

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**MEDIDA DE CICLOS. APLICACIONES EN GRAFOS  
Y EN TEORÍA DEL CAMPO LIBRE GAUSSIANO**

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO  
EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADA POR:  
**GIANCARLOS ALBERTO OVIEDO VALVERDE**

ASESOR:  
Dr. GONZALO PANIZO GARCÍA

LIMA - PERÚ  
2018

# Agradecimientos

Agradezco al CONCYTEC por el financiamiento, a mi asesor por su orientación y a mi familia por todo su apoyo.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>1. Medida de ciclos</b>	<b>2</b>
1.1. Medida de ciclos . . . . .	2
1.2. Una aplicación en teoría de grafos: Árboles de expansión	11
<b>2. Campo Libre Gaussiano Discreto</b>	<b>21</b>
<b>3. Campos de ocupación y el DGFF</b>	<b>32</b>
3.1. Preliminares . . . . .	32
3.2. Campo de ocupación discreto	36
3.3. Campo de ocupación continuo	37
3.4. Campo de ciclos triviales . . .	44
3.5. Relación entre el campo de ocupación y el DGFF	45
<b>A. Vector aleatorio normal</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

# Índice de figuras

1.1.	Representación gráfica de un ciclo en $A \subset \mathbb{Z}^2$ . . . . .	3
1.2.	Representación gráfica de un ciclo sin raíz. . . . .	8
1.3.	Representación gráfica de un camino no autoevitable (con ciclos) en $A \subset \mathbb{Z}^2$ . . . . .	12
1.4.	Representación gráfica de un camino autoevitable (sin ciclos) en $A \subset \mathbb{Z}^2$ . . . . .	13
1.5.	Eliminación de ciclos. Los ejes de color rojo son eliminados por el algoritmo. . . . .	13
1.6.	Tres árboles de expansión sobre un mismo conjunto de estados. . . . .	14
2.1.	Ejes de frontera y ejes internos en el grafo. . . . .	22

# Resumen

El objetivo de esta tesis es dar una introducción al concepto de medidas de ciclos y al concepto de Campo Libre Gaussiano Discreto (DGFF por sus siglas en inglés) mostrando los principales teoremas y algunas relaciones interesantes entre ambos conceptos.

En la Introducción mencionamos brevemente la importancia del tema de medidas de ciclos en la actualidad.

En la primera parte del capítulo 1 se define la medida de ciclos y se prueban los principales teoremas sobre este concepto. En la segunda parte de este capítulo se presenta una aplicación en teoría de grafos, dicha aplicación consiste en una demostración moderna al teorema de Kirchoff, el cual nos brinda una expresión para la cantidad de árboles de expansión que se pueden formar en un grafo finito y conexo.

En los últimos dos capítulos se introduce el concepto de campo libre gaussiano discreto y se relaciona con la medida de ciclos. En el capítulo 2 definimos el campo libre gaussiano discreto, mostramos los principales teoremas y una primera relación con la medida de ciclos mediante la función de partición.

Finalmente, en el capítulo 3 se presenta una relación más elaborada entre el campo libre gaussiano discreto y la medida de ciclos mediante la construcción de un vector aleatorio conocido como “campo de ocupación continuo” el cual resulta tener una distribución igual al cuadrado del campo libre gaussiano discreto.

# Abstract

The objective of this thesis is to give an introduction to the concept of measures of cycles and to the concept of Discrete Gaussian Free Field (DGFF) showing the main theorems and some interesting relationships between both concepts.

In the Introduction we briefly mentioned the importance of the topic of measures of cycles at present.

In the first part of chapter 1 the measurement of cycles is defined and the main theorems on this concept are shown. In the second part of this chapter an application in graph theory is presented, this application consists of a modern proof of Kirchoff's theorem, which gives us an expression for the amount of expansion trees that can be formed in a finite graph and related.

In the last two chapters the concept of discrete Gaussian free field is introduced and is related to the measurement of cycles. In the chapter 2 we define the discrete Gaussian free field, we show the main theorems and a first relation with the measurement of cycles by means of the partition function.

Finally, in chapter 3, a more elaborate relation between the discrete Gaussian free field and the measure of cycles is presented by the construction of a random vector known as "continuous occupation field" which results in a distribution equal to the square of the discrete gaussian free field.

# Introducción

En los últimos años las medidas de ciclos han tomado importancia en el análisis de caminos aleatorios y campos que surgen de caminos aleatorios. Estas medidas aparecen por primera vez en trabajos relacionados con la teoría cuántica de campos a finales de los años 60 y hoy en día han cobrado importancia dentro del estudio de la evolución de Schramm-Loewner, también conocida como evolución estocástica de Loewner o SLE.

El objetivo de esta tesis es dar una introducción a las medidas de ciclos en tiempo discreto y discutir algunas de sus aplicaciones: en primer lugar el cálculo del número de árboles de expansión en un grafo finito y conexo y en segundo lugar una identidad distribucional entre el campo libre gaussiano discreto y cierto vector aleatorio construido en base a la medida de ciclos.

# Capítulo 1

## Medida de ciclos

En este capítulo damos una introducción a las medidas de ciclos discretos mostrando las definiciones y propiedades fundamentales, en particular mostramos una caracterización de la matriz de Green en base a caminos aleatorios y hallamos la medida del conjunto de ciclos. En la última sección como aplicación se da una prueba, en base a medida de ciclos, del teorema de Kirchhoff que nos habla sobre el número de árboles de expansión que pueden formarse a partir de un grafo dado. Para esto se describe previamente el algoritmo de Wilson el cual genera uniformemente un árbol de expansión sobre un grafo dado.

### 1.1. Medida de ciclos

Consideremos un conjunto finito  $A \subset \mathbb{Z}^d$  al cual llamaremos “conjunto de estados”. Un camino en  $A$  es simplemente un vector finito cuyas componentes son elementos de  $A$ , por ejemplo:

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

con  $\omega_i \in A$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$  es un camino en  $A$  con longitud  $n$ , esto se denota por  $|\omega| = n$  (ver figura 1.1). Un ciclo en  $A$  es un camino en el cual la última coordenada es igual a la primera, es decir, el camino regresa a su punto de origen. Los caminos de longitud cero se conocen como ciclos triviales, estos son vectores con un solo elemento, por ejemplo:

$$\omega = (\omega_0).$$



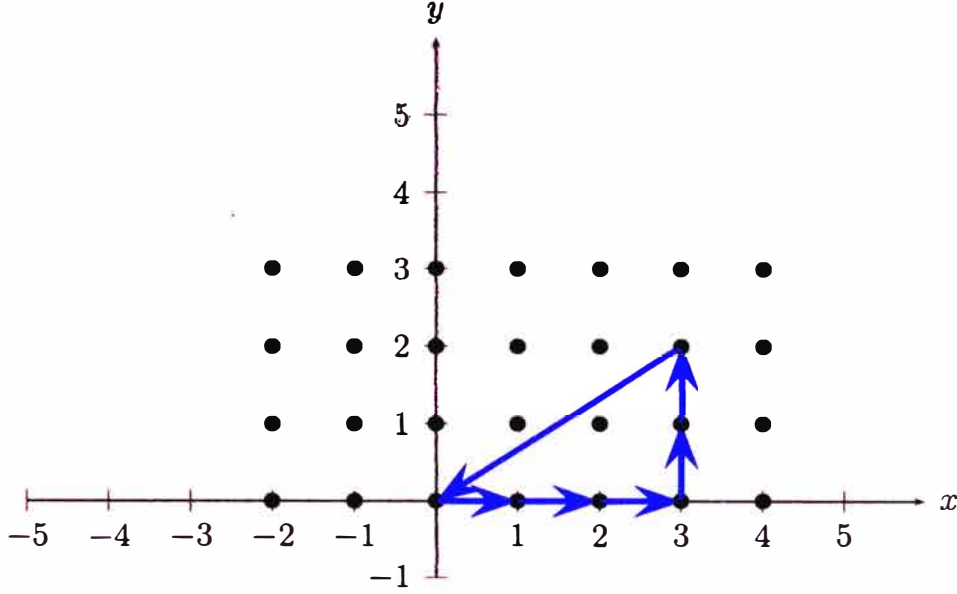


Figura 1.1: Representación gráfica de un ciclo en  $A \subset \mathbb{Z}^2$ .

Si  $\omega$  es un ciclo en  $A$ , denotaremos por  $d(\omega)$  al número de veces que el ciclo regresa a su punto de origen, es decir,

$$d(\omega) := \#\{j : 1 \leq j \leq |\omega|, \omega_j = \omega_0\}.$$

El conjunto de todos los caminos en el espacio de estados  $A$  será denotado por  $\mathcal{K}(A)$ , en este conjunto definiremos una función en base a una matriz  $Q$  que está indizada por los elementos del espacio de estados  $A$  y será conocida como la “matriz de pesos”.

**Definición 1.1.** *El peso de un camino,  $\omega \in \mathcal{K}(A)$ , respecto a la matriz de pesos  $Q$  está dado por:*

$$Q(\omega) := \begin{cases} \prod_{i=1}^{|\omega|} Q(\omega_{j-1}, \omega_j) & \text{si } |\omega| \geq 1 \\ 1 & \text{si } |\omega| = 0 \end{cases}$$

Es importante observar que cuando  $Q$  es una matriz de transición, el peso del camino  $\omega$  representa la probabilidad que un camino aleatorio  $Z$ , con matriz de transición  $Q$  y comenzando desde  $\omega_0$ , recorra el camino  $\omega$ .

Ahora definiremos una medida en el espacio de ciclos en  $A$ . Notemos que este espacio es numerable ya que estamos asumiendo a lo largo de esta tesis que el espacio de estados  $A$  es finito.

**Definición 1.2.** *La medida  $m$  de un ciclo  $\omega$  está dada por:*

$$m(\omega) := \begin{cases} \frac{Q(\omega)}{|\omega|} & \text{si } |\omega| \geq 1 \\ 0 & \text{si } |\omega| = 0 \end{cases}$$

Ahora ya tenemos definida una medida en el espacio de los ciclos en  $A$ . Otro elemento importante en la teoría es la matriz o función de Green la cual denotamos por  $G$  y la definimos de la siguiente forma:

$$G = (I - Q)^{-1}.$$

La proposición 1.1 y el corolario 1.1 a continuación intentan dar una interpretación de la matriz de Green por medio de caminos aleatorios. Observemos que para que la matriz de Green esté bien definida, es necesario y suficiente que la matriz de pesos  $Q$  tenga todos sus autovalores menores que la unidad, en particular,  $Q$  podría ser una matriz de transición sub-Markov, es decir, la suma de los elementos de cada fila suman una cantidad menor o igual a uno y además existe una fila cuyos elementos suman una cantidad estrictamente menor que uno. A lo largo de esta tesis asumiremos que la matriz de pesos  $Q$  es una matriz sub-markoviana.

La siguiente proposición nos brinda otra forma de definir la matriz de Green, en ella estamos denotando por  $\mathcal{K}_{x,y}(A)$  al conjunto de todos los caminos en  $A$  que comienzan en el estado  $x$  y terminan en el estado  $y$ .

**Proposición 1.1.** *Sea  $A$  un conjunto finito de estados,  $Q$  una matriz de pesos sub-markoviana y  $G$  la matriz de Green asociada a  $Q$ . Entonces se cumple:*

$$G(x, y) = \sum_{\omega \in \mathcal{K}_{x,y}(A)} Q(\omega).$$

*Demostración.* Como  $Q$  es una matriz sub-Markov, entonces tiene todos sus autovalores menores que uno y esto a su vez implica:

$$G := (I - Q)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} Q^i. \quad (1.1)$$

Además, por inducción, se puede probar que para toda  $i \in \mathbb{N}$  se cumple:

$$Q^i(x, y) = \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}_{x,y}(A) \\ |\omega|=i}} Q(\omega). \quad (1.2)$$

En efecto, veamos el paso inductivo:

$$\begin{aligned}
Q^{i+1}(x, y) &= (Q \cdot Q^i)(x, y) \\
&= \sum_{z \in A} Q(x, z) Q^i(z, y) \\
&= \sum_{z \in A} \left[ Q(x, z) \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}_{z, y}(A) \\ |\omega| = i}} Q(\omega) \right] \\
&= \sum_{\substack{z \in A \\ \omega \in \mathcal{K}_{z, y}(A) \\ |\omega| = i}} Q(x, z) Q(\omega).
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado la hipótesis inductiva en la tercera igualdad y para establecer la cuarta igualdad debemos observar que todo camino  $\omega \in \mathcal{K}_{x, y}(A)$  con  $|\omega| = i + 1$  puede descomponerse como la concatenación de un camino  $(x, z)$  y un camino  $\omega' \in \mathcal{K}_{z, y}(A)$  con  $|\omega'| = i$ .

Con esto queda probada la inducción. Finalmente reemplazando la ecuación 1.2 en la ecuación 1.1 se llega a lo pedido:

$$G(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}_{x, y}(A) \\ |\omega| = i}} Q(\omega) = \sum_{\omega \in \mathcal{K}_{x, y}(A)} Q(\omega)$$

□

En palabras, esta proposición nos dice que el elemento de la matriz de Green  $G$  correspondiente a la posición  $(x, y)$  es igual a la suma de los pesos de los caminos en  $A$  que comienzan en el estado  $x$  y terminan en el estado  $y$ . A partir de esta proposición es sencillo obtener otra caracterización de la matriz de Green mediante caminos aleatorios la cual enunciamos en el siguiente corolario donde denotamos por  $\tau$  al tiempo (aleatorio) del primer arribo a  $A^c$ .

**Corolario 1.1.** *Manteniendo las hipótesis de la proposición anterior y considerando un camino aleatorio  $Z$  en  $\mathbb{Z}^d$  cuya matriz de transición restringida a  $A$  es  $Q$ , se cumple que si  $x$  e  $y$  son estados en  $A$ , entonces  $G(x, y)$  es igual al*

número esperado de visitas al estado  $y$  cuando el camino aleatorio comienza en el estado  $x$  y antes de salir de  $A$ , es decir:

$$G(x, y) = \mathbb{E}_x \left( \sum_{i=0}^{\tau-1} 1_{\{Z_i=y\}} \right).$$

*Demostración.* En la prueba de la proposición anterior se vio que:

$$G(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}_{x,y}(A) \\ |\omega|=i}} Q(\omega).$$

La suma interna representa la probabilidad que el camino aleatorio vaya del estado  $x$  al estado  $y$  en  $i$  pasos y sin salir de  $A$ , es decir:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(Z_i = y; i < \tau) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(1_{\{Z_i=y; i < \tau\}}). \end{aligned}$$

Finalmente, por la linealidad de la esperanza se obtiene el resultado deseado.  $\square$

Ahora nos proponemos a encontrar la medida total del espacio de ciclos. El conjunto de todos los ciclos no triviales en  $A$  será denotado por  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A)$  y la exponencial de la medida del conjunto de todos los ciclos en  $A$  será denotada por:

$$F(A) := \exp \sum_{\omega \in \mathcal{O}} m(\omega).$$

En general, si  $V \subset A$ , denotamos la exponencial de la medida del conjunto de todos los ciclos en  $A$  que tienen al menos un vértice en  $V$  por:

$$F_V(A) := \exp \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{O} \\ \omega \cap V \neq \emptyset}} m(\omega).$$

Donde la expresión  $\omega \cap V$  representa el conjunto de estados del ciclo  $\omega$  que están en  $V$ . Cuando el conjunto  $V$  es unitario, es decir  $V = \{x\}$ , se escribe  $F_x(A)$  en lugar de  $F_{\{x\}}(A)$ .

En primer lugar notemos que si particionamos el conjunto de todos los ciclos en  $A$  de manera adecuada, el siguiente lema se deduce fácilmente:

**Lema 1.1.** Si  $A = \{y_1, \dots, y_k\}$ , entonces se cumple:

$$F(A) = F_{y_1}(A)F_{y_2}(A_1) \cdots F_{y_k}(A_{k-1})$$

donde  $A_i = A \setminus \{y_1, \dots, y_i\}$ . De forma más general, si  $V = \{y_1, \dots, y_j\} \subset A$  entonces se cumple:

$$F_V(A) = F_{y_1}(A)F_{y_2}(A_1) \cdots F_{y_j}(A_{j-1}).$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{L}(A)$  el conjunto de todos los ciclos en  $A$ , notemos que el conjunto de todos los ciclos contenidos en  $A$  que pasan por algún vértice de  $V$  puede ser particionado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{\omega \in \mathcal{L}(A) : \omega \cap V \neq \emptyset\} &= \{\omega \in \mathcal{L}(A) : \omega \cap y_1 \neq \emptyset\} \\ &\quad \uplus \{\omega \in \mathcal{L}(A_1) : \omega \cap y_2 \neq \emptyset\} \\ &\quad \uplus \cdots \uplus \{\omega \in \mathcal{L}(A_{j-1}) : \omega \cap y_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Aplicando la aditividad de la medida  $m$  en el conjunto anterior y finalmente tomando exponencial se obtiene lo pedido.  $\square$

Resulta que en el caso que estamos asumiendo, es decir, cuando la matriz de pesos  $Q$  tiene todos sus autovalores con módulo menor que la unidad (en particular, cuando  $Q$  es una matriz de transición sub-Markov), la medida de ciclos asociada es finita. Ahora nos proponemos demostrar que la medida del conjunto de todos los ciclos es igual al logaritmo natural del determinante de la matriz de Green. Haremos esto usando una función  $f = f_A$  definida para todo elemento  $x$  en el conjunto de estados  $A$  según:

$$f_A(x) := \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0 = x \\ d(\omega) = 1}} Q(\omega).$$

Es decir, el valor de esta función en el estado  $x \in A$  es la suma de los pesos de todos los ciclos en  $A$  que comienzan en  $x$  y que regresan al estado inicial exactamente una vez. Esto también es igual a la probabilidad que el camino aleatorio en  $\mathbb{Z}^d$  cuya matriz de transición restringida a  $A$  es  $Q$ , al comenzar desde  $x$ , regrese a  $x$  antes de salir de  $A$ .

Necesitamos también hacer uso de una relación de equivalencia en el conjunto de todos los ciclos en  $A$  la cual se puede definir de la siguiente manera: dos ciclos  $\omega$  y  $\omega'$  están relacionados si y solo si existe un  $j \in \mathbb{N}$  con  $0 \leq j \leq |\omega| = |\omega'|$  tal que

$$\omega'_i = \omega_{(i+j) \bmod |\omega|}$$

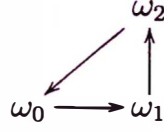


Figura 1.2: Representación gráfica de un ciclo sin raíz.

para todo  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq i \leq |\omega| = |\omega'|$ .

En otras palabras, si  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k)$  es un ciclo en  $A$ , entonces los ciclos relacionados con  $\omega$  son de la forma  $\omega' = (\omega_j, \omega_{j+1}, \dots, \omega_k, \omega_1, \dots, \omega_j)$ . Las clases de equivalencia inducidas por esta relación se denotarán por  $\bar{\omega}$  y en la bibliografía son conocidas como “unrooted loops”. Por ejemplo los ciclos  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_0)$ ,  $(\omega_1, \omega_2, \omega_0, \omega_1)$  y  $(\omega_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2)$  son representantes de un mismo ciclo sin raíz (ver figura 1.2). El número de ciclos que pertenecen a una misma clase de equivalencia  $\bar{\omega}$  se denota por:

$$k(\bar{\omega}) := \#\{\omega : \omega \in \bar{\omega}\}.$$

Notemos que todos los ciclos en una misma clase  $\bar{\omega}$  tienen la misma longitud y el mismo peso, luego podemos definir la longitud y el peso de un ciclo sin raíz (clase de equivalencia de ciclos) por:

$$\begin{aligned} |\bar{\omega}| &:= |\omega| \\ Q(\bar{\omega}) &:= Q(\omega) \end{aligned}$$

donde  $\omega$  es cualquier elemento de la clase  $\bar{\omega}$ . Esto permite definir la medida de un ciclo sin raíz (clase de equivalencia)  $\bar{\omega}$  de la siguiente manera:

$$\bar{m}(\bar{\omega}) := k(\bar{\omega})m(\omega)$$

donde nuevamente  $\omega$  es cualquier representante de la clase  $\bar{\omega}$  ya que todos estos representantes tienen la misma medida.

Para hallar la medida del conjunto de todos los ciclos, previamente necesitamos la siguiente proposición que nos da la medida del conjunto de ciclos que pasan por un vértice  $x \in A$ .

**Proposición 1.2.** *Sea  $x \in A \subset \mathbb{Z}^d$  entonces, se cumple lo siguiente:*

$$F_x(A) = G(x, x)$$

*Demostración.* Primero notemos que todo ciclo  $\omega \in \mathcal{L}(A)$  con raíz  $\omega_0 = x$  y que regresa a esta raíz  $d(\omega) = j$  veces, se puede expresar como:

$$\omega = \omega^1 \oplus \dots \oplus \omega^j$$

donde el símbolo  $\oplus$  denota concatenación de dos ciclos y  $\omega^i \in \mathcal{L}(A)$ ,  $\omega_0^i = x$  y  $d(\omega^i) = 1$  para  $i \in \{1, \dots, j\}$ . Es decir, cada componente de esta descomposición es un ciclo en  $A$ , con raíz en  $x$  y que regresa a su raíz una sola vez. Por ejemplo para  $\omega = (x, a, b, c, d, x, a, x, a, b, x)$  tendríamos:

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &= (x, a, b, c, d, x) \\ \omega^{(2)} &= (x, a, x) \\ \omega^{(3)} &= (x, a, b, x).\end{aligned}$$

En esta descomposición se cumple obviamente que el peso del ciclo total es igual al producto de los pesos de sus componentes, es decir:

$$Q(\omega) = \prod_{i=1}^j Q(\omega^i).$$

Esta descomposición nos permite obtener la siguiente igualdad:

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0 = x \\ d(\omega) = j}} Q(\omega) = \sum_{\substack{\omega^i \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0^i = x \\ d(\omega^i) = 1}} Q(\omega^1) \cdots Q(\omega^j) = \left[ \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0 = x \\ d(\omega) = 1}} Q(\omega) \right]^j = [f_A(x)]^j.$$

Por otro lado, usando la proposición 1.1 tenemos:

$$\begin{aligned}G(x, x) &:= \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0 = x}} Q(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0 = x \\ d(\omega) = j}} Q(\omega) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} [f_A(x)]^j = \frac{1}{1 - f_A(x)}.\end{aligned}$$

Finalmente, si denotamos por  $\overline{\mathcal{L}}^x(A)$  al conjunto de ciclos sin raíz (clases de equivalencia) en  $A$  que pasan por  $x$  y además denotamos por  $d_x(\overline{\omega})$  el

número de veces que un representante de  $\bar{\omega}$  con raíz en  $x$  retorna a  $x$ , es decir  $d_x(\bar{\omega}) = d(\omega)$  donde  $\omega \in \bar{\omega}$  con  $\omega_0 = x$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
\ln G(x, x) &= -\ln[1 - f_A(x)] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[f_A(x)]^j}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0 = x \\ d(\omega) = j}} Q(\omega) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0 = x \\ d(\omega) = j}} \frac{Q(\omega)}{d(\omega)} \\
&= \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega_0 = x \\ d(\omega) \geq 1}} \frac{Q(\omega)}{d(\omega)} \\
&= \sum_{\substack{\bar{\omega} \in \bar{\mathcal{L}}^x(A) \\ |\bar{\omega}| \geq 1}} \sum_{\substack{\omega \in \bar{\omega} \\ \omega_0 = x}} \frac{Q(\omega)}{d(\omega)}.
\end{aligned}$$

El número de representantes de la clase  $\bar{\omega} \in \bar{\mathcal{L}}^x$  con raíz en  $x$  es  $d_x(\bar{\omega}) \frac{k(\bar{\omega})}{|\bar{\omega}|}$ . Luego, la última sumatoria interna es igual a:

$$\frac{k(\bar{\omega})Q(\bar{\omega})}{|\bar{\omega}|} = \bar{m}(\bar{\omega}).$$

Por lo tanto se sigue que:

$$\begin{aligned}
\ln G(x, x) &= \sum_{\bar{\omega} \in \bar{\mathcal{L}}^x(A)} \bar{m}(\bar{\omega}) \\
&= \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A) \\ \omega \cap \{x\} \neq \emptyset}} m(\omega) \\
&= \ln F_x(A)
\end{aligned}$$

□



Para concluir esta sección probamos que cuando la matriz de pesos  $Q$  es una matriz de transición sub-Markov, entonces la medida de ciclos es una medida finita. La siguiente proposición además expresa esta medida como un determinante, esto será muy útil en la aplicación de la sección posterior.

**Proposición 1.3.** *Sea  $A$  un conjunto finito de estados y la matriz de pesos sub-markoviana  $Q$ . Entonces la medida del espacio de ciclos en  $A$  está dada por:*

$$F(A) = \det G.$$

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $\#(A) = n$ . Para  $n = 1$ , tenemos que  $A = \{x\}$  y  $Q = [r]$  es una matriz  $1 \times 1$ . Los ciclos en  $A$  son de la forma  $\omega = (x, x, \dots, x)$  entonces  $F(A) = \exp[\sum_{i=1}^{\infty} r^n/n] = 1/(1 - r) = 1/\det(I - Q)$ .

Para hacer el paso inductivo suponemos  $n > 1$  y  $x \in A$ , entonces por definición de la matriz de Green y por la fórmula de la inversa por cofactores tenemos:

$$\begin{aligned} G(x, x) &:= [(I - Q)^{-1}](x, x) \\ &= \frac{\det(I - Q_x)}{\det(I - Q)} \end{aligned}$$

donde  $Q_x$  es la matriz que resulta de quitar la fila y columna de  $Q$  correspondiente a  $x$ . Finalmente tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} F(A) &= F(A \setminus \{x\})F_x(A) \\ &= F(A \setminus \{x\})G(x, x) \\ &= \frac{1 \cdot \det(I - Q_x)}{\det(I - Q_x) \det(I - Q)} \\ &= \frac{1}{\det(I - Q)}. \end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad se ha hecho uso de la proposición 1.2 y en la tercera igualdad se usa la hipótesis inductiva en el primer factor.  $\square$

## 1.2. Una aplicación en teoría de grafos: Árboles de expansión

En esta sección usaremos la medida en ciclos definida anteriormente para hallar el número de árboles de expansión sobre un grafo finito y conexo.

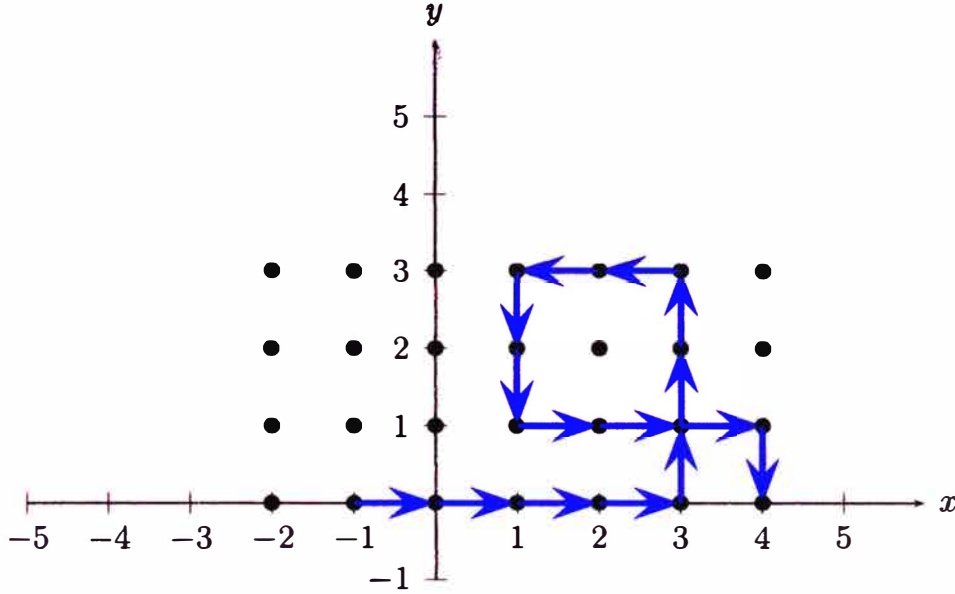


Figura 1.3: Representación gráfica de un camino no autoevitable (con ciclos) en  $A \subset \mathbb{Z}^2$ .

Como veremos más adelante, resulta que los árboles están compuestos por ramas, que son caminos que no se cruzan a si mismos y por lo tanto no forman ciclos. Los caminos de este tipo serán denominados “caminos autoevitables”, que generalmente denotaremos por la letra griega  $\eta$ .

**Definición 1.3.** *Un camino  $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_n)$  es autoevitable si  $\eta_j \neq \eta_k$  para toda  $0 \leq j < k \leq n$  (ver figuras 1.3 y 1.4).*

Ahora describiremos un algoritmo sencillo que permite obtener caminos autoevitables a partir de un camino cualquiera. Si  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n)$  es un camino, entonces  $\eta = \text{LE}(\omega)$  denotará el camino autoevitable que resulta de eliminar los ciclos (Loop Erasure) en  $\omega$  según el algoritmo que se ilustra en la figura 1.5 y que se describe a continuación:

- Sea  $\delta_0 := \text{máx}\{j \leq n : \omega_j = \omega_0\}$ , definimos  $\eta_0 := \omega_{\delta_0} = \omega_0$ .
- Suponiendo que tenemos  $\delta_i < n$ . Sea  $\delta_{i+1} := \text{máx}\{j \leq n : \omega_j = \omega_{\delta_{i+1}}\}$ , definimos  $\eta_{i+1} := \omega_{\delta_{i+1}} = \omega_{\delta_{i+1}}$ .
- El algoritmo finaliza cuando tenemos  $\eta_{\delta_i} = \omega_n$ .

**Definición 1.4.** *Se denomina árbol de expansión o árbol generador de un grafo finito conexo  $\mathcal{G} = (A, E)$  a un subgrafo de  $\mathcal{G}$  cuyo conjunto de vértices es  $A$  y cuyo conjunto de ejes es un subconjunto de  $E$  que no forma ciclos (ver Figura 1.6).*

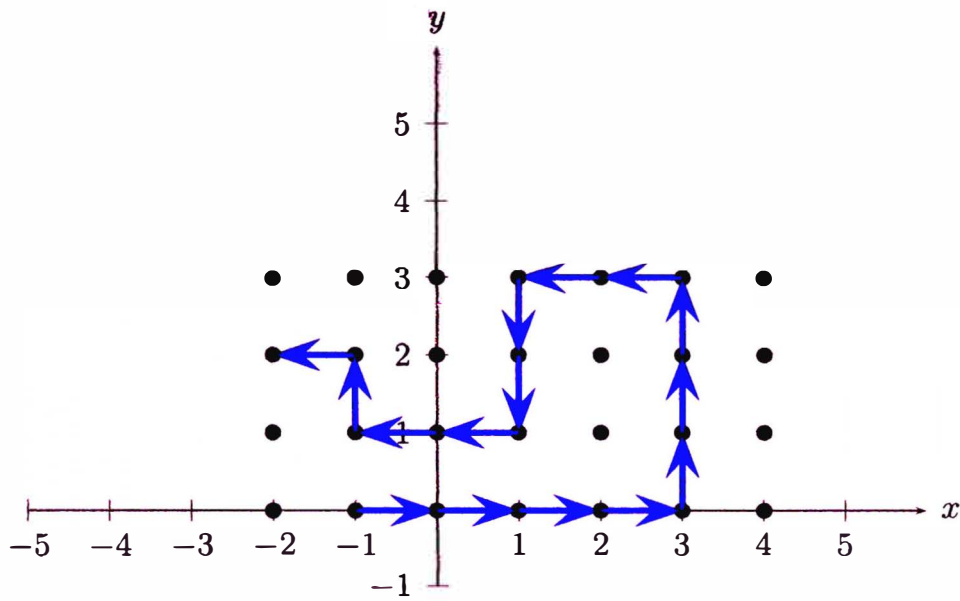


Figura 1.4: Representación gráfica de un camino autoevitable (sin ciclos) en  $A \subset \mathbb{Z}^2$ .

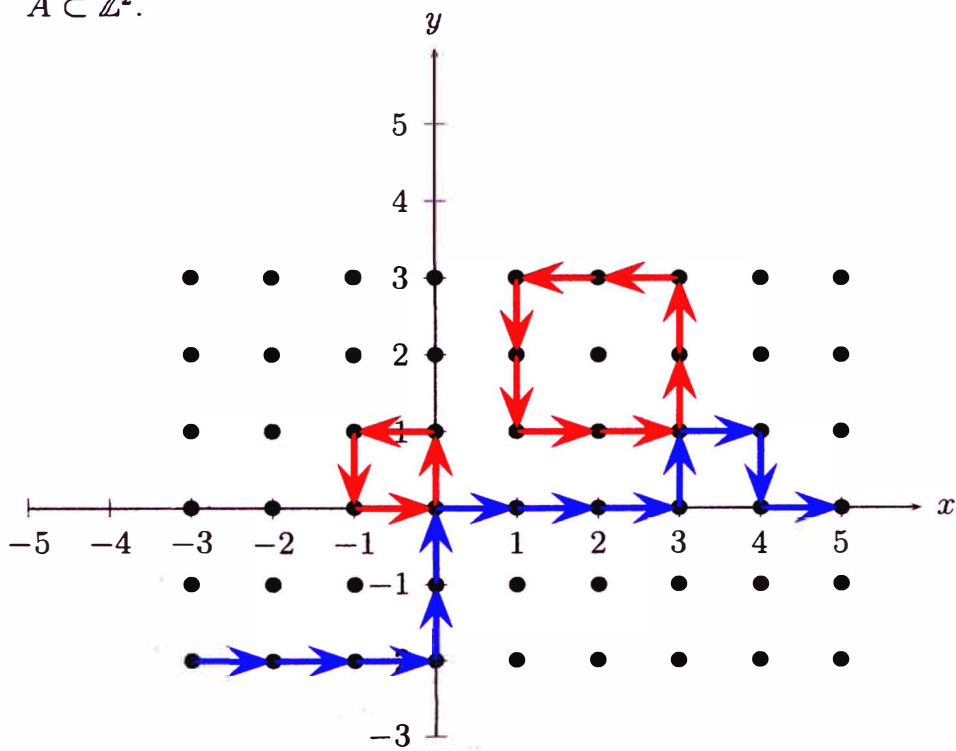


Figura 1.5: Eliminación de ciclos. Los ejes de color rojo son eliminados por el algoritmo.

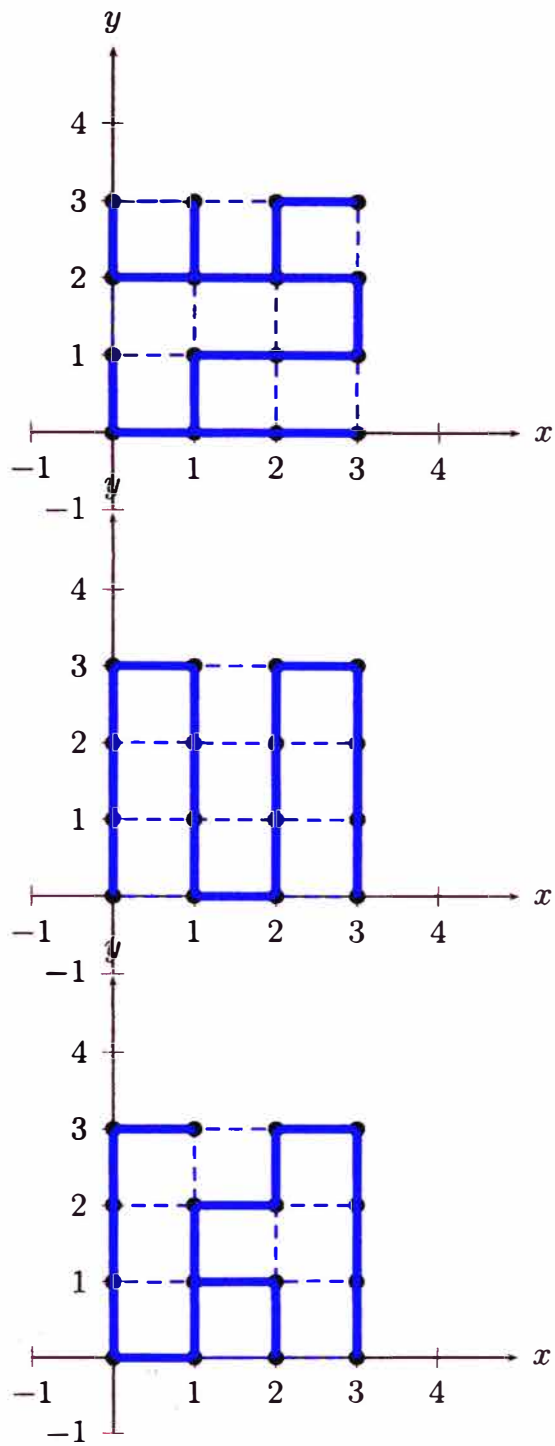


Figura 1.6: Tres árboles de expansión sobre un mismo conjunto de estados.

Los caminos autoevitables y el algoritmo de eliminación de ciclos que acabamos de describir son la base del algoritmo de Wilson, el cual permite obtener un árbol de expansión en un grafo finito conexo con vértices  $A \subset \mathbb{Z}^d$  al cual dotamos de un orden arbitrario  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . El algoritmo se describe a continuación:

- Tomamos el camino aleatorio simple en el grafo  $\mathcal{G} = (A, E)$  que empieza en  $x_1$  y detenido en la primera llegada a  $x_0$ ; denotamos el loop erasure de este camino por  $\eta^1$  y definimos  $\eta := \eta^1$ .
- Suponemos que tenemos  $\eta = \eta^1 \oplus \dots \oplus \eta^i$ . Si  $\eta$  es un árbol de expansión, finaliza el algoritmo, sino denotamos por  $\delta_{i+1}$  al menor entero no negativo tal que  $x_{\delta_{i+1}} \notin \eta$  y por  $\eta^{i+1}$  al loop erasure del camino aleatorio simple en  $\mathcal{G} = (A, E)$  comenzando en  $x_{\delta_{i+1}}$  y detenido en el primer arribo a  $\eta$ . Actualizamos  $\eta \leftarrow \eta \oplus \eta^{i+1}$ .

Nuestro objetivo ahora es probar que el algoritmo de Wilson genera un árbol de expansión aleatorio con distribución uniforme, es decir, cada árbol de expansión en el grafo  $\mathcal{G}$  tiene la misma probabilidad de ser generado por el algoritmo de Wilson, de este hecho se desprenderá directamente una fórmula para hallar la cantidad de árboles de expansión. Para esto necesitamos ver primero algunas definiciones y resultados.

**Definición 1.5.** *El peso  $\hat{Q}_A(\eta)$  de un camino autoevitable  $\eta$  con vértices en  $A$  está dado por:*

$$\hat{Q}_A(\eta) := \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}(A) \\ LE(\omega) = \eta}} Q(\omega).$$

Es decir,  $\hat{Q}_A(\eta)$  es la suma de los pesos de todos los caminos que al eliminarles los ciclos se obtiene el camino autoevitable  $\eta$ .

La siguiente proposición relaciona el peso  $\hat{Q}$  definido en el conjunto de caminos autoevitables, con el peso  $Q$  definido para cualquier camino en el espacio de estados  $A$ .

**Proposición 1.4.** *Sean  $i \geq 1$  y  $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_i)$  un camino autoevitable en el espacio de estados  $A$ , entonces:*

$$\hat{Q}_A(\eta) = Q(\eta)F_\eta(A).$$

*Demostración.* Denotemos  $A_{-1} := A$  y  $A_j := A \setminus \{\eta_0, \dots, \eta_j\}$  y observemos que cualquier camino  $\omega$  con  $\text{LE}(\omega) = \eta$  se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\omega = \omega^0 \oplus (\eta_0, \eta_1) \oplus \omega^1 \oplus (\eta_1, \eta_2) \oplus \dots \oplus (\eta_{i-1}, \eta_i) \oplus \omega^i.$$

Donde cada  $\omega^j$  es un  $\eta_j$ -ciclo en  $A_{j-1}$ , es decir, un ciclo cuyos vértices están en  $A_{j-1}$  y con raíz en  $\eta_j$ . Luego tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_A(\eta) &:= \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}(A) \\ \text{LE}(\omega) = \eta}} Q(\omega) \\ &= \sum_{\substack{\omega^j \in \mathcal{L}(A_{j-1}) \\ \omega_0^j = \eta_j \\ j \in \{0, \dots, i\}}} Q(\omega^0) Q(\eta_0, \eta_1) Q(\omega^1) Q(\eta_1, \eta_2) \dots Q(\eta_{i-1}, \eta_i) Q(\omega^i) \\ &= Q(\eta) \sum_{\substack{\omega^j \in \mathcal{L}(A_{j-1}) \\ \omega_0^j = \eta_j \\ j \in \{0, \dots, i\}}} Q(\omega^0) Q(\omega^1) \dots Q(\omega^i) \\ &= Q(\eta) \prod_{j=0}^i \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L}(A_{j-1}) \\ \omega_0 = \eta_j}} Q(\omega) \\ &= Q(\eta) \prod_{j=0}^i G_{A_{j-1}}(\eta_j, \eta_j) \\ &= Q(\eta) \prod_{j=0}^i F_{\eta_j}(A_{j-1}) = Q(\eta) F_{\eta}(A) \end{aligned}$$

Donde en la penúltima y última igualdad hemos usado la Proposición 1.2 y el lema 1.1 respectivamente.  $\square$

**Definición 1.6.** Dado el conjunto de estados finito  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  y una matriz de pesos  $Q$ . Definimos el peso de un árbol  $\mathcal{T}$  en  $A$  según:

$$Q(\mathcal{T}) = \prod_{(x, x') \in \mathcal{T}} Q(x, x')$$

Donde el producto es tomado sobre todos los ejes  $(x, x') \in \mathcal{T}$  y la dirección es escogida de modo que el único camino autoevitable que va de  $x$  a  $x_0$  pase a través de  $x'$ .

Según la definición anterior podemos calcular el peso de un árbol de expansión en el grafo finito conexo  $\mathcal{G} = (A, E)$  con respecto a la matriz de pesos  $Q$  correspondiente a la matriz de transición del camino aleatorio simple en el grafo  $\mathcal{G} = (A, E)$ . Sea  $\mathcal{T}$  un árbol de expansión en  $A$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
Q(\mathcal{T}) &:= \prod_{(x,x') \in \mathcal{T}} Q(x, x') \\
&= \prod_{(x,x') \in \mathcal{T}} \frac{1}{\deg(x)} \\
&= \prod_{x \in A \setminus \{x_0\}} \frac{1}{\deg(x)} \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\deg(x_i)}. \tag{1.3}
\end{aligned}$$

Es decir, todos los árboles de expansión en  $A$  tienen el mismo peso.

La siguiente proposición prueba que el algoritmo de Wilson genera un árbol de expansión uniformemente, es decir, cada árbol de expansión en  $A$  tiene la misma probabilidad de ser generado mediante el algoritmo. Esto a su vez nos da el número de árboles de expansión en un grafo dado.

**Proposición 1.5.** *El número de árboles de expansión que se pueden obtener en un grafo finito conexo  $\mathcal{G} = (A, E)$ , donde  $A = \{x_0, \dots, x_n\}$ , está dado por:*

$$\det(D - K).$$

Donde  $D$  es la matriz diagonal de los grados de  $x \in A \setminus \{x_0\}$  y  $K$  es la matriz de adyacencia del grafo  $\mathcal{G}$  restringida a  $A \setminus \{x_0\}$ .

*Demostración.* Primero analizamos el árbol  $\mathcal{T}$  según los caminos autoevitables que lo conforman, es decir, debemos observar que el árbol está formado por los siguientes caminos autoevitables:

$$\begin{aligned}
\eta^1 &= (y_{1,1} = x_1, y_{1,2}, \dots, y_{1,k_1}, z_1 = x_0) \\
\eta^2 &= (y_{2,1}, y_{2,2}, \dots, y_{2,k_2}, z_2) \\
\eta^3 &= (y_{3,1}, y_{3,2}, \dots, y_{3,k_3}, z_3) \\
&\vdots \\
\eta^m &= (y_{m,1}, y_{m,2}, \dots, y_{m,k_m}, z_m).
\end{aligned}$$

Aquí  $\eta^1$  es el único camino autoevitable en el árbol  $\mathcal{T}$  que va desde  $x_1$  hasta  $x_0$ . Para  $j > 1$  se tiene que  $y_{j,1}$  es el vértice de índice más pequeño que no está en  $\eta^1 \oplus \dots \oplus \eta^{j-1}$  y  $\eta^j$  es el único camino autoevitable en el árbol  $\mathcal{T}$  que va desde  $y_{j,1}$  hasta el vértice  $z_j$  en  $\eta^1 \oplus \dots \oplus \eta^{j-1}$ .

Ahora, según la descripción del algoritmo de Wilson, tenemos que la probabilidad que este genere el árbol  $\mathcal{T}$  es el producto de las probabilidades de los siguientes eventos:

- $\text{LE}(\omega) = \eta^1$ ; donde  $\omega$  es el camino aleatorio simple que comienza en  $x_1$  y detenido en  $x_0$ .
- $\text{LE}(\omega) = \eta^2$ ; donde  $\omega$  es el camino aleatorio simple que comienza en  $y_{2,1}$  y detenido en  $\eta^1$ .
- $\text{LE}(\omega) = \eta^3$ ; donde  $\omega$  es el camino aleatorio simple que comienza en  $y_{3,1}$  y detenido en  $\eta^1 \oplus \eta^2$ .
- ⋮
- $\text{LE}(\omega) = \eta^m$ ; donde  $\omega$  es el camino aleatorio simple que comienza en  $y_{m,1}$  y detenido en  $\eta^1 \oplus \dots \oplus \eta^{m-1}$ .

La probabilidad del evento en cada uno de los items anteriores está dada respectivamente por cada una de las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}(A \setminus x_0) \\ \text{LE}(\omega) = (y_{1,1}, \dots, y_{1,k_1})}} Q(\omega) \right) Q(y_{1,k_1}, z_1) \\ & \left( \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}(A \setminus \eta^1) \\ \text{LE}(\omega) = (y_{2,1}, \dots, y_{2,k_2})}} Q(\omega) \right) Q(y_{2,k_2}, z_2) \\ & \quad \vdots \\ & \left( \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{K}(A \setminus \{\eta^1 \oplus \dots \oplus \eta^{m-1}\}) \\ \text{LE}(\omega) = (y_{m,1}, \dots, y_{m,k_m})}} Q(\omega) \right) Q(y_{m,k_m}, z_m). \end{aligned}$$



La proposición 1.4 nos permite expresar las cantidades anteriores de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& Q(y_{1,1}, \dots, y_{1,k_1}) F_{\eta^1 \setminus \{z_1\}}(A \setminus x_0) Q(y_{1,k_1}, z_1) \\
& Q(y_{2,1}, \dots, y_{2,k_2}) F_{\eta^2 \setminus \{z_2\}}(A \setminus \eta^1) Q(y_{2,k_2}, z_2) \\
& \quad \vdots \\
& Q(y_{m,1}, \dots, y_{m,k_m}) F_{\eta^m \setminus \{z_m\}}(A \setminus \{\eta^1, \dots, \eta^{m-1}\}) Q(y_{m,k_m}, z_m).
\end{aligned}$$

Multiplicando estas expresiones y usando el lema 1.1 resulta que la probabilidad buscada es:

$$Q(\mathcal{T})F(A \setminus x_0).$$

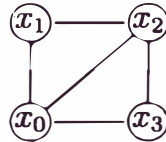
Tenemos además que el peso de un árbol de expansión  $\mathcal{T}$  con respecto al camino aleatorio simple en  $\mathcal{G}$  está dado por la ecuación (1.3) y usando la proposición (1.3) tenemos que la probabilidad que el algoritmo de Wilson genere el árbol de expansión  $\mathcal{T}$  está dada por:

$$\begin{aligned}
\left[ \prod_{i=1}^n \deg(x_i) \right]^{-1} F(A \setminus \{x_0\}) &= \left[ \det(I - Q_{A \setminus \{x_0\}}) \prod_{i=1}^n \deg(x_i) \right]^{-1} \\
&= [\det(I - Q_{A \setminus \{x_0\}}) \det D]^{-1} \\
&= [\det(D - Q_{A \setminus \{x_0\}} D)]^{-1} \\
&= \frac{1}{\det(D - K)}
\end{aligned}$$

Donde  $D(x, y) = \delta_{x,y} \deg(x)$ , es decir,  $D$  es la matriz diagonal de grados y  $K$  es la matriz de adyacencia del grafo  $\mathcal{G}$ , ambas restringidas a  $A \setminus \{x_0\}$ .

Como todos los árboles de expansión tienen la misma probabilidad de ser generados por el algoritmo  $\frac{1}{\det(D-K)}$  y todas estas probabilidades deben sumar uno, se tiene que la cantidad de árboles de expansión debe ser  $\det(D-K)$ .  $\square$

Para finalizar este capítulo vamos a mostrar un ejemplo concreto de la proposición anterior, para esto consideremos el grafo siguiente de solo cuatro vértices:



La matriz de grados es:

$$D' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

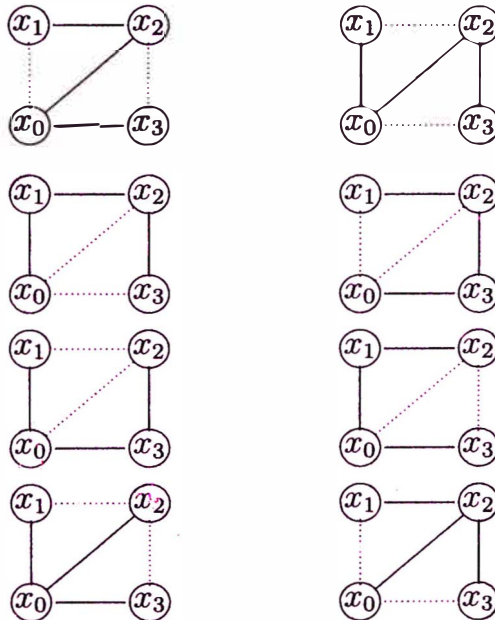
y la matriz de adyacencia está dada por:

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, según la proposición (1.5) el número de árboles de expansión que se pueden formar en este grafo es:

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 8.$$

Los ocho árboles de expansión que pueden formarse son los siguientes:



## Capítulo 2

# Campo Libre Gaussiano Discreto

El objetivo de este capítulo es dar una introducción al concepto de Campo libre gaussiano discreto (DGFF por sus siglas en inglés) y relacionarlo, mediante la función de partición, con la medida de ciclos estudiada en el capítulo anterior.

Consideremos el lattice entero  $\mathbb{L} = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E})$  donde

$$\mathbb{E} := \{\{x, y\} : \|x - y\|_1 = 1\}$$

representa el conjunto de ejes que unen vértices vecinos y  $\mathcal{G} = (A, E)$  es un subgrafo de  $\mathbb{L}$  finito y conexo. Consideremos también un camino aleatorio en el grafo  $\mathbb{L}$  con matriz de transición simétrica  $Q$  de modo que  $Q$  restringida a  $A$  es una matriz sub-Markoviana.

Ahora establecemos algunas notaciones. Vamos a denotar por  $\partial_e(A)$  al conjunto de ejes en  $\mathbb{E}$  que tienen un solo vértice en  $A$ , es decir:

$$\partial_e(A) := \{\{x, y\} : \|x - y\|_1 = 1; x \in A; y \notin A\}$$

llamaremos a este conjunto “ejes de frontera de  $A$ ” (ejes de color rojo en el gráfico 2.1). Además denotaremos por  $e_0(A)$  a aquellos ejes en  $E$  que tienen ambos vértices en  $A$  (ejes de color azul en el gráfico 2.1). La unión de ambos conjuntos de ejes la denotaremos por:

$$e(A) := \partial_e(A) \cup e_0(A).$$

Análogamente definimos los vértices de frontera de  $A$  y la cerradura de  $A$  por:

$$\begin{aligned} \partial A &:= \{y \notin A : Q(x, y) > 0 \text{ para algún } x \in A\} \\ \bar{A} &:= A \cup \partial A. \end{aligned}$$

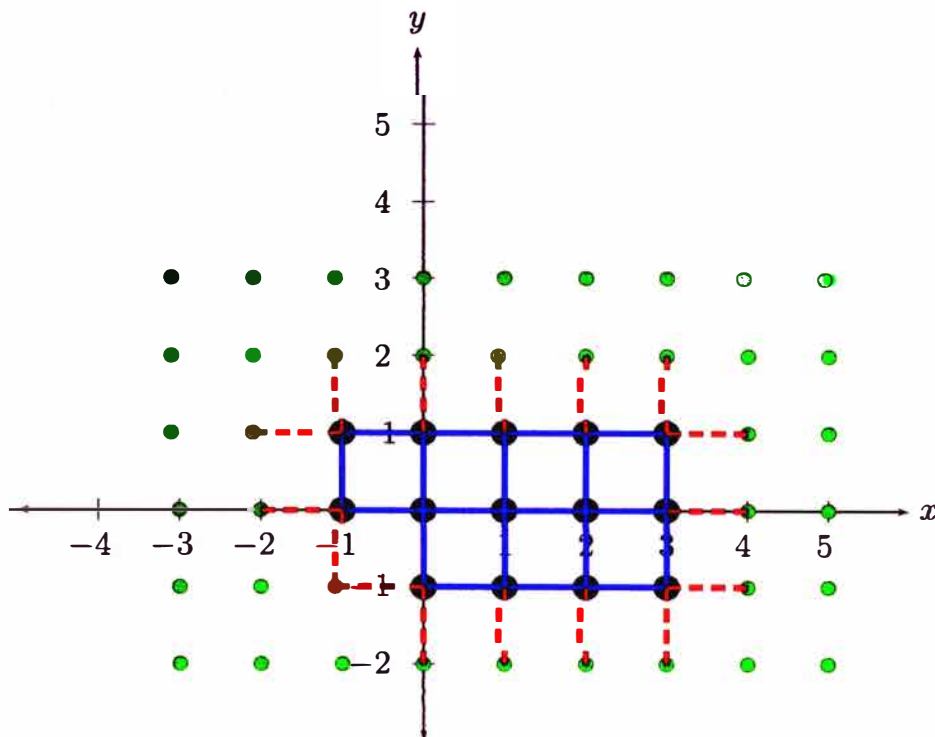


Figura 2.1: Ejes de frontera y ejes internos en el grafo.

Podemos ver cada vértice como una partícula interactuando con todas sus partículas vecinas y esta interacción será más fuerte según el peso que indique la matriz  $Q$ .

**Definición 2.1.** Considerando una función  $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos el laplaciano (discreto) de  $f$  en  $x \in A$  de la siguiente manera:

$$\Delta f(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} Q(x, y) [f(y) - f(x)].$$

Decimos que  $f$  es armónica en  $x$  si  $\Delta f(x) = 0$  y  $f$  es armónica en  $A$  si  $\Delta f(x) = 0$  para toda  $x \in A$ .

Notemos que en la definición anterior es suficiente con tomar la suma sobre todos los estados  $y$  que son vecinos de  $x$ , es decir, sobre todos los estados  $y$  tal que  $Q(x, y) > 0$ .

Consideremos un eje  $e = \{x, y\} \in e(A)$  y definamos el gradiente discreto de  $f$  en el eje  $e$  como  $\nabla_e f := f(y) - f(x)$ . Esto define  $\nabla_e f$  salvo signo, pero el producto

$$\nabla_e f \nabla_e g$$

queda bien definido y nos permite dar la siguiente definición:

**Definición 2.2.** Sean  $f, g : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones (en este contexto a estas funciones a veces las llamaremos “configuraciones”), entonces definimos la energía o forma de Dirichlet  $\mathcal{E}$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}_A(f, g) := \sum_{e \in e(A)} Q(e) \nabla_e f \nabla_e g$$

y denotamos la energía de la configuración  $f$  por  $\mathcal{E}_A(f) := \mathcal{E}_A(f, f)$ .

Es trivial probar que  $\mathcal{E}_A$  es bilineal. Por otro lado, para ciertas configuraciones especiales, la forma de Dirichlet se puede expresar de forma conveniente por medio del laplaciano definido anteriormente. Esto lo detallamos en el siguiente lema que puede verse como un análogo discreto a la fórmula de integración por partes.

**Lema 2.1** (Fórmula de Green discreta). Sean  $f, h : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces

$$\mathcal{E}_A(f, h) = - \sum_{x \in A} f(x) \Delta h(x) + \sum_{x \in \partial A} \sum_{y \in A} f(x) [h(x) - h(y)] Q(x, y). \quad (2.1)$$

Además:

a) Si  $h$  es armónica en  $A$ :

$$\mathcal{E}_A(f, h) = \sum_{x \in \partial A} \sum_{y \in A} f(x) [h(x) - h(y)] Q(x, y). \quad (2.2)$$

b) Si  $f \equiv 0$  en  $\partial A$ :

$$\mathcal{E}_A(f, h) = - \sum_{x \in A} f(x) \Delta h(x) \quad (2.3)$$

c) Si  $h$  es armónica en  $A$  y  $f \equiv 0$  en  $\partial A$ , entonces  $\mathcal{E}_A(f, h) = 0$  y luego,

$$\mathcal{E}_A(f + h) = \mathcal{E}_A(f) + \mathcal{E}_A(h). \quad (2.4)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_A(f, h) &= \sum_{e \in e_0(A)} Q(e) \nabla_e f \nabla_e h + \sum_{e \in \partial_e(A)} Q(e) \nabla_e f \nabla_e h \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x \in A} \sum_{y \in A} Q(x, y) [f(y) - f(x)] [h(y) - h(x)] \\
&\quad + \sum_{x \in A} \sum_{y \in \partial A} Q(x, y) [f(y) - f(x)] [h(y) - h(x)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x \in A} \sum_{y \in A} Q(y, x) f(y) [h(y) - h(x)] - \frac{1}{2} \sum_{x \in A} \sum_{y \in A} Q(x, y) f(x) [h(y) - h(x)] \\
&\quad + \sum_{x \in A} \sum_{y \in \partial A} Q(x, y) [f(y) - f(x)] [h(y) - h(x)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{y \in A} \sum_{x \in A} Q(x, y) f(x) [h(x) - h(y)] - \frac{1}{2} \sum_{x \in A} \sum_{y \in A} Q(x, y) f(x) [h(y) - h(x)] \\
&\quad + \sum_{x \in A} \sum_{y \in \partial A} Q(x, y) [f(y) - f(x)] [h(y) - h(x)] \\
&= - \sum_{x \in A} \sum_{y \in A} Q(x, y) f(x) [h(y) - h(x)] \\
&\quad - \sum_{x \in A} \sum_{y \in \partial A} Q(x, y) f(x) [h(y) - h(x)] + \sum_{x \in A} \sum_{y \in \partial A} Q(x, y) f(y) [h(y) - h(x)] \\
&= - \sum_{x \in A} \sum_{y \in \bar{A}} Q(x, y) f(x) [h(y) - h(x)] + \sum_{x \in \partial A} \sum_{y \in A} Q(x, y) f(x) [h(x) - h(y)] \\
&= - \sum_{x \in A} f(x) \Delta h(x) + \sum_{x \in \partial A} \sum_{y \in A} Q(x, y) f(x) [h(x) - h(y)].
\end{aligned}$$

Esto prueba 2.1 de donde las ecuaciones 2.2 y 2.3 se deducen directamente. Para probar la ecuación 2.4 solo hace falta notar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_A(f + h, f + h) &= \mathcal{E}_A(f, f) + 2\mathcal{E}_A(f, h) + \mathcal{E}_A(h, h) \\
&= \mathcal{E}_A(f) + \mathcal{E}_A(h)
\end{aligned}$$

□

Como ya se ha mencionado, nuestro objetivo en esta sección es relacionar el campo libre gaussiano discreto (que definiremos posteriormente) con la

medida de ciclos y para ello necesitaremos hallar la energía de una configuración en particular la cual denotaremos por  $h$ . El siguiente paso entonces, es definir y hallar la energía de dicha configuración.

Sea  $Y = (Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  el camino aleatorio en  $\mathbb{Z}^d$  con probabilidad de transición  $Q$  y  $x \in \partial A$ , denotamos:

$$\begin{aligned}\tau_x &= \min\{j \geq 1 : Y_j = x\} \\ \tau_{A^c} &= \min\{j \geq 1 : Y_j \notin A\}.\end{aligned}$$

En base a las notaciones anteriores vamos a definir la configuración  $h_x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera:

$$h_x(y) := \begin{cases} \mathbb{P}_y(\tau_x = \tau_{A^c}) & \text{Si } y \in A \\ \delta_x(y) & \text{Si } y \notin A \end{cases}$$

Es decir, cuando  $y \in A$ ,  $h_x(y)$  es la probabilidad que, al comenzar en  $y$ , el camino aleatorio  $Y$  salga de  $A$  por el estado  $x$ .

Notemos que se cumple lo siguiente:

- $h_x(y) = 0$  para toda  $y \notin A \cup \{x\}$
- $h_x(x) = 1$ .
- $\Delta h_x(y) = 0$  para toda  $y \in A$ .

Para probar que  $h_x$  es armónica en  $A$ , fijamos  $y \in A$  y denotando  $A' := A \cup \{x\}$  hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta h_x(y) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} Q(y, z)[h_x(z) - h_x(y)] \\ &= \sum_{z \in A} Q(y, z)[h_x(z) - h_x(y)] + \sum_{z \notin A'} Q(y, z)[h_x(z) - h_x(y)] + Q(y, x)[h_x(x) - h_x(y)] \\ &= \sum_{z \in A} Q(y, z)h_x(z) - h_x(y) \sum_{z \in A} Q(y, z) - h_x(y) \sum_{z \notin A'} Q(y, z) + Q(y, x)[h_x(x) - h_x(y)] \\ &= -h_x(y) + \sum_{z \in A} Q(y, z)h_x(z) + Q(y, x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

La última igualdad es debido a que por definición  $h_x(y) = \mathbb{P}_y(\tau_x = \tau_{A^c})$  pero el evento  $\{\tau_x = \tau_{A^c}$  partiendo de  $y\}$  es equivalente a que el camino aleatorio

vaya desde  $y$  directamente hacia  $x$  o que vaya desde  $y$  hacia algún  $z \in A$  y luego salga de  $A$  a través de  $x$ .

Ahora que ya hemos visto que  $h_x$  es una función armónica en  $A$ , pasemos a analizar la energía de dicha configuración. El siguiente lema relaciona la energía de la función  $h_x$  con la medida del conjunto de todos los ciclos en  $A' := A \cup \{x\}$  que pasan por  $x$ .

**Lema 2.2.** Sean  $x \in \partial A$ ,  $A' := A \cup \{x\}$ ,  $Y := (Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  un camino aleatorio con probabilidad de transición  $Q$  y  $\tau_x$  y  $\tau_{A^c}$  definidas como antes, se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{E}_{A'}(h_x) = \mathbb{P}_x [\tau_x \geq \tau_{(A')^c}] = \frac{1}{F_x(A')} \quad (2.5)$$

*Demostración.* Si  $y \in A$ , entonces por definición  $h_x(y) = \mathbb{P}_y(T_x = \tau_A)$ . Además notemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x [\tau_x < \tau_{(A')^c}] &= Q(x, x) + \sum_{y \in A} Q(x, y) \mathbb{P}_y(\tau_x = \tau_{A^c}) \\ &= Q(x, x) + \sum_{y \in A} Q(x, y) h_x(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x [\tau_x \geq \tau_{(A')^c}] &= 1 - \mathbb{P}_x [\tau_x < \tau_{(A')^c}] \\ &= \left[ \sum_{y \notin A'} Q(x, y) + \sum_{y \in A} Q(x, y) + Q(x, x) \right] - Q(x, x) - \sum_{y \in A} Q(x, y) h_x(y) \\ &= \sum_{y \notin A'} Q(x, y) + \sum_{y \in A} Q(x, y) [1 - h_x(y)] \\ &= - \sum_{y \notin A'} Q(x, y) [h_x(y) - h_x(x)] - \sum_{y \in A} Q(x, y) [h_x(y) - h_x(x)] \\ &= - \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} Q(x, y) [h_x(y) - h_x(x)] \\ &= -\Delta h_x(x) \\ &= - \sum_{y \in A'} h_x(y) \Delta h_x(y) \\ &= \mathcal{E}_{A'}(h_x) \end{aligned}$$



Para probar la segunda igualdad en 2.5 recordamos la definición de la función  $f = f_{A'}$  que evaluada en  $x$  representa la probabilidad de regresar al estado  $x$  sin salir de  $A'$  y usamos la proposición 1.2 para obtener:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x [\tau_x \geq \tau_{(A')^c}] &= 1 - f_{A'}(x) \\ &= \frac{1}{G_{A'}(x, x)} \\ &= \frac{1}{F_x(A')}\end{aligned}$$

□

Ahora pasamos a definir el campo libre gaussiano discreto haciendo uso de la energía de Dirichlet  $\mathcal{E}_A$  definida anteriormente.

Si  $v : \mathbb{Z} \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , vamos a denotar por  $f_v$  a la función definida en  $\mathbb{Z}^d$  según:

$$f_v(x) := \begin{cases} f(x) & \text{Si } x \in A \\ v(x) & \text{Si } x \notin A \end{cases}$$

Si  $v$  es omitida, asumimos que  $v \equiv 0$ .

**Definición 2.3.** *Vamos a definir el Campo Libre Gaussiano Discreto en  $A$  con condición de frontera  $v$  como la medida en  $\mathbb{R}^{\#(A)}$  cuya función de densidad con respecto a la medida de Lebesgue está dada por:*

$$(2\pi)^{-\#(A)/2} e^{-\mathcal{E}_A(f_v)/2}.$$

Si  $v \equiv 0$  se dice que el campo tiene condiciones de frontera de Dirichlet o condición de frontera nula.

Ahora nos enfocaremos en el objetivo principal de esta sección que es probar que la medida que define el campo libre gaussiano discreto es finita y además la medida de todo el espacio  $\mathbb{R}^{\#(A)}$  puede expresarse usando la medida de ciclos que definimos en el capítulo anterior. Para ello hacemos uso de la función de partición definida a continuación.

**Definición 2.4.** *Sea  $A \subset \mathbb{Z}^d$  un subconjunto finito y  $v : \mathbb{Z}^d \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$  la condición de frontera. Definimos la función de partición según:*

$$\mathcal{C}(A; v) := \int (2\pi)^{-\#(A)/2} e^{-\mathcal{E}_A(f_v)/2} df.$$

Si  $v \equiv 0$ , solo escribiremos  $\mathcal{C}(A)$  y por convención se tiene  $\mathcal{C}(\emptyset; v) = 1$ .

**Teorema 2.1.** Para cualquier  $A \subset \mathbb{Z}^d$  con  $\#(A) < \infty$  se tiene que la función de partición con condiciones de frontera nulas se relaciona con la medida de ciclos de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}(A) = \sqrt{F(A)} \quad (2.6)$$

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre  $\#(A)$ . Si  $A = \emptyset$ , el resultado es inmediato. Para hacer el paso inductivo necesitamos probar primero que para  $x \notin A$  y  $A' = A \cup \{x\}$  se cumple:

$$\mathcal{C}(A') = \mathcal{C}(A) \sqrt{F_x(A')} \quad (2.7)$$

ya que por hipótesis inductiva y por la proposición 1.1 tendríamos:

$$\mathcal{C}(A') = \mathcal{C}(A) \sqrt{F_x(A')} = \sqrt{F(A)F_x(A')} = \sqrt{F(A')}.$$

Ahora solo nos queda probar la igualdad 2.7.

Sea  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \equiv 0$  en  $\mathbb{Z}^d \setminus A'$ . Podemos escribir

$$f = g + th$$

donde  $h$  es la función armónica en  $A$  con  $h(x) = 1$ ,  $h \equiv 0$  en  $\mathbb{Z}^d \setminus A'$  y  $t = f(x)$ . La ecuación anterior define  $g$  de modo que se anule en  $\mathbb{Z}^d \setminus A$ . Además notemos que los ejes en  $e(A')$  son los ejes en  $e(A)$  junto con los ejes de la forma  $\{x, y\}$  con  $y \in \mathbb{Z}^d \setminus A$ , es decir:

$$e(A') = e(A) \cup \{\{x, y\} : |x - y|_1 = 1, y \notin A\}.$$

Usando esto podemos relacionar la energía de  $f$  en  $A$  y en  $A'$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{A'}(f) &= \sum_{\{y,z\} \in e(A')} Q(y,z)[f(z) - f(y)]^2 \\ &= \sum_{\{y,z\} \in e(A)} Q(y,z)[f(z) - f(y)]^2 + \sum_{y \notin A} Q(x,y)[f(y) - f(x)]^2 \\ &= \mathcal{E}_A(f) + \sum_{y \notin A} Q(x,y)t^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Análogamente tenemos:

$$\mathcal{E}_{A'}(h) = \mathcal{E}_A(h) + \sum_{y \notin A} Q(x,y). \quad (2.9)$$

Además, por la ecuación 2.4, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_A(f) &= \mathcal{E}_A(g) + \mathcal{E}_A(th) \\ &= \mathcal{E}_A(g) + t^2\mathcal{E}_A(h).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Combinando las ecuaciones 2.8, 2.9 y 2.10 tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{A'}(f) &= \mathcal{E}_A(g) + t^2\mathcal{E}_A(h) + \sum_{y \notin A'} Q(x, y)t^2 \\ &= \mathcal{E}_A(g) + t^2 \left[ \mathcal{E}_A(h) + \sum_{y \notin A'} Q(x, y) \right] \\ &= \mathcal{E}_A(g) + t^2\mathcal{E}_{A'}(h).\end{aligned}$$

Multiplicando por  $-\frac{1}{2}$  la igualdad anterior y tomando exponencial a ambos miembros obtenemos:

$$\exp \left[ -\frac{1}{2}\mathcal{E}_{A'}(f) \right] = \exp \left[ -\frac{1}{2}\mathcal{E}_A(g) \right] \exp \left[ -\frac{t^2}{2}\mathcal{E}_{A'}(h) \right].\tag{2.11}$$

Notemos que el primer factor del lado derecho de la igualdad 2.11 depende de los valores de  $g$  en  $x_1, \dots, x_n$  mientras que el segundo factor depende solo del valor de  $f$  en  $x_0$ .

Para obtener la función de partición en  $A'$  debemos integrar la ecuación anterior sobre todos los posibles valores de  $f$ . Integramos primero haciendo variar los valores que toma la función en  $A$  y finalmente integramos haciendo variar los valores que toma la función sobre la variable  $x$ . Sean  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$  y  $x = x_0$ , integrando la ecuación 2.11 obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(A') &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (2\pi)^{-\#(A')/2} e^{-\mathcal{E}_{A'}(f)/2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1/2} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\#(A)/2} e^{-\mathcal{E}_A(g)/2} \right] e^{-t^2\mathcal{E}_{A'}(h)/2} \\ &= \mathcal{C}(A) \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2\mathcal{E}_{A'}(h)/2} \\ &= \mathcal{C}(A) \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/[2F_x(A')]} \\ &= \mathcal{C}(A) \sqrt{F_x(A')}.\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad se ha usado el lema 2.2 y de esta forma queda probado el teorema  $\square$

Para finalizar esta sección veremos una forma de obtener el campo libre gaussiano discreto mediante vectores gaussianos.

**Teorema 2.2.** *Consideremos el vector aleatorio  $f = \{f_x : x \in A\}$  el cual tiene distribución normal conjunta de media cero y matriz de covarianza  $G = (I - Q)^{-1}$ . Entonces la distribución del vector aleatorio  $f$  es el campo libre gaussiano discreto en  $A$  normalizado y con condiciones de frontera nulas.*

*Demostración.* Primero veamos que efectivamente podemos considerar a la matriz de Green  $G = (I - Q)^{-1}$  como una matriz de covarianza. Para esto debemos probar que  $G$  es definida positiva de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[(I - Q)f]_i &= \sum_{j=1}^n (I - Q)_{ij} f(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^n [\delta_{ij} - Q(x_i, x_j)] f(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \delta_{ij} f(x_j) - \sum_{j=1}^n Q(x_i, x_j) f(x_j) \\
&= f(x_i) - \sum_{j=1}^n Q(x_i, x_j) f(x_j) \\
&= f(x_i) \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} Q(x_i, y) - \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} Q(x_i, y) f(y) \\
&= - \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} Q(x_i, y) [f(y) - f(x_i)] \\
&= -\Delta f(x_i)
\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}
f^t (I - Q) f &= - \sum_{x \in A} f(x) \Delta f(x) \\
&= \mathcal{E}_A(f).
\end{aligned}$$

Notemos que en esta última igualdad hemos usado la Fórmula de Green discreta, más precisamente, hemos usado la ecuación 2.3. De lo anterior se deduce que  $I - Q$  y por lo tanto  $G$  son matrices definidas positivas ya que por definición  $\mathcal{E}_A(f)$  es cero solo cuando  $f \equiv 0$ .

Para completar esta demostración usamos el resultado del apéndice A donde se prueba que la función de densidad del vector aleatorio  $f$  está dada por:

$$(2\pi)^{-\#(A)/2}(\det G)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{f^t(I-Q)f}{2} \right\}$$

y por lo que acabamos de probar, esto es igual a:

$$(2\pi)^{-\#(A)/2}(\det G)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathcal{E}_A(f) \right\}$$

Con esto concluye la prueba ya que por el teorema 2.1 el valor que normaliza el campo libre gaussiano discreto está dado por  $\sqrt{\det G}$ .  $\square$

El teorema anterior nos dice que el campo libre gaussiano discreto con condición de frontera nula es un vector gaussiano con media cero y matriz de covarianza dada por  $G = (I - Q)^{-1}$ .

# Capítulo 3

## Campos de ocupación y el DGFF

En este capítulo mostramos otra relación entre el campo libre gaussiano discreto y la medida de ciclos. Para esto construimos, en base al espacio de ciclos en el grafo  $\mathcal{G} = (A, E)$ , un vector aleatorio que denominaremos campo de ocupación y que resulta tener una distribución relacionada con el DGFF.

Este capítulo está dividido en cuatro secciones. En la sección 3.1 construimos el espacio de medida  $(\mathbb{N}^{\mathcal{O}}, \otimes_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}, \mathcal{M}_t)$  y probamos que esta medida está concentrada en el subespacio  $(\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}, 2^{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}}, \mathcal{M}_t)$  el cual es conocido como loop soup en base al cual definiremos el campo de ocupación en las secciones posteriores. En la sección 3.2 definimos el campo de ocupación discreto el cual nos sirve como motivación para definir, en la sección 3.3, el campo de ocupación continuo no trivial. En esta sección también se calcula la función generadora de momentos del campo continuo no trivial. En la sección 3.4 definimos en campo continuo trivial y hallamos su función generadora de momentos. Teniendo el campo continuo no trivial y trivial ya definidos, podemos definir el campo continuo total. Finalmente en la sección 3.5 probamos la relación entre el campo continuo total y el cuadrado del campo libre gaussiano discreto. Probamos que ambos tienen la misma distribución haciendo uso de la función generadora de momentos.

### 3.1. Preliminares

Sea  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A)$  el conjunto de ciclos no triviales en el espacio finito de estados  $A$ , definiremos una medida  $\mathcal{M}_t$  (con  $t > 0$  fijo y arbitrario) en el conjunto de funciones  $\mathcal{C} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{N}$  el cual como de costumbre será denotado

por  $\mathbb{N}^{\mathcal{O}}$ . Para este fin, para cada ciclo no trivial  $\omega \in \mathcal{O}$  denotamos por  $\mathcal{M}_t^\omega$  a la medida de Poisson de parametro  $tm(\omega)$ , es decir:

$$\mathcal{M}_t^\omega(n) = e^{-tm(\omega)} \frac{[tm(\omega)]^n}{n!}; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Una forma de interpretar un elemento  $\mathcal{C}$  del conjunto de funciones  $\mathbb{N}^{\mathcal{O}}$  es verlo como un multiconjunto de ciclos, es decir, un conjunto de ciclos en el que cada ciclo puede aparecer más de una vez y el número de veces que el ciclo  $\omega \in \mathcal{O}$  aparece en el multiconjunto  $\mathcal{C}$  está dado por el  $\mathcal{C}(\omega)$ . Por ejemplo, si  $\omega^1, \omega^2$  y  $\omega^3$  son tres ciclos distintos en  $A$  y  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}^{\mathcal{O}}$  es tal que  $\mathcal{C}(\omega^1) = 1$ ,  $\mathcal{C}(\omega^2) = 2$ ,  $\mathcal{C}(\omega^3) = 3$  y  $\mathcal{C}(\omega) = 0$  para toda  $\omega \notin \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ . Podemos interpretar  $\mathcal{C}$  como un multiconjunto que contiene un ciclo  $\omega^1$ , dos ciclos  $\omega^2$ , tres ciclos  $\omega^3$  y no contiene ningún otro ciclo a parte de esos.

La medida  $\mathcal{M}_t$  que buscamos definir en  $\mathbb{N}^{\mathcal{O}}$  es a veces conocida como loop soup y está dada por el producto de las medidas de Poisson anteriormente definidas en cada ciclo no trivial, es decir:

$$\mathcal{M}_t := \bigotimes_{\omega \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_t^\omega.$$

Con esto queda definido el espacio de probabilidad  $(\mathbb{N}^{\mathcal{O}}, \bigotimes_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}, \mathcal{M}_t)$ . Ahora veremos que esa probabilidad está concentrada en cierto subconjunto medible  $\mathbb{N}_{\text{fn}}^{\mathcal{O}} \subset \mathbb{N}^{\mathcal{O}}$ . Esto es importante ya que la medida  $\mathcal{M}_t$  restringida a  $\mathbb{N}_{\text{fn}}^{\mathcal{O}}$  resulta ser una medida discreta y será con esta medida discreta con la que se trabajará en las secciones posteriores. Para definir el conjunto  $\mathbb{N}_{\text{fn}}^{\mathcal{O}}$  y probar algunas de sus propiedades, primero definimos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \phi^\omega : (\mathbb{N}^{\mathcal{O}}, \bigotimes_{\omega' \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}, \mathcal{M}_t) &\rightarrow (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) \\ \mathcal{C} &\mapsto \mathcal{C}(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{N}^{\mathcal{O}}, \bigotimes_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}, \mathcal{M}_t) &\rightarrow (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, 2^{\mathbb{N} \cup \{\infty\}}) \\ \mathcal{C} &\mapsto \sum_{\omega \in \mathcal{O}} \mathcal{C}(\omega) \end{aligned}$$

Notemos que la primera de estas funciones es simplemente la proyección de  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}^{\mathcal{O}}$  sobre algún ciclo  $\omega \in \mathcal{O}$ , mientras que la segunda función asigna a cada multiconjunto  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}^{\mathcal{O}}$  el número total de ciclos en  $\mathcal{C}$  contando las repeticiones. Es importante notar que cada función  $\phi^\omega$  es medible ya que se cumple:

$$(\phi^\omega)^{-1}(n) = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N} \times \{n\} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N} \in \bigotimes_{\omega' \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}.$$



Por lo tanto la imagen inversa vía  $\phi^\omega$  de cualquier subconjunto de los naturales también pertenece a la sigma álgebra producto.

El conjunto  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^\mathcal{O}$  es definido como la imagen inversa vía  $\phi$  del conjunto de números naturales, es decir:

$$\mathbb{N}_{\text{fin}}^\mathcal{O} := \phi^{-1}(\mathbb{N}).$$

Podemos interpretarlo como el conjunto de todos los multiconjuntos que contienen un número finito de ciclos.

**Proposición 3.1.** *El conjunto  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^\mathcal{O}$  es medible.*

*Demostración.* Para ver esto basta probar que  $\phi^{-1}(n) \in \bigotimes_{\omega \in \mathcal{O}} 2^\mathbb{N}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Para esto notemos que si asignamos un orden al conjunto de los ciclos no triviales  $\mathcal{O} = \{\omega^1, \omega^2, \dots\}$ , entonces tenemos:

$$\phi^{-1}(n) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i,$$

donde cada  $\mathcal{D}_i$  es el conjunto de funciones (multiconjuntos)  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}^\mathcal{O}$  tal que la suma de sus imágenes en los  $i$  primeros ciclos es igual a  $n$  y la imagen en los ciclos restantes es cero, es decir:

$$\mathcal{D}_i := \left\{ \mathcal{C} \in \mathbb{N}^\mathcal{O} : \sum_{j=1}^i \mathcal{C}(\omega^j) = n; \mathcal{C}(\omega^j) = 0 \text{ para toda } j > i \right\}.$$

Como hay una cantidad finita de formas de obtener  $i$  sumandos con suma  $n$ , se tiene que cada  $\mathcal{D}_i$  es finito, y por lo tanto,  $\phi^{-1}(n)$  es numerable. Además para cada  $\mathcal{C} \in \phi^{-1}(n)$  el conjunto unitario  $\{\mathcal{C}\}$  es medible ya que:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}\} &= \{(\mathcal{C}(\omega^1), \dots, \mathcal{C}(\omega^i), 0, 0, \dots)\} \\ &= \{\mathcal{C}(\omega^1)\} \times \dots \times \{\mathcal{C}(\omega^i)\} \times \{0\} \times \{0\} \dots \in \bigotimes_{\omega \in \mathcal{O}} 2^\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que  $\phi^{-1}(n)$  es medible y numerable, luego  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^\bullet := \phi^{-1}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-1}(n)$  también es medible y numerable.  $\square$

El siguiente paso es probar que la medida del conjunto  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^\bullet$  es igual a uno, es decir,  $\mathcal{M}_t(\mathbb{N}_{\text{fin}}^\bullet) = 1$ .



**Proposición 3.2.** *La medida  $\mathcal{M}_t$  está concentrada en  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$ .*

*Demostración.* Notemos que cada proyección  $\phi^\omega$  tiene distribución de Poisson  $\mathcal{M}_t^\omega$  ya que:

$$\mathcal{M}_t[\phi^\omega(\mathcal{C}) = n] = \mathcal{M}_t[\mathcal{C}(\omega) = n] = \mathcal{M}_t^\omega(n).$$

Entonces, la distribución de  $\phi = \sum_{\omega \in \mathcal{O}} \phi^\omega$  está dada por la convolución de medidas  $\ast_{\omega \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_t^\omega$  que resulta ser una distribución de Poisson de parámetro  $p := \sum_{\omega \in \mathcal{O}} tm(\omega)$  y esta cantidad es finita siempre que la matriz de pesos  $Q$  tenga todos sus autovalores menores que la unidad (proposición 1.3) como estamos asumiendo. Luego, la medida  $\mathcal{M}_t$  está concentrada en  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$  ya que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t[\phi(\mathcal{C}) < \infty] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_t[\phi(\mathcal{C}) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\ast_{\omega \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_t^\omega)(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p} \frac{p^n}{n!} = 1. \end{aligned}$$

De esta forma, hemos probado que la medida  $(\mathbb{N}^{\mathcal{O}}, \ast_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}, \mathcal{M}_t)$  está concentrada en el conjunto  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$ .  $\square$

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.** *La sigma álgebra producto  $\ast_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}$  restringida al conjunto  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$  es la sigma álgebra discreta en  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$ , es decir:*

$$\ast_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}} \Big|_{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} = 2^{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}}.$$

*Demostración.* Vamos a probar esto por doble inclusión. Primero tomamos un conjunto  $V \in \ast_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}} \Big|_{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}}$ , entonces tenemos que existe un conjunto medible  $V' \in \ast_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}$  tal que  $V = V' \cap \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$ . Esto implica obviamente que  $V \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$ . Para probar la otra inclusión tomamos  $V \in 2^{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}}$ , esto significa que  $V \subset \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$ . Pero como ya sabemos,  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$  es numerable y cada conjunto unitario  $\{\mathcal{C}\}$  es medible (donde  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$ ), esto implica que  $V \in \ast_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}$ .  $\square$

En resumen, en esta sub-sección hemos definido el espacio de medida  $(\mathbb{N}^{\mathcal{O}}, \ast_{\omega \in \mathcal{O}} 2^{\mathbb{N}}, \mathcal{M}_t)$  pero solo será necesario trabajar con el espacio  $(\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}, 2^{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}}, \mathcal{M}_t)$  lo cual es más sencillo ya que este es un espacio discreto.

## 3.2. Campo de ocupación discreto

Empezaremos esta sección presentando el campo de ocupación discreto que nos servirá para definir el campo continuo en las siguientes secciones.

En primer lugar definimos, para cada  $x \in A$  y para cada ciclo no trivial  $\omega \in \mathcal{O}$ , el tiempo local discreto  $N^\omega(x)$  como el número de veces que el ciclo  $\omega$  pasa por el estado  $x$ , es decir:

$$N^\omega(x) := \sum_{j=1}^{|\omega|} 1_{\{\omega_j=x\}}.$$

Consideremos ahora la variable aleatoria definida de la siguiente manera:

$$L : \left( \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}, 2^{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}}, \mathcal{M}_t \right) \rightarrow \left( \mathbb{N}^A, 2^{\mathbb{N}^A} \right)$$

$$\mathcal{C} \mapsto L_{\mathcal{C}} : \begin{array}{l} A \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto \sum_{\omega \in \mathcal{O}} \mathcal{C}(\omega) N^\omega(x) \end{array}$$

Es decir, esta función asigna a cada multiconjunto  $\mathcal{C}$  un vector indizado por los vértices  $x \in A$  donde el valor del vector en  $x \in A$  está dado por el número total de veces que los ciclos de  $\mathcal{C}$  pasan por el estado  $x$ . Para entender mejor la definición de esta función veamos un ejemplo concreto. Consideremos  $x, y, z, u$  estados distintos en  $A$  y los ciclos  $\omega' = (x, y, z, y, u, x)$  y  $\omega'' = (y, x, y, u, y, x, y)$  dos ciclos en  $A$  y un multiconjunto  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}^{\mathcal{O}}$  definido por:

$$\mathcal{C}(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{si } \omega = \omega' \\ 3 & \text{si } \omega = \omega'' \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Entonces tenemos que el valor del campo  $L_{\mathcal{C}}$  en el estado  $x \in A$  está dado por:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}}(x) &= \mathcal{C}(\omega') N^{\omega'}(x) + \mathcal{C}(\omega'') N^{\omega''}(x) \\ &= 2(1) + 3(2) = 8. \end{aligned}$$

El valor del campo  $L_{\mathcal{C}}$  en el estado  $y \in A$  está dado por:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}}(y) &= \mathcal{C}(\omega') N^{\omega'}(y) + \mathcal{C}(\omega'') N^{\omega''}(y) \\ &= 2(2) + 3(3) = 13. \end{aligned}$$

De la misma forma, para  $u \in A$  tenemos:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}}(u) &= \mathcal{C}(\omega')N^{\omega'}(u) + \mathcal{C}(\omega'')N^{\omega''}(u) \\ &= 2(1) + 3(1) = 5. \end{aligned}$$

La variable aleatoria  $L$  induce una medida en el espacio medible  $(\mathbb{N}^A, 2^{\mathbb{N}^A})$  dada por:

$$\begin{aligned} \mu_t(\mathcal{L}) &:= \mathcal{M}_t[L(\mathcal{C}) = \mathcal{L}] \\ &= \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} \mathcal{M}_t(\mathcal{C}) 1_{\{L(\mathcal{C}) = \mathcal{L}\}}. \end{aligned}$$

**Definición 3.1.** *La variable aleatoria  $L$  o el espacio de probabilidad que esta induce  $(\mathbb{N}^A, 2^{\mathbb{N}^A}, \mu_t)$  se denominan campo de ocupación discreto.*

### 3.3. Campo de ocupación continuo

En la sección anterior construimos el campo de ocupación discreto  $(\mathbb{N}^A, 2^{\mathbb{N}^A}, \mu_t)$ , ahora intentaremos construir un campo de ocupación continuo, es decir, una medida en el espacio de funciones  $([0, \infty)^A, \mathcal{B}([0, \infty)^A))$  análoga al campo de ocupación discreto. Para esto necesitamos la noción de “proceso gamma”.

Decimos que un proceso estocástico  $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso gamma si cumple lo siguiente:

- Tiene incrementos independientes.
- $Y_0 = 0$ .
- Para cualquier  $t, s \geq 0$  la variable aleatoria  $Y_{t+s} - Y_t$  tiene distribución  $\Gamma(s, 1)$ .

En particular:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{i-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

está distribuida como la suma de  $n$  variables aleatorias exponenciales de parámetro 1.

Sea  $\{Y^x\}_{x \in A}$  una colección de procesos gamma independientes, es decir cada  $Y^x$  es un proceso gamma:

$$Y^x := \{Y_t^x\}_{t \geq 0},$$

y cada  $Y_t^x$  es una variable aleatoria:

$$Y_t^x : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow ([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty))).$$

Sea  $\bar{s} := \{s_x : x \in A\} \in [0, \infty)^A$ , denotamos por  $Y_{\bar{s}}$  al vector aleatorio que se forma al tomar para cada  $x \in A$  la variable aleatoria  $Y_{s_x}^x$ , es decir:

$$Y_{\bar{s}} = (Y_{s_x}^x)_{x \in A}.$$

Para cada multiconjunto  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$  fijo y para cada estado  $x \in A$  consideramos la variable aleatoria con distribución gamma de parámetros  $L_{\mathcal{C}}(x)$  y 1, la cual denotamos por:

$$Y_{L_{\mathcal{C}}(x)}^x : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow ([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty))).$$

Interpretamos esta variable aleatoria como el tiempo total que los ciclos en el multiconjunto  $\mathcal{C}$  permanecen en el estado  $x$  y es equivalente a asignar un tiempo aleatorio con distribución exponencial de parámetro uno cada vez que un ciclo del multiconjunto  $\mathcal{C}$  llega al estado  $x$ .

En base a estas variables aleatorias definimos el campo continuo no trivial:

$$\begin{aligned} Y_{L,t} := Y_L : (\Omega \times \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}, \mathcal{A} \otimes 2^{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}}, \mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t) &\rightarrow ([0, \infty)^A, \mathcal{B}([0, \infty)^A)) \\ (\theta, \mathcal{C}) &\mapsto Y_{L_{\mathcal{C}}}(\theta) := (Y_{L_{\mathcal{C}}(x)}^x(\theta))_{x \in A} \end{aligned}$$

Notemos que la distribución de esta variable aleatoria está dada por:

$$\begin{aligned} \nu_t(V) &:= (\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t)(Y_L \in V) \\ &= \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} (\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t)(Y_L \in V, \Omega \times \{\mathcal{C}\}) \\ &= \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} (\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t)(\{\theta \in \Omega : Y_{L_{\mathcal{C}}}(\theta) \in V\} \times \{\mathcal{C}\}) \\ &= \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} \mathcal{M}_t(\mathcal{C}) \mathbb{P}(Y_{L_{\mathcal{C}}} \in V). \end{aligned}$$

**Definición 3.2.** Llamamos campo de ocupación continuo (no trivial) a la variable aleatoria  $Y_L$  o al espacio de probabilidad inducido por esta variable  $([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty)), \nu_t)$ .

Nuestro objetivo en lo que resta de esta sección es hallar la función generadora de momentos de la variable aleatoria  $Y_L$ , para esto debemos revisar previamente algunos conceptos y ver algunos lemas.

Sea  $f : A \rightarrow [0, \infty)$  y  $x, y$  elementos de  $A$ , definimos una matriz  $D_f$  según:

$$D_f(x, y) := \delta_{x,y} f(x).$$

Es decir,  $D_f$  es la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal están dadas por los valores de  $f(x)$ . Ahora, sea  $Q_f := D_{\frac{1}{1+f}} Q$ , es decir:

$$Q_f(x, y) = \frac{Q(x, y)}{1 + f(x)}.$$

Si  $Q$  es una matriz sub-estocástica, entonces para  $f$  suficientemente pequeña,  $Q_f$  también será sub-estocástica y por lo tanto podemos definir una medida de ciclos finita en base a la matriz  $Q_f$ . Denotaremos dicha medida por  $m_f$  y si  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_r)$  tenemos que la medida  $m_f$  puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m_f(\omega) &:= \frac{Q_f(\omega)}{|\omega|} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^r Q_f(\omega_{j-1}, \omega_j)}{|\omega|} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^r \frac{Q(\omega_{j-1}, \omega_j)}{1+f(\omega_{j-1})}}{|\omega|} \\ &= m(\omega) \prod_{j=1}^r \frac{1}{1+f(\omega_{j-1})}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De esta forma hemos relacionado la medida de ciclos original  $m$  con la medida de ciclos  $m_f$ . Enunciamos otros dos resultados importantes que debemos considerar con respecto a productos y series infinitas.

**Lema 3.1.** El producto infinito  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$  es absolutamente convergente si y solo si lo es la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ .

*Demostración.* Ver [8] o también [9] □

**Lema 3.2.** *Sea  $\mathcal{O}$  un conjunto contable y  $F : \mathcal{O} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  una función con  $F(\omega, 0) = 1$  para toda  $\omega \in \mathcal{O}$  y además se cumplen:*

$$\sum_{\omega \in \mathcal{O}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega, n) \right| < \infty \quad (3.2)$$

$$\sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} \left| \prod_{\omega \in \mathcal{O}} F(\omega, \mathcal{C}(\omega)) \right| < \infty. \quad (3.3)$$

Entonces se tiene que:

$$\prod_{\omega \in \mathcal{O}} \sum_{n=0}^{\infty} F(\omega, n) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} \prod_{\omega \in \mathcal{O}} F(\omega, \mathcal{C}(\omega)). \quad (3.4)$$

*Demostración.* Por la ecuación 3.2 y usando el lema 3.1 con  $z_n = \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega, n)$  tenemos que el producto del lado izquierdo en la ecuación 3.4 es absolutamente convergente, luego, este producto no depende del orden de los factores. Entonces, podemos tomar  $\mathcal{O} = \{\omega^1, \omega^2, \dots\}$  y hacemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \prod_{\omega \in \mathcal{O}} \sum_{n=0}^{\infty} F(\omega, n) &= \prod_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F(\omega^s, n) \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} \prod_{s=1}^J \sum_{n=0}^{\infty} F(\omega^s, n) \end{aligned}$$

Ahora denotamos el conjunto de los  $J$  primeros ciclos por  $\mathcal{O}(J) := \{\omega^1, \dots, \omega^J\}$  y establecemos una relación de orden en  $\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$  dada por:

$$\mathcal{C} < \mathcal{C}' \Leftrightarrow \mathcal{C}(\omega^i) < \mathcal{C}'(\omega^i) \text{ y } \mathcal{C}(\omega^j) = \mathcal{C}'(\omega^j) \quad \forall j < i \text{ para algún } i \in \mathbb{N}.$$

Luego, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{J \rightarrow \infty} \prod_{s=1}^J \sum_{n=0}^{\infty} F(\omega^s, \mathbf{n}) &= \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}^{\mathcal{O}(J)}} \prod_{s=1}^J F(\omega^s, \mathcal{C}(\omega^s)) \\
&= \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}} \\ \mathcal{C}(\omega^i) = 0 \forall i > J}} \prod_{s=1}^{\infty} F(\omega^s, \mathcal{C}(\omega^s)) \\
&= \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} \prod_{s=1}^{\infty} F(\omega^s, \mathcal{C}(\omega^s)) \\
&= \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} \prod_{\omega \in \mathcal{O}} F(\omega, \mathcal{C}(\omega))
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad es debida a la convergencia absoluta dada en la ecuación 3.3.  $\square$

Debemos tener en cuenta también que la función generadora de momentos de un vector aleatorio (independiente) gamma  $Y_{\bar{s}}$  está dada por:

$$\mathbb{P}(e^{-Y_{\bar{s}} \cdot f}) = \prod_{x \in A} \frac{1}{(1 + f(x))^{\beta_x}}$$

En particular, sea  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$  tenemos que la función generadora de momentos del campo de ocupación continuo del multiconjunto  $\mathcal{C}$ , es decir  $Y_{L_{\mathcal{C}}}$ , está dada

por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(e^{-Y_{\mathcal{L}} \cdot f}) &= \prod_{x \in A} \frac{1}{(1 + f(x))^{L_{\mathcal{C}}(x)}} \\
&= \prod_{x \in A} \frac{1}{(1 + f(x))^{\sum_{\omega \in \mathcal{O}} C(\omega) N^{\omega}(x)}} \\
&= \prod_{x \in A} \prod_{C(\omega) \neq 0} \frac{1}{(1 + f(x))^{C(\omega) N^{\omega}(x)}} \\
&= \prod_{C(\omega) \neq 0} \left( \prod_{x \in A} \frac{1}{(1 + f(x))^{N^{\omega}(x)}} \right)^{C(\omega)} \\
&= \prod_{C(\omega) \neq 0} \exp \left[ C(\omega) \sum_{x \in A} -N^{\omega}(x) \log(1 + f(x)) \right] \\
&= \prod_{\omega \in \mathcal{O}} \exp[-C(\omega) N^{\omega} \cdot \log(1 + f)]. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Notemos que el intercambio en el orden de los productos es debido a que el conjunto de estados  $A$  es finito y además la cantidad de ciclos que aparecen al menos una vez en el multiconjunto  $\mathcal{C}$  es finita ya que  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$ .

Como se mencionó antes, estos lemas nos serán útiles para probar la siguiente proposición:

**Proposición 3.4.** *Para una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  suficientemente pequeña, se cumple que la función generadora de momentos del campo de ocupación continuo no trivial está dada por:*

$$(\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t)(e^{-Y_{\mathcal{L}} \cdot f}) = \left( \frac{\det G_f}{\det G} \right)^t.$$

Donde  $G_f$  es la matriz de Green asociada a  $Q_f$ , es decir,  $G_f := (I - Q_f)^{-1}$ .

*Demostración.* La variable aleatoria  $Y_{\mathcal{L}}$  depende de dos parámetros,  $\theta$  y  $\mathcal{C}$ . El teorema de Fubini nos permite tomar primero esperanza respecto a  $\theta$  y luego respecto a  $\mathcal{C}$ , es decir:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t)(e^{-Y_{\mathcal{L}} \cdot f}) &= \mathcal{M}_t[\mathbb{P}(e^{-Y_{\mathcal{L}} \cdot f})] \\
&= \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} \mathcal{M}_t(\mathcal{C}) \mathbb{P}(e^{-Y_{\mathcal{L}} \cdot f}).
\end{aligned}$$



Recordando que  $\mathcal{M}_t$  es el producto de medidas de Poisson y teniendo en cuenta la expresión para la función generadora de momentos de  $Y_{L_C}$  que se obtuvo anteriormente (ecuación 3.5) tenemos que la expresión anterior es igual a:

$$\sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}} \prod_{\omega \in \mathcal{O}} e^{-tm(\omega)} \frac{[tm(\omega)]^{\mathcal{C}(\omega)}}{\mathcal{C}(\omega)!} \exp[-\mathcal{C}(\omega)N^\omega \cdot \log(1+f)].$$

Por el lema 3.2 podemos intercambiar la suma y el producto para obtener la siguiente expresión:

$$\prod_{\omega \in \mathcal{O}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-tm(\omega)} \frac{[tm(\omega)]^n}{n!} \exp[-nN^\omega \cdot \log(1+f)].$$

Agrupando de forma conveniente tenemos:

$$\begin{aligned} &= \prod_{\omega \in \mathcal{O}} e^{-tm(\omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{tm(\omega) \exp[-N^\omega \cdot \log(1+f)]\}^n}{n!} \\ &= \prod_{\omega \in \mathcal{O}} \exp\{tm(\omega) [\exp(-N^\omega \cdot \log(1+f)) - 1]\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notemos además que la exponencial interna puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \exp[-N^\omega \cdot \log(1+f)] &= \exp \sum_{x \in A} -N^\omega(x) \log(1+f(x)) \\ &= \exp \sum_{x \in A} \log \left[ \frac{1}{1+f(x)} \right]^{N^\omega(x)} \\ &= \prod_{x \in A} \left( \frac{1}{1+f(x)} \right)^{N^\omega(x)} \\ &= \prod_{j=0}^{|\omega|-1} \frac{1}{1+f(\omega_j)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por lo tanto, reemplazando la expresión 3.7 en la expresión 3.6, tenemos lo

siguiente:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t)(e^{-Y_L \cdot f}) &= \prod_{\omega \in \mathcal{O}} \exp \left\{ tm(\omega) \left[ \prod_{j=0}^{|\omega|-1} \frac{1}{1+f(\omega_j)} - 1 \right] \right\} \\
&= \exp \sum_{\omega \in \mathcal{O}} tm(\omega) \left[ \prod_{j=0}^{|\omega|-1} \frac{1}{1+f(\omega_j)} - 1 \right] \\
&= \exp \left\{ \sum_{\omega \in \mathcal{O}} tm(\omega) \prod_{j=0}^{|\omega|-1} \frac{1}{1+f(\omega_j)} - \sum_{\omega \in \mathcal{O}} tm(\omega) \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{\omega \in \mathcal{O}} tm_f(\omega) - \sum_{\omega \in \mathcal{O}} tm(\omega) \right\} \\
&= \left[ \exp \sum_{\omega \in \mathcal{O}} m_f(\omega) \right]^t \left[ \exp \sum_{\omega \in \mathcal{O}} m(\omega) \right]^{-t} \\
&= \left( \frac{\det G_f}{\det G} \right)^t.
\end{aligned}$$

□

En la tercera igualdad hemos usado la relación entre las medidas de ciclos  $m$  y  $m_f$  dada por la ecuación 3.1. Finalmente, en la última igualdad se usó el resultado de la proposición 1.3.

### 3.4. Campo de ciclos triviales

El campo que se ha construido hasta el momento asigna para cada  $\mathcal{C} \in \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}$  y cada  $x \in A$  un tiempo aleatorio con distribución exponencial de parámetro 1 por cada vez que el ciclo  $\mathcal{C}$  visita el estado  $x$ . Pero el conjunto  $\mathcal{O}$  solo contiene ciclos no triviales, es por ello que ahora debemos considerar un campo continuo construido a partir de ciclos triviales discretos.

Consideremos una colección de procesos gamma independientes entre sí  $\{Z^x\}_{x \in A}$  e independientes a la colección  $\{Y^x\}_{x \in A}$  definida en la sección anterior. Cada  $Z^x$  es un proceso gamma:

$$Z^x := \{Z_t^x\}_{t \geq 0},$$

y cada  $Z_t^x$  es una variable aleatoria:

$$Z_t^x : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow ([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty))).$$

En base a esta colección definimos el vector aleatorio:

$$\begin{aligned} Z_t : \left( \Omega \times \mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}, \mathcal{A} \otimes 2^{\mathbb{N}_{\text{fin}}^{\mathcal{O}}}, \mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t \right) &\rightarrow ([0, \infty)^A, \mathcal{B}([0, \infty)^A)) \\ (\theta, \mathcal{C}) &\mapsto (Z_t^x(\theta))_{x \in A} \end{aligned}$$

Notemos que la función generadora de momentos de este vector aleatorio  $Z_t$  está dada por:

$$\begin{aligned} (\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_t)(e^{-Z_t \cdot f}) &= \mathbb{P}[\mathcal{M}_t(e^{-Z_t \cdot f})] \\ &= \mathbb{P}(e^{-Z_t \cdot f}) \\ &= \prod_{x \in A} \frac{1}{(1 + f(x))^t} \\ &= (\det D_{1+f})^{-t}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Donde  $D_{1+f}$  es la matriz diagonal cuyos valores en la diagonal principal están dados por  $1 + f(x)$  para toda  $x \in A$ .

En la sección anterior definimos el campo continuo no trivial y en esta sección hemos definido el campo continuo trivial. En base a ambos conceptos, finalizamos esta sección con la definición del campo continuo total.

**Definición 3.3.** *Vamos a definir el campo continuo total como la suma de las variables aleatorias que definen el campo continuo no trivial y el campo continuo trivial, es decir:*

$$Y_t^{\text{total}} := Y_{L,t} + Z_t.$$

### 3.5. Relación entre el campo de ocupación y el DGFF

Si  $\#(A) = n$  y la matriz de pesos  $Q$  es simétrica y sub-Markov, vimos en el capítulo 2 que el campo libre gaussiano discreto normalizado y con condiciones de frontera libre está dado por la medida en  $\mathbb{R}^n$  cuya función de densidad es:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det G}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathcal{E}_A(f) \right]. \tag{3.9}$$

También vimos en la demostración del teorema 2.2 que la matriz de Green  $G$  y su inversa  $G^{-1}$  (también denotada por  $\Delta$ ) son matrices definidas positivas y que la energía de Dirichlet con condiciones de frontera nulas cumple lo siguiente:

$$\mathcal{E}_A(f) = f^t G^{-1} f.$$

En la expresión anterior estamos considerando  $f$  como vector columna.

La siguiente proposición expresa la función generadora de momentos del cuadrado (componente a componente) de un vector aleatorio cuya distribución está dada por el campo libre gaussiano discreto normalizado con condiciones de frontera libres. El objetivo principal de este capítulo se enuncia en la última proposición que relaciona esta variable aleatoria con la distribución del campo de ocupación continuo definido en secciones anteriores.

**Proposición 3.5.** *Sea  $Q$  una matriz simétrica sub-Markov y  $\phi$  una variable aleatoria en  $\mathbb{R}^n$  cuya distribución está dada por el campo libre gaussiano normalizado con condiciones de frontera libre en  $A$  (ecuación 3.9). Entonces para  $f$  suficientemente pequeña se cumple:*

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \phi^2 \cdot f \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\det(\Delta + D_f)}} \frac{1}{\sqrt{\det G}}.$$

*Demostración.* Por la fórmula de cambio de variable (ver [1], Teorema 1.6.9) podemos determinar la esperanza buscada mediante la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \phi^2 \cdot f \right) \right] &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det G}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\frac{1}{2} \phi^2 \cdot f \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \phi^t G^{-1} \phi \right) d\phi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det G}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[ -\frac{1}{2} \phi^t (\Delta + D_f) \phi \right] d\phi. \end{aligned}$$

Además tenemos que si la función  $f$  es suficientemente pequeña, entonces  $\Delta + D_f$  es también una matriz simétrica definida positiva y por lo tanto tiene una raíz cuadrada la cual denotaremos por  $R_f$ . Es decir, se cumple que  $R_f \phi \cdot R_f \phi = \phi^t (\Delta + D_f) \phi$ . Entonces, teniendo esto en cuenta podemos escribir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[ -\frac{1}{2} \phi^t (\Delta + D_f) \phi \right] d\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\frac{1}{2} R_f \phi \cdot R_f \phi \right) d\phi.$$

Ahora hacemos el cambio de variable  $\phi' = R_f \phi$  para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \phi^2 \cdot f \right) \right] &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det G}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\det R_f} \exp \left( -\frac{1}{2} \phi' \cdot \phi' \right) d\phi' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det G}} \frac{1}{\sqrt{\det(\Delta + D_f)}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\frac{1}{2} \phi' \cdot \phi' \right) d\phi' \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{1}{\sqrt{\det(\Delta + D_f)}}
\end{aligned}$$

□

Finalmente ya podemos probar el resultado principal de este cap, solo queda hallar la función generadora de momentos del campo continuo total. Recordemos que como el campo continuo no trivial  $Y_L$  y el campo trivial  $Z_L$  son vectores independientes, entonces la función generadora de momentos de la suma está dada por el producto de las f.g.m. de cada una de ellas.

**Proposición 3.6.** *Bajo las condiciones de la proposición anterior, se cumple que el vector aleatorio  $\frac{1}{2}\phi^2$  tiene la misma distribución que el campo de ocupación continuo  $Y_{1/2}^{\text{total}}$ .*

*Demostración.* Debemos probar que  $\frac{1}{2}\phi^2$  y  $Y_{1/2}^{\text{total}}$  tienen la misma función generadora de momentos.

La función generadora de momentos de  $\frac{1}{2}\phi^2$  fue calculada en la proposición anterior 3.5. Para calcular la función generadora de momentos del campo continuo total  $Y_{1/2}^{\text{total}}$  necesitamos la función generadora de momentos de campo continuo no trivial  $Y_{1/2}$  y la función generadora de momentos del campo continuo trivial  $Z_{1/2}$ , es decir:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_{1/2}) \left[ \exp \left( -Y_{1/2}^{\text{total}} \cdot f \right) \right] &= (\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_{1/2}) \left\{ \exp \left[ -(Y_L + Z_{1/2}) \cdot f \right] \right\} \\
&= (\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_{1/2}) \left[ \exp \left( -Y_L \cdot f \right) \right] \cdot (\mathbb{P} \otimes \mathcal{M}_{1/2}) \left[ \exp \left( -Z_{1/2} \cdot f \right) \right].
\end{aligned}$$

Por la ecuación 3.8 y la proposición 3.4 la expresión anterior es igual a:

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\det G_f}{\det G} \right)^{1/2} \det (D_{1+f}^{-1})^{1/2} \\
&= \left[ \frac{\det (I - Q_f)^{-1}}{\det G} \right]^{1/2} \det (D_{1+f}^{-1})^{1/2} \\
&= \left[ \frac{\det (I - D_{1+f}^{-1} Q)^{-1}}{\det G} \right]^{1/2} \det (D_{1+f}^{-1})^{1/2} \\
&= \left[ \frac{\det (D_{1+f} - Q)^{-1}}{\det G} \right]^{1/2} \\
&= \left[ \frac{\det (I + D_f - Q)^{-1}}{\det G} \right]^{1/2} \\
&= \left[ \frac{\det (\Delta + D_f)^{-1}}{\det G} \right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det (\Delta + D_f)}} \frac{1}{\sqrt{\det G}}
\end{aligned}$$

□

# Apéndice A

## Vector aleatorio normal

**Definición A.1.** Decimos que un vector aleatorio  $Z$  de dimensión  $n \times 1$  tiene distribución normal conjunta si para todo  $a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  se tiene que la variable aleatoria  $a^t Z$  tiene distribución normal. La notación  $Z \in N(\mu, G)$  denotará que  $Z$  tiene distribución normal conjunta con media  $\mu$  y matriz de covarianzas  $G$ .

**Proposición A.1.** Sea  $Z$  un vector aleatorio de dimensión  $n \times 1$  con media  $\mu \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  y matriz de covarianzas  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sean  $B$  una matriz en  $\mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  y  $X = BZ + b$ , entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= B\mu + b \\ \text{Cov}(X) &= BGB^t\end{aligned}$$

*Demostración.* Por la linealidad de la esperanza tenemos  $\mathbb{E}(X) = B\mathbb{E}(Z) + b = B\mu + b$ . Además:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X) &= \mathbb{E} \{ [X - \mathbb{E}(X)][X - \mathbb{E}(X)]^t \} \\ &= \mathbb{E} \{ [X - B\mu - b][X - B\mu - b]^t \} \\ &= \mathbb{E} \{ [B(Z - \mu)][(Z - \mu)^t B^t] \} \\ &= B\mathbb{E}[(Z - \mu)(Z - \mu)^t]B^t \\ &= BGB^t\end{aligned}$$

□

Sabemos que la función característica de una variable aleatoria unidimensional  $Z$  con distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  está dada

por

$$\varphi_Z(\tau) = \exp(i\tau\mu - \sigma^2\tau^2/2); \quad \text{Para toda } \tau \in \mathbb{R}.$$

Ahora, sea  $Z$  un vector normal  $n \times 1$  con media  $\mu$  y matriz de covarianzas  $G$ , su función característica está dada por:

$$\varphi_Z(\tau) := \mathbb{E}[\exp(i\tau Z)] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{i=1}^n \tau_i Z_i \right) \right]; \quad \text{Para toda } \tau \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Si denotamos  $\tilde{Z} = \sum_{i=1}^n \tau_i Z_i$  tenemos que esta variable aleatoria unidimensional es normal y por el teorema A.1 (con  $B = \tau$  y  $b = 0$ ) se deduce que  $\tilde{Z} \in N(\tau\mu, \tau G \tau^t)$  y además:

$$\varphi_Z(\tau) = \varphi_{\tilde{Z}}(1) = \exp(i\tau\mu - \tau G \tau^t / 2).$$

Acabamos de probar que la función característica de un vector aleatorio normal solo depende de su media  $\mu$  y de su matriz de covarianzas  $G$ . Sea  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  donde cada  $Y_i$  son i.i.d.  $N(0, 1)$  y  $G$  definida positiva, entonces consideremos el vector aleatorio:

$$W := G^{1/2}Y + \mu.$$

Por el teorema A.1 tenemos que  $W$  tiene media  $G^{1/2}0 + \mu = \mu$  y matriz de covarianza  $\text{Cov}(W) = G^{1/2}I(G^{1/2})^t = G$ .

La función de densidad de cada  $Y_i$  es  $f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y_i^2/2)$ . Como las  $Y_i$  son independientes la función de densidad del vector aleatorio  $Y$  está dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y_i^2/2) \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \exp^{-y^t y / 2}; \quad \text{Para toda } y \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \end{aligned}$$

Además  $Y = G^{-1/2}(W - \mu)$  y el determinante del jacobiano de esta transformación es:

$$\det(G^{-1/2}) = \frac{1}{\sqrt{\det(G)}}.$$



Finalmente por el teorema del cambio de variable tenemos que la función de densidad del vector aleatorio  $W$  está dada por:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\det(G)}} \exp\left\{-[G^{-1/2}(z - \mu)]^t [G^{-1/2}(z - \mu)]/2\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\det(G)}} \exp\left\{-(z - \mu)^t G(z - \mu)/2\right\}. \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] DURRETT, R. Probability theory and examples. *Cambridge University Press* (2010).
- [2] FRIEDLI, S., AND VELENIK, Y. Statistical mechanics of lattice systems. a concrete mathematical introduction. *Cambridge University Press* (2017).
- [3] JAN, Y. L. Intersection local times, loop soups and permanent wick powers. *American Mathematical Society* (2017).
- [4] KALLENBERG, O. Random Measures. *Akademie, Berlin* (1986).
- [5] KLENKE, A. Probability theory. a comprehensive course. *Springer* (2013).
- [6] LAWLER, G. Loop measure and the gaussian free field. *University of Chicago* (2014).
- [7] LAWLER, G., AND LIMIC, V. Random Walk: A Modern Introduction. *Cambridge University Press* (2010).
- [8] RUDIN, W. Análisis real y complejo. *McGraw-Hill* (1988).
- [9] TAKEUCHI, Y. Sucesiones y series. vol. ii. *McGraw-Hill* (1971).
- [10] WERNER, W. Topics on the two-dimensional gaussian free field. *ETH Zurich* (2014).