás capítulos.

Comenzamos considerando la categoría Δ cuyos objetos son los conjuntos finitos $\mathbf{n} = \{0, \dots, n\}$ con morfismos las aplicaciones monótonas no decrecientes $\mu : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$, es decir $\mu(i) \leq \mu(j)$ si $i \leq j$. Existen dos tipos de morfismos de este tipo que generan todos los demás:

$d^i : \mathbf{n} - \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{n}$ y $s^j : \mathbf{n} + \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{n}$ definidas por

$$d^i(k) = \begin{cases} k & , \quad k < i \\ k + 1 & , \quad k \geq i \end{cases}$$

$$s^j(k) = \begin{cases} k & , \quad k \leq j \\ k - 1 & , \quad k > j \end{cases}$$

satisfaciendo las siguientes relaciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} d^j d^i = d^i d^{j-1} & , \quad i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & , \quad i < j \\ s^j d^j = 1 = s^j d^{j+1} & \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & , \quad i > j + 1 \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & , \quad i \leq j \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Hemos dicho que todos los otros morfismos de Δ se generan a partir de los mencionados anteriormente, pues bien, aclaremos un poco mejor esto.

PROPOSICIÓN 2.0.1. Todo morfismo μ de Δ se puede expresar como composiciones de d^i y s^j .

Prueba: [4]. □

Un detalle evidente es que los d^i son inyectivos y los s^j epiyectivos, luego mediante las relaciones dadas en (*), estas permiten que μ pueda descomponerse $\mu = \Sigma \circ \delta$ donde Σ es inyectivo y δ es epiyectivo.

DEFINICIÓN 2.0.2. Sea C una categoría. Un *objeto simplicial* de C es un functor $K : \Delta^{op} \rightarrow C$, llamamos *n-símplices* de K a los elementos de K_n . Cuando $C = \text{Set}$, llamamos a K *conjunto simplicial*

Denotaremos simplemente $d_i = K(d^i)$ y $s_j = K(s^j)$. Debido a la característica de K de ser contravariante, deducimos a partir de (*) las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_i d_j = d_{j-1} d_i & , \quad i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & , \quad i < j \\ d_j s_j = id = d_{j+1} s_j & \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & , \quad i > j + 1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & , \quad i \leq j \end{array} \right. \quad (2.2)$$

En adelante trabajaremos en general con la categoría **Set** a menos que se especifique alguna otra categoría. Decimos que un *n-símplice* es *degenerado* si es imagen de algún s_j , de lo contrario será *no degenerado*.

Sean K y L dos conjuntos simpliciales, un *mapa simplicial entre K y L* es una transformación natural $f : K \rightarrow L$. Encontramos natural entonces que los conjuntos simpliciales formen una categoría la cual denotaremos **sSet**.

Ejemplo 2.1. : El *n-estándar simplex* $\Delta[n]$ es definido por

$$\Delta[n] = \text{hom}_{\Delta}(-, \mathbf{n})$$

es decir

$$\Delta[n]_k = \{(i_0, i_1, \dots, i_k) / 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

Este conjunto simplicial es precisamente lo que conocíamos como funtor representable, luego por lema de Yoneda

$$\text{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n], Y) \cong Y_n$$

Particularmente

$$\text{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n], \Delta[m]) \cong \Delta[m]_n = \text{hom}_{\Delta}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \quad (2.3)$$

DEFINICIÓN 2.0.3. Un conjunto simplicial K es llamado *complejo de Kan* si satisface la *condición de extensión*: Si por cada colección de $(n+1)$ n -símplices $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ que cumple $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i, i < j, i \neq k, j \neq k$ (a esto le llamamos *condición de compatibilidad*), existe un $(n+1)$ -símplice x tal que $\partial_i x = x_i$, para $i \neq k$.

Ejemplo 2.2. : Sea $\Delta_n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) / 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el complejo simplicial estándar (como lo conocemos en Homología simplicial). Si X es un espacio topológico, un n -símplice singular de X es una función continua $f : \Delta_n \rightarrow X$ y denotaremos $S_n(X)$ el conjunto formado por estos, entonces definimos el conjunto simplicial $S(X)$ mediante los morfismos

$$\begin{aligned} (d_i f)(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) &= f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n) \\ (s_j f)(t_0, t_1, \dots, t_{n+1}) &= f(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n) \end{aligned}$$

LEMA 2.0.4. $S(X)$ es un complejo de Kan

Prueba: Como la unión de cualquier colección de $(n+1)$ caras de Δ_{n+1} es un retracto de este (la identidad se extiende a todo Δ_{n+1}), cualquier función continua definida en tal unión puede extenderse a todo Δ_{n+1} . En adelante llamaremos indiscriminadamente como complejo.^a los conjuntos simpliciales (usando uno y otro término en ciertos puntos). \square

Observación 2.1. A las colecciones del tipo $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$, las denotaremos convenientemente $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ para indicar que ‘saltamos’ el término de posición k -ésima.

2.1. HOMOTOPÍA DE COMPLEJOS DE KAN

En esta sección definiremos la noción del funtor de Homotopía $\pi_n(K)$ en primer lugar para complejos de Kan, y explicamos la analogía de esta homotopía con la de los espacios topológicos. Posteriormente nos extenderemos a todos los conjuntos simpliciales.

DEFINICIÓN 2.1.1. Sea K un complejo. Dos n -símplices x, x' de K son *homotópicos*, denotado $x \sim x'$ si $d_i x = d_i x'$, $0 \leq i \leq n$, y existe un símplice $y \in K_{n+1}$ tal que $d_n y = x, d_{n+1} y = x'$ y $d_i y = s_{n-1} d_i = s_{n-1} d_i x', 0 \leq i < n$. El símplice y es llamado homotopía de x a x' .

PROPOSICIÓN 2.1.2. Si K es un complejo de Kan, la relación \sim es de equivalencia entre los n -símplices de K , $\forall n \geq 0$.

Prueba: Recordemos las relaciones en (2.2), particularmente $d_n s_n x = x = d_{n+1} s_n x$, también $d_i s_n x = s_{n-1} d_i x, 0 \leq i < n$, luego tomamos $y = s_n x$ y vemos que $x \sim x$ (\sim es reflexiva).

Por la definición de \sim , claramente esta es simétrica.

Supongamos $x \sim x'$ y $x \sim x''$. Sean y' e y'' las homotopías de x a x' y de x a x'' , respectivamente. Los $n+2$ ($n+1$)-símplices

$$d_0 s_n s_n x', \dots, d_{n-1} s_n s_n x', y', y'', -$$

Satisfacen la condición de compatibilidad, entonces existe un $(n+2)$ -símplice z tal que $d_i z = d_i s_n s_n x', 0 \leq i < n, d_n z = y'$ y $d_{n+1} z = y''$. Por lo cual (a continuación comprobaremos paso a paso una igualdad, las posteriores en esta prueba y las próximas no lo serán, así)

$$d_{n+1} d_i z = d_{n+1} d_i s_n s_n x' = d_{n+1} s_{n-1} d_i s_n x' = d_{n+1} s_{n-1} s_{n-1} d_i x' = s_{n+1} d_n s_{n-1} d_i x' = s_{n-1} d_i x'.$$

$d_n d_{n+2} z = x'$ y $d_{n+1} d_{n+2} z = x''$, entonces $x' \sim x''$. □

DEFINICIÓN 2.1.3. Sea L un subcomplejo de Kan del complejo de Kan K . Dos n -símplices x y x' ($n > 0$) son *homotópicos relativo a L* (denotado $x \sim x'$ rel L) si $d_i x = d_i x', 1 \leq i \leq n, d_0 x \sim d_0 x'$ en L y existe $w \in K_{n+1}$ tal que $d_0 w = y, d_n w = x, d_{n+1} w = x'$ y $d_i w = s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i x', 1 \leq i < n$ donde y es una homotopía de x a x' . El símplice w es llamado *homotopía relativa de x a x'* .

PROPOSICIÓN 2.1.4. Con K y L como antes, \sim rel L es una relación de equivalencia.

Prueba: Lo interesante a probar es la transitividad. Supongamos $x \sim x'$ y $x \sim x''$. Sean y' e y'' homotopías en L de $d_0 x$ a $d_0 x'$ y de $d_0 x$ a $d_0 x''$, respectivamente. Sean w' y w'' homotopías relativas de x a x' y de x a x'' , respectivamente, los cuales satisfacen $d_0 w' = y'$ y $d_0 w'' = y''$.

Similar a la prueba anterior, encontramos $z \in L_{n+1}$ tal que

$$d_i z = d_i s_{n-1} s_{n-1} d_0 x', 0 \leq i < n-1, d_{n-1} z = y' \text{ y } d_n z = y''.$$

Entonces $y = d_{n+1}z$ es una homotopía en L de d_0x' a d_0x'' . Es fácil comprobar que los $n + 2$ $(n + 1)$ -símplices

$$z, d_1s_ns_nx', \dots, d_{n-1}s_ns_nx', w', w'', -$$

satisfacen la condición de compatibilidad, entonces existe $v \in K_{n+2}$ que cumple la condición de Kan. Sea $w = d_{n+2}v$, entonces $d_iw = s_{n-1}d_ix'$, $1 \leq i < n$, $d_0w = y$, $d_nw = x'$ y $d_{n+1}w = x''$ (lo que concluye la transitividad). \square

Sea K un complejo y $\phi \in K_0$. ϕ genera un subcomplejo de K con solo un n -símplice $s_{n-1} \cdots s_0\phi$ para cada $n \geq 0$. Por abuso de notación, denotaremos también como ϕ al subcomplejo generado por ϕ y a cualquiera de sus símplices.

Llamaremos (K, ϕ) un *par de Kan* y a (K, L, ϕ) una *terna de Kan* donde L es un subcomplejo de Kan de K . Sin embargo, cuando en general K o L no sean necesariamente complejos de Kan, llamamos a estos *espacio simplicial punteado y par simplicial punteado* (en analogía a los espacios topológicos punteados)

La manera de definir mapas simpliciales de pares y ternas es análoga a la de espacios topológicos.

DEFINICIÓN 2.1.5. (COMPONENTES POR CAMINOS)

Un *camino* en un conjunto simplicial X es un morfismo simplicial $p : \Delta[1] \rightarrow X$, equivalentemente (por Yoneda), un camino en X es un 1-símplice $p \in X_1$. Si p es un camino en X , $d_1 = p(0)$ es llamado *punto inicial* del camino y $d_0p = p(1)$ llamado *punto final*. Dos 0-símplices a y b de X están *en la misma componente por caminos* de X si existe un camino p con objeto inicial a y objeto final b

PROPOSICIÓN 2.1.6. Si X es complejo de Kan, entonces ‘estar en la misma componente por caminos’ es una relación de equivalencia.

Prueba: En realidad esta relación equivalencia coincide con la relación definida en 2.1.2. Sin embargo, en este caso particular, la definición tiene una mejor interpretación geométrica. \square

Denotamos el conjunto de clases de equivalencia como π_0X y decimos que X es *conexo* si π_0X es trivial.

DEFINICIÓN 2.1.7. Sea (K, ϕ) un par de Kan, sea $\tilde{K}_n \subset K_n$, $n \geq 1$ el conjunto de puntos que satisfacen $d_ix = \phi$, $0 \leq i \leq n$.

Definimos

$$\pi_n(K, \phi) = \tilde{K}_n / \sim .$$

K es n -conexo si $\pi_i(K, \phi) = \phi, 0 \leq i \leq n$. Sea (K, L, ϕ) una terna de Kan, sea también $\tilde{K}(L)_n \subset K_n, n \geq 1$ el conjunto de cuyos elementos cumplen $d_0x \in L_{n-1}$ y $d_ix = \phi, 0 \leq i \leq n$.

Definimos $\pi_n(K, L, \phi) = \tilde{K}(L)_n / \sim \text{rel } L$. Notemos que $\pi_n(K, \phi, \phi) = \pi_n(K, \phi), n \leq 1$

Definimos una aplicación $\partial : \pi_n(K, L, \phi) \rightarrow \pi_{n-1}(L, \phi), n \leq 1$ por $\partial[x] = [d_0x]$.

Queremos ahora probar que $\pi_n(K, \phi)$ y $\pi_n(K, L, \phi)$ poseen, a partir de cierto n , una estructura de grupo y que ∂ es un homomorfismo de grupos.

DEFINICIÓN 2.1.8. Sea (K, ϕ) un par de Kan. Dados $[x], [y] \in \pi_n(K, \phi)$. Los $n+1$ simplices $\phi, \dots, \phi, x, -, y$ son compatibles, luego existe $z \in K_{n+1}$ tal que $d_iz = \phi, 0 \leq i < n-1, d_{n-1}z = x, d_{n+1}z = y$. Definimos $[x][y] = [d_nz]$.

No probaremos aquí la buena definición de esta operación ni que esta provee a $\pi_n(K, \phi)$ estructura de grupo como su producto. Sin embargo, es interesante probar que este producto, a partir de $n=2$, es en realidad una suma.

LEMA 2.1.9. $\pi_n(K, \phi)$ es abeliano si $n \geq 2$.

Prueba: Sean $x, y, z, w \in \tilde{K}_n$, buscamos probar que $[x][w] = [w][x]$, así que $[y], [z]$ serán clases variables convenientemente. La prueba está dividida en 4 partes y en cada una de ellas, las notaciones solo tienen vigencia dentro de ellas mismas (ya que usaremos muchas coincidentes en partes diferentes).

(I) Supongamos exista $v_{n+1} \in K_{n+1}$ que satisface $d_iv_{n+1} = \phi, 0 \leq i < n-2, d_{n-2}v_{n+1} = w, d_{n-1}v_{n+1} = x, d_nv_{n+1} = y, d_{n+1}v_{n+1} = \phi$.

Entonces $[y][w] = [x]$: Elijiendo $v_{n-1} \in K_{n+1}$ tal que $d_iv_{n-1} = \phi, 0 \leq i \leq n-2, d_nv_{n-1} = x$ y $d_{n+1}v_{n-1} = w$, denotamos $t = d_{n-1}v_{n-1}$.

Sean $v_i = \phi, 0 \leq i < n-2, v_{n-2} = s_nw$ y $v_{n+2} = s_{n-2}w$, así los v_i satisfacen la condición de compatibilidad, luego existe que $r \in K_{n+2}$ con $d_iv_i, i \neq n$. Sea $v_n = d_nr$.

$d_iv_n = \phi, 0 \leq i \leq n-2, d_{n-1}v_n = t, d_nv_n = y$ y $d_{n+1}v_n = \phi$. Por lo tanto $[t][\phi][t] = [y]$, además $[t][w] = [x]$ por cómo definimos v_{n-1} . Luego $[y][w] = [x]$.

(II) Supongamos exista $v_n \in K_{n+1}$ satisfaciendo $d_iv_n = \phi, 0 \leq i < n-2, d_{n-1}v_n = \phi, d_{n-2}v_n = w, d_nv_n = y$ y $d_{n+1}v_n$. Entonces $[w][y] = [z]$: Elegimos $v_{4n-1} \in V_{n+1}$ que completa a la colección compatible $\phi, \dots, \phi, v_{n-1}, v_{n-1}, -, v_{n-1}$.

Sean $v_i = \phi, 0 \leq i < n-2$ y $v_{n-2} = s_{n-2}w$ y $v_{n+2} = s_nw$. Los v_i son compatibles, y lo completamos con r tal que $d_ir = v_i, i \neq n+1$.

Sea $v_{n+1} = d_{n+1}r, d_iv_{n+1} = \phi, 0 \leq i \leq n-2, d_{n-1}v_{n+1} = t, d_nv_{n+1} = y, d_{n+1}v_{n+1} = z$.

Por tanto $[t][z] = [y]$, pero por la elección de v_{n-1} y (I), $[t][w] = [\phi]$, luego $[w][y] = [z]$.

(III) Supongamos exista $v_{n+2} \in K_{n+1}$ que satisface $d_iv_{n+2}, 0 \leq i < n-2, d_{n-2}v_{n+2} = w,$

$d_{n-1}v_{n+2} = x$, $d_n v_{n+2} = y$ y $d_{n+1}v_{n+2} = z$, entonces $[w]^{-1}[x][z] = [y]$: La colección de $n+1$ n -símplices $\phi, \dots, \phi, -, \phi, \phi, w$ es compatible, y tomamos v_{n-2} que lo complete. Denotamos $t = d_{n-2}v_{n-2}$. Elegimos $v_{n-1} \in K_{n+1}$ que complete la colección compatible $\phi, \dots, \phi, t, \phi, -, x$.

Sean $v_i = \phi, 0 \leq i < n - 2$, $v_n = s_n y$, los v_i son compatibles y existe r tal que $d_i r = v_i, i \neq n + 1$. Sea $v_{n+1} = d_{n+1}r$. Por (II), $[t] = [w]$ y $[t][u] = [x]$, además $[u][z] = [y]$, esto nos permite afirmar $[w]^{-1}[x][z] = [y]$.

(IV) Hacemos $z = \phi$, reemplazando en (III) tenemos $[w]^{-1}[x] = [y]$, pero aplicando (I) al v_{n+2} de (III) (manteniendo $z = \phi$), tenemos $[y] = [x][w]^{-1}$. Por lo tanto $[w]^{-1}[x] = [x][w]^{-1}$. \square

DEFINICIÓN 2.1.10. Sea (K, L, ϕ) una terna de Kan. Sean $[x], [y] \in \pi_n(K, L, \phi), n \geq 2$, existe un n -símplice z tal que $d_i z = \phi, 0 \leq i < n - 2$, $d_{n-2}z = d_0 x$, $d_n z = d_0 y$, así que $[d_0 x][d_0 y] = [d_{n-1}z]$ (tomando las clases en $\pi_{n-1}(L, \phi)$). Los $n+1$ n -símplices $z, \phi, \dots, \phi, x, -, y$ son compatibles. Definimos $[x][y] = [d_n w]$, donde w es un $(n + 1)$ -símplice que completa tal colección compatible. A continuación unas consecuencias esperables de esta definición que no demostraremos por la analogía con los grupos de homotopía de pares de Kan.

LEMA 2.1.11. La operación $[x][y]$ está bien definida. \square

PROPOSICIÓN 2.1.12. $\pi_n(K, L, \phi)$ es un grupo con tal operación como producto. \square

PROPOSICIÓN 2.1.13. $\pi_n(K, L, \phi)$ es abeliano $\forall n \geq 3$. \square

Una vez confirmada la estructura de grupo de $\pi_n(K, \phi)$ y $\pi_n(K, L, \phi)$, es sencillo ver que ∂ es un homomorfismo, más aún podemos ver la importancia que tiene al conectar ambos tipos de grupo de homotopía mediante el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1.14. Sea (K, L, ϕ) una terna de Kan, entonces la sucesión

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(K, L, \phi) \xrightarrow{\partial} \pi_n(L, \phi) \xrightarrow{i} \pi_n(K, \phi) \xrightarrow{j} \pi_n(K, L, \phi) \rightarrow \dots$$

es exacta, donde i y j son inducidos por inclusión.

Prueba:

(I) Consideramos $i[d_0 x] = i\partial[x], x \in K(L)_{n+1}$, los $n+2$ $(n + 1)$ -símplices $-, \phi, \dots, \phi, x$ son compatibles, luego elegimos $z \in K_{n+2}$ que complete esta colección. Entonces $d_i d_0 z = d_0 d_{i+1} z = \phi, 0 \leq i < n$ y $d_{n+1} d_0 z = d_0 d_{n+2} z = d_0 x$ por lo cual $d_0 x \sim \phi$ en K . Por lo tanto $\text{Im } \partial \subset \text{Ker } i$

(II) Sea $i[y] = \phi, y \in \tilde{L}_n$, entonces $y \sim \phi$ en K_n , así que tomamos z con $d_i z = \phi, 0 \leq i \leq n, d_{n+1} z = y$. Los $n+2$ $(n+1)$ -símplices $z, \phi, \dots, \phi, -$ son compatibles, luego tenemos w que complete la colección.

$d_i d_{n+2} w = \phi, 1 \leq i \leq n+1$ y $d_0 d_{n+2} w = y$, entonces claramente $d[d_{n+2} w] = [y]$.

(III) $\partial j = \phi: \partial j[x] = [d_0 x] = [\phi] = \phi$, pues $x \in \tilde{K}_n$.

(IV) Sea $\partial[x] = [d_0 x] = \phi, x \in \tilde{K}(L)_n$. Existe $z \in L_n$ tal que $d_i z = \phi, 0 \leq i < n, d_n z = d_0 x$. Los $(n+1)$ n -símplices $z, \phi, \dots, \phi, -, x$ son compatibles y tomamos y que complete la colección, es fácil comprobar que $x \sim \partial_n y$ rel L . Ya que $d_i d_n y = \phi, 0 \leq i \leq n$, se tiene $[x] = j[\partial_n y]$.

Falta probar que $\text{Im } i = \text{Ker } j$, pero el razonamiento es el mismo que hemos venido usando, así que con esto hemos concluído. \square

2.2. HOMOTOPÍA ENTRE MAPAS SIMPLICIALES

Sean $f, g : K \rightarrow L$ mapas simpliciales (K, L complejos no necesariamente de Kan), entonces f es homotópico a g , denotado $f \simeq g$ si existen aplicaciones $h_i : K_q \rightarrow L_{q+1}, 0 \leq i \leq q$, que satisfacen:

1. $d_0 h_0 = f, d_{q+1} h_q = g$
2. $d_i h_j = h_{j-1} f_i$, si $i < j$.
 $d_{j+1} h_{j+1} = d_{j+1} h_j$
 $d_i h_j = h_j d_{i-1}$, si $i > j+1$
3. $s_i h_j = h_{j+1} s_i$, si $i \leq j$
 $d_i h_j = h_j s_{i-1}$

h es llamado *homotopía de f a g* , denotado $h : f \simeq g$.

Si K' y L' son subcomplejos de K y L respectivamente, y f, g llevan K' en L' , entonces h es una *homotopía relativa de f a g* si h es homotopía de f a g , $h(K') \subset L'$ y $h|_{K'}$ es homotopía de $f|_{K'}$ a $g|_{K'}$. Denotamos esto $f \simeq g$ rel K' .

K' es llamado *retracto de deformación de K* si id_K es homotópico relativo a un mapa $r : K \rightarrow K'$ sobreyectivo que extiende la inclusión $i : K' \rightarrow K$.

Dos complejos K y L son dichos del *mismo tipo de homotopía* si existe un mapa $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow K$ que satisfacen $fg \simeq id$ y $gf \simeq id$.

LEMA 2.2.1. Sean $f, f' : K \rightarrow L$ y $g, g' : L \rightarrow M$, entonces:

(I) $f \simeq f'$

(II) Si $h : f \simeq f'$, entonces $g \circ h : g \circ f \simeq g \circ f'$.

(III) Si $h : g \simeq g'$, entonces $h \circ f : g \circ f \simeq g' \circ f$. \square

Sea $\sigma_n = id_n = (0, 1, \dots, n) \in \Delta[n]_n$.

PROPOSICIÓN 2.2.2. Sean K un conjunto simplicial y $x \in K_n$, entonces existe un único mapa simplicial

$$\bar{x} : \Delta[n] \rightarrow K$$

tal que $\bar{x}(\sigma_n) = x$.

Prueba: A partir de la condición impuesta a \bar{x} , podemos hallar la manera de definirla:

$$\bar{x}(i_0, i_1, \dots, i_k) = \bar{x}(d_{j_1} d_{j_2} \cdots d_{j_{n-k}} \sigma_n) = d_{j_1} d_{j_2} \cdots d_{j_{n-k}} \bar{x}(\sigma_n) = d_{j_1} d_{j_2} \cdots d_{j_{n-k}} x. \quad \square$$

DEFINICIÓN 2.2.3. Sea X un conjunto simplicial y $A = \{A_n\}$ con $A_n \subset X_n$. El subcomplejo de X generado por A es definido por

$$\langle A \rangle = \bigcap \{A \subset Y \subset X / Y \text{ es subcomplejo de } X\}$$

$\langle A \rangle$ consiste de elementos de X que pueden ser escritos como composiciones iteradas de caras y degeneraciones de elementos de A .

DEFINICIÓN 2.2.4. Denotamos $\partial\Delta[n]$, $\Delta^0[n]$, $\Delta^1[n]$ los subcomplejos de $\Delta[n]$ generados por $\{d_i\sigma_n / 0 \leq i\}$, $d_0\sigma_n$ y $\{d_i\sigma_n / 1 \leq i\}$. Si $x \in \tilde{K}_n$, entonces

$$\bar{x} : (\Delta[n], \partial\Delta[n]) \rightarrow (K, \phi)$$

y si L y $x \in \tilde{K}(L)_n$, entonces

$$\bar{x} : (\Delta[n], \Delta^0[n], \Delta^1[n]) \rightarrow (K, L, \phi).$$

LEMA 2.2.5. Sea (K, ϕ) un par de Kan. Dados $x, y \in \tilde{K}_n$, entonces

$$x \sim y \text{ si y solo si } \bar{x} \simeq \bar{y} \text{ rel } \partial\Delta[n].$$

Prueba:

(\Rightarrow) Si $x \sim y$, sea $z \in K_{n+1}$ satisfaciendo $d_i z = \phi$, $0 \leq i < n$, $d_n z = x$, $d_{n+1} z = y$, para definir $h : \bar{x} \simeq \bar{y}$ rel $\partial\Delta[n]$ es suficiente con definir h_i en σ_n .

Hacemos $h_i(\sigma_n) = s_i x$, $0 \leq i < n$ y $h_n(\sigma_n) = z$.

(\Leftarrow) Supongamos $h : \bar{x} \simeq \bar{y}$ rel $\partial\Delta[n]$, sea $z_i = h_i(\sigma_n)$, $0 \leq i \leq n$, entonces $d_i z_j = \phi$ excepto cuando $i = j$ o $i = j + 1$, y $d_0 = x$, $d_i z_i = d_i z_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$, $d_{n+1} z_n = y$.

Por probar: Si $z \in K_{n+1}$, $d_i z = \phi$ para $i \neq r, r + 1$ y $d_r z, d_{r+1} z \in \tilde{K}_n$, entonces $d_r z \sim d_{r+1} z$

Como $r < n$, denotando $a = d_r z, b = d_{r+1} z$. Los $n+2$ $(n+1)$ -símplices $\phi, \dots, \phi, -, s_{r+1} b, z, s_r b$ son compatibles y tomamos $w \in K_{n+2}$ que complete la colección. Así tenemos $d_i d_r w = \phi, i \neq r + 1, r + 2$, $d_{r+1} d_r w = a$, $d_{r+2} d_r w = b$, luego $a \sim b$.

Usando lo anterior:

$$x \sim d_1 z_0 = d_1 z_1 \sim d_2 z_1 = \dots \sim d_n z_{n-1} d_n z_n \sim y.$$

□

Tenemos un resultado análogo para ternas de Kan, con prueba similar la cual omitiremos.

LEMA 2.2.6. Sea (K, L, ϕ) una terna de Kan. Dados $x, y \in \tilde{K}(L)_n$

$$x \sim y \text{ rel } L \text{ si y solo si } \bar{x} \simeq \bar{y} \text{ rel } (\Delta^0[n], \Delta^1[n]).$$

□

La siguiente proposición es consecuencia de los lemas 2.2.5 y 2.2.6.

PROPOSICIÓN 2.2.7. Sea (K, L, ϕ) una terna de Kan.

(i) Homotopía (relativa de pares) es una relación de equivalencia entre mapas simpliciales de pares

$$(\Delta[n], \partial\Delta[n]) \rightarrow (K, \phi)$$

$\pi_n(K, \phi)$ puede ser identificado con el conjunto de clases de equivalencia de tales mapas.

(ii) Homotopía (relativa de ternas) es una relación de equivalencia entre mapas simpliciales de ternas

$$(\Delta[n], \Delta^0[n], \Delta^1[n]) \rightarrow (K, L, \phi)$$

$\pi_n(K, L, \phi)$ puede ser identificado con el conjunto de clases de equivalencia de tales mapas. □

PROPOSICIÓN 2.2.8. Si $f, g : (K, \phi) \rightarrow (K', \phi')$ y $f \simeq g$ rel ϕ , entonces

$$f_* = g_* = \pi_n(K, \phi) \rightarrow \pi_n(K', \phi')$$

□

Similarmente para grupos de homotopía de ternas.

PROPOSICIÓN 2.2.9. Si $f, g : (K, L, \phi) \rightarrow (K', L', \phi')$ y $f \simeq g \text{ rel } (L, \phi)$, entonces

$$f_* = g_* = \pi_n(K, L, \phi) \rightarrow \pi_n(K', L', \phi')$$

□

‘Los grupos de homotopía son invariantes del tipo de homotopía en la categorías de pares y ternas de Kan’

2.3. COMPLEJO DE FUNCIONES

DEFINICIÓN 2.3.1. El producto cartesiano

$$K \times L$$

de dos complejos K y L posee estructura natural de complejo, donde $(K \times L)_n = (K_n \times L_n)$, $d_i(x, y) = (d_i x, d_i y)$ y $s_i(x, y) = (s_i x, s_i y)$.

DEFINICIÓN 2.3.2. Sean X, Y conjuntos simpliciales. El *complejo función* $\mathbf{Hom}(X, Y)$ es el conjunto simplicial definido por

$$\mathbf{Hom}(X, Y)_n = \text{hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta[n], Y) \quad (2.4)$$

Donde cada morfismo $\theta : \mathbf{m} \rightarrow n$ en Δ induce

$$\theta^* : \mathbf{Hom}(X, Y)_n \rightarrow \mathbf{Hom}(X, Y)_m$$

enviando $f : X \times \Delta[n] \rightarrow Y$ a la composición

$$X \times \Delta[m] \xrightarrow{id \times \theta} X \times \Delta[n] \xrightarrow{f} Y$$

Definiendo el mapa *evaluación* $ev : X \times \mathbf{Hom}(X, Y) \rightarrow Y$, con regla $(x, f) \mapsto f(x, id_{\mathbf{n}})$

PROPOSICIÓN 2.3.3. La aplicación

$$ev_* : \text{hom}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{Hom}(X, Y)) \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times K, Y)$$

enviado cada mapa simplicial $g : K \rightarrow \mathbf{Hom}(X, Y)$ a la composición

$$X \times K \xrightarrow{id \times g} X \times \mathbf{Hom}(X, Y) \xrightarrow{ev} Y \quad (2.5)$$

es una biyección, natural en K, X y Y . \square

haciendo $K \times \Delta[n]$ en vez de solo K , para cada $n \geq 0$, obtendremos un isomorfismo simplicial

$$\mathbf{Hom}(K, \mathbf{Hom}(X, Y)) \cong \mathbf{Hom}(X \times K, Y) \quad (2.6)$$

Denotamos $I = \Delta[1]$, (0) denotará cualquier símplice de $\Delta^0[1]$ y (1) cualquier símplice de $\Delta^1[1]$.

Ahora ya estamos listos para encontrar qué analogía posee este concepto de homotopía con el aprendizaje para el caso de espacios topológicos.

PROPOSICIÓN 2.3.4. Sean $f, g : K \rightarrow L$ mapas simpliciales, entonces $f \simeq g$ si y solo si existe un mapa $F : K \times I \rightarrow L$ tal que $F(x, (0)) = f(x)$ y $F(x, (1)) = g(x)$

Prueba:

(\rightarrow) Si $h : f \simeq g$. Para $x \in K_n$ definimos $F(x, (0)) = f(x)$, $F(x, (1)) = g(x)$ y $F(x, s_{n-1} \cdots s_{i+1} s_{i-1} \cdots s_0 \sigma_1) = d_{i+1} h_i(x)$, $0 \leq i \leq n-1$. No es difícil comprobar que F es un mapa simplicial.

(\Leftarrow) Dado $F : K \times I \rightarrow L$ simplicial, definimos

$$h_i = F(s_i x, s_n \cdots s_{i+1} s_{i-1} \cdots s_0 \sigma_1)$$

$x \in K_n, 0 \leq i \leq n$, entonces $h : f \simeq g$. \square

Con una prueba similar, tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 2.3.5. Sea $f, g : (K, K') \rightarrow (L, L')$ rel L si y solo si existe $F : K \times I \times L$ tal que $F : g \simeq f$, $F(K' \times L) \subset L'$, y $F|_{K' \times I} : g|_{K'} \rightarrow f|_{K'}$. \square

Equivalentemente, aunque a modo de comentario en este capítulo, podemos definir una homotopía $H : H \times \Delta[1] \rightarrow Y$ entre los mapas simpliciales $f, g : X \rightarrow Y$ es un mapa simplicial tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X \cong X \times \Delta[0] & \xrightarrow{id \times d_1} & X \times \Delta[1] & \xleftarrow{id \times d_0} & X \times \Delta[0] \cong X \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

conmute.

Con todo esto, la homotopía $F : f \simeq g$ es solo un 1-símplice de $\mathbf{Hom}(K, L)$ con $d_1 F = f$ y $d_0 F = g$, se sigue entonces que nuestra homotopía es una relación de equivalencia siempre y cuando $\mathbf{Hom}(K, L)$ es un complejo de Kan y esto ocurrirá, al menos, cuando L es de Kan:

TEOREMA 2.3.6. Si K y L son complejos, con L de Kan, entonces también lo es el complejo de funciones $\mathbf{Hom}(K, L)$.

Prueba:[4]. □

2.3.1. FIBRACIONES DE KAN

Sea $p : E \rightarrow B$ un mapa simplicial, decimos que p es una *fibración de Kan* si para toda colección de $n+1$ n -símplices $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ de E que satisfacen la condición de compatibilidad de la definición 2.0.2 y para todo $(n+1)$ -símplice y de B tal que $d_i y = p(x_i), i \neq k$, existe un $(n+1)$ -símplice x de E tal que $d_i x = x_i, i \neq k$ y $p(x) = y$. E es llamado *complejo total*, B *complejo base* y la terna (E, p, B) *espacio fibra*.

Si ϕ denota el complejo generado por un vértice (0-símplice) de B , entonces $F = p^{-1}(\phi)$ es llamado *fibra sobre ϕ* y si ψ es el complejo generado por un vértice de F , la sucesión

$$(F, \psi) \xrightarrow{i} (E, F) \xrightarrow{p} (B, \phi)$$

es llamada *sucesión fibra*.

Anteriormente hablamos de complejos de Kan, ahora de fibrados. Existen diversas relaciones entre ambos conceptos

PROPOSICIÓN 2.3.7. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración de Kan, entonces F es un complejo de Kan.

Prueba: Notemos primero que, en efecto, F es un conjunto simplicial, ya que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{p} & B_n \\ d_i \downarrow & & \downarrow d_i \\ E_{n-1} & \xrightarrow{p} & B_{n-1} \end{array}$$

es conmutativo, luego $p(d_i x) = \phi$, análogamente $p(s_i x) = \phi$.

Sea una colección $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ compatible de n -símplices de F . Como $p(x_i) = \phi = d_i \phi$ y p es fibración de Kan, existe $x \in E_{n+1}$ tal que $d_i x = x_i, i \neq k$ y $p(x) = \phi$, osea $x \in F_{n+1}$. □

PROPOSICIÓN 2.3.8. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración de Kan.

- (i) Si E es un complejo de Kan y p es epiyectiva, entonces B es un complejo de Kan.
(ii) Si B es un complejo de Kan, también lo es E .

Prueba: [4]. □

Sea $y \in \tilde{B}_n, n \geq 1$, existe $x \in E_n$ tal que $d_i x = y$ por ser p fibración.

TEOREMA 2.3.9. Sea $(F, \psi) \xrightarrow{i} (E, F) \xrightarrow{p} (B, \phi)$ una sucesión fibra de pares de Kan, entonces

Considerando $p : (E, F, \psi) \rightarrow (B, \phi, \phi)$ como mapa de ternas, el homomorfismo inducido

$$p_{\#} : \pi_n(E, F, \psi) \cong \pi_n(B, \phi)$$

es isomorfismo

Prueba: Definimos $g : \pi_n(B, \phi) \rightarrow \pi_n(E, F, \psi)$ por $g[y] = x$. Es fácil comprobar que g es inversa de f . □

TEOREMA 2.3.10. La siguiente sucesión

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(B, \phi) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \pi_n(F, \psi) \xrightarrow{i} \pi_n(E, \psi) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, \phi) \rightarrow \cdots$$

es exacta, donde $\tilde{\partial}[y] = [d_0 x]$.

Prueba: Se comprueba fácilmente que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(E, F, \psi) & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & \pi_n(F, \psi) & \xrightarrow{i} & \pi_n(E, \psi) & \xrightarrow{j} & \pi_n(E, F, \psi) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow p_{\#} & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow p_{\#} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(B, \phi) & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & \pi_n(F, \psi) & \xrightarrow{i} & \pi_n(E, \psi) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, \phi) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

es conmutativo, y ya que la sucesión superior ya es exacta, concluimos la exactitud de la sucesión inferior. □

DEFINICIÓN 2.3.11. Sea X un complejo, el n -esqueleto de X , denotado $sk_n(X)$, es el subcomplejo de X generado por todos los símlices de dimensión $\leq n$.

DEFINICIÓN 2.3.12. Dado un complejo K . Definimos la relación $x \stackrel{n}{\sim} y$ en los m-símlices si $\bar{x}|sk_n(\Delta[m]) = \bar{y}|sk_n(\Delta[m])$.

Vemos que $x \stackrel{n}{\sim} y$ implica $d_i x \stackrel{n}{\sim} d_i y$ y $s_i x \stackrel{n}{\sim} s_i y$, esto nos permite definir el complejo $K^{(n)}$, donde $K_m^{(n)} = K_m / \sim^n$. Notemos que $K_m^{(n)} = K_m$ si $n \geq m$, denotamos $K_{(\infty)} = K$.

Existe un mapa simplicial natural $K^{(n)}$ sobre $K^{(r)}$ que cambia solo la clase a un mismo símlice, cuando $m \leq n \leq \infty$ y lo denotamos p_r^n , o simplemente p cuando podamos prescindir de n y r .

PROPOSICIÓN 2.3.13. Sea K un complejo de Kan, entonces

- (i) $K^{(n)}$ es complejo de Kan.
- (ii) $p_m^n : K^{(n)} \rightarrow K^{(m)}$ es una fibración de Kan.

Prueba: (i) Se desprende de la proposición 2.3.9 y (ii) cuando $n = \infty$.

(ii) Sea $[x_0]^n, \dots, [x_{k-1}]^n, [x_{k+1}]^n, \dots, [x_{q+1}]^n$ colección compatible de q -símplices de $K^{(n)}$ donde existe $[y] \in K_{q+1}^{(m)}$, satisfaciendo $d_i[y]^m = p([x_i]^n), i \neq k$.

Si $q \leq m$, $K_q^{(m)} = K_q$, tenemos $x_i = [x_i]^m = p([x_i]^n) = d_i[y]^m = [d_i y]^m = d_i y$, entonces $d_i[y]^n = [x_i]^n$, entonces $[y]^n$ es el símplice que buscamos, pues $p([y]^n) = [y]^m$ por definición.

Ahora, si $q > m$, supongamos que $n = \infty$, existe un $q + 1$ -símplice x tal que $d_i = x_i, i \neq k$. Puesto que cualquier cara de x (composición de morfismos caras aplicados sobre x) de dimensión $\leq m$ es también cara de algún x_i , luego $x^m y$ (Proposición 2.2.2), entonces $p(x) = [y]^m$.

El caso general tiene el mismo procedimiento que el anterior, pues ya sabemos que K^n es complejo de Kan cuando $n < \infty$. \square

DEFINICIÓN 2.3.14. Sea (K, ϕ) un par de Kan. Denotamos $E_n(K, \phi)$ la fibra sobre ϕ de $p : K \rightarrow K^{n-1}$, resultando ser el subcomplejo de K consistente de aquellos símplices de K cuyas caras de dimensión $\leq n$ son ϕ . A $E_n(K, \phi)$ lo llamamos *n-ésimo Eilenberg subcomplejo de K basado en ϕ* .

TEOREMA 2.3.15. Sea (K, ϕ) un par de Kan, entonces

- (i) $p_* : \pi_q(K^n, \phi) \cong \pi_q(K^m, \phi)$, para $q \leq m$.
- (ii) $\pi_q(K^m, \phi) = 0$ para $q > m$.
- (iii) $i : \pi_q(E_{m+1}(K^n, \phi), \phi) \cong \pi_q(K^n, \phi)$ para $q > m$.
- (iv) $\pi_q(E_{m+1}(K^n, \phi), \phi) = 0$ para $q \leq m$ y $q > n$.

Prueba: [4]. \square

Debido a que no fue utilizado para las demostraciones, no mencionamos que existe otra definición equivalente (y más popularmente utilizada) de fibraciones de Kan la cual presentaremos en la siguiente

PROPOSICIÓN 2.3.16. Un mapa simplicial $p : E \rightarrow B$ es fibración de Kan si y solo si para todo diagrama conmutativo (sólido) de mapas simpliciales

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \longrightarrow & E \\ \downarrow \iota & \nearrow & \downarrow p \\ \Delta[n] & \longrightarrow & B \end{array}$$

donde llamaremos *k-ésimo cuerno* $\Lambda^k[n] \subset \Delta[n]$ al generado por todas las caras de σ_i excepto la k -ésima, $0 \leq i, k \leq n$.

Existe un mapa simplicial $\theta : \Delta[n] \rightarrow E$ de manera que el diagrama conmute.

Prueba: [17]. □

COROLARIO 2.3.17. Un complejo X es de Kan si y solo si el mapa simplicial constante $X \rightarrow *$ es fibración de Kan.

2.3.2. COMPLEJOS MINIMALES

DEFINICIÓN 2.3.18. Un complejo de de Kan K es llamado *minimal* si la condición $d_i x = d_i y$, para todo $i \neq k$ implica que también $d_k x = d_k y$.

LEMA 2.3.19. Un complejo de Kan K es minimal si y solo si $x \sim y$ implica $x = y$.

Prueba: [3, 4]. □

LEMA 2.3.20. Sea K un complejo de Kan. Dados $x, y \in K_q$ degenerados satisfaciendo $d_i x = d_i y$ para todo i , entonces $x = y$.

Prueba: [4]. □

Esto nos permitirá, a partir de un complejo de Kan K , construir un subcomplejo minimal M de K , de la siguiente manera: los vértices de K se escogen tomando un solo elemento de cada clase de $\pi_0(K)$. Supongamos ya definidos los $M_{q'}$ para cada $0 \leq q' < q$, entonces tomamos en K_q las clases cuyos elementos x son tales que $d_i x \in M_{q-1}$ para todo i , entonces de cada una de estas clases tomamos un solo representante (que sea degenerado siempre que es posible).

Por el lema anterior, M es subcomplejo de K .

TEOREMA 2.3.21. M es un retracto de deformación fuerte de K .

Prueba: [4]. □

en particular M es un retracto de K , entonces M también es de Kan. Por la definición constructiva de K y el Lema 2.3.19, M es minimal.

TEOREMA 2.3.22. (WHITEHEAD) Sean X, Y complejos punteados de Kan, si existe un mapa simplicial punteado $f : X \rightarrow Y$ tal que $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ es un isomorfismo para cada $n \geq 0$, entonces $X \simeq Y$.

Prueba: Podemos encontrar la prueba directa en [17] cuando X e Y son conexos, pero en el próximo capítulo demostraremos la versión general de este teorema. □

2.3.3. GRUPOS SIMPLICIALES

TEOREMA 2.3.23. Todo grupo simplicial G es complejo de Kan

Prueba: Dados $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{q+1}$ que satisfacen la condición de compatibilidad, debemos encontrar $x \in G_{q+1}$ tal que $d_i x = x_i, i \neq k$, pero primero encontraremos

$u \in G_{q+1}$ tal que $d_i u = x_i$ si $i < k$ (lo cual es trivialmente cierto si $k = 0$), entonces supongamos $k > 0$, encontraremos inductivamente u^r tal que $d_i u^r = x_i$, cuando $i \leq r$, empezamos con $u^0 = s_0 x_0$, y procediendo por inducción:

Supongamos u^{r-1} ya definido ($0 < r \leq k-1$). Hacemos $y^{r-1} = s_r((d_r u^{r-1})^{-1} x_r)$ y así $u^r = u^{r-1} y^{r-1}$ cumplirá lo exigido, entonces $u = u^{k-1}$. Nuestra siguiente meta es construir $v^r \in G_{q+1}$ tal que $d_i v^r = x_i$ para $i < k$ e $i > q-r+1$ ($0 < r \leq q-k+1$). Hacemos $v^0 = e_{q+1}$ si $k = 0$ y $v^0 = u$ en los demas casos. Suponiendo definido u^{r-1} , hacemos $z^{r-1} = s_{q-r+1}((d_{q-r+2} v^{r-1})^{-1} x_{q-r+2})$, entonces $v^r = v^{r-1} z^{r-1}$ cumple la hipótesis., así que tomamos $x = v^{q-k+1}$ como buscábamos.

PROPOSICIÓN 2.3.24. Sea G un grupo simplicial, dados $x, y \in \tilde{G}_q$, entonces $[x][y] = [xy]$

Prueba: Sea $z = s_{q-1} x s_q y$, entonces $d_i z = e_{q-1}$, $i < q-1$, $d_{q-1} z = x$, $d_q z = xy$, $d_{q+1} z = y$. \square

PROPOSICIÓN 2.3.25. Sea G un grupo simplicial y definimos

$$\tilde{G}_q = \text{Ker}d_0 \cdots \cap \text{Ker}d_{q-1} \subset G_q$$

entonces

- (i) $d_{q+1}(\tilde{G}_{q+1}) \subset \tilde{G}_q$, $q \geq 0$.
- (ii) $\text{Im}d_{q+1} : G_{q+1} \rightarrow \tilde{G}_q \subset \text{Ker}d_q : \tilde{G}_q \rightarrow \tilde{G}_{q-1}$, $q > 0$.
- (iii) $d_{q+1}(\tilde{G}_{q+1})$ es subgrupo normal de \tilde{G}_q y de G_q .
- (iv) $\pi_q(G) = H_q(\tilde{G})$ (viendo a \tilde{G} como complejo de cadenas).

Prueba: Sea $x \in \tilde{G}_{q+1}$, entonces $d_i d_{q+1} x = d_q d_i x = e_q$, $0 \leq i \leq q$, probando así (i) y (ii). Sea $z \in G_q$ y definimos $w = (s_q z)x(s_q z^{-1})$, entonces $d_i w = e_q$ para $i \leq q$, esto quiere decir $w \in \tilde{G}_{q+1}$, además $d_{q+1} w = z(d_q x)z^{-1}$, y como z es arbitrario, concluimos (iii).

Por la definición de \tilde{G}_q , se tiene que $\tilde{G}_q = \text{Ker}d_0 \cap \cdots \cap \text{Ker}d_q = Z_q \tilde{G}$ (q -ciclos de \tilde{G}), luego cada elemento de $Z_q \tilde{G}$ tiene un representante en \tilde{G}_q . Dados $x, y \in \tilde{G}_q$, si $z : x \sim y$, entonces $(s_q x^{-1})z \in \tilde{G}_{q+1}$ y $d_{q+1}((s_q x^{-1})z) = x^{-1}y$, así que x y y representan el mismo elemento en $H_q(\tilde{G})$, por lo cual se induce un epimorfismo $f : \pi_q(G) \rightarrow H_q(\tilde{G})$ (y acabamos de probar su buena definición).

Si $f[x] = 0$, existe $z \in \tilde{G}_{q+1}$ tal que $d_{q+1} z = x$, por lo tanto $z : e_q \sim x$ (pues $d_q z = e_q$), y concluimos lo buscado. \square

COROLARIO 2.3.26. Dada una sucesión exacta corta de grupos simpliciales

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$$

induce una sucesión exacta larga natural de grupos de homotopía

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \pi_{i+1}(G'') & \longrightarrow & \pi_i(G') & \longrightarrow & \pi_i(G) & \longrightarrow & \pi_i(G'') \\
& & & & & & & & \nearrow \\
& & \pi_{i-1}(G') & \longleftarrow & \cdots & \longrightarrow & \pi_0(G') & \longrightarrow & \pi_0(G) & \longrightarrow & \pi_0(G'') & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

LEMA 2.3.27. Sea $X \in \mathbf{sSet}_*$ con una estructura simplicial adicional dada por los mapas $\tau : X_n \rightarrow X_{n+1}$ para todo $n \geq 0$ tal que

$$\tau\tau = s_0\tau : X_n \rightarrow X_{n+2}, n \geq 0$$

$$\tau s_i = s_{i+1}\tau : X_n \rightarrow X_{n+2}, n \geq 0, 0 \leq i \leq n$$

$$d_0\tau = id : X_n \rightarrow X_n, n \geq 0$$

$$d_i\tau = \tau d_{i-1} : X_n \rightarrow X_n, n \geq 1, 1 \leq i \leq n+1$$

entonces el conjunto simplicial discreto \hat{X} con $\hat{X}_n = d_1\tau(X_0)$, con todos los morfismos caras y degeneraciones iguales a la identidad y con el mismo punto base de X , es un retracto de deformación de X .

Prueba: Si denotamos los únicos dos vértices de $\Delta[1]$ como 0 y 1 (su valor constante), el único 1-símplice no degenerado $\sigma_1 = id_1$ cumple $d_0\sigma_1 = 1$ y $d_1\sigma_1 = 0$. Definimos el mapa simplicial $H : X \times \Delta[1]$

$$H(x, 0) = s_0^n d_1 d_0^n(x)$$

$$H(x, 1) = x$$

$$H(x, s_0^t s_1^{n-t-1} \sigma_1) = \tau^{t+1} d^{t+1}(x), 0 \leq t \leq n-1$$

para $x \in X_n$. La inclusión $i : \hat{X} \rightarrow X$ dada por $i(\hat{x}) = s_0^n(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{X}_n = d_1\tau(X_0) \subset X_0$, luego si el mapa simplicial $r : X \rightarrow \hat{X}$ está dado por $r(x) = d_1\tau d_0^n(x)$, entonces $ri = id_{\hat{X}}$ y H representa una homotopía entre id_X e ir , así concluimos. \square

2.3.4. LA SUCESIÓN FIBRA PATH-LOOP

Denotamos \mathbf{sSet}_* la categoría de conjuntos simpliciales punteados. Dados $X, Y \in \mathbf{sSet}_*$, definimos la *suma wedge* $X \vee Y$ como

$$X \vee Y = X \sqcup Y / \sim$$

donde hemos identificado los puntos base de X y Y , (esto resulta ser el coproducto de X y Y en \mathbf{sSet}_*).

A partir de esto, definimos el *producto smash*

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

Para \mathbf{sSet}_* definimos el *complejo punteado de funciones* $\mathbf{Hom}_*(X, Y)$ es el conjunto simplicial punteado definido por

$$\mathbf{Hom}_*(X, Y)_n = \mathbf{hom}_*(X \wedge \Delta[n]_+, Y) \quad (2.7)$$

donde $\Delta[n]_+ = \Delta[n] \sqcup \{*\}$ con punto base disjunto de $\Delta[n]$. Notemos que $\mathbf{Hom}_*(X, Y)_0 \cong \mathbf{hom}_*(X, Y)$

En analogía con 2.5, tenemos

PROPOSICIÓN 2.3.28. Existe un isomorfismo natural

$$\mathbf{Hom}_*(X \wedge K, Y) \cong \mathbf{Hom}_*(K, \mathbf{Hom}_*(X, Y))$$

entre complejos punteados. □

El *espacio loop* ΩX de un complejo de Kan X punteado es el complejo punteado de funciones

$$\Omega X = \mathbf{Hom}_*(S^1, X)$$

Concebimos en esta sección al complejo $\Delta[n]$ como punteado por el vértice 1 y sea $S^0 = \partial\Delta[1] = \{0, 1\}$ punteado por 1, entonces la sucesión cofibra $S^0 \hookrightarrow \Delta[1] \xrightarrow{\pi} S^1$ de complejos punteados, incluye una sucesión fibra (justificaremos este paso en el capítulo 3).

$$\Omega X = \mathbf{Hom}_*(S^1, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_*(\Delta[1], X) \xrightarrow{p} \mathbf{Hom}_*(S^0, X) \cong X \quad (2.8)$$

la inclusión punteada $\{1\} \subset \Delta[1]$ es una equivalencia homotópica, entonces el espacio $PX = \mathbf{Hom}_*(\Delta[1], X)$ es contráctil.

El complejo punteado PX es llamado *espacio path punteado* de X , y la sucesión fibra anterior implica, por el Corolario 2.3.26

$$\pi_n(X, *) \cong \pi_{n-1}(\Omega X, *)$$

para $n \geq 2$ y una biyección $\pi_1(X, *) \cong \pi_0(X)$.

A continuación, existen dos funtores, cercanamente relacionados a los anteriores: Dado un complejo X , el *cono punteado de X* es el complejo punteado $CX = X \wedge \Delta[1]$ y la *suspension de X* $\Sigma X = X \wedge S^1$ (o, equivalentemente, definir $\Sigma X = CX/X$).

A partir de la Proposición 2.3.28, se desprende nuestro

COROLARIO 2.3.29. Dados dos complejos punteados de Kan X, Y

$$\mathbf{Hom}_*(CX, Y) \cong \mathbf{Hom}_*(X, PY)$$

$$\mathbf{Hom}_*(\Sigma X, Y) \cong \mathbf{Hom}_*(X, \Omega Y)$$

es decir, los pares (C, P) y (Σ, Ω) son adjunciones.

Observación 2.2. En el capítulo 3 extenderemos los funtores path, loop, cono y suspensión para complejos punteados arbitrarios.

2.3.5. REALIZACIÓN GEOMÉTRICA

Sea K un complejo, le asociaremos un espacio topológico el cual llamaremos *realización geométrica de K* definido

$$|K| = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n / \sim$$

tomando en K_n la topología discreta y en Δ^n su topología inducida como subespacio de \mathbb{R}^n , cocientando sobre \sim que es la relación de equivalencia generada por

$$\begin{aligned} (d_i k_n, u_{n-1}) &\sim (k_n, \delta_i u_{n-1}), \quad k_n \in K_n, u_{n-1} \in \Delta^{n-1} \\ (s_j k_n, u_{n+1}) &\sim (k_n, \sigma_j u_{n+1}), \quad k_n \in K_n, u_{n+1} \in \Delta^{n+1} \end{aligned}$$

donde las aplicaciones $\delta_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$ y $\sigma_j : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n-1}$ están definidas por

$$\delta_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n)$$

$$\sigma_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_i + 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Denotamos la clase de (k_n, u_n) como $|k_n, u_n|$. La definición de la realización geométrica implica la forma tradicional de construir un límite directo en \mathbf{Top} , en efecto

$$|K| = \varinjlim_{\Lambda_K} \Delta^n$$

Donde Λ_K es como lo definimos en 1.1.5.

En este caso particular, podemos ver a K como límite directo de funtores representables mediante otra categoría de índices:

DEFINICIÓN 2.3.30. La *categoría simplicial* de K , denotado $\Delta \downarrow K$. Sus objetos son los mapas $\Delta[n] \rightarrow K$ (o el conjunto de n -símplices de K , por Yoneda), una flecha en $\Delta \downarrow K$ es un diagrama conmutativo de mapas simpliciales

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n] & & \\ \downarrow \theta & \searrow \alpha & \\ & & K \\ \uparrow \tau & & \\ \Delta[m] & & \end{array}$$

entonces $K = \varinjlim_{\Delta \downarrow K} \Delta[n]$, ahora necesitamos ver que $| \cdot |$ conmuta con límites directos.

Denotamos \mathbf{sSet} la categoría de conjuntos simpliciales. Existe una relación importante entre los funtores $| \cdot | : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ y $S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$

PROPOSICIÓN 2.3.31. Dados $X \in \mathbf{sSet}$ y $Y \in \mathbf{Top}$

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \cong \mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, S(Y))$$

Es decir $| \cdot |$ es adjunto a izquierda de S .

Prueba: El functor hom (ver [8]) convierte límites directos en inversos, luego como $|X| = \varinjlim_{\Lambda_X} \Delta^n$ se sigue que $\mathrm{hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) = \varprojlim_{\Lambda_X} \mathrm{hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y)$.

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y) = SY_n \cong \mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n], S(Y))$$

$$\Rightarrow \varprojlim_{\Lambda_X} \mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n], S(Y)) \cong \mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(\varinjlim_{\Lambda_X} \Delta[n], S(Y)) = \mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, S(Y))$$

el isomorfismo $\mathrm{hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \xrightarrow{\phi} \mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, S(Y))$ viene dado por $\phi(g)(k_n)(u_n) = g|k_n, u_n|$. \square

En adelante, llamamos a $\partial\Delta[n]$ *borde de $\Delta[n]$*

Ahora veremos unos casos importantes de realizaciones geométricas.

(i) $|\Delta[n]| = \Delta^n \cong D^n$.

En un sistema $\Lambda \xrightarrow{X} C$, si Λ tiene objeto final α , entonces $\varinjlim_{\Lambda} X_i = X_\alpha$, ahora, $|\Delta[n]| = \varinjlim_{\Lambda_{\Delta[n]}} \Delta^n$ tiene objeto final $(\mathbf{n}, id_{\mathbf{n}})$ y llegamos a lo afirmado.

(ii) $|\partial\Delta[n]| = \partial\Delta^n \cong S^{n-1}$ Por proposición 2.3.8 y Teorema 1.1.1, el functor $| \cdot |$ preserva límites directos (colímites), en particular coequalizadores.

El diagrama

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta[n-2]^{ij} \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta[n-1]^{k\phi} \longrightarrow \partial\Delta[n]$$

es un coequalizador, donde

$$\varphi = \coprod d^i, \text{ con } d^i : \Delta[n-2]^{ij} \rightarrow \Delta[n-1]^j$$

$$\psi = \coprod d^{j-1}, \text{ con } d^{j-1} : \Delta[n-2]^{ij} \rightarrow \Delta[n-1]^i$$

$$\phi = \coprod d^k, \text{ con } d^k : \Delta[n-1]^k \rightarrow \partial\Delta[n]$$

y $\phi \circ \varphi = \phi \circ \psi$ ya que $d_j d_i = d_{j-1} d_i$ cuando $i < j$.

Aplicando $| \cdot |$ y por Teorema 1.1.1, el siguiente diagrama

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} |\Delta[n-2]^{ij}| \Longrightarrow \coprod_{0 \leq k \leq n} |\Delta[n-1]^k| \longrightarrow |\partial\Delta[n]|$$

es un coequalizador, luego se obtiene $|\partial\Delta[n]| = \partial\Delta^n$ pegando las caras del n -símplex por sus bordes.

COROLARIO 2.3.32. $|K| = \varinjlim_{\Delta \downarrow K} \Delta^n$

Los casos particulares (i) y (ii) nos ayudaran a ver que cualquier realización geométrica se puede construir a partir de las mencionadas previamente

Para la definición de CW-complejo, ver [18, 19].

TEOREMA 2.3.33. $|X|$ es un CW-complejo para todo conjunto simplicial X .

Prueba: La filtración

$$sk_0(X) \subset sk_1(X) \subset \cdots \subset sk_n(X) \subset \cdots$$

con $X = \bigcup_n sk_n(X) = X$ que es llamada *filtración esqueleto de X* , nos lleva a una colección de diagramas pushout

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{x \in X_n \text{ no degenerado}} \partial \Delta[n] & \xrightarrow{\bigsqcup f_x|_{\partial \Delta[n]}} & sk_{n-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{x \in X_n \text{ no degenerado}} \Delta[n] & \xrightarrow{\bigsqcup f_x} & sk_n(X) \end{array}$$

Aplicando $| \cdot |$ a los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{x \in X_n \text{ no degenerado}} S^{n-1} & \longrightarrow & |sk_{n-1}(X)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{x \in X_n \text{ no degenerado}} D^n & \longrightarrow & |sk_n(X)| \end{array}$$

que también son pushout, además

$$|sk_0(X)| \subset |sk_1(X)| \subset \cdots \subset |sk_n(X)| \subset \cdots$$

O mejor dicho, como $X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} sk_n(X)$, entonces $|X| = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} |sk_n(X)|$ y la topología de $|X|$ es la topología final de los $sk_n(X)$.

Por lo tanto $|X|$ es un CW-complejo. \square

2.3.6. ESPACIO CLASIFICANTE

DEFINICIÓN 2.3.34 (Nervio de una Categoría). Sea una categoría C , definimos el *nervio de C* , denotado NC como el complejo con n -símplices

$$NC_n = \{X_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n\} = (f_1, \cdots, f_n)$$

con

$$d_i(f_1, \dots, f_n) = \begin{cases} (f_2, \dots, f_n) & , \quad i = 0 \\ (f_1, \dots, f_{i+1} \circ f_i, \dots, f_n) & , \quad 0 < i < n \\ (f_1, \dots, f_n) & , \quad i = n \end{cases}$$

Ejemplo 2.3. Sea G un grupo, la *categoría traslación* EG asociado a G tiene por objetos a los elementos de G y morfismos $h : g \rightarrow k$ son también elementos de G , cumpliendo $k = hg$, el nervio de esta categoría es usualmente también denotado EG , cuyos n -símplices resultan ser las cadenas

$$g_0 \xrightarrow{g_1} g_1 g_0 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_n} g_n \dots g_1 g_0$$

notamos así que EG posee una G -acción derecha.

DEFINICIÓN 2.3.35. Sea una categoría C , definimos el *espacio clasificante* de C como la realización geométrica del nervio de C :

$$BC = |NC|$$

Por el teorema anterior, BC es un CW-complejo, sus 0-celdas se corresponden a los objetos de C y sus n -celdas ($n \geq 1$) se corresponden con sus n -flechas componibles, con ninguna flecha igual a la identidad.

Hemos definido hasta ahora los grupos de homotopía para complejos de Kan, y dijimos que podemos extender esta definición a cualquier complejo, fin que es permitido gracias al siguiente teorema, cuya prueba no presentamos aquí (ver [3]).

TEOREMA 2.3.36. Sea (K, ϕ) un par de Kan y (X, x_0) un espacio topológico punteado, por la adjunción de S y $|-|$, existen los mapas canónicos naturales

$$\eta_K : K \rightarrow S(|K|) \text{ y } \nu_X : X \rightarrow |S(X)|$$

tales que estos inducen biyecciones en los π_0 y

(I) $\pi_n(K, \phi) \cong \pi_n(S(|K|), S(|\phi|))$ para todo $n \geq 1$

(II) $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(|S(X)|, |S(x_0)|)$ para todo $n \geq 1$ □

En los lados izquierdos de (I) y (II) estamos hablando evidentemente de los grupos de homotopía para espacios punteados.

DEFINICIÓN 2.3.37. Sea (K, ϕ) un conjunto simplicial punteado, definimos

$$\pi_n(K, \phi) = \pi_n(S(|K|), S(|\phi|)) \tag{2.9}$$

La definición tiene sentido, ya que $(S(|K|), S(|\phi|))$ es un par de Kan y por el teorema anterior parte (I), esta definición extiende la conocida para complejos de Kan. Esto nos lleva a encontrar la conexión entre grupos de homotopía simpliciales y topológicos. Por la adjunción de S y $|-|$ y la Proposición 2.2.7, obtenemos para un complejo de Kan X , el isomorfismo

$$\pi_n(X, \phi) \cong \pi_n(|X|, |\phi|) \quad (2.10)$$

Así que otra definición de grupo de homotopía para un conjunto simplicial punteado (K, ϕ) viene dada por (2.10), en resumen:

‘Los grupos de homotopía de un conjunto simplicial coinciden con los respectivos grupos de homotopía de su realización geométrica’

Dados $X, Y \in \mathbf{sSet}_*$ y un mapa simplicial $f : X \rightarrow Y$, decimos que X y Y son *débilmente equivalentes*, y que f es una *equivalencia débil* si $|f|$ induce una equivalencia débil entre $|X|$ y $|Y|$.

A continuación, la siguiente sección es de lectura opcional pues en ella se estudian otros famosos funtores loop, path, cono y suspensión, que sin embargo no serán vistos posteriormente, pues trabajaremos con los ya definidos en 2.3.4, pero resultarán útiles para quien se interese en leer algo de Kan spectra.

2.4. SUSPENSIÓN DE KAN

Sea el funtor ‘shift’ $sh : \Delta \rightarrow \Delta$ que envía $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n} + \mathbf{1}$, $d^i \mapsto d^i$ y $s^i \mapsto s^i$.

DEFINICIÓN 2.4.1. El funtor *cono* $C : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}_*$ es la extensión de Yoneda del funtor $\Delta \rightarrow \mathbf{sSet}_*$ dado por $\mathbf{n} \mapsto \Delta[] \circ sh(\mathbf{n}) = \Delta[n + 1]$ con punto base el 0-símplice $n + 1 \in \Delta[n + 1]_0$.

PROPOSICIÓN 2.4.2. El cono CX de X es aquel conjunto simplicial punteado cuyos n -símplices vienen a ser la unión disjunta

$$(CX)_n = X_n \sqcup X_{n-1} \sqcup \cdots \sqcup X_0 \sqcup \{*\}$$

con punto base $*$. Las degeneraciones $s_i : (CX)_n \rightarrow (CX)_{n+1}$ están dadas en los sumandos X_k por $s_i : X_k \rightarrow X_{k+1}$ si $k \geq 1$ y por id_{X_k} cuando $k < i$. Las caras $d_i : (CX)_n \rightarrow (CX)_{n-1}$ están dadas en los sumandos X_k por $d_i : X_k \rightarrow X_{k-1}$ si $k \geq \max\{i, 1\}$, por id_{X_k} si $k < i$, y por $X_0 \rightarrow \{*\}$ cuando $k = i = 0$

Prueba: La fórmula describe un funtor que preserva colímites. Así solo falta que veamos que la fórmula explícita satisface la condición de conmutatividad salvo isomorfismo natural, osea existe un isomorfismo $f : C\Delta[n] \rightarrow \Delta[n+1]$ natural en \mathbf{n} de Δ . Vamos a describir tal isomorfismo a nivel de m -símplices: Consideramos los sumandos de $(C\Delta[n])_m$. Para cada $0 \leq k \leq m$, un elemento a del sumando $\Delta[n]_k$ es una sucesión creciente $(a_0 \leq \dots \leq a_k)$ con $a_i \in \mathbf{n}$. Definimos $f_m(a)$ como el m -símplice de $\Delta[n+1]$

$$(a_0 \leq \dots \leq a_k \leq n+1 \leq \dots \leq n+1)$$

agregándole $'m-k'$ términos a la sucesión, todos iguales a $n+1$. Enviamos el punto base $*$ de $(C\Delta[n])_m$ a $(n+1 \leq \dots \leq n+1)$, lo cual nos resulta un isomorfismo f_m en \mathbf{Set}_* , el cual respeta morfismos caras y degeneraciones, por cual f resulta un isomorfismo en \mathbf{sSet}_* \square

DEFINICIÓN 2.4.3. El funtor $path P : \mathbf{sSet}_* \rightarrow \mathbf{sSet}$ es aquel que toma un conjunto simplicial punteado Y en un el conjunto simplicial PY , con n -símplices

$$(PY)_n : \{y \in Y_{n+1} / (d_0)^{n+1}y = *\}$$

con morfismos cara $d_i^{PY} : (PY)_n \rightarrow (PY)_{n-1}$ simplemente las restricciones $d_i^Y : Y_{n+1} \rightarrow Y_n$, análogamente para los morfismos degeneración s_i^{PY} .

PROPOSICIÓN 2.4.4. El par (P, C) conforma una adjunción

Prueba: Por Teorema 1.4.2, el cono $C : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}_*$ tiene un funtor adjunto derecho $Y \mapsto \mathbf{sSet}_*(\Delta[] \circ sh(-), Y)$, entonces solo hace falta encontrar un isomorfismo entre este funtor y P , pero por el isomorfismo de Yoneda se tiene $\mathbf{sSet}(\Delta[n+1], Y) \cong Y_{n+1, y}$ la regla de este isomorfismo, puede ser registrada para obtener

$$\mathbf{sSet}_*(\Delta[] sh(\mathbf{n}), Y) \cong (PY)_n$$

natural en \mathbf{n} y Y . \square

DEFINICIÓN 2.4.5. La adjunción $C : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{sSet}_* : P$ induce una adjunción $C_* : \mathbf{sSet}_* \rightleftarrows (\mathbf{sSet}_*)_* \cong \mathbf{sSet}_* : P_*$ por la Proposición 1.4.2. El funtor adjunto izquierdo C_* es llamado *cono reducido*, pero por la fórmula brindada en la Proposición 1.4.2, el cono reducido C_*X de un conjunto simplicial punteado X se describe mediante el pushout

$$\begin{array}{ccc} C\Delta[0] & \xrightarrow{C(*)} & CX \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[0] & \longrightarrow & C_*X \end{array}$$

pues $\Delta[0]$ es final en \mathbf{sSet} , pero este pushout particular resulta ser, a nivel de los n -símplices, descrito por

$$(C_*X)_n = X_n \vee X_{n-1} \vee \cdots \vee X_0$$

Por otro lado, el funtor P_* toma un conjunto simplicial punteado Y y lo envía al espacio path PY , esta vez punteado con punto base $*$ $\in (PY)_0$ dado por el punto base de Y_1 .

DEFINICIÓN 2.4.6. La *suspensión de Kan* $\Sigma : \mathbf{sSet}_* \rightarrow \mathbf{sSet}_*$ es el funtor que envía $X \in \mathbf{sSet}_*$ al pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & C_*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[0] = * & \longrightarrow & \Sigma X \end{array} \quad (2.11)$$

en \mathbf{sSet}_* , donde $i_X : X \rightarrow C_*X$ es la inclusión natural, dada en los n -símplices como la inclusión $X_n \hookrightarrow (C_*X)_n$.

Notemos que por la definición como pushout, tenemos que $(\Sigma X)_n = X_{n-1} \vee \cdots \vee X_0$, es decir $(\Sigma X)_n \cong (C_*X)_n / X_n$, y revisando el buen comportamiento de los morfismos cara y degeneración, $\Sigma X \cong (C_*X) / X$.

DEFINICIÓN 2.4.7. El *functor loop* $\Omega : \mathbf{sSet}_* \rightarrow \mathbf{sSet}_*$ es aquel que envía un conjunto simplicial cualquiera Y al subcomplejo de P_*Y dado en nivel n por

$$(\Omega Y)_n = \{y \in Y_{n+1} / (d_0)^{n+1}y = *, d_{n+1} = *\}$$

es decir ΩY es la fibra del morfismo $p_Y : P_*Y \rightarrow Y$, el cual envía $y \in (P_*Y)_n$ a $d_{n+1}^Y y$.

PROPOSICIÓN 2.4.8. El funtor loop Ω es adjunto derecho de la suspensión Σ de Kan.

Prueba: Sean $X, Y \in \mathbf{sSet}_*$. La definición de ΩY se plantea categóricamente como el pullback

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y & \longrightarrow & P_*Y \\ \downarrow & & \downarrow p_Y \\ \Delta[0] = * & \longrightarrow & Y \end{array}$$

entonces, recordando el diagrama (2.11), aplicamos los funtores $\mathrm{hom}_*(-, Y)$ y $\mathrm{hom}_*(X, -)$, tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{hom}_*(X, Y) & \longleftarrow & \mathrm{hom}_*(C_*X, Y) & & \mathrm{hom}_*(X, \Omega Y) & \longrightarrow & \mathrm{hom}_*(X, P_*Y) \\ \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * = \mathrm{hom}_*(*, Y) & \longleftarrow & \mathrm{hom}_*(\Sigma X, Y) & & * = \mathrm{hom}_*(X, *) & \longrightarrow & \mathrm{hom}_*(X, Y) \end{array}$$

el funtor $\text{hom}_*(-, Y)$ convierte pushouts en pullbacks, mientras $\text{hom}_*(X, -)$ preserva pullbacks, y como $\text{hom}_*(C_*X, Y) \cong \text{hom}_*(X, P_*Y)$, estos diagramas coinciden salvo isomorfismo, es decir

$$\text{hom}_*(\Sigma X, Y) \cong \text{hom}_*(X, \Omega Y)$$

□

Si bien ya habíamos definido funtores path, loop, cono y suspensión anteriormente, para cada par de homónimos, ambos resultan ser sumamente importantes en la literatura matemática. Los funtores suspensión $\Sigma = - \wedge S^1$ y Σ de Kan no son isomorfos, pero para nuestro trabajo tenemos suficiente sabiendo que son débilmente equivalentes (ver [\[20\]](#))

Capítulo 3

TEOREMA DEL GRUPO DE COMPLECIÓN

En este tercer capítulo estudiaremos las categorías de modelos cerradas (algunas veces solo llamadas categorías de modelos), la idea detras de este concepto ha sido permitir que la noción de homotopía se extienda a categorías cumpliendo ciertas condiciones, clasificando los morfismos de estas. Esto ha permitido que las técnicas de teoría de homotopía encuentren aplicaciones en, por ejemplo, Geometría Algebraica. El beneficio de introducirnos en el álgebra homotópica (la teoría que estudia las categorías de modelos) mediante este capítulo es doble: no solo permite la continuación de la lectura de esta tesis, sino también encontramos los fundamentos que muchas especialidades en topología algebraica requieren. Los resultados más importantes serán el Teorema B de Quillen y el Teorema del Grupo de Compleción.

DEFINICIÓN 3.0.1. Un functor $\mathbf{n} \rightarrow C$ está determinada por una cadena de flechas

$$a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} a_n$$

en C , y recíprocamente, tales cadenas determinan tales funtores esto nos permite ver el nervio de C como el conjunto simplicial tal que $NC_n = \text{hom}(\mathbf{n}, C)$, donde $d_i(\sigma) = \sigma \circ d^i$ y $s_i(\sigma) = \sigma \circ s^i$.

Sea I una categoría pequeña y $X : I \rightarrow \mathbf{Set}$ un functor. La *categoría traslación* $E_I(X)$ tiene objetos dados por todos los pares (i, x) con $x \in X(i)$. Un morfismo $\alpha : (i, x) \rightarrow (j, y)$ es un morfismo $\alpha : i \rightarrow j$ tal que $X(\alpha)(x) = y$.

Definimos el *colímite homotópico de X* como el conjunto simplicial $N(E_I X)$, y denotamos

$$\text{hocolim} X_i = N(E_I X)$$

Observamos que NI es el colímite homotópico del functor constante $I \rightarrow \mathbf{Set}$ que asocia, a todo objeto de I , un conjunto unitario $*$, es decir $NI = \text{hocolim } *$. Ya que existe un functor $E_I X \rightarrow I$ ($(i, x) \mapsto i$), el cual induce un mapeo simplicial

$$\pi : \text{hocolim } X_i = N(E_I X) \rightarrow NI$$

Los funtores $\mathbf{n} \rightarrow E_I X$ pueden ser identificados con cadenas

$$(i_0, x_0) \xrightarrow{\alpha_1} (i_1, x_1) \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} (i_n, x_n)$$

a la vez, tal cadena queda determinada mediante la cadena $i_0 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n$ (con los morfismos sobreentendidos) y $x_0 \in X(i_0)$. Se desprende que existe una identificación

$$(\text{hocolim } X_i)_n = N(E_I X)_n = \bigsqcup_{i_0 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n} X(i_0)$$

Sea ahora un functor (sistema, diagrama) $X : I \rightarrow \mathbf{sSet}$ determina una categoría simplicial (un objeto simplicial en \mathbf{Cat} , es decir un functor $\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$, no confundir con la Definición 2.3.5) $m \mapsto E_I X_m$ y un correspondiente *conjunto bisimplicial* (primero intuimos el concepto, luego lo formalizamos) con (n, m) -símplices

$$N(E_I X_m)_n = \bigsqcup_{i_0 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n} X(i_0)_m$$

El conjunto simplicial $dN(E_I X)$, con regla $\mathbf{n} \mapsto N(E_I X_n)_n$ (diagonal de $N(E_I X)$) es llamado *colímite homotópico* del functor X , denotado como antes $\text{hocolim } X_i$ (u $\text{hocolim } X$). Así como antes, existe un mapa simplicial (natural)

$$\pi : \text{hocolim } X_i \rightarrow NI$$

Observación 3.1. Cuando trabajamos en la categoría \mathbf{Set}_* (resp. \mathbf{sSet}_*), la definición de colímite homotópico de un diagrama $X : I \Rightarrow \mathbf{Set}$ (resp. \mathbf{sSet}_*) se hace cambiando la unión disjunta \bigsqcup por la suma wedge \vee , esto ya que ambas representan coproductos en sus respectivas categorías; también podemos describirlo mediante el nervio visto anteriormente, pero cocientado sobre las cadenas $(i_0, *) \rightarrow (i_1, *) \rightarrow \cdots$ (el cual denotaremos $\tilde{N}(E_I X)$). Para distinguirlo, llamaremos a este último *colímite homotópico punteado* de X .

Ejemplo 3.1. (CONSTRUCCIÓN DE BOREL) Sea G un grupo y $X \in \mathbf{sSet}$ con una G -acción izquierda, la *construcción de Borel* $EG \times_G X$ (donde EG denota el nervio de la categoría traslación de G) es definido a nivel de sus n -símplices como el cociente del producto $EG_n \times X_n$ bajo la G -acción izquierda, llamada *acción diagonal*, por

$$g.(w, x) = (wg^{-1}, gx)$$

La G -acción de sobre X permite ver a X mismo como un diagrama $X : G \rightarrow \mathbf{sSet}$. Existe una identificación

$$(EG \times_G X)_n \cong \text{hocolim}_G X_n$$

la cual hace corresponder al n -símplice, dado por la clase

$$[(e \xrightarrow{g_1} g_1 \xrightarrow{g_2} g_2 g_1 \rightarrow \cdots, x)]$$

con el n -símplice

$$x \xrightarrow{g_1} g_1 x \xrightarrow{g_2} g_2 g_1 x \rightarrow \cdots$$

esto determina un isomorfismo

$$EG \times_G X \cong \text{hocolim}_G X$$

3.1. CATEGORÍAS DE MODELOS

Una *categoría de modelos cerrada* es una categoría \mathcal{M} equipada con tres clases de morfismos (fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles) las cuales satisfacen las siguientes condiciones:

M1. La categoría \mathcal{M} siempre tiene sus límites y colímites finitos.

M2. Dado un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow h & \swarrow f \\ & & Z \end{array}$$

de morfismos en \mathcal{M} . Si cualesquiera dos de ellos son equivalencias, el tercero también.

M3. Las clases de fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles son cerradas bajo retracción. (Decimos que f es un retracto de g si existen flechas i, j, r y s tal que el siguiente diagrama conmuta)

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{r} & A \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ A' & \xrightarrow{j} & B' & \xrightarrow{s} & A' \\ & & \text{id} & & \\ & & \curvearrowleft & & \end{array}$$

El axioma M3 dice que si g pertenece a una de las tres clases de morfismos distinguidas y f es un retracto de g , entonces f pertenece a esa misma clase.

M4. Dado el diagrama (sólido) de flechas

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow \text{punteada} & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

tal que i es cofibración y p es fibración, entonces el levantamiento (la flecha punteada) existe cuando i , o bien p es equivalencia débil.

M5. Cada flecha $f : X \rightarrow Y$ posee factorizaciones

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \nearrow i & & \searrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow j & & \nearrow & \\ & & W & & \end{array}$$

donde p es fibración e i es cofibración trivial, a la vez, q es fibración trivial y j es cofibración. Para el siguiente lema, sugerimos recordar la terminología RIGHT LIFTING PROPERTY (*RLP*) y LEFT LIFTING PROPERTY (*LLP*) de la topología clásica.

LEMA 3.1.1. 1) $i : A \rightarrow B$ es una cofibración si y solo si posee la *LLP* respecto a todas las fibraciones triviales.

2) $i : A \rightarrow B$ es una cofibración trivial si y solo si posee la *LLP* respecto a todas las fibraciones.

3) $p : X \rightarrow Y$ es una fibración si y solo si posee la *RLP* respecto a todas las cofibraciones triviales.

4) p es una fibración trivial si y solo si posee la *RLP* respecto a todas las cofibraciones.

Prueba: Por la similitud de las pruebas, solo demostraremos 1). Supongamos i una cofibración, y tenemos una fibración p tal que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

entonces por M4, ya que p es equivalencia débil, existe $\theta : B \rightarrow X$ tal que $p\theta = \beta$ y $\theta i = \alpha$. Recíprocamente, si $i : A \rightarrow B$ posee la *LLP* respecto a todas las fibraciones triviales. Por M5, i tiene una factorización

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & W \\ & \searrow i & \downarrow q \\ & & B \end{array}$$

con j cofibración y q fibración trivial. Así, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & W \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{id} & B \end{array}$$

luego i es retracts de j , e i es cofibración por axioma M3. \square

COROLARIO 3.1.2. 1) Las clases de cofibraciones y cofibraciones triviales son cerradas bajo composición y pushout. Todo isomorfismo es una cofibración trivial.

2) Las clases de fibraciones y fibraciones triviales son cerradas bajo composición y pull-back. Todo isomorfismo es una fibración trivial.

Ejemplo 3.2. La categoría \mathbf{sSet} , con fibraciones de Kan, monomorfismos y equivalencias débiles según la Definición 2.3.37 como fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles respectivamente, viene a ser una categoría de modelos cerrada. Los detalles pueden encontrarse en [3].

3.1.1. HOMOTOPÍAS

DEFINICIÓN 3.1.3. 1. Un *objeto path* para Y objeto de \mathcal{M} es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & Y^I \\ & \nearrow s & \downarrow p=(p_0,p_1) \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times Y \end{array} \quad (3.1)$$

tal que Δ es el morfismo diagonal, s es una equivalencia débil y p es una fibración.

2. Una *homotopía derecha* entre morfismos $f, g : X \rightarrow Y$ es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & Y^I & & \\ & \nearrow h & \downarrow p & \nearrow s & \\ X & \xrightarrow{(f,g)} & Y \times Y & \xleftarrow{\Delta} & Y \end{array} \quad (3.2)$$

donde el diagrama derecho corresponde a un objeto path. Decimos que f es *homotópico-derecho* a g si tal homotopía existe, y escribimos $f \sim_r g$.

estas definiciones tienen sus contrapartes duales:

DEFINICIÓN 3.1.4. 1. Un *objeto cilindro* para un objeto X de \mathcal{M} es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{\nabla} & X \\ \downarrow i & \nearrow \sigma & \\ X \otimes I & & \end{array} \quad (3.3)$$

donde i es una cofibración y σ es una equivalencia débil. 2. Una *homotopía izquierda* entre morfismos $f, g : X \rightarrow Y$ es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{f \sqcup g} & X \sqcup X & \xrightarrow{\nabla} & X \\ & \searrow h & \downarrow i & \nearrow \sigma & \\ & & X \otimes I & & \end{array} \quad (3.4)$$

donde el diagrama derecho corresponde a un objeto cilindro.

Decimos que f es *homotópico-izquierdo* a g si tal homotopía existe, y escribimos $f \sim_l g$.

LEMA 3.1.5. Si Y es fibrante, entonces toda proyección $X \times Y \rightarrow X$ es una fibración.

Prueba: El diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

es un pullback, entonces concluimos por Corolario 3.1.2, ya que $Y \rightarrow 1$ es fibración. \square

LEMA 3.1.6. Una homotopía derecha de morfismos $X \rightarrow Y$ es una relación de equivalencia si Y es fibrante.

Prueba: Si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & Y^I \\ & \nearrow s & \downarrow (p_0, p_1) \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times Y \end{array}$$

es un objeto path para un Y fibrante, entonces π_0 y π_1 son fibraciones triviales pues el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{\pi_0} & Y \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

es un pullback, y por hipótesis las flechas $Y \rightarrow 1$ son fibraciones, entonces también p_0 y p_1 (la clase de fibraciones es cerrada por pullback), así que $p_i = \pi_i \circ (p_0, p_1)$, $i = 0, 1$ también son fibraciones, y como $p_i \circ s = id$, p_i es fibración trivial por M2.

Supongamos dadas las homotopías derechas.

$$\begin{array}{ccc}
 & Y^I & \\
 h_1 \nearrow & & \\
 X & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & Y \times Y \\
 & \downarrow (p_0, p_1) & \\
 & Y & \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & Y^J & \\
 h_1 \nearrow & & \\
 X & \xrightarrow{(f_2, f_3)} & Y \times Y \\
 & \downarrow (q_0, q_1) & \\
 & Y & \\
 \end{array}$$

Formamos el pullback

$$\begin{array}{ccc}
 Y^I \times_Y Y^J & \xrightarrow{p_*} & Y^J \\
 \downarrow q_* & & \downarrow q_0 \\
 Y^I & \xrightarrow{p_1} & Y
 \end{array}$$

Así, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Y^I \times_Y Y^J & \xrightarrow{p_*} & Y^J \\
 \downarrow (q_*, q_1 p_*) & & \downarrow (q_0, q_1) \\
 Y^I \times Y & \xrightarrow{p_1 \times id} & Y \times Y
 \end{array}$$

es también un pullback, y $p_0 \times id : Y^I \times Y \rightarrow Y \times Y$ es una fibrición, pues se tiene un diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc}
 Y^I \times Y & \xrightarrow{p_0 \times id} & Y \times Y \\
 \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_1 \\
 Y^I & \xrightarrow{p_0} & Y
 \end{array}$$

(recordando el Corolario 3.1.2), entonces la composición $Y^I \times_Y Y^J \xrightarrow{(p_0 q_*, q_1 p_*)} Y \times Y$ es una fibrición. Las equivalencias débiles s, s' determinan un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & Y^I \times_Y Y^J & \\
 (s, s') \nearrow & & \\
 Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times Y \\
 & \downarrow p = (p_0 q_*, q_1 p_*) & \\
 & Y & \\
 \end{array}$$

y el morfismo (s, s') es una equivalencia débil ya que $p_0 q_*$ es fibrición trivial (al ser composición de fibriciones triviales). Por lo tanto, las homotopías derechas h, h' determinan una homotopía derecha.

$$\begin{array}{ccc}
 & Y^I \times_Y Y^J & \\
 (h, h') \nearrow & & \\
 X & \xrightarrow{(f_1, f_3)} & Y \times Y \\
 & \downarrow p = (p_0 q_*, q_1 p_*) & \\
 & Y & \\
 \end{array}$$

de lo cual se desprende que la relación de homotopía derecha es transitiva.

La simetría se concluye por que el isomorfismo $Y \times Y \rightarrow Y \times Y ((a, b) \mapsto (b, a))$ es fibración.

La reflexividad se deduce ya que el morfismo s del objeto path es una homotopía derecha de la identidad consigo mismo. \square

LEMA 3.1.7. 1. Sea Y fibrante y $X \otimes I$ es un objeto cilindro para X . Supongamos que $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicos-derechos. Existe una homotopía izquierda

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{f \sqcup g} & Y \\ \downarrow i & \nearrow h & \\ X \otimes I & & \end{array}$$

2. Sea X cofibrante y Y^I es un objeto path para Y . Supongamos que $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicos-izquierdos. Existe una homotopía derecha

$$\begin{array}{ccc} & & Y^I \\ & \nearrow h & \downarrow p=(p_0, p_1) \\ X & \xrightarrow{(f, g)} & Y \times Y \end{array}$$

Prueba: Probaremos (1), la declaración (2) es dual a esta. Por las hipótesis de (1), tenemos diagramas (3.1) y (3.3), luego

$$\begin{array}{ccccc} X \sqcup X & \xrightarrow{sf \sqcup h} & Y^I & \xrightarrow{p_1} & Y \\ \downarrow i & \nearrow \theta & \downarrow p_0 & & \\ X \otimes I & \xrightarrow{f \sigma} & Y & & \end{array}$$

el levantamiento θ existe pues p_0 es fibración trivial (siendo Y fibrante), entonces la composición $p_1 \theta$ es la homotopía izquierda que necesitamos, ya que $p_1 \theta i = p_1 (sf \sqcup h) = f \sqcup g$. \square

COROLARIO 3.1.8. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ flechas en \mathcal{M} con X cofibrante y Y fibrante, entonces f es homotópicos-izquierdo a g si y solo si f es homotópicos-derecho a g .

esto nos permite hablar de una relación $f \sim g$ que coincide con las otras dos mencionadas, y decimos simplemente que f es homotópicos a g

TEOREMA 3.1.9. (WHITEHEAD) Sea $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia débil, donde X, Y son ambos fibrantes y cofibrantes, entonces f es una equivalencia homotópica.

Prueba: Ya que toda equivalencia débil se puede expresar como composición de una fibrición trivial con una cofibración trivial, bastará probarlo para fibriciones triviales (ya que el caso de cofibraciones es dual al primero). Como Y es cofibrante, el diagrama sólido

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow j & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{id} & Y \end{array}$$

permite un levantamiento j , y escogiendo un objeto cilindro $X \otimes I$ (con todos los morfismos que implican, como en (3.3)), formamos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{(jf, id)} & X \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow f \\ X \otimes I & \xrightarrow{f\sigma} & Y \end{array}$$

el levantamiento h existe pues f es fibrición trivial, entonces $jf \sim id$, y la otra homotopía ($fj \sim id$) se obtiene trivialmente pues $fj = id$, por lo tanto f es una equivalencia homotópica. \square

3.1.2. CATEGORÍA HOMOTÓPICA

Cuando X y Y son objetos de una categoría de modelos cerrada \mathcal{M} que son fibrantes y cofibrantes, denotamos el conjunto de clases de morfismos $X \rightarrow Y$ (bajo la relación de homotopía) por $\pi(X, Y)$.

Usando M5, podemos descomponer $0 \rightarrow X$ en

$$0 \xrightarrow{i_X} QX \rightarrow X$$

donde i_X es cofibración y p_X una fibrición trivial, a la vez tenemos una sucesión

$$QX \xrightarrow{j_X} RQX \xrightarrow{q_X} 1$$

donde j_X es cofibración trivial y q_X una fibrición. así $0 \xrightarrow{j_X i_X} RQX$ es fibrición, pero RQX ya era cofibrante, por lo que es fibrante y cofibrante.

El diagrama sólido conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & QY \\ \downarrow & \nearrow Qf & \downarrow p_Y \\ QX & \xrightarrow{fp_X} & Y \end{array}$$

permite inducir un morfismo $f_1 : QX \rightarrow QY$ por axioma M4, pues p_Y es equivalencia débil. Análogamente se obtiene $RQf : RQX \rightarrow RQY$ tal que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{p_X} & QX & \xrightarrow{j_X} & RQX \\ f \downarrow & & \downarrow Qf & & \downarrow RQf \\ Y & \xleftarrow{p_Y} & QY & \xrightarrow{j_Y} & RQY \end{array}$$

LEMA 3.1.10. El morfismo RQf es único salvo equivalencia homotópica.

Prueba: Supongamos existan otros $\alpha : QX \rightarrow QY$ y $\beta : RQX \rightarrow RQY$ que hagan conmutativo el diagrama anterior, en reemplazo de Qf y RQf , respectivamente.

Existe un diagrama

$$\begin{array}{ccc} QX \sqcup QX & \xrightarrow{(Qf, \alpha)} & QY \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p_Y \\ QX \otimes I & \xrightarrow{\sigma} QX \xrightarrow{fp_X} & Y \end{array}$$

para un cilindro (fijado) $QX \otimes I$ de QX , así Qf y α son homotópicos-izquierdos (el levantamiento existe por M4, ya que i es cofibración y p_Y es fibración trivial).

Las composiciones $j_Y Qf$ y $j_Y \alpha$ son entonces homotópicos-izquierdas, por lo cual también homotópicos-derechas, ya que QX es cofibrante y RQY fibrante. Así, existe una homotopía derecha

$$\begin{array}{ccc} & & RQY^I \\ & \nearrow h & \downarrow p \\ QX & \xrightarrow{(j_Y Qf, j_Y \alpha)} & RQY \times RQY \end{array}$$

formando de esta manera el diagrama, para un objeto path de RQY^I fijado

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{h} & RQY^I \\ \downarrow j_X & \nearrow H & \downarrow p \\ RQX & \xrightarrow{(RQf, \beta)} & RQY \times RQY \end{array}$$

por lo que RQf y β son homotópicos. □

El resultado previo nos permite inducir la categoría $\pi(\mathcal{M})$ cuyos objetos son los objetos (a la vez) cofibrantes y fibrantes, y cuyos morfismos son las clases $[f]$ bajo la relación de homotopía, donde f es un morfismo en \mathcal{M} . Nuestro lema anterior implica que existe un functor bien definido $\mathcal{M} \rightarrow \pi(\mathcal{M})$ con $X \mapsto RQX$ y $f \mapsto [RQf]$.

La *categoría homotópica* $\text{Ho}(\mathcal{M})$ es aquella con los mismos objetos de \mathcal{M} pero

$$\mathrm{hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y) = \mathrm{hom}_{\pi(\mathcal{M})}(RQX, RQY)$$

Podemos identificar un funtor

$$\gamma : \mathcal{M} \rightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$$

con $X \mapsto X$ y $f \mapsto [RQf]$, el cual lleva equivalencias débiles en isomorfismos en $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ por teorema de Whitehead.

El funtor γ es universal con respecto a los funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que 'invierten' equivalencias débiles, es decir:

TEOREMA 3.1.11. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías de modelos cerradas y supongamos que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor tal que $F(f)$ es un isomorfismo en \mathcal{D} para cualquier equivalencia débil $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} , existe entonces un único funtor $F_* : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $F_* \circ \gamma = F$. \square

3.2. CATEGORÍAS SIMPLICIALES

DEFINICIÓN 3.2.1. Una categoría C es simplicial si existe un funtor

$$\mathbf{Hom}_C(-, -) : C^{op} \times C \rightarrow \mathbf{sSet}$$

el cual para todo par de objetos X, Y en C satisface las propiedades:

1. $\mathbf{Hom}_C(X, Y)_0 = \mathrm{hom}_C(X, Y)$
2. El funtor $\mathbf{Hom}_C(X, -) : C \rightarrow \mathbf{sSet}$ tiene una adjunta izquierda

$$X \otimes - : \mathbf{sSet} \rightarrow C$$

el cual es asociativa, en el sentido que hay un isomorfismo

$$X \otimes (K \times L) \cong (X \otimes K) \otimes L$$

natural en X y K, L objetos en \mathbf{sSet} (el término 'asociatividad' será completamente justificado en breve)

3. El funtor $\mathbf{Hom}_C(-, Y) : C^{op} \rightarrow \mathbf{sSet}$ tiene una adjunta izquierda

$$\mathbf{hom}_C(-, Y) : \mathbf{sSet} \rightarrow C^{op}$$

es decir

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{Hom}_C(X, Y)) \cong \mathrm{hom}_{C^{op}}(\mathbf{hom}_C(K, Y), X) = \mathrm{hom}_C(X, \mathbf{hom}_C(K, Y))$$

LEMA 3.2.2.

A. Para un objeto fijo K en \mathbf{sSet} , existen funtores adjuntos $- \otimes K : C \rightarrow C$ y $\mathbf{hom}_C(K, -) : C \rightarrow C$.

B. Para todo par de objetos K y L en \mathbf{sSet} y Y en C existe un isomorfismo natural

$$\mathbf{hom}_C(K \times L, Y) \cong \mathbf{hom}_C(K, \mathbf{hom}_C(L, Y))$$

C. Para todo $n \geq 0$, $\mathbf{Hom}(X, Y)_n \cong \mathrm{hom}_C(X \otimes \Delta[n], Y)$.

Prueba: Dado X en C , el objeto $X \times K$ representa el funtor

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{Hom}_C(X, -)) : C \rightarrow \mathbf{Set}$$

el cual existe, por axioma 2. Además, un morfismo $X \xrightarrow{f} X'$ induce (por la naturalidad de la adjunción en axioma 2) un morfismo $f \otimes id : X \otimes K \rightarrow X' \otimes K$. El funtor $\mathbf{hom}_C(K, -)$ se define de forma análoga y el isomorfismo del axioma 3 expresa la adjunción entre ellos, probando A.

Los isomorfismos $\mathrm{hom}_C(X \times \Delta[n], Y) \cong \mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta, \mathbf{Hom}_C(X, Y)) \cong \mathbf{Hom}_C(X, Y)_n$ (el último por Yoneda) confirman C. \square

Observación 3.2. El lema precedente permite justificar (más) la notación $\mathbf{Hom}_C(-, -)$, pues vamos a obtener una 'composición'

$$\mathbf{Hom}_C(X, Y) \times \mathbf{Hom}_C(Y, Z) \rightarrow \mathbf{Hom}_C(X, Z)$$

de la siguiente manera: Por el punto C del lema anterior, todo n -símplice de $\mathbf{Hom}_C(X, Y)$ puede considerarse una flecha $f : X \otimes \Delta[n] \rightarrow Y$, luego bajo este punto de vista, si además tenemos $g : Y \otimes \Delta[n] \rightarrow Z$ un n -símplice de $\mathbf{Hom}_C(Y, Z)$ determinamos un n -símplice de $\mathbf{Hom}_C(X, Z)$ mediante la composición

$$X \otimes \Delta[n] \xrightarrow{id \otimes d} X \otimes (\Delta[n] \otimes \Delta[n]) \cong X \otimes \Delta[n] \otimes \Delta[n] \xrightarrow{f \otimes id} Y \otimes \Delta[n] \xrightarrow{g} Z$$

COROLARIO 3.2.3. Dada una categoría simplicial C , se tienen los siguientes isomorfismos de adjunción:

$$\mathbf{Hom}_C(X, \mathbf{hom}_C(K, Y)) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{Hom}_C(X, Y)) \cong \mathbf{Hom}_C(X \otimes K, Y)$$

en términos categóricos más sofisticados, una categoría simplicial es una *categoría tensorizada sobre \mathbf{sSet}* , una vez consideramos la estructura de *categoría monoidal simétrica cerrada* en \mathbf{sSet} (sin embargo, en la notación categórica el producto tensorial va en el sentido contrario, es decir se prefiere denotar $K \otimes X$ en lugar de $X \otimes K$). Ver [8] para detalles.

3.2.1. COLÍMITE HOMOTÓPICO EN CATEGORÍAS SIMPLICIALES

DEFINICIÓN 3.2.4. Sean C una categoría simplicial y $F : I \rightarrow C$ un functor. El functor $N(\bullet \downarrow I) : I^{op} \rightarrow \mathbf{sSet}$ con F inducen un functor $I^{op} \times I \rightarrow C$ (con regla $(a, b) \mapsto N(a \downarrow I) \otimes F(b)$, utilizando la notación categórica), entonces definimos el *colímite homotópico de F* como el coend

$$\mathrm{hocolim}_I F = N(\bullet \downarrow I) \otimes_I F = \int^c N(c \downarrow I) \otimes Fc$$

Ejemplo 3.3. Sea D una categoría cocompleta, denotamos $\mathbf{s}D$ la categoría de objetos simpliciales en D . Si K es un conjunto simplicial, entonces para $A \in \mathbf{s}D$, definimos el objeto $A \otimes K \in \mathbf{s}D$ como

$$(A \otimes K)_n = \bigsqcup_{k \in K_n} A_n.$$

Dado un morfismo $\phi : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$, entonces el morfismo inducido $\phi^* : (A \otimes K)_m \rightarrow (A \otimes K)_n$ está dado por

$$\bigsqcup_{k \in K_m} A_m \xrightarrow{\bigsqcup \phi^*} \bigsqcup_{k \in K_m} A_n \rightarrow \bigsqcup_{k \in K_n} A_n$$

el primer mapa simplicial es inducido por $\phi^* : A_m \rightarrow A_n$ y el segundo por $\phi^* : A_m \rightarrow A_n$. Si definimos

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{s}D} = \mathrm{hom}_{\mathbf{s}D}(A \otimes \Delta[n], B)$$

entonces (ver [3] para la adjunta derecha $\mathbf{hom}(-, B)$) $\mathbf{s}D$ es una categoría simplicial con esta estructura. En el caso $D = \mathbf{sSet}$. Lo anterior coincide con (2.4), notando que $A \otimes K = A \times K$, y añadiendo

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(K, B) = \mathbf{Hom}(K, B)$$

Esto nos permite aclarar que la Definición 3.2.4 es una generalización de la presentada en 3.0.1, ver [21] y [22] para detalles y otras definiciones de colímite homotópico.

Ejemplo 3.4. La categoría \mathbf{sSet}_* es también simplicial con

$$A \otimes K = A \wedge K_+ = A \times K / * \times K$$

esto nos permite definir $\mathbf{Hom}_{\mathbf{sSet}_*}(A, B)$ como en (2.7), y definiendo

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}_*}(K, B) = \mathbf{Hom}(K, B)$$

Observación 3.3. (RELACIÓN ENTRE COLÍMITE HOMOTÓPICO PUNTEADO Y NO PUNTEADO) A partir de un diagrama $X : I \rightarrow \mathbf{sSet}_*$ de conjuntos simpliciales punteados, podemos 'olvidar los puntos bases' para obtener un diagrama $UX : I \rightarrow \mathbf{sSet}$ de conjuntos simpliciales no punteados, de acuerdo a la Observación 3.1, se tiene la siguiente relación

$$U\mathbf{hocolim}_I X \cong \mathbf{hocolim}_I UX/NI \quad (3.5)$$

donde el cociente no es precisamente NI pero sí identificable con él.

Cuando NI es contráctil, entonces

$$U\mathbf{hocolim}_I X \simeq \mathbf{hocolim}_I UX \quad (3.6)$$

esto se cumple, particularmente, cuando I posee objeto inicial.

3.2.2. CATEGORÍAS DE MODELOS SIMPLICIALES

Sea \mathcal{C} una categoría, a la vez de modelos cerrada y simplicial, tal que cumpla M6. Sea $j : A \rightarrow B$ una cofibración y $q : X \rightarrow Y$ una fibración, entonces

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) & & \\
 \downarrow (j^*, q_*) & \searrow q_* & \\
 \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \times_{\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)
 \end{array}$$

la flecha (punteada) $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \xrightarrow{(j^*, q_*)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \times_{\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y)$ es fibración de conjuntos simpliciales (fibración de Kan), la cual es trivial si j o q es trivial. La categoría \mathcal{C} satisfaciendo M6 es llamada *categoría de modelos simplicial*

PROPOSICIÓN 3.2.5. Sea \mathcal{C} una categoría de modelos simplicial.

1) Si $q : X \rightarrow Y$ una fibración y B es cofibrante, entonces $q_* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y)$ es una fibración.

2) Análogamente, si $j : A \rightarrow B$ es una cofibración y X es fibrante, entonces $j^* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ es una fibración.

Prueba: Para la primera afirmación, nos basamos en el diagrama anterior, haciendo $A = 0$ y tendremos $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X) \times_{\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(0, Y)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y)$.

En la segunda afirmación, hacemos $Y = 1$ y $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \times_{\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, 1) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$. \square

Precisamente la Proposición 3.2.5 parte 2 justifica el paso (2.8) en el capítulo 2. Similarmemente, tenemos

PROPOSICIÓN 3.2.6. Sea \mathcal{C} una categoría de modelos simplicial.

1) Si A es cofibrante y $g : X \rightarrow Y$ es una fibración trivial, entonces g induce una fibración trivial $g_* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$.

2) Si B es fibrante y $h : X \rightarrow Y$ es una cofibración trivial, entonces h induce una fibración trivial $h^* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, B) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$. \square

PROPOSICIÓN 3.2.7. Sea \mathcal{C} una categoría de modelos simplicial y $j : K \rightarrow L$ es una cofibración de conjuntos simpliciales (en esta categoría, eso significa un monomorfismo).

1) Si A en \mathcal{C} es cofibrante, entonces

$$id \otimes j : A \otimes K \rightarrow A \otimes L$$

es una cofibración.

2) Si X en \mathcal{C} es fibrante

$$j^* : \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(L, X) \rightarrow \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(K, X)$$

es una fibración. Si j es trivial, entonces también $id \otimes j$ y j^*

Prueba: Sea $q : X \rightarrow Y$ una fibración trivial cualquiera. Exigir que el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A \otimes K & \longrightarrow & X \\ id \otimes j \downarrow & & \downarrow q \\ A \otimes L & \longrightarrow & Y \end{array}$$

tenga un levantamiento, es lo mismo que exigir (por el axioma 2 de adjunción izquierda) un levantamiento para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ j \downarrow & & \downarrow q_* \\ L & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \end{array}$$

pero q_* ya es fibración trivial por axioma M6, entonces existe el levantamiento pues j ya es cofibración, por lo cual posee la LLP respecto de fibraciones triviales.

La segunda prueba es análoga. \square

LEMA 3.2.8. Sea \mathcal{C} una categoría de modelos simplicial y A un objeto cofibrante de esta. Si $q : \Delta[1] \rightarrow * = \Delta[0]$ el morfismo único, entonces

$$id \otimes q : A \otimes \Delta[1] \rightarrow A \otimes * \cong A$$

es una equivalencia débil, además

$$d_1 \sqcup d_0 : A \sqcup A \rightarrow A \otimes \Delta[1]$$

es una cofibración y la composición

$$A \sqcup A \xrightarrow{d_0 \sqcup d_1} A \otimes \Delta[1] \xrightarrow{id \otimes q} A$$

coincide con la codiagonal $\nabla : A \sqcup A \rightarrow A$

Prueba: La primera afirmación se deduce del hecho que, usando la inversa

$$id \otimes d_1 : A \cong A \otimes \Delta[0] \rightarrow A \otimes \Delta[1]$$

es una cofibración trivial, puesto que d^1 lo es ($\Delta[1]$ es contráctil). La segunda afirmación se obtiene pues $d_1 \sqcup d_0$ es débilmente equivalente a

$$id \otimes j : A \otimes \partial\Delta[1] \cong A \otimes (\Delta[0] \sqcup \Delta[0]) \cong A \otimes \Delta[0] \sqcup A \otimes \Delta[0] \cong A \sqcup A \rightarrow A \otimes \Delta[1]$$

y $j : \partial\Delta[1] \rightarrow \Delta[1]$ es la inclusión, por lo tanto una cofibración. Para la tercera solo se comprueba que $(id \otimes q)d_1 = (id \otimes q)d_0 = id$ \square

COROLARIO 3.2.9. Sea \mathcal{C} una categoría de modelos simplicial, dado X de \mathcal{C} , el objeto $X \otimes \Delta[1]$ es un objeto cilindro de X .

Similarmente, se puede obtener que $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(\Delta[1], X)$ es un objeto path de X (notar que $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(\partial\Delta[1], X) \cong X \times X$)

Ejemplo 3.5. En [23] se prueba que \mathbf{sSet}_* es una categoría de modelos simplicial con la estructura del Ejemplo 3.4. El Lema 2.0.4 y el Teorema 2.3.36 nos dicen que $S|X|$ es un *reemplazo fibrante* de $X \in \mathbf{sSet}_*$, es decir $\eta_X : X \rightarrow S|X|$ es una cofibración trivial (notemos que es un monomorfismo) y $S|X|$ es fibrante. Ahora, otra opción de reemplazo fibrante viene dado por el funtor Ex^∞ de Kan (ver [24, 25]) el cuál es preferido por sobre $S|-|$ pues este último requiere trabajar con la topología de $|X|$, mientras el primero

tiene una construcción plenamente algebraica.

Como dijimos en el capítulo 2, podemos extender los funtores path, loop, cono y suspensión para todo conjunto simplicial punteado, en realidad tenemos dos vías para eso. Usaremos simbólicamente el functor Ex^∞ en las siguientes líneas (en el sentido que podemos, en cambio, escoger $S|-|$).

Si nos enfocamos en el functor Ω , la primera forma de definir ΩX para $X \in \mathbf{sSet}_*$ es hacer

$$\Omega X = \Omega(\text{Ex}^\infty X) = \mathbf{Hom}_*(S^1, \text{Ex}^\infty X) \quad (3.7)$$

pues $\text{Ex}^\infty X$ es fibrante. Y la segunda, en cambio, es definir

$$\Omega X = \mathbf{Hom}_*(\text{Ex}^\infty S^1, X) \quad (3.8)$$

lo cual se justifica pues, cuando X es fibrante, se induce una fibración trivial $\mathbf{Hom}_*(\text{Ex}^\infty S^1, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_*(S^1, X)$ por la Proposición 3.2.6, ya que $S^1 \rightarrow \text{Ex}^\infty S^1$ es una cofibración trivial.

La ventaja de esta última vía es que, reemplazando también $\Delta[1]$ por $\text{Ex}^\infty \Delta[1]$ y tomando la misma idea de (3.8) pero para los funtores path, cono y suspensión, conservamos las adjunciones (P, C) y (Σ, Ω) .

En general un reemplazo fibrante para $X \in \mathbf{sSet}_*$ se denota X^{fib} .

3.2.3. FUNTOR TOTAL DERIVADO DE QUILLEN

DEFINICIÓN 3.2.10. Sea \mathcal{C} una categoría de modelos simplicial y D otra categoría (no necesariamente de modelos ni simplicial).

Si un functor $F\mathcal{C} \rightarrow D$ es tal que envía equivalencias débiles entre objetos cofibrantes a isomorfismos, definimos un functor

$$\mathbf{L}F : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow D$$

tal que $\mathbf{L}F(X) = F(Y)$, donde $Y \rightarrow X$ es una fibración trivial con Y cofibrante. Para un morfismo $X \xrightarrow{f} X'$, tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}F(X) & & \mathbf{L}F(X') \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

de lo cual, construimos el diagrama sólido

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{L}F(X') \\
\downarrow & \nearrow g & \downarrow j \\
\mathbf{L}F(X) & \xrightarrow{f \circ i} & X'
\end{array}$$

e inducimos el levantamiento g , definimos $\mathbf{L}F(f) = F(g)$. Llamamos a $\mathbf{L}F$ *functor total derivado de F* , sin embargo, ni el término ‘functor’ ni la buena definición de $\mathbf{L}F$ han sido justificados, por eso tenemos el siguiente

LEMA 3.2.11. Los objetos $\mathbf{L}F(X)$ y los morfismos $\mathbf{L}F(f)$ son independientes de las elecciones hechas y $\mathbf{L}F : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow D$ es un functor.

Prueba: [3]. □

3.2.4. CATEGORÍAS DE MODELOS PROPIAS

Sea \mathcal{M} una categoría de modelos cerrada fija.

LEMA 3.2.12. Si A es un objeto de \mathcal{M} , entonces la categoría coma $M \downarrow A$ tiene estructura de modelo cerrada para la cual un morfismo

$$\begin{array}{ccc}
& A & \\
\swarrow & & \searrow \\
B & \xrightarrow{f} & C
\end{array}$$

es una equivalencia débil (resp. cofibración, fibración) si y solo si la flecha $f : B \rightarrow C$ es una equivalencia débil (resp. cofibración, fibración) de \mathcal{M} . □

LEMA 3.2.13. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de \mathcal{M} , con X y Y cofibrantes. Se tiene una factorización $f = u \circ i$ donde i es una cofibración y u es una equivalencia débil la cual es inversa izquierda de una cofibración trivial $j : X \rightarrow Y$. □

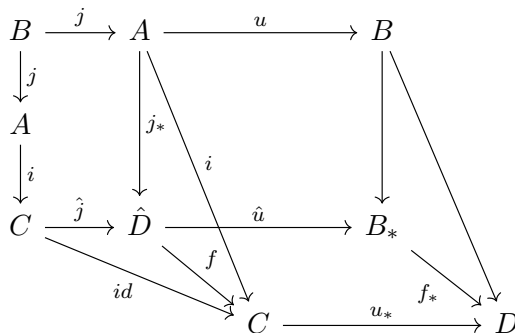
LEMA 3.2.14. Dado un diagrama pushout

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{u} & B \\
i \downarrow & & \downarrow \\
C & \xrightarrow{u_*} & D
\end{array}$$

en \mathcal{M} con todos los objetos cofibrantes, i es una cofibración y u una equivalencia débil, entonces u_* es equivalencia débil.

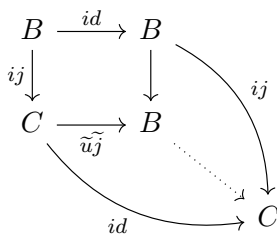
Prueba: Primero supongamos que u tiene una inversa derecha j que es cofibración trivial.

Formamos el diagrama

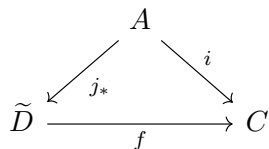


Donde los dos cuadrados verticales adyacentes son pushout, el morfismo \hat{j} es cofibración trivial ya que j lo es (cerradura por pushout), además el cuadrado vertical que contiene a los dos adyacentes es, por propiedades de pushout, otro diagrama pushout.

Tenemos el diagrama



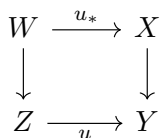
el cual nos permite deducir que \tilde{u}_j es isomorfismo, por lo cual equivalencia débil, así \tilde{u} es equivalencia débil. Vemos también que f es equivalencia débil, luego será suficiente mostrar que f_* es equivalencia débil. Notemos nuevamente que el cuadrado horizontal es un pushout, pero del diagrama



□

vemos que f es una equivalencia débil en $A \downarrow \mathcal{M}$ existe una versión dual del lema anterior

LEMA 3.2.15. Dado un diagrama pullback

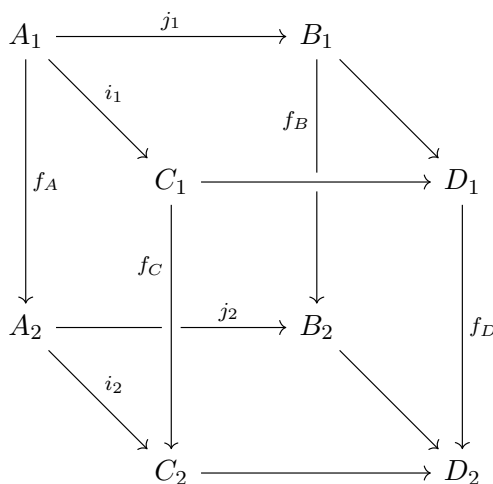


en \mathcal{M} con todos los objetos fibrantes, p una fibración y u una equivalencia débil, entonces u_* es una equivalencia débil. □

DEFINICIÓN 3.2.16. Una categoría de modelos cerrada \mathcal{M} es

1. *Propia-derecha* si la clase de equivalencias débiles es cerrada bajo pullbacks a lo largo de fibraciones.
2. *Propia-izquierda* si la clase de equivalencias débiles es cerrada bajo pushouts a lo largo de cofibraciones.
3. *Propia* si es propia-derecha y propia-izquierda.

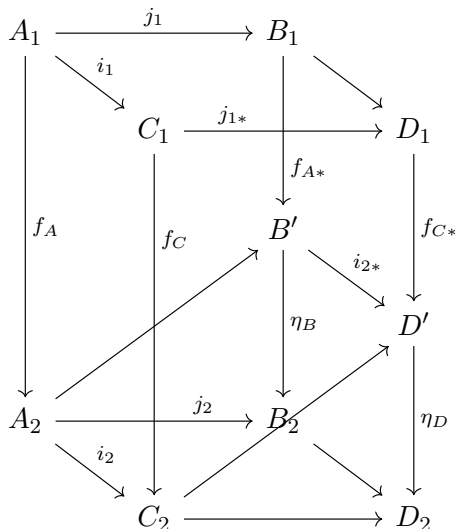
LEMA 3.2.17. (LEMA ADHESIVO) Dado el diagrama (cubo) conmutativo



en el cual todos los objetos son cofibrantes, i_1 e i_2 son cofibraciones, las caras superior e inferior del cubo son pushout y los morfismos f_A, f_B y f_C son equivalencias débiles, entonces f_C es equivalencia débil.

Prueba: Por el Lema 3.2.13, j_1 y j_2 son expresables como cofibraciones 'salvo' una equivalencia débil, y por el buen comportamiento de esta última, es suficiente suponer que j_1 y j_2 son cofibraciones.

A partir del cubo conmutativo, generamos el diagrama



donde f_{A^*} es el pushout de f_A a lo largo de j_1 y f_{C^*} el pushout de f_C a lo largo de j_{1^*} , esto hace que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \longrightarrow & B' \\ \downarrow i_2 & & \downarrow i_{2^*} \\ C_2 & \longrightarrow & D' \end{array}$$

es un pushout, por lo cual también lo es el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{i_{2^*}} & D' \\ \downarrow \eta_B & & \downarrow \eta_D \\ B_2 & \longrightarrow & D_2 \end{array}$$

e i_{2^*} es cofibración por serlo i_2 . Por Lema 3.2.14, f_{A^*} y f_{C^*} son equivalencias débiles, y como $f_B = \eta_B f_{A^*}$ es una equivalencia débil por hipótesis, también lo es η_B . Aplicando nuevamente 3.2.14 vemos que η_D es equivalencia débil, y concluimos por lo tanto lo mismo para $f_D = \eta_D f_{C^*}$. \square

LEMA 3.2.18. Sea \mathcal{C} una categoría de modelos propia-derecha. Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \xleftarrow{p_1} & Z_1 \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \xleftarrow{p_2} & Z_2 \end{array}$$

donde las flechas verticales son equivalencias débiles y los morfismos p_1, p_2 son fibraciones. El morfismo

$$X \times_{Y_1} Z_1 \rightarrow X_2 \times_{Y_2} Z_2$$

es una equivalencia débil.

Prueba: [3]. \square

3.2.5. DIAGRAMAS CARTESIANOS HOMOTÓPICOS

DEFINICIÓN 3.2.19. Un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

en \mathcal{C} es *cartesiano homotópico* si se tiene una factorización $f = p \circ \theta$ ($X \xrightarrow{\theta} U, U \xrightarrow{p} Y$) tal que p es fibración y θ es equivalencia débil, y el morfismo inducido

$$W \xrightarrow{\theta_*} Z \times_Y U$$

es una equivalencia débil.

Para caracterizar un poco mejor a θ , podemos siempre tomarlo como una cofibración trivial, esto es debido a que si factorizamos θ como

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & V \\ & \searrow \theta & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

donde π es fibración trivial e i cofibración trivial. Se induce el diagrama

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i_*} & Z \times_Y V \\ & \searrow \theta_* & \downarrow \pi_* \\ & & Z \times_Y U \end{array}$$

y π_* es una fibración trivial, entonces θ_* es equivalencia débil si y solo si lo es i_* .

Parece que dependemos de la factorización, pero el siguiente lema nos dice que no realmente.

LEMA 3.2.20. Supongamos se tenga una segunda factorización de f ($X \xrightarrow{\theta'} U', U' \xrightarrow{p'} Y$) con las mismas propiedades, entonces el morfismo $W \xrightarrow{\theta'_*} Z \times_Y U'$ es equivalencia homotópica si y solo si también lo es $W \xrightarrow{\theta_*} Z \times_Y U$.

Prueba: [3]. □

LEMA 3.2.21. Sea el diagrama cartesiano homotópico

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

y las factorizaciones

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\gamma} & V & X & \xrightarrow{\theta} & U \\ & \searrow g & \downarrow q & & \searrow \gamma & \downarrow p \\ & & Y & & & Y \end{array}$$

donde la primera factorización (la de g), es tal que q es fibración y γ una equivalencia débil, mientras la segunda es la establecida por definición. El morfismo $\theta_* : W \rightarrow Z \times_Y U$ es una equivalencia débil si y solo si lo es $W \rightarrow V \times_Y X$.

Prueba: Existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\theta_*} & Z \times_Y U \\ \gamma_* \downarrow & & \cong \downarrow \gamma_* \\ V \times_Y X & \xrightarrow[\theta_*]{\cong} & V \times_Y U \end{array}$$

donde los morfismos indicados son equivalencias débiles porque son pullbacks de equivalencias débiles a lo largo de fibraciones. \square

LEMA 3.2.22. Sea \mathcal{M} categoría de modelos propia-derecha.

1. Si tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

donde α y β son equivalencias débiles, entonces el diagrama es cartesiano homotópico.

2. Dado el diagrama conmutativo en \mathcal{M}

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \mathbf{I} & & \mathbf{II} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Y_3 \end{array}$$

a) Si los cuadrados **I** y **II** son cartesianos homotópicos, entonces el cuadrado compuesto **I + II** es también cartesiano homotópico.

b) Si **I + II** y **II** son cartesianos homotópicos, entonces también lo es **I**. \square

3.3. CONJUNTOS BISIMPLICIALES

Un *conjunto bisimplicial* X es un functor $X\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{sSet}$, o equivalentemente, podemos verlo como un functor $X : \Delta^{op} \times \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. Los conjuntos $X(n, m)$ son llamados *conjuntos de (n, m) -bisimplices de X* . Vamos a definir a partir de X unos conjuntos simpliciales, comenzamos con el *conjunto simplicial diagonal de X* $d(X)$, cuyos n -símplices dados por $d(X)_n = X(n, n)$.

Los conjuntos simpliciales *horizontal y vertical de X* son, respectivamente, $X(*, m)$ y $X(n, *)$, donde denotaremos este último como X_n .

PROPOSICIÓN 3.3.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ morfismo de conjuntos bisimpliciales en el cual los morfismos verticales $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ son equivalencias débiles de conjuntos simpliciales, entonces el morfismo inducido $f_* : d(X) \rightarrow d(Y)$ de conjuntos simpliciales diagonales asociados, es una equivalencia débil.

Prueba: [10]. □

3.4. GRUPOS ABELIANOS SIMPLICIALES

Sea A un grupo abeliano simplicial, podemos asociarle dos complejos de cadenas positivos. El primero de ellos, lo llamamos el *complejo de Moore de A*, formado por los mismos A_n y diferenciales

$$\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i : A_n \rightarrow A_{n-1}$$

El segundo complejo de cadenas asociado a A , es objeto de estudio en nuestra siguiente subsección

3.4.1. LA CORRESPONDENCIA DE DOLD-KAN

Sea A un grupo abeliano simplicial, induciremos como en la sección de grupos simpliciales, un complejo de cadenas, el cual será denotado NA y tiene la única sutil diferencia con el complejo \bar{A} de que su diferencial está definido $\partial = (-1)^n d_n$ (notar que esto no afecta en nada, salvo isomorfismo, a los grupos de homología). Llamamos a NA *complejo de cadenas normalizado asociado a A*. Así tenemos un funtor $N : \mathbf{sAb} \rightarrow \mathbf{Ch}_+$. Ahora, dado el complejo C en \mathbf{Ch}_+ , vamos a definir un grupo abeliano simplicial $\Gamma(C)$, donde

$$\Gamma(C)_n = \bigoplus_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{k}} C_k$$

la suma directa está indexada sobre todos los epimorfismos $\mathbf{n} \twoheadrightarrow \mathbf{k}$. Sea $\nu : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$ morfismo y $\tau : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{k}$ un epimorfismo indexante de $\Gamma(C)_n$. Podemos factorizar $\tau\nu$ como una composición $\mathbf{m} \twoheadrightarrow \mathbf{j} \hookrightarrow \mathbf{k}$, de un epimorfismo σ con un monomorfismo ι , definimos un morfismo

$$C_k \rightarrow C_j = \begin{cases} id_{C_n} & , \quad j = k \\ (-1)^n d_n & , \quad j = k - 1 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

entonces, componiendo con la inclusión $C_j \hookrightarrow \Gamma(C)_m$, tenemos un morfismo $C_k \hookrightarrow \Gamma(C)_m$ para cada sumando indexado por τ , finalmente induciendo $\nu^* : \Gamma(C)_n \rightarrow \Gamma(C)_m$. Si tenemos otro morfismo $\mu : \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{m}$. Factorizamos $\sigma\mu$ como $\rho\theta : \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{i} \hookrightarrow \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{k}$ y así tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{l} & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{m} & \xrightarrow{\nu} & \mathbf{n} \\ \downarrow \rho & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau \\ \mathbf{i} & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{j} & \xrightarrow{\iota} & \mathbf{k} \end{array}$$

y esto nos permite ver que $(\nu\mu)^* = \mu^*\nu^*$, de lo cual se concluye que $\Gamma(C)$ es un grupo abeliano simplicial, y queda claro que todo morfismo de complejo de cadenas $C \rightarrow D$ da lugar a un morfismo simplicial $\Gamma(C) \rightarrow \Gamma(D)$, hemos definido así un funtor

$$\Gamma : \mathbf{Ch} \rightarrow \mathbf{sAb}$$

TEOREMA 3.4.1. (CORRESPONDENCIA DE DOLD-KAN) Los funtores

$$N : \mathbf{sAb} \rightarrow \mathbf{Ch}_+ \text{ y } \Gamma : \mathbf{Ch}_+ \rightarrow \mathbf{sAb}$$

forman una equivalencia de categorías.

Prueba: [26]. □

PROPOSICIÓN 3.4.2. Sea A un grupo abeliano simplicial, entonces existen isomorfismos

$$\pi_n(A, 0) \cong H_n(NA) \cong H_n(A)$$

donde el miembro de la derecha represente el n -ésimo grupo de homología del complejo de Moore de A .

Prueba: [26]. □

Dado un grupo abeliano B , denotamos $B[n]$ al complejo de cadenas con $(B[n])_n = B$ y $(B[n])_m = 0$ cuando $m \neq n$, entonces por Teorema 3.4.1 y la Proposición 3.4.2 el grupo abeliano simplicial $\Gamma B[n]$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane, precisamente

$$\Gamma B[n] = K(B, n) \tag{3.9}$$

3.4.2. HOMOMORFISMO DE HUREWICZ

Definimos el funtor $h : \mathbf{sSet}_* \rightarrow \mathbf{sAb}_*$ con correspondencia $X \mapsto \mathbb{Z}X$, el cual preserva equivalencias débiles y para cada $X \in \mathbf{sSet}$, podemos ver a $X \xrightarrow{h} \mathbb{Z}X$ como mapa simplicial, llamado *mapa de Hurewicz*. Sea $(X, *)$ un complejo de Kan punteado, el mapa de Hurewicz induce la sucesión de homomorfismos de grupos

$$\pi_n X \rightarrow \pi_n(\mathbb{Z}X) \rightarrow \pi_n(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}*, 0) \cong \tilde{H}_n(X, \mathbb{Z})$$

donde $\tilde{H}_*(X, \mathbb{Z})$ es la homología reducida de X . La composición anterior es denotada

$$h_* : \pi_n X \rightarrow \tilde{H}_n(X, \mathbb{Z})$$

y llamamos a h_* *homomorfismo de Hurewicz*

TEOREMA 3.4.3. (HUREWICZ) Sea X un complejo de Kan $(n-1)$ -conexo, $n \geq 2$. El homomorfismo de Hurewicz $h_* : \pi_i X \rightarrow \tilde{H}_i(X)$ es un isomorfismo para $i \leq n$ y un epimorfismo si $i = n+1$.

Prueba: [3, 4, 17]. □

COROLARIO 3.4.4. Si X es un complejo de Kan simplemente conexo, y $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i < n$, entonces X es $(n-1)$ -conexo.

Prueba: Por Hurewicz, $\pi_2 X \cong \tilde{H}_2(X) = 0$, entonces X es 2-conexo, luego procedemos inductivamente hasta $i = n-1$.

3.4.3. GRUPOS ABELIANOS BISIMPLICIALES

Sea A un grupo abeliano bisimplicial, el *bicomplejo de Moore de A* es un bicomplejo formados por los mismos $A_{p,q}$, con diferenciales

$$\begin{aligned} \partial_h &= \sum_{i=0}^p (-1)^i d_i : A(p, q) \rightarrow A(p-1, q) \\ \partial_v &= \sum_{j=0}^q (-1)^{p+j} d_j : A(p, q) \rightarrow A(p, q-1) \end{aligned}$$

denotaremos a este bicomplejo también A .

TEOREMA 3.4.5. (DOLD-PUPPE) Sea A un grupo abeliano bisimplicial, los complejos de cadenas $d(A)$ y $\text{Tot}(A)$ son homotópicamente equivalentes, y esta equivalencia es natural.

Prueba: [3]. □

COROLARIO 3.4.6. Sea A un grupo abeliano bisimplicial, tenemos una sucesión espectral convergente

$$E_{p,q}^2 = \pi_p(\pi_q A) \Rightarrow \pi_{p+q} d(A)$$

3.4.4. EL OBJETO TRASLACIÓN

Sea $A : I \rightarrow \mathbf{Ab}$ un funtor con I categoría pequeña. Existe un grupo simplicial abeliano $E_I A$, con

$$E_I A_n = \bigoplus_{\gamma: \mathbf{n} \rightarrow I} A_{\gamma(0)} = \bigoplus_{\gamma: i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_n} A(i_0)$$

Dada una flecha $\theta : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$, existe un homomorfismo $\theta^* : E_I A_n \rightarrow E_I A_m$ que hace que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_{\gamma(0)} & \longrightarrow & A_{\gamma\theta(0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\gamma: \mathbf{n} \rightarrow I} A_{\gamma(0)} & \xrightarrow{\theta^*} & \bigoplus_{\zeta: \mathbf{m} \rightarrow I} A_{\zeta(0)} \end{array}$$

conmute. El grupo abeliano simplicial EA es llamado *objeto traslación asociado al funtor* A .

Supongamos dados los funtores $J \xrightarrow{F} I \xrightarrow{A} \mathbf{Ab}$ con J e I categorías pequeñas. F induce un homomorfismo simplicial $F_* : E(AF) \rightarrow EA$, el cual se define a nivel de sus n -símplices de tal forma que el diagrama siguiente conmute.

$$\begin{array}{ccc} AF_{\theta(0)} & \xrightarrow{id} & AF_{\theta(0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\theta: \mathbf{n} \rightarrow J} AF_{\theta(0)} & \xrightarrow{F_*} & \bigoplus_{\zeta: \mathbf{n} \rightarrow I} A_{\zeta(0)} \end{array}$$

Cualquier transformación natural $\omega : A \rightarrow B$ de funtores $I \rightarrow \mathbf{Ab}$ determina un morfismo $w_* : EA \rightarrow EB$, el cual a nivel de n -símplices hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} A_{\gamma(0)} & \xrightarrow{\omega} & B_{\gamma(0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\gamma: \mathbf{n} \rightarrow I} A_{\gamma(0)} & \xrightarrow{\omega_*} & \bigoplus_{\gamma: \mathbf{n} \rightarrow I} B_{\gamma(0)} \end{array}$$

Si consideramos un functor $B : I \times \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{Ab}$ y sean $d^1 : I \rightarrow I \times \mathbf{1}$, $d^0 : I \rightarrow I \times \mathbf{1}$ definidas $i \mapsto (i, 0)$ e $i \mapsto (i, 1)$ respectivamente. Las flechas $(i, 0) \rightarrow (i, 1)$ en $I \times \mathbf{1}$ inducen una transformación natural $\eta : Bd^1 \rightarrow Bd^0$ de funtores $I \rightarrow \mathbf{Ab}$, que nos permite inducir $\eta_* : EBd^1 \rightarrow EBd^0$. Ahora, recordando la definición de ' \otimes ' en \mathbf{sAb} , tenemos los isomorfismos

$$EA \otimes \Delta[1] \cong \bigoplus_{\sigma \in \text{hom}(\mathbf{n}, \mathbf{1})} EA_n = \bigoplus_{\sigma \in \text{hom}(\mathbf{n}, \mathbf{1})} \bigoplus_{\gamma: \mathbf{n} \rightarrow I} A_{\gamma(0)} \cong \bigoplus_{(\gamma, \theta): \mathbf{n} \rightarrow I \times \mathbf{1}} A_{\gamma(0)}$$

Así identificamos los extremos opuestos de esta cadena, lo cual nos facilitará ver que existe un morfismo canónico $h : EBd^1 \otimes \Delta[1] \otimes EB$, definido a nivel de sus respectivos n -símplices tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B_{(\theta(0), 0)} & \longrightarrow & B_{(\theta(0), \gamma(0))} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{(\gamma, \theta): \mathbf{n} \rightarrow I \times \mathbf{1}} B_{(\theta(0), 0)} & \xrightarrow{h} & \bigoplus_{(\gamma, \theta): \mathbf{n} \rightarrow I \times \mathbf{1}} B_{(\theta(0), \gamma(0))} \end{array}$$

donde el morfismo horizontal superior es inducido por los morfismos $(\theta(0), 0) \rightarrow (\theta(0), \gamma(0))$ en $I \times \mathbf{1}$

$$\begin{array}{ccc} EBd^1 & & \\ \downarrow d^1 & \searrow d_*^1 & \\ EBd^1 \otimes \Delta[1] & \xrightarrow{h} & EB \\ \uparrow d^0 & & \nearrow d_*^0 \\ EBd^1 & \xrightarrow{\eta_*} & EBd^0 \end{array}$$

donde los homomorfismos $EBd^1 \xrightarrow[d^0]{d^1} EBd^1 \otimes \Delta[1]$ se definen mediante composición de los índices de los sumandos de EBd^1 con d^1 y d^0 respectivamente, motivo por el cual los denotamos de igual forma.

LEMA 3.4.7. Sea un functor $A : I \rightarrow \mathbf{Ab}$, e I teniendo un objeto final t , entonces existe una equivalencia débil $EA \rightarrow K(A_t, 0)$, el cual a nivel de n -símplices está especificado por los homomorfismos

$$\bigoplus_{\theta: \mathbf{n} \rightarrow I} A_{\theta(0)} \rightarrow A_t$$

dado en el sumando correspondiente a $\theta; \mathbf{n} \rightarrow I$ por el morfismo $A_{\theta(0)} \rightarrow A_t$, inducido por la única flecha $\theta(0) \rightarrow t$ en I .

Prueba: Tomando la categoría discreta $\{t\}$. Si denotamos la composición $I \rightarrow t \hookrightarrow I$ también como t , entonces existe un diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{array}{ccc}
 I & & \\
 d^1 \downarrow & \searrow id & \\
 I \times \mathbf{1} & \xrightarrow{H} & I \\
 d^0 \uparrow & \nearrow t & \\
 I & & \\
 \\
 EA & \xrightarrow{id} & EA \\
 \downarrow d^1 & \searrow d_*^1 & \\
 EA \otimes \Delta[1] & \xrightarrow{h} & EAH \xrightarrow{H_*} EA \\
 d^0 \uparrow & \nearrow t_* & \\
 EA & \xrightarrow{\eta_*} & EA_t
 \end{array}$$

La composición $\eta_* t_*$ coincide con id_{EA_t} , entonces el complejo de Moore de EA es homotópicamente equivalente (como complejo de cadenas, ver [9]) al respectivo complejo de Moore de EA_t . El homomorfismo simplicial $EA \rightarrow K(A_t, 0)$ se factoriza como la equivalencia débil $\eta_* : EA \rightarrow EA_t$, seguida por $EA_t \rightarrow K(A_t, 0)$, la cual está definida a nivel de los n -símplices, por la codiagonal

$$\bigoplus_{\theta: \mathbf{n} \rightarrow I} A_t$$

este último homomorfismo es una equivalencia débil pues NI es contráctil. \square

3.5. DIAGRAMAS DE ESPACIOS

Sea I una categoría pequeña. Llamamos a \mathbf{sSet}^I *categoría diagrama*.

Vamos a darle a \mathbf{sSet}^I estructura de categoría de modelos, de dos formas: Un morfismo (transformación natural) $f : X \rightarrow Y$ en \mathbf{sSet}^I es una equivalencia débil si todas las flechas $f : X(i) \rightarrow Y(i)$ son equivalencias débiles de conjuntos simpliciales (i objeto de I), las llamamos *equivalencias débiles seccionadas*.

Estructura proyectiva

Las fibraciones (proyectivas) son aquellos morfismos $p : X \rightarrow Y$ donde las 'secciones' $p : X(i) \rightarrow Y(i)$ son fibraciones de Kan. Las cofibraciones (proyectivas) son morfismos

que poseen la *LLP* respecto a todas las fibraciones proyectivas triviales.

Estructura inyectiva

Las cofibraciones (inyectivas) son los monomorfismos en \mathbf{sSet}^I . Las fibraciones (inyectivas) son aquellos morfismos que poseen la *RLP* respecto a todas las cofibraciones proyectivas triviales.

LEMA 3.5.1. Las fibraciones proyectivas, cofibraciones proyectivas y equivalencias débiles seccionadas dotan a \mathbf{sSet}^I de estructura de categoría de modelos simplicial propia.

Prueba: [23]. \square

3.5.1. TEOREMA B DE QUILLEN

Sea $p : X \rightarrow Y$ morfismo en \mathbf{sSet} y elegimos pullbacks

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\sigma) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta[n] & \xrightarrow{\sigma} & Y \end{array}$$

para todos los simplices $\sigma : \Delta[n] \rightarrow Y$ de la categoría simplicial. Cualquier morfismo $\alpha : \sigma \rightarrow \tau$ en Δ/Y nos permite, por el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} & & p^{-1}(\tau) \\ & \curvearrowright & \\ & & p^{-1}(\sigma) \longrightarrow X \\ & & \downarrow \\ & & \Delta[n] \xrightarrow{\sigma} Y \\ & \curvearrowleft & \\ & & \Delta[m] \end{array}$$

(Note: In the diagram, a curved arrow also goes from $p^{-1}(\tau)$ down to $\Delta[m]$, and a curved arrow from $p^{-1}(\sigma)$ to $p^{-1}(\tau)$ is shown as a dotted arrow.)

inducir un mapa simplicial $p^{-1}(\sigma) \rightarrow p^{-1}(\tau)$, esto nos permite obtener un funtor $p^{-1} : \Delta/Y \rightarrow \mathbf{sSet}$. Los morfismos $p^{-1}(\sigma) \rightarrow X$ nos permiten inducir (por propiedad universal del coproducto) un morfismo

$$\omega : \bigsqcup_{\sigma_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma_n} p^{-1}(\sigma_0) \rightarrow X$$

donde X es identificado con un conjunto bisimplicial horizontalmente constante. es decir $\omega : \text{hocolim}_{\sigma : \Delta[n] \rightarrow Y} p^{-1}(\sigma) \rightarrow X$.

Observamos que cuando $n = 0$, $\Delta[n] = \Delta[0] = *$, entonces $p^{-1}(\sigma)$ es la definición categórica de fibra del vértice σ bajo p .

LEMA 3.5.2. El mapa bisimplicial ω induce una equivalencia débil

$$d(\text{hocolim}_{\sigma: \Delta[n] \rightarrow Y} p^{-1}(\sigma)) \rightarrow X$$

de conjuntos simpliciales.

Prueba: Como ya habíamos enunciado, tenemos un isomorfismo $Y \cong \varinjlim_{\Delta \downarrow Y} \Delta[n]$, y aplicando el funtor pullback (el cual conserva colímites), obtenemos

$$X \cong \varinjlim_{\Delta[n] \xrightarrow{\sigma} Y} p^{-1}(\sigma)$$

pues $\varinjlim_{\Delta \downarrow Y} p^{-1}(\sigma) = \varinjlim_{\Delta \downarrow Y} X \times_Y \Delta[n] \cong X \times_Y \varinjlim_{\Delta \downarrow Y} \Delta[n] \cong X \times_Y Y \cong X$.

Sea $x \in X_m$, la fibra (viendolo como 0-símplice de su conjunto simplicial horizontal) $\omega^{-1}(x)$ tiene, horizontalmente en grado n , la forma

$$\bigsqcup_{\sigma_0 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n} \{z \in p^{-1}(\sigma_0)_m / z \mapsto x\}$$

lo cual, por la identificación hecha en la definición 3.0.1, puede ser visto como $N(X_{m,x})$ donde la categoría $X_{m,x}$ tiene por objetos los pares $(\sigma : \Delta[n] \rightarrow Y, z)$ donde $Z \in p^{-1}(\sigma)_m$ y $z \mapsto x$ en E_m

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(y) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ z_x & \longrightarrow & x \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ id_n & \longrightarrow & p(x) \\ \Delta[n] & \xrightarrow{p(x)} & Y \end{array}$$

□

Sea $f : C \rightarrow D$ funtor de categorías pequeñas. Dado d, d' objetos de D , cualquier morfismo $d \rightarrow d'$ induce un funtor $f \downarrow d \rightarrow f \downarrow d'$ y así tenemos un diagrama $D \rightarrow \mathbf{sSet}$ ($d \mapsto N(f \downarrow d)$).

El funtor olvidadizo $f/d \rightarrow C$ ($(c, \alpha) \mapsto c$) define un mapa bisimplicial

$$\omega : \bigsqcup_{d_0 \rightarrow \dots \rightarrow d_n} B(f \downarrow d_0) \rightarrow BC$$

LEMA 3.5.3. El morfismo ω anterior induce una equivalencia de conjuntos simpliciales diagonales.

Prueba: Los (m, n) -bisímplices de $\bigsqcup_{d_0 \rightarrow \dots \rightarrow d_n} B(f \downarrow d_0)$ pueden identificarse con los pares

$$(c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_m, f(c_m) \rightarrow d_0 \rightarrow \dots \rightarrow d_n)$$

de cadenas de flechas en C y D , de izquierda a derecha.

La fibra de w sobre el m -símplice $c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_m$ es $N(f(c_m) \downarrow D)$, el cual es contráctil. Ya que esto se cumple para los elementos de BC_m , entonces (por la sucesión fibra) ω es una equivalencia débil en cada grado vertical m , por cual es una equivalencia débil diagonal. \square

TEOREMA 3.5.4. (QUILLEN) Sea $X : I \rightarrow \mathbf{sSet}$ es un diagrama tal que cada flecha $i \rightarrow j$ en I induce equivalencias débiles $X(i) \rightarrow X(j)$, entonces por cada i de I , el diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} X(i) & \longrightarrow & \bigsqcup_{j_0 \rightarrow \dots \rightarrow j_n} X(j_0) = \text{hocolim}_I X \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow{i} & \bigsqcup_{j_0 \rightarrow \dots \rightarrow j_n} * = NI_n \end{array}$$

donde $* = \Delta[0]$, es homotópico cartesiano.

Prueba: Habremos concluido nuestro teorema si factorizamos $i : * \rightarrow NI$ como

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{i} & NI \\ & \searrow j & \nearrow p \\ & U & \end{array}$$

tal que p es fibración, j cofibración trivial y $X(i) \rightarrow U \times_{NI} \text{hocolim}_I X$ es equivalencia débil (recordemos que podemos elegir entre factorizar i o π). Haremos $U = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} U_n$, donde

$$\begin{array}{ccccccc} * = U_0 & \xrightarrow{\simeq} & U_1 & \xrightarrow{\simeq} & U_2 & \xrightarrow{\simeq} & \dots \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & & & \\ & & NI & & & & \end{array}$$

es una construcción basada en el *argumento del objeto pequeño* de Quillen (small object argument, ver [23]).

Será suficiente probar que para cualquier diagrama

$$\begin{array}{c} \Lambda^k[n] \xrightarrow{\sigma_j} NI \\ \downarrow j \\ \Delta[n] \end{array}$$

se induce una equivalencia débil

$$j_* : \Lambda^k[n] \times_{NI} d(\text{hocolim}_I X) \rightarrow \Delta[n] \times_{NI} d(\text{hocolim}_I X)$$

pues esto permitirá construir la sucesión

$$X(i) = * \times_{NI} d(\text{hocolim}_I X) \xrightarrow{\cong} U_1 \times_{NI} d(\text{hocolim}_I X) \xrightarrow{\cong} U_2 \times_{NI} d(\text{hocolim}_I X) \xrightarrow{\cong} \dots$$

y así

$$X(i) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (U_n \times_{NI} d(\text{hocolim}_I X)) \cong (\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} U_n) \times_{NI} d(\text{hocolim}_I X)$$

σ es identificable con un funtor $\mathbf{n} \rightarrow I$ (viendo a \mathbf{n} como categoría filtrante), existiendo así un isomorfismo

$$\text{hocolim}_{\mathbf{n}} X\sigma \cong \Delta[n] \times_{BI} \text{hocolim}_I X$$

El objeto inicial 0 de \mathbf{n} determina una transformación natural

$$X\sigma(0) \rightarrow X\sigma$$

partiendo del funtor constante en n tomando valor $X\sigma(0)$. Esta transformación es una equivalencia de diagramas, luego llevandolo al colímite homotópico, se inducen equivalencias débiles

$$\Delta[n] \times X(\sigma(0)) \cong N_{\mathbf{n}} \times X(\sigma(0)) \cong \text{hocolim}_{\mathbf{n}} X(\sigma(0)) \rightarrow \text{hocolim}_{\mathbf{n}} X\sigma$$

y aplicando pullback, inducimos nuevamente equivalencias débiles

$$\Lambda^k[n] \times X(\sigma(0)) \cong \Lambda^k[n] \times_{\Delta[n]} \text{hocolim}_{\mathbf{n}} X(\sigma(0)) \rightarrow \Lambda^k[n] \times_{\Delta[n]} \text{hocolim}_{\mathbf{n}} X\sigma$$

Para finalizar, solo necesitamos recordar (propiedad de pullbacks) que $\Lambda^k[n] \times_{\Delta[n]} \text{hocolim}_{\mathbf{n}} X\sigma \cong \Lambda^k[n] \times_{\Delta[n]} \Delta[n] \times_{BI} \text{hocolim}_I X \cong \Delta[n] \times_{NI} \text{hocolim}_I X$ y notar que podemos obtener igualmente equivalencias débiles análogas cambiando $\Lambda^k[n]$ por $\Delta[n]$. Se desprende nuestro diagrama conmutativo y conclusión:

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda^k[n] \times X(\sigma(0)) & \xrightarrow{\simeq} & \Delta[n] \times X(\sigma(0)) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\Lambda^k[n] \times_{NI} \operatorname{hocolim}_I X & \longrightarrow & \Delta[n] \times_{NI} \operatorname{hocolim}_I X
\end{array}$$

□

3.5.2. DIAGRAMAS CARTESIANOS HOMOLÓGICOS

DEFINICIÓN 3.5.5. Un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
W & \longrightarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow f \\
Z & \xrightarrow{g} & Y
\end{array}$$

en \mathcal{C} es *cartesiano homológico* si se tiene una factorización $f = p \circ \theta$ ($X \xrightarrow{\theta} U, U \xrightarrow{p} Y$) tal que p es fibración y θ es equivalencia débil, y el morfismo inducido

$$W \xrightarrow{\theta_*} Z \times_Y U$$

induce isomorfismos en homología integral (lo cual se conoce como *equivalencia homológica*)

Como es de esperarse, aquí también podemos suponer que θ es cofibración trivial, los lemas 3.2.20, 3.2.21 y 3.2.22, tienen sus traducciones en términos de diagramas cartesianos homológicos. El Teorema 3.5.4 demostrado tiene una versión homológica cuya prueba sigue la estructura de la prueba previamente presentada, aunque la enunciaremos en un contexto más general.

TEOREMA 3.5.6. Sea H_* un functor de homología que satisface el axioma de la suma wedge. Si $X : I \rightarrow \mathbf{sSet}$ es un I -diagrama tal que, para cada morfismo $\alpha : i \rightarrow j$ de I , el mapa simplicial $X(\alpha) : X(i) \rightarrow X(j)$ induce isomorfismos $H_*(X(i)) \cong H_*(X(j))$, entonces para cada i de I el diagrama pullback de conjuntos simpliciales

$$\begin{array}{ccc}
X(j) & \longrightarrow & \operatorname{hocolim}_I X \\
\downarrow & & \downarrow \pi \\
* & \xrightarrow{i} & BI
\end{array} \tag{3.10}$$

es cartesiano homológico. □

Sin embargo, para nosotros solo será necesario conocerla cuando H_* es la homología integral.

TEOREMA 3.5.7. (TEOREMA B DE QUILLEN) Sea $f : C \rightarrow D$ funtor tal que todos los morfismos $d \rightarrow d'$ inducen equivalencias débiles $N(f \downarrow d) \rightarrow N(f \downarrow d')$, entonces todos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} N(f \downarrow d) & \longrightarrow & NC \\ \downarrow & & \downarrow f_* \\ N(D \downarrow D) & \longrightarrow & ND \end{array}$$

son cartesianos homotópicos.

Prueba: Formamos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} N(f \downarrow d) & \longrightarrow & \text{hocolim}_D N(f \downarrow d) & \xrightarrow{\simeq} & NC \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{I} & & \text{II} & \\ N(D \downarrow d) & \longrightarrow & \text{hocolim}_D N(D \downarrow d) & \xrightarrow{\simeq} & ND \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ * & \xrightarrow{d} & ND & & \end{array}$$

Los morfismos horizontales indicados como equivalencias débiles lo son debido al Lema 3.5.3, y los verticales pues $N(D \downarrow d)$ es contráctil, para cada d de D . Por Teorema 3.5.4, tanto el diagrama **III** y **I + III** son cartesianos homotópicos, entonces **I** es cartesiano homotópico por Lema 3.2.22, y nuevamente por este lema, **I + II** es homotópico cartesiano al serlo **II**. \square

Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapa bisimplicial, y consideremos todos los bisimplicios $\sigma : \Delta[r, s] \rightarrow Y$, formamos el pullback

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\sigma) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[r, s] & \xrightarrow{\sigma} & Y \end{array}$$

en la categoría de conjuntos bisimpliciales. La *categoría bisimplicial de Y* , denotada $\Delta \times \Delta \downarrow Y$ se define de forma completamente análoga a $\Delta \downarrow Y$, así la correspondencia $\sigma \mapsto f^{-1}(\sigma)$ define un funtor

$$f^{-1} : \Delta \times \Delta \downarrow Y \rightarrow \mathbf{s}^2\mathbf{Set}$$

lo que nos permite definir un morfismo de conjuntos *trisimpliciales*

$$\rho : \bigsqcup_{\sigma_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma_r} f^{-1}(\sigma_0) \rightarrow X$$

donde la cadena $\sigma_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma_r$ es tomada en $N(\Delta \times \Delta \downarrow Y)$. Presentamos un resultado análogo al Lema 3.5.2.

LEMA 3.5.8. ρ induce una equivalencia débil en los conjuntos simpliciales diagonales asociados. \square

El lema anterior implica que el mapa simplicial

$$\rho : \bigsqcup_{\sigma_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma_r} f^{-1}(\sigma_0)(r, r) \rightarrow X(r, r)$$

es una equivalencia débil.

Consideremos el diagrama de mapas trisimpliciales

$$\begin{array}{ccccc}
 f^{-1}(v) & \longrightarrow & \bigsqcup_{\sigma_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma_r} f^{-1}(\sigma_0) & \xrightarrow{\cong} & X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta[0, 0] & \longrightarrow & \bigsqcup_{\sigma_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma_r} \Delta[m_0, n_0] & \xrightarrow{\cong} & Y \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\
 * & \longrightarrow & \bigsqcup_{\sigma_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma_r} * & & *
 \end{array}$$

I
II

III

donde $* = \Delta[0, 0]$ y $v : \Delta[0, 0] \rightarrow Y$ es un vértice de Y . Los símbolos \cong del diagrama se refieren a equivalencias débiles en los correspondientes conjuntos simpliciales diagonales (en los morfismos verticales por Proposición (3.3.1) y los horizontales por Lema (3.5.8)). Notamos que el diagrama $d(\mathbf{I} + \mathbf{III})$ es del tipo (3.10). Se desprende del Teorema 3.5.6 y el Lema 3.2.22 que el diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(v) & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 * & \xrightarrow{v} & Y
 \end{array}$$

induce un diagrama H_* -cartesiano de conjuntos simpliciales diagonales asociados si cada morfismo de bisímplices

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[r_0, s_0] & & \\
 \downarrow & \searrow \sigma_0 & \\
 & & Y \\
 & \nearrow \sigma_1 & \\
 \Delta[r_1, s_1] & &
 \end{array} \tag{3.11}$$

induce un isomorfismo $H_*(f^{-1}(\sigma_0)) \xrightarrow{\cong} H_*(f^{-1}(\sigma_1))$ (aunque estrictamente hablando, los isomorfismos son en las diagonales de $f^{-1}(\sigma_0)$ y $f^{-1}(\sigma_1)$, se hace un abuso de notación). A los mapas bisimpliciales que satisfacen la última condición mencionada se les conoce como *fibraciones homológicas*.

3.6. TEOREMA DEL GRUPO DE COMPLECIÓN

Sea M un monoide simplicial y sea X un conjunto simplicial con una M -acción $M \times X \rightarrow X$. Consideremos los conjuntos bisimpliciales $E_M X$, cuyos conjuntos simpliciales verticales asociados $E_M X_n$ son $M^n \times X$ y BM (llamado espacio clasificante bisimplicial) tal que $BM_n = M^n$. Existe un mapa simplicial canónico $\pi : E_M X \rightarrow BM$ tal que $\pi_n : M^n \times X \rightarrow M^n$ es la proyección. Se tiene un diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & E_M X \\
 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 * & \longrightarrow & BM
 \end{array} \tag{3.12}$$

TEOREMA 3.6.1. (TEOREMA DEL GRUPO DE COMPLECIÓN) Sea $M \times X$ una acción simplicial de un monoides simplicial M a un conjunto simplicial X tal que la multiplicación por cada vértice de M induce un isomorfismo $v_* : H_*(X) \rightarrow H_*(X)$ en la homología singular. El diagrama (3.12) es cartesiano homológico.

Prueba: En analogía con el diagrama (3.11), debemos probar que cada morfismo

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[r, s] & & \\
 \downarrow (\zeta_1, \zeta_2) & \searrow \sigma_0 & \\
 & & Y \\
 & \nearrow \sigma_1 & \\
 \Delta[r_1, s_1] & &
 \end{array} \tag{3.13}$$

induce un isomorfismo $(\zeta_1, \zeta_2)_* : H_*(\pi^{-1}(\sigma_0)) \xrightarrow{\cong} H_*(\pi^{-1}(\sigma_1))$. Es decir, probaremos que π es una fibración homológica, traducido al contexto simplicial.

Los conjuntos simpliciales horizontales $\Delta[k, l]_m$ pueden identificarse con $\bigsqcup_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} \Delta[l]$. Tenemos un diagrama pullback en \mathbf{sSet}

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} (\Delta[l] \times X) & \longrightarrow & E_M X_m = M^m \times X \\
 \downarrow & & \downarrow \pi_m \\
 \bigsqcup_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} \Delta[l] & \xrightarrow{\tau} & BM_m = M^m
 \end{array}$$

donde el mapa simplicial horizontal izquierdo es una unión disjunta de proyecciones, es decir $\pi^-(\tau)_m = \bigsqcup_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} (\Delta[l] \times X)$. Cada morfismo $\theta : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ induce un mapa simplicial

$$\bigsqcup_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} (\Delta[l] \times X) \xrightarrow{\theta^*} \bigsqcup_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{k}} (\Delta[l] \times X)$$

acorde con la estructura horizontal de $\pi^-(\tau)$.

Si tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{n} & & \\
 \downarrow \theta & \searrow \gamma\theta & \\
 & & \mathbf{k} \\
 & \nearrow \gamma & \\
 \mathbf{m} & &
 \end{array} \tag{3.14}$$

Existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[l] \times X & \xrightarrow{\theta^*} & \Delta[l] \times X \\
 \downarrow \iota_\gamma & & \downarrow \iota_{\gamma\theta} \\
 \bigsqcup_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} (\Delta[l] \times X) & \xrightarrow{\theta^*} & \bigsqcup_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{k}} (\Delta[l] \times X)
 \end{array}$$

tal que θ_γ^* es la restricción de θ^* al sumando $\gamma : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}$, a nivel de sus símplices, viene dado por

$$(\epsilon, x) \mapsto (\epsilon, \varphi_*(\epsilon, x))$$

donde φ_* es la composición $\Delta[l] \times X \xrightarrow{v \times id} M^m \times X \rightarrow X$, donde el mapa simplicial $M^m \times X \rightarrow X$ viene a ser una aplicación iterada de la acción de M en X . La hipótesis planteada en el teorema nos dice que θ_γ^* induce isomorfismos en homología. Como $\mathbb{Z}(\bigsqcup_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} (\Delta[l] \times X)) \cong \bigoplus_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} \mathbb{Z}(\Delta[l] \times X)$, basándonos en el Teorema 1.5.3 y el Teorema de Dold-Puppe 3.4.5, existe una sucesión espectral E tal que

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(H_q(\bigoplus_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} \mathbb{Z}(\Delta[l] \times X))) \cong H_p(\bigoplus_{\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} H_q(\Delta[l] \times X)) = H_p(\bigoplus_{\omega: \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} A(\omega))$$

si denotamos $A(\omega)$ a la copia de $H_q(\Delta[l] \times X)$ correspondiente al mapa simplicial $\omega : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}$.

por lo comentado en la definición de θ^* y θ_γ^* , vemos en el diagrama (3.14) que se induce un isomorfismo $\theta_* : A(\gamma) \rightarrow A(\gamma\theta)$. La flecha $1_{\mathbf{k}}$ es objeto final en la categoría simplicial de $\Delta[k]$, entonces existe un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} A(1_{\mathbf{k}}) & \xrightarrow{\cong} & A(\omega) \\ \downarrow id & & \downarrow \theta_* \\ A(1_{\mathbf{k}}) & \xrightarrow{\cong} & A(\gamma\omega) \end{array}$$

Por el Lema 3.4.7, tenemos los isomorfismos

$$H_i(\bigoplus_{\omega: \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}} A(\omega)) \cong \begin{cases} A(1_{\mathbf{k}}) & , \quad i = 0 \\ 0 & , \quad i > 0 \end{cases}$$

Particularmente, cuando $n = 0$ y $k = 0$, el morfismo $\nu : \mathbf{0} \xrightarrow{\theta} \mathbf{k}$ (vértice de $\Delta[k]$) induce la inclusión

$$\Delta[l] \times X \xrightarrow{\iota_\nu} \bigsqcup_{\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{k}} (\Delta[l] \times X)$$

induce un isomorfismo

$$H_q(X \times \Delta[l]) \cong H_q(\pi^{-1}(\sigma))$$

Por último, observemos que el diagrama (3.13) induce el cuadro conmutativo de mapas simpliciales

$$\begin{array}{ccc}
\Delta[s] \times X & \xrightarrow{id \times \xi_2} & \Delta[s_1] \times X \\
\downarrow w & & \downarrow in_{\xi_1 w} \\
\coprod_{\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{r}} (\Delta[s] \times X) & \xrightarrow{(\xi_1, \xi_2)_*} & \coprod_{\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{r}} (\Delta[s_1] \times X)
\end{array}$$

donde ω es un vértice de $\Delta[r]$, de lo cual tenemos que $(\xi_1, \xi_2)_*$ induce isomorfismos en homología. \square

Observemos que el concluir que el diagrama (3.12) sea cartesiano homológico, nos conduce a una equivalencia homológica $X \rightarrow F$ entre la fibra X y la fibra homotópica F .

El resultado anterior puede ser llamado Teorema del Grupo de Compleción Generalizado, pues fue originalmente usado por McDuff y Segal [11] en 1976 para probar (en el contexto de monoïdes topológicos) la última proposición de este capítulo, a cual también se le atribuye el nombre Grupo de Compleción, definiendo el concepto de fibración homológica (topológica). Posteriormente Jardine [10] lo presentó en su versión simplicial y Tillmann [27] generalizó un poco más, pero en 2004 Pitsch y Scherer [28] decidieron hacer la versión simplicial del artículo de McDuff y Segal, definiendo las fibraciones homológicas simpliciales y encontrando las cercanas conexiones entre fibraciones homológicas topológicas y simpliciales. Kristian Moi simplifica algunas pruebas en [29].

DEFINICIÓN 3.6.2. Sea N un monoïde conmutativo. Un elemento $s \in N$ es llamado *generador cofinal* si para cada $x \in N$, existe un $n \leq 0$ y un elemento $y \in N$ tal que $xy = s^n$. Un vértice t de un monoïde simplicial M con $\pi_0(M)$ conmutativo es llamado un *generador cofinal homotópico* si su clase $[t] \in \pi_0(M)$ es un generador cofinal. En particular, si $\pi_0(M)$ es finitamente generado, sean los vértices t_1, \dots, t_n cuyas clases $[t_1], \dots, [t_n]$ generan $\pi_0(M)$, entonces el vértice $t = t_1 \cdots t_n$ es un generador cofinal homotópico de M .

Sea M un monoïde simplicial con $\pi_0(M)$ en el centro de $H_*(M)$ (como anillo de Pontryagin) y sea t un generador cofinal homotópico de M . Dado un conjunto simplicial X con una M -acción izquierda, el telescopio

$$X_\infty = \text{hocolim}(X \xrightarrow{t} X \xrightarrow{t} X \xrightarrow{t} \dots)$$

en particular $M_\infty = \text{hocolim}(M \xrightarrow{t} M \xrightarrow{t} M \xrightarrow{t} \dots)$ Como la homología de M (al ser M un H -espacio) es un anillo graduado y $[t]$ está en el centro, la multiplicación por $[t]$ en $H_*(M)$ es $H_*(M)$ lineal, entonces existe un isomorfismo

$$H(M_\infty) \cong \text{colim}(H_*(M) \xrightarrow{[t]} H_*(M) \xrightarrow{[t]} H_*(M) \xrightarrow{[t]} \dots)$$

LEMA 3.6.3. El mapa simplicial $M \rightarrow M_\infty$ induce un homomorfismo de $H_*(M)$ -álgebras

$$H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}] \rightarrow H_*(M_\infty)$$

Prueba: Como $\pi_0(M)$ se encuentra en el centro de $H_*(M)$, se tiene un isomorfismo

$$\operatorname{colim}(H_*(M) \xrightarrow{[t]} H_*(M) \xrightarrow{[t]} H_*(M) \xrightarrow{[t]} \dots) \cong H_*(M)[t^{-1}]$$

Y ya que t es generador cofinal de M , $H[t^{-1}] \cong H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}]$, y concluimos por [3.6](#) □

de esto último se desprende que los vértices de M actúan en M_∞ por equivalencias homológicas.

LEMA 3.6.4. Sea $\mathbf{sSet} - M$ la categoría de conjuntos simpliciales con M -acción derecha y mapas simpliciales equivariantes. Dado un functor $G : I \rightarrow \mathbf{sSet} - M$. Si X es un conjunto simplicial con M -acción derecha, existe un isomorfismo natural de conjuntos simpliciales

$$dB(\operatorname{hocolim} G, M, X) \cong \operatorname{hocolim} dB(G, M, X)$$

□

COROLARIO 3.6.5. Dado un conjunto simplicial X con M -acción izquierda, se tiene un isomorfismo

$$dB(M_\infty, M, X) \cong (dB(M, M, X))_\infty$$

□

Para nuestro siguiente resultado vamos a requerir de cierta sutileza y convención, con el fin de formularlo tal como lo hicieron Segal y McDuff en [\[11\]](#): Consideramos a M punteado con punto base su unidad, la diagonal asociada a BM la denotamos simplemente BM también. Ahora bien, podemos inducir una sucesión de mapas simpliciales $M \wedge S^1 \rightarrow BM \rightarrow BM^{\operatorname{fib}}$ (donde BM^{fib} es un reemplazo fibrante, es decir podemos tomar $BM^{\operatorname{fib}} = S|BM|$ o $BM^{\operatorname{fib}} = \operatorname{Ex}^\infty BM$), ahora por la [Proposición 2.3.28](#), encontramos un mapa simplicial

$$\lambda_M : M \rightarrow \Omega(BM^{\operatorname{fib}})$$

sin embargo, basándonos en el criterio (3.7), nuestro mapa simplicial queda $\lambda_M : M \rightarrow \Omega BM$.

PROPOSICIÓN 3.6.6. (GRUPO DE COMPLECIÓN) Si $\pi_0(M)$ está en el centro del anillo de Pontryagin $H_*(M)$, entonces

$$H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}] \cong H_*(\Omega BM)$$

Prueba: Supongamos primero que M está finitamente generado, entonces sabemos que tiene un generador cofinal t . Por el Teorema 3.6.1, el mapa $E_M M_\infty \rightarrow BM$ es una fibración homológica (con fibra M_∞). Si en el Corolario 3.6.5 hacemos $X = *$, el conjunto simplicial $dE_M M_\infty = dB(M_\infty, M, *)$ es el colímite homotópico de complejos contráctil, por lo tanto también es contráctil. Así, tenemos una equivalencia homológica $M_\infty \rightarrow \Omega BM$, ya que ΩBM es la fibra homotópica de $* \rightarrow BM$.

En el caso general, denotemos $F(M)$ a la familia parcialmente ordenada de submonoides de M finitamente generados, existe un isomorfismo de monoides simpliciales

$$\operatorname{colim}_{M_i \in F(M)} M_i \cong M$$

donde el colímite es filtrante. Los funtores $B, \Omega, H_*(-)$ y $H_*(-)[\pi_0(-)^{-1}]$ conmutan con colímites filtrantes, entonces el resultado se desprende del caso anterior. \square

COROLARIO 3.6.7. Si $\pi_0(M)$ es un grupo, entonces el mapa simplicial natural

$$\lambda_M : M \rightarrow \Omega BM$$

es una equivalencia homotópica.

Capítulo 4

FUNTOR GAMMA DE BARRATT-ECCLES

Nuestro propósito en este capítulo es estudiar un modelo para $\Omega^\infty \Sigma^\infty X$ de un complejo punteado X , su importancia radica en la identificación

$$\pi_i(\Omega^\infty \Sigma^\infty X) = \pi_i^s(X) \quad (4.1)$$

donde el miembro izquierdo de la igualdad es el *i-ésimo grupo de homotopía estable de X* (ver [30]). Nuestro modelo resultará ser un grupo simplicial proveniente de un monoide simplicial homotópico-abeliano, motivo por el cual encontraremos en las condiciones del Teorema del Grupo de Compleción. En 1956, John Milnor encontró un modelo para $\Omega \Sigma X$ y en 1974 Barratt hizo lo propio con $\Omega^\infty \Sigma^\infty X$ (el otro extremo), posteriormente a finales de los 80, J.H.Smith usó las ideas de Barratt para dar modelos respectivos de $\Omega^n \Sigma^n X$ para cada $n \geq 0$ (ver [31]).

DEFINICIÓN 4.0.1. Sea n natural, denotamos Σ_n al grupo de permutación de $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Denotamos $\mathbb{I}_<$ a la categoría cuyos objetos son los $[n]$ y morfismos, dado otro natural m , $\text{hom}_{\mathbb{I}_<}([m], [n])$ el conjunto de aplicaciones estrictamente crecientes $[m] \rightarrow [n]$

DEFINICIÓN 4.0.2. Dado $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_<}([m], [n])$, se induce un monomorfismo de grupos $\alpha_* : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_n$ definido por

$$\begin{aligned} \alpha_*(\sigma)(\alpha(i)) &= \alpha(\sigma(i)), \\ \alpha_*(\sigma)(j) &= j, \text{ si } j \in [n] \setminus \alpha([m]) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.0.3. Sean $\sigma \in \Sigma_n$ y $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_<}([m], [n])$, existen $\alpha^*(\sigma) \in \Sigma_m$ y $\sigma_*(\alpha)$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc}
[m] & \xrightarrow{\alpha} & [n] \\
\alpha^*(\sigma) \downarrow & & \downarrow \sigma \\
[m] & \xrightarrow{\sigma_*(\alpha)} & [n]
\end{array}$$

donde $\sigma_*(\alpha)$ resulta de tomar la imagen de $\sigma \circ \alpha$ (la cual posee m elementos, ya que $\sigma \circ \alpha$ es inyectiva, mas no necesariamente creciente) y ordenar sus elementos de mayor a menor, y α^* hace el intercambio entre k ($1 \leq k \leq m$) y la posición (en orden ascendente) que ocupa $\sigma \circ \alpha(k)$

A continuación, presentamos cuatro resultados (tres proposiciones y un corolario) relacionados a estas primeras definiciones del presente capítulo, los cuales no probaremos por no representar más que un trabajo de manejo combinatorio y por el hecho de que originalmente fue utilizado en [1] únicamente para demostrar la Proposición 4.1.6, resultado del cual también obviaremos prueba pues tenía como propósito definir una operación que nosotros podremos definir directamente.

PROPOSICIÓN 4.0.4. Sean $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_{<}}([m], [n])$, $\beta \in \text{hom}_{\mathbb{I}_{<}}([n], [p])$, entonces

$$(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*$$

□

PROPOSICIÓN 4.0.5. Sean $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_{<}}([m], [n])$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $\tau \in \Sigma_n$, entonces

$$\alpha^*(\sigma \circ \tau) = (\tau_*(\alpha))^*(\sigma) \circ \alpha^*(\tau)$$

□

COROLARIO 4.0.6. Sean $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_{<}}([m], [n])$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $\rho \in \Sigma_m$, entonces

$$\alpha^*(\sigma \circ \alpha_*(\rho)) = \alpha^*(\sigma) \circ \rho$$

DEFINICIÓN 4.0.7. Dado un conjunto X , definimos una acción derecha de Σ_n en el producto cartesiano X^n mediante

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

donde $x_i \in X$ y $\sigma \in \Sigma_n$.

Similarmente a la definición 4.0.2, dado $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_{<}}([m], [n])$, se induce una aplicación $\alpha^* : X^n \rightarrow X^m$, donde $\alpha^*(x_1, \dots, x_n) = (x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \dots, x_{\alpha(m)})$.

Además, en el caso de que X sea punteado con base $*$, decimos que α es *entero* para

(x_1, x_2, \dots, x_n) cuando $x_i = *$ si $i \in [n] \setminus \alpha([m])$ (las coordenadas que α omite son $*$). Con esta definición, podemos enunciar (con atención al doble uso de una misma notación) la siguiente

PROPOSICIÓN 4.0.8. Sean $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_{<}}([m], [n])$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $\mathbf{x} \in X^n$, entonces

$$\alpha^*(\mathbf{x}.\sigma) = (\sigma_*(\alpha))^*(\mathbf{x}).\alpha^*(\sigma)$$

□

DEFINICIÓN 4.0.9. Dado un grupo algebraico G , la definición de *espacio clasificante según Mac Lane* de G es el grupo simplicial dado por

$$\begin{aligned} (WG)_n &= G^n \text{ (producto cartesiano)} \\ d_i(g_0, \dots, g_n) &= (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n) \\ s_i(g_0, \dots, g_n) &= (g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_n) \end{aligned}$$

podemos ver a G como una categoría pequeña C_G con un único objeto $*$ y morfismos los elementos de G ($\text{hom}(*, *) = G$, con $e_G = id_*$).

G actúa libremente sobre WG mediante

$$(g_0, \dots, g_n).g = (g_0g, \dots, g_ng)$$

además, WG lo consideramos punteado con punto base su identidad. Notemos que WG es identificable con el nervio EG definido en (2.3), y el cociente $\overline{WG} = WG/G$ identificable con $N(C_G)$, coincidiendo también con BG como en (3.6) (viendo a G como un grupo simplicial constante).

PROPOSICIÓN 4.0.10. WG es contráctil.

Prueba: Definimos para WG los mapas $\sigma : (WG)_n \rightarrow (WG)_{n+1}$, donde

$$\sigma((g_0, \dots, g_n)) = (e, g_0, \dots, g_n)$$

otorgándole a WG la estructura adicional punteada del Lema 2.3.27, y llegamos a nuestro resultado puesto que $d_1\sigma(WG)_0 = (e)$ □

Observación 4.1. Dado $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_{<}}([m], [n])$, a partir de las definiciones 4.0.2 y 4.0.3 se inducen los mapas (notar la insistencia en una misma notación) $\alpha_* : W\Sigma_m \rightarrow W\Sigma_n$ y $\alpha^* : W\Sigma_n \rightarrow W\Sigma_m$.

4.1. EL FUNTOR MONOIDE LIBRE Γ^+

DEFINICIÓN 4.1.1. Sea X un conjunto simplicial punteado, la unión disjunta

$$\Lambda(X) = \bigsqcup_{n \geq 0} WS_n \times X^n$$

cocientado por la relación de equivalencia generada por

- (a) $(w, \mathbf{x}) \sim (w \cdot \sigma, \mathbf{x} \cdot \sigma)$
- (b) $(w, \mathbf{x}) \sim (\alpha^*(w), \alpha^*(\mathbf{x}))$

donde $w \in WS_n$, $\mathbf{x} \in X^n$, $\sigma \in \text{hom}_{\mathbb{I}_<}([m], [n])$ el cual es entero para \mathbf{x} , $n \geq 0$, $m \geq 0$. Resulta entonces un conjunto simplicial que denotaremos Γ^+X . La clase de $(w, \mathbf{x}) \in WS_n \times X^n$ como $[w, \mathbf{x}] \in \Gamma^+X$. Tomaremos la clase $[1, *]$ de $(1, *) \in WS_0 \times X^0$ como punto base de Γ^+X , y lo denotaremos simplemente 1.

Dado un mapa simplicial punteado $f : X \rightarrow Y$, se induce un mapa $\Gamma^+f : \Gamma^+X \rightarrow \Gamma^+Y$ definido por

$$\Gamma^+f([w, x_1, \dots, x_n]) = [w, f(x_1), \dots, f(x_n)]$$

el cual está bien definido como mapa simplicial punteado, y así podemos ver a Γ^+ como un functor.

En el artículo *The homotopy infinite symmetric product represents stable homotopy*, Schlichtkrull ofrece una definición del functor Γ^+ resaltando sus cualidades categóricas, necesitamos primero de algunas definiciones

DEFINICIÓN 4.1.2. Sea \mathbb{I} la categoría cuyos objetos son los conjuntos $[n]$ y cuyos morfismos son las aplicaciones inyectivas entre ellos (notar que $\mathbb{I}_<$ es subcategoría de \mathbb{I}). La concatenación $[n] \otimes [m] = [n + m]$, haciendo corresponder $[n]$ (resp. $[m]$) con los n primeros (resp. m últimos) elementos de $[m + n]$ otorga a \mathbb{I} la estructura de categoría monoidal simétrica. Dado un complejo punteado X , podemos asociarle un \mathbb{I} -diagrama X^\bullet el cual en objetos tiene la correspondencia $[n] \mapsto X^n$ y para morfismos $[m] \xrightarrow{\alpha} [n]$, asocia los mapas simpliciales $\alpha_* : X^m \rightarrow X^n$, donde dado un k -símplice $\mathbf{x} = (x_i)$ de X^m , α_* lo corresponde con un k -símplice $\mathbf{y} = (y_j)$ de X^n , donde

$$y_j = \begin{cases} x_i & , \quad \text{si } \alpha(i) = j \\ * & , \quad \text{si } j \in \alpha([m]) \end{cases}$$

Un detalle que debe recalcarse aquí, es que la factorización

$$\sigma \circ \alpha = \sigma_*(\alpha) \circ \alpha^*(\sigma)$$

existe, sin requerir que el morfismo $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ sea estrictamente creciente, sino solo inyectivo (pero aún teniendo $\sigma_*(\alpha) \in \text{hom}_{\mathbb{I}^<}([m], [n])$).

Con esto en cuenta, podemos definir el \mathbb{I}^{op} -diagrama Σ_\bullet . El cual tiene la correspondencia $[n] \mapsto \Sigma_n$ en objetos, mientras que para morfismos $\alpha : [m] \rightarrow [n]$, se induce $\alpha^* : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_m$ definido mediante $\sigma \mapsto \alpha^*(\sigma)$. Para cada n , asociamos a Σ_n una categoría $\widetilde{\Sigma}_n$, cuyos objetos son los elementos de dicho grupo simétrico, con morfismos $\rho : \sigma \rightarrow \tau$ que son permutaciones tal que $\rho \circ \sigma = \tau$. De esta manera podemos extender Σ_\bullet a un nuevo \mathbb{I}^{op} -diagrama $\widetilde{\Sigma}_\bullet$, y extender este último en $N\widetilde{\Sigma}_\bullet$.

Dado $X \in \text{sSet}_*$, Schlichtkrull define $\Gamma^+(X)$ como el cociente

$$\left(\bigsqcup_{n \geq 0} N\widetilde{\Sigma}_n \times X^n \right) / (\alpha^*(\sigma), \mathbf{x}) \sim (\sigma, \alpha_*(x)) \quad (4.2)$$

con la ventaja de que esta manera de definirlo permite ver esta construcción como el coend

$$\Gamma^+(X) = N\widetilde{\Sigma}_\bullet \otimes_{\mathbb{I}} X^\bullet$$

Sin embargo, no es inmediata la equivalencia en las definiciones de Barratt-Eccles y Schlichtkrull. Nos encargamos de ese asunto en las siguientes líneas:

PROPOSICIÓN 4.1.3. Las definiciones 4.1.1 y 4.1.2 para el funtor Γ^+ coinciden.

Prueba: Primero, por lo comentado en la definición del espacio clasificante de Mac Lane, podemos identificar $W\Sigma_n$ con $N\widetilde{\Sigma}_n$, entonces el complejo a cocientar es el mismo en ambos casos, así que solo nos preocupamos por ver que una relación de equivalencia implica la otra.

Primer veamos la relación entre $\alpha^* : X^n \rightarrow X^m$ y $\alpha_* : X^m \rightarrow X^n$. Ocurre que $\alpha^* \circ \alpha_* = id$, pero solo podemos decir que $\alpha_* \circ \alpha^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ cuando α es entero en \mathbf{x} .

Supongamos la identificación $(\alpha^*(\sigma), \mathbf{x}) \sim (\sigma, \alpha_*(\mathbf{x}))$, entonces

$$(\sigma\tau, \mathbf{x}\tau) = (\tau^*\sigma, \tau^*\mathbf{x}) \sim (\sigma, \tau_*\tau^*(x)) = (\sigma, \mathbf{x})$$

pues las permutaciones son enteras en cualquier punto, también

$$(\alpha^*(\sigma), \alpha^*(\mathbf{x})) = (w, \alpha_*(\alpha^*(\mathbf{x}))) = (w, \mathbf{x})$$

cuando α es entero en \mathbf{x} .

Recíprocamente, suponiendo las identificaciones $(w, \mathbf{x}) \sim (w \cdot \sigma, \mathbf{x} \cdot \sigma)$ y $(w, \mathbf{x}) \sim (\alpha^*(w), \alpha^*(\mathbf{x}))$ ($\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{I}_<}([m], [n])$ entero en \mathbf{x}).

Dado $(w, \mathbf{x}) \in N\Sigma_n \times X^n$, sea $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ morfismo en \mathbb{I} , entonces podemos factorizar α en la forma $\alpha = \rho \circ \beta$, donde $\beta \in \text{hom}_{\mathbb{I}_<}([m], [n])$ es entero en \mathbf{x} y $\rho \in \Sigma_m$, luego

$$\begin{aligned} (\alpha^*(w), \mathbf{x}) &= (\beta^* \rho^*(w), \beta^* \beta_*(\mathbf{x})) \sim (\rho^*(w), \beta_*(\mathbf{x})) = (w\rho, \rho^* \rho_* \beta_* \mathbf{x}) = (w\rho, \rho_* \beta_*(\mathbf{x})) \rho \sim \\ &= (w, \rho_* \beta_*(\mathbf{x})) = (w, \alpha_*(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Así queda comprobada la equivalencia entre el (objeto) Γ^+X de Schlichtkrull con el correspondiente de Barratt. \square

DEFINICIÓN 4.1.4. Sea X un espacio simplicial punteado, existe un encaje natural $\iota_X : X \rightarrow \Gamma^+X$ dado por $\iota_X(x) = [1, x]$, con $1 \in S_1 \subset WS_1$, viendo así a X como subespacio de Γ^+X .

DEFINICIÓN 4.1.5. Sean $k, n \geq 0$ enteros. Para enteros i con $1 \leq i \leq k$, definimos $\lambda_i : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{kn}$ mediante

$$\lambda_i(j) = (i-1)n + j$$

Por la observación 1, obtenemos el homomorfismo

$$(\lambda_i)_* : W\Sigma_n \rightarrow W\Sigma_{kn}$$

Definiremos un homomorfismo $\mu : \Sigma_k \rightarrow \Sigma_{kn}$, dado por $\mu(\sigma)((i-1)n+j) = (\sigma(i)-1)n+j$ con $\mu \in \Sigma_k, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$.

Es homomorfismo, ya que $\mu(\rho\sigma)((i-1)n+j) = (\rho\sigma(i)-1)n+j = \mu(\rho)((\sigma(i)-1)n+j) = \mu(\rho)\mu(\sigma)((i-1)n+j)$.

entonces inducimos el homomorfismo simplicial (denotado igual)

$$\mu : W\Sigma_k \rightarrow W\Sigma_{kn}$$

Vamos a definir un mapa simplicial

$$h_X : \Lambda(\Lambda(X)) = \bigsqcup_{k \geq 0} \bigsqcup_{n \geq 0} W\Sigma_k \times (W\Sigma_n \times X^n)^k \rightarrow \Lambda(X)$$

hacemos $(w, \alpha) = (w, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in W\Sigma_k \times (W\Sigma_n \times X^n)^k$, donde $\alpha_i = (w_i, \mathbf{x}^i) \in W\Sigma_n$. Definimos $h_X(w, \alpha) \in W\Sigma_{kn} \times X^{kn}$ por

$$h_X(w, \alpha) = (\mu(w)(\lambda_i)_*(w_1) \cdots (\lambda_k)_*(w_k), \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$$

donde hemos identificado X^{kn} con $(X^n)^k$.

PROPOSICIÓN 4.1.6. h_X induce una aplicación natural $h_X : \Gamma^+ \Gamma^+ X \rightarrow \Gamma^+ X$.

Prueba: [1]. □

PROPOSICIÓN 4.1.7. Dado un espacio punteado simplicial, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma^+ X & \xrightarrow{\Gamma^+ \iota_X} & \Gamma^+ \Gamma^+ X & \xleftarrow{\Gamma^+ X} & \Gamma^+ X \\ & \searrow id & \downarrow h_X & \swarrow id & \\ & & \Gamma^+ X & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ X & \xrightarrow{h_{\Gamma^+ X}} & \Gamma^+ \Gamma^+ X \\ \Gamma^+ h_X \downarrow & & \downarrow h_X \\ \Gamma^+ \Gamma^+ X & \xrightarrow{h_X} & \Gamma^+ X \end{array}$$

□

DEFINICIÓN 4.1.8. Dado un espacio simplicial punteado Y , una Γ^+ -estructura en Y es un mapa simplicial punteado $f : \Gamma^+ Y \rightarrow Y$ tal que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\iota_X} & \Gamma^+ Y \\ & \searrow id & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^+ \Gamma^+ Y & \xrightarrow{h_Y} & \Gamma^+ Y \\ \Gamma^+ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Gamma^+ Y & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Particularmente, por la proposición 3.1.2, $\Gamma^+ X$ posee Γ^+ -estructura.

PROPOSICIÓN 4.1.9. Si un espacio simplicial punteado X posee Γ^+ -estructura, entonces es un monoide homotópico-abeliano con punto base como su unidad.

Prueba: El producto de X viene dado por $xy = f([1, x, y])$, donde $f : \Gamma^+ X \rightarrow X$ es la Γ^+ -estructura en X y $x, y \in X, 1 \in S_2 \subset WS_2$. Los diagramas de la Definición 4.1.8 permiten verificar que tal producto es asociativo y tiene al punto base como unidad. La homotopía entre ‘ xy ’ e ‘ yx ’ viene dada por

$$\mathbb{I} \times X^2 \xrightarrow{\alpha \times id} WS_2 \times X^2 \subset \Lambda(X) \rightarrow \Gamma^+ X \rightarrow X$$

donde $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow WS_2$ está dado por $\alpha(\sigma_1) = (id, (1\ 2)) \in (WS_2)_1$. □

COROLARIO 4.1.10. $\Gamma^+ X$ es monoide homotópico-abeliano con unidad $[1, *]$.

La exposición tuvo como objetivo dotar a $\Gamma^+ X$ de la estructura de monoide (homotópico-abeliano), hecho que pudo obtenerse de manera mucho más reducida con la definición directa que ofreció Schlichtkrull en [2], sin embargo, así como comparamos las definiciones 4.1.1 y 4.1.2 para encontrar su equivalencia, resulta una buena práctica contrastar la fuente original con otras más recientes.

Dados $[v, \mathbf{x}]$, con $(v, \mathbf{x}) \in W\Sigma_m \times X^m$ y $[w, \mathbf{y}]$, con $(w, \mathbf{y}) \in W\Sigma_n \times X^n$, tenemos el producto

$$[v, \mathbf{x}].[w, \mathbf{y}] = [\lambda_1(v)\lambda_2(w), \mathbf{x}, \mathbf{y}] = [v \sqcup w, \mathbf{x}, \mathbf{y}] \quad (4.3)$$

(esta última demuestra que no requeríamos de las definiciones 4.1.5 y 4.1.8 para definir un producto en $\Gamma^+ X$, lo hicimos directamente). Si \mathbf{x} tiene entre sus componentes al punto base $*$, entonces $\mathbf{x} = \alpha_*(\mathbf{x}')$ donde $\mathbf{x}' \in X^r$ para algún $\mathbf{x}' \in X^r$ con $r < m$ donde sus componentes son todas distintas de $*$ y algún $\alpha : [r] \rightarrow [m]$ en \mathbb{I} , entonces $[v, \mathbf{x}] = [\alpha^*, \mathbf{x}']$.

LEMA 4.1.11. Dados $\eta, \xi, \delta, \omega \in \Gamma^+ X$ con η, ξ irreducibles, si $\eta\delta = \xi\omega$, entonces $\eta = \xi$ y $\delta = \omega$.

Prueba: Supongamos $\eta = [v, \mathbf{x}]$, $(v, \mathbf{x}) \in W\Sigma_m \times X^m$, $\xi = [v', \mathbf{x}']$, $(v', \mathbf{x}') \in W\Sigma_n \times X^n$, $\delta = [w, \mathbf{y}]$, $(w, \mathbf{y}) \in W\Sigma_p \times X^p$, $\omega = [w', \mathbf{y}']$, $(w', \mathbf{y}') \in W\Sigma_q \times X^q$, asumiendo que $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}'$ no tienen entre sus componentes a $*$ (lo cual siempre puede hacerse por lo comentado previamente). La irreducibilidad de η y ξ significa que v y w no pueden descomponerse como concatenaciones. Ya que $\eta\delta = \xi\omega$, entonces, por la identificación bajo el cociente de Barratt

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x}', \mathbf{y}')\sigma \cdots \cdot (*) \\ v \sqcup w &= (v' \sqcup w')\sigma \cdots \cdot (**) \end{aligned}$$

pues el otro cociente no es posible por la condición impuesta a $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}'$. Suponiendo, en un primer caso, que $m = n$, entonces también $p = q$ y σ debe tener la forma de concatenación $\sigma = \tau \sqcup \rho$ con $\sigma \in W\Sigma_m$, $\tau \in W\Sigma_p$ para que se cumpla (**), entonces

$$\begin{aligned} v &= v'\tau, \mathbf{x} = \mathbf{x}'\rho \\ w &= w', \mathbf{y} = \mathbf{y}'\rho \end{aligned}$$

así (en este caso) $\eta = \delta$ y $\xi = \omega$.

Por otro lado, si $m \neq n$, supongamos sin pérdida de generalidad que $m < n$. Si para algún $i \in [m] \subset [m+n]$, se tiene $\sigma(i) > n$, entonces $(v' \sqcup w')\sigma > n > m$, lo cual contraduce que esta composición coincida con $v \sqcup w$. Por lo tanto $\sigma([m]) \subset [n] \subset [n+q]$, luego podemos definir $\hat{\gamma} \in \Sigma_n \subset \Sigma_{n+q}$ mediante

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(i) &= \sigma(i) \text{ cuando } 1 \leq i \leq n \\ \hat{\gamma}(i) &= k, \text{ para alg\u00fan } k \notin \hat{\gamma}([i-1]), \text{ cuando } m < i \leq n\end{aligned}$$

entonces $(v' \sqcup w')\hat{\sigma} = v \sqcup \psi$, donde $v \in W\Sigma_m, \psi \in W\Sigma_p$, luego $v' \circ \hat{\sigma} = \phi \sqcup \varphi$ con $\phi \in W\Sigma_m, \varphi \in \Sigma_{n-m}$ lo cual contradice la irreductibilidad de β . \square

COROLARIO 4.1.12. Γ^+X es monoide libre.

PROPOSICI\u00d3N 4.1.13. Dado un espacio punteado X , $\pi_0(\Gamma^+X) = \mathbb{Z}^+\pi_0(X)$.

Prueba: Puesto que $(W\Sigma_n)_0 = \Sigma_n$, $(\Gamma^+X)_0$ es el monoide libre generado por X_0 . Todo 1-s\u00edmplice $\xi \in (\Gamma^+X)_1$ puede ser escrito $\xi = [(1, \sigma), x_1, \dots, x_n], \sigma \in \Sigma_n, x_i \in X_1$, entonces $d_0\xi = [\sigma, d_0x_1, \dots, d_0x_n] = [1, d_0x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, d_0x_{\sigma^{-1}(n)}]$ y $d_1\xi = [1, d_1x_1, \dots, d_1x_n]$, ya que $d_0\xi \sim d_0\xi$ tal como en la Definici\u00f3n 2.1.5, acabamos de ver el orden de las coordenadas no afecta las clases de $\pi_0(\Gamma^+X)$, y conclu\u00edmos. \square

4.2. EL FUNTOR GRUPO LIBRE Γ

DEFINICI\u00d3N 4.2.1. Dado un monoide M , entendemos por *grupo universal de M* , denotado UM a aquel grupo que es universal con respecto a los homomorfismos de M hacia grupos, es decir, existe un homomorfismo (como monoides) $u : M \rightarrow UM$ tal que, dado otro homomorfismo de monoides $f : M \rightarrow G$, donde G es grupo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow u & \nearrow F & \\ UM & & \end{array}$$

existe un \u00fanico homomorfismo de grupos $F : UM \rightarrow G$ tal que el diagrama anterior conmuta. Por la universalidad de UM sabemos que este es \u00fanico salvo isomorfismo.

Con la siguiente proposici\u00f3n garantizamos la existencia del grupo universal.

PROPOSICI\u00d3N 4.2.2. Dado un monoide M , existe siempre un grupo universal UM para M .

Prueba: Sea FM el grupo libre generado por M como conjunto punteado (con punto base su unidad), es decir, identificando el punto base con la unidad de FM , y sea N el subgrupo normal de FM generado por los elementos de la forma $m_1m_2m_3^{-1}$, donde $m_1 \in M$ y $m_1m_2 = m_3$ en M , entonces $UM = FM/N$ y u es la composici\u00f3n

$$M \rightarrow FM \rightarrow FM/N$$

de la aplicación cociente con la inclusión. \square

Observamos que cuando M es un monoide simplicial, podemos generar el grupo universal simplicial UM , con $(UM)_n = U(M_n)$.

DEFINICIÓN 4.2.3. Dado un complejo punteado X , definimos ΓX como el grupo universal simplicial de $\Gamma^+ X$

Existe un encaje natural $\iota_X : X \rightarrow \Gamma X$ (viniendo a reemplazar el de la definición 3.1.2) el cual se obtiene de componer $\iota_X : X \rightarrow \Gamma^+ X$ con $u : \Gamma^+ X \rightarrow \Gamma X$. ΓX es grupo simplicial libre.

Viendo a X como subcomplejo de ΓX , mediante ι_X , tiene sentido hablar del par $(\Gamma X, X)$.

DEFINICIÓN 4.2.4. Dados dos complejos punteados X y Y , existe una aplicación natural

$$\Psi : (\Gamma X) \times Y \rightarrow \Gamma(X \times Y)$$

definida mediante

$$\begin{aligned} \Psi([w, x_1, \dots, x_n], y) &= [w, (x_1, y), \dots, (x_n, y)] \\ \Psi(\xi\eta, y) &= \Psi(\xi, y)\Psi(\eta, y) \\ \Psi(\xi^{-1}, y) &= \Psi(\xi, y)^{-1} \end{aligned}$$

Similarmente se define una aplicación natural

$$\Phi : (\Gamma X) \wedge Y \rightarrow \Gamma(X \wedge Y)$$

En particular (esta vez basándonos en el criterio (3.8)), tenemos

$$\begin{aligned} C\Gamma X &= (\Gamma X) \wedge I^{\text{fib}} \rightarrow \Gamma(CX) \\ \Sigma\Gamma X &= (\Gamma X) \wedge S^1{}^{\text{fib}} \rightarrow \Gamma(\Sigma X) \end{aligned}$$

y tomamos adjuntos

$$\begin{aligned} \beta_X : \Gamma X &\rightarrow P\Gamma CX \\ \gamma_X : \Gamma X &\rightarrow \Omega\Gamma\Sigma X \end{aligned}$$

también definimos un mapa simplicial $c_X : CCX \rightarrow CX$ natural, a partir de un mapa $c : I^{\text{fib}} \wedge I^{\text{fib}} \rightarrow I^{\text{fib}}$, el cual se induce a partir de $I \wedge I \rightarrow I$ con regla $[s_0\sigma_1, s_1\sigma_1] \mapsto s_0\sigma_1$, $[s_0\sigma_1, s_1\sigma_1] \mapsto s_1\sigma_1$.

PROPOSICIÓN 4.2.5. El funtor Γ preserva homotopías

Prueba: Dados dos mapas simpliciales punteados $f, g : X \rightarrow Y$ para los cuales existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ que los relaciona. Aplicando Γ :

$$\Gamma H : \Gamma(X \times I) \rightarrow \Gamma Y$$

además, de la definición 3.2.3 tenemos una aplicación $\Psi : (\Gamma X) \times I \rightarrow \Gamma(X \times I)$ la composición $\Gamma H \circ \Psi$ viene a ser una homotopía entre Γf y Γg . \square

Cuando demostramos el Teorema 3.6.1, y posteriormente la Proposición 3.6.6 el término 'grupo de compleción' parecía no tener justificación. Ocurre que lo que originalmente se conocía como grupo de compleción de un monoide simplicial M era lo que nosotros llamamos grupo universal UM . La propiedad que cumple UM es que cuando M , bajo la hipótesis de la Proposición 3.6.6, sumando la hipótesis que M sea monoide libre, se obtiene el mismo resultado de dicha proposición, intercambiando ΩBM por UM (ver [32]), es por esto que distinguimos dos grupos de compleción, el algebraico UM y el homotópico ΩBM . Cuando M es libre y homotópico-abeliano, UM y ΩBM son equivalentes homotópicos (Lo cual ocurre en el caso de $\Gamma^+ X$).

En resumen:

PROPOSICIÓN 4.2.6. Si $\pi_0(M)$ está en el centro del anillo de Pontryagin $H_*(M)$ y M es libre, entonces

$$H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}] \cong H_*(UM)$$

\square

DEFINICIÓN 4.2.7. Dadas dos categorías pequeñas C y D , un funtor T de la categoría C -simplicial hacia la categoría D -simplicial está *dado en cada dimensión* si existe, para cada $n \leq 0$ entero, funtores $T_n : C \rightarrow D$ tal que,

$$\begin{aligned} (TX)_n &= T_n(X_n) \\ (Tf)_n &= T_n(f_n) \end{aligned}$$

para todo C -objeto simplicial X y todo C -morfismo simplicial f .

Cualidad la cual el funtor Γ cumple.

LEMA 4.2.8. Sea T un funtor de la categoría de conjuntos simpliciales punteados hacia la categoría de grupos simpliciales que está dado en cada dimensión con la propiedad de que, para cada par de complejos punteados A_1 y A_2 , el homomorfismo

$$Ti_1 \times Ti_2 : TA_1 \times TA_2 \rightarrow T(A_1 \wedge A_2)$$

es una equivalencia homotópica, donde i_1 e i_2 son morfismos inclusión. Entonces, si (A, B) es un par simplicial punteado, la aplicación natural

$$TB \rightarrow \text{Ker}(T\pi)$$

es una equivalencia homotópica, donde $\pi : A \rightarrow A/B$ es la aplicación cociente.

Prueba: Comenzemos considerando a T como functor de la categoría de conjuntos punteados hacia la categoría de grupos. Sea (A, B) un par de conjuntos punteados y $i : B \rightarrow A$ la inclusión, definiremos un complejo punteado $L = L(A, B)$ como sigue: Para $n \geq 0$, $L_n = A \vee B_1 \vee \cdots \vee B_n$, donde $B_i = B$

$d_0 : L_n \rightarrow L_{n-1}$ ($n \geq 1$) es dado por

$$\begin{aligned} d_0|_A &= id_A : A \rightarrow A \subset L_{n-1}, \\ d_0|_{B_1} &= i : B_1 \rightarrow A \subset L_{n-1}, \\ d_0|_{B_j} &= id_B : B_j \rightarrow B_{j-1} \subset L_{n-1}, 1 < j \leq n \end{aligned}$$

$d_i : L_n \rightarrow L_{n-1}$ ($n \geq 1, 0 < i < n$) es dado por

$$\begin{aligned} d_i|_A &= id_A : A \rightarrow A \subset L_{n-1}, \\ d_i|_{B_j} &= id_B : B_j \rightarrow B_j \subset L_{n-1}, 1 \leq j \leq i \\ d_i|_{B_i} &= id_B : B_i \rightarrow B_{i-1} \subset L_{n-1}, i < j \leq n \end{aligned}$$

$d_n : L_n \rightarrow L_{n-1}$ ($n \geq 1$) es dado por

$$\begin{aligned} d_n|_A &= id_A : A \rightarrow A \subset L_{n-1}, \\ d_n|_{B_j} &= id_B : B_j \rightarrow B_j \subset L_{n-1}, 1 \leq j < i, \\ d_n|_{B_n} &= * : B_n \rightarrow \{*\} \subset L_{n-1} \end{aligned}$$

$s_i : L_n \rightarrow L_{n+1}$ es dado por

$$\begin{aligned} s_i|_A &= id_A : A \rightarrow A \subset L_{n+1}, \\ s_i|_{B_j} &= id_B : B_j \rightarrow B_j \subset L_{n+1}, 1 \leq j \leq i, \\ s_i|_{B_j} &= id_B : B_j \rightarrow B_{j+1} \subset L_{n+1}, i \leq j \leq n \end{aligned}$$

A partir de este complejo, logramos el grupo simplicial K componiendo L con T , es decir $K_n = L_n$ y denotaremos de igual forma (d_i y s_i) a los morfismos cara y degeneración de K .

Definimos ahora, para cada $n \geq 0$, los grupos

$$M_n = M_n(A, B) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}[d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}]$$

Particularmente, $M_0 = K_0 = T(A)$, y debido a que $d_0(M_n) \subset M_{n-1}$, resulta que la sucesión

$$\xrightarrow{d_0} M_n(A, B) \xrightarrow{d_0} M_{n-1}(A, B) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_0} M_0(A, B) = T(A) \rightarrow 1$$

es semiexacta. Sin embargo, podemos hacer una afirmación más fuerte (y completa).

LEMA 4.2.9. Existe una sucesión larga natural exacta de grupos

$$\xrightarrow{d_0} M_n(A, B) \xrightarrow{d_0} M_{n-1}(A, B) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_0} M_0(A, B) = T(A) \xrightarrow{T\pi} T(A/B) \rightarrow 1$$

Prueba: Dotaremos a L de la estructura adicional mediante mapas $\alpha : L_n \rightarrow L_{n+1}$ para todo $n \geq 0$, donde

$$\begin{aligned} \alpha|_{A-B} &= id_{A-B} \rightarrow A-B \subset A \subset L_{n+1} \\ \alpha|_{B(\subset A)} &= id_B : B \rightarrow B_1 \subset L_{n-1} \\ \alpha|_{B_j} &= id_B : B_j \rightarrow B_{j+1} \rightarrow L_{n+1} \end{aligned}$$

es así que aplicando T , tenemos los mapas $T(\alpha) : K_n \rightarrow K_{n+1}$, para todo $n \geq 0$ y estos dotarán a K de la estructura adicional, luego el morfismo $r : K \rightarrow \hat{K}$, donde $\hat{K}_n = d_1 T(\alpha) K_0$ y $r(k) = d_1 T(\alpha) d_0^n(k)$, para $k \in K_n$ es la deformación de retracts del Lema 2.3.27. Ahora, $d_1 T(\alpha) K_0 = d_1 T(\alpha) T(L_0) = T(d_1 \alpha L_0) = T(\pi A) = T(A/B)$ y $r(k) = T(\pi) d_0^n(k)$.

Siguiendo la Proposición 2.3.26, si hacemos $G = K$, resulta $\bar{G}_n = M_n$ con cualquier n , mientras que si $H = \hat{K}$, tenemos $\bar{H}_n = 1$ cuando $n > 0$, y $\bar{H}_0 = \hat{K}_0 = T(A/B)$. La naturalidad de la Proposición 2.3.26 hace que, gracias a r , tenemos un morfismo de complejos de cadenas

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{d_0} M_n & \xrightarrow{d_0} M_{n-1} & \xrightarrow{d_0} \cdots & \xrightarrow{d_0} M_0 = T(A) & \longrightarrow & 1 & \\ & \downarrow & & & & \downarrow T\pi & \\ \longrightarrow 1 & \longrightarrow 1 & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow T(A/B) & \longrightarrow & 1 & \end{array}$$

puesto que r es una deformación de retracts, este induce isomorfismos en los grupos de homología. Es decir, como la sucesión $\rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow \cdots \rightarrow 1 \rightarrow T(A/B) \rightarrow 1$ es exacta, salvo por sus dos últimos términos, lo mismo ocurre con $\xrightarrow{d_0} M_n \xrightarrow{d_0} M_{n-1} \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_0} M_0 \xrightarrow{d_0} T(A) \rightarrow 1$, pero dado que las homología son isomorfas, entonces

$$T(A)/\text{Im}d_0 \cong T(A/B)/1 \cong T(A/B)$$

ahora, como es verificable, tenemos $\text{Im}d_0 \subset \text{Ker}T\pi$, y recordemos que $T(A/B) \cong T(A)/\text{Ker}T\pi$. Disponemos de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T(A)/\text{Im}d_0 & \xrightarrow{\quad} & T(A)/\text{Ker}T\pi \\ & \searrow \cong & \nearrow \cong \\ & T(A/B) & \end{array} \quad (4.4)$$

donde $T(A)/\text{Im}d_0 \rightarrow T(A)/\text{Ker}T\pi$ tiene la regla $x\text{Im}d_0 \mapsto x\text{Ker}T(q)$ y por el diagrama (4.4), resulta que $\text{Im}d_0 = \text{Ker}T\pi$, lo cual nos permite concluir la afirmación del lema. \square

COROLARIO 4.2.10. Existe una sucesión larga natural exacta de grupos simpliciales

$$\xrightarrow{d_0} M_n(A, B) \xrightarrow{d_0} M_{n-1}(A, B) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_0} M_0(A, B) = T(A) \xrightarrow{T\pi} T(A/B) \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & T(B) & \xrightarrow{i} & T(A) \times T(B) & \xrightarrow{p} & T(A) & \longrightarrow & 1 \\ & & \mu(A, B) \downarrow \cong & \searrow T(i_2) & \downarrow T(i_1) \times T(i_2) & & \downarrow id & & \\ 1 & \longrightarrow & M_1(A, B) & \longrightarrow & T(A \vee B) & \xrightarrow{T(p_1)} & T(A) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

La sucesión corta inferior es exacta ya que es de la forma $0 \rightarrow \text{Ker}f \hookrightarrow M \xrightarrow{f} N$ ($p_1 = d_1 : L_1 \rightarrow L_0$), y $T(p_1)T(i_2) = T(p_1i_2) = T(*) = * : T(B) \rightarrow T(A)$, así que obtenemos un morfismo $\mu(A, B) : T(B) \rightarrow M_1(A, B)$ que hace que el diagrama conmute.

PROPOSICIÓN 4.2.11. El morfismo natural $\mu(A, B) : T(B) \rightarrow M_1(A, B)$ es una equivalencia homotópica cuando T tiene la propiedad del Lema 4.2.8

Prueba: Gracias al Corolario 2.3.26, se induce un diagrama entre sucesiones exactas largas

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi_{n+1}(T(A) \times T(B)) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(T(A)) & \longrightarrow & \pi_n(T(B)) & \longrightarrow & \pi_n(T(A) \times T(B)) & \longrightarrow & & & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & & & \\ \pi_{n+1}(T(A \vee B)) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(T(A)) & \longrightarrow & \pi_n(M_1(A, B)) & \longrightarrow & \pi_n(T(A \vee B)) & \longrightarrow & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & \pi_n(T(A)) & \longrightarrow & \cdots & & \\ & & & & & & \downarrow \cong & & & & \\ & & & & & & \pi_n(T(A)) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

entonces por lema de los 5, $\pi_n(T(B)) \xrightarrow{\cong} \pi_n(M_1(A, B))$ y concluimos por Whitehead. \square

PROPOSICIÓN 4.2.12. El morfismo natural $M_1 \rightarrow \text{Ker}T\pi$ es una equivalencia homotópica.

Prueba: Primero debemos probar que $M_n(A, B)$ es contráctil para $n \geq 2$, procederemos por inducción:

Si consideramos el par $(A \vee B_0)$, donde $B_0 \cong B$ y la inclusión dada por $i : B \rightarrow A \subset A \vee B_0$, así para $n \geq 1$ existe un isomorfismo natural

$$L_n(A \vee B_0, B) = A \vee B_0 \vee B_1 \vee \cdots \vee B_n \cong A \vee B_1 \vee \cdots \vee B_n \vee B_{n+1} = L_{n+1}(A, B)$$

Aplicando T , $K_n(A \vee B) \cong K_{n+1}(A, B)$. Así $M_n(A \vee B_0, B) \cong \bigcap_{i=2}^{n+1} \text{Ker}[d_i : K_n(A, B) \rightarrow K_n(A, B)]$.

$d_1 : \bigcap_{i=2}^{n+1} \text{Ker}[d_i : K_n(A, B) \rightarrow K_n(A, B)] \rightarrow M_n(A, B)$ es un epimorfismo donde $s_0|_{M_n(A, B)}$ es una inversa derecha de este, cuyo Kernel es precisamente $M_{n+1}(A, B)$, es así que tenemos una sucesión exacta corta natural

$$1 \rightarrow M_{n+1}(A, B) \rightarrow M_n(A \vee B_0, B) \rightarrow M_n(A, B) \rightarrow 1$$

Particularmente, cuando $n = 1$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & M_2(A, B) & \longrightarrow & M_1(A \vee B_0, B) & \longrightarrow & M_1(A, B) \longrightarrow 1 \\ & & & & \uparrow \mu(A \vee B_0, B) & \nearrow \mu(A, B) & \\ & & & & T(B) & & \end{array}$$

donde el triángulo es conmutativo por la definición de μ , ya que el diagrama (sólido)

$$\begin{array}{ccc} T(B) & \xrightarrow{T(i'_2)} & T(A \vee B_0 \vee B) \\ \mu(A \vee B, B) \searrow & & \downarrow d'_1 \\ M_1(A \vee B_0, B) & \hookrightarrow & T(A \vee B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1(A, B) & \hookrightarrow & T(A \vee B) \end{array}$$

$\mu(A, B)$ (curved arrow from $T(B)$ to $M_1(A, B)$)

es conmutativo y $d'_1 T(i'_2) = T(i_2)$.

Como ambos $\mu(A \vee B_0, B)$ y $\mu(A, B)$ son equivalencias débiles, entonces tenemos una equivalencia débil $M_1(A \vee B_0, B) \xrightarrow{\cong} M_1(A, B)$, lo cual induce una sucesión larga

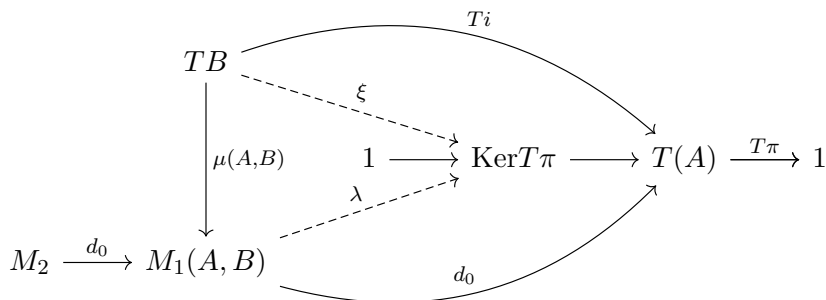
$$\xrightarrow{\cong} \pi_{n+1}(M_1(A, B)) \rightarrow \pi_n(M_2(A, B)) \rightarrow \pi_n(M_1(A \vee B_0, B)) \xrightarrow{\cong} \pi_n(M_1(A, B))$$

esto implica que $\pi_n(M_2(A, B)) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $M_2(A, B)$ es contráctil pero A y B son arbitrarios, así que el par $(A \vee B_0, B)$ puede ser considerado, concluyendo que también $M_2(A, B)$ lo es, y así procede la inducción. Para $i > 0$, sea C_i el núcleo de $d_0 : M_i(A, B) \rightarrow M_{i-1}(A, B)$, entonces de la sucesión exacta larga del Corolario 4.2.10 derivamos la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow C_i \rightarrow M_i(A, B) \rightarrow C_{i-1} \rightarrow 1$$

Como M_i es contráctil para $i \geq 2$, entonces C_{i-1} es conexo, luego (si $i > 2$) C_{i-2} es 1-conexo, y así sucesivamente, obtenemos que C_1 es $i - 2$ -conexo, para todo $i \geq 2$. Por lo tanto el morfismo natural $M_1(A, B) \rightarrow \text{Ker}T\pi$ es una equivalencia homotópica por Corolario 2.3.26 y Whitehead.

Del diagrama sólido,



los morfismos d_0 y Ti pueden factorizarse mediante unos morfismos ξ y λ como aparece en el diagrama. Como $\xi = \lambda\mu(A, B)$ es composición de equivalencias homotópicas, también lo es ξ , como se buscaba. □

LEMA 4.2.13. Si X es un complejo punteado $(n - 1)$ conexo, con $n > 1$, entonces $H_i(\Gamma^+ X, X) = 0$ para $i < 2n$.

Prueba: Para cada $m \leq 0$, definimos $\Gamma_m^+ X = \varinjlim_{n=0}^m W\Sigma_n \times X^n / \sim$ donde \sim representa las mismas relaciones (a) y (b) de Barratt-Eccles. Tenemos la filtración

$$1 = \Gamma_0^+ X \subset \iota_X(X) = \Gamma_1^+ X \subset \dots \Gamma_m^+ X \subset \dots \Gamma^+ X$$

es decir $\Gamma^+ X = \varinjlim_m \Gamma_m^+ X$.

Esta filtración induce una sucesión espectral E^r , $r \geq 1$ tal que

$$E^1 = H_{p+q}(\Gamma_p^+ X, \Gamma_{p-1}^+ X) = \tilde{H}_{p+q}(\Gamma_p^+ X / \Gamma_{p-1}^+ X) \text{ para } p > 0$$

Para cada $p \geq 1$, el espacio cociente $\mathcal{D}_p X = \Gamma_p^+ X / \Gamma_{p-1}^+ X$ resulta identificarse con $W\Sigma_p \times X^{(p)} / W\Sigma_p \times \{*\}$ cocientado por la acción libre de Σ_p , es decir $W\Sigma_p \ltimes_{\Sigma_p} X^{(p)}$. Los grupos de homología (reducida) de $W\Sigma_p \times X^{(p)} / W\Sigma_p \times \{*\}$ se obtienen de los respectivos grupos de homología reducida de $W\Sigma_p \times X^{(p)}$ y $W\Sigma_p \times \{*\}$ debido a la sucesión exacta larga que los relaciona, pero $\tilde{H}_m(W\Sigma_p \times \{*\}) = 0$ para todo $m \leq 0$ pues $W\Sigma_p$ es contráctil. Si X es $(n - 1)$ -conexo, entonces $X^{(p)} = X \vee X \cdots \vee X$ (p veces) es $(np - 1)$ -conexo, entonces también $W\Sigma_p \times X^{(p)}$, obtenemos así que $W\Sigma_p \times X^{(p)} / W\Sigma_p \times \{*\}$ es $(np - 1)$ -conexo.

Como la acción de Σ_p es libre y Σ_p es finito, la aplicación cociente

$$W\Sigma_p \times X^{(p)} / W\Sigma_p \times \{*\} \rightarrow \mathcal{D}_p X$$

es un espacio de recubrimiento, por lo cual el morfismo inducido es inyectivo en los grupos fundamentales, y es isomorfismo en los grupos de homotopía superior, entonces \mathcal{D}_p es $np - 1$ conexo. El lema se desprende entonces de la convergencia de la sucesión espectral $\{E^r\}$. \square

Con este último resultado presente, por la Proposición 4.2.6 tenemos la

PROPOSICIÓN 4.2.14. Si X es un complejo punteado $(n - 1)$ conexo, con $n > 1$, entonces $H_i(\Gamma X, X) = 0$ para $i < 2n$. \square

LEMA 4.2.15. Si X es un complejo de Kan punteado (*entonces* $n - 1$)-conexo, el par $(\Gamma X, X)$ es $(2n - 1)$ -conexo.

Prueba: Si conocemos que ΓX es 1-conexo, entonces concluimos por corolario de Hurewicz 3.4.4 en su versión de pares de complejos. En general, podemos tomar el subcomplejo minimal M de X , y ya que $\pi_0 X$ y $\pi_1 X$ son triviales, entonces $M_0 = \{*\}$ y $M_1 = \{*\}$, luego $(\Gamma M)_0 = \{*\}$ y $(\Gamma M)_1 = \{*\}$, entonces ΓM es 1-conexo, pero $\Gamma M \simeq \Gamma X$, así que ΓX es 1-conexo. \square

Vamos a formar un nuevo sistema directo, la adjunta de la identidad $\Sigma X \rightarrow \Sigma X$ da lugar a una inclusión natural $i_X : X \rightarrow \Omega \Sigma X$ tal que $\gamma_X \iota_X = \Omega \iota_{\Gamma X} i_X : X \rightarrow \Omega \Gamma \Sigma X$, entonces para cada $n \geq 0$:

$$(\Omega^n \gamma_{\Sigma^n X}, \Omega^n i_{\Sigma^n X}) : (\Omega^n \Gamma \Sigma^n X, \Omega^n \Sigma^n X) \rightarrow (\Omega^{n+1} \Gamma \Sigma^{n+1} X, \Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X)$$

es un mapa de pares, con $(\Omega^\infty \Gamma \Sigma^\infty X, \Omega^\infty \Sigma^\infty X)$ como su límite directo.

En particular, si $n > 1$, el par $(\Gamma \Sigma^n X, \Sigma^n X)$ es $(2n - 1)$ -conexo (Teorema de suspensión de Freudenthal), así que el par $(\Omega^n \Gamma \Sigma^n X, \Omega^n \Sigma^n X)$ es $(n - 1)$ conexo y así el límite $(\Omega^\infty \Gamma \Sigma^\infty X, \Omega^\infty \Sigma^\infty X)$ es ∞ -conexo, luego por Whitehead concluimos el siguiente:

COROLARIO 4.2.16. Si X es complejo de Kan, la inclusión natural $\Omega^\infty \Sigma^\infty X \rightarrow \Omega^\infty \Gamma \Sigma^\infty X$ es una equivalencia homotópica.

LEMA 4.2.17. Dados los complejos punteados A_1 y A_2 , el homomorfismo de grupos simpliciales

$$\Gamma i_1 \times \Gamma i_2 : \Gamma A_1 \times \Gamma A_2 \rightarrow \Gamma(A_1 \wedge A_2)$$

es una equivalencia homotópica.

Prueba: Será suficiente probar que

$$\Gamma^+ i_1 \times \Gamma^+ i_2 : \Gamma^+ A_1 \times \Gamma^+ A_2 \rightarrow \Gamma^+(A_1 \wedge A_2)$$

es una equivalencia homotópica.

Haciendo uso de la filtración definida en el Lema 4.2.13, tenemos la siguiente filtración para $\Gamma^+ A_1 \times \Gamma^+ A_2$:

$$(\Gamma^+ A_1 \times \Gamma^+ A_2)_n = \bigcup_{i+j=n} \Gamma_i^+ A_1 \times \Gamma_j^+ A_2$$

de lo cual, se inducen cocientes

$$(\Gamma^+ A_1 \times \Gamma^+ A_2)_n / (\Gamma^+ A_1 \times \Gamma^+ A_2)_{n-1} \cong \bigvee_{p=0}^n (\mathcal{D}_p A_1) \wedge (\mathcal{D}_{n-p} A_2)$$

donde escribimos $\mathcal{D}_0 A_i = S^0$. Para cada $n \geq 0$, vamos a probar que el mapa simplicial

$$\bigvee_{p=0}^n (\mathcal{D}_p A_1) \wedge (\mathcal{D}_{n-p} A_2) \rightarrow \mathcal{D}_n(A_1 \wedge A_2) \quad (4.5)$$

es una equivalencia homotópica, pues así sus respectivas sucesiones espectrales tendrán límites isomorfos, permitiéndonos concluir.

Las operaciones wedge y smash se relacionan similarmente como hacen la suma y producto, de tal forma que también existe un ‘Binomio de Newton’:

$$(A_1 \vee A_2)^{(n)} = \bigvee_{p=0}^n X_p$$

donde $X_p = \bigvee_{\binom{n}{p}} (A^{(p)} \wedge A^{(n-p)})$ es el bouquet de $\binom{n}{p}$ copias de $(A^{(p)} \wedge A^{(n-p)})$

Por la definición dada a X como bouquet de productos smash, este es invariante bajo la acción de S_n , luego

$$\mathcal{D}_n(A_1 \vee A_2) = W\Sigma_n \times_{\Sigma_n} \left(\bigvee_{p=0}^n X_p \right) \cong \bigvee_{p=0}^n W\Sigma_n \times_{\Sigma_n} X_p$$

El mapa (4.5) es un bouquet de encajes de $(\mathcal{D}_p A_1) \wedge (\mathcal{D}_{n-p} A_2)$ en $W\Sigma_n \times_{\Sigma_n} X_p$, entonces será suficiente dar una retracción

$$r : W\Sigma_n \times_{\Sigma_n} X_p \rightarrow W(\Sigma_p \times \Sigma_{n-p}) \times_{\Sigma_p \times \Sigma_{n-p}} (A^{(p)} \wedge A^{(n-p)}) \cong \mathcal{D}_p A_1 \wedge \mathcal{D}_{n-p} A_2$$

La inclusión $\Sigma_p \times \Sigma_{n-p} \rightarrow \Sigma_n$ induce (ver [33] para encontrar las nociones de homotopía equivariante necesarias) un mapa simplicial $(\Sigma_p \times \Sigma_{n-p})$ -equivariante $W(\Sigma_p \times \Sigma_{n-p}) \rightarrow$

$W\Sigma_n$, de lo cual, factorizando la acción de $\Sigma_p \times \Sigma_{n-p}$, se obtiene una equivalencia homotópica (entre espacios de Eilenberg-MacLane $K(\Sigma_p \times \Sigma_{n-p}, 1)$), entonces tenemos un retracts por deformación equivariante $d : W\Sigma_n \rightarrow W(\Sigma_p \times \Sigma_{n-p})$.

Dado $\xi = [w, a_1, \dots, a_p, b_{p+1}, \dots, b_n]$ de $W\Sigma_n \times_{\Sigma_n} X_p$, donde $w \in W\Sigma_n, a_i \in A_1, b_j \in A_2$, definimos $r(\xi) = [d(w), a_1, \dots, a_p, b_{p+1}, \dots, b_n]$, como pretendíamos. \square

COROLARIO 4.2.18. Si (A, B) es un par simplicial punteado, la aplicación natural

$$\Gamma B \rightarrow \text{Ker}(\Gamma\pi)$$

es una equivalencia homotópica.

LEMA 4.2.19. Dado un complejo punteado X , el homomorfismo natural simplicial $\gamma_X : \Gamma X \rightarrow \Omega\Gamma\Sigma X$ es una equivalencia homotópica

Prueba:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \text{Ker}(\Gamma\pi) & \longrightarrow & \Gamma CX & \xrightarrow{\Gamma\pi} & \Gamma\Sigma X & \longrightarrow & 1 \\ & & \nearrow & & \downarrow \bar{\beta}_X & & \downarrow id & & \\ \Gamma X & & & & & & & & \\ & & \searrow \gamma_X & & \downarrow \alpha_X & & & & \\ 1 & \longrightarrow & \Omega\Gamma\Sigma X & \longrightarrow & P\Gamma\Sigma X & \longrightarrow & \Gamma\Sigma X & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

la sucesión corta inferior es exacta por la definición de sucesión fibra, y $\bar{\beta}_X$ se obtiene como sigue

$$(P\Gamma\pi)(P\Gamma c_X)\beta_{CX} : \Gamma CX \rightarrow P\Gamma CCX \rightarrow P\Gamma CX \rightarrow P\Gamma\Sigma X$$

Como tanto la sucesión inferior como la superior son exactas, se induce un morfismo α_X tal que el diagrama conmute

Nuevamente por el Corolario 2.3.26 y recordando que $P\Gamma\Sigma X$ es contráctil, y también ΓCX ya que el funtor Γ es homotópico, tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\Gamma\Sigma X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(\text{Ker}(\Gamma\pi)) & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\Gamma\Sigma X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(\Omega\Gamma\Sigma X) & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Así que $\text{Ker}(\Gamma\pi) \simeq \Omega\Gamma\Sigma X$ por Whitehead, pero según el Corolario 4.2.18, $\Gamma X \simeq \text{Ker}(\Gamma\pi)$, entonces $\gamma_X : \Gamma X \rightarrow \Omega\Gamma\Sigma X$ es equivalencia homotópica, como se deseaba. \square

Para cada $n \geq 0$ entero existe un homomorfismo natural

$$\Omega^n \gamma_{\Sigma^n X} : \Omega^n \Gamma \Sigma^n X \rightarrow \Omega^{n+1} \Gamma \Sigma^{n+1} X$$

el cual es equivalencia homotópica, para cada n .

Denotamos $\Omega^\infty \Gamma \Sigma^\infty X$ al colímite formado por este sistema directo ($\Omega^\infty \Gamma \Sigma^\infty X = \varinjlim_n \Omega^n \Gamma \Sigma^n X$)

COROLARIO 4.2.20. Dado un complejo punteado, el homomorfismo natural de grupos simpliciales $\Gamma X \rightarrow \Omega^\infty \Gamma \Sigma^\infty X$ es una equivalencia homotópica.

Combinando los corolarios 4.2.16 y 4.2.20 obtenemos nuestro teorema principal

TEOREMA 4.2.21. Si X es un complejo de Kan punteado, entonces ΓX y $\Omega^\infty \Sigma^\infty X$ son naturalmente equivalentes homotópicos. \square

Capítulo 5

PRODUCTO SIMÉTRICO INFINITO HOMOTÓPICO

En el capítulo anterior encontramos un modelo para $\Omega^\infty \Sigma^\infty X$, ahora presentamos otro modelo, el grupo de completión de la versión en colímite homotópico del functor *producto simétrico infinito*, famoso por el Teorema de Dold-Thom ([5]). La conexión entre ambos modelos (una equivalencia homotópica) representa el resultado final de esta tesis.

DEFINICIÓN 5.0.1. Sea $X \in \mathbf{sSet}_*$ conexo, el *producto simétrico infinito de X* es el colímite $SP(X) = \operatorname{colim}_{\mathbb{I}} X^\bullet$, el cual tiene la propiedad, gracias al teorema de Dold-Thom, de que sus grupos de homotopía pueden ser identificados con los grupos de homología de X. Aquí estudiaremos la versión homotópica: el colímite homotópico (no punteado) $SP_h(X) = \operatorname{hocolim}_{\mathbb{I}} X^\bullet$ es llamado *producto simétrico infinito homotópico de X*, el cual tiene estructura de monoide gracias a la categoría monoidal \mathbb{I} . Denotamos particularmente su grupo de completión

$$SP_h^\wedge(X) = \Omega B(SP_h(X))$$

ya que X es conexo, igualmente $SP_h(X)$, luego el morfismo canónico

$$SP_h(X) \rightarrow SP_h^\wedge(X)$$

es una equivalencia homotópica por Proposición 3.6.6. El colímite homotópico $SP_h(X)$, como recordamos desde el comienzo del capítulo 3, es por definición $SP_h(X) = dN(E_{\mathbb{I}} X^\bullet)$, no tomamos el colímite homotópico punteado (denotado $SP_h^*(X)$) pues este cociente no preserva una estructura de monoide simplicial, sin embargo por la Observación 3.3, ambos son equivalentes, ya que \mathbb{I} posee objeto inicial. En este capítulo simplificaremos un poco la notación, escribiendo $E_{\mathbb{I}} X^\bullet = \mathbb{I}(X)$.

Sea $Y \in \mathbf{sSet} : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$, la categoría simplicial $\Sigma(Y)$ es la subcategoría simplicial de $\mathbb{I}(Y)$ donde, a nivel de los k -símplices, los morfismos $([m], \mathbf{x}) \rightarrow ([n], \mathbf{y})$ se inducen a partir de únicamente isomorfismos $\alpha_k : [m] \rightarrow [n]$ (osea $m = n$). La concatenación de permutaciones induce en $\Sigma(Y)$ una estructura de categoría monoidal simétrica. Haremos una comparación entre esta categoría con $\mathbb{I}(Y_+)$.

Sea \mathbf{k} objeto de Δ . Dado un objeto $([n], \mathbf{x})$ de $\mathbb{I}((Y_k)_+)$, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [\bar{n}] & \xrightarrow{\rho_x} & [n] \\ \downarrow \bar{\mathbf{x}} & & \downarrow \mathbf{x} \\ Y_k & \hookrightarrow & (Y_k)_+ \end{array} \quad (5.1)$$

donde $\mathbf{x} : [n] \rightarrow Y_+$ es la aplicación de conjuntos $i \mapsto (\mathbf{x})_i$ ($1 \leq i \leq n$), $[\bar{n}] \xrightarrow{\rho_x} [n]$ es la única aplicación creciente tal que su imagen coincide con $\mathbf{x}^{-1}(Y_k)$. Dado un morfismo simplicial α de $\mathbb{I}(Y_+)$ representado a nivel de los k -símplices por $\alpha_k : ([m], \mathbf{x}) \rightarrow ([n], \mathbf{y})$, denotamos como $\pi(\alpha_k)$ al morfismo determinado por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} ([\bar{m}], \bar{\mathbf{x}}) & \xrightarrow{\pi(\alpha_k)} & ([\bar{n}], \bar{\mathbf{y}}) \\ \downarrow \rho_x & & \downarrow \rho_y \\ ([m], \mathbf{x}) & \xrightarrow{\alpha_k} & ([n], \mathbf{y}) \end{array} \quad (5.2)$$

siendo $\bar{m} = \bar{n}$, así obtenemos un functor simplicial (monoidal simétrico)

$$\pi : \mathbb{I}(Y_+) \rightarrow \Sigma(Y)$$

con $([n], \mathbf{x}) \mapsto ([\bar{n}], \bar{\mathbf{x}})$.

PROPOSICIÓN 5.0.2. El functor simplicial π da lugar a una equivalencia

$$SP_h^\wedge(X_+) \xrightarrow{\cong} \Omega B(N\Sigma(X)).$$

para todo $X \in \mathbf{sSet}$

Prueba: Notemos que en el lado izquierdo de la equivalencia se han omitido por simplicidad escribir las diagonales. Podemos ver a $\mathbb{I}(X)$ como subcategoría simplicial de $\mathbb{I}(X_+)$ por la inclusión $X \hookrightarrow X_+$, permitiendo así considerar a $\Sigma(X)$ subcategoría simplicial

de $\mathbb{I}(X_+)$, entonces π es una retracción. A nivel de k -símplices, podemos ver a ρ como una transformación natural entre los funtores $i \circ \pi$ ($i : \Sigma(X_k) \hookrightarrow \mathbb{I}(X_+)$) e $id_{\mathbb{I}((X_k)_+)}$, reescribiendo el diagrama (5.2):

$$\begin{array}{ccc} ([\bar{m}], \bar{\mathbf{x}}) & \xrightarrow{i \circ \pi(\alpha_k)} & ([\bar{n}], \bar{\mathbf{y}}) \\ \downarrow \rho_x & & \downarrow \rho_y \\ ([m], \mathbf{x}) & \xrightarrow{id(\alpha_k)} & ([n], \mathbf{y}) \end{array}$$

pero la existencia de esta transformación natural equivale a la existencia de un funtor $\rho_k : \mathbb{I}((X_k)_+) \times \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{I}((X_k)_+)$, así se induce un mapa simplicial

$$N\mathbb{I}((X_k)_+) \times \Delta[1] \cong N\mathbb{I}((X_k)_+) \times N\mathbf{1} \cong N(\mathbb{I}(X_k)_+) \times \mathbf{1} \rightarrow N\mathbb{I}((X_k)_+)$$

es decir, una homotopía, que inicia en $N\pi$ y termina en $id_{(X_k)_+}$, luego

$$N\pi : N\mathbb{I}((X_k)_+) \xrightarrow{\cong} N\Sigma(X_k)$$

resulta la equivalencia (haciendo abuso de notación)

$$SP_h(X_+) \xrightarrow{\cong} N\Sigma(X) \quad (5.3)$$

evitando escribir la diagonal en el lado derecho. Aplicando el funtor ΩB obtenemos el resultado deseado. \square

También existe una relación con el funtor Γ^+ , queremos decir

$$\Gamma^+(X_+) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} N\tilde{\Sigma}_n \times_{\Sigma_n} X^n \cong \bigsqcup_{n=0}^{\infty} W\Sigma_n \times_{\Sigma_n} X^n \cong N\Sigma(X) \quad (5.4)$$

donde $X \in \mathbf{sSet}$, la última identificación se obtiene por argumentos similares a los del Ejemplo 3.1 (recordemos que $W\Sigma_n \cong E\Sigma_n$).

PROPOSICIÓN 5.0.3. Existe una equivalencia homotópica

$$\pi : SP_h(X) \xrightarrow{\cong} \Gamma^+ X$$

Prueba: Para esta prueba, la definición general de colímite homotópico para categorías de modelos simpliciales como coend, es decir $SP_h(X) = \text{hocolim}_{\mathbb{I}} X^\bullet = N(\bullet \downarrow \mathbb{I}) \otimes_{\mathbb{I}} X^\bullet$, nos otorgará una vía rápida para asociarlo a $\Gamma^+(X)$ (que también es otro coend)

Para cada $[m]$ de \mathbb{I} , definimos el funtor $m \downarrow \mathbb{I} \rightarrow \tilde{\Sigma}_m$ enviando un objeto $([m], \alpha)$, correspondiente a $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ a la permutación $\alpha^*(id_n)$ en Σ_m , y aplicando el funtor nervio, definimos una transformación natural entre \mathbb{I}^{op} diagramas

$$\hat{\pi} : N(\bullet \downarrow \mathbb{I}) \rightarrow N\tilde{\Sigma}_\bullet$$

lo que nos permite inducir el mapa simplicial

$$SP_h(X) = N(\bullet \downarrow \mathbb{I}) \otimes_{\mathbb{I}} X^\bullet \rightarrow N\tilde{\Sigma}_\bullet \otimes_{\mathbb{I}} X^\bullet = \Gamma^+(X) \quad (5.5)$$

Consideremos como primer caso, que X es discreto, entonces podemos expresar X de la forma X'_+ , entonces el morfismo (5.5) coincide con el que estudiamos en (5.3), mediante la identificación (5.4), de lo cual obtenemos la equivalencia en este caso. Particularmente, para $n \geq 0$, denotamos cX_n el conjunto simplicial constante, donde $(cX_n)_m = X_n$, para todo $m \geq 0$, el cual es discreto, y satisface que

$$\Gamma^+(cX_n)_n = \Gamma^+X_n \text{ y } SP_h(cX_n)_n = SP_h(X)_n$$

Ya que son discretos, tenemos

$$\pi^n : SP_h(cX_n) \xrightarrow{\cong} \Gamma^+(cX_n)$$

donde $\pi^n = \pi_n$, entonces existe $\rho^n : \Gamma^+(cX_n) \xrightarrow{\cong} SP_h(cX_n)$ tal que $\pi^n \circ \rho^n \sim id$ y $\rho^n \circ \pi^n \sim id$, osea tenemos una homotopía $F^n : SP_h(cX_n) \times \Delta[1] \rightarrow SP_h(cX_n)$ (resp. $G^n : \Gamma^+(cX_n) \times \Delta[1] \rightarrow \Gamma^+(cX_n)$) que empieza con $\rho^n \pi^n$ (resp. $\pi^n \rho^n$) y termina con la identidad respectiva. Hemos realizado una realimentación de la definición de equivalencia homotópica pues hemos de necesitarlos para encontrar la equivalencia entre Γ^+X y SP_hX . En efecto, la inversa homotópica de π , viene a ser ρ , donde $\rho_n = \rho_n^n$, y las homotopías que transportan las composiciones de π y ρ con identidades, es decir F y G , serán definidas mediante $F_n = F_n^n$ y $G_n = G_n^n$. \square

A consecuencia de esta última proposición, tenemos $SP_h^\wedge(X) \simeq \Omega B\Gamma^+X \simeq \Gamma X$.

Apéndice A

APLICACIONES

En este pequeño apartado trataremos de comentar la importancia de los conceptos estudiados. Lo más importante se puede resumir en un teorema en el que aportaron en su momento los más renombrados matemáticos trabajando en teoría de homotopía y que hoy en día se sigue estudiando, bien para demostrarlo mediante nuevas técnicas y en un contexto más sofisticado (ver [34, 35]), o bien para aplicarlo en otros subcampos de la topología algebraica. Nos referimos al teorema de **Barratt-Priddy-Quillen-Segal**, el cual declara que son equivalentes:

- (a) el espacio loop infinito $\Omega^\infty S^\infty$
- (b) $\mathbb{Z} \times B\Sigma_\infty^+$, donde Σ_∞ es el colímite (unión disjunta) de los grupos de simétricos Σ_n
- (c) el grupo de completión de $B(\bigsqcup_n \Sigma_n)$

Detallando un poco, notemos que $\Omega^\infty S^\infty = \lim_n \Omega^n S^n = \Omega^\infty \Sigma^\infty S^0$, pero sabemos que este último es equivalente a ΓS^0 , pero $\Gamma^+ S^0 = \bigsqcup_{n \geq 0} B\Sigma_n$, cuyo grupo de completión (ΓS^0) resulta ser equivalente a $\mathbb{Z} \times B\Sigma_\infty^+$, donde el símbolo '+' representa la *contrucción plus* de Quillen (ver [36]), la cual simplifica los grupos fundamentales, conservando los grupos de homología.

Dejando modestias aparte, ya hicimos el trabajo pesado de la equivalencia entre (a) y (b); la equivalencia entre (b) y (c) en realidad trabaja mejor en el contexto más topológico (tomando el espacio clasificante como la realización del nervio), puede encontrarse en [37] como un caso particular del teorema de Quillen que bajo ciertas hipótesis, una categoría monoidal simétrica S , el espacio clasificante de una categoría, denotada $S^{-1}S$, viene a ser un grupo de completión de BS .

La razón de ser de la homotopía estable parte de la identificación

$$\pi_i(\Omega^\infty S^\infty) \cong \lim_n \pi_{n+i}(S^n) = \pi_i^s$$

donde π_i^s es el i -ésimo grupo de homotopía estable de las esferas, objeto de estudio fundamental en toda la topología (incluyendo topología diferencial, ver [18]), a tal punto que es considerado uno de sus problemas centrales, de modo que quien encuentre la manera de calcularlo para todo i , sería un firme candidato de llevarse la Medalla Fields, y si la meta es demasiado ambiciosa para la actualidad, incluso un avance importante en el cálculo de los π_i^s sería suficiente. Jean Pierre Serre, uno de los más grandes matemáticos de nuestra era, fue laureado con esta máxima distinción al haber logrado un importante avance, haciendo uso de las sucesiones espectrales.

Bibliografía

- [1] MG Barratt and Peter J Eccles. Γ +structures—i: a free group functor for stable homotopy theory. *Topology*, 13(1):25–45, 1974.
- [2] Christian Schlichtkrull. The homotopy infinite symmetric product represents stable homotopy. *Algebraic & Geometric Topology*, 7(4):1963–1977, 2007.
- [3] Paul G Goerss and John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [4] J Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*, volume 11. University of Chicago Press, 1992.
- [5] Albrecht Dold and René Thom. Quasifaserungen und unendliche symmetrische produkte. *Annals of Mathematics*, pages 239–281, 1958.
- [6] MC McCord. Classifying spaces and infinite symmetric products. *Transactions of the American Mathematical Society*, 146:273–298, 1969.
- [7] Lauren Bandklayder. A proof of the Dold-Thom theorem via factorization homology. *arXiv preprint arXiv:1703.09170*, 2017.
- [8] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician* (graduate texts in mathematics). 1998.
- [9] Saunders MacLane. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] JF Jardine. The homotopical foundations of algebraic K-theory. *Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987)*, 83:57–82, 1989.
- [11] Dusa McDuff and Graeme Segal. Homology fibrations and the “group-completion” theorem. *Inventiones mathematicae*, 31(3):279–284, 1976.
- [12] Bruno Stonek. *Funtores adjuntos y teoremas de adjunción*. 2012.
- [13] Marina Christina Lehner. “All concepts are Kan extensions”: Kan extensions as the most universal of the universal constructions. Bachelor thesis, Harvard College, 2014.

-
- [14] Edwin H Spanier. *Algebraic topology*, volume 55. Springer Science & Business Media, 1994.
- [15] Peter J Hilton and Urs Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] Peter Gabriel and Michel Zisman. Calculus of fractions and homotopy theory, volume 35 of *ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete*. Springer-Verlag, 12:13–14, 1967.
- [17] Jie Wu. Simplicial objects and homotopy groups. *Braids: introductory lectures on braids, configurations and their applications*, pages 31–182, 2009.
- [18] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. 2002.
- [19] Marcelo Aguilar, Samuel Gitler, and Carlos Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [20] Marc Stephan. *Kan spectra, group spectra and twisting structures*. PhD thesis, École polytechnique fédérale de Lausanne, Institute of Mathematics, Laboratory for Topology and Neuroscience, 2015.
- [21] Aldridge Knight Bousfield and Daniel Marinus Kan. *Homotopy limits, completions and localizations*, volume 304. Springer Science & Business Media, 1972.
- [22] Emily Riehl. *Categorical homotopy theory*. Number 24. Cambridge University Press, 2014.
- [23] Philip S Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Number 99. American Mathematical Soc., 2009.
- [24] Daniel M Kan. On css complexes. *American Journal of Mathematics*, 79(3):449–476, 1957.
- [25] Bertrand Guillou. Kan’s Ex^∞ functor. 2006.
- [26] Raksit Arpon. The Dold-Kan correspondence, 2015.
- [27] Ulrike Tillmann. On the homotopy of the stable mapping class group. *Inventiones mathematicae*, 130(2):257–275, 1997.
- [28] Wolfgang Pitsch, Jérôme Scherer, et al. Homology fibrations and group completion-revisited. *Homology, Homotopy and Applications*, 6(1):153–166, 2004.
- [29] Kristian J Moi. *Equivariant homotopy theory and K-theory of exact categories with duality*. PhD thesis, University of Copenhagen, Faculty of Science, Department of Mathematical Sciences, Centre for Symmetry and Deformation, 2014.

-
- [30] John Frank Adams and John Frank Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. University of Chicago press, 1995.
- [31] Jeffrey Henderson Smith. Simplicial group models for $nsnx$. *Israel Journal of Mathematics*, 66(1-3):330–350, 1989.
- [32] Daniel Quillen. On the group completion of a simplicial monoid. *preprint*, 1971.
- [33] Paolo Masulli. Equivariant homotopy: KR-theory. Master's thesis, University of Copenhagen, 2011.
- [34] J. F. Jardine. The Barratt-Priddy-Quillen theorem, 2009.
- [35] Pedro Boavida de Brito and Ieke Moerdijk. Dendroidal spaces, Γ -spaces and the special Barratt-Priddy-Quillen theorem. *arXiv preprint arXiv:1701.06459*, 2017.
- [36] Charles A Weibel. *The K-book*, volume 145. American Mathematical Society Providence, RI, 2013.
- [37] Daniel Grayson. Higher Algebraic K-theory: II. *Algebraic K-theory*, pages 217–240, 1976.