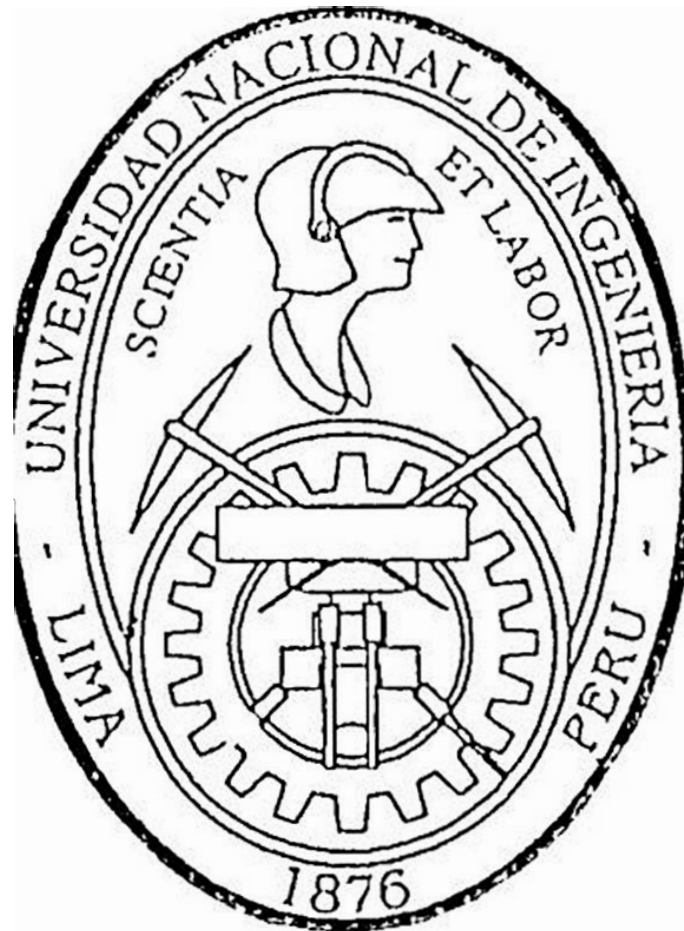


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCION DE POSTGRADO Y 2da ESPECIALIZACION
PROFESIONAL



TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO
EN CIENCIAS MENCION: FISICA

TITULADA:

“CALCULO DE LA SECCION EFICAZ PARA LA
DISPERSION NEUTRINO-ELECTRON, USANDO
VERTICES ADICIONALES DEL MODELO 3-3-1.”

PRESENTADA POR:

Freddy Cueva Solano

LIMA — PERU

2000

RESUMEN.

En la presente tesis, hemos tratado de derivar las reglas de Feynman de la Electrodinámica Cuántica, de una manera autoconsistente, de modo que nos permitan construir las amplitudes de Feynman en base a los vértices propuestos por los Modelos Standard y 3-3-1. A partir de ellos, estudiaremos la dispersión elástica neutrino electrónico (partícula de Dirac no masiva)-electrón (partícula de Dirac masiva), encontrando resultados analíticos para la sección eficaz diferencial y total, tanto en el sistema centro de masa como en el sistema laboratorio. Dichos resultados se aproximan con los resultados predichos por el Modelo Standard cuando la masa del bosón vectorial V^+ es muy grande comparada con la masa del boson vectorial cargado W^+ (o con la del bosón neutro Z^0).

Finalmente, presentamos diversos gráficos para diferentes valores de la energía del neutrino y del ángulo de dispersión.

Indice

Notación y Símbolos usados

Introducción 1

Capítulo 1 Mecánica Cuántica Relativista del electrón y del fotón.

1.1 Introducción 5

1.2 La Ecuación de Dirac. 5

1.3 Soluciones de la Ecuación de Dirac para una partícula libre. 11

1.4 La Segunda Cuantización del Campo de Dirac. 22

1.5 Campo Electromagnético Clásico. 29

1.6 La Cuantización del Campo Electromagnético libre. 32

Apéndices del Capítulo 1.

Capítulo 2 La Imagen de Interacción, La Matriz "S" y el Teorema de Wick.

2.1 Introducción. 51

2.2 Las Imágenes de Schrodinger, Heisenberg e Interacción. 51

2.3 Teoría de Perturbación. 55

2.4 La definición de la Matriz "S" 61

2.5 Producto Cronológico, Producto Normal y el Teorema de Wick para operadores bosónicos y fermiónicos. 63

2.5.1 Producto Cronológico para operadores bosónicos y fermiónicos. 64

2.5.2 Producto Normal para operadores bosónicos y fermiónicos. 65

2.5.3 Propiedad de los productos cronológicos y normales para operadores bosónicos y fermiónicos. 70

2.5.4 Contracción de operadores bosónicos y fermiónicos. 70

2.5.5 Producto Normal con Acoplamientos. 78

2.5.6 Teorema de Wick para Productos Cronológicos. 78

Apéndices del Capítulo 2.

Capítulo 3 Reglas de Feynman para la EDC.

3.1 Introducción. 102

3.2 Los Términos de Primer y Segundo Orden de la Expansión de la Matriz "S." 102

3.2.1 El Término de Primer Orden de la Matriz "S."	102
3.2.2 El Término de Segundo Orden de la Matriz "S."	103
3.3 Reglas de Feynman para escribir los elementos matriciales..	127
Apéndices del Capítulo 3.	
<i>Capítulo 4</i> Cálculo de la Sección Eficaz.	
4.1 Introducción.....	143
4.2 Sección Eficaz.....	143
4.2.1 Cálculo de la Sección Eficaz en el SCM.....	148
4.2.2 Cálculo de la Sección Eficaz en el SL.....	152
4.3 Sumatoria y Promedio sobre los estados de polarización del fermión.....	157
Apéndices del Capítulo 4.	
<i>Capítulo 5</i> Dispersión neutrino-electrón usando vértices del Modelo 3-3-1.	
5.1 Introducción.....	183
5.2 Cálculo de la Sección Eficaz de la Dispersión neutrino-electrón usando vértices del Modelo 3-3-1.....	183
5.2.1 Cálculo de la Sección Eficaz de la Dispersión neutrino-electrón en el Sistema Laboratorio.....	205
5.2.2 Cálculo de la Sección Eficaz de la Dispersión neutrino-electrón en el Sistema Centro de Masa.....	211
Apéndice del Capítulo 5.	
<i>Gráficos</i>	221
<i>Conclusiones</i>	231
<i>Bibliografías</i>	232

INTRODUCCION.

En esta tesis, estamos especialmente interesados en describir los procesos de interacción entre los electrones, positrones y el campo electromagnético, utilizando los argumentos teóricos de la Electrodinámica Cuántica (EDC). Esta teoría resultó de la aplicación de los métodos y leyes de la Mecánica Cuántica No-Relativista a la Electrodinámica Clásica, desarrollada inicialmente por J.C. Maxwell en el año de 1865.

La E.D.C tuvo su comienzo a partir de 1927, en base a los trabajos realizados por P. A. M. Dirac, acerca de la Teoría del electrón y del positrón. En 1928, P. Jordan y E. Wigner^[15] mostraron la necesidad de la existencia de las relaciones de conmutación y anti-conmutación y su aplicación para efectuar la cuantización de los campos bosónicos y fermiónicos. Este trabajo sirvió de base a Enrico Fermi^[16] en 1930, para efectuar la cuantización del Campo Electromagnético (CEM).

En 1940, W. Pauli^[17] utilizando los trabajos teóricos realizados por P. Jordan, E. Wigner, mostró la conexión que existía entre el espín de un campo y su estadística como lo mostramos en los Apéndices 1B y 1C de nuestra tesis.

En 1946, S. Tomonaga^[18] y J. Schwinger mostraron que el formalismo de la EDC, era invariante bajo transformaciones de Lorentz y de Gauge, ellos asumieron que la base de tal formulación estaba en la distinción entre las propiedades de los campos libres y los efectos que se producían en ellos por efecto de la interacción.

En 1949, R. Feynman^[19], presentó una serie de argumentos teóricos y lógicos para efectuar una reinterpretación de las soluciones de la ecuación de Dirac. Además mostró una técnica gráfica, que consistía de un conjunto de reglas para escribir directamente los elementos matriciales del Operador de Dispersión " S ", de algunos procesos físicamente posibles dentro de la EDC. Finalmente aquel año, F. J. Dyson^[20] estableció los fundamentos teóricos para afirmar que la EDC era la base para el tratamiento de los problemas de dispersión entre electrones, positrones y fotones. Los procesos de colisión, deberían incluir la creación y aniquilación de partículas. Dichos procesos son completamente descritos por la Matriz " S ", siendo posible expandir los elementos de una matriz de dispersión en una serie de potencias de la constante de acoplamiento electromagnético " α ".

En 1950, S. N. Gupta^[21] y K. Bleuler^[22] establecieron un método teórico para la cuantización del Campo Electromagnético, utilizando una teoría con una métrica indefinida, dicho método, satisfacía los requerimientos de covarianza y de invarianza de gauge impuestas por la EDC. Finalmente ese mismo año, G. C. Wick^[23] dió a conocer un teorema para expresar los productos cronológicos presentes en la expansión del Operador de Dispersión " S " como suma de productos normales, los cuales darían lugar a una variedad de procesos reales dentro de la EDC.

Uno de los triunfos de la EDC fue la aproximación que se encontró entre la teoría y los resultados experimentales. Su desarrollo estaba dominado por cuestiones de formalismo y de la técnica que se empleaba en los experimentos, sin embargo aún existían problemas conceptuales en sus fundamentos. En la naturaleza existen además de la interacción electromagnética otras interacciones, las cuales no

podían ser explicadas por la EDC, tales como la interacción protón-protón, la interacción entre mesones cargados y los núcleos atómicos y otros, por lo tanto fue necesario establecer cambios conceptuales para comprender la estructura del sub-mundo microscópico, proponiéndose nuevos modelos teóricos capaces de superar las deficiencias de la EDC. Tales modelos, como la Teoría Electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam en 1961, la cual tomó importancia a partir de 1967.

Actualmente, existe un Modelo Teórico más general que supera las dificultades del Model Standard, se trata del Modelo 3-3-1, el cual ha sido desarrollado por el Grupo de Sao Paulo (Brasil) y que nos sirvió de base para efectuar el cálculo de las secciones eficaces tanto en el Sistema Laboratorio como en el Sistema Centro de Masa para la dispersión neutrino-electrón. Dicho proceso, fue observado experimentalmente por primera vez por R. C. Allen^[24] (1985),^[25] (1988). El fue quién utilizando la fuente de neutrinos electrónicos del LAMPF ubicado en el Laboratorio Nacional de los Alamos (LANL) de New Mexico (USA), encontró el espectro de energía y logró medir la sección eficaz total en el Sistema Laboratorio, el cual se aproximaba con el valor predicho por el Modelo Standard.

El detector central de neutrinos electrónicos^[26] (1990) tiene una masa sensible de 15 toneladas métricas y de dimensiones 3(altura)×3(espesor)×3.5(de longitud) m^3 hecho principalmente de centelladores plásticos y cámaras de destello, el sistema en conjunto parece un fino sandwich ordenado, con 40 capas idénticas y esta localizado en una caverna protegido de los rayos cósmicos y de la radiación de fondo.

El neutrino interactúa con el electrón en las cámaras de destello, luego el electrón dispersado era detectado, obteniéndose un valor de sección eficaz igual a $\sigma(\nu_e - e^-) = [9.9 \pm 1.5(stat) \pm 1.0(syst)] \times 10^{-42} cm^2 \times E_\nu$.

Existen otros estudios experimentales del proceso en mención efectuados por H. H. Chen, W. P. Lee, H. J. Mahler, A. M. Rushton, K. C. Wang, P. J. Doe en la Universidad de California. Algunos otros investigadores como D. A. Krakauer y R. L. Talaga en la Universidad de Maryland.

Los objetivos que nos hemos propuesto alcanzar en esta tesis son:

- Efectuar la construcción del Operador de Dispersión, en la forma de una expansión en serie de potencias de la constante de acoplamiento electromagnético " α " así, como establecer las justificaciones necesarias para poder enunciar el Teorema de Wick.
- La inducción de las Reglas de Feynman desde el punto de vista de la EDC, permitiendonos escribir los elementos matriciales del Operador de Dispersión " S " y dibujar los gráficos de Feynman para un determinado orden de su expansión, de algún proceso físico de interés.
- Utilizando los fundamentos teóricos de la EDC, construir las expresiones matemáticas de las secciones eficaces diferenciales para cualquier proceso de dispersión entre leptones.

A continuación, comentaremos brevemente sobre las principales ideas tratadas en cada uno de los capítulos desarrollados en nuestra tesis.

En el Capítulo 1.

En este Capítulo, expondremos las nociones básicas de la Teoría de Dirac para electrones y positrones, mostrando las ecuaciones de movimiento, las matrices de Dirac, sus soluciones de partícula libre. Asimismo efectuamos la segunda cuantización del Campo de Dirac, en donde utilizamos los operadores de creación y aniquilación de partículas y antipartículas.

También veremos la descripción del Campo Electromagnético en términos de un tensor antisimétrico de segundo rango $F^{\mu\nu}(x)$ y finalmente impondremos ciertas relaciones de conmutación sobre los operadores de creación y aniquilación de fotones para la Cuantización del Campo Electromagnético libre.

En el Capítulo 2.

En este Capítulo, presentamos una imagen intermedia entre las imágenes de Schrödinger (IS) y Heisenberg (IH) que nos permita por conveniencia simplificar los cálculos, cuando efectuemos la solución de problemas específicos, llamada imagen de Interacción (II), a partir del cual podremos establecer el método de Teoría de Perturbación, la cual nos servirá establecer la definición del Operador de Dispersión o Matriz "S". Asimismo también definiremos los Productos Cronológico y Normal para operadores bosónicos y fermiónicos. Además, también estableceremos la definición e interpretación de la contracción de éstos operadores. Esto nos va a permitir enunciar la utilidad del Teorema de Wick para productos cronológicos.

En el Capítulo 3.

En éste Capítulo, hablaremos a cerca del término de primer y segundo orden de la expansión de la Matriz "S". Estudiaremos con mayor detalle el término de segundo orden por que es que nos a permitir analizar procesos físicamente reales. Escogiendo un proceso en particular, como por ejemplo la dispersión de Moller. Utilizando el Teorema de Wick, definiendo los estados inicial $|i\rangle$ y final $|f\rangle$ respectivamente, para este proceso de Moller vamos a encontrar las amplitud de Feynman de este proceso en cuestión. Induciendo de éste modo un conjunto de reglas (llamadas Reglas de Feynman para la EDC) que nos permitiran escribir los elementos matriciales S_{if} , directamente desde los diagramas de Feynman. De tal modo, que a cada elemento S_{if} de la Matriz "S" y para un determinado orden de su expansión, podremos asociarle un conjunto de graficos llamados diagramas de orden "n". Encontradose de esta manera una técnica para derivar las amplitudes de transición de cualquier proceso posible que se escoja.

En el Capítulo 4.

En este Capítulo, efectuamos una descripción sistemática de los fundamentos teóricos necesarios para estudiar el fenómeno de dispersión de partículas. A partir de los elementos matriciales S_{if} , encontraremos las condiciones necesarias para derivar una expresión matemática, a partir del cual se puedan calcular la sección eficaz diferencial y total, tanto en el Sistema Centro de Masa (SCM) como en

el Sistema Laboratorio (SL). Asimismo, estableceremos aproximaciones de las secciones eficaces para el caso de partículas ultra-relativistas. Dejando como un ejemplo, para el final del Capítulo el cálculo de la sección eficaz diferencial en el SCM de la dispersión de Moller, en donde hemos mostrado el uso de un método para evaluar la traza del producto de matrices de Dirac.

En el Capítulo 5.

En este Capítulo, considerando al neutrino como una partícula de Dirac sin masa y al electrón como una partícula de Dirac masiva, utilizando las reglas de Feynman, los resultados de Capítulo 4, además introduciendo algunos parámetros que no los vamos a justificar aquí y los vértices propuestos por el Modelo 3-3-1, vamos a calcular las expresiones matemáticas de la sección eficaz diferencial y total, tanto en el Sistema Centro de Masa como en el Sistema Laboratorio para el caso ultra-relativista, de la dispersión elástica neutrino electrónico-electrón.

Esta reacción puede ocurrir solamente por un cambio de los bosones vectoriales cargados V^+ (aportado por el Modelo 3-3-1) y W^+ así, como de la contribución del bosón de Gibbs H y del bosón neutro Z^0 (conocidos según el Modelo Standard).

Finalmente adjuntamos los apéndices de cada capítulo, en donde se podrán encontrar los detalles de los cálculos más importantes tales como suposiciones, demostraciones, definiciones y sugerencias.

Al final del desarrollo de todos los capítulos, presentamos una lista de todas las referencias bibliográficas empleadas.

CAPITULO 1.

MECANICA CUANTICA RELATIVISTA DEL ELECTRON Y DEL FOTON.

1.1 INTRODUCCION.

En este capítulo, mostraremos que, a partir de la linealización del Hamiltoniano relativista de una partícula libre, podemos obtener la ecuación de Dirac, substituyendo el Hamiltoniano H y el momentum \vec{p} por los operadores $i\partial_0$ y $-i\vec{\nabla}$, para una función $\Psi(x)$ que representa el estado dinámico del sistema cuántico.

Asimismo, encontraremos las soluciones de la partícula libre de dicha ecuación, efectuaremos la Segunda Cuantización del Campo de Dirac utilizando operadores de creación y aniquilación de partículas.

También veremos la descripción del Campo Electromagnético en términos de un tensor antisimétrico de segundo rango $F^{\mu\nu}(x)$ y finalmente impondremos ciertas relaciones de conmutación sobre los operadores $A^\mu(x) = (A^0(x), \vec{A}(x))$ para la Cuantización del Campo Electromagnético.

1.2 LA ECUACION DE DIRAC.

La expresión de la energía clásica de una partícula puntual libre de masa m y momentum \vec{p} es:

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2, \quad (1.1)$$

esta ecuación es válida solamente si la velocidad de la partícula es pequeña comparada con la velocidad de la luz.

A partir de la ecuación (1.1) podemos encontrar la ecuación de Schrödinger no-relativista reemplazando H y \vec{p} por los operadores $i\partial_0$ y $-i\vec{\nabla}$, para una autofunción $\Psi(x)$ de H

$$i\partial_0\Psi(x) = \frac{-1}{2m} (\vec{\nabla})^2\Psi(x). \quad (1.2)$$

La ecuación anterior no es homogénea en las derivadas espaciales y temporal.

Para una partícula libre que se mueve rápidamente, la ecuación (1.1) debe ser reemplazada por el Hamiltoniano relativista de una partícula libre

$$H^2 = (\vec{p})^2 + m^2, \quad (1.3)$$

si sustituimos en la ecuación (1.3) H y \vec{p} por los operadores $i\partial_0$ y $-i\vec{\nabla}$ y la aplicamos a una autofunción $\Psi(x)$ de H , hallamos la ecuación de Klein-Gordon (KG)

$$-\partial_0^2\Psi(x) = \left(-(\vec{\nabla})^2 + m^2\right)\Psi(x), \quad (1.4)$$

que también se escribe

$$[\square + m^2]\Psi(x) = 0. \quad (1.5)$$

La ecuación (1.4) admite soluciones tipo onda plana de la forma

$$\Psi(x) = Ae^{-ikx} = Ae^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (1.6)$$

donde A es una constante compleja, entonces se observa que $w_{\vec{k}}$ debe satisfacer:

$$w_{\vec{k}} = \pm \sqrt{(\vec{k})^2 + m^2}. \quad (1.7)$$

Si multiplicamos el lado izquierdo de la ecuación (1.4) por $\Psi^*(x)$ y a la ecuación compleja conjugada de (KG) por $\Psi(x)$ y a continuación sustraemos una de la otra, obtenemos:

$$\partial_0 \rho(x) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = 0$$

donde hemos definido

$$\rho(x) = i(\Psi^*(x)\partial_0\Psi(x) - \Psi(x)\partial_0\Psi^*(x)), \quad (1.8)$$

$$\vec{j}(x) \equiv -i(\Psi^*(x)\vec{\nabla}\Psi(x) - \Psi(x)\vec{\nabla}\Psi^*(x)), \quad (1.9)$$

substituyendo la ecuación (1.6) en las ecuaciones (1.8) y (1.9) obtenemos

$$\rho(x) = 2|A|^2 w_{\vec{k}}, \quad (1.10)$$

$$\vec{j}(x) = 2|A|^2 \vec{k}, \quad (1.11)$$

de las ecuaciones (1.7) y (1.10) podemos escribir

$$\rho(x) = \pm A^2 \sqrt{(\vec{k})^2 + m^2}. \quad (1.12)$$

La ecuación (1.4) da lugar a las siguientes dificultades:

a) ¿Cuál sería la interpretación física de las soluciones de energía negativa dado por la ecuación (1.7) para una partícula libre?

b) Según la ecuación (1.12) la expresión para la densidad $\rho(x)$ puede tomar valores positivos y negativos. Entonces no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad de posición.

En 1928, P. A. M. Dirac se interesó por resolver dichas dificultades, para lograrlo se propuso linealizar la ecuación (1.3) ensayando

$$\sqrt{(\vec{p})^2 + m^2} = H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (1.13)$$

Donde $\vec{\alpha}$ y β deben ser cantidades adimensionales a ser halladas.

Para que el lado derecho de la ecuación (1.13) sea equivalente a la raíz cuadrada, es necesario que

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) = (\vec{p})^2 + m^2, \quad (1.14)$$

$$[(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \beta m + \beta m \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta^2 m^2] = (\vec{p})^2 + m^2,$$

donde $\sum_{k=1}^3 \alpha^k p_k = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ entonces

$$(\alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3)(\alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3) + (\alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3) \beta m$$

$$+ m \beta (\alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3) + \beta^2 m^2 = (\vec{p})^2 + m^2,$$

efectuando los productos entre paréntesis obtenemos,

$$\alpha^1 p_1 \alpha^1 p_1 + \alpha^1 p_1 \alpha^2 p_2 + \alpha^1 p_1 \alpha^3 p_3 + \alpha^2 p_2 \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 \alpha^2 p_2 + \alpha^2 p_2 \alpha^3 p_3 + \alpha^3 p_3 \alpha^1 p_1$$

$$+ \alpha^3 p_3 \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 \alpha^3 p_3 + m(\alpha^1 p_1 \beta + \alpha^2 p_2 \beta + \alpha^3 p_3 \beta + \beta \alpha^1 p_1 + \beta \alpha^2 p_2 + \beta \alpha^3 p_3)$$

$$+\beta^2 m^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + m^2,$$

exigiendo que las cantidades α^i conmutan con las p_i y agrupando convenientemente los términos de la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} & (\alpha^1)^2 p_1^2 + (\alpha^2)^2 p_2^2 + (\alpha^3)^2 p_3^2 + (\alpha^1 \alpha^2 + \alpha^2 \alpha^1) p_1 p_2 + (\alpha^2 \alpha^3 + \alpha^3 \alpha^2) p_2 p_3 \\ & + (\alpha^1 \alpha^3 + \alpha^3 \alpha^1) p_1 p_3 + m [(\alpha^1 \beta + \beta \alpha^1) p_1 + (\alpha^2 \beta + \beta \alpha^2) p_2 + (\alpha^3 \beta + \beta \alpha^3) p_3] \\ & + \beta^2 m^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2. \end{aligned}$$

Comparando ambos miembros encontramos que las cantidades α^i y β deben satisfacer las siguientes relaciones algebraicas

$$(\alpha^i)^2 = 1, \tag{1.15a}$$

$$\{\alpha^i, \alpha^j\}_+ = \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 0, \text{ para } i \neq j, \tag{1.15b}$$

$$\{\alpha^i, \beta\}_+ = \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0, \tag{1.15c}$$

$$\beta^2 = 1, \tag{1.15d}$$

estas cuatro cantidades anticonmutan por pares y sus cuadrados son iguales a la unidad. Por lo tanto α^i y β no pueden ser números sino matrices. Además, notamos de la ecuación (1.13) que si H es un operador hermitiano, entonces cada una de las cuatro cantidades α^i y β deben ser hermitianos.

Como consecuencia de las relaciones de anticonmutación dadas por las ecuaciones (1.15c) y (1.15d) la traza, es decir, la suma de los elementos de la diagonal principal de cada α^i y β es cero. De (1.15c) tenemos

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \Rightarrow \alpha^i \beta = -\beta \alpha^i \Rightarrow \alpha^i \beta \beta = -\beta \alpha^i \beta = \alpha^i, \tag{1.16}$$

y utilizando la propiedad de la traza $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$ y la ecuación (1.16) podemos escribir lo siguiente

$$\text{Tr}(\alpha^i) = \text{Tr}(\beta^2 \alpha^i) = \text{Tr}(\beta \beta \alpha^i) = \text{Tr}(\beta \alpha^i \beta) = \text{Tr}(-\alpha^i) = 0, \tag{1.17}$$

procediendo en forma similar tenemos

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \Rightarrow \alpha^i \beta = -\beta \alpha^i \Rightarrow \alpha^i \alpha^i \beta = -\alpha^i \beta \alpha^i = \beta, \tag{1.18}$$

nuevamente haciendo uso de la propiedad $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$ y de la ecuación (1.18) escribimos lo siguiente

$$\text{Tr}(\beta) = \text{Tr}((\alpha^i)^2 \beta) = \text{Tr}(\alpha^i \alpha^i \beta) = \text{Tr}(\alpha^i \beta \alpha^i) = \text{Tr}(-\beta) = 0. \tag{1.19}$$

Además, debido a las ecuaciones (1.15a) y (1.15d), podemos notar que los autovalores de α^i y β son ± 1 .

Bajo una transformación de similitud las matrices α^i y β se diagonalizan, de tal modo que las matrices transformadas tendran como elementos en sus diagonales principales a los autovalores de las matrices α^i y β . Pero como la traza de α^i y β es invariante bajo similitud y representa la suma de los autovalores de las matrices transformadas, entonces para que tengan traza cero debe cumplirse que el número de autovalores positivos (+1) y negativos (-1) deben ser iguales.

Por lo tanto los α^i y β deben ser matrices de dimensión par 2, 4, 6, 8,

Escogemos una base de dimensión 2 considerando las matrices de Pauli (una generalización de esto se encuentra en la referencia No 12)

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

encontramos que $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ satisfacen las ecuaciones (1.15a) y (1.15b), pero es imposible encontrar una cuarta matriz de dimensión 2 que satisfaga simultáneamente las ecuaciones (1.15c) y (1.15d). Es por este motivo que descartamos esta base de dimensión dos.

Por lo tanto, podemos escoger matrices de dimensión 4 eligiendo β como una matriz diagonal.

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}_{4 \times 4}. \quad (1.21)$$

El elemento $\mu\nu$ de la ecuación (1.15c) es:

$$\begin{aligned} (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i)_{\mu\nu} &= 0, \\ (\alpha^i \beta)_{\mu\nu} + (\beta \alpha^i)_{\mu\nu} &= 0, \\ (\alpha^i)_{\mu\lambda} \beta_{\lambda\nu} + \beta_{\mu\sigma} (\alpha^i)_{\sigma\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Sumando sobre subíndices λ y σ en la ecuación anterior, obtenemos

$$(\alpha^i)_{\mu\nu} (\beta_{\mu\mu} + \beta_{\nu\nu}) = 0. \quad (1.22)$$

De las ecuaciones (1.21) y (1.22) se presentan dos casos:

a) Caso autovalores iguales $\beta_{\mu\mu} = \beta_{\nu\nu}$ tenemos

$$(\alpha^i)_{00} = (\alpha^i)_{11} = (\alpha^i)_{22} = (\alpha^i)_{33} = (\alpha^i)_{01} = (\alpha^i)_{10} = (\alpha^i)_{23} = (\alpha^i)_{32} = 0.$$

b) Caso autovalores diferentes $\beta_{mm} \neq \beta_{nn}$ encontramos

$$(\alpha^i)_{02}, (\alpha^i)_{03}, (\alpha^i)_{12}, (\alpha^i)_{13}, (\alpha^i)_{20}, (\alpha^i)_{21}, (\alpha^i)_{30}, (\alpha^i)_{31} \neq 0.$$

Por lo tanto de los casos a) y b), la matriz que representa a α^i puede ser escrita de la siguiente forma

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & a^i \\ b^i & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (1.22a)$$

en donde los a^i y b^i son matrices de orden 2×2 . Además por construcción exigimos que las matrices a^i y b^i sean hermiticas, es decir, deberían cumplir que $a^i = (a^i)^\dagger$ y $b^i = (b^i)^\dagger$. Pero como las matrices α^i son hermiticas entonces

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & a^i \\ b^i & 0 \end{pmatrix} = (\alpha^i)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & (b^i)^\dagger \\ (a^i)^\dagger & 0 \end{pmatrix},$$

de donde tenemos que

$$a^i = (b^i)^\dagger = b^i. \quad (1.22b)$$

Reemplazando la ecuación (1.22b) en la ecuación (1.22a), encontramos las matrices que representan a

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & a^i \\ a^i & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}. \quad (1.23)$$

Como las α^i satisfacen la ecuación (1.15a) debe cumplirse que

$$(\alpha^i)_{4 \times 4}^2 = \begin{pmatrix} 0 & a^i \\ a^i & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} 0 & a^i \\ a^i & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} (a^i)^2 & 0 \\ 0 & (a^i)^2 \end{pmatrix}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

igualando los elementos

$$(a^i)_{2 \times 2}^2 = 1_{2 \times 2}. \quad (1.24)$$

Las α^i también deben satisfacer (1.15b), es decir:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & a^i \\ a^i & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} 0 & a^j \\ a^j & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} + \begin{pmatrix} 0 & a^j \\ a^j & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} 0 & a^i \\ a^i & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} - \begin{pmatrix} a^i a^j + a^j a^i & 0 \\ 0 & a^i a^j + a^j a^i \end{pmatrix}_{4 \times 4} = 0$$

de donde obtenemos que

$$a^i a^j + a^j a^i = 0, \quad \text{para } i \neq j. \quad (1.25)$$

Las ecuaciones (1.24) y (1.25) son satisfechas simultáneamente por las tres matrices de Pauli.

Luego, una representación particular para β y α^i son las matrices

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (1.26)$$

donde cada elemento es una matriz con dos filas y dos columnas. Esta representación de dimensión 4 es la menor posible que satisface los requerimientos (ver referencia No 12).

Substituyendo H y \vec{p} por los operadores $i\partial_0$ y $-i\vec{\nabla}$ en la ecuación (1.13), escribimos la ecuación de Dirac para una autofunción $\Psi(x)$, de H tenemos

$$(i\partial_0 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m) \Psi(x) = 0. \quad (1.27)$$

A continuación, damos algunas definiciones con el objeto de escribir la ecuación (1.27) en forma covariante

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^k = \beta \alpha^k, \quad (1.28)$$

multiplicando por β el lado izquierdo de la ecuación (1.27) encontramos

$$(i\beta\partial_0 + i\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta^2 m) \Psi(x) = 0,$$

considerando que $\sum_{k=1}^3 \alpha^k \partial_k \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}$ y haciendo uso de la ecuación (1.28) tenemos:

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 + i\gamma^3\partial_3 - m) \Psi(x) = 0,$$

lo cual también se escribe como:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \Psi(x) = 0. \quad (1.29)$$

Esta es la ecuación de Dirac escrita en forma covariante.

De las ecuaciones (1.15) y (1.28), las matrices γ^μ satisfacen las siguientes relaciones algebraicas

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (1.30a)$$

$$(\gamma^i)^2 = -1, \quad (1.30b)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (1.30c)$$

Usando el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ con componentes

$$g^{00} = 1, \quad g^{ii} = -1, \quad g^{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu,$$

podemos combinar las ecuaciones (1.30a), (1.30b) y (1.30c) en una relación única dada por:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

Según la ecuación (1.28) las matrices γ^μ tienen la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}. \quad (1.32)$$

Puesto que β y α^i (ó γ^0 y γ^i) son representados por matrices de orden 4×4 , la ecuación (1.29) tiene sentido solamente si escribimos la función de estado $\Psi(x)$ como una matriz columna con cuatro componentes

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_0(x) \\ \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

por conveniencia escribiremos las componentes de $\Psi(x)$ como $\Psi_\beta(x)$.

Como las matrices γ^μ satisfacen las siguientes condiciones de hermiticidad

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i, \quad (1.34)$$

y utilizando las ecuaciones (1.31) y (1.34) podemos escribir

$$\gamma^{i\dagger} = 1\gamma^{i\dagger} = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{i\dagger} = \gamma^0 \gamma^0 (-\gamma^i) = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0,$$

además si

$$\gamma^{0\dagger} = 1\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0,$$

entonces, éstos resultados pueden ser combinados para obtener

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (1.35)$$

Una quinta matriz γ^5 anticonmutante puede ser definida como

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

la cual, cumple las siguientes propiedades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \quad (1.37)$$

A continuación, podemos derivar la ecuación adjunta de Dirac, si introducimos la matriz fila

$$\Psi^\dagger(x) = (\Psi_0^*(x), \Psi_1^*(x), \Psi_2^*(x), \Psi_3^*(x)). \quad (1.38)$$

Tomando la adjunta hermitiana de la ecuación (1.29)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x))^\dagger - m\Psi^\dagger(x) = 0,$$

obtenemos

$$-i\partial_\mu^\dagger \Psi^\dagger(x) \gamma^{\mu\dagger} - m\Psi^\dagger(x) = 0,$$

y usando la ecuación (1.35) escribimos lo anterior como:

$$i\partial_\mu \Psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 + m\Psi^\dagger(x) = 0. \quad (1.39)$$

En la ecuación anterior, hemos considerado el hecho que $\partial_\mu^\dagger = \partial_\mu$ esta igualdad es usual en las bibliografías por ejemplo vease la pág 29 de la referencia No 1 y observamos que esta en contradicción con la definición de operador hermitiano.

Si multiplicamos el lado derecho de la ecuación (1.39) por γ^0 , obtenemos

$$i\partial_\mu \Psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^\mu + m\Psi^\dagger(x) \gamma^0 = 0, \quad (1.40)$$

por conveniencia, definimos la función adjunta de Dirac como:

$$\Psi(x) \equiv \Psi^\dagger(x) \gamma^0 = (\Psi_0^*(x), \Psi_1^*(x), -\Psi_2^*(x), -\Psi_3^*(x)). \quad (1.41)$$

Entonces la ecuación (1.40) puede ser convenientemente reescrita como:

$$i\partial_\mu \Psi(x) \gamma^\mu + m\Psi(x) = 0. \quad (1.42)$$

Esta es la ecuación adjunta de Dirac escrita en forma covariante.

Multiplicando el lado izquierdo de la ecuación (1.29) por la función adjunta $\Psi(x)$ y multiplicamos por el lado derecho de la ecuación (1.42) por la función $\Psi(x)$ y a continuación sumamos una con la otra, obtenemos

$$\Psi(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) + \partial_\mu \Psi(x) \gamma^\mu \Psi(x) = 0,$$

esta ecuación también se puede reescribir como

$$\partial_\mu \Psi(x) (\gamma^\mu) \Psi(x) = 0. \quad (1.42a)$$

De donde definimos el cuadri-vector densidad de corriente eléctrica como:

$$J^\mu(x) \equiv -e \bar{\Psi}_\alpha(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x) =$$

$$(\rho(x), \vec{j}(x)) = \left\{ \begin{array}{l} \rho(x) = -e \bar{\Psi}_\alpha(x) (\gamma^0)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x) = -e \Psi_\alpha^\dagger(x) \Psi_\alpha(x), \\ j^k(x) = -e \bar{\Psi}_\alpha(x) (\gamma^k)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x), \end{array} \right\}. \quad (1.43)$$

Utilizando la ecuación (1.43) podemos escribir la ecuación (1.42a) en su forma covariante, obteniendose

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0.$$

Esta ecuación expresa la conservación de la carga eléctrica.

1.3 SOLUCIONES DE LA ECUACION DE DIRAC PARA UNA PARTICULA LIBRE.

La ecuación (1.29) admite soluciones en la forma de ondas planas, es decir:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_0(x) \\ \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad (1.44)$$

donde los w_β son números complejos y $px = p^\mu x_\mu = p^0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$.

Reemplazando la ecuación (1.44) en la ecuación (1.29) obtenemos:

$$\begin{aligned}
(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{\alpha\beta} w_\beta e^{-ipx} &= 0, \\
i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} w_\beta e^{-ipx} (-ip_\mu) - \delta_{\alpha\beta} m w_\beta e^{-ipx} &= 0, \\
[(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} p_\mu - \delta_{\alpha\beta} m] w_\beta &= 0, \\
[\gamma_{\alpha\beta}^0 p_0 - (\gamma^k)_{\alpha\beta} (p_k) - \delta_{\alpha\beta} m] w_\beta &= 0.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Usando la representación de las matrices γ^μ en la ecuación (1.45) obtenemos

si $\alpha = 0, \beta = 0, 1, 2, 3$

$$(p_0 - m) w_0 - p_3 w_2 - (p_1 - ip_2) w_3 = 0, \tag{1.46a}$$

si $\alpha = 1, \beta = 0, 1, 2, 3$

$$(p_0 - m) w_1 + p_3 w_3 - (p_1 + ip_2) w_2 = 0, \tag{1.46b}$$

si $\alpha = 2, \beta = 0, 1, 2, 3$

$$(p_0 + m) w_2 - p_3 w_0 - (p_1 - ip_2) w_1 = 0, \tag{1.46c}$$

si $\alpha = 3, \beta = 0, 1, 2, 3$

$$(p_0 + m) w_3 + p_3 w_1 - (p_1 + ip_2) w_0 = 0, \tag{1.46d}$$

entonces las ecuaciones (1.46) constituyen un sistema de cuatro ecuaciones lineales y homogéneas en w_β . Para encontrar soluciones no-triviales la condición de existencia de soluciones implica que el determinante de sus coeficientes debe ser cero, es decir:

$$\begin{vmatrix}
p_0 - m & 0 & -p_3 & -(p_1 - ip_2) \\
0 & p_0 - m & -(p_1 + ip_2) & p_3 \\
-p_3 & -(p_1 - ip_2) & p_0 + m & 0 \\
-(p_1 + ip_2) & p_3 & 0 & p_0 + m
\end{vmatrix} = 0, \tag{1.47}$$

efectuando los cálculos hallamos:

$$E^2 = (p_0)^2 = (\vec{p})^2 + m^2 \Rightarrow p_0 = \pm \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}, \tag{1.48}$$

lo cual está de acuerdo con la relación entre la energía y el momentum para una partícula relativista libre. Esperamos cuatro autovalores propios, porque la ecuación (1.29) representa una ecuación matricial de dimensión 4, pero solamente dos de ellos son diferentes.

A continuación, vamos a resolver el sistema de ecuaciones de la ecuación (1.46) utilizando operaciones elementales.

Sea la matriz de Dirac

$$D = \begin{pmatrix}
(p_0 - m) & 0 & -p_3 & -(p_1 - ip_2) \\
0 & (p_0 - m) & -(p_1 + ip_2) & p_3 \\
-p_3 & -(p_1 - ip_2) & (p_0 + m) & 0 \\
-(p_1 + ip_2) & p_3 & 0 & (p_0 + m)
\end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

entonces para determinar los w_β es necesario escoger un signo para las energías según la ecuación (1.48). Por lo tanto tendremos dos casos:

a). Caso $p_0 = E_+ = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}$.

A continuación, vamos a realizar operaciones elementales en la matriz D. Primero multipliquemos la fila cuatro por $\frac{1}{(p_0 + m)}$, luego multipliquemos esta fila cuatro resultante por $(-p_3)$ y luego esta fila resultante le sumamos simultáneamente a la fila dos, obteniéndose

$$\begin{pmatrix} (p_0 - m) & 0 & -(p_3) & -(p_1 - ip_2) \\ \frac{(p_1 + ip_2)p_3}{(p_0 + m)} & \frac{-(p_3)^2 + (p_0)^2 - m^2}{(p_0 + m)} & -(p_1 + ip_2) & 0 \\ -p_3 & -(p_1 - ip_2) & (p_0 + m) & 0 \\ -\frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} & \frac{p_3}{(p_0 + m)} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

ahora multiplicamos a la fila cuatro por $(p_1 - ip_2)$ y luego esta fila resultante le sumamos simultáneamente a la fila uno de la matriz anterior, encontrándose

$$\begin{pmatrix} (p_0 - m) - \frac{(p_1 + ip_2)(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} & \frac{p_3(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} & -p_3 & 0 \\ \frac{(p_1 + ip_2)p_3}{(p_0 + m)} & \frac{(p_0)^2 - (p_3)^2 - m^2}{(p_0 + m)} & -(p_1 + ip_2) & 0 \\ -p_3 & -(p_1 - ip_2) & (p_0 + m) & 0 \\ -\frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} & \frac{p_3}{(p_0 + m)} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Seguidamente, multiplicamos la fila tres por $\frac{1}{(p_0 + m)}$ de la ecuación (1.51), luego multiplicamos esta fila resultante por (p_3) y sumamos simultáneamente este resultado a la fila uno, obteniéndose la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(p_1 + ip_2)p_3}{(p_0 + m)} & \frac{(p_0)^2 - (p_3)^2 - m^2}{(p_0 + m)} & -(p_1 + ip_2) & 0 \\ -p_3 & \frac{-(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} & 1 & 0 \\ -\frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} & \frac{p_3}{(p_0 + m)} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

ahora multiplicamos la fila tres por $(p_1 + ip_2)$ en la ecuación (1.52) y luego esta fila resultante le sumamos a la fila dos de la matriz de la ecuación anterior, encontrándose

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(p_1 + ip_2)p_3}{(p_0 + m)} - \frac{(p_1 + ip_2)p_3}{(p_0 + m)} & \frac{(p_0)^2 - (\vec{p})^2 - m^2}{(p_0 - m)} & -(p_1 + ip_2) + (p_1 + ip_2) & 0 \\ -p_3 & \frac{-(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} & 1 & 0 \\ -\frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} & \frac{p_3}{(p_0 + m)} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la relación $(p_0)^2 = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 + m^2$ reescribimos los elementos de la matriz de la ecuación anterior, de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-p_3}{(p_0 + m)} & \frac{-(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} & 1 & 0 \\ \frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} & \frac{p_3}{(p_0 + m)} & 0 & 1 \end{pmatrix} = F, \quad (1.53)$$

en donde F representa la matriz que resulta de realizar las operaciones elementales. Entonces el sistema de ecuaciones correspondientes a la matriz F es:

$$F \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-p_3}{(p_0 + m)} & \frac{-(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} & 1 & 0 \\ \frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} & \frac{p_3}{(p_0 + m)} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.54)$$

de donde encontramos las siguientes relaciones

$$w_2 = \frac{p_3}{(p_0 + m)} w_0 + \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} w_1, \quad (1.55a)$$

$$w_3 = \frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} w_0 - \frac{p_3}{(p_0 + m)} w_1. \quad (1.55b)$$

Debido a que el rango de la matriz F es 2 y el número de incógnitas es 4, es decir, mayor que el rango de la matriz D , entonces existen infinitas soluciones. Por tanto el número de variables libres es 2. Si designamos a las variables libres por w_0 y w_1 . Entonces la solución general del sistema de ecuaciones en la notación vectorial está representado por el siguiente vector columna

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \frac{p_3}{(p_0 + m)} w_0 + \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} w_1 \\ \frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} w_0 - \frac{p_3}{(p_0 + m)} w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{(p_0 + m)} \\ \frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 + m)} \end{pmatrix} w_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 + m)} \\ -\frac{p_3}{(p_0 + m)} \end{pmatrix} w_1. \quad (1.56)$$

De las ecuaciones (1.55) y (1.56) encontramos, que la ecuación de Dirac tiene dos soluciones linealmente independientes para el caso $p_0 = E_{\pm} = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}$ y son:

$$\Psi_1^{E_{\pm}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{E_{\pm} + m} p_3 \\ \frac{1}{E_{\pm} + m} (p_1 + ip_2) \end{pmatrix} e^{-i(E_{\pm} t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = u_{\pm}(E_{\pm}, \vec{p}) e^{-i(E_{\pm} t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (1.57a)$$

$$\Psi_2^{E_+}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{E_+ + m} (p_1 - ip_2) \\ \frac{1}{E_+ + m} (-p_3) \end{pmatrix} e^{-i(E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = u_2(E_+, \vec{p}) e^{-i(E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (1.57b)$$

donde $u_1(E_+, \vec{p})$ y $u_2(E_+, \vec{p})$ son matrices columna con cuatro componentes y convencionalmente representan los dos estados de espín de un electrón con energía E_+ y momentum \vec{p} .

b). Caso $p_0 = E_- = -\sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}$.

A continuación, vamos a realizar operaciones elementales en la matriz D. Utilizando la ecuación (1.49), multiplicamos la fila uno por $\frac{1}{(p_0 - m)}$, enseguida multiplicamos esta fila resultante por p_3 y la sumamos simultáneamente a la fila tres, obteniéndose la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_3}{(p_0 - m)} & -\frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 0 & (p_0 - m) & -(p_1 + ip_2) & p_3 \\ 0 & -(p_1 - ip_2) & -\frac{(p_3)^2}{(p_0 - m)} + (p_0 + m) & -\frac{p_3(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ -(p_1 + ip_2) & p_3 & 0 & (p_0 + m) \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

ahora, multiplicamos la fila uno por $(p_1 + ip_2)$ y luego esta fila resultante le sumamos simultáneamente a la fila cuatro de la matriz de la ecuación anterior, encontrándose

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_3}{(p_0 - m)} & -\frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 0 & (p_0 - m) & -(p_1 + ip_2) & p_3 \\ 0 & -(p_1 - ip_2) & \frac{-(p_3)^2 + (p_0)^2 - m^2}{(p_0 - m)} & \frac{-p_3(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 0 & p_3 & \frac{-(p_1 + ip_2)p_3}{(p_0 - m)} & \frac{-((p_1)^2 + (p_2)^2) + (p_0)^2 - m^2}{(p_0 - m)} \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Multipliquemos, primero la fila dos por $\frac{1}{(p_0 - m)}$, luego multipliquemos esta fila resultante por $(p_1 - ip_2)$ y sumando simultáneamente esta fila resultante a la fila tres de la matriz de la ecuación (1.59), obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_3}{(p_0 - m)} & -\frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 0 & 1 & -\frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 - m)} & \frac{p_3}{(p_0 - m)} \\ 0 & 0 & \frac{(p_0)^2 - (p_3)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - m^2}{(p_0 - m)} & \frac{p_3(p_1 - ip_2) - p_3(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 0 & p_3 & \frac{-(p_1 + ip_2)p_3}{(p_0 - m)} & \frac{(p_0)^2 - m^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2}{(p_0 - m)} \end{pmatrix}.$$

Utilizando la relación $(p_0)^2 = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 + m^2$ reescribimos los elementos de la matriz de la ecuación anterior, como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_3}{(p_0 - m)} & \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 0 & 1 & -\frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 - m)} & \frac{p_3}{(p_0 - m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & \frac{-(p_1 + ip_2)p_3}{(p_0 - m)} & \frac{(p_3)^2}{(p_0 - m)} \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

A continuación, pretendemos mostrar que la fila cuatro se puede reducir a una fila nula. Para esto multiplicamos primero la fila dos de la ecuación (1.60) por $(-p_3)$, luego sumando simultaneamente esta fila resultante a la fila cuatro, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_3}{(p_0 - m)} & \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 0 & 1 & -\frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 - m)} & \frac{p_3}{(p_0 - m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E, \quad (1.61)$$

en donde E representa la matriz que resulta de realizar las operaciones elementales. Entonces el sistema de ecuaciones correspondientes a la matriz E es:

$$E \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_3}{(p_0 - m)} & \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 0 & 1 & -\frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 - m)} & \frac{p_3}{(p_0 - m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0,$$

de donde encontramos las siguientes relaciones

$$w_0 = \frac{p_3}{(p_0 - m)} w_2 + \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} w_3, \quad (1.62a)$$

$$w_1 = \frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 - m)} w_2 - \frac{p_3}{(p_0 - m)} w_3. \quad (1.62b)$$

Debido a que el rango de la matriz E es 2 y el número de incógnitas es 4, es decir, mayor que el rango de la matriz D , entonces existen infinitas soluciones. Por tanto el número de variables libres es 2. Si designamos a las variables libres por w_2 y w_3 . Entonces la solución general del sistema de ecuaciones en la notación vectorial esta representado por el siguiente vector columna

$$\begin{pmatrix} \frac{p_3}{(p_0 - m)} w_2 + \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} w_3 \\ \frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 - m)} w_2 - \frac{p_3}{(p_0 - m)} w_3 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_3}{(p_0 - m)} \\ \frac{(p_1 + ip_2)}{(p_0 - m)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} w_2 + \begin{pmatrix} \frac{(p_1 - ip_2)}{(p_0 - m)} \\ -\frac{p_3}{(p_0 - m)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w_3. \quad (1.63)$$

De las ecuaciones (1.62) y (1.63) encontramos que la ecuación de Dirac tiene dos soluciones linealmente independientes para el caso $p_0 = E_- = -\sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}$ y son:

$$\Psi_3^{E_-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_- - m}(p_3) \\ \frac{1}{E_- - m}(p_1 + ip_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(E_- t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = u_3(E_-, -\vec{p}) e^{-i(E_- t - (-\vec{p}) \cdot \vec{x})}, \quad (1.64a)$$

$$\Psi_4^{E_-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_- - m}(p_1 - ip_2) \\ \frac{1}{E_- - m}(-p_3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(E_- t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = u_4(E_-, -\vec{p}) e^{-i(E_- t - (-\vec{p}) \cdot \vec{x})}. \quad (1.64b)$$

Interpretamos las matrices columna $u_3(E_-, -\vec{p})$ y $u_4(E_-, -\vec{p})$ como los dos estados de espín que representan a un electrón con energía E_- y momentum $-\vec{p}$.

Podemos adoptar una convención de signos diferentes para los parámetros \vec{p} de modo que se acomode mejor para su interpretación física. Para tal fin, en las ecuaciones (1.64) denotamos a los parámetros p_i como p'_i . Matemáticamente las soluciones son iguales.

A continuación hacemos $p'_i = -p_i$ en cada uno de los términos de la ecuación anterior (1.64a) y (1.64b) respectivamente, obteniéndose

$$\Psi_3^{E_-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{E_- - m}(p_3) \\ \frac{-1}{E_- - m}(p_1 + ip_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(E_- t - (-\vec{p}) \cdot \vec{x})}, \quad (1.64c)$$

también

$$\Psi_4^{E_-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{E_- - m}(p_1 - ip_2) \\ \frac{-1}{E_- - m}(-p_3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(E_- t - (-\vec{p}) \cdot \vec{x})}. \quad (1.64d)$$

De las ecuaciones anteriores notamos, que factorizando el signo menos dentro del paréntesis de la exponencial, podemos reescribir esta exponencial como:

$$e^{-i(E_- t - (-\vec{p}) \cdot \vec{x})} = e^{i(E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (1.65a)$$

similarmente, factorizando el signo menos dentro de las matrices columna $u_3(E_-, -\vec{p})$ y $u_4(E_-, -\vec{p})$, obtenemos las siguientes expresiones

$$u_3(E_-, -\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_+ + m} p_3 \\ \frac{1}{E_+ + m} (p_1 + ip_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.65b)$$

$$u_4(E_-, -\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_+ + m} (p_1 - ip_2) \\ \frac{1}{E_+ + m} (-p_3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.65c)$$

Combinando los resultados de las ecuaciones (1.65a), (1.65b) y (1.65c) podemos reinterpretar los $u_3(E_-, -\vec{p})$ y $u_4(E_-, -\vec{p})$, como los dos estados de espín que describen anti-electrones (positrones) de energía positiva E_+ y momentum positivo \vec{p} .

Por convención vamos a utilizar en lo sucesivo la letra v para representar estos estados de espín escribiendo:

$$\Psi_3^{E-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_+ + m} p_3 \\ \frac{1}{E_+ + m} (p_1 + ip_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = v_1(E_+, \vec{p}) e^{i(E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (1.66a)$$

también tenemos

$$\Psi_4^{E-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_+ + m} (p_1 - ip_2) \\ \frac{1}{E_+ + m} (-p_3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = v_2(E_+, \vec{p}) e^{i(E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (1.66b)$$

en donde hemos hecho

$$u_3(E_-, -\vec{p}) = v_1(E_+, \vec{p}), \quad (1.67a)$$

$$u_4(E_-, -\vec{p}) = v_2(E_+, \vec{p}). \quad (1.67b)$$

En esta notación $v_1(E_+, \vec{p})$ y $v_2(E_+, \vec{p})$ representan los dos estados de espín de un positrón con energía E_+ y momentum \vec{p} .

Usando:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma^1 p_1 + \sigma^2 p_2 + \sigma^3 p_3 = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

y escogiendo

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\uparrow \text{ spin-up}), \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\downarrow \text{ spin-down}) \quad (1.69a)$$

escribimos

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_1 = \begin{pmatrix} p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_2 = \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}. \quad (1.69b)$$

Reemplazando la ecuación (1.69) en las ecuaciones (1.57) y (1.66) obtenemos:

$$\Psi_1^{E_+}(x) = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{1}{E_+ + m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_1 \end{pmatrix} e^{-ipx} = u_1(E_+, \vec{p}) e^{-ipx}, \quad (1.70a)$$

$$\Psi_2^{E_+}(x) = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ \frac{1}{E_+ + m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_2 \end{pmatrix} e^{-ipx} = u_2(E_+, \vec{p}) e^{-ipx}, \quad (1.70b)$$

$$\Psi_3^{E_-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_+ + m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} e^{ipx} = v_1(E_+, \vec{p}) e^{ipx}, \quad (1.70c)$$

$$\Psi_4^{E_-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_+ + m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} e^{ipx} = v_2(E_+, \vec{p}) e^{ipx}. \quad (1.70d)$$

Podemos re-escribir las ecuaciones (1.70a) y (1.70b) en forma compacta si hacemos $\Psi_{1,2}^{E_+}(x) = \Psi_r^{E_+}(x)$

$$\Psi_r^{E_+}(x) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{1}{E_+ + m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_r \end{pmatrix} e^{-ipx} = u_r(E_+, \vec{p}) e^{-ipx}, \quad r = 1, 2, \quad (1.71a)$$

similarmente, podemos re-escribir las ecuaciones (1.70c) y (1.70d) en forma compac-

ta si hacemos $\Psi_{3,4}^{E_-}(x) = \Psi_{1,2}^{E_-}(x) = \Psi_r^{E_-}(x)$ encontrándose

$$\Psi_r^{E_-}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_+ + m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} e^{ipx} = v_r(E_+, \vec{p}) e^{ipx}, \quad r = 1, 2. \quad (1.71b)$$

Ortonormalizamos los estados de espín $u_r(E_+, \vec{p})$ y $v_r(E_+, \vec{p})$ exigiendo que

$$u_r^\dagger(E_+, \vec{p}) u_s(E_+, \vec{p}) = \frac{E_+}{m} \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \quad (1.72a)$$

$$v_r^\dagger(E_+, \vec{p}) v_s(E_+, \vec{p}) = \frac{E_+}{m} \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2. \quad (1.72b)$$

Utilizando las ecuaciones (1.72) encontramos

$$\Psi_r^{E_+}(x) = \sqrt{\frac{E_+ + m}{2E_+}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{1}{E_+ + m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_r \end{pmatrix} e^{-ipx} = u_r(\vec{p}) e^{-ipx}, \quad (1.73a)$$

$$\Psi_r^{E_-}(x) = \sqrt{\frac{E_+ + m}{2E_+}} \begin{pmatrix} \frac{1}{E_+ + m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} e^{ipx} = v_r(\vec{p}) e^{ipx}. \quad (1.73b)$$

en donde los estados de espín $u_r(\vec{p})$ y $v_r(\vec{p})$ están normalizados.

Utilizando la ecuación (1.73a) vamos a escribir los estados de espín del electrón normalizados, de la siguiente manera

$$u_r(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_+ + m}{2E_+}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{1}{m + E_+} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_r \end{pmatrix} = \frac{E_+ + m}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{1}{m + E_+} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_r \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} \begin{pmatrix} (E_+ + m)\chi_r \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_r \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} \begin{pmatrix} m + E_+ & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & m - E_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

reescribimos la ecuación anterior como

$$u_r(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} \left[\begin{pmatrix} E_+ & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E_+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] u_r(0),$$

en donde hemos hecho

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

y constituye una matriz columna de cuatro componentes.

Entonces, usando la representación de las matrices γ^μ escribimos la ecuación anterior como

$$u_r(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} (\gamma^0 E_+ - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m) u_r(0),$$

utilizando la definición del producto escalar de dos cuadri-vectores tenemos

$$u_r(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} (\gamma^\mu p_\mu + m) u_r(0),$$

esto nos permite escribir la ecuación anterior en términos de sus componentes espinoriales de la siguiente manera

$$(u_r(\vec{p}))_{\alpha 0} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (\not{p} + m)_{\alpha\lambda} (u_r(0))_{\lambda 0}, \quad (1.74a)$$

en donde $u_r(0)$ describe los estados de espín de un electrón en su referencial.

Similarmente, podemos escribir los estados de espín del positrón normalizados, de la siguiente forma

$$v_r(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_+ + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{1}{m + E_+} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} = \frac{E_+ + m}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} \begin{pmatrix} \frac{1}{m + E_+} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_r \\ (E_+ + m)\chi_r \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} \begin{pmatrix} -m + E_+ & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m - E_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_r \end{pmatrix},$$

reescribimos la ecuación anterior como

$$v_r(\vec{p}) = \frac{-1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} \left[\begin{pmatrix} E_+ & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E_+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] v_r(0),$$

en donde hemos hecho

$$v_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_r \end{pmatrix},$$

y representa una matriz columna de cuatro componentes.

Entonces, usando la representación de las matrices γ^μ escribimos la ecuación anterior como

$$v_r(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} (-\gamma^0 E_+ + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m) v_r(0),$$

utilizando la definición del producto escalar de dos cuadri-vectores tenemos

$$v_r(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(E_+ + m)}} (-\gamma^\mu p_\mu + m) v_r(0),$$

esto nos permite escribir la ecuación anterior en términos de sus componentes espinoriales de la siguiente manera

$$(v_r(\vec{p}))_{\alpha 0} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (m - \not{p})_{\alpha\lambda} (v_r(0))_{\lambda 0}, \quad (1.74b)$$

donde $v_r(m, 0)$ describe los estados de espín de un positrón en su referencial.

En la ecuación (1.41) habíamos definido el campo conjugado como $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x)\gamma^0$, entonces sus correspondientes estados de espín conjugados están definidos como:

$$\bar{u}_r(\vec{p}) \equiv u_r^\dagger(\vec{p})\gamma^0, \quad \bar{v}_r(\vec{p}) \equiv v_r^\dagger(\vec{p})\gamma^0, \quad (1.74c)$$

los cuales cumple las siguientes propiedades

$$\bar{u}_r(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = -\delta_{rs}, \quad \bar{u}_r(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = 0.$$

Tomando la adjunta hermitiana a ambos miembros de la ecuación (1.74a) encontramos que

$$(u_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (u_r^\dagger(0))_{0\sigma} ((\not{p} + m)_{\alpha\sigma})^\dagger,$$

de donde obtenemos

$$(u_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (u_r^\dagger(0))_{0\sigma} ((\gamma^{\mu\dagger})_{\sigma\alpha} p_\mu + \delta_{\sigma\alpha} m).$$

Usando la ecuación (1.30a) escribimos la ecuación anterior como:

$$(u_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (u_r^\dagger(0))_{0\sigma} (\gamma^0)_{\sigma\lambda} (\gamma^0)_{\lambda\sigma} ((\gamma^{\mu\dagger})_{\sigma\alpha} p_\mu + \delta_{\sigma\alpha} m),$$

ordenando convenientemente estos términos tenemos

$$(u_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (u_r^\dagger(0))_{0\sigma} (\gamma^0)_{\sigma\lambda} ((\gamma^0)_{\lambda\sigma} (\gamma^{\mu\dagger})_{\sigma\alpha} p_\mu + (\gamma^0)_{\lambda\sigma} \delta_{\sigma\alpha} m),$$

a continuación, multiplicamos por $(\gamma^0)_{\alpha\beta}$ ambos miembros de la ecuación anterior para poder construir los estados conjugados de espín del electrón

$$(u_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} (\gamma^0)_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (u_r^\dagger(0))_{0\sigma} (\gamma^0)_{\sigma\lambda} \{ (\gamma^0)_{\lambda\sigma} (\gamma^{\mu\dagger})_{\sigma\alpha} (\gamma^0)_{\alpha\beta} p_\mu +$$

$$(\gamma^0)_{\lambda\sigma} \delta_{\sigma\alpha} (\gamma^0)_{\alpha\beta} m \},$$

usando las ecuaciones (1.35) y (1.74c) en la ecuación anterior hallamos

$$(\bar{u}_r(\vec{p}))_{0\beta} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (\bar{u}_r(0))_{0\lambda} (\not{p} + m)_{\lambda\beta}, \quad (1.74d)$$

en donde $\bar{u}_r(m, 0)$ describe los estados conjugados de espín de un electrón en su referencial.

Similarmente, tomando la adjunta hermitiana a ambos miembros de la ecuación (1.74b) obtenemos

$$(v_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (v_r^\dagger(0))_{0\sigma} ((m - \not{p})_{\alpha\sigma})^\dagger,$$

de donde tenemos

$$(v_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (v_r^\dagger(0))_{0\sigma} (\delta_{\sigma\alpha}m - (\gamma^{\mu\dagger})_{\sigma\alpha}p_\mu).$$

Usando la ecuación (1.30a) escribimos la ecuación anterior como:

$$(v_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (v_r^\dagger(0))_{0\sigma} (\gamma^0)_{\sigma\lambda} (\gamma^0)_{\lambda\sigma} (\delta_{\sigma\alpha}m - (\gamma^{\mu\dagger})_{\sigma\alpha}p_\mu),$$

ordenando convenientemente estos términos obtenemos

$$(v_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (v_r^\dagger(0))_{0\sigma} (\gamma^0)_{\sigma\lambda} ((\gamma^0)_{\lambda\sigma}\delta_{\sigma\alpha}m - (\gamma^0)_{\lambda\sigma}(\gamma^{\mu\dagger})_{\sigma\alpha}p_\mu),$$

a continuación, si multiplicamos por $(\gamma^0)_{\alpha\beta}$ ambos miembros de la ecuación anterior encontramos los estados conjugados de espín del positrón

$$(v_r^\dagger(\vec{p}))_{0\alpha} (\gamma^0)_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (v_r^\dagger(0))_{0\sigma} (\gamma^0)_{\sigma\lambda} \{ (\gamma^0)_{\lambda\sigma}\delta_{\sigma\alpha}(\gamma^0)_{\alpha\beta}m - (\gamma^0)_{\lambda\sigma}(\gamma^{\mu\dagger})_{\sigma\alpha}(\gamma^0)_{\alpha\beta}p_\mu \},$$

usando las ecuaciones (1.35) y (1.74c) en la ecuación anterior hallamos

$$(\bar{v}_r(\vec{p}))_{0\beta} = \frac{1}{\sqrt{2m(m + E_+)}} (\bar{v}_r(0))_{0\lambda} (m - \not{p})_{\lambda\beta}. \quad (1.74e)$$

en donde $v_r(m, 0)$ describe los estados conjugados de espín de un positrón en su referencial.

Los resultados de la ecuación (1.74), los vamos a utilizar en el Apéndice 1A.

1.4 LA SEGUNDA CUANTIZACION DEL CAMPO DE DIRAC.

Los hechos experimentales demuestran que el número de partículas en un proceso físico a altas energías no es constante ya que ellas pueden ser creadas y aniquiladas. La representación de la ecuación de Dirac en primera cuantización no es adecuada. Por eso es más conveniente usar otra representación llamada Representación de Fock o Número de Ocupación (Segunda Cuantización), ver referencias No 3, 4, 6, 7 y 8. En dicha representación introducimos éste campo dentro de un recinto cúbico de lado L y de volumen V (un reticulado). A continuación, imponemos condiciones de periodicidad en las paredes del cubo de tal

modo que el momentum lineal \vec{p} ahora toma valores discretos. Es decir, asumimos soluciones periódicas en cada punto del espacio-tiempo. Por lo tanto una expansión general en términos de ondas planas de una solución de la ecuación de Dirac para una partícula libre es:

$$\Psi(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[c_{r,\vec{p}'} u_r(\vec{p}') e^{-ipx} + d_{r,\vec{p}'}^\dagger v_r(\vec{p}') e^{ipx} \right], \quad (1.75a)$$

usualmente $\Psi(x)$ se escribe como: $\Psi(x) = \Psi^{(+)}(x) + \Psi^{(-)}(x)$, en donde

$$\Psi^{(+)}(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{r,\vec{p}'} u_r(\vec{p}') e^{-ipx}, \quad (1.75b)$$

representa la parte de frecuencia positiva y

$$\Psi^{(-)}(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{r,\vec{p}'}^\dagger v_r(\vec{p}') e^{ipx}, \quad (1.75c)$$

representa la parte de frecuencia negativa del operador $\Psi(x)$.

De la ecuación (1.75a) notamos que la primera sumatoria en r representa la suma los estados posibles de espín, mientras que la segunda sumatoria simboliza la suma sobre todas las direcciones posibles de \vec{p} permitidos por las condiciones de contorno periódicas siendo V el volumen del reticulado. Además por conveniencia hemos denotado $E_{\vec{p}} = E_{\vec{p}'}$.

Según la ecuación (1.41) el campo conjugado está definido como $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x)\gamma^0$ y además los espinores conjugados están dados por la ecuación (1.74c):

$$u_r(\vec{p}) = u_r^\dagger(\vec{p})\gamma^0, \quad v_r(\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p})\gamma^0,$$

entonces, una expansión general del campo conjugado de Dirac $\bar{\Psi}(x)$ es:

$$\bar{\Psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[d_{r,\vec{p}'} \bar{v}_r(\vec{p}') e^{-ipx} + c_{r,\vec{p}'}^\dagger \bar{u}_r(\vec{p}') e^{ipx} \right], \quad (1.76a)$$

usualmente $\bar{\Psi}(x)$ se escribe como: $\bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}^{(+)}(x) + \bar{\Psi}^{(-)}(x)$, en donde

$$\bar{\Psi}^{(+)}(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{r,\vec{p}'} \bar{v}_r(\vec{p}') e^{-ipx}, \quad (1.76b)$$

representa la parte de frecuencia positiva y

$$\bar{\Psi}^{(-)}(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{r,\vec{p}'}^\dagger \bar{u}_r(\vec{p}') e^{ipx}, \quad (1.76c)$$

representa la parte de frecuencia negativa del operador $\bar{\Psi}(x)$.

Las interpretaciones sobre las variables r, V y $E_{\vec{p}'}$ de la ecuación (1.76) son similares a las hechas en la ecuación (1.75).

Cuando L crece indefinidamente ($L \rightarrow \infty$) tenemos la siguiente relación usual (Ver referencia No 10 pág 923):

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{p}. \quad (1.77)$$

En la Representación de Segunda Cuantización los coeficientes de las expansiones $c_{r,\vec{p}}, c_{r,\vec{p}}^\dagger, d_{r,\vec{p}}, d_{r,\vec{p}}^\dagger$ no son números ordinarios, sino son interpretados como operadores. Los coeficientes $c_{r,\vec{p}}$ y $d_{r,\vec{p}}$ se interpretan como operadores de aniquilación de electrones y positrones respectivamente. En cambio, el operador $c_{r,\vec{p}}^\dagger$ se interpreta como el operador creación de electrones e interpretamos a $d_{r,\vec{p}}^\dagger$ como el operador creación de positrones.

Debido a que los operadores $c_{r,\vec{p}}, c_{r,\vec{p}}^\dagger, d_{r,\vec{p}}, d_{r,\vec{p}}^\dagger$ obedecen la Estadística de Fermi-Dirac (ver referencias No 15 y 17), entonces ellas satisfacen las siguientes reglas de cuantización:

$$\left\{ c_{r,\vec{p}}, c_{s,\vec{p}'}^\dagger \right\} = \left\{ d_{r,\vec{p}}, d_{s,\vec{p}'}^\dagger \right\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \quad (1.78a)$$

$$\left\{ c_{r,\vec{p}}, c_{s,\vec{p}'} \right\} = \left\{ c_{r,\vec{p}}^\dagger, c_{s,\vec{p}'}^\dagger \right\} = \left\{ d_{r,\vec{p}}, d_{s,\vec{p}'} \right\} = 0, \quad (1.78b)$$

$$\left\{ d_{r,\vec{p}}^\dagger, d_{s,\vec{p}'}^\dagger \right\} = \left\{ c_{r,\vec{p}}, d_{s,\vec{p}'} \right\} = \left\{ c_{r,\vec{p}}, d_{s,\vec{p}'}^\dagger \right\} = 0, \quad (1.78c)$$

$$\left\{ c_{r,\vec{p}}^\dagger, d_{s,\vec{p}'} \right\} = \left\{ c_{r,\vec{p}}^\dagger, d_{s,\vec{p}'}^\dagger \right\} = 0. \quad (1.78d)$$

Definimos los operadores hermitianos Número de Ocupación de electrones N_r^e y Número de Ocupación de positrones N_r^p en el estado r (Ver Apéndice 1B) como:

$$N_r^e \equiv c_{r,\vec{p}}^\dagger c_{r,\vec{p}}, \quad N_r^p \equiv d_{r,\vec{p}}^\dagger d_{r,\vec{p}}.$$

En el Apéndice 1B, interpretamos el estado vacío como el estado en el cual no existen ni electrones ni positrones y se le define como:

$$c_{r,\vec{p}} |0\rangle = d_{r,\vec{p}} |0\rangle = 0, \quad \forall \vec{p}.$$

En el Apéndice 1B hemos mostrado que los operadores $c_{r,\vec{p}}, c_{s,\vec{p}'}^\dagger, d_{r,\vec{p}}, d_{r,\vec{p}}^\dagger$ satisfacen las siguientes relaciones (además ver referencias No 2 y 10):

$$\begin{aligned} c_{r,\vec{p}} |n_r\rangle &= n_r |1 - n_r\rangle, \\ c_{r,\vec{p}}^\dagger |n_r\rangle &= (1 - n_r) |1 - n_r\rangle, \\ d_{r,\vec{p}} |n_r\rangle &= n_r |1 - n_r\rangle, \\ d_{r,\vec{p}}^\dagger |n_r\rangle &= (1 - n_r) |1 - n_r\rangle. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Estas relaciones muestran que el operador $c_{r,\vec{p}}$ (ó $d_{r,\vec{p}}$) disminuyen el número de electrones (ó positrones) presentes en un estado r , en una unidad y por eso es llamado operador de aniquilación de un electrón (ó positrón). Encambio el operador $c_{r,\vec{p}}^\dagger$ (ó $d_{r,\vec{p}}^\dagger$) aumenta el número de electrones (ó positrones) presentes en un estado r , en uno; por eso es llamado operador de creación de un electrón (ó positrón).

Usando las ecuaciones (1.75), (1.76) y las relaciones de anticonmutación de la ecuación (1.78) encontraremos las relaciones de anticonmutación que satisfacen las componentes $\Psi_\alpha(x)$ y $\Psi_\beta(x')$ de los operadores $\Psi(x)$ y $\Psi(x')$ en diferentes puntos x y x' , obteniendo las siguientes posibilidades

$$\text{a.- } \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \Psi_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \Psi_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \Psi_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \Psi_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = 0, \quad (1.80)$$

$$\text{b.- } \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = 0, \quad (1.81)$$

$$\text{c.- } \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = 0, \quad (1.82)$$

$$\text{d.- } \left\{ \Psi_{\alpha}(x), \Psi_{\beta}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x) + \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \Psi_{\beta}^{(+)}(x') + \Psi_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \Psi_{\beta}^{(+)}(x') \right\} + \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \Psi_{\beta}^{(-)}(x') \right\} + \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \Psi_{\beta}^{(+)}(x') \right\} + \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \Psi_{\beta}^{(-)}(x') \right\},$$

haciendo uso de los resultados de la ecuación (1.80) obtenemos

$$\left\{ \Psi_{\alpha}(x), \Psi_{\beta}(x') \right\} = 0. \quad (1.83)$$

Similarmente si calculamos el anticonmutador

$$\text{e.- } \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}(x), \bar{\Psi}_{\beta}(x') \right\} = \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') + \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} + \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} + \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} + \left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\},$$

utilizando los resultados de la ecuación (1.81) hallamos

$$\left\{ \bar{\Psi}_{\alpha}(x), \bar{\Psi}_{\beta}(x') \right\} = 0. \quad (1.84)$$

Un anticonmutador que nos será de utilidad mas adelante es:

$$\text{f.- } \left\{ \Psi_{\alpha}(x), \bar{\Psi}_{\beta}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x) + \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') + \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} + \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} + \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} + \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\},$$

empleando los resultados de la ecuación (1.82), encontramos que solamente dos anticonmutadores del lado derecho son diferentes de cero, es decir:

$$\left\{ \Psi_{\alpha}(x), \bar{\Psi}_{\beta}(x') \right\} = \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} + \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\}. \quad (1.85)$$

A continuación, determinamos el valor del primer anticonmutador del lado derecho de la ecuación (1.85)

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} &= \Psi_{\alpha}^{(+)}(x) \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') + \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \Psi_{\alpha}^{(+)}(x) = \\ & \sum_{r, \vec{p}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{r, \vec{p}} u_{r\alpha}(\vec{p}) e^{-ipx} \sum_{s, \vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s, \vec{p}'}^{\dagger} \bar{u}_{s\beta}(\vec{p}') e^{ip'x'} + \\ & \sum_{s, \vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s, \vec{p}'}^{\dagger} \bar{u}_{s\beta}(\vec{p}') e^{ip'x'} \sum_{r, \vec{p}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{r, \vec{p}} u_{r\alpha}(\vec{p}) e^{-ipx}, \end{aligned}$$

factorizando las sumatorias, los términos $\left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}$ y ordenando convenientemente $c_{r,\vec{p}}, c_{s,\vec{p}}^\dagger, u_{r\alpha}(\vec{p}), \bar{u}_{s\beta}(\vec{p})$ encontramos

$$\left\{ \Psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x') \right\} = \sum_{r,\vec{p}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s,\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left\{ c_{r,\vec{p}}, c_{s,\vec{p}'}^\dagger \right\} \right) u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{s\beta}(\vec{p}') e^{-i(p x - p' x')},$$

usando la ecuación (1.78a) y escribiendo separadamente las sumatorias sobre \vec{p} (\vec{p}') y sobre r (s), obtenemos

$$\left\{ \Psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x') \right\} = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_{rs} \times \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \left(\sum_{r,s=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{s\beta}(\vec{p}') \right) e^{-i(p x - p' x')}, \quad (1.86)$$

y usando el hecho que

$$\sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \delta_{rs} u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{s\beta}(\vec{p}') = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}'),$$

similarmente, considerando que

$$\sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \sum_{r=1}^2 \left(\frac{1}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_{\vec{p},\vec{p}'} u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}') e^{-i(p x - p' x')} = \frac{1}{E_{\vec{p}}} \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}') e^{-ip(x-x')},$$

reemplazando éstos resultados en la ecuación (1.86) obtenemos

$$\left\{ \Psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x') \right\} = \sum_{\vec{p}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right) \sum_{r=1}^2 (u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}')) e^{-ip(x-x')},$$

substituyendo las ecuaciones (1.77) y (1A.5) (Ver Apéndice 1A) encontramos

$$\left\{ \Psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x') \right\} = \frac{m}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2mE_{\vec{p}}} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')}, \quad (1.87)$$

si escribimos $(\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')}$ como:

$$\begin{aligned} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} &= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} p_\mu e^{-ip(x-x')} + \delta_{\alpha\beta} m e^{-ip(x-x')} = \\ &= (i\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (-ip_\mu e^{-ip(x-x')}) + \delta_{\alpha\beta} m e^{-ip(x-x')} = (i\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu e^{-ip(x-x')} + \delta_{\alpha\beta} m e^{-ip(x-x')} \\ &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')}, \end{aligned} \quad (1.88)$$

y substituyendo la ecuación (1.88) en la ecuación (1.87) obtenemos

$$\left\{ \Psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x') \right\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-x')}.$$

La ecuación anterior también se puede escribir como

$$\left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = i (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \left[\frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-x')} \right] \quad (1.89)$$

donde definiendo la siguiente función,

$$\Delta^{(+)}(x-x') \equiv \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-x')}, \quad (1.89a)$$

podemos escribir la ecuación (1.89) de la siguiente manera

$$\left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} \equiv i (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x-x') = i S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'). \quad (1.90)$$

Donde hemos definido la función $S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x') \equiv (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x-x')$.

Ahora, vamos a determinar el valor del segundo anticonmutador del lado derecho de la ecuación (1.85) a partir de:

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} &= \Psi_{\alpha}^{(-)}(x) \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') + \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \Psi_{\alpha}^{(-)}(x) = \\ &\sum_{r, \vec{p}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{r, \vec{p}}^{\dagger} v_{r\alpha}(\vec{p}) e^{ipx} \sum_{s, \vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{s, \vec{p}'} \bar{v}_{s\beta}(\vec{p}') e^{-ip'x'} + \\ &\sum_{s, \vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{s, \vec{p}'} \bar{v}_{s\beta}(\vec{p}') e^{-ip'x'} \sum_{r, \vec{p}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{r, \vec{p}}^{\dagger} v_{r\alpha}(\vec{p}) e^{ipx}, \end{aligned}$$

factorizando las sumatorias, los términos $\left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{\frac{1}{2}}$ y ordenando convenientemente $d_{r, \vec{p}}^{\dagger}$,

$d_{s, \vec{p}'}$, $v_{r\alpha}(\vec{p})$, $\bar{v}_{s\beta}(\vec{p}')$ encontramos que

$$\left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \sum_{r, \vec{p}} \sum_{s, \vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left\{ d_{r, \vec{p}}^{\dagger}, d_{s, \vec{p}'} \right\} \right) v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{s\beta}(\vec{p}') e^{i(px - p'x')},$$

usando la ecuación (1.78a) y escribiendo separadamente las sumatorias sobre \vec{p} (\vec{p}')

y sobre r (s) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} &= \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_{rs} \delta_{\vec{p} \vec{p}'} \times \\ &\left(\sum_{r,s=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{s\beta}(\vec{p}') \right) e^{i(px - p'x')}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

usando el hecho que

$$\sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \delta_{rs} v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{s\beta}(\vec{p}') = \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}'),$$

similarmente, considerando que

$$\sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \sum_{r=1}^2 \left(\frac{1}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}') e^{i(p x - p' x')} = \frac{1}{E_{\vec{p}}} \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}') e^{ip(x-x')}.$$

y substituyendo éstos resultados en la ecuación (1.91), obtenemos

$$\left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \sum_{\vec{p}} \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}}} \right) \sum_{r=1}^2 (v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}')) e^{ip(x-x')},$$

reemplazando las ecuaciones (1.77) y (1A.8) (Ver Apéndice 1A) en la ecuación anterior, encontramos

$$\left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} (m - \not{p})_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}, \quad (1.92)$$

si escribimos $(m - \not{p})_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}$ como:

$$(m - \not{p})_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')} = \delta_{\alpha\beta} m e^{ip(x-x')} - (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} p_{\mu} e^{ip(x-x')} = \delta_{\alpha\beta} m e^{ip(x-x')} - (-i\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} \times \\ (ip_{\mu} e^{ip(x-x')}) = \delta_{\alpha\beta} m e^{ip(x-x')} + (i\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} \partial_{\mu} e^{ip(x-x')} = (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}, \quad (1.93)$$

y substituímos la ecuación (1.93) en la ecuación (1.92) obtenemos

$$\left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')} = \\ (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{ip(x-x')}, \\ \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = i (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \left[\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{ip(x-x')} \right], \quad (1.94)$$

donde definiendo la siguiente función,

$$\Delta^{(-)}(x - x') \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{ip(x-x')}, \quad (1.94a)$$

podemos escribir la ecuación (1.94) como

$$\left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} \equiv i (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \Delta^{(-)}(x - x') = i S_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'). \quad (1.95)$$

Donde hemos definido

$$S_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x') \equiv (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \Delta^{(-)}(x - x').$$

A continuación definimos la función

$$S_{\alpha\beta}(x - x') \equiv S_{\alpha\beta}^{(+)}(x - x') + S_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'),$$

la cual se expresa mediante la función,

$$\Delta(x - x') = \Delta^{(+)}(x - x') + \Delta^{(-)}(x - x'), \quad (1.95a)$$

de la siguiente manera

$$S_{\alpha\beta}(x - x') = (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \Delta(x - x').$$

Finalmente, sustituyendo los resultados de las ecuaciones (1.90) y (1.95) en la ecuación (1.85) encontramos:

$$\{\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(x')\} = iS_{\alpha\beta}(x-x'). \quad (1.96)$$

La importancia de las funciones $S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')$, $S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x')$ y $S_{\alpha\beta}(x-x')$ lo veremos cuando efectuemos la interpretación física del propagador de Feynman para el fermión.

A continuación, vamos a efectuar el estudio del Campo Electromagnético.

1.5 CAMPO ELECTROMAGNETICO CLASICO.

Comenzaremos esta sección desarrollando una formulación covariante del Campo Electromagnético (CEM). Este campo es descrito por los campos eléctrico $\vec{E}(x)$ y magnético $\vec{B}(x)$, los cuales son derivados desde un quadri-potencial $A^\mu(x) = (A^0(x), \vec{A}(x))$ si definimos:

$$\vec{B}(x) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(x), \quad \vec{E}(x) = -\vec{\nabla} A^0(x) - \partial_0 \vec{A}(x). \quad (1.97)$$

En una formulación covariante las cuatro componentes de $A^\mu(x)$ son tratados en forma equivalente.

Uniendo las componentes de los campos eléctrico y magnético $\vec{E}(x)$ y $\vec{B}(x)$ formamos un tensor antisimétrico $F^{\mu\nu}(x)$ cuyas componentes son iguales a $F^{ik}(x) = \epsilon^{ikl} B_l(x)$, $F^{0k}(x) = E^k(x)$, en donde ϵ^{ikl} es un tensor unitario antisimétrico y $F^{\mu\nu}(x)$ es el llamado tensor del CEM, el cual se define como:

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \begin{array}{c} \nu \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mu \downarrow \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}. \quad (1.98)$$

Empleando $F^{\mu\nu}(x)$ y la quadri-corriente eléctrica $J^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$, podemos expresar en forma covariante el primer y segundo par de ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu(x), \quad (1.99)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu F^{\nu\lambda}(x) + \partial^\nu F^{\lambda\mu}(x) = 0. \quad (1.100)$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (1.99) con respecto a ∂_μ encontramos:

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu J^\mu(x) = 0, \quad (1.101)$$

esta ecuación expresa la conservación de la quadri-corriente eléctrica.

Las componentes del tensor de campo electromagnético $F^{\mu\nu}(x)$ pueden ser expresadas en términos del quadri-potencial $A^\mu(x)$ de la siguiente manera:

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x). \quad (1.102)$$

Además, si derivamos ambos miembros de la ecuación (1.102) respecto a ∂_ν y consideramos la ecuación (1.99) obtendremos lo siguiente:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu(x) = \square A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu(x) = J^\mu(x). \quad (1.103)$$

Esta ecuación constituye un sistema de cuatro ecuaciones acopladas en derivadas parciales de segundo orden entre las componentes de $A^\mu(x)$.

El cuadri-potencial $A^\mu(x)$ determina unívocamente el CEM. Sin embargo, a un mismo campo $F^{\mu\nu}(x)$ puede corresponderle diferentes cuadri-potenciales, es decir, el cuadri-potencial $A^\mu(x)$ no está unívocamente determinado, pues es posible adicionar a $A^\mu(x)$ el cuadri-gradiente de alguna función escalar haciendo que el campo $F^{\mu\nu}(x)$ no se altere, es decir, las ecuaciones de Maxwell dadas por las ecuaciones (1.99) y (1.100) son invariantes bajo la siguiente transformación

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x), \quad (1.104)$$

en donde $f(x)$ es una función escalar arbitraria. Tal transformación es llamada una Transformación de Gauge. Por lo tanto, para algún campo dado $F^{\mu\nu}(x)$ existen muchos potenciales que difieren uno del otro por una Transformación de Gauge.

Las ecuaciones de Maxwell dadas por la ecuación (1.99) pueden ser derivadas desde la siguiente densidad lagrangiana (ella no es única):

$$\ell(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - J^\mu(x) A_\mu(x). \quad (1.105)$$

Si cada una de las cuatro componentes de $A^\mu(x)$ es considerada como un grado de libertad independiente, entonces, podemos construir el momento conjugado $\pi^\mu(x)$ de $A^\mu(x)$ a partir de $\ell(x)$, si definimos

$$\pi^\mu(x) \equiv \partial\ell(x) / \partial(\partial_0 A_\mu(x)) = -F^{\mu 0}(x), \quad (1.106)$$

si $\mu = 0$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\pi^0(x) = \partial\ell / \partial(\partial_0 A_0(x)) = 0,$$

si $\mu = k$ entonces

$$\pi^k(x) = \partial\ell / \partial(\partial_0 A_k(x)) = E^k, \quad (1.107)$$

esto nos permite ver que la principal dificultad de considerar el lagrangiano anterior está en que el momentum conjugado de $A^0(x)$ es nulo. En la Teoría Cuántica, $A^0(x)$ y $\pi^0(x)$ llegan a ser operadores que satisfacen ciertas relaciones de conmutación y debido a que $\pi^0(x)$ es cero, produce dificultades para la cuantización del CEM.

Una densidad lagrangiana apropiada para la cuantización del CEM, fue primero propuesta por Enrico Fermi, en 1930 (ver referencia No 16) y es:

$$\ell(x) = -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu(x) \partial^\nu A^\mu(x) - J^\mu(x) A_\mu(x). \quad (1.108)$$

Vamos a escribir esta ecuación por conveniencia de la siguiente manera

$$\ell(x) = -\frac{1}{2} \partial_\gamma A_\theta(x) \partial_\alpha A_\beta(x) g^{\alpha\gamma} g^{\beta\theta} - J^\mu(x) A_\mu(x). \quad (1.108a)$$

Utilizando la ecuación anterior y las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial\ell(x) / \partial A_\mu(x) - \partial_\nu (\partial\ell(x) / \partial [\partial_\nu A_\mu(x)]) = 0,$$

obtenemos

$$-J^\mu(x) + \frac{\partial_\nu}{2} \left(\delta_\gamma^\nu \delta_\theta^\mu \partial_\alpha A_\beta(x) + \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu \partial_\gamma A_\theta(x) \right) g^{\alpha\gamma} g^{\beta\theta} = 0,$$

introduciendo las componentes $g^{\alpha\gamma}$ y $g^{\beta\theta}$ dentro de los paréntesis de la ecuación anterior, hallamos

$$-J^\mu(x) + \frac{\partial_\nu}{2} \left(\delta_\gamma^\nu \delta_\theta^\mu \partial^\gamma A^\theta(x) + \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu \partial^\alpha A^\beta(x) \right) = 0,$$

de la ecuación anterior encontramos lo siguiente

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = J^\mu(x),$$

la cual también se escribe como

$$\square A^\mu(x) = J^\mu(x). \quad (1.109)$$

Esta ecuación muestra que el cuadri-potencial $A^\mu(x)$ satisface una ecuación de onda inhomogénea.

Los campos conjugados $\pi^\mu(x)$ pueden ser obtenidos a partir de la ecuación (1.108)

$$\pi^\mu(x) = \partial \ell / \partial (\partial_0 A_\mu(x)) = -\partial_0 A^\mu(x), \quad (1.110)$$

el cual no es nulo y puede ser empleado para la cuantización del CEM.

La ecuación (1.109) será equivalente a la ecuación (1.103) si el cuadri-potencial $A^\mu(x)$ satisface la condición subsidiaria de Lorentz o también llamado Gauge de Lorentz, esto es:

$$\partial_\nu A^\nu(x) = 0, \quad (1.111)$$

su imposición representa una restricción a la elección del Gauge y es una consecuencia de la no-unicidad del cuadri-potencial $A^\mu(x)$.

De las ecuaciones (1.103) o (1.109) notamos que las componentes del cuadri-potencial $A^\mu(x)$ satisfacen la ecuación de onda cuando $J^\mu(x) = 0$

$$\square A^\mu(x) = 0. \quad (1.112)$$

Esta ecuación constituye un sistema de cuatro ecuaciones desacopladas en derivadas parciales de segundo orden y junto con la ecuación (1.111) son físicamente equivalentes a las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

Como consecuencia de la ecuación (1.104), si $A^\mu(x)$ satisface la ecuación (1.103) entonces el cuadri-potencial transformado $A'^\mu(x)$ también satisface dicha ecuación.

Además, si $A^\mu(x)$ satisface la condición subsidiaria de Lorentz, entonces el cuadri-potencial transformado $A'^\mu(x)$ también debe satisfacer dicha condición subsidiaria, es decir:

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = 0. \quad (1.113)$$

Derivando respecto ∂_μ ambos miembros de la ecuación (1.104) obtenemos

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu \partial^\mu f(x), \quad (1.114)$$

utilizando los resultados de las ecuaciones (1.111) y (1.113) en la ecuación (1.114) encontramos que

$$\square f(x) = 0, \quad (1.115)$$

esta ecuación expresa una limitación en la elección de las funciones $f(x)$.

Una descripción del CEM en base al uso de los cuadri-potenciales $A^\mu(x)$, nos permite efectuar transformaciones de gauge, de tal modo que el campo $F^{\mu\nu}(x)$ permanezca invariante. En consecuencia, todas las cantidades observadas físicamente deben permanecer invariantes bajo tal transformación.

A continuación, vamos a efectuar la cuantización del CEM libre.

1.6 CUANTIZACION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO LIBRE.

Los hechos experimentales demuestran que el número de fotones que están presentes en un proceso físico a altas energías no es constante, ya que ellos pueden ser creados o aniquilados. La representación en primera cuantización de la ecuación (1.112) no es la más adecuada. Por eso es más conveniente usar otra representación llamada Representación de Fock o Representación Número de Ocupación. Aquí, también usaremos los argumentos propuestos por S. N. Gupta-K. Bleuler (ver referencias No 21 y No 22).

De manera análoga a como se hizo en el Campo de Dirac, asumimos soluciones periódicas en cada punto del espacio-tiempo. Por lo tanto una expansión general en términos de ondas planas de una solución de la ecuación (1.112) para un fotón libre es:

$$A^\mu(x) = \sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \left(a_r(\vec{k}) e^{-ikx} + a_r^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right), \quad (1.116a)$$

usualmente se escribe el operador $A^\mu(x)$ como:

$$A^\mu(x) = A^{(+)\mu}(x) + A^{(-)\mu}(x),$$

en donde

$$A^{(+)\mu}(x) = \sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ikx}, \quad (1.116b)$$

representa la parte de frecuencia positiva y

$$A^{(-)\mu}(x) = \sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}, \quad (1.116c)$$

representa la parte de frecuencia negativa del operador.

De las ecuaciones (1.116) notamos que la primera sumatoria es tomada sobre todos los vectores de onda \vec{k} permitidos por las condiciones de contorno periódicas, siendo V el volumen del reticulado y $\omega_{\vec{k}} = k^0 = \vec{k}$ representa la energía del fotón libre.

Encambio, la segunda sumatoria en r ($r = 0, 1, 2, 3$) representa una suma sobre los estados de polarización. Estos son descritos por los vectores unitarios de polarización $\epsilon_r^\mu(\vec{k})$, los cuales cumplen las siguientes relaciones de ortonormalidad y cerradura (para esto ver la referencia No 8)

$$\epsilon_{r\mu}(\vec{k}) \epsilon_s^\mu(\vec{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}, \quad r, s = 0, 1, 2, 3, \quad (1.117)$$

$$\sum_{r=0}^3 \zeta_r \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_r^\nu(\vec{k}) = -g^{\mu\nu}, \quad (1.118)$$

donde

$$\zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1.$$

En la Representación de Fock, los operadores $a_r(\vec{k})$ se interpretan como operadores de aniquilación de fotones, en cambio los $a_r^\dagger(\vec{k})$ son interpretados operadores de creación de fotones, para esto ver el Apéndice 1C.

Además, según las referencias 2, 3, 4, 8, 15, y 17, $a_r(\vec{k})$ y $a_s^\dagger(\vec{k})$ representan los operadores bosónicos de un campo vectorial no masivo (es decir obedecen la Estadística de Bose-Einstein), por lo tanto deben satisfacer las siguientes relaciones de conmutación definidas por:

$$\begin{aligned} \left[a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}') \right] &\equiv \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \\ \left[a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}') \right] &\equiv \left[a_r^\dagger(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}') \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.119)$$

A continuación, tomamos una representación específica conveniente de los vectores de polarización $\epsilon_r^\mu(\vec{k})$ de tal modo que facilite su interpretación, escogiendo

$$\begin{aligned} \epsilon_0^\mu(\vec{k}) &\equiv (1, \vec{0}), \quad r = 0, \\ \epsilon_r^\mu(\vec{k}) &\equiv (0, \vec{e}_r(\vec{k})), \quad r = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.120)$$

En tal representación escogemos los vectores unitarios $\vec{e}_1(\vec{k})$ (en el eje x_1) y $\vec{e}_2(\vec{k})$ (en el eje x_2) de tal forma que sean mutuamente ortogonales entre si y también ortogonales al vector de onda \vec{k} y al vector unitario $\vec{e}_3(\vec{k}) = \vec{k}/k_0$, eligiendo el eje x_3 a lo largo del vector de onda \vec{k} . Estos vectores unitarios deben satisfacer la siguiente relación de ortonormalidad

$$\vec{e}_i(\vec{k}) \cdot \vec{e}_j(\vec{k}) = \delta_{ij}. \quad (1.121)$$

Por lo tanto, los vectores $\epsilon_1^\mu(\vec{k})$ y $\epsilon_2^\mu(\vec{k})$ son llamados polarizaciones transversales, el vector $\epsilon_3^\mu(\vec{k})$ polarización longitudinal y finalmente el vector $\epsilon_0^\mu(\vec{k})$ polarización escalar.

Interpretamos el estado vacío $|0\rangle$ como el estado que no contiene fotones ningún tipo y se le define como:

$$\begin{aligned} a_r(\vec{k}) |0\rangle &\equiv 0, \quad \forall \vec{k}, \\ \text{o equivalentemente,} \\ A^{\mu(+)}(x) |0\rangle &= 0, \quad \forall x. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Cuando los operadores $a_r^\dagger(\vec{k})$ actúan sobre el estado vacío $|0\rangle$ crearan el estado de un fotón, de momentum \vec{k} y de estado de polarización r

$$|1, \vec{k}, r\rangle = a_r^\dagger(\vec{k}) |0\rangle. \quad (1.123)$$

Suponiendo que la norma del estado vacío es positivo definimos:

$$\langle 0 | 0 \rangle \equiv 1, \quad (1.124)$$

y usando las ecuaciones (1.122) y (1.124), podemos calcular el producto escalar de los estados $|1, \vec{k}, r\rangle$ y $|1, \vec{k}', s\rangle$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle 1, \vec{k}, r | 1, \vec{k}', s \rangle &= \langle 0 | a_r(\vec{k}) a_s^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle = \langle 0 | \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} + a_s^\dagger(\vec{k}') a_r(\vec{k}) | 0 \rangle \\ &= \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \langle 0 | 0 \rangle = \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \end{aligned} \quad (1.125)$$

De donde notamos que el estado de un fotón con polarización escalar ($r = s = 0$) tiene una pseudo-norma de valor negativa. Sin embargo para los fotones con polarización transversal y longitudinal ($r = s = 1, 2, 3$) su norma es positiva.

Esta dificultad lo analizaremos mas adelante cuando se efectue la reinterpretación de la calibración de Lorentz en la representación de segunda cuantización.

En este contexto, hemos definido en el Apéndice 1C, el operador hermitiano $N_r \equiv \zeta_r a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k})$, como el operador que representa el número de fotones con vector de propagación \vec{k} y polarización r , siendo sus autovalores iguales a $n_r = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, es decir, estos autovalores n_r son todos los enteros positivos, incluido el cero (ver Apéndice 1C).

A continuación, deseamos calcular las relaciones de conmutación de las partes de frecuencia positiva y negativa $A^\mu(x)$ y $A^\nu(x')$ en dos puntos diferentes del espacio-tiempo. Para lograr esto, usamos las ecuaciones (1.116) y (1.119) encontrándose

$$a) [A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(+)}(x')] = [A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(-)}(x')] = 0, \quad (1.126)$$

$$\begin{aligned} b) [A^\mu(x), A^\nu(x')] &= [A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x') + A^{\nu(-)}(x')] = [A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(+)}(x')] \\ &+ [A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x')] + [A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')] + [A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(-)}(x')], \end{aligned} \quad (1.127)$$

usando los resultados de la ecuación (1.126) encontramos que solamente dos conmutadores del lado derecho de la ecuación anterior son diferentes de cero

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = [A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x')] + [A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')]. \quad (1.128)$$

A continuación, determinamos el valor del primer conmutador del lado derecho de la ecuación (1.128)

$$\begin{aligned} [A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x')] &= A^{\mu(+)}(x) A^{\nu(-)}(x') - A^{\nu(-)}(x') A^{\mu(+)}(x) = \\ &\sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ikx} \sum_{\vec{k}', s} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_s^\nu(\vec{k}') a_s^\dagger(\vec{k}') e^{ik'x'} - \\ &\sum_{\vec{k}', s} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_s^\nu(\vec{k}') a_s^\dagger(\vec{k}') e^{ik'x'} \sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ikx} = \end{aligned}$$

factorizando las sumatorias sobre \vec{k}, r, \vec{k}', s , los vectores de polarización $\epsilon_r^\mu(\vec{k})$, $\epsilon_s^\nu(\vec{k}')$ y ordenando convenientemente el conmutador de los operadores $a_r(\vec{k})$, $a_s^\dagger(\vec{k}')$ obtenemos

$$[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x')] = \sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}', s} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_s^\nu(\vec{k}') \times$$

$$\left\{ \left[a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}') \right] e^{-i(kx - k'x')} \right\}. \quad (1.129)$$

Usando la ecuación (1.119) simplificamos el conmutador de la ecuación (1.129), hallandose

$$\left[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x') \right] = \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', s} \frac{1}{2V} \left(\frac{1}{\sqrt{w_{\vec{k}} w_{\vec{k}'}}} \right) c_r^\mu(\vec{k}) c_s^\nu(\vec{k}') \left\{ \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{-i(kx - k'x')} \right\},$$

factorizando ζ_r y escribiendo por separado tanto las sumatorias sobre \vec{k}, \vec{k}' y sobre r, s obtenemos

$$\left[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x') \right] = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{2V} \left(\frac{1}{\sqrt{w_{\vec{k}} w_{\vec{k}'}}} \right) \sum_{r, s} \zeta_r c_r^\mu(\vec{k}) c_s^\nu(\vec{k}') \times \delta_{rs} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{-i(kx - k'x')}. \quad (1.130)$$

Utilizando la relación de ortonormalidad

$$\sum_{r, s} \zeta_r c_r^\mu(\vec{k}) c_s^\nu(\vec{k}') \delta_{rs} = \sum_r \zeta_r c_r^\mu(\vec{k}) c_r^\nu(\vec{k}'),$$

además el hecho que

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left(\frac{1}{\sqrt{w_{\vec{k}} w_{\vec{k}'}}} \right) \sum_r \zeta_r c_r^\mu(\vec{k}) c_r^\nu(\vec{k}') \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{-i(kx - k'x')} &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left(\frac{1}{\sqrt{w_{\vec{k}} w_{\vec{k}'}}} \right) \sum_r \zeta_r c_r^\mu(\vec{k}) \times \\ c_r^\nu(\vec{k}') \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{-i(k_0 x_0 - k'_0 x'_0)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k}' \cdot \vec{x}')} &= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{w_{\vec{k}}} \right) \sum_r \zeta_r c_r^\mu(\vec{k}) c_r^\nu(\vec{k}) e^{-ik_0(x_0 - x'_0)} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\ &= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{w_{\vec{k}}} \right) \sum_r \zeta_r c_r^\mu(\vec{k}) c_r^\nu(\vec{k}) e^{-ik(x - x')}, \end{aligned}$$

similarmente, usando la propiedad de cerradura

$$\sum_r \zeta_r c_r^\mu(\vec{k}) c_r^\nu(\vec{k}) = -g^{\mu\nu},$$

y considerando que nos vamos al continuo

$$\left(\frac{1}{V} \right) \sum_{\vec{k}} e^{-ik(x - x')} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} e^{-ik(x - x')}.$$

Entonces, reemplazando éstos resultados en la ecuación (1.130) y factorizando $-g^{\mu\nu}$ encontramos

$$\left[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x') \right] = -ig^{\mu\nu} \left(\frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{k} \left(\frac{1}{2w_{\vec{k}}} \right) e^{-ik(x - x')} \right), \quad (1.131)$$

si definimos la función $\Delta^{(+)}(x - x')$ para el fotón como

$$\Delta^{(+)}(x - x') = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{k} \left(\frac{1}{2w_{\vec{k}}} \right) e^{-ik(x - x')},$$

entonces podemos escribir

$$\left[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x') \right] = i \left(-g^{\mu\nu} \Delta^{(+)}(x - x') \right) = i D^{\mu\nu(+)}(x - x'). \quad (1.132)$$

Ahora, determinamos el segundo conmutador del lado derecho de la ecuación (1.128) para tener

$$\begin{aligned} [A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')] &= A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') - A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(-)}(x) = \\ &\sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} c_r^{\mu}(\vec{k}) a_r^{\dagger}(\vec{k}) e^{ikx} \sum_{\vec{k}', s} \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} c_s^{\nu}(\vec{k}') a_s(\vec{k}') e^{-ik'x'} - \\ &\sum_{\vec{k}', s} \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} c_s^{\nu}(\vec{k}') a_s(\vec{k}') e^{-ik'x'} \sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} c_r^{\mu}(\vec{k}) a_r^{\dagger}(\vec{k}) e^{ikx}, \end{aligned}$$

factorizando tanto las sumatorias sobre \vec{k}, r, \vec{k}', s , así como los vectores de polarización $c_r^{\mu}(\vec{k}), c_s^{\nu}(\vec{k}')$ y ordenando convenientemente el conmutador de los operadores $a_r^{\dagger}(\vec{k}), a_s(\vec{k}')$ obtenemos

$$\begin{aligned} [A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')] &= \sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}', s} \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} c_r^{\mu}(\vec{k}) \times \\ &c_s^{\nu}(\vec{k}') \{ [a_r^{\dagger}(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] \} e^{i(kx - k'x')}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Utilizando la ecuación (1.119) simplificamos el conmutador de la ecuación (1.133) encontrándose

$$[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')] = \sum_{\vec{k}, r, \vec{k}', s} \left(\frac{1}{2V\sqrt{w_{\vec{k}}w_{\vec{k}'}}} \right) c_r^{\mu}(\vec{k}) c_s^{\nu}(\vec{k}') \{ -\zeta_r \delta_{rs} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} e^{i(kx - k'x')} \},$$

factorizando ζ_r y escribiendo por separado tanto las sumatorias sobre \vec{k}, \vec{k}' y sobre r, s hallamos

$$[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')] = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left(\frac{-1}{2V\sqrt{w_{\vec{k}}w_{\vec{k}'}}} \right) \sum_{r, s} \zeta_r c_r^{\mu}(\vec{k}) c_s^{\nu}(\vec{k}') \delta_{rs} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} e^{i(kx - k'x')}. \quad (1.134)$$

Utilizando la relación de ortonormalidad

$$\sum_{r, s} \zeta_r c_r^{\mu}(\vec{k}) c_s^{\nu}(\vec{k}') \delta_{rs} = \sum_r \zeta_r c_r^{\mu}(\vec{k}) c_r^{\nu}(\vec{k}'),$$

además el hecho que

$$\sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left(\frac{1}{\sqrt{w_{\vec{k}}w_{\vec{k}'}}} \right) \sum_r \zeta_r c_r^{\mu}(\vec{k}) c_r^{\nu}(\vec{k}') \delta_{\vec{k}\vec{k}'} e^{i(kx - k'x')} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left(\frac{1}{\sqrt{w_{\vec{k}}w_{\vec{k}'}}} \right) \sum_r \zeta_r c_r^{\mu}(\vec{k}) \times$$

$$c_r^{\nu}(\vec{k}') \delta_{\vec{k}\vec{k}'} e^{i(k_0x_0 - k'_0x'_0)} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k}' \cdot \vec{x}')} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{w_{\vec{k}}} \right) \sum_r \zeta_r c_r^{\mu}(\vec{k}) c_r^{\nu}(\vec{k}) e^{ik_0(x_0 - x'_0)} \times$$

$$e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{w_{\vec{k}}} \right) \sum_r \zeta_r c_r^{\mu}(\vec{k}) c_r^{\nu}(\vec{k}) e^{ik(x - x')},$$

similarmente, usando la propiedad de cerradura

$$\sum_r \zeta_r c_r^{\mu}(\vec{k}) c_r^{\nu}(\vec{k}) = -g^{\mu\nu},$$

y considerando que nos vamos al continuo

$$\left(\frac{1}{V}\right) \sum_{\vec{k}} e^{ik(x-x')} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} e^{ik(x-x')}.$$

Entonces, reemplazando éstos resultados en la ecuación (1.134) y factorizando $-g^{\mu\nu}$ hallamos

$$[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')] = -ig^{\mu\nu} \left(\frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{k} \left(\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \right) e^{ik(x-x')} \right),$$

lo cual podemos escribir como

$$[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')] = -ig^{\mu\nu} (\Delta^{(-)}(x-x')),$$

definiendo la función $\Delta^{(-)}(x-x')$ para el fotón como

$$\Delta^{(-)}(x-x') \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{k} \left(\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \right) e^{ik(x-x')},$$

entonces podemos escribir el conmutador de la siguiente forma

$$[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x')] = i(-g^{\mu\nu} \Delta^{(-)}(x-x')) = iD^{\mu\nu(-)}(x-x'). \quad (1.135)$$

Por lo tanto de las ecuaciones (1.132) y (1.135) definimos la función

$$D^{\mu\nu}(x-x') = D^{\mu\nu(+)}(x-x') + D^{\mu\nu(-)}(x-x'),$$

la cual, se expresa mediante la función $\Delta(x-x')$ definida en la ecuación (1.95a) como:

$$\Delta(x-x') = \Delta^{(+)}(x-x') + \Delta^{(-)}(x-x'),$$

de la siguiente manera

$$D^{\mu\nu}(x-x') = -g^{\mu\nu} \Delta(x-x'). \quad (1.136)$$

Finalmente, substituyendo los resultados de las ecuaciones (1.132), (1.135) (1.136) en la ecuación (1.127), encontramos:

$$[A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = -ig^{\mu\nu} \Delta(x-x') = iD^{\mu\nu}(x-x'). \quad (1.137)$$

En el Capítulo 2 efectuaremos la interpretación física de las funciones $D^{\mu\nu(\pm)}(x)$ y de su equivalencia en términos de otras funciones.

Derivando el conmutador de la ecuación (1.137) con respecto a ∂_{μ} tenemos

$$\partial_{\mu} [A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = \partial_{\mu} (iD^{\mu\nu}(x-x')),$$

esta derivada afecta solamente al operador $A^{\mu}(x)$ hallandose

$$[\partial_{\mu} A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = i\partial_{\mu} D^{\mu\nu}(x-x'). \quad (1.138)$$

Desgraciadamente este resultado no es cero y llega a ser incompatible con la condición de Lorentz. Surgió entonces un problema de interpretación de esta condición en la Representación de Fock. Este problema fue resuelto por S. N. Gupta y K. Bleuler (ver referencias No 8, 21 y 22) quienes reemplazaron la condición de Lorentz por la siguiente condición más débil

$$\partial_{\mu} A^{\mu(+)}(x) | \Psi \rangle = 0, \quad (1.139)$$

esta ecuación contiene solamente la parte de frecuencia positiva del operador $A^{\mu}(x)$ y expresa una restricción impuesta a los estados permitidos $| \Psi \rangle$ del CEM,

es decir, solamente serán estados del CEM, aquellos que cumplen con la condición, débil (ver referencia No 8).

Tomando la adjunta hermitiana de la ecuación (1.139) obtenemos:

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^{\mu (-)}(x) = 0, \quad (1.140)$$

tomando el producto escalar de la ecuación (1.139) por la izquierda con $\langle \Psi |$ y de la ecuación (1.140) por su lado derecho y a continuación sumamos una con la otra, obtenemos el valor esperado de la condición de Lorentz en el estado $|\Psi\rangle$,

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^{\mu (+)}(x) + \partial_\mu A^{\mu (-)}(x) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \Psi \rangle = 0. \quad (1.141)$$

Esta ecuación constituye una reinterpretación de la ecuación (1.111) en la representación de segunda cuantización.

Utilizando la parte de frecuencia positiva del operador $A^\mu(x)$ en la ecuación (1.139), encontramos

$$\partial_\mu \left(\sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} c_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ikx} \right) | \Psi \rangle = \sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} c_r^\mu(\vec{k}) \times$$

$$a_r(\vec{k}) \partial_\mu e^{-ikx} | \Psi \rangle = 0,$$

efectuando la derivada ∂_μ de la función e^{-ikx} tenemos

$$\sum_{\vec{k}, r} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^3 c_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) (-ik_\mu) | \Psi \rangle = 0,$$

luego, eliminando tanto la constante $\left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}}$ como la función e^{-ikx} y además considerando que los coeficientes de la sumatoria en \vec{k} son nulos escribimos

$$\sum_{r=0}^3 c_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) (-ik_\mu) | \Psi \rangle = 0,$$

de donde hallamos

$$\sum_{r=0}^3 c_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) k_\mu | \Psi \rangle = 0, \quad (1.142)$$

expandiendo la sumatoria sobre los estados de polarización obtenemos:

$$\{ c_0^\mu(\vec{k}) k_\mu a_0(\vec{k}) + c_1^\mu(\vec{k}) k_\mu a_1(\vec{k}) + c_2^\mu(\vec{k}) k_\mu a_2(\vec{k}) + c_3^\mu(\vec{k}) k_\mu a_3(\vec{k}) \} | \Psi \rangle = 0. \quad (1.143)$$

A continuación, hacemos uso de las ecuaciones (1.117), (1.118) y (1.120) para calcular los siguientes productos escalares

$$c_0^\mu(\vec{k}) k_\mu = (1, \vec{0}) \cdot (k_0, -\vec{k}) = k_0, \quad (1.144)$$

este resultado solamente depende de las componentes escalares del vector $c_0^\mu(\vec{k})$ y del cuadri-vector de onda k_μ .

$$c_1^\mu(\vec{k}) k_\mu = (0, \vec{e}_1(\vec{k})) \cdot (k_0, -\vec{k}) = \vec{e}_1(\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) = 0, \quad (1.145)$$

$$\epsilon_2''(\vec{k})k_\mu = (0, \vec{c}_2(\vec{k}))(k_0, -\vec{k}) = \vec{c}_2(\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) = 0. \quad (1.146)$$

El valor cero de estas ecuaciones es una consecuencia de la ortogonalidad de los vectores $\epsilon_1'(\vec{k})$, $\vec{c}_2(\vec{k})$ y \vec{k} .

$$\epsilon_3''(\vec{k})k_\mu = (0, \vec{k} / |\vec{k}|)(k_0, -\vec{k}) = -|\vec{k}| = -k_0. \quad (1.147)$$

Este valor solamente depende de las componentes espaciales del vector $\epsilon_0''(\vec{k})$ y del cuadri-vector de onda k_μ .

Reemplazando los resultados de la ecuación (1.144), (1.145), (1.146) y (1.147) en la ecuación (1.142), encontramos:

$$[k_0 a_0(\vec{k}) - k_0 a_3(\vec{k})] |\Psi\rangle = 0,$$

factorizando k_0 tenemos

$$k_0 [a_3(\vec{k}) - a_0(\vec{k})] |\Psi\rangle = 0. \quad \forall \vec{k}. \quad (1.148)$$

Esta ecuación expresa que en cada estado $|\Psi\rangle$ que caracterizan al CEM, existe una combinación de fotones longitudinales y escalares $|\Psi\rangle$, los cuales están caracterizados por un vector de onda \vec{k} (ver referencia No 8).

A partir de la ecuación (1.148) podemos encontrar lo siguiente

$$a_3(\vec{k}) |\Psi\rangle = a_0(\vec{k}) |\Psi\rangle, \quad (1.149)$$

tomando la adjunta hermitiana de la ecuación (1.149), obtenemos:

$$\langle \Psi | a_3^\dagger(\vec{k}) = \langle \Psi | a_0^\dagger(\vec{k}), \quad (1.150)$$

multiplicando las ecuaciones (1.150) y (1.149) en este orden encontramos

$$\langle \Psi | -a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) |\Psi\rangle = -\langle \Psi | a_3^\dagger(\vec{k}) a_3(\vec{k}) |\Psi\rangle. \quad (1.151)$$

Esta ecuación nos indica que el valor esperado en el estado $|\Psi\rangle$ del número de fotones escalares es igual a menos el valor esperado del número de fotones longitudinales que están presentes en el mismo estado.

Como ejemplo, vamos a calcular el valor esperado en un estado permitido $|\Psi\rangle$ de la energía del CEM. Esta energía (ver referencias No 3, 4, 8 y 10) está definida de la siguiente manera:

$$H \equiv \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1}^2 w_{\vec{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}),$$

de donde expandiendo la sumatoria sobre los estados de polarización, obtenemos:

$$H = \sum_{\vec{k}} w_{\vec{k}} \{-a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) + a_1^\dagger(\vec{k}) a_1(\vec{k}) + a_2^\dagger(\vec{k}) a_2(\vec{k}) + a_3^\dagger(\vec{k}) a_3(\vec{k})\},$$

luego, calculamos el valor esperado de la energía en el estado $|\Psi\rangle$

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_{\vec{k}} w_{\vec{k}} \langle \Psi | \{-a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) + a_1^\dagger(\vec{k}) a_1(\vec{k}) + a_2^\dagger(\vec{k}) a_2(\vec{k}) + a_3^\dagger(\vec{k}) a_3(\vec{k})\} | \Psi \rangle,$$

usando el resultado de la ecuación (1.151) en la ecuación anterior, encontramos:

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_{\vec{k}} w_{\vec{k}} \{ \langle \Psi | a_1^\dagger(\vec{k}) a_1(\vec{k}) + a_2^\dagger(\vec{k}) a_2(\vec{k}) | \Psi \rangle \},$$

lo también se puede escribir como

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1}^2 w_{\vec{k}} \langle \Psi | a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) | \Psi \rangle,$$

o en términos del operador número de partículas

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1}^2 w_{\vec{k}} \langle \Psi | N_r(\vec{k}) | \Psi \rangle. \quad (1.152)$$

De la ecuación (1.152), notamos que solamente los fotones transversales contribuyen al valor esperado de la energía, esto es una consecuencia de la condición de Lorentz y es cierto para todos los observables físicos. Lo cual, nos permite explicar porque los fotones longitudinales y escalares no son observados como partículas libres. Siendo solamente los fotones transversales observados y correspondiendo a dos grados de libertad (para cada \vec{k}) del CEM.

Mientras que los otros dos grados de libertad restantes para cada \vec{k} son eliminados, uno de ellos debido a la imposición de la condición de Lorentz y el otro debido a la arbitrariedad en la elección del gauge.

APENDICE 1A.

LOS PROYECTORES DE ENERGIA POSITIVA $(\Lambda_+)_{\alpha\beta}$ Y NEGATIVA $(\Lambda_-)_{\alpha\beta}$

En este Apéndice, encontraremos las expresiones para los operadores de proyección de energía positiva y energía negativa utilizando la relación de completitud para los estados de espín $u_{r\alpha}(\vec{p})$ y $\bar{u}_{r\alpha}(\vec{p})$ dada por la referencia 8 (pág. 332):

$$\sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(\vec{p})\bar{u}_{r\beta}(\vec{p}) - v_{r\alpha}(\vec{p})\bar{v}_{r\beta}(\vec{p})] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1A.1)$$

Utilizando las ecuaciones (1.70a), (1.70b) y (1.73a), definimos el proyector de energía positiva como:

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} \equiv \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p})\bar{u}_{r\beta}(\vec{p}) = \left(\frac{m + E_+}{2m}\right) \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(E_+, \vec{p})\bar{u}_{r\beta}(E_+, \vec{p}),$$

a continuación, empleamos las ecuaciones (1.74a) y (1.74d) para expresar los estados de espín $u_{r\alpha}(\vec{p})$ y $\bar{u}_{r\alpha}(\vec{p})$ en función de los estados de espín en reposo

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \sum_{r=1}^2 \frac{1}{2m(m + E_+)} \left(\frac{m + E_+}{2m}\right) (\not{p} + m)_{\alpha\lambda} (u_r(m, 0))_{\lambda 0} (\bar{u}_r(m, 0))_{0\lambda} (\not{p} + m)_{\lambda\beta},$$

simplificando los términos semejantes y ordenando convenientemente los elementos matriciales $(\not{p} + m)_{\alpha\lambda}$, $(\not{p} + m)_{\lambda\beta}$ y los estados de espín $(u_r(m, 0))_{\lambda 0}$ y $(\bar{u}_r(m, 0))_{0\lambda}$ obtenemos:

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2m)^2} \left[(\not{p} + m)_{\alpha\beta}^2 \sum_{r=1}^2 (u_r(m, 0))_{\lambda 0} (\bar{u}_r(m, 0))_{0\lambda} \right].$$

Utilizando la relación de completitud para los estados de espín $u_r(m, 0)$ y $\bar{u}_r(m, 0)$ reescribimos la ecuación anterior, como:

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2m)^2} (\not{p} + m)_{\alpha\beta}^2 (1),$$

desarrollando el binomio al cuadrado obtenemos

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2m)^2} (\not{p}^2 + 2m \not{p} + m^2)_{\alpha\beta}, \quad (1A.2)$$

utilizando las ecuaciones (1.30a) y (1.30b) podemos calcular lo siguiente

$$\not{p}^2 = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\mu p_\mu = \gamma^\mu \gamma^\mu p_\mu p_\mu = \gamma^0 \gamma^0 p_0 p_0 + \gamma^k \gamma^k p_k p_k = (p_0)^2 - (p_k p_k) = p^0 p_0 + p^k p_k = p^2 = E^2 - (\vec{p})^2 = m^2. \quad (1A.3)$$

Reemplazando la ecuación (1A.3) en la ecuación (1A.2) hallamos

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2m)^2} (\not{p}^2 + 2m \not{p} + m^2)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2m)^2} (2m^2 + 2m \not{p})_{\alpha\beta}, \quad (1A.4)$$

simplificando los términos semejantes en la ecuación anterior, encontramos:

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m} (m + \not{p})_{\alpha\beta}. \quad (1A.5)$$

El operador de proyección de energía positiva $(\Lambda_+)_{\alpha\beta}$ proyecta una función de onda $\Psi(x)$ que satisface la ecuación de Dirac sobre un sub-espacio formado por el producto tensorial del espacio de Hilbert y del espacio espinorial (formado por

los estados de espín del electrón). Dicho sub-espacio está formado por todas las soluciones de energía positiva $\Psi_r^{E_+}(x)$ de la ecuación de Dirac.

Similarmente, utilizando las ecuaciones (1.70c), (1.70d) y (1.73b), definimos el proyector de energía negativa de la siguiente manera

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} \equiv - \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}) = - \left(\frac{m + E_-}{2m} \right) \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(E_+, \vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(E_+, \vec{p}),$$

a continuación, empleamos las ecuaciones (1.74b) y (1.74c) para expresar los estados de espín $v_{r\alpha}(\vec{p})$ y $\bar{v}_{r\beta}(\vec{p})$ en función de los estados de espín en reposo

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \sum_{r=1}^2 \frac{-1}{2m(m + E_+)} \left(\frac{m + E_+}{2m} \right) (m - \not{p})_{\alpha\lambda} (v_r(m, 0))_{\lambda 0} (\bar{v}_r(m, 0))_{0\lambda} (m - \not{p})_{\lambda\beta},$$

simplificando los términos semejantes y ordenando convenientemente los elementos matriciales $(m - \not{p})_{\alpha\lambda}$, $(m - \not{p})_{\lambda\beta}$, así como los estados de espín $(v_r(m, 0))_{\lambda 0}$ y $(\bar{v}_r(m, 0))_{0\lambda}$ obtenemos la siguiente expresión

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \frac{-1}{(2m)^2} \left[(m - \not{p})_{\alpha\beta}^2 \sum_{r=1}^2 (v_r(m, 0))_{\lambda 0} (\bar{v}_r(m, 0))_{0\lambda} \right].$$

Utilizando la relación de completitud para los estados de espín $v_r(m, 0)$ y $\bar{v}_r(m, 0)$ escribimos la ecuación anterior como

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \frac{-1}{(2m)^2} (m - \not{p})_{\alpha\beta}^2 (-1),$$

desarrollando el binomio al cuadrado obtenemos

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2m)^2} (\not{p}^2 - 2m \not{p} + m^2)_{\alpha\beta}, \quad (1A.6)$$

reemplazando la ecuación (1A.3) en la ecuación (1A.6) hallamos

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2m)^2} (2m^2 - 2m \not{p})_{\alpha\beta}.$$

A continuación, agrupamos convenientemente los términos que están entre paréntesis en la ecuación anterior, para tener

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2m)^2} (2m(m - \not{p}))_{\alpha\beta}, \quad (1A.7)$$

simplificando los términos semejantes de la ecuación anterior, encontramos:

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m} (m - \not{p})_{\alpha\beta}. \quad (1A.8)$$

El operador de proyección de energía negativa $(\Lambda_-)_{\alpha\beta}$ proyecta una función de onda $\Psi(x)$ que satisface la ecuación de Dirac sobre un sub-espacio formado por el producto tensorial del espacio de Hilbert y del espacio espinorial (formado por los estados de espín del positrón). Dicho sub-espacio está formado por todas las soluciones de energía positiva del positrón que satisfacen la ecuación de Dirac.

CAPITULO 2. LA IMAGEN DE INTERACCION, LA MATRIZ "S" Y EL TEOREMA DE WICK.

2.1. INTRODUCCION.

En este capitulo formularemos una imagen intermedia entre las imágenes de Schrödinger (IS) y Heisenberg (IH) que nos permita por conveniencia simplificar los cálculos, cuando efectuemos la solución de problemas específicos.

Fue introducida en la EDC de una manera covariante por Tomonaga y Schwinger recibiendo el nombre de Imagen de Interacción (II) (ver referencia 18).

El formalismo de Teoría de Perturbación, nos servirá para calcular los elementos matriciales del Operador de Dispersión o Matriz "S", mostrando su expansión en serie de potencias de la constante de acoplamiento $\alpha = 1/137$. Finalmente, veremos la utilidad del Teorema de Wick y su aplicación en la Matriz "S".

En lo sucesivo, vamos a convenir en considerar que los sub-índices I, S, H indican ya sea la Imagen de Interacción, Schrödinger y Heisenberg respectivamente.

2.2 LAS IMAGENES DE SCHRÖDINGER, HEISENBERG E INTERACCION.

En la IS los operadores que representan a observables físicos son independientes del tiempo, mientras que los vectores de estado que describen el comportamiento dinámico de un sistema físico, varían con el tiempo y son determinados por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{d}{dt} |\Phi_S(t)\rangle = H_S |\Phi_S(t)\rangle, \quad (2.1)$$

donde H_S es el operador Hamiltoniano y representa la energía total del sistema. Una solución formal de la ecuación (2.1) es:

$$|\Phi_S(t)\rangle = e^{-iH_S(t-t_0)} |\Phi_S(t_0)\rangle, \quad (2.2)$$

donde $U_S(t-t_0) = e^{-iH_S(t-t_0)}$ es el operador de evolución que une el vector de estado en el instante inicial $|\Phi_S(t_0)\rangle$ y el vector de estado $|\Phi_S(t)\rangle$ para $t \neq t_0$.

Encambio, en la IH los operadores que representan cantidades físicas varían con el tiempo y sus vectores de estado representados por $|\Phi_{II}\rangle$ son fijos.

En el instante inicial $t = t_0$ definimos:

$$|\Phi_{II}\rangle \equiv |\Phi_S(t_0)\rangle. \quad (2.3)$$

Utilizando las ecuaciones (2.2) y (2.3), calculamos el valor esperado de un operador ϑ_S escrito en la IS en el estado $|\Phi_S(t)\rangle$ como:

$$\langle \Phi_S(t) | \vartheta_S | \Phi_S(t) \rangle = \langle \Phi_{II} | e^{iH_S(t-t_0)} \vartheta_S e^{-iH_S(t-t_0)} | \Phi_{II} \rangle. \quad (2.4)$$

Interpretamos la ecuación (2.4) como el valor esperado en el estado $|\Phi_{II}\rangle$, del operador

$$\vartheta_{II}(t) \equiv e^{iH_S(t-t_0)} \vartheta_S e^{-iH_S(t-t_0)} = U_S^\dagger(t-t_0) \vartheta_S U_S(t-t_0), \quad (2.5)$$

el cual depende del tiempo.

De la ecuación (2.5) notamos que en $t = t_0$, tenemos

$$\vartheta_{II}(t = t_0) = \vartheta_S. \quad (2.6)$$

Esta ecuación significa que en el instante inicial los operadores escritos en la IH son iguales a los operadores escritos de la IS.

En resumen de las ecuaciones (2.2) y (2.5) la transformación unitaria que nos permita pasar desde la IH a la IS es:

$$|\Phi_S(t)\rangle = e^{-iH_S(t-t_0)} |\Phi_{II}\rangle, \quad \vartheta_S = e^{-iH_S(t-t_0)} \vartheta_{II}(t) e^{iH_S(t-t_0)}. \quad (2.7)$$

Derivando la ecuación (2.5) término a término con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \vartheta_{II}(t) = \left\{ \frac{d}{dt} \left(e^{iH_S(t-t_0)} \right) \vartheta_S e^{-iH_S(t-t_0)} + e^{iH_S(t-t_0)} \vartheta_S \frac{d}{dt} \left(e^{-iH_S(t-t_0)} \right) \right\},$$

y desarrollando las derivadas en el lado derecho obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \vartheta_{II}(t) = \left\{ e^{iH_S(t-t_0)} (iH_S) \vartheta_S e^{-iH_S(t-t_0)} + e^{iH_S(t-t_0)} \vartheta_S e^{-iH_S(t-t_0)} (-iH_S) \right\}. \quad (2.8)$$

Usando el hecho que $U_S(t-t_0) \equiv e^{-iH_S(t-t_0)}$ puede ser expandido en una serie de potencias de H_S , se tiene $[U_S(t-t_0), H_S] = 0$, entonces el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.8) puede ser reordenado convenientemente encontrándose

$$\frac{d}{dt} \vartheta_{II}(t) = i \left\{ e^{iH_S(t-t_0)} (H_S) \vartheta_S e^{-iH_S(t-t_0)} - e^{iH_S(t-t_0)} \vartheta_S (H_S) e^{-iH_S(t-t_0)} \right\},$$

como $U_S(t-t_0)$ es un operador unitario, reescribimos la ecuación anterior como

$$\frac{d}{dt} \vartheta_{II}(t) = i \left\{ e^{iH_S(t-t_0)} H_S e^{-iH_S(t-t_0)} e^{iH_S(t-t_0)} \vartheta_S e^{-iH_S(t-t_0)} - e^{iH_S(t-t_0)} \vartheta_S e^{-iH_S(t-t_0)} e^{iH_S(t-t_0)} H_S e^{-iH_S(t-t_0)} \right\},$$

utilizando la ecuación (2.5) en la ecuación anterior tenemos

$$\frac{d}{dt} \vartheta_{II}(t) = i \left\{ H_{II}(t) \vartheta_{II}(t) - \vartheta_{II}(t) H_{II}(t) \right\}, \quad (2.9)$$

lo cual también se escribe como

$$i \frac{d}{dt} \vartheta_{II}(t) = [\vartheta_{II}(t), H_{II}(t)]. \quad (2.10)$$

Empleando la ecuación (2.5) y el hecho que $[U_S(t-t_0), H_S] = 0$, calculamos una expresión equivalente para

$$H_{II}(t) = e^{iH_S(t-t_0)} H_S e^{-iH_S(t-t_0)} = e^{iH_S(t-t_0)} e^{-iH_S(t-t_0)} H_S = H_S. \quad (2.11)$$

Esta ecuación muestra que los operadores escritos en la IH en cualquier instante de tiempo t son iguales a los operadores escritos en la IS.

Reemplazando la ecuación (2.11) en la ecuación (2.10) encontramos

$$i \frac{d}{dt} \vartheta_{II}(t) = [\vartheta_{II}(t), H_S]. \quad (2.12)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de movimiento de Heisenberg y expresa la evolución en el tiempo de los observables físicos, con la condición inicial $\vartheta_{II}(t = t_0) = \vartheta_S$.

Para introducir la II en la EDC, consideramos que el Hamiltoniano total H_S de un sistema físico, puede ser escrito en la forma

$$H_S = H_0 + H_I, \quad (2.13)$$

donde usualmente H_0 es el Hamiltoniano del campo libre, mientras que H_I es el Hamiltoniano responsable de la interacción.

Reemplazando la ecuación (2.13) en la ecuación (2.2) hallamos:

$$|\Phi_S(t)\rangle = e^{-iH_0(t-t_0)} e^{-iH_I(t-t_0)} |\Phi_S(t_0)\rangle. \quad (2.14a)$$

A partir de la ecuación (2.14a), definimos el vector de estado $|\Phi_I(t)\rangle$ de la siguiente manera:

$$|\Phi_I(t)\rangle \equiv e^{-iH_I(t-t_0)} |\Phi_S(t_0)\rangle. \quad (2.14b)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.14a) por la izquierda con $e^{iH_0(t-t_0)}$ y utilizando el resultado de la ecuación (2.14b) obtenemos

$$|\Phi_I(t)\rangle = e^{iH_0(t-t_0)} |\Phi_S(t)\rangle, \quad (2.15a)$$

de donde también tenemos

$$|\Phi_S(t)\rangle = e^{-iH_0(t-t_0)} |\Phi_I(t)\rangle. \quad (2.15b)$$

De la ecuación (2.15a) notamos que el operador unitario $U_I(t-t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)}$ que une el vector de estado $|\Phi_S(t)\rangle$ de la IS con el vector de estado $|\Phi_I(t)\rangle$ de la II, es el operador responsable del cambio de imagen.

Utilizando las ecuaciones (2.3) y (2.15a) en el instante inicial $t = t_0$ encontramos

$$|\Phi_I(t_0)\rangle = |\Phi_S(t_0)\rangle = |\Phi_{II}\rangle. \quad (2.16)$$

Esta ecuación significa que en el instante inicial los vectores de estado escritos en las tres imágenes son iguales.

Usando la ecuación (2.15b), calculamos el valor esperado de un operador ϑ_S escrito en la IS, en el vector de estado $|\Phi_S(t)\rangle$ como:

$$\langle \Phi_S(t) | \vartheta_S | \Phi_S(t) \rangle = \langle \Phi_I(t) | e^{iH_0(t-t_0)} \vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)} | \Phi_I(t) \rangle. \quad (2.17)$$

Interpretamos esta ecuación como el valor esperado en el estado $|\Phi_I(t)\rangle$, del operador

$$\vartheta_I(t) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} \vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)} = U_I(t-t_0) \vartheta_S U_I^\dagger(t-t_0), \quad (2.18)$$

el cual depende del tiempo.

Usando las ecuaciones (2.6) y (2.18) en el instante inicial $t = t_0$, encontramos

$$\vartheta_I(t_0) = \vartheta_{II}(t_0) = \vartheta_S. \quad (2.19)$$

Esta ecuación significa que en el instante inicial los operadores escritos en las tres imágenes son iguales.

Si hacemos $\vartheta = H_0$ tenemos

$$H_{0,I}(t_0) = H_{0,II}(t_0) = H_{0,S} = H_0. \quad (2.20)$$

Substituyendo la ecuación (2.13) en la ecuación (2.1) obtenemos:

$$i \frac{d}{dt} |\Phi_S(t)\rangle = H_S |\Phi_S(t)\rangle = (H_0 + H_I) |\Phi_S(t)\rangle. \quad (2.21)$$

Reemplazando la ecuación (2.15b) en la ecuación anterior y efectuando la derivada total con respecto al tiempo, encontramos:

$$ie^{-iH_0(t-t_0)}(-iH_0)|\Phi_I(t)\rangle + e^{-iH_0(t-t_0)}i\frac{d}{dt}|\Phi_I(t)\rangle = (H_0 + H_I)e^{-iH_0(t-t_0)}|\Phi_I(t)\rangle. \quad (2.22)$$

Como $U_I^\dagger(t-t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)}$ puede ser expandido en una serie de potencias de H_0 , tenemos que $[U_I^\dagger(t-t_0), H_0] = 0$, entonces el primer término del lado izquierdo de la ecuación (2.22) puede ser reordenado para tener

$$H_0 e^{-iH_0(t-t_0)}|\Phi_I(t)\rangle + e^{-iH_0(t-t_0)}i\frac{d}{dt}|\Phi_I(t)\rangle = H_0 e^{-iH_0(t-t_0)}|\Phi_I(t)\rangle + H_I e^{-iH_0(t-t_0)}|\Phi_I(t)\rangle,$$

de donde hallamos

$$e^{-iH_0(t-t_0)}i\frac{d}{dt}|\Phi_I(t)\rangle = H_I e^{-iH_0(t-t_0)}|\Phi_I(t)\rangle. \quad (2.23)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por la izquierda, por el operador unitario $U_I(t-t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}$ y utilizando la ecuación (2.18), obtenemos la siguiente expresión

$$i\frac{d}{dt}|\Phi_I(t)\rangle = e^{iH_0(t-t_0)}H_I e^{-iH_0(t-t_0)}|\Phi_I(t)\rangle = H_I(t)|\Phi_I(t)\rangle. \quad (2.24)$$

De la ecuación anterior notamos, que el vector de estado $|\Phi_I(t)\rangle$, satisface una ecuación diferencial de movimiento semejante a la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano $H_I(t)$ y constituye el vector de estado del sistema físico en una nueva imagen llamada II.

En resumen, de las ecuaciones (2.15a) y (2.18) la transformación unitaria que nos permite pasar desde la IS a la II es:

$$|\Phi_I(t)\rangle = e^{iH_0(t-t_0)}|\Phi_S(t)\rangle, \quad \vartheta_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)}\vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (2.25)$$

Derivando la ecuación (2.18) término a término con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\vartheta_I(t) = \left\{ \frac{d}{dt} \left(e^{iH_0(t-t_0)} \right) \vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)} + e^{iH_0(t-t_0)} \vartheta_S \frac{d}{dt} \left(e^{-iH_0(t-t_0)} \right) \right\},$$

y desarrollando las derivadas en el lado derecho obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\vartheta_I(t) = \left\{ e^{iH_0(t-t_0)}(iH_0)\vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)} + e^{iH_0(t-t_0)}\vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)}(-iH_0) \right\}. \quad (2.26)$$

Usando el hecho que $U_I^\dagger(t-t_0) \equiv e^{-iH_0(t-t_0)}$ puede ser expandido en una serie de potencias de H_0 , se tiene $[U_I^\dagger(t-t_0), H_0] = 0$, entonces el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.26) puede ser reordenado convenientemente como

$$\frac{d}{dt}\vartheta_I(t) = i \left\{ e^{iH_0(t-t_0)}(H_0)\vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)} - e^{iH_0(t-t_0)}\vartheta_S (H_0)e^{-iH_0(t-t_0)} \right\},$$

como $U_I^\dagger(t-t_0) \equiv e^{-iH_0(t-t_0)}$ es un operador unitario, reescribimos la ecuación anterior como

$$\frac{d}{dt}\vartheta_I(t) = i \left\{ e^{iH_0(t-t_0)}H_0 e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)}\vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)} - e^{iH_0(t-t_0)}\vartheta_S e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)}H_0 e^{-iH_0(t-t_0)} \right\}, \quad (2.27)$$

utilizando la ecuación (2.18) en la ecuación anterior tenemos

$$\frac{d}{dt}\vartheta_I(t) = i \{H_{0,I}(t)\vartheta_I(t) - \vartheta_I(t)H_{0,I}(t)\}, \quad (2.28)$$

lo cual también se puede escribir como

$$i\frac{d}{dt}\vartheta_I(t) = [\vartheta_I(t), H_{0,I}(t)]. \quad (2.29)$$

Reemplazando la ecuación (2.20) en la ecuación (2.29) obtenemos:

$$i\frac{d}{dt}\vartheta_I(t) = [\vartheta_I(t), H_0]. \quad (2.30)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de movimiento tipo Heisenberg con Hamiltoniano H_0 y expresa la evolución en el tiempo de los observables físicos en la II, con la condición inicial $\vartheta_I(t_0)$. Mientras que la ecuación (2.18) muestra, que los vectores de estado satisfacen una ecuación tipo Schrödinger teniendo al operador $H_I(t)$ como Hamiltoniano.

Por lo tanto concluimos que la II resulta ser una imagen intermedia entre las imágenes de Schrödinger y Heisenberg. Las tres imágenes mostradas nos proporcionan descripciones estrictamente equivalentes de los fenómenos físicos. Adoptando en cada problema particular la imagen que se preste mejor para su solución.

A continuación, vamos a desarrollar la Teoría de Perturbación.

2.3. TEORIA DE PERTUBACION.

El objetivo de la EDC es resolver el problema de interacción entre los fotones, electrones y positrones. Actualmente, no existe un método para obtener una solución exacta de las ecuaciones de la EDC. A pesar de ello y debido a la pequeñez de la constante de acoplamiento (o constante de estructura fina) $\alpha = 1/137$ entre estos campos, se ha elaborado el método de Teoría de Perturbación, el cual nos proporcionará una solución asintótica aproximada para cualquier proceso de interacción entre los electrones, positrones y fotones.

Ahora, vamos a escribir el vector de estado $|\Phi_I(t)\rangle$ como:

$$|\Phi_I(t)\rangle = U(t, t_0) |\Phi_I(t_0)\rangle, \quad (2.31)$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución que une el vector de estado en el instante inicial $|\Phi_I(t_0)\rangle$ y el vector de estado $|\Phi_I(t)\rangle$ para $t \neq t_0$.

Reemplazando la ecuación (2.31) en la ecuación (2.24) obtenemos:

$$i\frac{d}{dt}(U(t, t_0) |\Phi_I(t_0)\rangle) = H_I(t) U(t, t_0) |\Phi_I(t_0)\rangle,$$

de donde encontramos que $U(t, t_0)$ satisface

$$i\frac{d}{dt}(U(t, t_0)) = H_I(t) U(t, t_0). \quad (2.32)$$

Esta ecuación expresa que el operador de evolución $U(t, t_0)$ satisface la misma ecuación (2.24) que el vector de estado $|\Phi_I(t)\rangle$ en la II.

Para hallar la forma explícita de $U(t, t_0)$ es necesario resolver la ecuación (2.32). Pero si consideramos que el operador $H_I(t)$ está afectado de la constante de

acoplamiento, entonces este operador sería muy pequeño y por lo tanto podríamos resolver la ecuación (2.32) usando aproximaciones sucesivas.

Una solución formal de la ecuación (2.32) es:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) U(t_1, t_0) dt_1, \quad (2.33)$$

donde la constante 1 es fijada para satisfacer la condición inicial.

Por el método de aproximaciones sucesivas (ver referencia 20) obtendremos la Serie de Dyson. Para encontrar esto, usamos la ecuación (2.33) en el instante de tiempo $t_1 > t_2$, obteniéndose

$$U(t_1, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) U(t_2, t_0) dt_2, \quad (2.34a)$$

similarmente, usando la ecuación (2.33) para el instante de tiempo $t_1 > t_2 > t_3$

$$U(t_2, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) U(t_3, t_0) dt_3, \quad (2.34b)$$

y para el instante $t_1 > t_2 > t_3 > t_4$, obtenemos:

$$U(t_3, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t_3} H_I(t_4) U(t_4, t_0) dt_4. \quad (2.34c)$$

Para comenzar a construir esta serie, reemplazamos la ecuación (2.34c) en la ecuación (2.34b) encontrándose

$$U(t_2, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) \left(1 - i \int_{t_0}^{t_3} H_I(t_4) U(t_4, t_0) dt_4 \right) dt_3,$$

ahora, efectuamos los productos respectivos y ordenamos convenientemente los términos resultantes para tener

$$U(t_2, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 + (i)^2 \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 \int_{t_0}^{t_3} H_I(t_4) U(t_4, t_0) dt_4. \quad (2.34d)$$

A continuación, sustituimos la ecuación (2.34d) en la ecuación (2.34a) hallándose

$$U(t_1, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 \left(1 - i \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 + (i)^2 \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 \int_{t_0}^{t_3} H_I(t_4) U(t_4, t_0) dt_4 \right),$$

efectuando los productos de $\int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2$ con cada uno de los términos que están entre paréntesis y ordenando convenientemente estos resultados obtenemos:

$$U(t_1, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 + (i)^2 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 +$$

$$-(i)^3 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_3) \int_{t_0}^{t_3} H_I(t_4) U(t_4, t_0) dt_4. \quad (2.34e)$$

Substituyendo la ecuación (2.34e) en la ecuación (2.33) obtenemos la siguiente serie

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \left\{ 1 - i \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 + (i)^2 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 - \right. \\ \left. (i)^3 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 \int_{t_0}^{t_3} H_I(t_4) U(t_4, t_0) dt_4 \right\},$$

efectuando los productos de $\int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1$ con cada uno de los términos que están entre llaves y acomodando convenientemente estos resultados generamos la serie de Dyson, obteniéndose

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 + (i)^2 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 - (i)^3 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 \\ + (i)^4 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 \int_{t_0}^{t_3} H_I(t_4) U(t_4, t_0) dt_4. \quad (2.35)$$

Reescribimos convenientemente los términos de la ecuación (2.35) de la siguiente forma:

$$U_0(t, t_0) = 1, \quad (2.36a)$$

$$U_1(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1, \quad (2.36b)$$

$$U_2(t, t_0) = (i)^2 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 = \\ (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2), \quad (2.36c)$$

$$U_3(t, t_0) = -(i)^3 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) dt_3 = \\ (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3), \quad (2.36d)$$

repetiendo sucesivamente los pasos anteriores encontramos que $U_n(t, t_0)$ es:

$$U_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times$$

$$H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\dots H_I(t_n). \quad (2.36c)$$

donde $t > t_1 > t_2 > t_3 > t_4 \dots \dots \dots t_{n-1} > t_n > t_0$.

Las ecuaciones (2.36) nos permite reescribir $U(t, t_0)$ como:

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \dots \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times \\ H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\dots \dots \dots H_I(t_n). \quad (2.37)$$

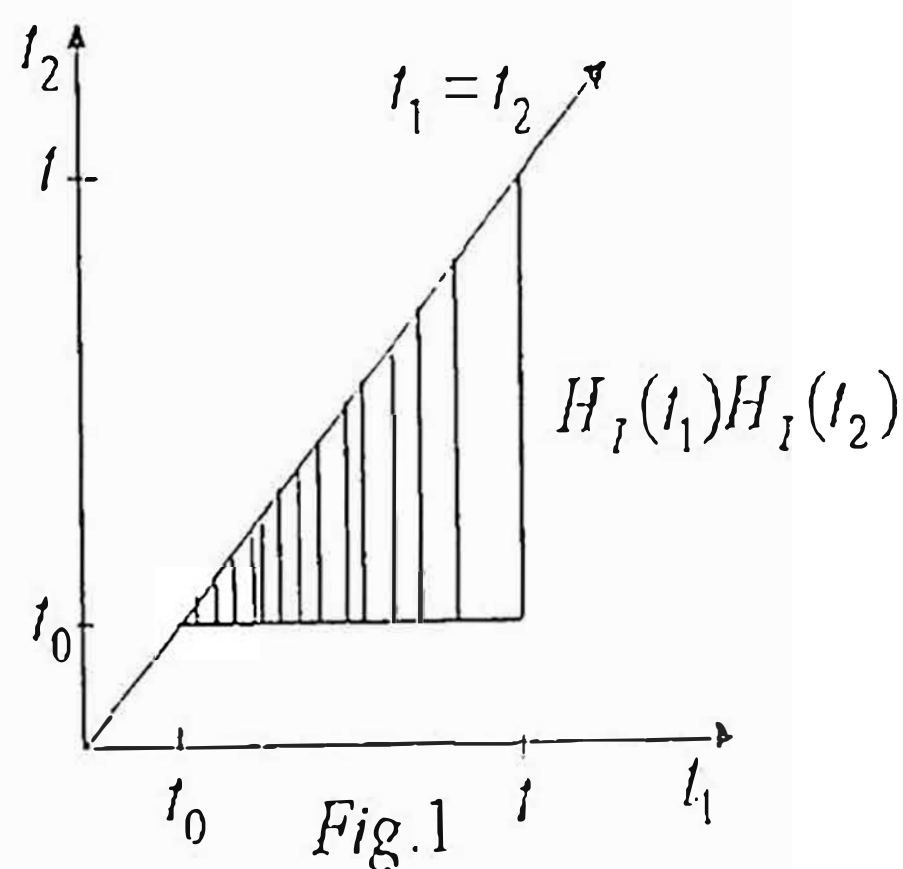
Esta ecuación representa la solución, de la ecuación diferencial de movimiento (Ver ecuación (2.32)) para el operador de evolución $U(t, t_0)$.

A continuación, nuestro siguiente objetivo es cambiar los límites de integración de las integrales de la ecuación (2.37) de manera conveniente de tal modo que nos facilite el cálculo de los elementos matriciales del operador de evolución y al mismo tiempo se pueda mostrar su covarianza.

Como un ejemplo, vamos a efectuar la interpretación geométrica de la integral correspondiente al término $U_2(t, t_0)$, considerando como dominio de integración la siguiente región:

$$R(U_2(t, t_0)) = \{(t_1, t_2) / t_0 \leq t_2 \leq t_1, \quad t_0 \leq t_1 \leq t\}.$$

Tomando un punto de coordenadas (t_1, t_2) , fijando t_1 y haciendo variar t_2 desde t_0 hasta t_1 generamos un segmento vertical al eje t_1 y luego hacemos variar t_1 desde t_0 hasta t ; efectuando un barrido vertical, encontrándose que la región de integración de la ecuación (2.36c) esta dada por el triángulo situado debajo de la recta $t_1 = t_2$, siendo el valor de su área igual a $\frac{(t-t_0)^2}{2}$ (Ver figura 1).

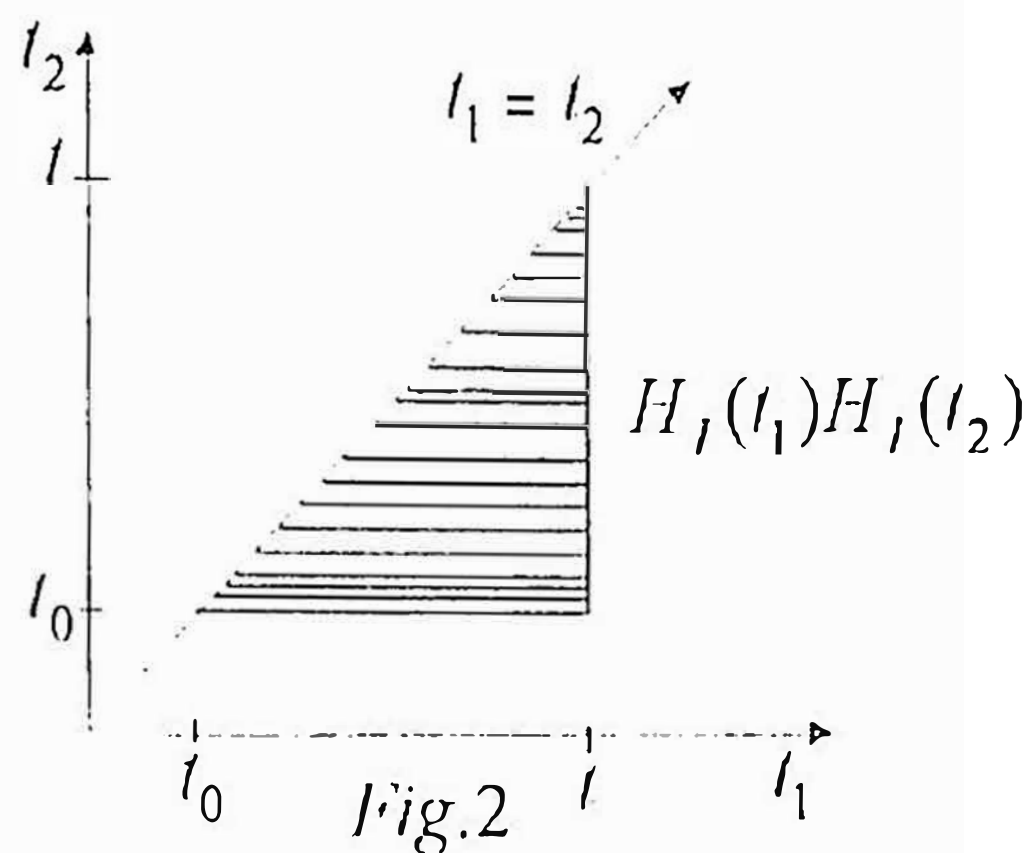


La figura 1 muestra que la región de integración es barrida verticalmente.

Ahora efectuamos un cambio en el orden de integración en la ecuación (2.36c) y consideramos nuevamente un punto de coordenadas (t_1, t_2) , fijando t_2 y haciendo variar t_1 desde t_2 hasta t generamos un segmento horizontal paralelo al eje t_1 . A continuación, hacemos variar t_2 desde t_0 hasta t ; efectuando un barrido horizontal, encontrándose lo siguiente:

$$U_2(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 \Pi_I(t_1) \Pi_I(t_2). \quad (2.38)$$

Además también podemos notar de la figura 2 que el valor del área, de esta región de integración igual a $\frac{(t-t_0)^2}{2}$.



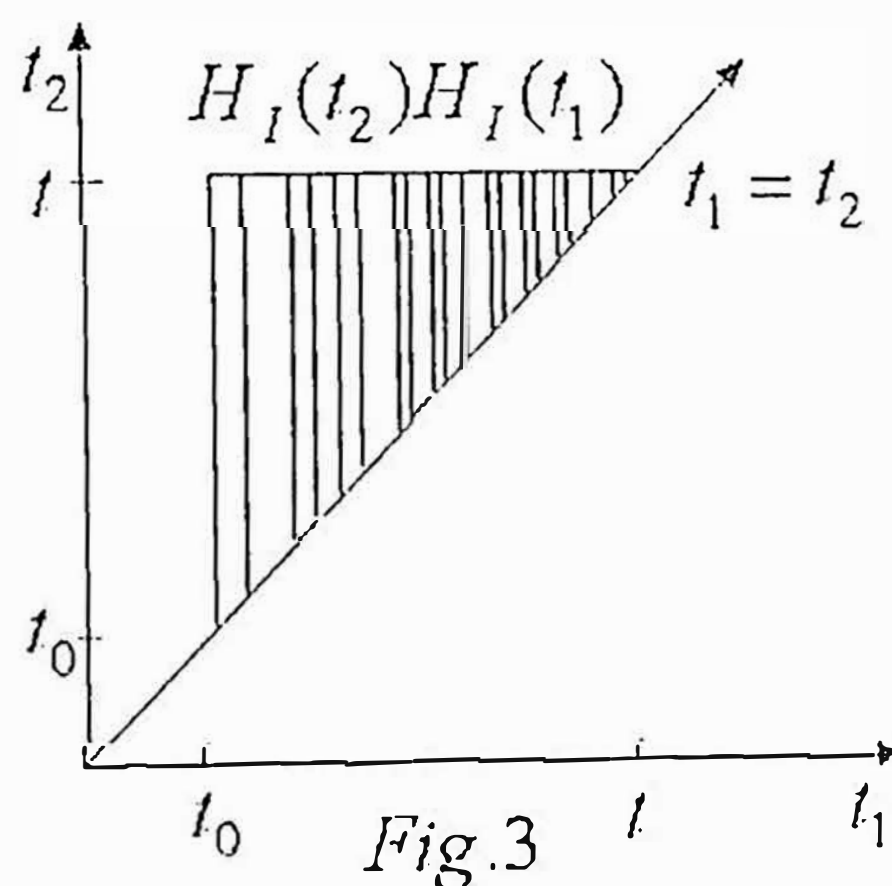
La figura 2 muestra que la región de integración es barrida horizontalmente.

Intercambiando las variables $t_1 \leftrightarrow t_2$ en la ecuación (2.38), obtendremos otra integral que estará dada por:

$$U'_2(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \Pi_I(t_2) \Pi_I(t_1). \quad (2.39)$$

Este intercambio de las variables t_1, t_2 nos permite conocer la forma que tendrá el integrando ($\Pi_I(t_2)\Pi_I(t_1) \neq \Pi_I(t_1)\Pi_I(t_2)$) en un nuevo dominio de integración, la cual está dada por la siguiente región

$$R'(U'_2(t, t_0)) = \{(t_1, t_2) / t_0 \leq t_1 \leq t, \quad t_1 \leq t_2 \leq t\}.$$



La figura 3 muestra que la región de integración es barrida verticalmente.

Considerando, un punto de coordenadas (t_1, t_2) , fijando t_1 y haciendo variar t_2 desde t_1 hasta t generamos un segmento vertical al eje t_1 . A continuación, hacemos

variar t_1 desde t_0 hasta t ; efectuando un barrido vertical, encontrándose que la región de integración de la ecuación (2.39) está dada por el triángulo situado por encima de la recta $t_1 = t_2$. Siendo, el valor del área de éste triángulo igual a $\frac{(t-t_0)^2}{2}$ (Ver figura 3).

Puesto que los operadores $H_I(t_1)$ y $H_I(t_2)$ no conmutan, es necesario introducir un operador llamado Producto Cronológico Γ , el cual es definido como

$$\Gamma(H_I(t_1)H_I(t_2)) \equiv \begin{cases} H_I(t_1)H_I(t_2), & t_1 > t_2, \\ H_I(t_2)H_I(t_1), & t_2 > t_1. \end{cases} \quad (2.40)$$

Aplicando Γ sobre un producto de operadores $H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\dots H_I(t_n)$ etiquetados en los tiempos $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ reescribe el producto en un orden cronológico de $H_I(t_\alpha)H_I(t_\beta)H_I(t_\rho)\dots H_I(t_\eta)$ etiquetados en los tiempos $t_\alpha, t_\beta, t_\rho, \dots, t_\sigma, t_\eta$ en donde los operadores en tiempos posteriores están a la izquierda y los operadores en tiempos recientes están hacia la derecha ($t_\alpha > t_\beta > t_\rho > \dots > t_\sigma > t_\eta$), es decir, los argumentos temporales de los operadores $H_I(t)$ decrecen desde la izquierda hacia la derecha; esto nos permite escribir:

$$\Gamma \{H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\dots H_I(t_{n-1})H_I(t_n)\} = H_I(t_\alpha)H_I(t_\beta)H_I(t_\rho)\dots H_I(t_\eta),$$

con $t_\alpha > t_\beta > t_\rho > \dots > t_\sigma > t_\eta$.

Utilizando las ecuaciones (2.36c) y (2.39) representamos a $U_2(t, t_0)$ de la siguiente manera:

$$U_2(t, t_0) = \frac{(-i)^2}{2} \left\{ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2)H_I(t_1) \right\},$$

factorizando la integral $\int_{t_0}^t dt_1$ de la expresión entre corchetes obtenemos:

$$U_2(t, t_0) = \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \left\{ \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) + \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2)H_I(t_1) \right\},$$

usando la definición del producto cronológico dada por la ecuación (2.40), reescribimos la ecuación anterior como:

$$U_2(t, t_0) = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \Gamma(H_I(t_1)H_I(t_2)). \quad (2.41)$$

Repetiendo los pasos anteriores se puede mostrar que $U_n(t, t_0)$ tiene la siguiente forma:

$$U_n(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times \Gamma(H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\dots H_I(t_n)), \quad (2.42)$$

substituyendo la ecuación (2.42) en la ecuación (2.37), obtenemos la serie

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times$$

$$\Gamma(H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\dots H_I(t_n)), \quad (2.43)$$

la cual se escribe formalmente como:

$$U(t, t_0) = \Gamma e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'} \quad (2.44)$$

En esta ecuación hemos escrito al comienzo el operador Γ para asegurar el ordenamiento cronológico de los argumentos temporales de los operadores $H_I(t)$.

Como trabajamos con campos cuánticos entonces $H_I(t)$ tiene la siguiente forma

$$H_I(t) = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}_I(x), \quad (2.45)$$

donde $\mathcal{H}_I(x)$ representa la densidad Hamiltoniana de interacción.

En la EDC $\mathcal{H}_I(x)$ toma la siguiente forma (Ver referencias No 8):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I(x) &= J^\mu(x) A_\mu(x) = -e \bar{\Psi}_\alpha(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu(x) \Psi_\beta(x) = \\ &= -e \bar{\Psi}_\alpha(x) (A(x))_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Donde los operadores $\bar{\Psi}_\alpha(x)$, $\Psi_\beta(x)$ y $A_\mu(x)$ son los operadores de los campos libres de Dirac y del CEM respectivamente.

Substituyendo las ecuaciones (2.45) y (2.46) en la ecuación (2.44) y considerando que $d^4x = d^3 \vec{x} dt$, obtenemos la siguiente representación del operador $U(t, t_0)$

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t d^4x_1 \int_{t_0}^t d^4x_2 \int_{t_0}^t d^4x_3 \dots \int_{t_0}^t d^4x_n \times \\ &\Gamma(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\mathcal{H}_I(x_3)\dots\mathcal{H}_I(x_n)), \end{aligned} \quad (2.47)$$

la cual se escribe formalmente como:

$$U(t, t_0) = \Gamma e^{-i \int_{t_0}^t \mathcal{H}_I(x') d^4x'} \quad (2.48)$$

en donde $\mathcal{H}_I(x)$ esta dado por la ecuación (2.46).

Esta ecuación representa la solución de la ecuación (2.32).

2.4. LA DEFINICION DE LA MATRIZ "S".

En la II $|\Phi_I(t_0 = -\infty)\rangle$, define el vector de estado inicial del sistema físico, especificando un número definido de electrones, positrones y fotones, con cuadrimomentum dados, estados de espín o estados de polarización según sea el caso. Dichas partículas están lo suficientemente alejadas entre sí, de modo que ellas no interactúen.

La ecuación (2.31) determina la transformación del vector de estado inicial

$$|\Phi_I(t_0 = -\infty)\rangle = |i\rangle, \quad (2.49)$$

en el vector de estado $|\Phi_I(t = +\infty)\rangle$.

Reemplazando la ecuación (2.49) en la ecuación (2.31) podemos escribir:

$$|\Phi_I(t = +\infty)\rangle = S(+\infty, -\infty) |\Phi_I(t_0 = -\infty)\rangle, \quad (2.50)$$

en donde hemos definido el operador "S" como:

$$S(+\infty, -\infty) \equiv \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} U(t, t_0). \quad (2.51)$$

Este operador "S" es llamado Operador de Dispersión o Matriz de Dispersión y es el responsable de transformar el vector de estado inicial $|\Phi_I(t_0 = -\infty)\rangle$ en el vector de estado $|\Phi_I(t = +\infty)\rangle$.

Estos vectores de estado también son llamados estados asintóticos y constituyen los autovectores del Hamiltoniano libre H_0 .

En la Teoría de Colisión de Mecánica Cuántica se asume usualmente que los estados asintóticos del sistema físico, son libres. Es por ello, que en todo proceso de colisión, las partículas incidentes están alejadas de las partículas blanco, de modo que no puedan interactuar unas con las otras en $(t = -\infty)$. Estas partículas incidentes se aproximan a las partículas blanco, colisionan y luego se alejan de ellas, de modo que las partículas resultantes de la colisión están lo suficientemente alejadas entre sí, en $(t = +\infty)$.

Todo esto será válido, si despreciamos la interacción de estas partículas con el estado vacío, dicha interacción recién será importante a partir del tercer orden de la expansión del Operador "S" ($n = 3$).

Una colisión puede conducirnos a muchos estados finales posibles $|f\rangle$ diferentes, en donde existieran partículas libres como electrones, positrones y fotones, con estados de espín y estados de polarización definidas.

Por lo tanto, la correspondiente amplitud de probabilidad de que dado el estado inicial $|i\rangle$ obtengamos el estado $|f\rangle$ es:

$$\langle f | \Phi_I(t = +\infty)\rangle = \langle f | S | i\rangle \equiv S_{if}, \quad (2.52)$$

en donde S_{if} representan los elementos matriciales del Operador "S" y los vectores de estado asintóticos están normalizados a la unidad.

De los vectores de estados finales posibles $|f\rangle$ vamos a considerar solamente aquellos que forman una base, entonces usando la ecuación (2.52) expandiremos $|\Phi_I(t = +\infty)\rangle$ en términos de estos estados finales de la siguiente manera:

$$|\Phi_I(t = +\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f | \Phi_I(t = +\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle S_{if}. \quad (2.53)$$

A continuación, calculamos la probabilidad de transición para que después de una colisión $(t = +\infty)$ el sistema físico se encuentre en el estado final $|f\rangle$ es:

$$|\langle f | \Phi_I(t = +\infty)\rangle|^2 = |S_{if}|^2. \quad (2.54)$$

Usando el hecho que los estados asintóticos y los estados finales posibles $|f\rangle$ están normalizados a la unidad obtenemos:

$$\langle \Phi_I(t = +\infty) | \Phi_I(t = +\infty)\rangle = \langle f | \sum_f S_{if}^\dagger \sum_f S_{if} | f\rangle = \sum_f |S_{if}|^2 = 1. \quad (2.55)$$

Esta ecuación expresa la conservación de la probabilidad de transición y esta determinada por los elementos matriciales que conectan los correspondientes estados inicial y final.

Reemplazando la ecuación (2.46) en la ecuación (2.51) observamos que la Matriz "S" puede ser representada de la siguiente manera:

$$S(+\infty, -\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_3 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_n \times \\ \Gamma \left\{ \bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\Lambda(x_1))_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2) (\Lambda(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \dots \bar{\Psi}_\rho(x_n) (\Lambda(x_n))_{\rho\eta} \Psi_\eta(x_n) \right\}, \quad (2.56)$$

la cual se escribe formalmente como

$$S(+\infty, -\infty) = \Gamma e \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_\alpha(x') \Lambda(x') \Psi_\beta(x') d^4x' \quad (2.57)$$

La ecuación (2.56) representa la expansión de la Matriz "S" en una serie de potencias de la densidad Hamiltoniana de interacción $\mathcal{H}_I(x)$. Este resultado fue obtenido inicialmente por G. C. Wick y constituye su mayor aporte a la EDC.

2.5 PRODUCTO CRONOLOGICO, PRODUCTO NORMAL Y EL TEOREMA DE WICK PARA OPERADORES BOSONICOS Y FERMIONICOS.

Una vez obtenida la expansión de la Matriz "S" según la ecuación (2.56), nuestro siguiente objetivo será definir el Producto Cronológico para los operadores fermiónicos y bosónicos. Para tal fin, vamos a descomponer los operadores $\Psi_\alpha(x)$, $\bar{\Psi}_\alpha(x)$ y $A_\mu(x)$ en sus partes de frecuencias positivas y negativas, de este modo lograremos expresar cada término de la expansión del operador "S" (ver la ecuación (2.56)) como una suma de productos de operadores de creación y aniquilación de partículas, haciendo posible de esta manera definir un operador llamado Operador Normal "N", así como una función compleja llamada contracción. Estas ideas fueron inicialmente propuestas en 1950 por G. C. Wick (ver referencia 23).

A la aplicación del Operador N sobre un sistema de operadores se le llamará Producto Normal y producirá un reordenamiento de los operadores de tal modo que los operadores de aniquilación estaran en el lado derecho para aniquilar las partículas presentes en el estado inicial $|i\rangle$ y deberan contener en el lado izquierdo los operadores de creación para emitir las partículas que estaran presentes en el estado final $|f\rangle$.

De este modo, cada uno de los términos de la expansión de la Matriz "S", dará lugar a varios productos normales, originando según el proceso elementos matriciales diferentes de cero.

Asimismo, las contracciones que aparecen junto con estos productos normales representan los propagadores de Feynman y corresponderan a la creación y absorción de ciertas partículas llamadas "partículas virtuales". Las cuales no son observadas experimentalmente.

A continuación, vamos a dar la definición del Producto Cronológico para los operadores bosónicos y fermiónicos.

2.5.1 PRODUCTO CRONOLOGICO DE OPERADORES BOSONICOS Y FERMIONICOS.

El producto cronológico Γ de un producto de operadores fermiónicos (o bosónicos) $a_1(x_1)a_2(x_2)..a_{j-1}(x_{j-1})....a_{k-1}(x_{k-1})...a_n(x_n)$ etiquetados en los tiempos $x_1^0, x_2^0, ..$ $..x_{n-1}^0, x_n^0$, reescribirá éste producto en un orden cronológico dado por $a_{i_1}(x_{i_1})a_{i_2}(x_{i_2})..$ $a_{i_{j-1}}(x_{i_{j-1}})....a_{i_{k-1}}(x_{i_{k-1}})....a_{i_n}(x_{i_n})$ etiquetados en los tiempos $x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, .., x_{i_n}^0$, en donde los operadores en tiempos posteriores están ubicados a la izquierda, (siendo $x_{i_1}^0 > x_{i_2}^0 > x_{i_3}^0 > x_{i_4}^0, .., x_{i_{n-1}}^0 > x_{i_n}^0$) y son multiplicados por el factor $\eta = (-1)^p$, quien tomará el valor $+1$ ó -1 (para el caso de operadores bosónicos η siempre es 1), de acuerdo a si la permutación de operadores fermiónicos desde el lado izquierdo al derecho es par o impar.

Debido a lo anterior se tiene que:

$$\Gamma(a_1(x_1)a_2(x_2)..a_{j-1}(x_{j-1})....a_{k-1}(x_{k-1})...a_n(x_n)) \equiv \eta a_{i_1}(x_{i_1})a_{i_2}(x_{i_2})....a_{i_{k-1}}(x_{i_{k-1}})..$$

$$a_{i_k}(x_{i_k})a_{i_{k+1}}(x_{i_{k+1}}).....a_{i_n}(x_{i_n}). \quad (2.58)$$

El producto cronológico Γ reescribe a los operadores $a_1(x_1)a_2(x_2)..a_{j-1}(x_{j-1})..$ $a_{k-1}(x_{k-1})...a_n(x_n)$ en un orden cronológico y opera como si todos los anticonmutadores (o conmutadores) fueran cero.

Como aplicación, usando la ecuación (2.58) determinamos el producto cronológico de dos operadores del Campo de Dirac $\Psi_\alpha(x)$ y $\bar{\Psi}_\beta(x')$, teniendo en cuenta el cambio de signo durante la anticonmutación:

$$\Gamma(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')) = \left\{ \begin{array}{l} \Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x'), \quad x_0 > x'_0, \\ -\bar{\Psi}_\beta(x')\Psi_\alpha(x), \quad x'_0 > x_0. \end{array} \right\} \quad (2.59)$$

Similarmente, determinamos el producto cronológico para los operadores del CEM $\Lambda^\mu(x)$ y $\Lambda^\nu(x')$, de la manera siguiente:

$$\Gamma(\Lambda^\mu(x)\Lambda^\nu(x')) = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^\mu(x)\Lambda^\nu(x'), \quad x_0 > x'_0, \\ \Lambda^\nu(x')\Lambda^\mu(x), \quad x'_0 > x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.60)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.59) y considerando que los operadores $\Psi_\alpha(x)$ y $\bar{\Psi}_\beta(x')$ se pueden expresar en términos de sus partes de frecuencia positiva y negativa, deduciremos expresiones equivalentes para los productos $\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')$, encontrando dos casos:

a) Caso $x_0 > x'_0$

$$\Gamma(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')) = \Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x') = (\Psi_\alpha^{(+)}(x) + \Psi_\alpha^{(-)}(x)) (\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x') + \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')),$$

efectuando el producto de los operadores que están entre paréntesis, obtenemos

$$\Gamma(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')) = \bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x')\Psi_\alpha^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x')\Psi_\alpha^{(-)}(x) + \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\Psi_\alpha^{(+)}(x) +$$

$$\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\Psi_\alpha^{(-)}(x), \quad (2.61)$$

usamos la ecuación (1.90) para despejar

$$\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\Psi_{\beta}^{(-)}(x')=iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')-\Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x),$$

luego, sustituimos esta ecuación en la ecuación (2.61) para eliminar el segundo término del lado derecho de esta ecuación, obteniéndose

$$\Gamma(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x'))=\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\Psi_{\beta}^{(+)}(x')-\Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)+iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')+ \\ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\Psi_{\beta}^{(+)}(x')+ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\Psi_{\beta}^{(-)}(x'). \quad (2.62)$$

Hemos logrado reordenar convenientemente las partes de frecuencia positiva y negativa del segundo término del lado derecho de la ecuación (2.62).

Ahora vamos a reescribir la ecuación anterior, de tal modo que la función compleja $iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')$ sea colocada al final de la ecuación (2.62), encontrándose la siguiente expresión

$$\Gamma(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x'))=\{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\Psi_{\beta}^{(+)}(x')-\Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)+\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\Psi_{\beta}^{(+)}(x')+ \\ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\Psi_{\beta}^{(-)}(x')\}+iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'). \quad (2.63)$$

De esta ecuación notamos, que entre las llaves existe una suma de productos en donde los operadores de creación están a la izquierda de los operadores de aniquilación. Por lo tanto, para simplificar la notación de la ecuación (2.63), a continuación introducimos la definición del Producto Normal "N".

2.5.2 PRODUCTO NORMAL DE OPERADORES BOSONICOS Y FERMIONICOS.

Sea $a_1(x_1)a_2(x_2)..a_{j-1}(x_{j-1})....a_{k-1}(x_{k-1})...a_n(x_n)$ un producto de operadores fermi-

nicos (bosónicos) del tipo $\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)$, $\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)$, $\Psi_{\beta}^{(+)}(x')$ y $\Psi_{\beta}^{(-)}(x')$ (ó $\Lambda^{\mu(+)}(x)$, $\Lambda^{\mu(-)}(x)$), entonces definimos el Producto Normal como:

$$N(a_1(x_1)a_2(x_2)..a_{j-1}(x_{j-1})..a_{k-1}(x_{k-1})..a_n(x_n))\equiv(-1)^p a_{\alpha}(x_{\alpha})a_{\beta}(x_{\beta})..a_{\eta}(x_{\eta}), \quad (2.64)$$

donde $a_{\alpha}(x_{\alpha})$, $a_{\beta}(x_{\beta})$,, $a_{\eta}(x_{\eta})$ son los mismos operadores $a_1(x_1)$, $a_2(x_2)$,, $a_{j-1}(x_{j-1})$,, $a_{k-1}(x_{k-1})$, ..., $a_n(x_n)$ reordenados de tal modo que todos los operadores de aniquilación (frecuencia positiva) están a la derecha de todos los operadores de creación (frecuencia negativa). Estos reordenamientos son efectuados "como si" todas las relaciones de anticonmutación (ó conmutación) fueran cero.

El exponente "p" expresa el número de intercambios necesarios entre las parejas de operadores fermiónicos (bosónicos) para cambiar el orden de los operadores desde la secuencia $a_1(x_1)a_2(x_2)..a_{j-1}(x_{j-1})....a_{k-1}(x_{k-1})...a_n(x_n)$ hasta la secuencia $a_{\alpha}(x_{\alpha})a_{\beta}(x_{\beta})$,

$a_{\rho}(x_{\rho})a_{\sigma}(x_{\sigma}).....a_{\eta}(x_{\eta})$, siendo multiplicados por el factor $\eta = (-1)^p$, quien tomará el valor +1 ó -1, de acuerdo a si la permutación de operadores fermiónicos desde el lado izquierdo al derecho es par o impar respectivamente (para el caso de operadores bosónicos η siempre toma el valor de 1) (ver referencia 23).

Ejemplos

Para operadores bosónicos

$$N\left(A_\lambda^{(+)}(x_1)A_\mu^{(-)}(x_2)A_\nu^{(+)}(x_3)A_\sigma^{(-)}(x_4)\right) = A_\sigma^{(-)}(x_4)A_\mu^{(-)}(x_2)A_\nu^{(+)}(x_3)A_\lambda^{(+)}(x_1).$$

Similarmente, para operadores fermiónicos tenemos

$$N\left(\Psi_\alpha^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x_2)\bar{\Psi}_\gamma^{(+)}(x_3)\Psi_\delta^{(-)}(x_4)\right) = -\Psi_\delta^{(-)}(x_4)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x_2)\bar{\Psi}_\gamma^{(+)}(x_3)\Psi_\alpha^{(+)}(x_1),$$

en donde, el signo menos resulta del intercambio de $\Psi_\alpha^{(+)}(x_1) \longleftrightarrow \Psi_\delta^{(-)}(x_4)$.

La definición de la ecuación (2.64) nos permitirá reescribir cada término del lado derecho de la ecuación (2.63) en forma de productos normales, encontrándose

$$\Gamma\left(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\right) = N\left(\Psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x')\right) + N\left(\Psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\right) + N\left(\Psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x')\right) + N\left(\Psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\right) + iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'),$$

considerando que el producto normal es un operador lineal reescribimos lo anterior de la siguiente manera:

$$\Gamma\left(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\right) = N\left\{\Psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x') + \Psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x') + \Psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x') + \Psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\right\} + iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'). \quad (2.65)$$

Como los productos entre parentésis de la ecuación (2.65), representan el producto de los operadores $\Psi_\alpha(x)$ y $\bar{\Psi}_\beta(x')$, entonces escribimos lo anterior como:

$$\Gamma\left(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\right) = N\left(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\right) + iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'). \quad (2.66)$$

Hemos encontrado, que el producto cronológico de los operadores $\Psi_\alpha(x)$ y $\bar{\Psi}_\beta(x')$ es igual al producto normal de los mismos, mas una función compleja.

b) Caso $x'_0 > x_0$

$$\Gamma\left(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\right) = -\bar{\Psi}_\beta(x')\Psi_\alpha(x) = -\left(\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x') + \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\right)\left(\Psi_\alpha^{(+)}(x) + \Psi_\alpha^{(-)}(x)\right),$$

efectuando el producto de los operadores que estan entre parentésis, obtenemos

$$\Gamma\left(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\right) = -\left\{\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x')\Psi_\alpha^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x')\Psi_\alpha^{(-)}(x) + \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\Psi_\alpha^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\Psi_\alpha^{(-)}(x)\right\}, \quad (2.67)$$

usando la ecuación (1.95) podremos despejar

$$\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x')\Psi_\alpha^{(-)}(x) = -\Psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x') + iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x'),$$

utilizamos este resultado para eliminar el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.67), obteniéndose

$$\Gamma\left(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')\right) = -\left\{\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x')\Psi_\alpha^{(+)}(x) - \Psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(+)}(x') + iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x') + \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\Psi_\alpha^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\Psi_\alpha^{(-)}(x)\right\}, \quad (2.68)$$

Hemos logrado reordenar convenientemente las partes de frecuencia positiva y negativa del segundo y cuarto término del lado derecho de la ecuación (2.68).

En la ecuación anterior, escribimos al final del lado derecho la función $iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x')$

$$\Gamma(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x')) = -\{\Psi_{\beta}^{(+)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x) - \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\Psi_{\beta}^{(+)}(x') + \Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x) + \Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\} - iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'). \quad (2.69)$$

De donde observamos, que entre los paréntesis existe una suma de productos en donde los operadores de creación están a la izquierda de los operadores de aniquilación.

Haciendo uso de la ecuación (2.64) podemos reescribir cada término del lado derecho de la ecuación (2.69) en la forma de productos normales, obteniéndose

$$\Gamma(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x')) = -\{N(\Psi_{\beta}^{(+)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)) + N(\Psi_{\beta}^{(+)}(x')\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)) + N(\Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)) + N(\Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(-)}(x))\} - iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'), \quad (2.70)$$

por la linealidad del operador "N" tenemos:

$$\Gamma(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x')) = -N\{\Psi_{\beta}^{(+)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x) + \Psi_{\beta}^{(+)}(x')\Psi_{\alpha}^{(-)}(x) + \Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x) + \Psi_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\} - iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'). \quad (2.71)$$

Como los productos entre paréntesis de la ecuación anterior, representan el producto de los operadores $\Psi_{\beta}(x')\Psi_{\alpha}(x)$, entonces encontramos:

$$\Gamma(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x')) = -N(\Psi_{\beta}(x')\Psi_{\alpha}(x)) - iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'), \quad (2.72)$$

lo cual también se escribe como

$$\Gamma(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x')) = N(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x')) - iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'). \quad (2.73)$$

En donde hemos considerado que

$$N(\Psi_{\alpha}(x)\Psi_{\beta}(x')) = -N(\Psi_{\beta}(x')\Psi_{\alpha}(x)) \quad (2.74)$$

Nuevamente, hemos encontrado que el producto cronológico de los operadores $\Psi_{\alpha}(x)$ y $\Psi_{\beta}(x')$ es igual al producto normal de los mismos, más una función compleja.

Similarmente, usando la ecuación (2.60) y considerando que el operador $A^{\mu}(x)$ se puede expresar en términos de sus partes de frecuencia positiva y negativa, deduciremos expresiones equivalentes para el producto $A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')$, encontrándose dos casos:

c) Caso $x_0 > x'_0$

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = A^{\mu}(x)A^{\nu}(x') = (A^{(+)\mu}(x) + A^{(-)\mu}(x)) (A^{(+)\nu}(x') + A^{(-)\nu}(x')),$$

efectuando el producto de los operadores que están entre paréntesis, obtenemos

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x') + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x'), \quad (2.75)$$

usamos la ecuación (1.132) para despejar

$$A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x') = A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) + iD^{\mu\nu(+)}(x - x'),$$

luego, sustituimos esta ecuación en la ecuación (2.75) para eliminar el segundo término del lado derecho de esta ecuación

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) + iD^{\mu\nu(+)}(x - x') +$$

$$A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x'). \quad (2.76)$$

Hemos conseguido reordenar convenientemente las partes de frecuencia positiva y negativa del segundo término del lado derecho de la ecuación (2.76).

Por conveniencia escribimos la función $iD^{\mu\nu(+)}(x-x')$ al final del lado derecho de la ecuación (2.76) para tener

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = \{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')\} + iD^{\mu\nu(+)}(x-x'). \quad (2.77)$$

De esta ecuación notamos, que entre los paréntesis existe una suma de productos en donde los operadores de creación están a la izquierda de los operadores de aniquilación.

La definición de la ecuación (2.64) nos permitirá reescribir cada término del lado derecho de la ecuación (2.77) en forma de productos normales, para tener

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = N(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x')) + N(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x')) + N(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x')) + N(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')) + iD^{\mu\nu(+)}(x-x'), \quad (2.78)$$

por la linealidad del operador "N" tenemos:

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = N\{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x') + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')\} + iD^{\mu\nu(+)}(x-x'). \quad (2.79)$$

Los productos entre paréntesis de la ecuación (2.79), representan el producto de los operadores $A^{\mu}(x)$ y $A^{\nu}(x')$, entonces obtenemos:

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = N(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) + iD^{\mu\nu(+)}(x-x'). \quad (2.80)$$

Hemos encontrado, que el producto cronológico de los operadores $A^{\mu}(x)$ y $A^{\nu}(x')$ es igual al producto normal de los mismos, más una función compleja.

d) Caso $x'_0 > x_0$

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = A^{\nu}(x')A^{\mu}(x) = (A^{(+)\nu}(x') + A^{(-)\nu}(x')) (A^{(+)\mu}(x) + A^{(-)\mu}(x)),$$

efectuando el producto de los operadores que están entre paréntesis, encontramos:

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(-)}(x) + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(-)}(x), \quad (2.81)$$

usamos la ecuación (1.135) para despejar

$$A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(-)}(x) = A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') - iD^{\mu\nu(-)}(x-x'),$$

luego, sustituimos esta ecuación en la ecuación (2.81) para eliminar el segundo término del lado derecho de esta ecuación

$$\Gamma(A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')) = A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') - iD^{\mu\nu(-)}(x-x') + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(-)}(x). \quad (2.82)$$

Hemos logrado reordenar convenientemente las partes de frecuencia positiva y negativa del segundo término del lado derecho de la ecuación (2.82).

Por conveniencia escribimos la función $iD^{\mu\nu(-)}(x-x')$ al final del lado derecho de la ecuación anterior, obteniéndose

$$\Gamma(A^\mu(x)A^\nu(x')) = \{A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(-)}(x)\} - iD^{\mu\nu(-)}(x-x'). \quad (2.83)$$

De esta ecuación notamos, que entre los paréntesis existe una suma de productos en donde los operadores de creación están a la izquierda de los operadores de aniquilación.

La definición de la ecuación (2.64) nos permitirá reescribir cada término del lado derecho de la ecuación (2.83) en forma de productos normales, hallándose

$$\Gamma(A^\mu(x)A^\nu(x')) = N(A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(+)}(x)) + N(A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(-)}(x)) + N(A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x)) + N(A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(-)}(x)) - iD^{\mu\nu(-)}(x-x'), \quad (2.84)$$

por la linealidad del operador "N" tenemos:

$$\Gamma(A^\mu(x)A^\nu(x')) = N\{A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(-)}(x) + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) + A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(-)}(x)\} - iD^{\mu\nu(-)}(x-x'). \quad (2.85)$$

Los productos entre paréntesis de la ecuación (2.85), representan el producto de los operadores $A^\mu(x)$ y $A^\nu(x')$, entonces obtenemos:

$$\Gamma(A^\mu(x)A^\nu(x')) = N(A^\nu(x')A^\mu(x)) - iD^{\mu\nu(-)}(x-x'). \quad (2.86)$$

La ecuación anterior también se reescribe como

$$\Gamma(A^\mu(x)A^\nu(x')) = N(A^\mu(x)A^\nu(x')) - iD^{\mu\nu(-)}(x-x'). \quad (2.87)$$

En donde hemos considerado que

$$N(A^\mu(x)A^\nu(x')) = N(A^\nu(x')A^\mu(x)). \quad (2.88)$$

Nuevamente, hemos encontrado que el producto cronológico de los operadores $A^\nu(x')$ y $A^\mu(x)$ es igual al producto normal de los mismos, mas una función compleja.

Repitiendo los pasos anteriores podemos mostrar los siguientes resultados:

e) El producto cronológico de dos operadores fermiónicos del tipo $\Psi_\alpha(x)$ y $\Psi_\beta(x')$ o del tipo $\bar{\Psi}_\alpha(x)$ y $\bar{\Psi}_\beta(x')$, en diferentes (o en el mismo punto $x = x'$) puntos del espacio-tiempo x y x' , es igual a:

$$\Gamma(\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(x')) = \left\{ \begin{array}{l} \Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(x') = N(\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(x')), \quad x_0 \geq x'_0, \\ -\Psi_\beta(x')\Psi_\alpha(x) = -N(\Psi_\beta(x')\Psi_\alpha(x)), \quad x'_0 \geq x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.89)$$

$$\Gamma(\bar{\Psi}_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Psi}_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x') = N(\bar{\Psi}_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')), \quad x_0 \geq x'_0, \\ -\bar{\Psi}_\beta(x')\bar{\Psi}_\alpha(x) = -N(\bar{\Psi}_\beta(x')\bar{\Psi}_\alpha(x)), \quad x'_0 \geq x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.90)$$

f) Considerando que los anticonmutadores dado por las ecuaciones (1.90) y (1.95) son nulos para un punto (evento) x que se encuentra fuera del cono de luz y procediendo de igual manera como los resultados de las ecuaciones (2.66) y (2.73), entonces podemos calcular el producto cronológico de dos operadores fermiónicos diferentes $\Psi_\alpha(x)$ y $\Psi_\beta(x)$ en el mismo punto x , el cual será igual al producto normal de los mismos, así:

$$\Gamma(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x)) = \left\{ \begin{array}{l} \Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x) = N(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x)), \\ -\bar{\Psi}_\beta(x)\Psi_\alpha(x) = -N(\bar{\Psi}_\beta(x)\Psi_\alpha(x)). \end{array} \right\}. \quad (2.91)$$

Este mismo resultado se habría obtenido si consideramos dos puntos fuera del cono de luz que ocurren en un mismo instante de tiempo, pero en diferentes puntos del espacio.

Para esta condición las relaciones de anticonmutación son nulas, después de efectuar

los cálculos debemos tomar el límite cuando $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$, encontrándose los resultados de la ecuación (2.91).

g) Finalmente, el producto cronológico de un operador fermiónico del tipo $\Psi_\alpha(x)$ ó $\Psi_\beta(x)$ con un operador bosónico del tipo $A^\mu(x')$, en diferentes (o en el mismo punto $x = x'$) puntos del espacio-tiempo x y x' , es igual a:

$$\Gamma(\Psi_\alpha(x)A^\mu(x')) = \left\{ \begin{array}{l} \Psi_\alpha(x)A^\mu(x') = N(\Psi_\alpha(x)A^\mu(x')), \quad x_0 \geq x'_0, \\ A^\mu(x')\Psi_\alpha(x) = N(A^\mu(x')\Psi_\alpha(x)), \quad x'_0 \geq x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.92)$$

$$\Gamma(\bar{\Psi}_\alpha(x)A^\mu(x')) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Psi}_\alpha(x)A^\mu(x') = N(\bar{\Psi}_\alpha(x)A^\mu(x')), \quad x_0 \geq x'_0, \\ A^\mu(x')\bar{\Psi}_\alpha(x) = N(A^\mu(x')\bar{\Psi}_\alpha(x)), \quad x'_0 \geq x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.93)$$

Estos resultados obtenidos nos servirán para simplificar algunos cálculos que efectuaremos posteriormente.

2.5.3 PROPIEDAD DEL PRODUCTO NORMAL PARA OPERADORES BOSONICOS Y FERMIONICOS.

Teniendo en cuenta que el espacio Número de Ocupación es común tanto para el Campo de Dirac como para el CEM (ver referencia 8), entonces el estado vacío de este espacio lo denotaremos como $|0\rangle$. Esto nos permite enunciar la siguiente propiedad:

El valor esperado en el estado vacío $|0\rangle$ del producto normal de un sistema de operadores es cero, así:

$$\langle 0| N(a_1(x_1)a_2(x_2)..a_{j-1}(x_{j-1})....a_{k-1}(x_{k-1})...a_n(x_n)) |0\rangle = 0. \quad (2.94)$$

Este resultado se obtiene de considerar de que por lo menos $a_n(x_n)$ es un operador de aniquilación (o de creación), entonces al actuar este sobre el estado vacío tendremos que $a_n(x_n)|0\rangle = 0$ (o $\langle 0|a_n^\dagger(x_n) = 0$).

Ejemplo

$$N(A_\mu^{(-)}(x_2)A_\nu^{(+)}(x_3)A_\sigma^{(-)}(x_4)) |0\rangle = A_\mu^{(-)}(x_2)A_\sigma^{(-)}(x_4)A_\nu^{(+)}(x_3) |0\rangle = 0.$$

2.5.4 CONTRACCION DE OPERADORES FERMIONICOS Y BOSONICOS.

De las ecuaciones (2.66), (2.73), (2.80) y (2.87) notamos que la diferencia del producto cronológico y el producto normal es una función compleja, llamada frecuentemente contracción y se le denota simbólicamente como:

$$\underbrace{B(x)C(x')} \equiv \Gamma(B(x)C(x')) - N(B(x)C(x')), \quad (2.95)$$

donde $B(x_1)$ y $C(x_2)$ pueden ser operadores fermiónicos, bosónicos o ambos.

Ejemplos

De las ecuaciones (2.66) y (2.73) obtenemos lo siguiente

$$\underline{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')} = \left\{ \begin{array}{l} iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'), \quad x_0 > x'_0, \\ -iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x'), \quad x'_0 > x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.96)$$

De las ecuaciones (2.80) y (2.87) hallamos la siguiente expresión

$$\underline{A^\mu(x)A^\nu(x')} = \left\{ \begin{array}{l} iD^{\mu\nu(+)}(x-x'), \quad x_0 > x'_0, \\ -iD^{\mu\nu(-)}(x-x'), \quad x'_0 > x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.97)$$

Entonces, como consecuencia de las ecuaciones (2.94), (2.96) y (2.97), encontramos que el valor esperado en el estado vacío de la ecuación (2.95) es igual al valor esperado en el estado vacío del producto cronológico, es decir:

$$\underline{B(x_1)C(x_2)} = \langle 0 | \Gamma(B(x_1)C(x_2)) | 0 \rangle. \quad (2.98)$$

Ejemplos

Combinando las ecuaciones (2.96) y (2.98) obtenemos

$$\underline{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')} = \langle 0 | \Gamma(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')) | 0 \rangle = \left\{ \begin{array}{l} iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'), \quad x_0 > x'_0, \\ -iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x'), \quad x'_0 > x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.99)$$

Similarmente, de las ecuaciones (2.97) y (2.98) hallamos

$$\underline{A^\mu(x)A^\nu(x')} = \langle 0 | \Gamma(A^\mu(x)A^\nu(x')) | 0 \rangle = \left\{ \begin{array}{l} iD^{\mu\nu(+)}(x-x'), \quad x_0 > x'_0, \\ -iD^{\mu\nu(-)}(x-x'), \quad x'_0 > x_0. \end{array} \right\}. \quad (2.100)$$

Las ecuaciones (2.99) y (2.100) muestran otra forma equivalente para expresar las partes de frecuencia positiva y negativas de las funciones $iS_{\alpha\beta}(x)$ y $iD^{\mu\nu}(x)$.

PROPIEDAD DE LA CONTRACCION.

Procediendo de igual manera como en los resultados de las ecuaciones (2.66), (2.73), (2.80) (2.87) podemos mostrar que se cumplen las siguientes relaciones

$$\underline{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')} = -\underline{\bar{\Psi}_\beta(x')\Psi_\alpha(x)}, \quad (2.101)$$

$$\underline{A^\mu(x)A^\nu(x')} = \underline{A^\nu(x')A^\mu(x)}. \quad (2.102)$$

De estas ecuaciones notamos, que está permitido cambiar el orden de los operadores dentro de una contracción. Pues según la ecuación (2.101), la contracción estará afectada del signo menos si ellos son fermiones, como resultado de una permutación impar. En cambio según la ecuación (2.102) si los operadores son bosones la contracción estará afectada del signo mas apesar que la permutación es impar, como consecuencia de las relaciones de conmutación.

Utilizando la ecuación (2.98) y las definiciones de los productos normales y cronológicos, podemos calcular la contracción de las partes de frecuencia positiva y negativa de los operadores fermiónicos, encontrandose dos casos:

a) Caso $x_0 > x'_0$

$$a.1) \quad \underline{\Psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')} = \Gamma\left(\Psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\right) - N\left(\Psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\Psi}_\beta^{(-)}(x')\right),$$

haciendo uso de las definiciones de los productos cronológico y normal, tenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = \Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') - \left(-\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\right),$$

empleando la ecuación (1.90) en el lado derecho de la ecuación anterior, encontramos lo siguiente

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = \left\{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\right\} = iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'). \quad (2.103)$$

Esta ecuación representa una forma equivalente para escribir la ecuación (2.99).

$$\text{a.2) } \underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = \Gamma\left(\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\right) - N\left(\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\right),$$

haciendo uso de las definiciones de los productos cronológico y normal, tenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') - \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') = 0. \quad (2.104)$$

$$\text{a.3) } \underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = \Gamma\left(\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\right) - N\left(\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\right),$$

haciendo uso de las definiciones de los productos cronológico y normal, tenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = \Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') - (-\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)) = 0,$$

usando la ecuación (1.82) en el lado derecho de la ecuación anterior, obtenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = \left\{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\right\} = 0. \quad (2.105)$$

$$\text{a.4) } \underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = \Gamma\left(\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\right) - N\left(\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\right),$$

haciendo uso de las definiciones de los productos cronológico y normal, tenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') - (-\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)),$$

usando la ecuación (1.82) en el lado derecho de la ecuación anterior, obtenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = \left\{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\right\} = 0. \quad (2.106)$$

b) Caso $x'_0 > x_0$ hallamos:

$$\text{b.1) } \underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = \Gamma\left(\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\right) - N\left(\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\right),$$

haciendo uso de las definiciones de los productos cronológico y normal, hallamos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = -\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\Psi_{\alpha}^{(-)}(x) - \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x'),$$

empleando la ecuación (1.95) en el lado derecho de la ecuación anterior, obtenemos lo siguiente

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = -\left\{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\right\} = -iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x'). \quad (2.107)$$

Para este caso, esta ecuación representa una forma equivalente de escribir la ecuación (2.99).

$$b.2) \underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = \Gamma \left(\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right) - N \left(\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right),$$

haciendo uso de las definiciones de los productos cronológico y normal, tenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = -\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x) - \left(-\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x) \right) = 0. \quad (2.108)$$

$$b.3) \underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = \Gamma \left(\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right) - N \left(\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right),$$

haciendo uso de las definiciones de los productos cronológico y normal, tenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = -\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')\Psi_{\alpha}^{(+)}(x) - \Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x'),$$

empleando la ecuación (1.82) en el lado derecho de la ecuación anterior, hallamos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x')} = - \left\{ \Psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} = 0. \quad (2.109)$$

$$b.4) \underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = \Gamma \left(\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right) - N \left(\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right),$$

haciendo uso de las definiciones de los productos cronológico y normal, tenemos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = -\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')\Psi_{\alpha}^{(-)}(x) - \Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x'),$$

empleando la ecuación (1.82) en el lado derecho de la ecuación anterior, hallamos

$$\underbrace{\Psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x')} = - \left\{ \Psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\Psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} = 0. \quad (2.110)$$

Definimos la función de Feynman como:

$$\Delta_F(x-x') \equiv \Delta^{(+)}(x-x')\theta(t-t') - \Delta^{(-)}(x-x')\theta(t'-t), \quad (2.111)$$

en donde la función $\theta(x-y)$ esta definida por:

$$\theta(x-y) \equiv \begin{cases} 1, & x > y, \\ 0, & y > x. \end{cases} \quad (2.112)$$

Combinando los resultados de las ecuaciones (2.99), (2.103), (2.107) y utilizando las ecuaciones (2.111) y (2.112), encontramos una expresión general para la contracción de fermiones, permitiendonos definir la función $S_{F\alpha\beta}$ como:

$$iS_{F\alpha\beta}(x-x') \equiv i(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \Delta_F(x-x') = iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')\theta(t-t') - iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x')\theta(t'-t) = \underbrace{\Psi_{\alpha}(x)\bar{\Psi}_{\beta}(x')} = \langle 0 | \Gamma \left(\Psi_{\alpha}(x)\bar{\Psi}_{\beta}(x') \right) | 0 \rangle. \quad (2.113)$$

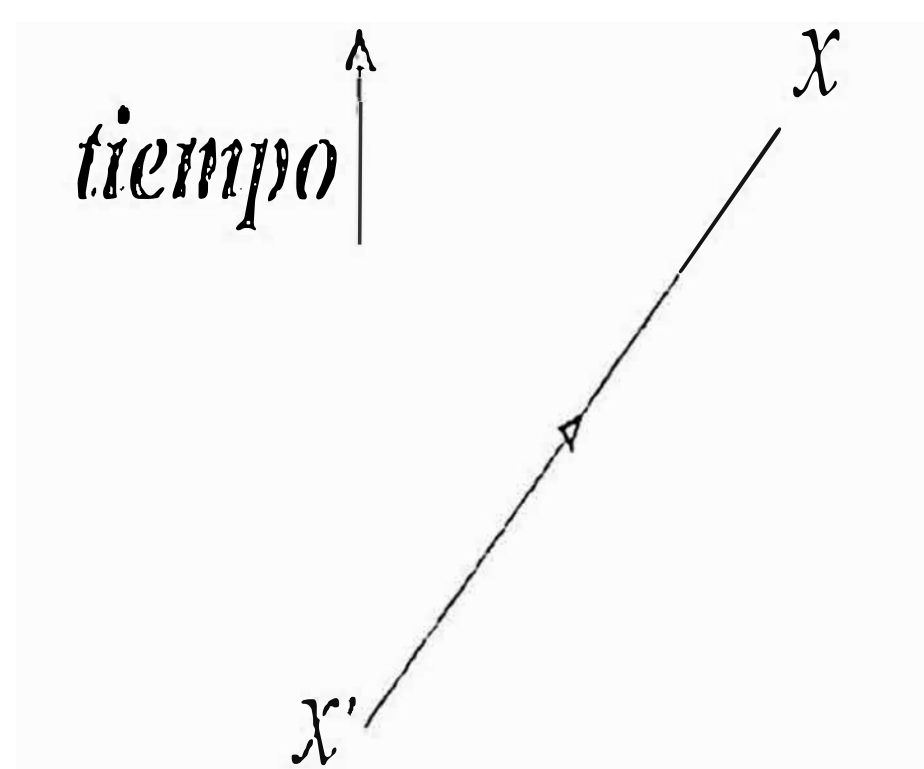
La función compleja $S_{F\alpha\beta}(x-x')$ es llamada función de propagación o propagador de Feynman para la ecuación de Dirac.

En el Apéndice 2A mostramos las representaciones integrales de las funciones $\Delta^{(\pm)}(x-x')$. Esto nos va permitir obtener las representaciones integrales de las funciones $S_{\alpha\beta}^{(\pm)}(x-x')$ y también de la función de propagación $S_{F\alpha\beta}(x-x')$. Esto lo efectuaremos en el Apéndice 2B.

Ahora, vamos a dar la interpretación física del propagador de Feynman para el fermión presentandose según la ecuación (2.113) dos casos:

i). Caso $x_0 > x'_0$.

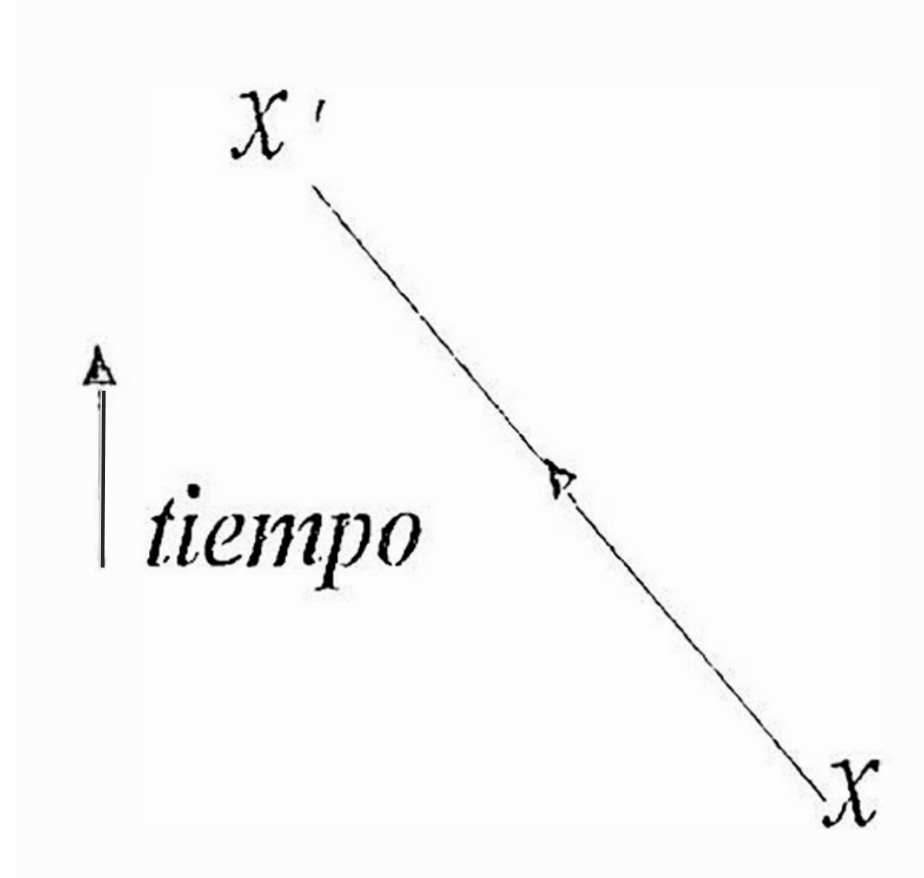
En el punto x' del espacio-tiempo un electrón es creado, este electrón se propaga hasta el punto x en donde es absorbido. Gráficamente esto lo representamos de la siguiente manera:



La figura muestra que si $x_0 > x'_0$ un electrón se propaga desde x' hasta x .

ii). Caso $x'_0 > x_0$.

En el punto x del espacio-tiempo un positrón es creado, este positrón se propaga hasta el punto x' en donde es absorbido. Por lo tanto la representación gráfica de este proceso es:



La figura muestra que si $x'_0 > x_0$ un positrón se propaga desde x hasta x' .

De ambas figuras notamos que la flecha de la línea del fermión apunta en la misma dirección del incremento del tiempo tanto para los electrones, como para los positrones.

Similarmente de la ecuación (2.98) y de las definiciones de los productos cronológicos y normales, calculamos la contracción de las partes de frecuencia positiva y negativa de los operadores $A^\mu(x)$ y $A^\nu(x')$, encontrándose dos casos:

c) Caso $x_0 > x'_0$.

$$c.1) \underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = \Gamma \left(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x') \right) - N \left(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x') \right),$$

utilizando las definiciones de los operadores Γ y N , tenemos

$$\underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x') - A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x),$$

haciendo uso de la ecuación (1.132) en el lado derecho de la ecuación anterior, encontramos

$$\underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = \left[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(x') \right] = iD^{\mu\nu(+)}(x-x'). \quad (2.114)$$

Para este caso, esta ecuación representa una forma equivalente de escribir la ecuación (2.100).

$$c.2) \underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = \Gamma \left(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') \right) - N \left(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') \right),$$

utilizando las definiciones de los operadores Γ y N , tenemos

$$\underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') - A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') = 0. \quad (2.115)$$

$$c.3) \underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = \Gamma \left(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') \right) - N \left(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') \right),$$

utilizando las definiciones de los operadores Γ y N , tenemos

$$\underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') - A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(+)}(x),$$

haciendo uso de la ecuación (1.126) en el lado derecho de la ecuación anterior, encontramos

$$\underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = \left[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(+)}(x') \right] = 0. \quad (2.116)$$

$$c.4) \underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = \Gamma \left(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x') \right) - N \left(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x') \right),$$

utilizando las definiciones de los operadores Γ y N , tenemos

$$\underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x') - A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(-)}(x),$$

usando la ecuación (1.126) en el lado derecho de la ecuación anterior, tenemos

$$\underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = \left[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(-)}(x') \right] = 0. \quad (2.117)$$

d) Caso $x'_0 > x_0$

$$d.1) \underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = \Gamma \left(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') \right) - N \left(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x') \right),$$

utilizando las definiciones de los operadores Γ y N , tenemos

$$\underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(-)}(x) - A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x'),$$

utilizando la ecuación (1.135), hallamos

$$\underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = - \left[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(x') \right] = -iD^{\mu\nu(-)}(x-x'). \quad (2.118)$$

Para este caso, esta ecuación representa una forma equivalente de escribir la ecuación (2.100).

$$d.2) \underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = \Gamma \left(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x') \right) - N \left(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x') \right),$$

utilizando las definiciones de los operadores Γ y N , obtenemos

$$\underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) - A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(+)}(x) = 0. \quad (2.119)$$

$$d.3) \underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = \Gamma \left(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') \right) - N \left(A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x') \right),$$

haciendo uso de las definiciones de los operadores Γ y N , obtenemos

$$\underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = A^{\nu(+)}(x')A^{\mu(+)}(x) - A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x'),$$

usando la ecuación (1.126) en la ecuación anterior, hallamos

$$\underbrace{A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(+)}(x')} = - \left[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(+)}(x') \right] = 0. \quad (2.120)$$

$$d.4) \underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = \Gamma \left(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x') \right) - N \left(A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x') \right),$$

empleando las definiciones de los operadores Γ y N , obtenemos

$$\underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = A^{\nu(-)}(x')A^{\mu(-)}(x) - A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x'),$$

haciendo uso de la ecuación (1.126) en la ecuación anterior, hallamos

$$\underbrace{A^{\mu(-)}(x)A^{\nu(-)}(x')} = - \left[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(-)}(x') \right] = 0. \quad (2.121)$$

Utilizando las ecuaciones (2.111), (2.112) y combinando los resultados de las ecuaciones (2.100), (2.114) y (2.118), encontramos una expresión general para la contracción de los operadores $A^\mu(x)$ del Campo Electromagnético, permitiéndonos definir la función $D_F^{\mu\nu}(x-x')$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\nu}(x-x') &\equiv i(-g^{\mu\nu})\Delta_F(x-x') = iD^{\mu\nu(+)}(x-x')\theta(t-t') - iD^{\mu\nu(-)}(x-x')\theta(t'-t) \\ &= \underbrace{A^\mu(x)A^\nu(x')} = \langle 0 | \Gamma(A^\mu(x)A^\nu(x')) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.122)$$

en donde hemos usado la ecuación (2.111) y la función $\theta(x-y)$ definida por la ecuación (2.112).

La función $D_F^{\mu\nu}(x-x')$ representa la función de propagación o el propagador de Feynman para la ecuación de onda.

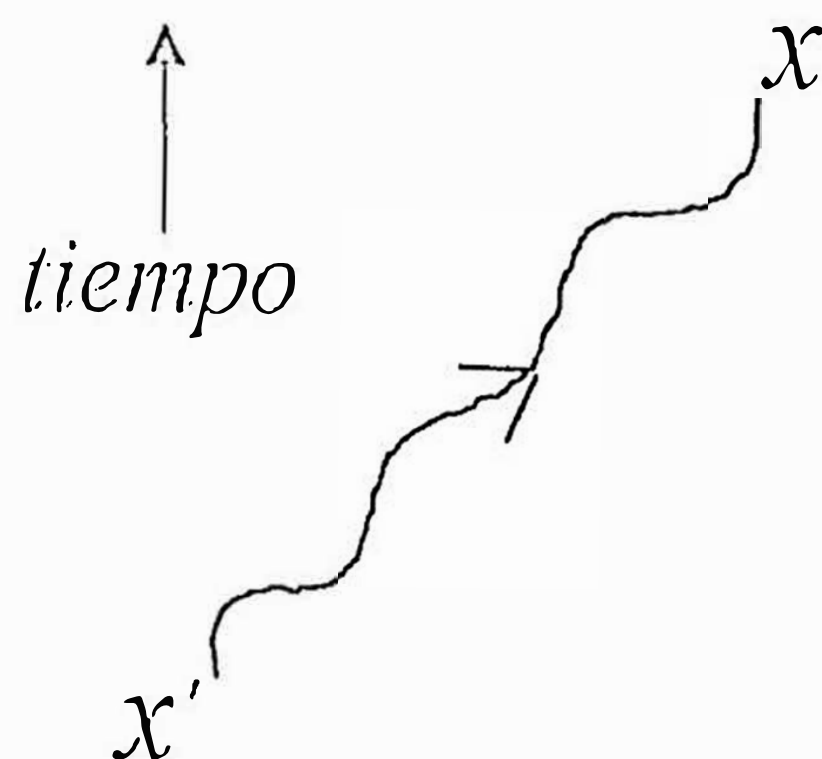
Utilizando las representaciones integrales de las funciones $\Delta^{(\pm)}(x-x')$ dadas por el Apéndice 2A, nos permitirán obtener las representaciones integrales de las funciones $D^{\mu\nu(\pm)}(x-x')$. De tal modo que utilizando estos resultados podremos obtener la representación integral de la función de propagación $D_F^{\mu\nu}(x-x')$. Esto lo mostraremos de manera explícita en el Apéndice 2C, aquí también mostraremos que la función $D_F^{\mu\nu}(x-x')$ satisface la ecuación inhomogénea de onda.

A continuación, vamos a dar la interpretación física del propagador de Feynman para el fotón presentándose según la ecuación (2.122) dos casos:

i). Caso $x_0 > x'_0$.

Se crea un fotón en el punto x' del espacio-tiempo, este fotón se propaga hasta el punto x en donde es absorbido.

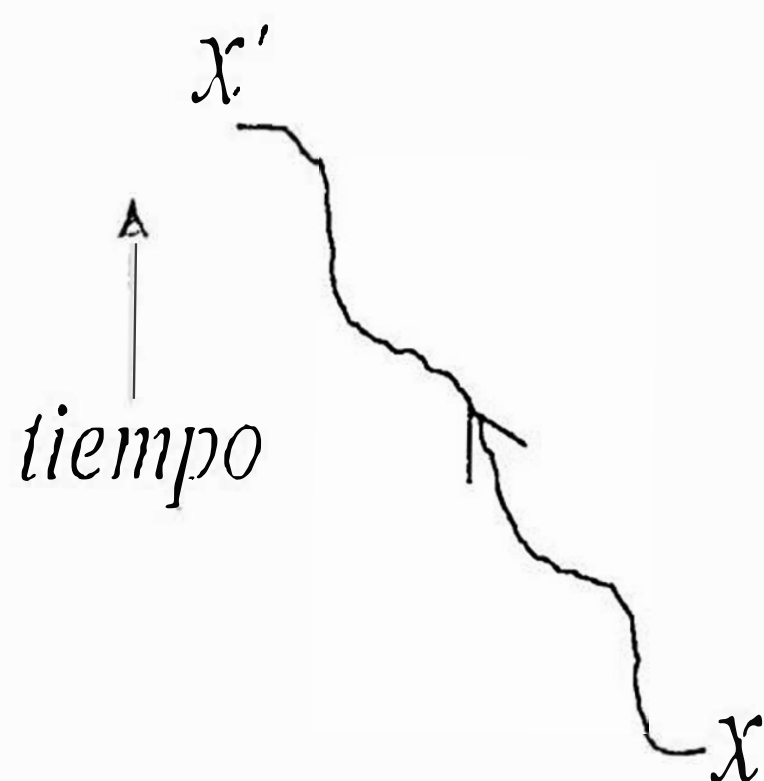
raficamente este proceso lo representamos, así:



La figura muestra que si $x_0 > x'_0$ un fotón se propaga desde x' hasta x .

ii). Caso $x'_0 > x_0$.

Se crea un fotón en el punto x del espacio-tiempo, este fotón se propaga hasta el punto x' en donde es absorbido. Gráficamente este proceso se representa, así:



La figura muestra que si $x'_0 > x_0$ un fotón que se propaga desde x hasta x' .

Estas interpretaciones tanto del fermión como la del fotón, nos van a servir para enunciar las reglas fundamentales de la EDC en el Capítulo 3.

Calculando el valor esperado en el estado vacío de las ecuaciones (2.89), (2.90), (2.91), (2.92) y (2.93) encontramos que:

$$\underbrace{\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(x')} = \underbrace{\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(x)} = \underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x')} = \underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x)} = \underbrace{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(x)} = \underbrace{\Psi_\alpha(x)A_\mu(x')} = \underbrace{\Psi_\alpha(x)A_\mu(x)} = \underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x)A_\mu(x')} = \underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x)A_\mu(x)} = 0, \forall x_0, x'_0. \quad (2.123)$$

Los resultados de la ecuación (2.123), nos serán muy importantes para simplificar nuestros cálculos en el Capítulo 3, cuando calculemos un proceso físico en particular.

2.5.5 PRODUCTO NORMAL CON ACLOPLAMIENTOS.

Utilizando las definiciones del producto normal y de la contracción podemos calcular el producto normal de un sistema de operadores bosónicos y fermiónicos $a_1(x_1) \dots a_{j-1}(x_{j-1}) \dots a_{k-1}(x_{k-1}) \dots a_n(x_n)$ con una o mas contracciones. Haciendo posible que los operadores que se contraen puedan ser transportados fuera del producto normal original (por ser ellos números complejos) y las cuales multiplicaran al producto normal de los operadores bosónicos o fermiónicos que no estan contraídos.

Debido a lo anterior podemos escribir lo siguiente:

$$N \left(\underbrace{a_1(x_1) a_2(x_2) a_3(x_3) a_4(x_4)} \dots \underbrace{a_j(x_j) \dots a_k(x_k)} \dots a_n(x_n) \right) = (-1)^p \underbrace{a_1(x_1) a_2(x_2) a_3(x_3) a_4(x_4)} \times \underbrace{a_j(x_j) a_k(x_k)} N (a_5(x_5) \dots a_{j-1}(x_{j-1}) a_{j+1}(x_{j+1}) a_{k-1}(x_{k-1}) a_{k+1}(x_{k+1}) \dots a_n(x_n)), \quad (2.121)$$

donde "p" expresa el número de intercambios necesarios entre las parejas de operadores fermiónicos o bosónicos para cambiar el orden desde la secuencia inicial $1, 2, 3, \dots, j-1, j, j+1, \dots, k-1, k, k+1, \dots, n$, (dada por los sub-índices de los operadores) hasta la secuencia final $1, 2, 3, 4, j, k, 5, \dots, j-1, j+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ y son multiplicados por el factor $\eta = (-1)^p$, quien tomará el valor +1 ó -1 (para el caso de operadores bosónicos η siempre es uno), de acuerdo a si la permutación de operadores fermiónicos es par o impar.

Ejemplo

$$N \left(\underbrace{\Psi_\alpha(x_1) \bar{\Psi}_\beta(x_2) \Psi_\lambda(x_3) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \bar{\Psi}_\sigma(x_4)} \right) = \underbrace{\Psi_\alpha(x_1) \bar{\Psi}_\beta(x_2) \Psi_\lambda(x_3) \bar{\Psi}_\sigma(x_4)} N (A_\mu(x_1) A_\nu(x_2))$$

usando la ecuación (2.111) en la ecuación anterior tenemos:

$$N \left(\underbrace{\Psi_\alpha(x_1) \bar{\Psi}_\beta(x_2) \Psi_\lambda(x_3) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \bar{\Psi}_\sigma(x_4)} \right) = i S_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) i S_{F\lambda\sigma}(x_3 - x_4) N (A_\mu(x_1) A_\nu(x_2))$$

2.5.6 TEOREMA DE WICK PARA PRODUCTOS CRONOLÓGICOS.

Repitiendo los pasos seguidos para la obtención de las ecuaciones (2.66), (2.73), (2.80) y (2.87) podemos calcular el producto cronológico de un número arbitrario de operadores fermiónicos o bosónicos. Una generalización de este tipo lo constituye el Teorema de Wick (Ver referencia No 23).

TEOREMA DE WICK.

El producto cronológico de un sistema de operadores fermiónicos o bosónicos es igual a la suma de todos los productos normales correspondientes con todos sus posibles contracciones incluyendo el producto normal sin la contracción. Es decir:

$$\Gamma (a_1(x_1) a_2(x_2) \dots a_{j-1}(x_{j-1}) \dots a_{k-1}(x_{k-1}) \dots a_n(x_n)) = N (a_1(x_1) \dots a_{j-1}(x_{j-1}) \dots a_{k-1}(x_{k-1}) \dots a_n(x_n)) + N \left(\underbrace{a_1(x_1) a_2(x_2) a_3(x_3) \dots a_{n-1}(x_{n-1}) a_n(x_n)} \right) + N \left(\underbrace{a_1(x_1) a_2(x_2) \dots a_{j-1}(x_{j-1}) \dots a_{n-1}(x_{n-1}) a_n(x_n)} \right)$$

$$N \left(\underbrace{a_1(x_1)a_2(x_2)\dots a_{n-1}(x_{n-1})a_n(x_n)} \right) + N \left(\underbrace{a_1(x_1)a_2(x_2)a_3(x_3)a_4(x_4)\dots a_n(x_n)} \right) + \dots \quad (2.125)$$

Ejemplo

Sea el Producto Cronológico de dos operadores densidad de cuadri-corriente eléctrica del Campo de Dirac

$$J^\mu(x_1) = \bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \quad \text{y} \quad J^\nu(x_2) = \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2),$$

entonces, haciendo uso del Teorema de Wick tenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(J^\mu(x_1)J^\nu(x_2)) &= \Gamma \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2) \right) = \\ &N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2) \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1)} \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2) \right) + \\ &N \left(\underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) \\ &N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \underbrace{\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) + N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \underbrace{\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) \\ &N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \underbrace{\bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) \\ &-N \left(\underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_\gamma(x_2) \Psi_\beta(x_1)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) \end{aligned}$$

considerando los resultados de la ecuación (2.123) encontramos

$$\begin{aligned} \Gamma(J^\mu(x_1)J^\nu(x_2)) &= N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2) \right) + \\ &N \left(\underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) + N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \underbrace{\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right) \\ &+ N \left(\underbrace{\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2)} \right), \end{aligned}$$

reordenando convenientemente los operadores fermiónicos de tal modo que las contracciones puedan ser colocados fuera del producto normal como hicimos en la ecuación (2.124) y utilizando el resultado de la ecuación (2.111) obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(J^\mu(x_1)J^\nu(x_2)) &= N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2) \right) - \\ &iS_{F\theta\alpha}(x_2-x_1)N \left((\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\gamma(x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta} \right) + iS_{F\beta\gamma}(x_1-x_2)N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}\Psi_\theta(x_2) \right) \\ &-iS_{F\theta\alpha}(x_2-x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}iS_{F\beta\gamma}(x_1-x_2)(\gamma^\nu)_{\gamma\theta}. \end{aligned}$$

Este ejemplo, muestra la importancia del Teorema de Wick para simplificar los cálculos encontrándose resultados inmediatos.

APENDICE 2A.

REPRESENTACION COVARIANTE DE LAS FUNCIONES

$$\Delta^{(\pm)}(x-x'), \Delta(x-x') \text{ Y } \Delta_F(x-x').$$

En este Apéndice, mostraremos que la función $\Delta_F(x-x')$ puede ser expresada en otra forma equivalente de modo que se muestre su covariante relativista.

En la ecuación (2.111) hemos definido la función de Feynman como:

$$\Delta_F(x-x') \equiv \Delta^{(+)}(x-x')\theta(t-t') - \Delta^{(-)}(x-x')\theta(t'-t),$$

lo cual también se puede expresar como:

$$\Delta_F(x-x') = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \left\{ e^{-ip \cdot (x-x')} \theta(t-t') + e^{ip \cdot (x-x')} \theta(t'-t) \right\}. \quad (2A.1)$$

Escribamos la representación integral covariante de la función $\Delta_F(x-x')$ como:

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4p \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2 - m^2}. \quad (2A.2)$$

La integración temporal en p_0 es ejecutada considerando a p_0 como una variable compleja y eligiendo la curva C_F de la figura 2A.1, como trayectoria de integración.

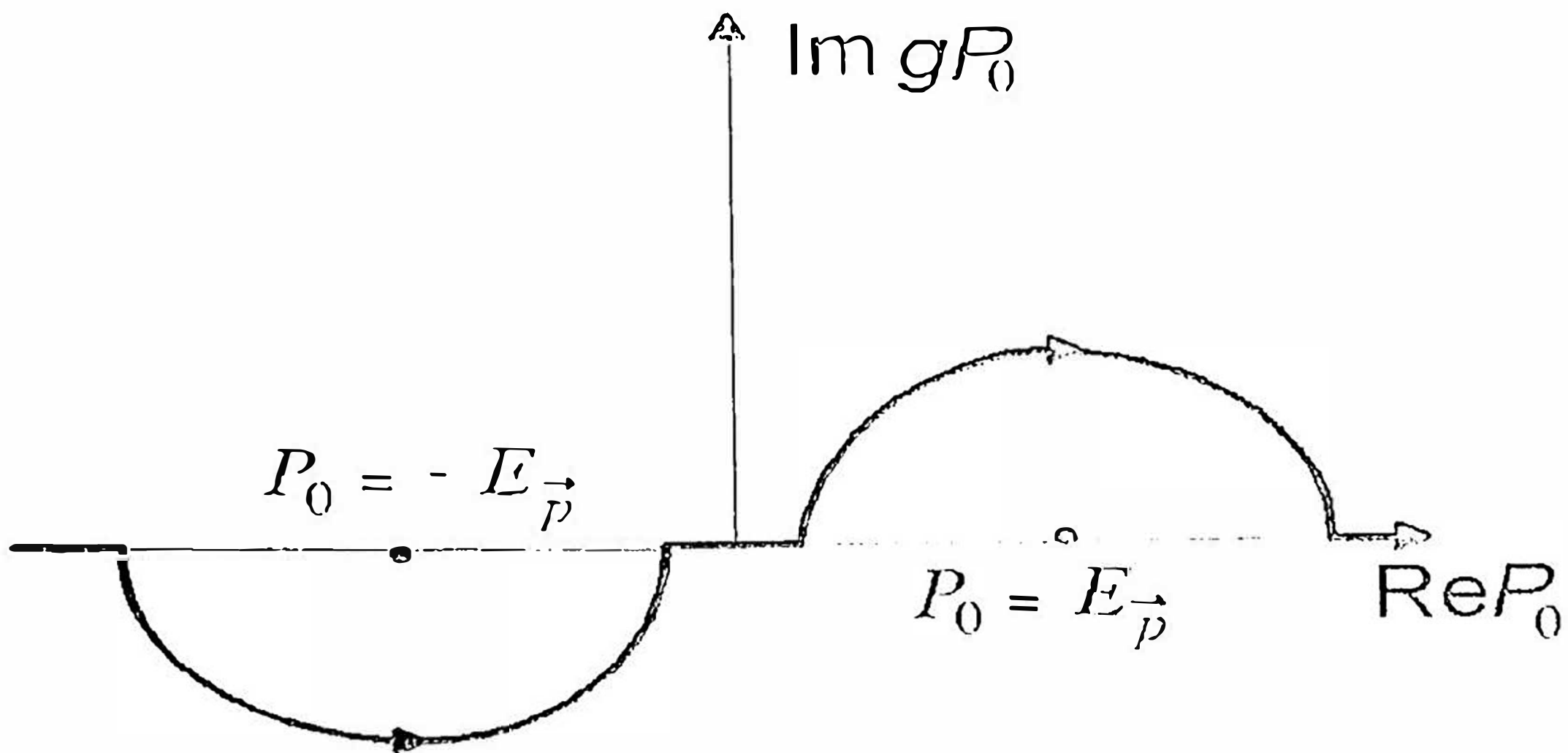


Fig 2A.1 Muestra la curva C_F para la función de Feynman $\Delta_F(x-x')$.

A continuación, expresamos de otra manera el denominador de la ecuación anterior, usando la relación entre energía y momentum lineal para una partícula relativista y la definición de p^2 escribiendo

$$p^2 - m^2 = (p_0)^2 - (\vec{p})^2 - m^2 = (p_0)^2 - (E_{\vec{p}})^2 = (p_0 + E_{\vec{p}}) (p_0 - E_{\vec{p}}). \quad (2A.3)$$

Utilizando la ecuación (2A.3) podemos reescribir la ecuación (2A.2) de la siguiente manera:

$$\Delta_F(x-x') \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4p \frac{e^{-ip(x-x')}}{(p_0)^2 - (E_{\vec{p}})^2}. \quad (2A.4)$$

En vez de considerar la curva de la figura 2A.1 hacemos uso de la hipótesis propuesta por R. Feynman, que consistió en adicionar una pequeña cantidad imaginaria negativa ($i\eta$) a $E_{\vec{p}}$, originando un desplazamiento a los polos $p_0 = \pm E_{\vec{p}}$ en una distancia infinitesimal η desde el eje real p_0 . De tal modo que el polo positivo $p_0 = E_{\vec{p}}$ era desplazado hacia abajo del eje real p_0 y el polo negativo $p_0 = -E_{\vec{p}}$ era desplazado hacia arriba del mismo. Pudiendo de este modo ejecutar la integración a lo largo de todo el eje real de p_0 (Ver figura 2A.2).

Esto nos permite, reescribir la ecuación (2A.4) de la siguiente forma:

$$\Delta_F(x - x') \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \frac{e^{-ip(x-x')}}{(p_0)^2 - (E_{\vec{p}} - i\eta)^2}. \quad (2A.5)$$

ahora, podemos escribir el denominador de la ecuación anterior como:

$$(p_0)^2 - (E_{\vec{p}} - i\eta)^2 = (p_0 + E_{\vec{p}} - i\eta)(p_0 - E_{\vec{p}} + i\eta). \quad (2A.6)$$

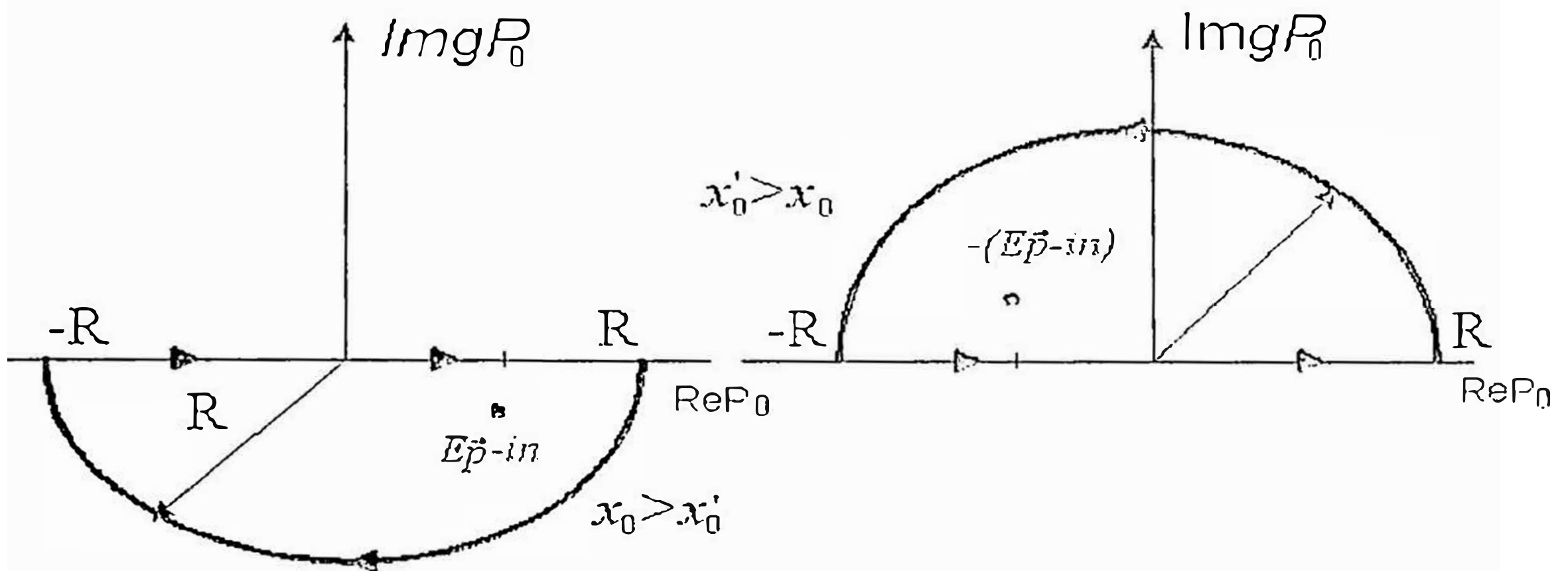


Fig 2A.2 Muestra las curvas y los desplazamientos de los polos para la función $\Delta_F(x - x')$.

Reemplazando la ecuación (2A.6) en la ecuación (2A.5), obtenemos:

$$\Delta_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{p} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0 e^{-ip_0(x_0 - x'_0)}}{(p_0 + E_{\vec{p}} - i\eta)(p_0 - E_{\vec{p}} + i\eta)} \right). \quad (2A.7)$$

En la ecuación (2A.7) la integración con respecto a cada uno de las cuatro variables p_0, p_1, p_2 , y p_3 es realizada desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

La integración temporal en p_0 es ejecutada considerando a p_0 como una variable compleja y eligiendo la curva C_F de la figura 2A.2, como trayectoria de integración.

A continuación, vamos a calcular el valor de la integral que está dentro del paréntesis de la ecuación anterior

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{C_F} \frac{e^{-iz(x_0-x'_0)} dz}{(z + E_{\bar{p}} - i\eta)(z - E_{\bar{p}} + i\eta)}, \quad (2A.8)$$

en donde consideramos a z como una variable compleja y escogemos como trayectoria de integración la curva C_F (dependiendo si $x_0 > x'_0$ o si $x'_0 > x_0$ en la (figura 2A.2), la cual consiste del segmento del eje real desde $-R$ a $+R$ y el semi-circulo C_R de radio R .

Por lo tanto, según la figura 2A.2 se presentan dos casos:

i.-Caso $x_0 > x'_0$. Entonces tenemos que

$$e^{-iz(x_0-x'_0)} = e^{-i\alpha(x_0-x'_0)} e^{\beta(x_0-x'_0)}, \text{ donde } \alpha = \text{Re } z \text{ y } \beta = \text{Im } z.$$

Para este caso, seleccionamos como trayectoria de integración el semi-circulo de radio R que esta debajo del eje real p_0 , encerrando al polo $p_0 = E_{\bar{p}} - i\eta$ y luego haremos tender su radio R hacia el infinito. Esto implicará que α y β también tiendan hacia el infinito. Pero el factor $e^{-i\alpha(x_0-x'_0)}$ es una función oscilante, mientras que $e^{\beta(x_0-x'_0)}$ no lo es, entonces éste segundo factor hará diverger la integral I_1 a menos que tomemos $\beta < 0$.

Esto nos permite escribir lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{C_F} \frac{e^{-iz(x_0-x'_0)} dz}{2\pi(z + E_{\bar{p}} - i\eta)(z - \{E_{\bar{p}} - i\eta\})} &= \int_{-R}^{+R} \frac{d\alpha e^{-i\alpha(x_0-x'_0)}}{2\pi(\alpha + E_{\bar{p}} - i\eta)(\alpha - \{E_{\bar{p}} - i\eta\})} + \\ \int_{C_R} \frac{dz e^{-iz(x_0-x'_0)}}{2\pi(z + E_{\bar{p}} - i\eta)(z - \{E_{\bar{p}} - i\eta\})}. \end{aligned} \quad (2A.9)$$

Ahora vamos a mostrar que la integral a lo largo de C_R tiende a cero (ver figura 2A.2). Para esto vamos hacer uso de la siguiente propiedad para las integrales

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz|, \quad (2A.10)$$

asimismo también, haremos uso de la desigualdad triangular

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|. \quad (2A.11)$$

A continuación, utilizando la ecuación (2A.10) vamos a calcular la integral a lo largo de C_R , obteniendose lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{dz e^{-iz(x_0-x'_0)}}{(z)^2 - (E_{\bar{p}} - i\eta)^2} \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \left| \frac{dz e^{-iz(x_0-x'_0)}}{(z)^2 - (E_{\bar{p}} - i\eta)^2} \right| \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{|e^{-iz(x_0-x'_0)}| |dz|}{|(z)^2 - (E_{\bar{p}} - i\eta)^2|}. \end{aligned} \quad (2A.12)$$

Haciendo uso de la ecuación (2A.11) vamos a acotar el término $\frac{1}{|(z)^2 - (E_{\bar{p}} - i\eta)^2|}$ de la ecuación anterior, escribiendo lo siguiente

$$\frac{1}{|(z)^2 - (E_{\bar{p}} - i\eta)^2|} \leq \frac{1}{|z|^2 - |E_{\bar{p}} - i\eta|^2} = \frac{1}{R^2 - |E_{\bar{p}} - i\eta|^2} < \frac{k}{R^2}, \quad (2A.13)$$

donde k es una constante positiva tal que $k > 2$.

Además también consideramos que

$$|dz| = |d(Re^{i\theta})| = R|e^{i\theta}id\theta| = R d\theta, \quad (2A.14)$$

y

$$\begin{aligned} |e^{-iz(x_0-x'_0)}| &= |e^{-iRc^{i\theta}(x_0-x'_0)}| = |e^{-iR(\cos\theta + isen\theta)(x_0-x'_0)}| = \\ &= |e^{-iR\cos\theta(x_0-x'_0)}| |e^{Rsen\theta(x_0-x'_0)}| = e^{Rsen\theta(x_0-x'_0)}. \end{aligned} \quad (2A.15)$$

Reemplazando los resultados de las ecuaciones (2A.13), (2A.14) y (2A.15) en la ecuación (2A.12), encontramos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{|e^{-iz(x_0-x'_0)}| |dz|}{|(z)^2 - (E_{\vec{p}} - i\eta)^2|} &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{Rsen\theta(x_0-x'_0)} k d\theta}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{-e^{-Rsen\theta(x_0-x'_0)} k d\theta}{R} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rsen\theta(x_0-x'_0)} d\theta + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k}{R} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{Rsen\theta(x_0-x'_0)} d\theta. \end{aligned} \quad (2A.16)$$

Ahora, vamos a calcular el valor de la integral $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rsen\theta(x_0-x'_0)} d\theta$, en el intervalo de $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

En este intervalo y según la fig 2A.3 se cumple que $sen\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, de donde obtenemos lo siguiente:

$$Rsen\theta(x_0-x'_0) \geq \frac{2R\theta(x_0-x'_0)}{\pi},$$

entonces

$$e^{-Rsen\theta(x_0-x'_0)} \leq e^{\frac{-2R\theta(x_0-x'_0)}{\pi}}. \quad (2A.17)$$

Substituyendo el valor de la ecuación anterior en la primera integral del lado izquierdo de la ecuación (2A.16), hallamos

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rsen\theta(x_0-x'_0)} d\theta &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2R\theta(x_0-x'_0)}{\pi}} d\theta = \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi k}{2R^2(x_0-x'_0)} \left(e^{\frac{-2R\theta(x_0-x'_0)}{\pi}} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k\pi (e^{-R(x_0-x'_0)} - 1)}{2R^2(x_0-x'_0)} = 0. \end{aligned} \quad (2A.18)$$

Este es el valor para la primera integral dada por la ecuación (2A.16).

Ahora, vamos a calcular el valor de la integral $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k}{R} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-Rsen\theta(x_0-x'_0)} d\theta$, en el intervalo de $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

En este intervalo y según la fig 2A.3 se cumple que $sen\theta \geq -\frac{2\theta}{\pi} + 2$, de donde encontramos lo siguiente

$$R \operatorname{sen} \theta (x_0 - x'_0) \geq \frac{-2R\theta(x_0 - x'_0)}{\pi} + 2R(x_0 - x'_0),$$

entonces

$$e^{-R \operatorname{sen} \theta (x_0 - x'_0)} \leq e^{\frac{2R\theta(x_0 - x'_0)}{\pi}} e^{-2R(x_0 - x'_0)}. \quad (2A.19)$$

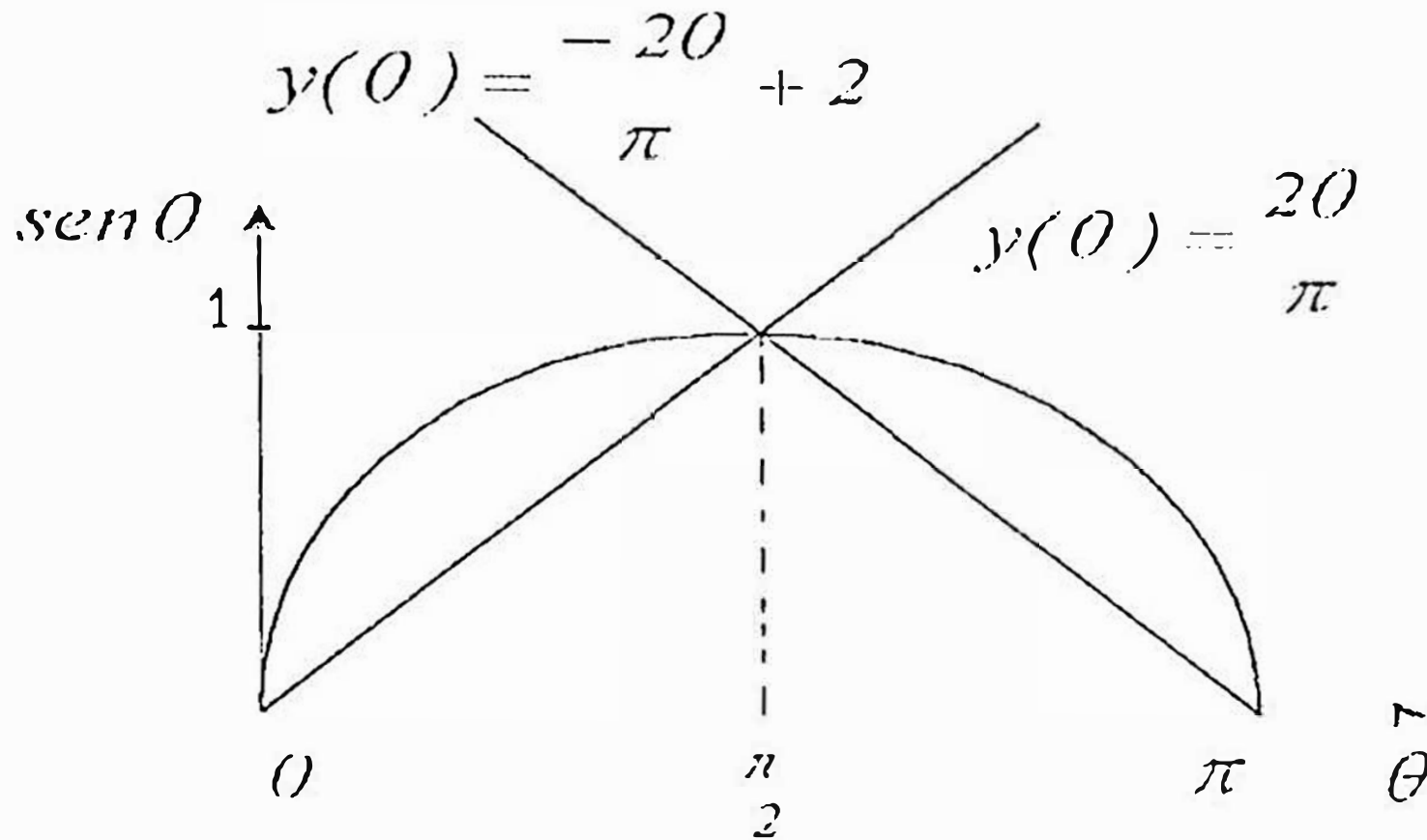


Fig 2A.3 Muestra la función $\operatorname{sen} \theta$ en el intervalo de $0 \leq \theta \leq \pi$ y las rectas

$y(\theta) = \frac{2\theta}{\pi}$ e $y(\theta) = -\frac{2\theta}{\pi} + 2$, necesarias para efectuar las integraciones en el contorno cerrado C_R .

Substituyendo el valor de la ecuación anterior en la segunda integral del lado izquierdo de la ecuación (2A.16), hallamos

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k}{R} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta (x_0 - x'_0)} d\theta &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k}{R} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\frac{2R\theta(x_0 - x'_0)}{\pi}} e^{-2R(x_0 - x'_0)} d\theta = \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-k\pi e^{-2R(x_0 - x'_0)}}{2R^2(x_0 - x'_0)} \left(e^{\frac{2R\theta(x_0 - x'_0)}{\pi}} \right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k\pi (e^{-R(x_0 - x'_0)} - 1)}{2R^2(x_0 - x'_0)} = 0. \quad (2A.20) \end{aligned}$$

Reemplazando los resultados de las ecuaciones (2A.19) y (2A.20) en la ecuación (2A.16) obtenemos el siguiente resultado

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{(z)^2 - (E_{\bar{p}} - i\eta)^2} \right| = 0. \quad (2A.21)$$

Substituyendo la ecuación (2A.21) en la ecuación (2A.9), obtenemos lo siguiente

$$\int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\bar{p}} - i\eta)(z - \{E_{\bar{p}} - i\eta\})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha e^{-i\alpha(x_0 - x'_0)}}{2\pi(\alpha + E_{\bar{p}} - i\eta)(\alpha - \{E_{\bar{p}} - i\eta\})}. \quad (2A.22)$$

De la figura 2A.2 notamos, que solamente el polo $p_0 = E_{\bar{p}} - i\eta$ esta dentro de la curva C_F , entonces utilizando el Teorema del Residuo, para la integral de la ecuación (2A.8) encontramos:

$$\int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} = -2\pi i \times$$

$$\left[\lim_{z \rightarrow (E_{\vec{p}} - i\eta)} \frac{(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\}) e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} \right],$$

calculando el límite con respecto a $\eta \rightarrow 0$ y simplificando los términos semejantes en la ecuación anterior, hallamos

$$\int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(-2\pi i \left[\frac{e^{-i(E_{\vec{p}} - i\eta)(x_0 - x'_0)}}{2\pi(2\{E_{\vec{p}} - i\eta\})} \right] \right),$$

efectuando los productos de los términos que se encuentran dentro de los paréntesis en el argumento de la función exponencial y calculando el límite con respecto a $\eta \rightarrow 0$, en la ecuación anterior, encontramos

$$\int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{i e^{-iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)} e^{-\eta(x_0 - x'_0)}}{2\{E_{\vec{p}} - i\eta\}} \right) =$$

$$\frac{i e^{-iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)}}{2E_{\vec{p}}}. \quad (2A.23)$$

De las ecuaciones (2A.22) y (2A.23) obtenemos el valor de la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha e^{-i\alpha(x_0 - x'_0)}}{2\pi(\alpha + E_{\vec{p}} - i\eta)(\alpha - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} = \frac{i e^{-iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)}}{2E_{\vec{p}}}. \quad (2A.24)$$

Esta ecuación representa el valor de la integral I_1 (dada por la ecuación (2A.8)) para el caso $x_0 > x'_0$.

ii.-Caso $x'_0 > x_0$. Entonces

$$e^{-iz(x_0 - x'_0)} = e^{-i\alpha(x_0 - x'_0)} e^{\beta(x_0 - x'_0)}, \text{ donde } \alpha = \text{Re } z \text{ y } \beta = \text{Im } z.$$

Para este caso, seleccionamos como trayectoria de integración el semi-círculo de radio R que está encima del eje real de p_0 , encerrando al polo $p_0 = -(E_{\vec{p}} - i\eta)$ y luego haremos tender su radio R hacia el infinito. Esto implicará que α y β también tiendan hacia el infinito. Pero el factor $e^{-i\alpha(x_0 - x'_0)}$ es una función oscilante, mientras que $e^{\beta(x_0 - x'_0)}$ no lo es, entonces este segundo factor hará diverger la integral I_1 a menos que tomemos $\alpha < 0$.

Esto nos permite escribir lo siguiente

$$\int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} = \int_{-R}^{+R} \frac{d\alpha e^{-i\alpha(x_0 - x'_0)}}{2\pi(\alpha + E_{\vec{p}} - i\eta)(\alpha - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})}$$

$$+ \int_{C_R} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})}. \quad (2A.25)$$

Procediendo de igual manera como se realizó en las ecuaciones (2A.9), (2A.10) (2A.11), (2A.12), (2A.13), (2A.14), (2A.15), (2A.16), (2A.17), (2A.18), (2A.19) y (2A.20) podemos mostrar que la integral alrededor de la curva C_F , cuando θ está en el intervalo de $0 \leq \theta < \pi$ es:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{(z)^2 - (E_{\vec{p}} - i\eta)^2} \right| = 0. \quad (2A.26)$$

Substituyendo la ecuación (2A.26) en la ecuación (2A.25) encontramos

$$\int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha e^{-i\alpha(x_0 - x'_0)}}{2\pi(\alpha + E_{\vec{p}} - i\eta)(\alpha - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})}. \quad (2A.27)$$

De la figura 2A.2 notamos, que solamente el polo $p_0 = -(E_{\vec{p}} - i\eta)$ que esta dentro de C_F contribuye con el Teorema del Residuo, para la integral de la ecuación (2A.8) obtenemos la siguiente expresión:

$$\int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} = 2\pi i \times \left[\lim_{z \rightarrow -(E_{\vec{p}} - i\eta)} \frac{(z + E_{\vec{p}} - i\eta) e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} \right],$$

considerando el límite con respecto a $\eta \rightarrow 0$ y simplificando los términos semejantes en la ecuación anterior hallamos

$$\int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(2\pi i \left[\frac{e^{i(E_{\vec{p}} - i\eta)(x_0 - x'_0)}}{-4\pi(E_{\vec{p}} - i\eta)} \right] \right),$$

efectuando los productos de los términos que se encuentran dentro de los paréntesis en el argumento de la función exponencial y calculando el límite con respecto a $\eta \rightarrow 0$, en la ecuación anterior, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{C_F} \frac{dz e^{-iz(x_0 - x'_0)}}{2\pi(z + E_{\vec{p}} - i\eta)(z - \{E_{\vec{p}} - i\eta\})} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(- \frac{i e^{iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)} e^{\eta(x_0 - x'_0)}}{2\{E_{\vec{p}} - i\eta\}} \right) \\ &= - \frac{i e^{iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)}}{2E_{\vec{p}}}. \end{aligned} \quad (2A.28)$$

Combinando las ecuaciones (2A.27) y (2A.28) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha e^{-i\alpha(x_0 - x'_0)}}{2\pi(\alpha + E_{\vec{p}} - i\eta)(\alpha - E_{\vec{p}} + i\eta)} = - \frac{i e^{iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)}}{2E_{\vec{p}}}. \quad (2A.29)$$

Esta ecuación representa el valor de la integral I_1 (dada por la ecuación (2A.8)) para el caso $x'_0 > x_0$.

Por lo tanto, de las ecuaciones halladas encontramos las siguientes conclusiones:

a).- Para el caso $x_0 > x'_0$, debemos considerar la curva C_F que esta en el semiplano inferior (debajo del eje real de p_0) de la Fig. 2A.2 y si además substituimos la ecuación (2A.24) en la ecuación (2A.7), encontramos:

$$\Delta_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{p} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(- \frac{i e^{-iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)}}{2E_{\vec{p}}} \right),$$

lo cual también se puede escribir como:

$$\Delta_F(x - x') = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x - x')} = \Delta^{(+)}(x - x'). \quad (2A.30)$$

Este resultado en efecto coincide con el valor encontrado en la ecuación (1.89a).

b).- Similarmente, para el caso $x'_0 > x_0$, debemos considerar la curva C_F que esta en el semi-plano superior (encima del eje real de p_0) de la Fig. 2A.2 y si además sustituimos la ecuación (2A.29) en la ecuación (2A.7), obtenemos

$$\Delta_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{p} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(-\frac{i e^{iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)}}{2E_{\vec{p}}} \right),$$

considerando la siguiente propiedad de las integrales

$$\int d^3 \vec{p} f(\vec{p}) = \int d^3 \vec{p} f(-\vec{p}),$$

entonces, reemplazando esta expresión en la ecuación anterior, encontramos:

$$\Delta_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3(\vec{p}) e^{i(-\vec{p}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(-\frac{i e^{iE_{(-\vec{p})}(x_0 - x'_0)}}{2E_{(-\vec{p})}} \right)$$

de donde hallamos

$$\Delta_F(x - x') = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{ip \cdot (x - x')} = -\Delta^{(-)}(x - x'). \quad (2A.31)$$

Este resultado en efecto coincide con el valor encontrado en la ecuación (1.94a).

Hemos mostrado de esta manera, que la ecuación (2A.2) constituye la representación integral covariante para la función $\Delta_F(x - x')$.

Pero cuando efectuamos éstos mismos cálculos usando la curva de la Fig 2A.1 encontraremos dos casos

Caso 1: $x_0 > x'_0$

Para realizar la integración temporal de la ecuación (2A.4), consideramos a p_0 como una variable compleja y escogemos como trayectoria de integración la curva de la Fig. 2A.1. La cual la cerramos por debajo del eje $\text{Re } p_0$. Luego, utilizando el Teorema del Residuo notaremos que tanto los polo $p_0 = \pm E_{\vec{p}}$ van a contribuir con el valor de ésta integral, es decir, el valor de la integral en el semi-circulo que subtiende al polo $p_0 = -E_{\vec{p}}$ no es nula.

Por lo tanto, el resultado que se obtiene después de a ser los cálculos es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha e^{-i\alpha(x_0 - x'_0)}}{2\pi(\alpha + E_{\vec{p}})(\alpha - E_{\vec{p}})} = -\frac{i e^{-iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)}}{4E_{\vec{p}}} + \frac{i e^{iE_{\vec{p}}(x_0 - x'_0)}}{4E_{\vec{p}}}, \quad (2A.32)$$

Caso 2: Si $x'_0 > x_0$

Similarmente, efectuamos la integración temporal de la ecuación (2A.4), considerando a p_0 como una variable compleja y escogiendo como trayectoria de integración la curva de la Fig. 2A.1. La cual la cerramos por encima del eje $\text{Re } p_0$. A continuación, utilizando el Teorema del Residuo notaremos que ambos

polos $p_0 = \pm E_{\vec{p}}$, van a contribuir con el valor de esta integral, es decir, el valor de la integral en el semi-circulo que subtiende al polo $p_0 = E_{\vec{p}}$ no es nula.

Por lo tanto, el resultado que se obtiene después de efectuar los cálculos es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha e^{-i\alpha(x_0-x'_0)}}{2\pi (\alpha + E_{\vec{p}}) (\alpha - E_{\vec{p}})} = \frac{ie^{-iE_{\vec{p}}(x_0-x'_0)}}{4E_{\vec{p}}} - \frac{ie^{iE_{\vec{p}}(x_0-x'_0)}}{4E_{\vec{p}}}. \quad (2A.33)$$

Entonces, comparando éstos resultados con los encontrados en las ecuaciones (2A.24) y (2A.29) notamos que existen una inconsistencia la cual se debe al hecho de considerar para el Caso 1 (Caso 2), la contribución de la integral a lo largo del semi-circulo que subtiende al polo $p_0 = -E_{\vec{p}}$ ($p_0 = E_{\vec{p}}$). Es decir, el valor de esta integral debería ser nula. Por lo tanto el término $\frac{ie^{iE_{\vec{p}}(x_0-x'_0)}}{4E_{\vec{p}}}$ ($\frac{ie^{-iE_{\vec{p}}(x_0-x'_0)}}{4E_{\vec{p}}}$) no debería aparecer al lado derecho de la ecuación (2A.32) ((2A.33)). Esta asunción debería hacerse por cuestiones físicas y no matemáticas. Además el numerador del lado derecho de la ecuación (2A.2) debería estar multiplicado por 2, esto produciría que el denominador del lado derecho de las ecuaciones (2A.32) y (2A.33) sean 2 y no 4. De este modo nuestros resultados considerando tanto las figuras (2A.1) y (2A.2) coincidirían. Este es un problema que se presenta en todas las bibliografías y que aquí lo hemos aclarado consistentemente.

Una representación integral no-covariante conveniente para la función $\Delta^{(+)}(x-x')$ definida por la ecuación (1.89a) es:

$$\Delta^{(+)}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4p \frac{e^{-ip(x-x')}}{E_{\vec{p}}(p_0 - E_{\vec{p}})}. \quad (2A.34)$$

La integración en p_0 es ejecutada considerando a p_0 como una variable compleja. Para obtener la representación tridimensional de la función $\Delta^{(+)}(x-x')$ a partir de la ecuación (2A.34) vamos a escoger como trayectoria de integración la curva C^+ (Ver figura 2A.5) que resulta de sumar las curvas mostradas por la figura 2A.4a, las cuales deben ser cerradas por debajo del eje Real de p_0 .

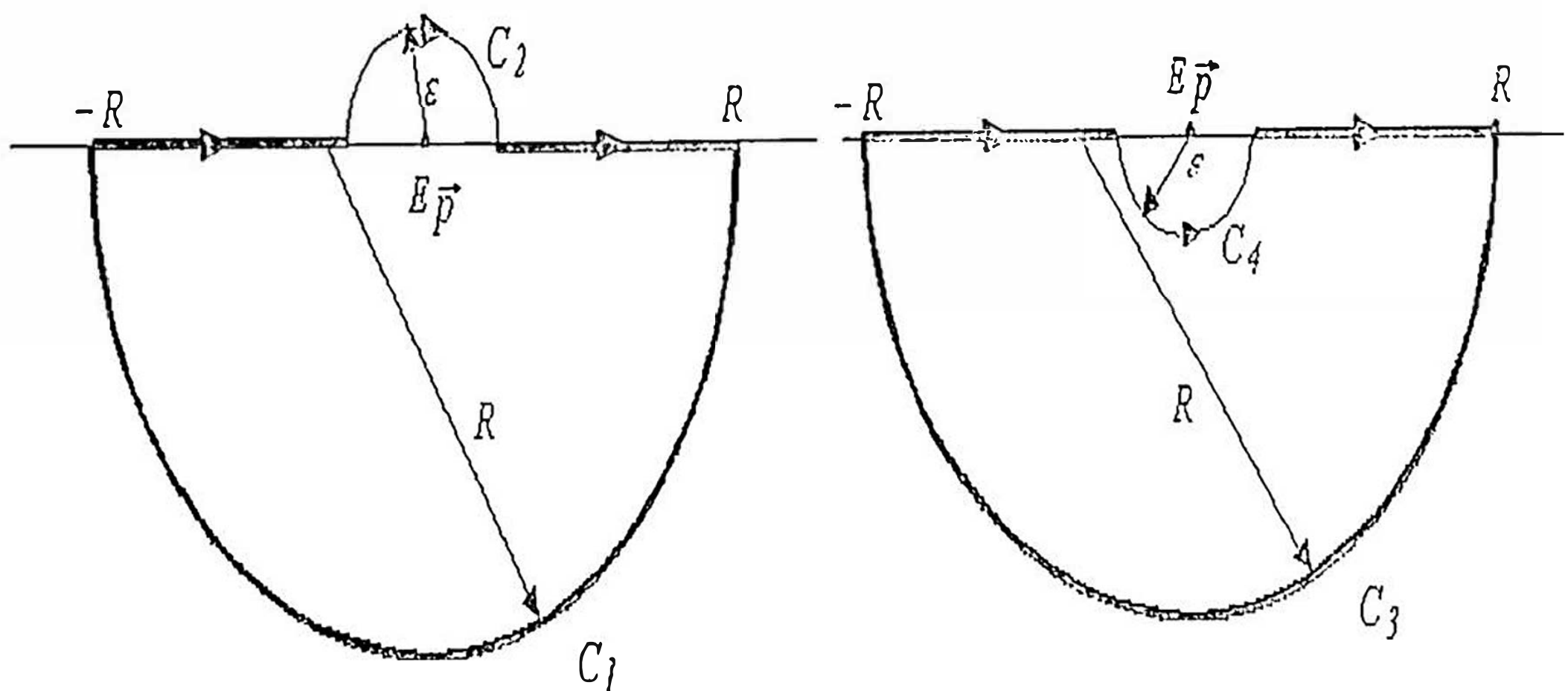


Fig 2A.4a Muestra las curvas que contribuyen para obtener la curva C^+ .

A continuación, mostraremos la forma que deben tener las curvas C^+ y C^- que resultan de superponer las curvas de la figuras 2A.4a y 2A.4b respectivamente, indicando sus polos.

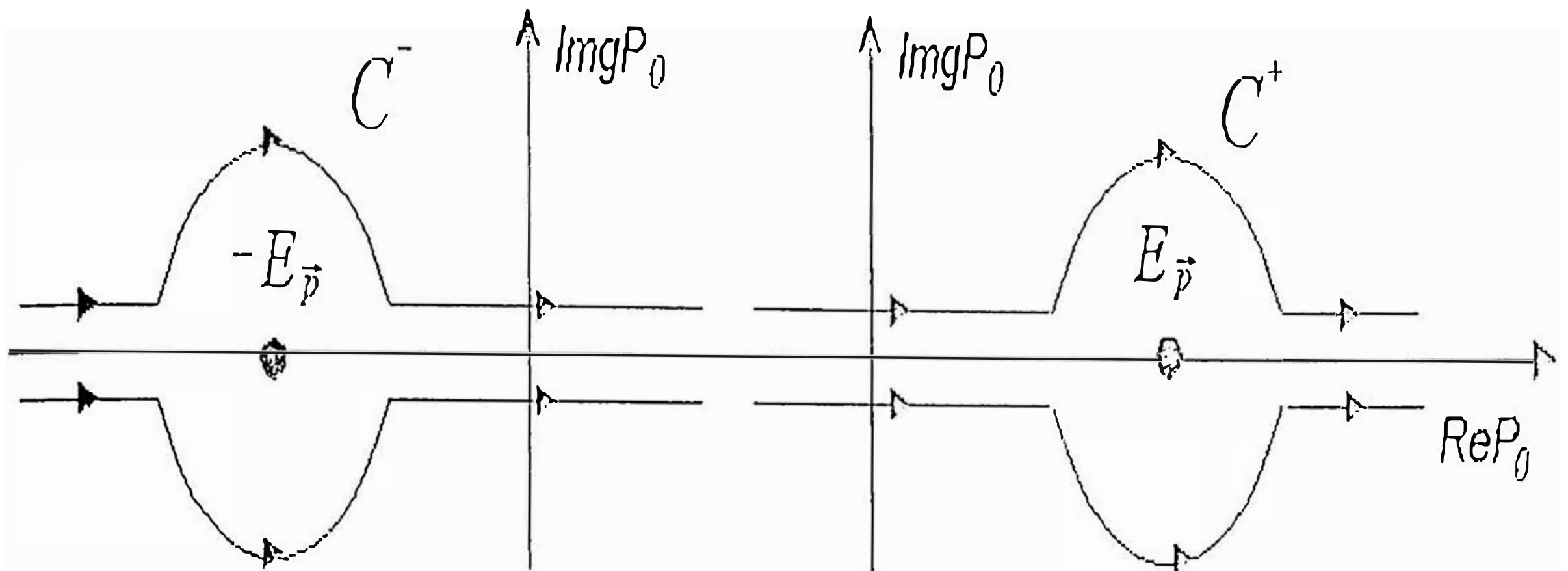


Fig 2A.5 Muestra las curvas C^+ y C^- para las representaciones integrales de las funciones $\Delta^{(+)}(x - x')$ y $\Delta^{(-)}(x - x')$ respectivamente.

En cambio, usualmente todas las bibliografías por ejemplo la referencia No 8, afirman que la trayectoria de integración que se escoge para la integración temporal en p_0 esta dada por la circunferencia que encierra al polo $p_0 = E_{\vec{p}}$, como lo muestra la curva C^+ de la figura 2A.6

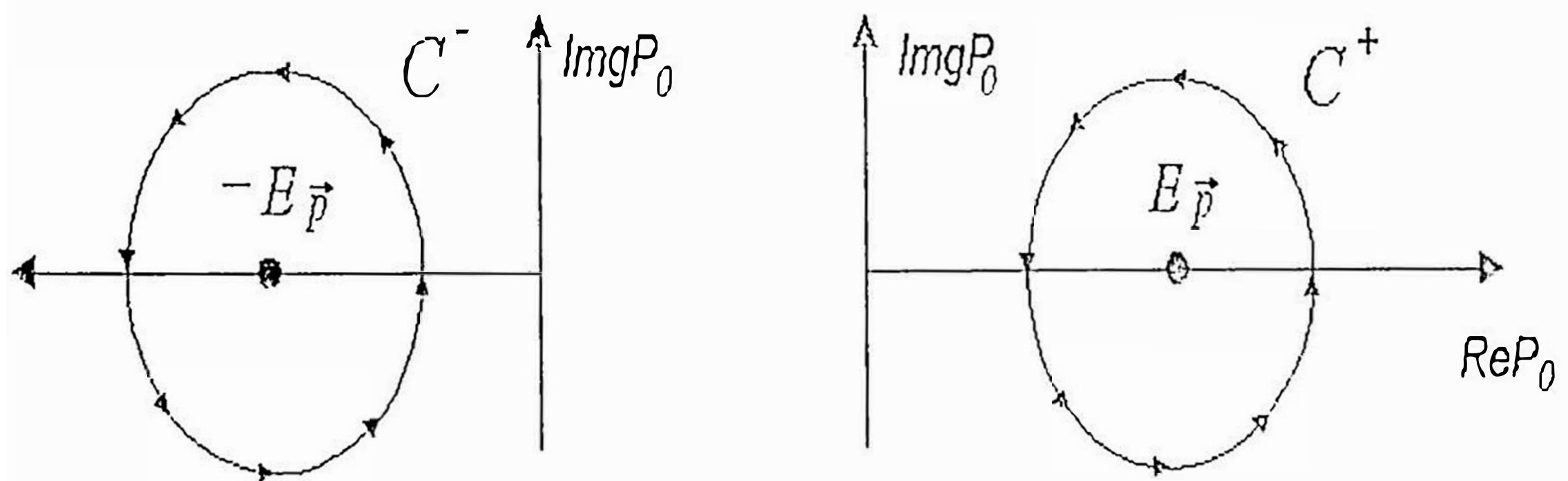


Fig 2A.6 Muestra las curvas C^+ y C^- para las representaciones integrales no-covariantes de las funciones $\Delta^{(+)}(x - x')$ y $\Delta^{(-)}(x - x')$.

La elección de la curva C^+ de la fig. 2A.6 esta equivocada, por que apartir de ella no se puede calcular el valor de la integral a lo largo del eje real de p_0 . Este es un nuevo problema de inconsistencia que se presenta en las bibliografías y que no ha sido corregido a tiempo.

Una representación integral no-covariante conveniente para la función $\Delta^{(-)}(x-x')$ definida por la ecuación (1.95a) es:

$$\Delta^{(-)}(x-x') = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \frac{e^{-ip(x-x')}}{E_{\vec{p}}(p_0 + E_{\vec{p}})}. \quad (2A.35)$$

La integración en p_0 es ejecutada considerando a p_0 como una variable compleja. Para obtener la representación tridimensional de la función $\Delta^{(-)}(x-x')$ a partir de la ecuación (2A.35) vamos a escoger como trayectoria de integración la curva C^- (Ver figura 2A.5) que resulta de sumar las curvas mostradas por la figura 2A.4b, las cuales deben ser cerradas por encima del eje Real de p_0 .

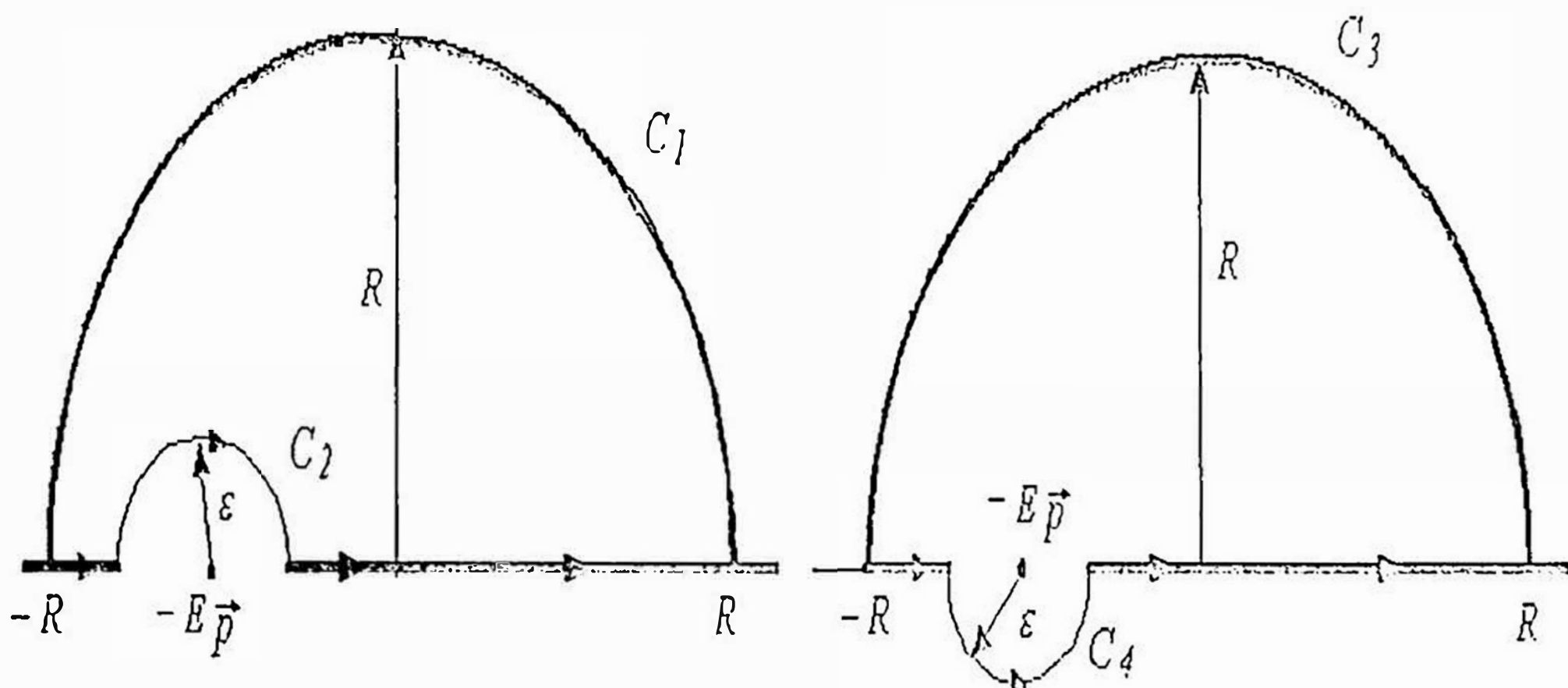


Fig. 2A.4b Muestra las curvas que contribuyen para obtener la curva C^- .

En cambio, usualmente todas las bibliografías por ejemplo la referencia No 8, afirman que la trayectoria de integración que se escoge para la integración temporal en p_0 esta dada por la circunferencia que encierra al polo $p_0 = -E_{\vec{p}}$, como lo muestra la curva C^- de la figura 2A.6

Nuevamente, aquí también notamos que la elección de la curva C^- de la fig. 2A. esta equivocada, por que a partir de ella no se puede calcular el valor de la integral a lo largo del eje real de p_0 . Esto también constituye un problema de inconsistencia que se presenta usualmente en todas las bibliografías por ejemplo en la referencia No 8, y que no ha sido corregido.

Una forma conveniente para escribir en forma compacta y covariante las representaciones integrales dada por las ecuaciones (2A.34) y (2A.35) para las funciones $\Delta^{(\pm)}(x-x')$ es:

$$\Delta^{(\pm)}(x-x') \equiv \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2 - m^2}, \quad (2A.36)$$

substituyendo la ecuación (2A.3) en la ecuación (2A.36) hallamos:

$$\Delta^{(\pm)}(x-x') = \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \frac{e^{-ip(x-x')}}{(p_0)^2 - (E_{\vec{p}})^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{p} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \frac{e^{-ip_0(x-x')}}{E_{\vec{p}}(p_0 - E_{\vec{p}})}$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{p} e^{i \vec{p}'(\vec{x} - \vec{x}')} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \frac{e^{-ip_0(x-x')}}{E_{\vec{p}}(p_0 + E_{\vec{p}})} \quad (2A.37)$$

La integración en p_0 es ejecutada considerando a p_0 como una variable compleja.

Apartir de la ecuación (2A.37) podemos establecer las siguientes posibilidades:

i).- Para obtener la representación tridimensional de la función $\Delta^{(+)}(x - x')$ vamos a considerar solamente la primera integral del lado izquierdo de la ecuación (2A.37) cuyo integrando presenta un polo en $p_0 = +E_{\vec{p}}$, despreciando de este modo la contribución de la segunda integral cuyo integrando presenta un polo en $p_0 = -E_{\vec{p}}$. Y elegimos como trayectoria de integración la curva C^+ (Ver figura 2A.5) que resulta de sumar las curvas mostradas por la figura 2A.4a.

ii).- Para obtener la representación tridimensional de la función $\Delta^{(-)}(x - x')$ vamos a considerar solamente la segunda integral del lado izquierdo de la ecuación (2A.37) cuyo integrando presenta un polo en $p_0 = -E_{\vec{p}}$, despreciando de este modo la contribución de la primera integral cuyo integrando presente un polo en $p_0 = +E_{\vec{p}}$. Y elegimos como trayectoria de integración la curva C^- (Ver figura 2A.5) que resulta de sumar las curvas mostradas por la figura 2A.4b.

Las asunciones hechas en i), ii) nos permitirán obtener resultados que deben estar en concordancia con las ecuaciones (1.89a) y (1.94a) del Capítulo 1.

Sumando las ecuaciones (2A.34) (2A.35) obtendremos la representación integral de la función $\Delta(x - x')$ definida por la ecuación (1.95a), es decir:

$$\Delta(x - x') = \Delta^{(+)}(x - x') + \Delta^{(-)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \frac{e^{-ip(x-x')}}{E_{\vec{p}}(p_0 - E_{\vec{p}})} +$$

$$\frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \frac{e^{-ip(x-x')}}{E_{\vec{p}}(p_0 + E_{\vec{p}})},$$

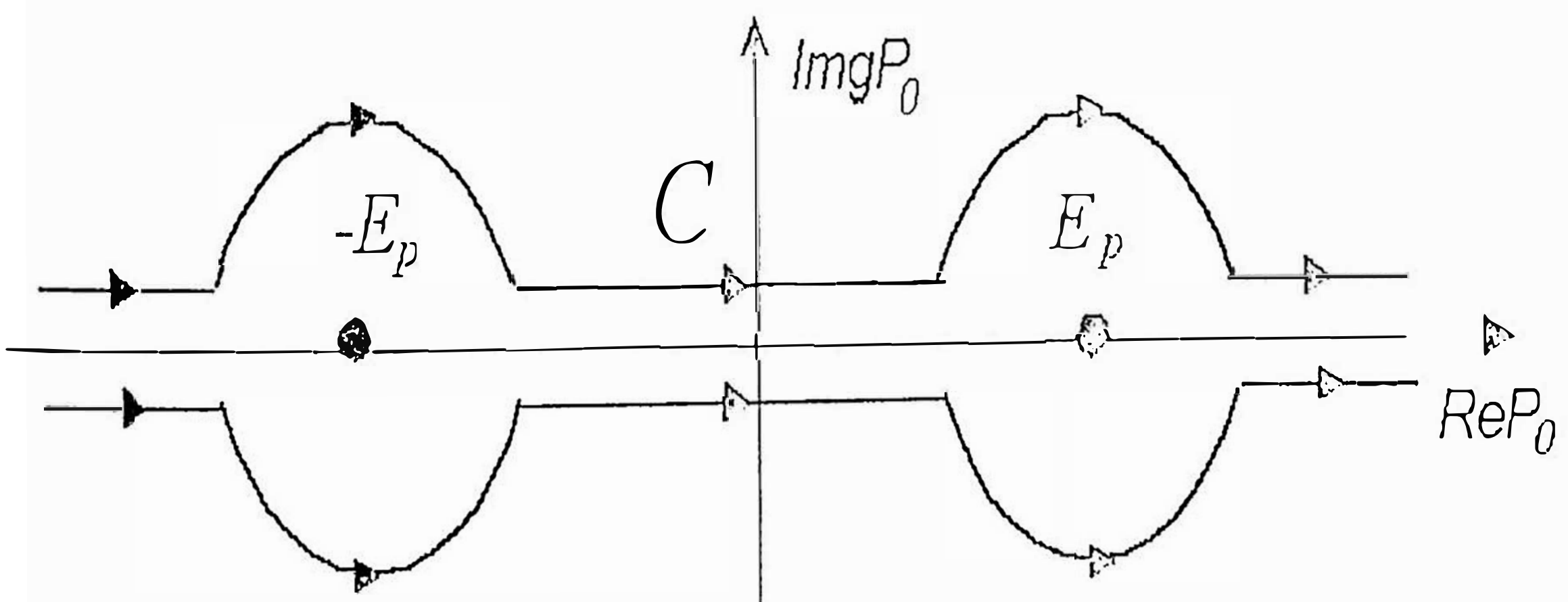


Fig 2A.7 Muestra la curva C para la representación integral covariante de la función $\Delta(x - x')$.

ordenando convenientemente los factores que están dentro, de los integrandos de la ecuación anterior obtenemos

$$\Delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \frac{e^{-ip(x-x')}}{E_{\vec{p}}} \left(\frac{1}{(p_0 - E_{\vec{p}})} - \frac{1}{(p_0 + E_{\vec{p}})} \right),$$

simplificando los términos que están dentro del paréntesis de la ecuación anterior, encontramos la representación integral covariante de la función $\Delta(x - x')$ así:

$$\Delta(x-x') \equiv \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2 - m^2}. \quad (2A.38)$$

La integración temporal en p_0 es ejecutada considerando a p_0 como una variable compleja y eligiendo la curva C de la figura 2A.7, como trayectoria de integración. Esta curva C resulta ser la superposición de las curvas C^+ y C^- mostradas por la fig. 2A.5.

En cambio, usualmente todas las bibliografías por ejemplo la referencia No 8, afirman que la trayectoria de integración que se escoge para la integración temporal en p_0 esta dada por la circunferencia que encierra a los polos $p_0 = \pm E_{\vec{p}}$, como lo muestra la curva C de la figura 2A.8

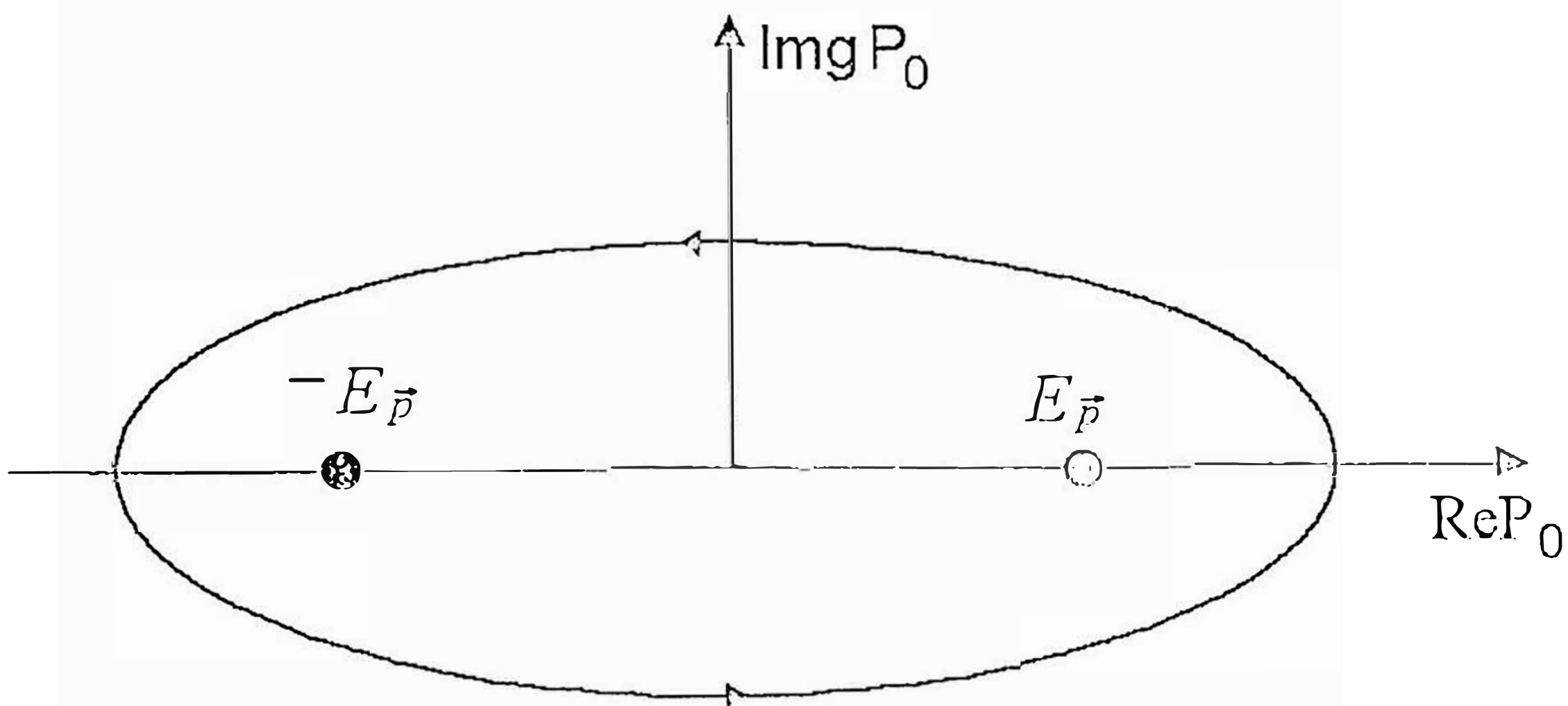


Fig 2A.8 Muestra la curva C para la representación integral covariante de la función $\Delta(x - x')$.

La elección de la curva C dada por la fig. 2A.8 esta equivocada, por que apartir de ella no se puede calcular el valor de la integral a lo largo del eje real de p_0 . Esto también representa un nuevo problema de inconsistencia que se presenta en las bibliografías y que no ha sido corregido.

De esta manera hemos encontrado las representaciones integrales covariantes de las funciones $\Delta^{(\pm)}(x - x')$, $\Delta(x - x')$ y $\Delta_F(x - x')$, aclarando las inconsistencias que se encuentran en las bibliografías.

CAPITULO 3. REGLAS DE FEYNMAN PARA LA EDC.

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo, mostraremos que a partir de la expansión de la Matriz "S" encontraremos los términos que van a contribuir con el cálculo de los elementos matriciales S_{if} para una transición particular desde un estado inicial $|i\rangle$ hasta un estado final $|f\rangle$. Si en los términos que resultan de los productos normales, reemplazamos las transformadas de Fourier de los operadores de campo $\Psi(x)$, $\bar{\Psi}(x)$ y $A_\mu(x)$ y de los propagadores $S_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$ y $D_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2)$; encontraremos de esta manera las amplitudes de transición escritas en el espacio momentum.

Este método nos servirá para formular un conjunto de reglas (llamadas reglas de Feynman para la EDC) que nos permitiran escribir cada uno de los productos normales que contribuyen a S_{if} , directamente desde los diagramas de Feynman. Es decir, a cada elemento S_{if} de la Matriz "S" y para un determinado orden "n" de su expansión, le asociamos un conjunto de graficos llamados diagramas de orden "n".

Existiendo de esta manera una correspondencia uno a uno entre los diagramas de Feynman y sus productos normales correspondientes.

3.2 LOS TERMINOS DE PRIMER $S^{(1)}$ Y SEGUNDO $S^{(2)}$ ORDEN DE LA EXPANSION DE LA MATRIZ "S".

3.2.1 EL TERMINO DE PRIMER ORDEN $S^{(1)}$ DE LA EXPANSION DE LA MATRIZ "S".

Según la ecuación (2.56) el término de primer orden $S^{(1)}$ de la expansión de la Matriz "S" es:

$$S^{(1)} = (ie) \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu(x_1) \Psi_\beta(x_1) \right), \quad (3.1)$$

escribiendo los operadores $\bar{\Psi}_\alpha(x_1)$, $A(x_1)$ y $\Psi_\beta(x_1)$ en términos de sus partes de frecuencia positiva y negativa hallamos:

$$\begin{aligned} S^{(1)} = (ie) \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \left(\{ \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\alpha^{(-)}(x) \} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \{ A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) \} \{ \Psi_\beta^{(+)}(x) + \Psi_\beta^{(-)}(x) \} \right) = \\ (ie) \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \{ \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu^{(+)}(x) \Psi_\beta^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu^{(+)}(x) \Psi_\beta^{(-)}(x) + \\ \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu^{(-)}(x) \Psi_\beta^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu^{(-)}(x) \Psi_\beta^{(-)}(x) + \\ \bar{\Psi}_\alpha^{(-)}(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu^{(+)}(x) \Psi_\beta^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\alpha^{(-)}(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu^{(+)}(x) \Psi_\beta^{(-)}(x) + \\ \bar{\Psi}_\alpha^{(-)}(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu^{(-)}(x) \Psi_\beta^{(+)}(x) + \bar{\Psi}_\alpha^{(-)}(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu^{(-)}(x) \Psi_\beta^{(-)}(x) \}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

uando aplicamos los términos que están entre las llaves de la ecuación (3.2) a los estados físicamente reales $|i\rangle$ y $|f\rangle$ que describen a los electrones, positrones y fotones, encontramos que la amplitud de probabilidad al primer orden es $\langle f|S^{(1)}|i\rangle = 0$.

Por lo tanto, una explicación para justificar este hecho; es que a este orden de la expansión de la Matriz "S" no se cumple la ley de conservación del cuadrimomentum.

3.2.2 EL TERMINO DE SEGUNDO ORDEN $S^{(2)}$ DE LA EXPANSION DE LA MATRIZ "S".

Si deseamos analizar algún proceso físicamente real, debemos considerar por lo menos el término de segundo orden $S^{(2)}$ de la expansión de la Matriz "S" dada por la ecuación (2.56)

$$S^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \Gamma \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \not{A}_\mu(x_1) \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2) (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \not{A}_\nu(x_2) \Psi_\sigma(x_2) \right). \quad (3.3)$$

Por conveniencia para facilitar la redacción del siguiente cálculo, vamos a omitir los sub-índices α, λ, β y σ que etiquetan las componentes de los operadores $\bar{\Psi}(x)$ y $\Psi(x)$ respectivamente, mientras que en algunos casos los usaremos en forma explícita. También, en forma conveniente vamos a denotar $\not{A}(x) = \gamma^\mu A_\mu(x)$, salvo que se indique lo contrario.

A continuación, hacemos uso del Teorema de Wick para expresar el producto cronológico de la ecuación (3.3) en términos de una suma de productos normales con todas sus posibles contracciones, encontrándose que

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \Gamma \left(\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2) \right) = \\ S^{(2)} &= \frac{(ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \{ N \left(\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2) \right) + \\ &+ N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1)} \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2) \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1)} \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2) \right) \\ &+ N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)} \not{A}(x_2) \Psi(x_2) \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2)} \Psi(x_2) \right) \\ &+ N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2)} \Psi(x_2) \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) \\ &+ N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) \\ &+ N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) \\ &+ N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) + N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) \end{aligned}$$

$$+N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \mathcal{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \mathcal{A}(x_2)} \right). \quad (3.4)$$

Utilizando las relaciones de la ecuación (2.123), encontraremos que solamente ocho productos normales de la ecuación (3.4) son diferentes de cero. Además por conveniencia, vamos a escribir en forma explícita los sub-índices α, λ, β y σ que etiquetan las componentes de los operadores $\bar{\Psi}(x)$ y $\Psi(x)$, que están presentes dentro de los siguientes productos normales

$$S^{(2)} = \sum_{i=A}^F S_i^{(2)}, \quad (3.5)$$

en donde

$$S_A^{(2)} = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\mathcal{A}(x_1))_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2) (\mathcal{A}(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right), \quad (3.5A)$$

$$S_B^{(2)} = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\mathcal{A}(x_1))_{\alpha\beta} \underbrace{\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2)}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} (\mathcal{A}(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right) - \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\mathcal{A}(x_1))_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2) (\mathcal{A}(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right), \quad (3.5B)$$

$$S_C^{(2)} = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) \underbrace{(\mathcal{A}(x_1))_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2)}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} (\mathcal{A}(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right), \quad (3.5C)$$

$$S_D^{(2)} = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) \underbrace{(\mathcal{A}(x_1))_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2)}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} (\mathcal{A}(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right) - \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) \underbrace{(\mathcal{A}(x_1))_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2)}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} (\mathcal{A}(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right), \quad (3.5D)$$

$$S_E^{(2)} = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\mathcal{A}(x_1))_{\alpha\beta} \underbrace{\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2)}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} (\mathcal{A}(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right), \quad (3.5E)$$

$$S_F^{(2)} = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) \underbrace{(\mathcal{A}(x_1))_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2)}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} (\mathcal{A}(x_2))_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right). \quad (3.5F)$$

A continuación, vamos a demostrar que los dos términos del lado derecho de la ecuación (3.5B), son idénticos entre sí.

Para esto usamos el segundo término de la ecuación (3.5B) y por conveniencia omitimos los sub-índices que denotan sus componentes, escribiendo

$$-\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 N \left(\bar{\Psi}(x_1) \mathcal{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \mathcal{A}(x_2) \Psi(x_2) \right) =$$

$$-\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 N \left(\bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \underbrace{\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1)} \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \right),$$

la integral del lado derecho de la ecuación anterior la hemos obtenido permutando los dos grupos de operadores $(\bar{\Psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \Psi(x_1))$ y $(\bar{\Psi}(x_2) \gamma^\nu A_\nu(x_2) \Psi(x_2))$ dentro del producto normal, teniendo en cuenta que los operadores fermiónicos anticonmutan entre si y conmutan con los operadores del Campo Electromagnético. A continuación cambiamos las variables $x_1 \leftrightarrow x_2$ en la integral del lado derecho de la igualdad anterior, encontrándose

$$-\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) =$$

$$-\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 N \left(\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \underbrace{\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)} \not{A}(x_2) \Psi(x_2) \right).$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (3.5B) escribimos $S_B^{(2)}$ como:

$$S_B^{(2)} = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu(x_1) \underbrace{\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2)} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} A_\nu(x_2) \Psi_\sigma(x_2) \right). \quad (3.5B')$$

Procediendo en forma similar en la ecuación (3.5C) encontramos que

$$-\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) =$$

$$-\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 N \left(\bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \underbrace{\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1)} \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \right),$$

a continuación cambiamos las variables $x_1 \leftrightarrow x_2$ en la integral del lado derecho de la igualdad anterior, encontrándose

$$-\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 N \left(\underbrace{\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \not{A}(x_2) \Psi(x_2)} \right) =$$

$$-\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 N \left(\bar{\Psi}(x_1) \not{A}(x_1) \underbrace{\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)} \not{A}(x_2) \Psi(x_2) \right).$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (3.5D) reescribimos $S_D^{(2)}$ como:

$$S_D^{(2)} = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 N \left(\bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu(x_1) \underbrace{\Psi_\beta(x_1) \bar{\Psi}_\lambda(x_2) A_\nu(x_2) (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2)} \right). \quad (3.5D')$$

A partir de los resultados de la ecuación (3.5), podemos calcular las amplitudes de transición $\langle f | S^{(2)} | i \rangle$ de algunos procesos de dispersión elástica entre electrones, positrones y fotones. Por ejemplo las amplitudes de transición de las siguientes dispersiones: electrón-fotón, positrón-fotón, electrón-electrón, positrón-positrón, electrón-positrón, electrón-positrón para crear un par de fotones, fotón-fotón para

crear un par electrón-positrón y de los procesos de interacción de un electrón (positrón o fotón) con su propio campo electromagnético.

Un proceso físico estará completamente especificado si se indican que tipo de partículas entran y salen de una reacción.

Por tanto, debemos escoger el estado inicial de tal modo que especifique los tipos de partículas que van a colisionar elásticamente, indicando sus momentum lineales y estados de polarización o espín iniciales respectivos. Además, también debemos elegir el estado final $|f\rangle$ de manera que especifique los tipos de partículas finales que resultan de la colisión; indicando sus momentum lineales y estados de polarización o espín finales.

Un caso más general sería que el estado inicial $|i\rangle$ o el estado final $|f\rangle$ represente una mezcla de estas partículas.

Como ejemplo vamos a considerar un proceso de dispersión elástica en donde inicialmente existen dos electrones, cuyos momentum lineales iniciales son p_1 y \vec{p}_2 (o cuadri-momentums p_1 y p_2 respectivamente) y sus respectivos estados de espín son $u_{s_1}(\vec{p}_1)$ y $u_{s_2}(\vec{p}_2)$. Entonces el estado inicial estará dado por:

$$|i\rangle = c_{s_2, \vec{p}_2}^+ c_{s_1, \vec{p}_1}^+ |0\rangle = |e^-, \vec{p}_2, s_2; e^-, \vec{p}_1, s_1\rangle, \quad (3.6)$$

y el estado final cuyos momentum lineales finales son \vec{p}'_1 y \vec{p}'_2 (o cuadri-momentums p_1 y p_2 respectivamente) y sus respectivos estados de espín finales son $\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1)$ y $\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2)$. Por lo tanto el estado final para este proceso estará dado por:

$$|f\rangle = c_{s'_2, \vec{p}'_2}^+ c_{s'_1, \vec{p}'_1}^+ |0\rangle = |e^-, \vec{p}'_2, s'_2; e^-, \vec{p}'_1, s'_1\rangle. \quad (3.7)$$

Además, estos estados deben cumplir la siguiente relación:

$$\langle f | i \rangle = \delta_{if}, \quad (3.7A)$$

en caso contrario que se cree un estado diferente a los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ debería tenerse:

$$\langle m | i \rangle = 0, \quad \langle f | n \rangle = 0. \quad (3.7B)$$

De la ecuación (1.75a) (Ver Capítulo 1) expandimos la serie infinita para los primeros términos y para un estado de espín determinado, indicando su componente ya sea con el sub-índice β (o σ), encontrándose

$$\begin{aligned} \Psi_\beta(x) = & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[c_{s_1, \vec{p}_1} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_\beta e^{-ip_1 x} + d_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger (v_{s_1}(\vec{p}_1))_\beta e^{ip_1 x} \right] + \\ & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[c_{s_2, \vec{p}_2} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_\beta e^{-ip_2 x} + d_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger (v_{s_2}(\vec{p}_2))_\beta e^{ip_2 x} \right] + \dots \\ & \dots \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_n}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[c_{s_n, \vec{p}_n} (u_{s_n}(\vec{p}_n))_\beta e^{-ip_n x} + d_{s_n, \vec{p}_n}^\dagger (v_{s_n}(\vec{p}_n))_\beta e^{ip_n x} \right] + \dots, \end{aligned}$$

reescribimos la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta}(x) = & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_1, \vec{p}_1}(u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} e^{-ip_1 x} + \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_2, \vec{p}_2}(u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\beta 0} e^{-ip_2 x} + \\ & \dots \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_n}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_n, \vec{p}_n}(u_{s_n}(\vec{p}_n))_{\beta 0} e^{-ip_n x} + \dots + \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{s_1, \vec{p}_1}^{\dagger}(v_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} e^{ip_1 x} + \\ & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{s_2, \vec{p}_2}^{\dagger}(v_{s_2}(\vec{p}_2))_{\beta 0} e^{ip_2 x} + \dots + \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_n}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{s_n, \vec{p}_n}^{\dagger}(v_{s_n}(\vec{p}_n))_{\beta 0} e^{ip_n x} + \dots, \end{aligned}$$

pero como consecuencia de las ecuaciones (3.6) y (3.7) tendremos que solamente los dos primeros términos de la ecuación anterior contribuyen a este proceso. Por lo tanto, por conveniencia vamos a escribir estos términos de la siguiente manera

$$\Psi_{\beta 1}^{(+)}(x) = \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_1, \vec{p}_1}(u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} e^{-ip_1 x},$$

y

$$\Psi_{\beta 2}^{(+)}(x) = \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_2, \vec{p}_2}(u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\beta 0} e^{-ip_2 x}, \quad (3.8A)$$

entonces el operador $\Psi(x)$ puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\Psi_{\beta}(x) = \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x) + \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x). \quad (3.8B)$$

Similarmente, de la ecuación (1.76a) (ver Capítulo 1) expandimos la serie infinita para los primeros términos y para un estado de espín determinado, además vamos a indicar su componente ya sea con el sub-índice α (o λ), obteniéndose la siguiente expresión matemática

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha}(x) = & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[d_{s'_1, \vec{p}'_1}(\bar{v}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} e^{-ip'_1 x} + c_{s'_1, \vec{p}'_1}^{\dagger}(\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} e^{ip'_1 x} \right] + \\ & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[d_{s'_2, \vec{p}'_2}(\bar{v}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} e^{-ip'_2 x} + c_{s'_2, \vec{p}'_2}^{\dagger}(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} e^{ip'_2 x} \right] + \dots \\ & \dots + \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_n}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[d_{s'_n, \vec{p}'_n}(\bar{v}_{s'_n}(\vec{p}'_n))_{0\alpha} e^{-ip'_n x} + c_{s'_n, \vec{p}'_n}^{\dagger}(\bar{u}_{s'_n}(\vec{p}'_n))_{0\alpha} e^{ip'_n x} \right] + \dots, \end{aligned}$$

a continuación, vamos a reescribir los términos de la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\alpha}(x) = & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{s'_1, \vec{p}'_1}(\bar{v}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} e^{-ip'_1 x} + \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{s'_2, \vec{p}'_2}(\bar{v}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} e^{-ip'_2 x} + \\ & \dots \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_n}} \right)^{\frac{1}{2}} d_{s'_n, \vec{p}'_n}(\bar{v}_{s'_n}(\vec{p}'_n))_{0\alpha} e^{-ip'_n x} + \dots + \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s'_1, \vec{p}'_1}^{\dagger}(\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} e^{ip'_1 x} + \\ & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s'_2, \vec{p}'_2}^{\dagger}(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} e^{ip'_2 x} + \dots + \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_n}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s'_n, \vec{p}'_n}^{\dagger}(\bar{u}_{s'_n}(\vec{p}'_n))_{0\alpha} e^{ip'_n x} + \dots, \end{aligned}$$

ro como consecuencia de las ecuaciones (3.6) y (3.7) tendremos que solamente los dos términos que continen a los operadores $c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger$ y $c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger$ de la ecuación anterior contribuyen a este proceso. Ahora, vamos a escribir éstos términos de la siguiente manera

$$\bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x) = \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\alpha} e^{i p_1' x},$$

y

$$\bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x) = \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger (\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\alpha} e^{i p_2' x}, \quad (3.8C)$$

entonces, podemos reescribir el operador $\bar{\Psi}(x)$ de la siguiente forma:

$$\bar{\Psi}_\alpha(x) = \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x). \quad (3.8D)$$

Por lo tanto, para obtener la correspondiente amplitud de probabilidad para este proceso, hacemos uso de las ecuaciones (3.5), (3.5B'), (3.5D'), (3.6), (3.7) y (3.8) para calcular lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= \langle f | \sum_{i=A}^F S_i^{(2)} | i \rangle = \langle f | S_A^{(2)} | i \rangle + \langle f | S_B^{(2)} | i \rangle + \langle f | S_C^{(2)} | i \rangle + \\ &\langle f | S_D^{(2)} | i \rangle + \langle f | S_E^{(2)} | i \rangle + \langle f | S_F^{(2)} | i \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Usando las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) calcularemos la amplitud $\langle f | S_A^{(2)} | i \rangle$; además vamos a omitir durante todo este cálculo los sub-índices que denotan las componentes de los operadores $\bar{\Psi}(x)$ y $\Psi(x)$, encontrándose lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle f | S_A^{(2)} | i \rangle &= -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \langle f | N \{ \bar{\Psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \times \\ &\gamma^\nu A_\nu(x_2) \Psi(x_2) \} | i \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A continuación, expresamos los operadores $\bar{\Psi}(x)$, $A_\mu(x)$ y $\Psi(x)$ de la ecuación anterior en sus partes de frecuencia positiva y negativa

$$\begin{aligned} \langle f | S_A^{(2)} | i \rangle &= -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \langle f | N \{ \{ \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \} \{ \mathcal{A}^{(+)}(x_1) + \\ &\mathcal{A}^{(-)}(x_1) \} \{ \Psi_1^{(+)}(x_1) + \Psi_2^{(+)}(x_1) \} \{ \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \} \{ \mathcal{A}^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \} \times \\ &\{ \Psi_1^{(+)}(x_2) + \Psi_2^{(+)}(x_2) \} \} | i \rangle, \end{aligned}$$

efectuando simultaneamente los productos entre llaves que estan dentro del producto normal de la ecuación anterior, encontramos

$$\langle f | S_A^{(2)} | i \rangle = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \langle f | N \{ \{ \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) +$$

$$\begin{aligned} &\bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \} \{ \Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_{1'}^{(-)}(x_2) + \Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_{2'}^{(-)}(x_2) + \\ &\Psi_2^{(+)}(x_1) \Psi_{1'}^{(-)}(x_2) + \Psi_2^{(+)}(x_1) \Psi_{2'}^{(-)}(x_2) \} \{ \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_{1'}^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) \} \end{aligned}$$

$$+ \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) \} | i \rangle.$$

Enseguida efectuamos el producto de los términos del primer y segundo paréntesis que se encuentran dentro del producto normal de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \langle f | S_A^{(2)} | i \rangle = & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \langle f | N(\{ \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2f}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \} \{ \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) \\ & + \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) \} | i \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ahora, efectuamos el producto de los términos de las dos llaves que están quedando dentro del producto normal, encontrándose

$$\begin{aligned} \langle f | S_A^{(2)} | i \rangle = & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \langle f | N(\bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \times \\ & \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \times \\ & \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \times \\ & \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \times \\ & \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \times \\ & \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \times \\ & \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \times \\ & \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \times \\ & \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_2^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\times \\
& \Psi_2^{(-)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+ \\
& \bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\times \\
& \mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\times \\
& \Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+ \\
& \bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\times \\
& \mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\times \\
& \Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+ \\
& \bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\times \\
& \mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\times \\
& \Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+ \\
& \bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\times \\
& \mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\times \\
& \Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+ \\
& \bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\times \\
& \mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\times \\
& \Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+ \\
& \bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\times \\
& \mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\times \\
& \Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+ \\
& \bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\times \\
& \mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\times \\
& \Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_1^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+ \\
& \bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\times \\
& \mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2)+\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\Psi_2^{(+)}(x_1)\bar{\Psi}_2^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\Psi_2^{(+)}(x_2)) |i\rangle. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la definición del producto normal para los operadores fermiónicos y bosónicos en la ecuación (3.12) reordenamos los operadores $\Psi^{(+)}(x)$, $\bar{\Psi}^{(-)}(x)$, $\mathcal{A}^{(+)}(x)$, $\mathcal{A}^{(-)}(x)$ de tal modo que tendremos términos en donde los operadores de frecuencia negativa $\bar{\Psi}^{(-)}(x)$, $\mathcal{A}^{(-)}(x)$ están a la izquierda de los operadores de frecuencia positiva $\Psi^{(+)}(x)$, $\mathcal{A}^{(+)}(x)$. Cuando aplicamos estos operadores resultantes entre los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ respectivamente, veremos que todos estos términos se anulan.

ara facilitar la redacción de este trabajo, mostraremos solamente que el primer término de la ecuación (3.12) aplicado inicialmente al estado $|i\rangle$ y después al estado $|f\rangle$ es nulo. Es decir:

$$\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \langle f | \bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1) \bar{\Psi}_1^{(+)}(x_2) \not{A}^{(+)}(x_1) \not{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_2) | i \rangle. \quad (3.13)$$

Para calcular el valor de la ecuación (3.13), comencemos aplicando el producto de operadores $\Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_2)$ sobre el estado $|i\rangle$

$$\Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_1, \vec{p}_1} u_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ip_1 x_1} \times$$

$$\left(\frac{m_1}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_1, \vec{p}_1} u_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ip_1 x_2} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger | 0 \rangle,$$

ordenando convenientemente las sumatorias $\left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}}$, los estados de espín $u_{s_1}(\vec{p}_1)$, así como los operadores $c_{s, \vec{p}}$ y $c_{s, \vec{p}}^\dagger$ de la ecuación anterior, obtenemos

$$\Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right) u_{s_1}(\vec{p}_1) u_{s_1}(\vec{p}_1) \times$$

$$e^{-ip_1(x_1+x_2)} c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger | 0 \rangle.$$

Utilizando la ecuación (1.78a), reescribimos el producto $c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger$ de la ecuación anterior como

$$\Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right) u_{s_1}(\vec{p}_1) u_{s_1}(\vec{p}_1) \times$$

$$e^{-ip_1(x_1+x_2)} \{ -c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger \} | 0 \rangle,$$

usamos nuevamente la ecuación (1.78a) para ordenar convenientemente el producto $c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger$, obteniéndose

$$\Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right) u_{s_1}(\vec{p}_1) u_{s_1}(\vec{p}_1) \times$$

$$e^{-ip_1(x_1+x_2)} \{ -c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger (1 - c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}) \} | 0 \rangle,$$

efectuando el producto de los operadores $c_{s, \vec{p}}$ y $c_{s, \vec{p}}^\dagger$ hallamos:

$$\Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right) u_{s_1}(\vec{p}_1) u_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ip_1(x_1+x_2)} \times$$

$$\{ -c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle + c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} | 0 \rangle \}.$$

Haciendo uso de la ecuación (1.178a) reescribimos el primer término entre llaves de la ecuación anterior, para tener

$$\Psi_1^{(+)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \left(\frac{m}{V J_{\vec{p}_1}} \right) u_{s_1}(\vec{p}_1) u_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ip_1(x_1+x_2)} \times \\ \{ c_{s_2, \vec{p}_2}^+ c_{s_1, \vec{p}_1} | 0 \rangle + c_{s_1, \vec{p}_1}^+ c_{s_2, \vec{p}_2}^+ c_{s_1, \vec{p}_1}^+ c_{s_1, \vec{p}_1} | 0 \rangle \}.$$

Utilizando la definición del estado vacío para fermiones ($c_{s, \vec{p}} | 0 \rangle = 0$) en la ecuación anterior obtenemos:

$$\Psi_1^{(+)}(x_1)\Psi_1^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = 0. \quad (3.14)$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (3.13) encontramos

$$\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \langle f | \bar{\Psi}_1^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_1^{(+)}(x_2) \not{A}^{(+)}(x_1) \not{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_1) \Psi_1^{(+)}(x_2) | i \rangle = 0.$$

Así, hemos mostrado que el primer término de la ecuación (3.12) es nulo.

Procediendo en forma similar, es decir, usando definición del Producto Normal, las relaciones de cuantización dadas por las ecuaciones (1.78), (1.119), la definición del estado vacío y las ecuaciones (1.75b), (1.76c) y (1.116) podemos mostrar que los 63 productos normales restantes aplicados entre los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ son nulos.

Por lo tanto, la amplitud de transición

$$\langle f | S_A^{(2)} | i \rangle = 0. \quad (3.15)$$

A continuación, vamos a calcular la amplitud de transición $\langle f | S_B^{(2)} | i \rangle$, haciendo uso de las ecuaciones (3.5B'), (3.6) y (3.7). Además durante todo este cálculo omitiremos los sub-índices que denotan las componentes de los operadores $\bar{\Psi}(x)$ y $\Psi(x)$ para facilitar su redacción, encontrándose lo siguiente

$$\langle f | S_B^{(2)} | i \rangle = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \langle f | N \left(\bar{\Psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)} \gamma^\nu A_\nu(x_2) \Psi(x_2) \right) | i \rangle,$$

haciendo uso de la ecuación (2.111) escribimos la ecuación anterior como

$$\langle f | S_B^{(2)} | i \rangle = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \langle f | N \left(\bar{\Psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu A_\nu(x_2) \Psi(x_2) \right) | i \rangle.$$

haciendo uso de las ecuaciones (3.8) y (1.116) reescribimos lo anterior como

$$\langle f | S_B^{(2)} | i \rangle = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 iS_F(x_1 - x_2) \langle f | N(\{ \bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1) + \bar{\Psi}_2^{(-)}(x_1) \} \times$$

$$\{ \not{A}^{(+)}(x_1) + \not{A}^{(-)}(x_1) \} \{ \not{A}^{(+)}(x_2) + \not{A}^{(-)}(x_2) \} \{ \Psi_1^{(+)}(x_2) + \Psi_2^{(+)}(x_2) \} | i \rangle,$$

efectuando simultáneamente los productos de los términos de la primera y segunda llave, así como de la tercera y cuarta llave de la ecuación anterior, hallamos la siguiente expresión

$$\langle f | S_B^{(2)} | i \rangle = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 iS_F(x_1 - x_2) \langle f | N(\{ \bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1) \not{A}^{(+)}(x_1) +$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \} \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) \\ & + \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) \} | i \rangle, \end{aligned} \right. \quad (3.16) \end{aligned}$$

luego, realizando el producto de los términos de la primera y segunda llave que estan dentro del producto normal de la ecuación (3.16), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle f | S_B^{(2)} | i \rangle = & -c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i S_F(x_1 - x_2) \langle f | N(\bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) \\ & + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(-)}(x_2) \Psi_2^{(+)}(x_2) \rangle | i \rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ahora, hacemos nuevamente uso de la definición del producto normal para operadores fermiónicos y bosónicos y para facilitar la redacción de este trabajo, mostraremos que aplicando los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ al primer producto normal obtendremos cero. Es decir, debemos calcular el valor de

$$-e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i S_F(x_1 - x_2) \langle f | \bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) | i \rangle, \quad (3.18)$$

entonces comencemos aplicando producto de operadores $\mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2)$ sobre el estado $|i\rangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) | e^-, \vec{p}_2, s_2; e^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = & \gamma^\nu \left(\frac{1}{2V w_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{r\nu}(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ikx_2} \times \\ & \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_1, \vec{p}_1} u_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ip_1 x_2} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

ordenando convenientemente los términos de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) | e^-, \vec{p}_2, s_2; e^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = & \gamma^\nu \left(\frac{1}{2V w_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{r\nu}(\vec{k}) u_{s_1}(\vec{p}_1) \times \\ & e^{-ix_2(k+p_1)} a_r(\vec{k}) c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Hacemos uso de la ecuación (1.78a) para escribir la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2) \left| c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \right\rangle = \gamma^\nu \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{r\nu}(\vec{k}) \times \\ u_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ix_2(k+p_1)} \left(-a_r(\vec{k}) c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger |0\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nuevamente hacemos uso de la ecuación (1.78a) para reescribir convenientemente el producto $c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger$ de la ecuación (3.20) como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2) \left| c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \right\rangle = \gamma^\nu \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{r\nu}(\vec{k}) \times \\ u_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ix_2(k+p_1)} \left(-a_r(\vec{k}) c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger \{1 - c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}\} |0\rangle \right), \end{aligned}$$

efectuando el producto de los operadores $a_r(\vec{k})$, $c_{s, \vec{p}}$ y $c_{s, \vec{p}}^\dagger$ de la ecuación anterior, encontramos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2) \left| c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \right\rangle = \gamma^\nu \left(\frac{1}{2Vw_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{r\nu}(\vec{k}) \times \\ u_{s_1}(\vec{p}_1) e^{-ix_2(k+p_1)} \left(-a_r(\vec{k}) c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger |0\rangle + a_r(\vec{k}) c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} |0\rangle \right), \end{aligned}$$

considerando que los operadores fermiónicos conmutan con los operadores bosónicos y utilizando la definición del estado vacío tanto para fermiones como para bosones en la ecuación anterior, obtenemos

$$\mathcal{A}^{(+)}(x_2)\Psi_1^{(+)}(x_2) \left| c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \right\rangle = 0. \quad (3.21)$$

Substituyendo esta ecuación en la ecuación (3.18) encontramos que

$$\begin{aligned} -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 iS_F(x_1 - x_2) \langle f | \bar{\Psi}_1^{(-)}(x_1) \mathcal{A}^{(+)}(x_1) \times \\ \mathcal{A}^{(+)}(x_2) \Psi_1^{(+)}(x_2) | i \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Lo cual nos permite probar que el primer término de la ecuación (3.17) es nulo.

Procediendo en forma similar, es decir, usando definición del Producto Normal, las relaciones de cuantización dadas por las ecuaciones (1.78), (1.119), la definición del estado vacío y las ecuaciones (1.75b), (1.76c) y (1.116) podemos mostrar que los 15 productos normales restantes aplicados entre los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ son nulos.

Por lo tanto, la amplitud de transición

$$\langle f | S_B^{(2)} | i \rangle = 0. \quad (3.23)$$

El cálculo de la amplitud de transición $\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle$ lo veremos al final por ser el de interés.

Enseguida, calculamos la amplitud de transición $\langle f | S_D^{(2)} | i \rangle$, reemplazando las ecuaciones (2.114), (2.124) en la ecuación (3.5D') y considerando en forma explícita los sub-índices α, β, λ y σ que denotan las componentes de los operadores $\Psi(x)$ y $\bar{\Psi}(x)$, encontramos lo siguiente

$$\langle f | S_D^{(2)} | i \rangle = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \langle f | N \{ \bar{\Psi}_\alpha(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \times \\ i S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \} | i \rangle, \quad (3.24)$$

escribiendo tanto los propagadores de Feynman como las matrices γ fuera del producto normal y substituyendo las ecuaciones (3.6) y (3.7) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\langle f | S_D^{(2)} | i \rangle = -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) i S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) \times \\ \langle f | N \left(\{ \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1) \} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \{ \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) \} \right) | i \rangle,$$

efectuando el producto de los términos que están dentro de las dos llaves, hallamos

$$\langle f | S_D^{(2)} | i \rangle = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) i S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) \times \\ \langle f | N (\bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \\ \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2)) | i \rangle.$$

De esta ecuación notamos que los productos de operadores $\bar{\Psi}^{(-)}(x)$ y $\Psi^{(+)}(x)$ ya están ordenados en forma normal y la aplicación del operador normal N sobre ellos, no es necesaria. Por lo tanto obtenemos

$$\langle f | S_D^{(2)} | i \rangle = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) i S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) \times \\ \langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \\ \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) | i \rangle. \quad (3.25)$$

A continuación, mostraremos que el primer término de la ecuación anterior es cero. Es decir, deseamos calcular el valor de

$$e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) i S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) \langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \times \\ (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | i \rangle, \quad (3.26)$$

haciendo uso de las ecuaciones (1.75b) y (1.76c) en la ecuación anterior, hallamos:

$$\langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | e^-, \vec{p}_2, s_2; e^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \langle f | \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger \times \\ (\bar{u}_{s_1'}(\vec{p}_1'))_{0\alpha} e^{i p_1' x_1} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} c_{s_1, \vec{p}_1} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\sigma 0} e^{-i p_1 x_2} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger | 0 \rangle,$$

ordenando convenientemente las sumatorias, las funciones exponenciales, los estados de espín $u_{s'_1}(\vec{p}'_1)$ y $u_{s_1}(\vec{p}_1)$, así como los operadores $c_{s',\vec{p}'}^\dagger c_{s,\vec{p}}$ de la ecuación anterior, obtenemos

$$\langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \langle f | \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times e^{i(p'_1 x_1 - p_1 x_2)} (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\sigma 0} c_{s'_1, \vec{p}'_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger | 0 \rangle. \quad (3.27)$$

Usando la ecuación (1.78b), reescribimos el producto $c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger$ convenientemente de tal modo que la ecuación (3.27) se convierte en

$$\langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \langle f | \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times e^{i(p'_1 x_1 - p_1 x_2)} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\sigma 0} \{ -c_{s'_1, \vec{p}'_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger \} | 0 \rangle,$$

nuevamente hacemos uso de la ecuación (1.78a) para escribir $c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger$ como $(1 - c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1})$ en la ecuación anterior, para tener

$$\langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \langle f | \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times e^{i(p'_1 x_1 - p_1 x_2)} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\sigma 0} \{ -c_{s'_1, \vec{p}'_1}^\dagger (1 - c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}) c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger \} | 0 \rangle,$$

efectuando el producto de los operadores $c_{s', \vec{p}'}^\dagger$ y $c_{s, \vec{p}}$ en la ecuación anterior tenemos

$$\langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \langle f | \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times e^{i(p'_1 x_1 - p_1 x_2)} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\sigma 0} \{ -c_{s'_1, \vec{p}'_1}^\dagger c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle + c_{s'_1, \vec{p}'_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \}. \quad (3.28)$$

Considerando el hecho que $c_{s_1, \vec{p}_1} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle = -c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1} | 0 \rangle = 0$, entonces reemplazando esta expresión en la ecuación (3.28), encontramos

$$\langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | c^-, \vec{p}_2, s_2 ; c^-, \vec{p}_1, s_1 \rangle = \langle f | \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times e^{i(p'_1 x_1 - p_1 x_2)} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\sigma 0} \{ -c_{s'_1, \vec{p}'_1}^\dagger c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \},$$

de donde definimos el estado $|e^-, \vec{p}_2, s_2; e^-, \vec{p}'_1, s'_1\rangle = c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s'_1, \vec{p}'_1}^\dagger |0\rangle$, en la ecuación anterior para tener

$$\langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | e^-, \vec{p}_2, s_2; e^-, \vec{p}'_1, s'_1 \rangle = - \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{V E_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$e^{i(p'_1 x_1 - p_1 x_2)} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\sigma 0} \langle e^-, \vec{p}'_2, s'_2; e^-, \vec{p}'_1, s'_1 | e^-, \vec{p}_2, s_2; e^-, \vec{p}'_1, s'_1 \rangle,$$

finalmente, utilizamos la ecuación (3.7B) en la ecuación anterior, encontrándose

$$\langle f | \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) | e^-, \vec{p}_2, s_2; e^-, \vec{p}'_1, s'_1 \rangle = 0. \quad (3.29)$$

Aplicando los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ a los otros tres términos restantes podemos mostrar que también son nulos.

Por lo tanto, la amplitud de transición

$$\langle f | S_D^{(2)} | i \rangle = 0. \quad (3.30)$$

Enseguida, calculamos la amplitud de transición $\langle f | S_E^{(2)} | i \rangle$, reemplazando las ecuaciones (2.101) y (2.113) en la ecuación (3.5E) y considerando en forma explícita los sub-índices α, β, λ y σ que denotan las componentes de los operadores $\bar{\Psi}(x)$ y $\Psi(x)$, encontramos lo siguiente

$$\langle f | S_E^{(2)} | i \rangle = - \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) \{-i S_{F\sigma\alpha}(x_2 - x_1)\} \times$$

$$\langle f | N(\mathcal{A}(x_1)\mathcal{A}(x_2)) | i \rangle = 0. \quad (3.31)$$

Ahora, expresando los operadores $\mathcal{A}(x)$ en sus partes de frecuencia positiva y negativa, obtenemos

$$\langle f | S_E^{(2)} | i \rangle = - \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) S_{F\sigma\alpha}(x_2 - x_1) \times$$

$$\langle f | N(\{\mathcal{A}^{(+)}(x_1) + \mathcal{A}^{(-)}(x_1)\} \{\mathcal{A}^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(-)}(x_2)\}) | i \rangle = 0,$$

a continuación, efectuando el producto de los partes de frecuencia positiva y negativa de los operadores $\mathcal{A}(x)$ que están dentro de los paréntesis de la ecuación anterior, hallamos

$$\langle f | S_E^{(2)} | i \rangle = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) S_{F\sigma\alpha}(x_2 - x_1) \langle f | N\{\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)$$

$$+ \mathcal{A}^{(+)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_2) + \mathcal{A}^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_2) + \mathcal{A}^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\} | i \rangle,$$

aplicando la definición del producto normal reordenamos los productos de operadores $\mathcal{A}^{(\pm)}(x_1)\mathcal{A}^{(\pm)}(x_2)$ de frecuencias positivas y negativas que están dentro de los paréntesis de la siguiente manera

$$\langle f | S_E^{(2)} | i \rangle = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) S_{F\sigma\alpha}(x_2 - x_1) \langle f | \mathcal{A}^{(+)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)$$

$$+\mathcal{A}^{(-)}(x_2)\mathcal{A}^{(+)}(x_1)+\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)+\mathcal{A}^{(-)}(x_1)\mathcal{A}^{(-)}(x_2) | i \rangle. \quad (3.32)$$

Para calcular el valor de la ecuación (3.32), comencemos aplicando el producto de operadores $\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_2)$ sobre el estado $| i \rangle$,

$$\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_2) | i \rangle = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \frac{1}{2Vw_{\vec{k}}} (\epsilon_{r\nu}(\vec{k}))^2 \left(a_r(\vec{k}) \right)^2 e^{-ik(x_1+x_2)} c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger | 0 \rangle,$$

haciendo uso de la definición del estado vacío ($a_r(\vec{k}) | 0 \rangle = 0$) y del hecho que los operadores $a_r(\vec{k})$ conmutan con los operadores $c_{s_2, \vec{p}_2}^\dagger$ y $c_{s_1, \vec{p}_1}^\dagger$, entonces obtenemos el siguiente resultado:

$$\mathcal{A}^{(+)}(x_1)\mathcal{A}^{(+)}(x_2) | i \rangle = 0. \quad (3.33)$$

Hemos probado de esta manera que el primer término de la ecuación (3.32) es nulo. Por lo tanto, procediendo en forma similar y usando las ecuaciones (3.6), (3.7), (1.119) y (1.122), podemos mostrar que los 3 productos restantes aplicados entre los estados $| i \rangle$ y $| f \rangle$ son nulos.

Por tanto, la amplitud de transición

$$\langle f | S_E^{(2)} | i \rangle = 0. \quad (3.34)$$

Ahora, calculamos la amplitud de transición $\langle f | S_F^{(2)} | i \rangle$, reemplazando las ecuaciones (2.101), (2.113) y (2.122) en la ecuación (3.5F) y considerando en forma explícita los sub-índices α, β, λ y σ que denotan las componentes de los operadores $\Psi(x)$ y $\bar{\Psi}(x)$, encontramos lo siguiente

$$\langle f | S_F^{(2)} | i \rangle = \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 i S_{F\sigma\alpha}(x_2 - x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \times$$

$$i S_{F\beta\lambda}(x_1 - x_2) (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \langle f | i \rangle,$$

utilizando la ecuación (3.7A) en la ecuación anterior, encontramos que

$$\langle f | S_F^{(2)} | i \rangle = 0. \quad (3.35)$$

Finalmente, calculamos la amplitud de transición $\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle$ a partir de las ecuaciones (3.5C), (3.6), (3.7) y considerando en forma explícita los sub-índices α, β, λ y σ que denotan las componentes de los operadores $\Psi(x)$ y $\bar{\Psi}(x)$, obtenemos lo siguiente

$$\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \times$$

$$\langle f | N \left(\Psi_\alpha(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x_1) \Psi_\lambda(x_2) (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_\sigma(x_2) \right) | i \rangle$$

utilizando la ecuación (3.8) en la ecuación anterior, hallamos:

$$\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \langle f | N \left(\{ \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1) \} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \times$$

$$\{ \Psi_{\beta 1'}^{(+)}(x_1) + \Psi_{\beta 2'}^{(+)}(x_1) \} \{ \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2) \} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \{ \Psi_{\sigma 1'}^{(+)}(x_2) + \Psi_{\sigma 2'}^{(+)}(x_2) \}) | i \rangle, \quad (3.36)$$

efectuando el producto de los términos que están dentro de las llaves, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \langle f | N(\{ \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{1\beta}^{(+)}(x_1) + \\ & \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{2\beta}^{(+)}(x_1) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{1\beta}^{(+)}(x_1) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{2\beta}^{(+)}(x_1) \} \times \\ & \{ \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) \\ & + \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) \} | i \rangle, \end{aligned} \quad (3.37)$$

nuevamente, efectuando el producto de los operadores $\Psi^{(-)}(x)$ y $\Psi^{(+)}(x)$ que están dentro de las dos llaves, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \langle f | N \{ \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1) \times \\ & \Psi_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1) \Psi_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \\ & \Psi_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1) \Psi_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1) \times \\ & \Psi_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) \Psi_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \\ & \Psi_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) \Psi_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) \times \\ & \Psi_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) \Psi_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1) \Psi_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1) \times \\ & \Psi_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1) \Psi_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) \times \\ & \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \\ & \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) + \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) \times \\ & \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) \} | i \rangle. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A continuación, aplicamos la definición del producto normal para reordenar los productos $\Psi^{(-)}(x_1)\gamma^\mu\Psi^{(+)}(x_1)\Psi^{(-)}(x_2)\gamma^\nu\Psi^{(+)}(x_2)$ de la ecuación anterior, de tal modo que los operadores $\Psi_1^{(+)}(x_1)$, $\Psi_2^{(+)}(x_2)$ estén a la derecha de los operadores $\bar{\Psi}_{1'}^{(-)}(x_1)$, $\bar{\Psi}_{2'}^{(-)}(x_2)$, encontrándose:

$$\begin{aligned} \langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \langle f | \{ -\bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2) \times \\ & \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) - \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2) \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) + \\ & -\bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2) \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) - \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2) \times \\ & \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) - \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2) \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) - \\ & \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2) \Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)\Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) - \bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)\times \\
& \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) - \bar{\Psi}_{\alpha 1'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)\Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2)+ \\
& -\bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)\Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) - \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)\times \\
& \Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) - \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)\Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2)- \\
& \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)\Psi_{\beta 1}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2) - \bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)\times \\
& \Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1) - \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 1'}^{(-)}(x_2)\Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\sigma 2}^{(+)}(x_2)+ \\
& -\bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)\Psi_{\beta 2}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{\sigma 1}^{(+)}(x_2) - \bar{\Psi}_{\alpha 2'}^{(-)}(x_1)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\lambda 2'}^{(-)}(x_2)\times \\
& \Psi_{2\beta}^{(+)}(x_1)(\gamma^\nu)_{\lambda\sigma}\Psi_{2\sigma}^{(+)}(x_2)\} | i\rangle, \tag{3.39}
\end{aligned}$$

a continuación, aplicamos los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ a cada uno de los términos de la ecuación anterior encontrándose que solamente cuatro términos contribuyen al cálculo de esta amplitud de transición, mientras que los otros doce términos restantes son nulos, éstos cálculos lo efectuaremos en el Apéndice 3A. Por lo tanto utilizando la ecuación (3A.40) del Apéndice 3A, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \{ (e^{i(p'_1-p_1)x_1} e^{i(p'_2-p_2)x_2} + e^{i(p'_1-p_1)x_2} e^{i(p'_2-p_2)x_1}) (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \times \\
& (u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} - (e^{i(p'_1-p_2)x_1} e^{i(p'_2-p_1)x_2} + e^{i(p'_2-p_1)x_1} e^{i(p'_1-p_2)x_2}) \times \\
& u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \} \{ (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \}.
\end{aligned}$$

De la ecuación (3A.40), vamos a mostrar que las integrales que contienen al producto de exponenciales $e^{i(p'_1-p_1)x_1} e^{i(p'_2-p_2)x_2}$ y $e^{i(p'_1-p_1)x_2} e^{i(p'_2-p_2)x_1}$ son equivalentes entre si. Asimismo, las integrales que contienen al producto de exponenciales $e^{i(p'_1-p_2)x_1} e^{i(p'_2-p_1)x_2}$ y $e^{i(p'_2-p_1)x_1} e^{i(p'_1-p_2)x_2}$ también son equivalentes entre si. Para mostrar esto, vamos a utilizar la ecuación (3.6) considerando que los electrones iniciales que van a colisionar tienen cuadri-momentum p_1 y p_2 respectivamente y según la ecuación (3.7) después de la colisión los cuadri-momentum finales los hemos denotado como p'_1 y p'_2 .

Por conservación del cuadri-momentum tenemos:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \tag{3.40}$$

de donde hallamos

$$p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2, \tag{3.41}$$

o también

$$p'_2 - p_2 = p_1 - p'_1. \tag{3.42}$$

A continuación, de la segunda integral de la ecuación (3A.40) consideramos la parte que depende solamente de los puntos x_1 y x_2 , así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) e^{i(p'_2 - p_2)x_1} e^{i(p'_1 - p_1)x_2}, \quad (3.43)$$

reemplazando las ecuaciones (3.41) y (3.42) en los argumentos de las exponenciales de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) e^{-i(p'_1 - p_1)x_1} e^{-i(p'_2 - p_2)x_2},$$

esta ecuación puede ser escrita también como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4(-x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d^4(-x_2) D_{F\mu\nu}((-x_2) - (-x_1)) e^{i(p'_1 - p_1)(-x_1)} e^{i(p'_2 - p_2)(-x_2)}, \quad (3.44)$$

utilizando las siguientes propiedades para integrales

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right) d\left(\frac{x}{c}\right), \quad (3.45)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (3.46)$$

y el hecho que $D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) = D_{F\mu\nu}(x_2 - x_1)$ (Ver ecuación (2D.9) del Apéndice 2D) podemos reescribir la ecuación (3.44) de la siguiente manera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) e^{i(p'_1 - p_1)x_1} e^{i(p'_2 - p_2)x_2}. \quad (3.47)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.43) y (3.47) encontramos la siguiente equivalencia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) e^{i(p'_2 - p_2)x_1} e^{i(p'_1 - p_1)x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \times e^{i(p'_1 - p_1)x_1} e^{i(p'_2 - p_2)x_2}. \quad (3.48)$$

Similarmente, podemos mostrar que la cuarta integral es equivalente a la tercera integral de la ecuación (3.40), para esto, usamos la ecuación (3.40) obteniéndose

$$p'_1 - p_2 = p_1 - p'_2, \quad (3.49)$$

o también

$$p'_2 - p_1 = p_2 - p'_1. \quad (3.50)$$

A continuación, consideramos de la cuarta integral solamente la parte que depende de los puntos x_1 y x_2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) e^{i(p'_2 - p_1)x_1} e^{i(p'_1 - p_2)x_2}, \quad (3.51)$$

reemplazando las ecuaciones (3.49) y (3.50) en los argumentos de las exponenciales de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) e^{i(p_2 - p'_1)x_1} e^{i(p_1 - p'_2)x_2},$$

esta ecuación puede ser escrita también como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4(-x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d^4(-x_2) D_{F\mu\nu}((-x_2) - (-x_1)) e^{i(p'_1 - p_2)(-x_1)} e^{i(p'_2 - p_1)(-x_2)}, \quad (3.52)$$

utilizando las propiedades para integrales dadas por las ecuaciones (3.45) y (3.46) y el hecho que $D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) = D_{F\mu\nu}(x_2 - x_1)$ (Ver ecuación (2D.9) del Apéndice 2D) podemos reescribir la ecuación (3.52) de la siguiente manera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) e^{i(p'_1 - p_2)x_1} e^{i(p'_2 - p_1)x_2}. \quad (3.53)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.51) y (3.53) encontramos la siguiente equivalencia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) e^{i(p'_2 - p_1)x_1} e^{i(p'_1 - p_2)x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \times e^{i(p'_1 - p_2)x_1} e^{i(p'_2 - p_1)x_2}, \quad (3.54)$$

Substituyendo las ecuaciones (3.48) y (3.54) en la ecuación (3A.40) encontramos dos pares de integrales diferentes, permitiéndonos de esta manera cancelar el factor $\frac{1}{2}$. Es decir, estas cuatro integrales dobles se reducen en solamente dos integrales dobles.

Por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = & -e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 i D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \{ e^{i(p'_1 - p_1)x_1} e^{i(p'_2 - p_2)x_2} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \times \\ & (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} - e^{i(p'_1 - p_2)x_1} e^{i(p'_2 - p_1)x_2} (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \times \\ & (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

A continuación, usamos las ecuaciones (2C.13) y (2C.14) (Ver Apéndice 2C), ordenando convenientemente las exponenciales y escribiendo por separado tanto las sumatorias sobre \vec{p}'_1, \vec{p}'_2 como sobre \vec{p}_1, \vec{p}_2 con sus respectivos factores $\left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_i}} \right)^{\frac{1}{2}}$, obtenemos:

$$\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k i \tilde{D}_{F\mu\nu}(k) e^{-ik(x_1 - x_2)} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \{ c^{i(p'_1 - p_1)x_1} c^{i(p'_2 - p_2)x_2} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \times \\
& (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} - c^{i(p'_1 - p_2)x_1} c^{i(p'_2 - p_1)x_2} (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \times \\
& (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \}. \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Efectuando el producto de los paréntesis y ordenando tanto los argumentos exponenciales, como los estados de espín $u_{s_1}(\vec{p}_1)$ y $\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2)$ con su respectiva función $D_{F\mu\nu}(k)$, hallamos:

$$\begin{aligned}
\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = & -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 c^{i(p'_1 - p_1 - k)x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 c^{i(p'_2 - p_2 + k)x_2} i \tilde{D}_{F\mu\nu}(k) \times \\
& \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \{ (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \times \\
& (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \} + \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 c^{i(p'_1 - p_2 - k)x_1} \times \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 c^{i(p'_2 - p_1 + k)x_2} i \tilde{D}_{F\mu\nu}(k) \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \{ -(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \}, \tag{3.57}
\end{aligned}$$

haciendo uso de las idéntidades

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 e^{i(p'_1 - p_1 - k)x_1} = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p_1 - k),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 e^{i(p'_2 - p_2 + k)x_2} = (2\pi)^4 \delta^4(p'_2 - p_2 + k),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 e^{i(p'_1 - p_2 - k)x_1} = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p_2 - k),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 e^{i(p'_2 - p_1 + k)x_2} = (2\pi)^4 \delta^4(p'_2 - p_1 + k),$$

y reemplazando estos resultados en la ecuación (3.57) e introduciendo el factor $-e^2$ convenientemente entre las matrices γ^μ y γ^ν , obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = & (2\pi)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k \delta^4(p'_1 - p_1 - k) \delta^4(p'_2 - p_2 + k) \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \{ (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (iC\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} i \tilde{D}_{F\mu\nu}(k) (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (iC\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} +
\end{aligned}$$

$$(2\pi)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k \delta^4(p'_1 - p_2 - k) \delta^4(p'_2 - p_1 + k) \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \{ -(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (ie\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} i\tilde{D}_{F\mu\nu}(k) (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (ie\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \}. \quad (3.58)$$

Ahora, usando la siguiente propiedad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - a) f(x) = f(a),$$

podemos simplificar las siguiente expresiones

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k \delta^4(p'_1 - p_1 - k) \{ \delta^4(p'_2 - p_2 + k) i\tilde{D}_{F\mu\nu}(k) \} = \delta^4(p'_2 - p_2 + p'_1 - p_1) i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p'_1 - p_1) \\ = \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p'_1 - p_1), \quad (3.59)$$

también

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k \delta^4(p'_2 - p_1 + k) \{ \delta^4(p'_1 - p_2 - k) i\tilde{D}_{F\mu\nu}(k) \} = \delta^4(p'_1 - p_2 + p'_2 - p_1) i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p_1 - p'_2) \\ = \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p_1 - p'_2). \quad (3.60)$$

De las ecuaciones (3.59) y (3.60) notamos que los argumentos de las funciones δ^4 expresan la conservación del cuadri-momentum, es decir, la suma de los cuadri-momentum entrantes es igual a la suma de los cuadri-momentum salientes.

Substituyendo las ecuaciones (3.59) y (3.60) en la ecuación (3.58), encontramos:

$$\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \{ (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (ie\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p'_1 - p_1) (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (ie\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \} + \\ (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \{ -(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (ie\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p_1 - p'_2) (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (ie\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \}. \quad (3.61)$$

Factorizando el término $(2\pi)^4 \delta^4$ y los factores $\left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_i}} \right)^{\frac{1}{2}}$ podemos escribir:

$$\langle f | S_C^{(2)} | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{f=1}^2 \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}'_f}} \right)^{\frac{1}{2}} M, \quad (3.62)$$

en donde hemos definido

$$\equiv M^{(2,1)} + M^{(2,2)};$$

iendo

$$M^{(2,1)} = (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (iC\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p'_1 - p_1) (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (iC\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0}, \quad (3.63A)$$

$$M^{(2,2)} = -(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (iC\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p_1 - p'_2) (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (iC\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0}. \quad (3.63B)$$

El primer supra-índice 2 indica el orden de la expansión de la Matriz "S" y el segundo supra-índice 1 o 2 indica ya sea la primera o segunda amplitud de Feynman respectivamente.

La utilidad y la interpretación física de estas amplitudes serán analizadas en la Sección 3.3, cuando enunciemos las Reglas de Feynman para la EDC.

Finalmente, substituyendo las ecuaciones (3.62) y (3.63) en la ecuación (3.9) encontramos la amplitud de transición $\langle f | S^{(2)} | i \rangle$ que contribuye a la dispersión elástica electrón-electrón (Dispersión de Moller).

A continuación vamos a enunciar las reglas propuestas por R. Feynman para poder escribir directamente las amplitudes $M^{(n,k)}$ para cualquier proceso de dispersión.

3.3 REGLAS DE FEYNMAN PARA ESCRIBIR LOS ELEMENTOS MATRICIALES.

Como consecuencia de las ecuaciones (3.62) y (3.63) podemos formular un conjunto de reglas que nos permitan escribir los elementos matriciales $\langle f | S | i \rangle$ directamente desde los diagramas de Feynman, para alguna transición particular desde el estado inicial $| i \rangle$ hasta el estado final $| f \rangle$.

Por lo tanto, una generalización de las ecuaciones (3.62) y (3.63) es:

$$S_{if} = \delta_{if} + (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \prod_i \left(\frac{m_i}{VE_i} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_f \left(\frac{m_f}{VE_f} \right)^{\frac{1}{2}} M, \quad (3.64)$$

en donde δ_{if} es la contribución del orden cero de la expansión de la Matriz "S" y puede ser igual a cero si los estados asintóticos $| i \rangle$ y $| f \rangle$ son diferentes e igual a uno si los estados $| i \rangle$ y $| f \rangle$ son iguales.

De la ecuación anterior notamos, que el argumento de la función δ^4 contiene las sumatorias de p_i y p_f , las cuales representan los cuadri-momentum de las partículas iniciales y finales respectivamente, que están presentes en el proceso.

El producto $\prod_i \left(\frac{m_i}{VE_i} \right)^{\frac{1}{2}}$ es extendido sobre todas las partículas iniciales que están entrando a un proceso de dispersión, siendo E_i la energía de cada uno de ellas.

En cambio, $\prod_f \left(\frac{m_f}{VE_f} \right)^{\frac{1}{2}}$ es extendido sobre todas las partículas finales o las partículas que salen de un proceso de dispersión, en donde E_f representa la energía de cada una de las partículas finales.

Definimos la cantidad M como:

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n M^{(n,k)}, \quad (3.65)$$

en donde el primer supra-índice n indica el orden de la expansión de la Matriz "S" y el segundo supra-índice k indica el número de amplitudes de Feynman posibles y diferentes entre si.

La cantidad M es obtenida sumando algebraicamente las amplitudes de Feynman $M^{(n,k)}$, las cuales son construídas dibujando todos los posibles gráficos de Feynman diferentes según sea proceso de dispersión, en el espacio momentum.

El número de amplitudes $M^{(n,k)}$ que contribuyen a un proceso de dispersión dependen del orden "n" de la expansión de la Matriz "S", es decir, para un proceso de dispersión elástica al segundo orden $n = 2$ (por ejemplo: la dispersión de Moller), encontramos a lo más dos gráficos de Feynman (o también llamadas amplitudes de Feynman) diferentes.

Asumiendo que la dirección del incremento del tiempo es supuesto hacia arriba y la del retroceso en el tiempo es supuesto hacia abajo, entonces para distinguir entre electrones y positrones, convenimos en representar a los electrones por líneas sólidas dirigidas y señalando en la dirección del incremento del tiempo y a los positrones por líneas sólidas dirigidas y señalando en dirección contraria a los electrones, es decir, retrocediendo en el tiempo.

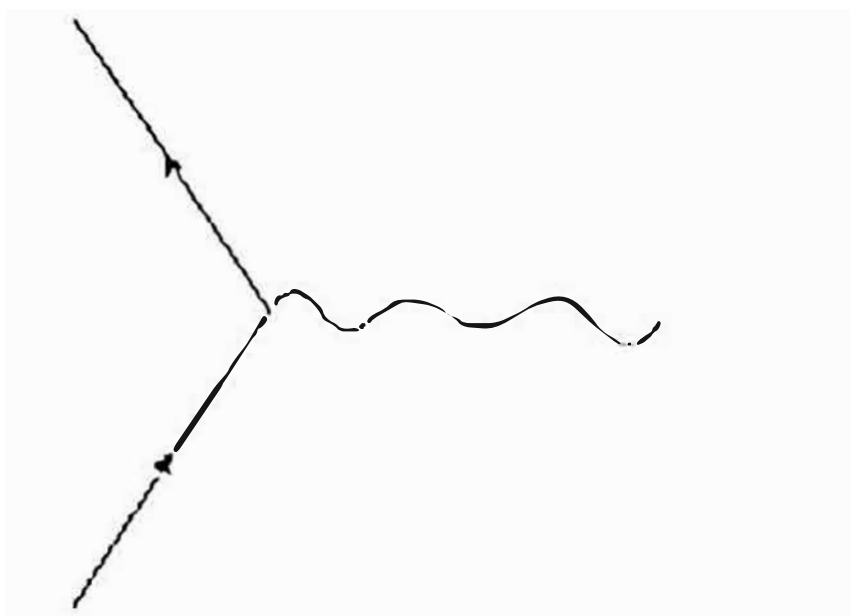
reglas encontradas por R. Feynman para trazar sus gráficos son:

Componentes del diagrama

1. Por cada vértice.

Factor en la Matriz "S"

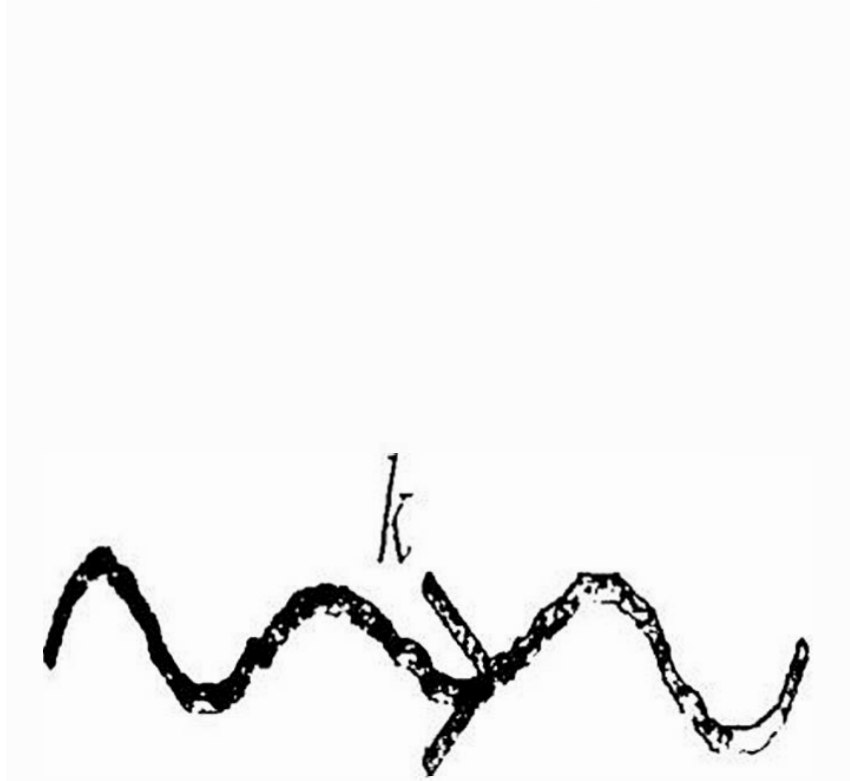
Se escribe el factor.



$$ie\gamma^\mu$$

2. Por cada línea interna del fotón de cuadri-momentum k .

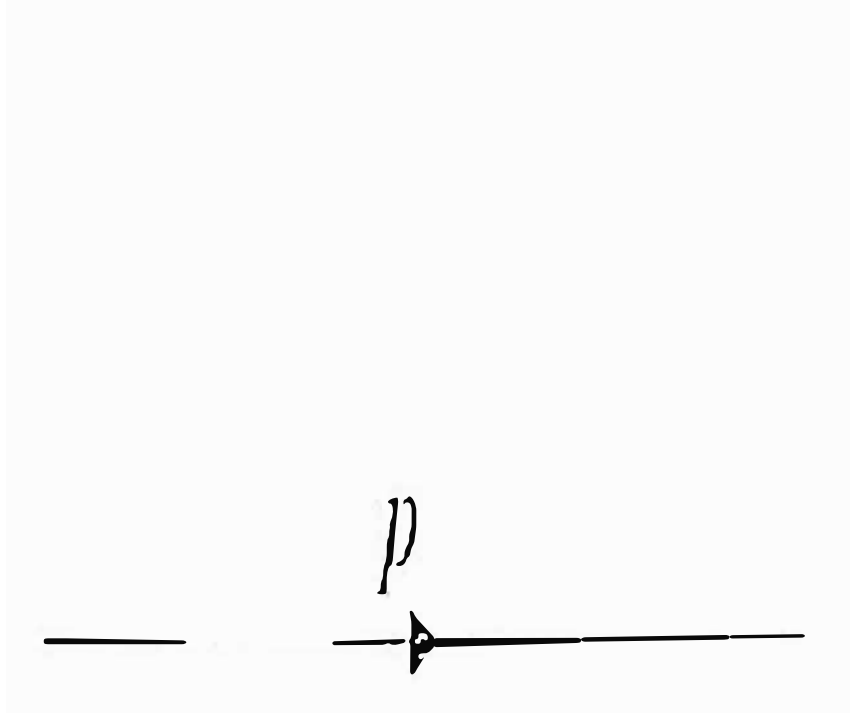
Se escribe el factor.



$$iD_{F\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\xi}$$

3. Por cada línea interna del fermión de cuadri-momentum p .

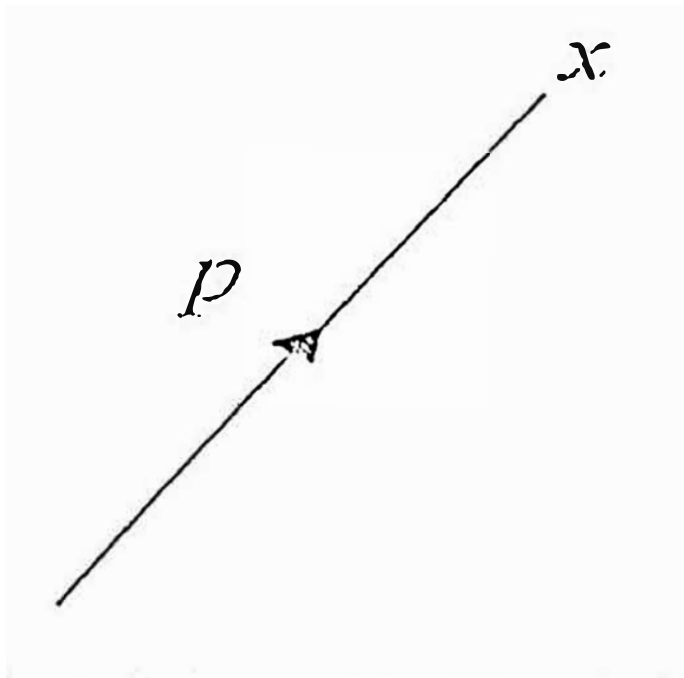
Se escribe el factor



$$iS_{F\alpha\beta}(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\xi}$$

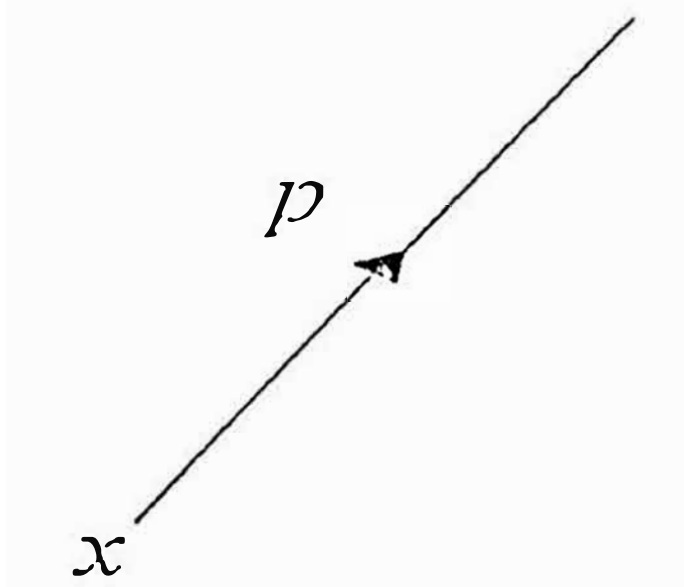
4. Por cada línea externa del fermión de cuadri-momentum p .

Se escribe el estado de spin



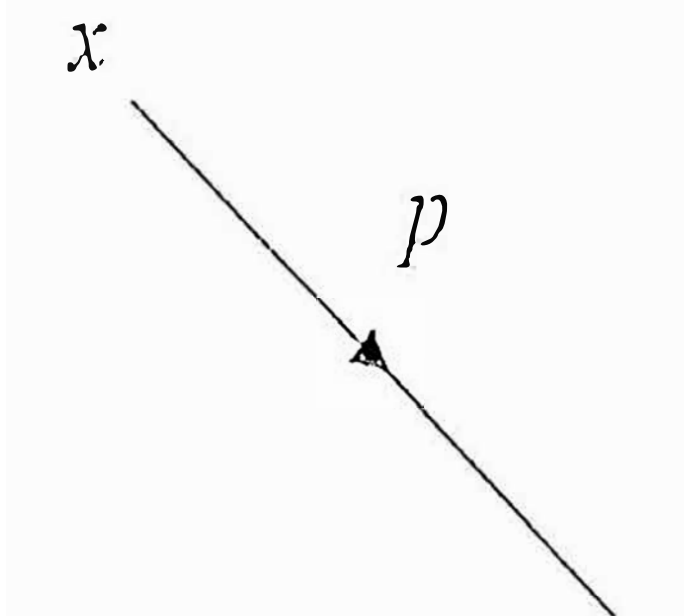
Aniquilación de un e^- : $u_r(\vec{p})$

Este estado es representado por una línea dirigida hacia arriba y entrando al punto x .



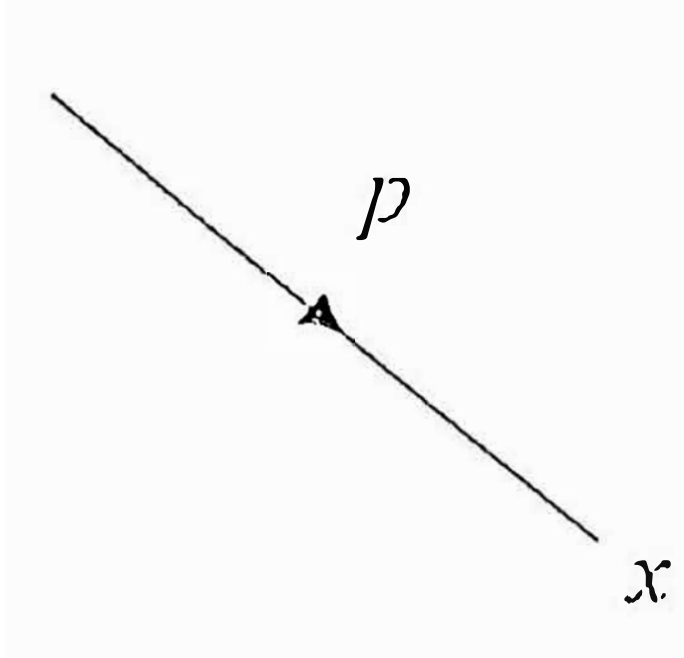
Creación de un e^- : $u_r(\vec{p})$

Este estado es representado por una línea dirigida hacia arriba y saliendo del punto x .



Aniquilación de un e^+ : $v_r(\vec{p})$

Este estado es representado por una línea dirigida hacia abajo y saliendo del punto x .

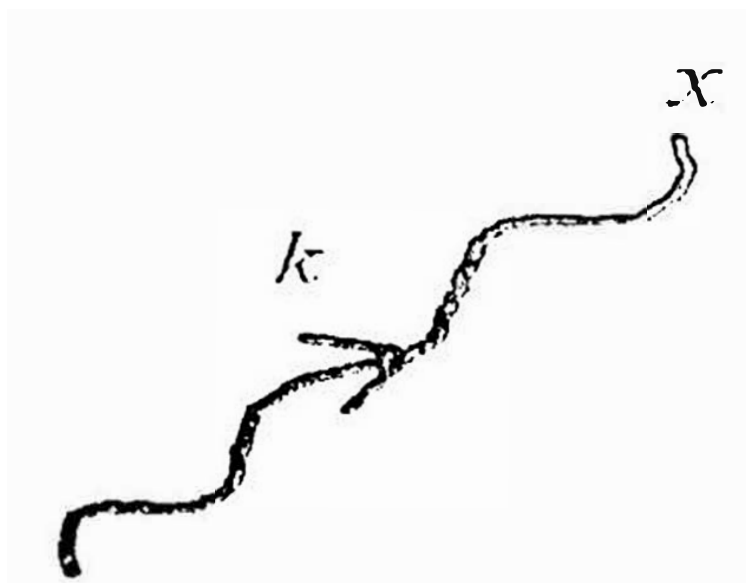


Creación de un e^+ : $v_r(\vec{p})$

Este estado es representado por una línea dirigida hacia abajo y entrando al punto x .

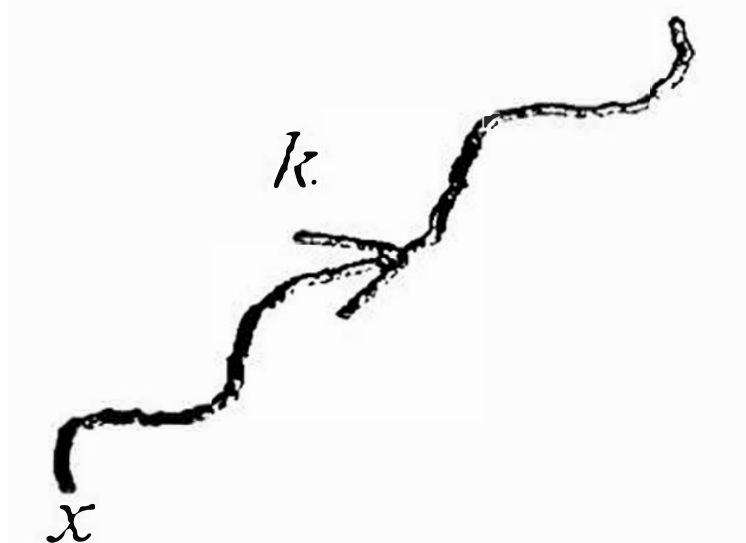
5. Por cada línea externa del fotón de cuadri-momentum k .

Se escribe el factor.



Aniquilación de un $\gamma : \epsilon_{r\mu}(\vec{k})$

Este estado es representado por una línea ondulada entrando al punto x .



Creación de un $\gamma : \epsilon_{r\mu}(\vec{k})$

Este estado es representado por una línea ondulada saliendo del punto x .

en donde \vec{p} y \vec{k} denotan los momentos tri-dimensionales de las partículas externas y $r = 1, 2$ especifican los estados de espín y polarización.

6. Los factores $u_r(\vec{p})$, $\bar{u}_r(\vec{p})$, $v_r(\vec{p})$, $\bar{v}_r(\vec{p})$, γ^μ , $S_{F\alpha\beta}(p)$ y $D_{F\mu\nu}(k)$ son ordenados de tal modo que, ellos ocurren yendo desde la derecha hacia la izquierda, como si uno se moviera siguiendo la dirección de las flechas de las líneas externas de los fermiones.

7. A cada diagrama le corresponde una función δ^4 , cuyo argumento expresa la conservación del cuadri-momentum para el proceso en estudio.

CAPITULO 4
CALCULO DE LA SECCION EFICAZ.

4.1 INTRODUCCION.

En el capítulo anterior hemos establecido las Reglas de Feynman para obtener los elementos matriciales S_{if} , de algún proceso de colisión en la EDC. En este capítulo vamos a derivar usando los S_{if} , las secciones eficaces tanto en el Sistema Centro de Masa (SCM) como en el Sistema Laboratorio (SL) respectivamente.

4.2. SECCION EFICAZ.

Consideremos un proceso de dispersión elástica en el cual dos partículas iniciales, que pueden ser leptones, se encuentran en el estado inicial $|i\rangle$ con cuadri-momentum $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$, $i = 1, 2$ y en determinados estados de espín, colisionan y producen N partículas en el estado final $|f\rangle$ con cuadri-momentum $p'_f = \left(\sqrt{(\vec{q}'_f)^2 + m_f^2}, \vec{q}'_f \right)$, $f = 1, 2, \dots, N$ y en determinados estados de espín.

Por tanto, utilizando las ecuaciones (2.52), (3.60) y el hecho que $\delta_{if} = 0$, encontramos que la correspondiente amplitud de probabilidad para este proceso de dispersión es:

$$S_{if} = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{f=1}^N p'_f - \sum_{i=1}^2 p_i \right) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{m_i}{VE_i} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{f=1}^N \left(\frac{m_f}{V\sqrt{(\vec{q}'_f)^2 + m_f^2}} \right)^{\frac{1}{2}} M(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}'_f),$$

la ecuación anterior también se puede reescribir como:

$$S_{if} = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{f=1}^N p'_f - \sum_{i=1}^2 p_i \right) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2VE_i} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{f=1}^N \left(\frac{1}{2V\sqrt{(\vec{q}'_f)^2 + m_f^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \prod_{l=1}^{2N} (2m_l)^{\frac{1}{2}} M(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}'_f), \quad (4.1)$$

donde el sub-índice "l" se toma sobre todas las partículas que están presentes en el proceso.

A continuación, usando las ecuaciones (2.54) y (4.1), vamos a calcular la probabilidad de transición para que después de una colisión el sistema físico se encuentre en el estado final posible $|f\rangle$

$$|S_{if}|^2 = \left[(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{f=1}^N p'_f - \sum_{i=1}^2 p_i \right) \right]^2 \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2VE_i} \right) \prod_{f=1}^N \left(\frac{1}{2V\sqrt{(\vec{q}'_f)^2 + m_f^2}} \right) \times$$

$$\underset{=1}{(2m_l)} \left| M \left(\vec{p}_i, \vec{q}'_f \right) \right|^2. \quad (4.2)$$

Haciendo uso de la propiedad de distribución de la función delta (Ver referencias No 1, 5, 6, 8 y 9)

$$\left[(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{f=1}^N p'_f - \sum_{i=1}^2 p_i \right) \right]^2 = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{f=1}^N p'_f - \sum_{i=1}^2 p_i \right) VT. \quad (4.3)$$

en la ecuación (4.2), encontramos la siguiente relación:

$$|S_{if}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{f=1}^N p'_f - \sum_{i=1}^2 p_i \right) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2VE_i} \right) \prod_{f=1}^N \left(\frac{1}{2V \sqrt{(\vec{q}'_f)^2 + m_f^2}} \right) \times$$

$$\prod_{l=1}^{2N} (2m_l) \left| M \left(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}'_f \right) \right|^2 VT. \quad (4.4)$$

En donde "T" representa el intervalo de tiempo en que se realiza el proceso de dispersión (Ver referencia No 3 pág. 485) y tanto T como V se consideran lo suficientemente grandes.

Dividiendo la ecuación anterior entre T, definimos la probabilidad de transición por unidad de tiempo hacia un estado final de la siguiente manera:

$$W_{i \rightarrow f} \equiv \frac{|S_{if}|^2}{T} = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{f=1}^N p'_f - \sum_{i=1}^2 p_i \right) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2VE_i} \right) \prod_{f=1}^N \left(\frac{1}{2V \sqrt{(\vec{q}'_f)^2 + m_f^2}} \right) \times$$

$$\prod_{l=1}^{2N} (2m_l) \left| M \left(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}'_f \right) \right|^2 V. \quad (4.5)$$

El número de estados finales que tendrá una partícula en el rango $d^3 \vec{q}'_f$ y dentro de un volumen V es $\frac{V d^3 \vec{q}'_f}{(2\pi)^3}$. Entonces el número de estados finales que tendrán un sistema de partículas con momentum en el rango $\prod_f d^3 \vec{q}'_f$ y dentro de un volumen V será:

$$\prod_{f=1}^N \frac{V d^3 \vec{q}'_f}{(2\pi)^3}. \quad (4.6)$$

Esta cantidad nos servirá para obtener la probabilidad de transición diferencial hacia un grupo de estados finales. Esto lo calculamos multiplicando $W_{i \rightarrow f}$ por la ecuación (4.6), encontrándose:

$$d^N W_{i \rightarrow f} = V (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{f=1}^N p'_f - \sum_{i=1}^2 p_i \right) \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2VE_i} \right) \prod_{f=1}^N \left(\frac{1}{2V \sqrt{(\vec{q}'_f)^2 + m_f^2}} \right) \times$$

$$= \vec{q}'_1 + \vec{q}'_2, \text{ siendo } \vec{p}'_2 = 0, \quad (4.41)$$

la ecuación anterior, nos permite escribir lo siguiente

$$\vec{q}'_2 = \vec{p}'_1 - \vec{q}'_1. \quad (4.42)$$

Además las energías para este proceso de dispersión en el SL, cumplen la siguiente relación:

$$E_1 + m_2 = E'_1 + E'_2 = E, \quad (4.43)$$

en donde las energías finales están dadas por

$$E'_1 = \sqrt{\left(\vec{p}'_1\right)^2 + m_1^2},$$

$$E'_2 = \sqrt{\left(\vec{p}'_1 - \vec{q}'_1\right)^2 + m_2^2} = \sqrt{\left(\vec{p}'_1\right)^2 + \left(\vec{q}'_1\right)^2 - 2\left|\vec{p}'_1\right|\left|\vec{q}'_1\right|\cos\theta + m_2^2}. \quad (4.44)$$

Por tanto, reemplazando la ecuaciones (4.41), (4.42) y (4.43) en la ecuación (4.17), encontramos

$$d\sigma\left(\vec{p}'_1\right) = \frac{\prod_{l=1}^4 (2m_l) \left| M\left(\vec{p}'_1, \vec{q}'_1\right) \right|^2 \delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - m_2) \left| \vec{q}'_1 \right|^2 d\left| \vec{q}'_1 \right| d\Omega'_1}{64\pi^2 E_1 m_2 V I (E'_1 E'_2)}, \quad (4.45)$$

Empleando la ecuación (A.18) del Apéndice 4A, encontramos la magnitud del flujo total incidente en el SL,

$$I = \frac{\left| \vec{p}'_1 \right|}{V E_1},$$

y substituyendo la ecuación anterior, en la ecuación (4.45), obtenemos:

$$d\sigma\left(\vec{q}'_1\right) = \frac{\prod_{l=1}^4 (2m_l) \left| M\left(\vec{p}'_1, \vec{q}'_1\right) \right|^2}{64\pi^2 \left| \vec{p}'_1 \right| m_2} \left(\frac{\delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - m_2) \left| \vec{q}'_1 \right|^2 d\left| \vec{q}'_1 \right|}{E'_1 E'_2} \right) d\Omega'_1. \quad (4.46)$$

Para hacer uso de la ecuación (4.23), consideramos las ecuaciones (4.44) y (4.46), designando a $f\left(\vec{q}'_1\right)$ y a $g\left(\vec{q}'_1\right)$ como:

$$f\left(\vec{q}'_1\right) = \frac{\left| \vec{q}'_1 \right|^2 \left| M\left(\vec{p}'_1, \vec{q}'_1\right) \right|^2}{\sqrt{\left(\vec{q}'_1\right)^2 + m_1^2} \sqrt{\left(\vec{p}'_1 - \vec{q}'_1\right)^2 + m_2^2}},$$

$$g\left(\vec{q}'_1\right) = E'_1 + E'_2 - E = \sqrt{\left(\vec{q}'_1\right)^2 + m_1^2} + \sqrt{\left(\vec{p}'_1 - \vec{q}'_1\right)^2 + m_2^2} - E_1 - m_2. \quad (4.47)$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (4.44) y (4.47) vamos a calcular el valor de

$$\left(\frac{\partial g\left(\left| \vec{q}'_1 \right|\right)}{\partial \left| \vec{q}'_1 \right|} \right)_{\left| \vec{q}'_1 \right| = \left| \vec{p}'_1 \right|}, \text{ es decir:}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial \left(\sqrt{\left(\vec{q}'_1\right)^2 + m_1^2} + \sqrt{\left(\vec{p}_1 - \vec{q}'_1\right)^2 + m_2^2} - E \right)}{\partial \left|\vec{q}'_1\right|} \right|_{\left|\vec{q}'_1\right| = \left|\vec{p}'_1\right|} = \frac{\left|\vec{p}'_1\right|}{\sqrt{\left(\vec{p}'_1\right)^2 + m_1^2}} + \frac{\left|\vec{p}'_1\right| - \left|\vec{p}_1\right| \cos \theta}{\sqrt{\left(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1\right)^2 + m_2^2}} \\
& = \frac{\left|\vec{p}'_1\right| (E'_1 + E'_2) - E'_1 \left|\vec{p}_1\right| \cos \theta}{E'_1 E'_2} = \frac{\left|\vec{p}'_1\right| (E_1 + m_2) - E_1 \left|\vec{p}_1\right| \cos \theta}{E'_1 E'_2}. \quad (4.48)
\end{aligned}$$

En el Apéndice 4B, hemos mostrado que dependiendo de la relación que exista entre las masas en reposo m_1 y m_2 , escogeremos los intervalos $\{J_k\}$ adecuados que contengan a los posibles ceros de la función $g(\vec{q}'_1)$, es decir, los valores de $\left|\vec{q}'_1\right|$.

Por lo tanto de los resultados encontrados en las ecuaciones (4B.36A), (4B.36B), (4B.37), (4B.41) y (4B.42) del Apéndice 4B, se presentan los siguientes casos:

CASO I

Si $m_1 > m_2$ entonces las raíces que físicamente son posibles de la función $g(\vec{q}'_1)$ y que satisfacen la ecuación (4.43) son denotadas como:

$$\begin{aligned}
\left|\vec{p}'_{1,1}\right| &= \frac{\left\{ (m_1^2 + m_2 E_1) \cos \theta + (E_1 + m_2) \sqrt{m_2^2 - m_1^2 + m_1^2 \cos^2 \theta} \right\} \left|\vec{p}_1\right|}{(E_1 + m_2)^2 - \left|\vec{p}_1\right|^2 \cos^2 \theta}, \\
\left|\vec{p}'_{1,2}\right| &= \frac{\left\{ (m_1^2 + m_2 E_1) \cos \theta - (E_1 + m_2) \sqrt{m_2^2 - m_1^2 + m_1^2 \cos^2 \theta} \right\} \left|\vec{p}_1\right|}{(E_1 + m_2)^2 - \left|\vec{p}_1\right|^2 \cos^2 \theta},
\end{aligned}$$

en donde

$$\cos \theta \in \left[\sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}}, 1 \right], \text{ es decir } \theta \in \left[0, \arccos \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}} \right].$$

Utilizando las ecuaciones (4.46), (4.47), (4.48) en la ecuación (4.23) encontramos la siguiente expresión

$$d\sigma(\theta, \phi) = \frac{\prod_{l=1}^4 (2m_l)}{64\pi^2 \left|\vec{p}_1\right| m_2} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\left| M \left(\left|\vec{p}_1\right|, \left|\vec{p}'_{1,k}\right|, \theta \right) \right|^2 \left|\vec{p}'_{1,k}\right|^2}{E'_1 E'_2 \left(\left|\vec{p}'_{1,k}\right| (E_1 + m_2) - \sqrt{\left|\vec{p}'_{1,k}\right|^2 + m_1^2} \left|\vec{p}_1\right| \cos \theta \right)} \right) d\Omega'_1(\theta, \phi),$$

en donde el sub-índice k especifica las raíces dadas por las ecuaciones (4B.36).

Haciendo uso de la ecuación (4.39), ordenando convenientemente y simplificando los términos semejantes de la ecuación anterior, encontramos

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLP} = \frac{m_1^2 m_2}{4\pi^2 |\vec{p}_1|} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{|M(|\vec{p}_1|, |\vec{p}'_{1,k}|, \theta)|^2 |\vec{p}'_{1,k}|^2}{|\vec{p}'_{1,k}| (E_1 + m_2) - \sqrt{|\vec{p}'_{1,k}|^2 + m_1^2} |\vec{p}_1| \cos \theta} \right). \quad (4.49)$$

Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial polarizada por unidad de ángulo sólido en el SL cuando $m_1 > m_2$. Si deseamos calcular la sección eficaz total en el SL debemos integrar la ecuación anterior sobre el ángulo sólido.

Podemos analizar la situación cuando $m_2 \gg E_1$, entonces la raíz que físicamente es posible es obtenida a partir de la ecuación (4B.36A), la cual se convierte en:

$$|\vec{p}'_{1,1}| = |\vec{p}_1|, \quad (4.49a)$$

substituyendo la ecuación anterior en la ecuación (4.49) y simplificando los términos semejantes, encontramos

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLP} = \frac{m_1^2 |M(|\vec{p}_1|, \theta)|^2}{4\pi^2}. \quad (4.50)$$

Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial polarizada por unidad de ángulo sólido en el SL cuando la energía de la partícula que actúa como blanco es muy grande en comparación con la energía de la partícula incidente. Si deseamos calcular la sección eficaz total en el SL debemos integrar la ecuación anterior sobre el ángulo sólido.

CASO II.

Si $m_2 > m_1$ entonces la raíz que físicamente es posible de la función $g(\vec{q}'_1)$ y que satisface la ecuación (4.43) es denotada como:

$$|\vec{p}'_1| = \frac{\left\{ (m_1^2 + m_2 E_1) \cos \theta + (E_1 + m_2) \sqrt{m_2^2 - m_1^2 + m_1^2 \cos^2 \theta} \right\} |\vec{p}_1|}{(E_1 + m_2)^2 - |\vec{p}_1|^2 \cos^2 \theta},$$

en donde

$$\cos \theta \in \left[-1, -\sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}} \right] \cup \left[\sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}}, 1 \right], \text{ es decir}$$

$$\theta \in \left[\arccos \left(-\sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}} \right), \pi \right] \cup \left[0, \arccos \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}} \right].$$

Utilizando las ecuaciones (4.46), (4.47), (4.48) en la ecuación (4.23) encontramos la siguiente expresión

$$d\sigma(\theta, \phi) = \frac{\prod_{l=1}^4 (2m_l) |M(|\vec{p}_1|, |\vec{p}'_1|, \theta)|^2 |\vec{p}'_1|^2 d\Omega'_1}{64\pi^2 |\vec{p}_1| m_2 E'_1 E'_2 \left(\frac{|\vec{p}'_1| (E_1 + m_2) - \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_1^2} |\vec{p}_1| \cos \theta}{E'_1 E'_2} \right)}. \quad (4.51)$$

ndo uso de la ecuación (4.39) y simplificando los términos semejantes de la ecuación anterior, encontramos

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLp} = \frac{m_1^2 m_2}{4\pi^2 |\vec{p}_1|} \left(\frac{|M(|\vec{p}_1|, |\vec{p}'_1|, \theta)|^2 |\vec{p}'_1|^2}{|\vec{p}'_1| (E_1 + m_2) - \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_2^2} |\vec{p}_1| \cos \theta} \right). \quad (4.52)$$

Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial polarizada por unidad de ángulo sólido en el SL cuando $m_2 > m_1$. Si deseamos calcular la sección eficaz total en el SL debemos integrar la ecuación anterior sobre el ángulo sólido.

A continuación, deseamos analizar la situación en el cual $m_2 \gg m_1$ y tanto la energía E_1 de la partícula incidente y E'_1 de la partícula dispersada son muy grandes en comparación con su masa en reposo m_1 , es decir:

$$E_1 \approx |\vec{p}_1| \gg m_1, \quad E'_1 \approx |\vec{p}'_1| \gg m_1, \quad (4.53)$$

utilizando la ecuación (4.53) en la ecuación (4B.41), podemos escribir $|\vec{p}'_1|$ como

$$\begin{aligned} |\vec{p}'_1| = E'_1 &= \frac{\{m_2 E_1 \cos \theta + (E_1 + m_2) m_2\} |\vec{p}_1|}{(E_1 + m_2)^2 - |\vec{p}_1|^2 \cos^2 \theta} = \frac{\{(E_1 + m_2) + E_1 \cos \theta\} m_2 E_1}{(\{E_1 + m_2\} + E_1 \cos \theta) (\{E_1 + m_2\} - E_1 \cos \theta)} \\ &= \frac{m_2 E_1}{(\{E_1 + m_2\} - E_1 \cos \theta)} = \frac{m_2 E_1}{m_2 + E_1 (1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

De donde notamos que debe cumplirse que

$$\begin{aligned} |\vec{p}'_1| = E'_1 &= \frac{m_2 E_1}{m_2 + E_1 (1 - \cos \theta)} > 0, \text{ entonces } m_2 + E_1 (1 - \cos \theta) > 0, \text{ es decir} \\ -1 &\leq \cos \theta < 1 + \frac{m_2}{E_1}, \text{ entonces} \\ \cos \theta &\in [-1, 1], \text{ es decir } \theta \in [0, \pi]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

La ecuación (4.54) representa la raíz de la función $g(\vec{q}'_1)$ para la situación en que $m_2 \gg m_1$ y $E_1 \approx |\vec{p}_1| \gg m_1$, en cambio

la ecuación (4.55) representa el intervalo en el cual se encuentra el ángulo de dispersión θ .

Por lo tanto utilizando la ecuación (4.53) podemos escribir la ecuación (4.52) de la siguiente forma

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLp} = \frac{m_1^2 m_2}{4\pi^2 E_1} \left(\frac{|M(|\vec{p}_1|, E'_1, \theta)|^2 (E'_1)^2}{E'_1 (E_1 + m_2) - E'_1 E_1 \cos \theta} \right). \quad (4.56)$$

Utilizando la ecuación (4.54) y simplificando los términos semejantes de la ecuación anterior, encontramos

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLp} = \frac{m_1^2 m_2^2 |M(|\vec{p}_1|, E'_1, \theta)|^2}{4\pi^2 (m_2 + E_1 (1 - \cos \theta))^2}. \quad (4.57)$$

nde el ángulo de dispersión $\theta \in [0, \pi]$.

Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial polarizada por unidad de ángulo sólido en el SL cuando $m_2 \gg m_1$ y tanto la energía E_1 de la partícula incidente y E'_1 de la partícula dispersada son muy grandes en comparación con su masa en reposo m_1 . Si deseamos calcular la sección eficaz total en el SL debemos integrar la ecuación anterior sobre el ángulo sólido.

Vamos a utilizar la ecuación (4.57) en el Capítulo 5, para calcular la sección eficaz de la dispersión elástica neutrino-electrón.

4.3 SUMATORIA Y PROMEDIO SOBRE LOS ESTADOS DE POLARIZACIÓN DEL FERMION.

Hemos encontrado las expresiones matemáticas para calcular las secciones eficaces diferenciales de cualquier proceso de dispersión elástica en el cual las partículas colisionantes están en un determinado estado de espín o de polarización.

En muchos experimentos, si las partículas colisionantes no están polarizadas en el estado inicial y las polarizaciones de las partículas en el estado final no son detectadas, entonces para evitar estas dificultades definimos la correspondientes secciones eficaces diferenciales no polarizadas, para esto promediamos el factor $|M|^2$ de las ecuaciones (4.30) y (4.39), sobre los estados de polarización inicial y a continuación sumamos sobre los estados de polarización final. Esto nos permite, definir la siguiente cantidad

$$\chi \equiv \frac{1}{j!} \sum_{s'=1}^2 \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 |M(|\vec{p}_1|, E'_1, \theta)|^2 = \frac{1}{2(j!)} \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 |M(|\vec{p}_1|, E'_1, \theta)|^2, \quad (4.58)$$

en donde el factor j especifica el número de partículas resultantes que son iguales en el estado final (Ver referencia No 8), asimismo $\frac{1}{2} \sum_{s=1}^2$ especifica un promedio de los estados de espín de las partículas iniciales y $\sum_{s'=1}^2$ especifica una suma sobre los estados de espín de las partículas finales que están presentes en el proceso.

Por lo tanto, utilizando la ecuación (4.58) reescribimos la ecuación (4.34) y (4.40) de las siguientes maneras:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SCMnp} = \frac{1}{2(j!)} \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SCMp} = \frac{\prod_{l=1}^4 (2m_l) \chi \left(\sqrt{(|E_1 + E_2|^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4E^2 m_1^2} \right)}{128\pi^2 |\vec{p}_1| (E_1 + E_2)^3}, \quad (4.59)$$

esta ecuación es válida para partículas relativistas de masas en reposo m_1 y m_2 .

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SCMnp} = \frac{1}{2(j!)} \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SCMp} = \frac{m_1^2 m_2^2 \chi}{16\pi^2 E_1^2}. \quad (4.60)$$

En cambio, esta ecuación es válida para el caso de partículas ultra-relativísticas, cuyas masas en reposo son despreciables.

De las ecuaciones anteriores, notamos que la sección eficaz no polarizada en el SCM es proporcional a χ , en donde $\sum_{s'=1}^2$ y $\sum_{s=1}^2$ denotan las sumatorias sobre los dos estados de polarización de las partículas finales e iniciales respectivamente.

Similarmente, utilizando la ecuación (4.58) reescribimos la ecuación (4.49) de la siguiente manera:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLnp} = \frac{1}{2(j!)} \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SLp} = \frac{m_1^2 m_2}{4\pi^2 |\vec{p}_1|} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\chi |\vec{p}'_{1,k}|^2}{|\vec{p}'_{1,k}| (E_1 + m_2) - \sqrt{|\vec{p}'_{1,k}|^2 + m_1^2} |\vec{p}_1| \cos \theta} \right). \quad (4.61)$$

Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial no-polarizada por unidad de ángulo sólido en el SL cuando $m_1 > m_2$,

y los $|\vec{p}'_{1,k}|$ son especificados por las ecuaciones (4B.36) del Apéndice 4B.

Reemplazando la ecuación (4.58) reescribimos la ecuación (4.50) como:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLnp} = \frac{1}{2(j!)} \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SLp} = \frac{m_1^2 \chi}{4\pi^2}. \quad (4.62)$$

Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial no-polarizada por unidad de ángulo sólido en el SL cuando $m_2 \gg E_1$, y $|\vec{p}'_1|$ está especificado por la ecuación (4.49a).

Substituyendo la ecuación (4.58) reescribimos la ecuación (4.52) de la siguiente forma:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLnp} = \frac{1}{2(j!)} \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SLp} = \frac{m_1^2 m_2}{4\pi^2 |\vec{p}_1|} \left(\frac{\chi |\vec{p}'_1|^2}{|\vec{p}'_1| (E_1 + m_2) - \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_1^2} |\vec{p}_1| \cos \theta} \right). \quad (4.63)$$

Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial no-polarizada por unidad de ángulo sólido en el SL cuando $m_2 > m_1$ y $|\vec{p}'_1|$ está especificado por la ecuación (4B.41).

Haciendo uso de la ecuación (4.58) reescribimos la ecuación (4.57) como:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega'_1(\theta, \phi)} \right)_{SLnp} = \frac{1}{2(j!)} \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SLp} = \frac{m_1^2 m_2^2 \chi}{4\pi^2 (m_2 + E_1 (1 - \cos \theta))^2}. \quad (4.64)$$

de el ángulo de dispersión $\theta \in [0, \pi]$. Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial no-polarizada por unidad de ángulo sólido en el SL, cuando $m_2 \gg m_1$ y tanto la energía E_1 de la partícula incidente y E'_f de la partícula dispersada son muy grandes en comparación con su masa en reposo m_1 .

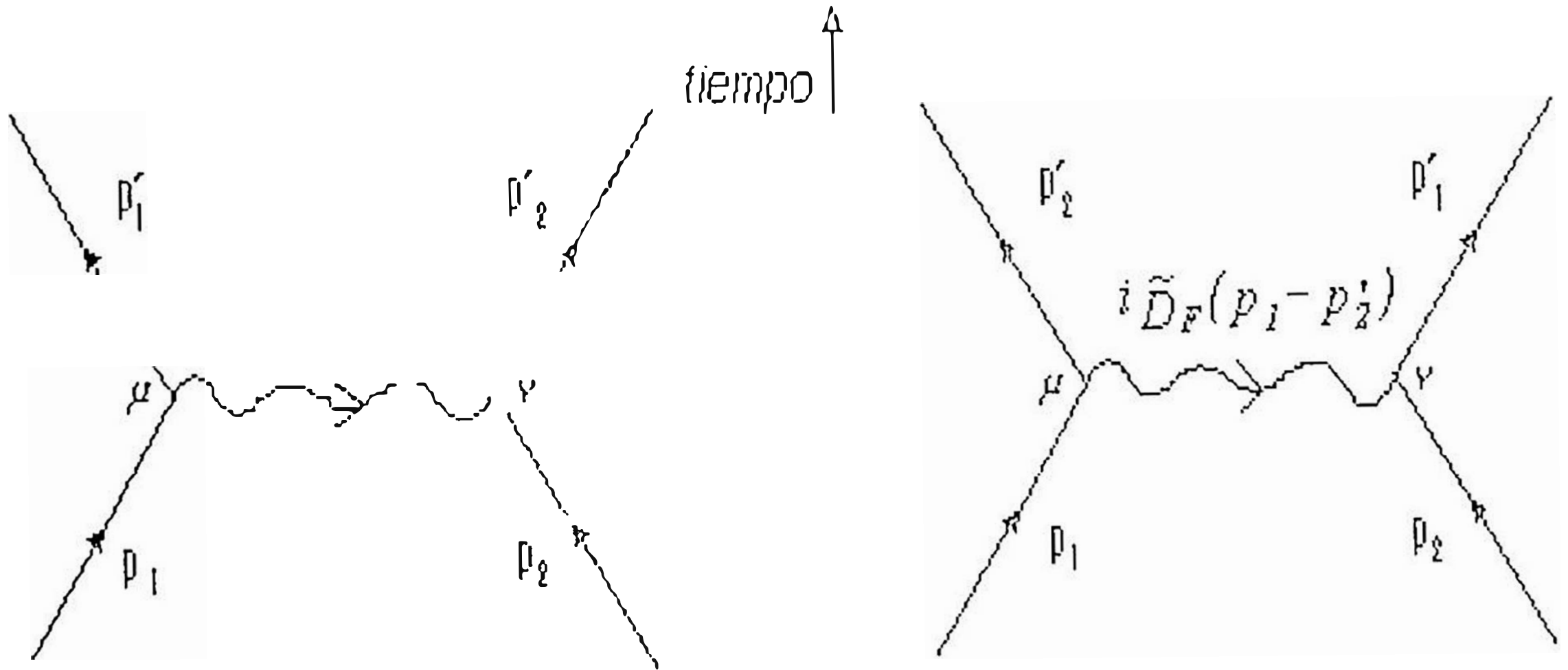
De las ecuaciones anteriores, notamos que las expresiones de sección eficaz no polarizada en el SL son proporcionales a χ , en donde $\sum_{s'=1}^2$ y $\sum_{s=1}^2$ denotan las sumatorias sobre los dos estados de polarización de las partículas finales e iniciales respectivamente. Las ecuaciones (4.60) y (4.64) serán utilizadas en el Capítulo 5 para calcular las secciones eficaces del proceso de dispersión neutrino-electrón.

Enseguida, mostraremos con un ejemplo como efectuar estos promedios sobre los estados de espín inicial y final de las partículas, encontrándose que la secciones eficaces diferenciales no polarizadas pueden siempre ser expresadas en términos de trazas de productos de matrices γ .

DISPERSION DE MOLLER.

A continuación, vamos a calcular la expresión matemática de la sección eficaz diferencial no polarizada en el SCM para el proceso de dispersión de Moller, utilizando para ello las ecuaciones (3.58B), (3.58C) y la amplitud M definida en el Capítulo 3 como:

$$M \equiv M^{(2,1)} + M^{(2,2)}$$



siendo

$$M^{(2,1)} = \bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1)(ie\gamma^\mu)u_{s_1}(\vec{p}_1)i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p_1 - p'_1)\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2)(ie\gamma^\nu)u_{s_2}(\vec{p}_2),$$

$$M^{(2,2)} = -\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2)(ie\gamma^\mu)u_{s_1}(\vec{p}_1)i\tilde{D}_{F\mu\nu}(p_1 - p'_2)\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1)(ie\gamma^\nu)u_{s_2}(\vec{p}_2).$$

utilizando la ecuación (2C.15) del Apéndice 2C, reescribimos las ecuaciones anteriores como:

$$M^{(2,1)} = \frac{ie^2}{(p_1 - p'_1)^2} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0}, \quad (4.65a)$$

$$^{,2)} = \frac{-ic^2}{(p_1 - p'_2)^2} (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0}, \quad (4.65b)$$

donde los sub-índices de los términos de la ecuación anterior denotan sus componentes matriciales.

Para calcular el adjunto hermitiano de $M^{(2,1)}$, aplicamos "†" a la ecuación (4.65a) de la siguiente manera

$$M^{\dagger(2,1)} = \frac{-ic^2}{(p_1 - p'_1)^2} \left[(\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \right]^\dagger \left[(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \right]^\dagger,$$

a continuación, aplicamos la definición del adjunto hermitiano a los términos que están contenidos dentro de los corchetes de la ecuación anterior, hallándose

$$M^{\dagger(2,1)} = \frac{-ic^2}{(p_1 - p'_1)^2} \left[(u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1))_{0\beta} (\gamma_\nu^\dagger)_{\beta\alpha} [(u_{s'_1}^\dagger(\vec{p}'_1))_{0\eta} (\gamma^0)_{\eta\alpha}]^\dagger \right] \times \\ \left[(u_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2))_{0\sigma} (\gamma^\nu)^\dagger_{\sigma\lambda} [(u_{s'_2}^\dagger(\vec{p}'_2))_{0\rho} (\gamma^0)_{\rho\lambda}]^\dagger \right],$$

usando las ecuaciones (1.30a), (1.74c) y por conveniencia reescribiendo en forma matricial la ecuación anterior, obtenemos la siguiente expresión

$$M^{\dagger(2,1)} = \frac{-ic^2}{(p_1 - p'_1)^2} \left[u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) (\gamma^0) \{ (\gamma^0) (\gamma_\nu^\dagger) (\gamma^0) \} u_{s'_1}(\vec{p}'_1) \right] \left[u_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) (\gamma^0) \{ (\gamma^0) (\gamma^\nu)^\dagger (\gamma^0) \} u_{s'_2}(\vec{p}'_2) \right],$$

usando las ecuaciones (1.35), (1.74c) y etiquetando sus componentes matriciales con sub-índices griegos, reescribimos la ecuación anterior, como

$$M^{\dagger(2,1)} = \frac{-ic^2}{(p_1 - p'_1)^2} (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\epsilon} (\gamma_\mu)_{\epsilon\eta} (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{\eta 0} (\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\varphi} (\gamma^\mu)_{\varphi\rho} (u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{\rho 0}. \quad (4.66a)$$

Ahora, vamos a calcular el adjunto hermitiano de $M^{(2,2)}$, para esto aplicamos "†" a la ecuación (4.65b) de la siguiente manera

$$M^{\dagger(2,2)} = \frac{ic^2}{(p_1 - p'_2)^2} \left[(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \right]^\dagger \left[(\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} \right]^\dagger,$$

nuevamente, usamos la definición de adjunto hermitiano para cada de los términos que están contenidos dentro de los corchetes de la ecuación anterior, obteniéndose

$$M^{\dagger(2,2)} = \frac{ic^2}{(p_1 - p'_2)^2} \left[(u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1))_{0\beta} (\gamma_\nu^\dagger)_{\beta\alpha} [(u_{s'_2}^\dagger(\vec{p}'_2))_{0\eta} (\gamma^0)_{\eta\alpha}]^\dagger \right] \times \\ \left[(u_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2))_{0\sigma} ((\gamma^\nu)^\dagger)_{\sigma\lambda} [(u_{s'_1}^\dagger(\vec{p}'_1))_{0\rho} (\gamma^0)_{\rho\lambda}]^\dagger \right],$$

usando las ecuaciones (1.30a), (1.74c) y por conveniencia reescribiendo en forma matricial la ecuación anterior, obtenemos siguiente expresión

$$M^{\dagger(2,2)} = \frac{ic^2}{(p_1 - p'_2)^2} \left[u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) (\gamma^0) \{ (\gamma^0) (\gamma_\nu^\dagger) (\gamma^0) \} u_{s'_2}(\vec{p}'_2) \right] \left[u_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) (\gamma^0) \{ (\gamma^0) (\gamma^\nu)^\dagger (\gamma^0) \} u_{s'_1}(\vec{p}'_1) \right],$$

usando las ecuaciones (1.35) y (1.74c) y etiquetando sus componentes matriciales con sub-índices griegos, reescribimos la ecuación anterior, como

$$M^{\dagger(2,2)} = \frac{ic^2}{(p_1 - p'_2)^2} (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\epsilon} (\gamma_\mu)_{\epsilon\eta} (u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{\eta 0} (\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\varphi} (\gamma^\mu)_{\varphi\rho} (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{\rho 0}. \quad (4.66b)$$

este proceso, en el estado final existen dos partículas idénticas (electrones), entonces el factor $j! = 2! = 2$ y haciendo uso de las ecuaciones (4.65) y (4.66) podremos calcular el valor de χ definido por la ecuación (4.58) como:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{4} \sum_{s'_1, s'_2=1}^2 \sum_{s_1, s_2=1}^2 M M^\dagger = \frac{1}{4} \sum_{spin} \left(M^{(2,1)} + M^{(2,2)} \right) \left(M^{\dagger(2,1)} + M^{\dagger(2,2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{spin} M^{(2,1)} M^{(2,1)} + \frac{1}{4} \sum_{spin} M^{(2,1)} M^{\dagger(2,2)} + \frac{1}{4} \sum_{spin} M^{(2,2)} M^{\dagger(2,1)} + \\ &= \frac{1}{4} \sum_{spin} M^{(2,2)} M^{\dagger(2,2)} = \chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{21} + \chi_{22}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

entonces, substituyendo las ecuaciones (4.65), (4.66) y (4.67) en la ecuación (4.60), encontramos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SCMnp} = \frac{(m_{e^-})^4}{16\pi^2(E_1)^2} (\chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{21} + \chi_{22}), \quad (4.68)$$

Esta ecuación representa la sección eficaz diferencial no-polarizada por unidad de ángulo sólido en el SCM para la dispersión de Moller, expresada en función de los términos χ .

Ahora, vamos a calcular las expresiones matemáticas para los términos $\chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{21}, \chi_{22}$ en el SCM.

Cálculo del término χ_{11} .

Utilizando las ecuaciones (4.65a) y (4.66a) calculamos el valor de:

$$\chi_{11} = \frac{1}{4} \sum_{s'_1, s'_2=1}^2 \sum_{s_1, s_2=1}^2 M^{(2,1)} M^{\dagger(2,1)} = \frac{e^4}{4(p_1 - p'_1)^4} \sum_{s_1, s_2=1}^2 \sum_{s'_1, s'_2=1}^2 (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \times$$

$$(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\epsilon} (\gamma_\mu)_{\epsilon\eta} (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{\eta 0} (\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\rho} (\gamma^\mu)_{\rho\phi} (u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{\phi 0},$$

escribiendo convenientemente cada uno de los términos y las sumatorias de la ecuación anterior, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \frac{e^4}{4(p_1 - p'_1)^4} \sum_{s'_1} (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{\eta 0} \bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1)_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} \sum_{s_1} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\epsilon} (\gamma_\mu)_{\epsilon\eta} \times \\ &= \sum_{s'_2} (u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{\rho 0} (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \sum_{s_2} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} (\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\rho} (\gamma^\mu)_{\rho\phi}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

A continuación, considerando la definición de traza e introduciendo el proyector de energía positiva definido en la ecuación (1A.5) del Apéndice 1A, eliminamos las sumatorias sobre los estados de espín de la ecuación anterior, encontramos

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \frac{e^4}{4(p_1 - p'_1)^4} \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{p}'_1 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma_\nu) \left(\frac{\not{p}_1 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma_\mu) \right] \times \\ &= \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{p}'_2 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma^\nu) \left(\frac{\not{p}_2 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma^\mu) \right], \end{aligned}$$

, por conveniencia factorizamos las masas en reposo m_{e^-} del denominador e la ecuación anterior, hallandose

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{4(p_1 - p'_1)^4 16(m_{e^-})^4} \text{Tr} [(\not{p}'_1 + m_{e^-}) \gamma_\nu (\not{p}_1 + m_{e^-}) \gamma_\mu] \times \text{Tr} [(\not{p}'_2 + m_{e^-}) \gamma^\nu (\not{p}_2 + m_{e^-}) \gamma^\mu]. \quad (4.70)$$

Multiplicando cada uno de los términos que están entre paréntesis dentro de la función traza, de la ecuación anterior y considerando que los términos dentro de las trazas que están afectados por las masas en reposo m_{e^-} en el numerador, tienen una contribución despreciable para el cálculo de χ_{11} , entonces podemos establecer la siguiente aproximación

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{64(p_1 - p'_1)^4 (m_{e^-})^4} \text{Tr} [\not{p}'_1 \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\mu] \text{Tr} [\not{p}'_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu]. \quad (4.71)$$

utilizando la ecuación (4C.24) del Apéndice 4C, podemos simplificar los términos que están dentro de las trazas de la ecuación anterior, encontrándose

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{64(p_1 - p'_1)^4 (m_{e^-})^4} \left[4 \left(p'_{1\nu} p_{1\mu} - g_{\nu\mu} p'_1 p_1 + p'_{1\mu} p_{1\nu} \right) \right] \times \left[4 \left(p''_2 p'_2 - g^{\nu\mu} p'_2 p_2 + p''_2 p'_2 \right) \right]. \quad (4.72)$$

Ordenando convenientemente los términos que están dentro de los corchetes de la ecuación (4.72), obtenemos

$$\chi_{11} = \frac{16e^2}{64(p_1 - p'_1)^4 (m_{e^-})^4} \left[p'_{1\nu} p_{1\mu} + p'_{1\mu} p_{1\nu} - g_{\nu\mu} (p'_1 \cdot p_1) \right] \times \left[p''_2 p'_2 + p''_2 p'_2 - g^{\nu\mu} (p'_2 \cdot p_2) \right],$$

efectuando los productos de cada uno de los términos que están dentro de los corchetes de la ecuación anterior, hallamos

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{4(p_1 - p'_1)^4 (m_{e^-})^4} \left(p'_{1\nu} p_{1\mu} p''_2 p'_2 + p'_{1\nu} p_{1\mu} p''_2 p'_2 - p'_{1\nu} p_{1\mu} g^{\nu\mu} (p'_2 \cdot p_2) + p'_{1\mu} p_{1\nu} p''_2 p'_2 + p'_{1\mu} p_{1\nu} p''_2 p'_2 - p'_{1\mu} p_{1\nu} g^{\nu\mu} (p'_2 \cdot p_2) - p''_2 p'_2 g_{\nu\mu} (p'_1 \cdot p_1) + p''_2 p'_2 g_{\nu\mu} (p'_1 \cdot p_1) + g_{\nu\mu} (p'_1 \cdot p_1) g^{\nu\mu} (p'_2 \cdot p_2) \right), \quad (4.73)$$

agrupando convenientemente los términos semejantes de la ecuación (4.73), encontramos la siguiente expresión

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{4(p_1 - p'_1)^4 (m_{e^-})^4} \left\{ 2p''_2 p'_{1\nu} p''_2 p'_{1\mu} + 2p''_2 p'_{1\nu} p_{1\mu} p''_2 - 2p'_{1\nu} p''_2 (p'_2 \cdot p_2) + -2p'_{1\nu} p''_2 (p'_1 \cdot p_1) + 4(p'_1 \cdot p_1) (p'_2 \cdot p_2) \right\},$$

simplificando los términos semejantes de la ecuación anterior, obtenemos los siguientes términos

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{2(m_{e^-})^4 (p_1 - p'_1)^4} \left\{ (p''_2 p'_{1\nu}) (p''_2 p'_{1\mu}) + (p''_2 p'_{1\nu}) (p_{1\mu} p''_2) \right\}. \quad (4.74)$$

A continuación, vamos a mostrar que los productos escalares $p''_1 p_{2\mu}$ y $p''_1 p'_{2\mu}$ son invariantes.

a esto, vamos a utilizar la ley de conservación del cuadri-momentum, escribiendo lo siguiente

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2,$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad de la ecuación anterior, hallamos

$$(p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2,$$

desarrollando estos binomios al cuadrado, obtenemos lo siguiente

$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_{1\mu} p_{2\mu} = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_{1\mu}' p_{2\mu}'. \quad (4.75)$$

Ahora, considerando la relación entre el cuadrado del cuadri-momentum y la masa en reposo de una partícula relativista libre, dada por la siguiente expresión

$$p_1^2 = p_1'^2 = m_1^2, \quad p_2^2 = p_2'^2 = m_2^2, \quad (4.76)$$

reemplazando la ecuación (4.76) en la ecuación (4.75) encontramos:

$$p_{1\mu}' p_{2\mu} = p_{1\mu} p_{2\mu}'. \quad (4.77)$$

Esta ecuación expresa que el producto de los cuadri-momentum iniciales es igual al producto de los cuadri-momentum finales.

Nuevamente, a partir de la ley de conservación del cuadri-momentum podemos escribir lo siguiente

$$p_1 - p_2 = p'_1 - p'_2, \quad (4.78)$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad anterior hallamos:

$$(p_1 - p_2)^2 = (p'_1 - p'_2)^2,$$

desarrollando los binomios al cuadrado encontramos

$$p_1^2 + p_2^2 - 2p_{1\mu}' p_{2\mu}' = p_1'^2 + p_2'^2 - 2p_{1\mu} p_{2\mu}. \quad (4.79)$$

Usando la ecuación (4.76) en la ecuación (4.79) obtenemos:

$$p_{1\mu}' p_{2\mu}' = p_{1\mu} p_{2\mu}. \quad (4.80)$$

Las ecuaciones (4.77) y (4.80) son conocidas como cantidades invariantes y también serán utilizadas en el Capítulo 5.

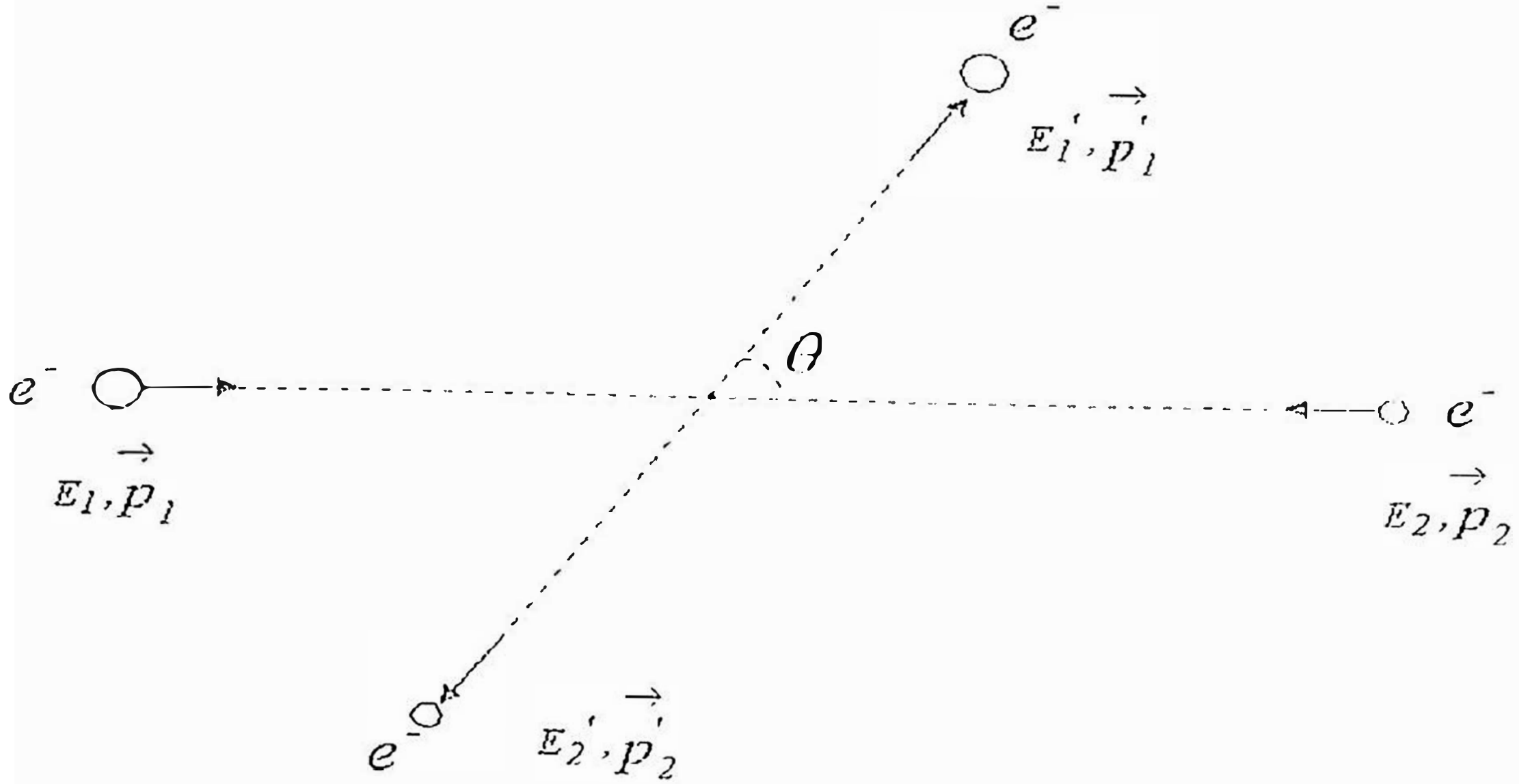
A continuación, vamos a calcular el valor de los productos escalares de la ecuación (4.74), utilizando la ecuación (4.38), (4.77), (4.80) y la figura 4.3, encontrándose los siguientes productos escalares

$$p_{2\mu}' p_{1\mu} = p_{2\nu}' p_{1\nu} = E_1^2 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1 = E_1^2 - E_1^2 \cos \pi = 2E_1^2, \\ p_{2\nu}' p_{1\nu} = p_{1\mu} p_{2\mu}' = E_1^2 - E_1^2 \cos(\pi - \theta) = E_1^2 + E_1^2 \cos(\theta) = 2E_1^2 \cos^2(\theta/2), \quad (4.81)$$

$$(p_1 - p_1')^4 = \left[(E_1 - E_1')^2 - \left(\vec{p}_1 - \vec{p}_1' \right)^2 \right]^2 = \left[\left(\vec{p}_1 - \vec{p}_1' \right)^2 \right]^2 = \left(2E_1^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1' \right)^2 = \\ (2E_1^2 - 2E_1^2 \cos \theta)^2 = 4E_1^4 (2\sin^2(\theta/2))^2 = 16E_1^4 \sin^4(\theta/2). \quad (4.82)$$

Substituyendo, los resultados de las ecuaciones (4.81) y (4.82) en la ecuación (4.74), encontramos la siguiente expresión:

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{2(m_{e^-})^4 16E_1^4 \text{sen}^4(\theta/2)} \{ (2E_1^2)(2E_1^2) + (2E_1^2 \cos^2(\theta/2))(2E_1^2 \cos^2(\theta/2)) \}.$$



La Fig 4.3 muestra la colisión de dos electrones que se mueven en sentido opuesto en el SCM.

Ahora, efectuando el producto de los términos que están dentro de los corchetes de la ecuación anterior, hallamos

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{32(m_{e^-})^4 E_1^4 \text{sen}^4(\theta/2)} \{ (4E_1^4) + 4E_1^4 \cos^4(\theta/2) \},$$

simplificando los términos semejantes de la ecuación anterior, encontramos

$$\chi_{11} = \frac{e^4}{8(m_{e^-})^4 \text{sen}^4(\theta/2)} \{ 1 + \cos^4(\theta/2) \}. \quad (4.83)$$

Esta ecuación representa el valor del término χ_{11} , la cual depende solamente de la masa del electrón y del ángulo de dispersión, medidos en el SCM.

Procediendo de igual manera como en el caso anterior, podemos calcular el siguiente término.

Cálculo del término χ_{22} .

Utilizando las ecuaciones (4.65b) y (4.66b) podemos calcular el valor de:

$$\chi_{22} = \frac{1}{4} \sum_{s'_1, s'_2=1}^2 \sum_{s_1, s_2=1}^2 M^{(2,2)} M^{\dagger(2,2)} = \frac{e^4}{4(p_1 - p'_2)^4} \sum_{s_1, s_2=1}^2 \sum_{s'_1, s'_2=1}^2 (\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} \times$$

$$(\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\lambda} (\gamma^\mu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\epsilon} (\gamma_\mu)_{\epsilon\eta} (u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{\eta 0} (\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\varphi} (\gamma^\mu)_{\varphi\rho} (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{\rho 0},$$

escribiendo convenientemente cada uno de los términos y las sumatorias de la ecuación anterior, obtenemos

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{4(p_1 - p'_2)^4} \sum_{s'_2} (u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{\eta 0} \bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2)_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} \sum_{s_1} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\epsilon} (\gamma_\mu)_{\epsilon\eta} \times$$

$$\sum_{s_1'} (u_{s_1'}(\vec{p}_1'))_{\rho 0} (u_{s_1'}(\vec{p}_1'))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \sum_{s_2} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\rho} (\gamma^\mu)_{\rho\rho}. \quad (4.84)$$

A continuación, considerando la definición de traza e introduciendo el proyector de energía positiva definido en la ecuación (1A.5) del Apéndice 1A, eliminamos las sumatorias sobre los estados de espín de la ecuación anterior, encontramos

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{4(p_1 - p_2')^4} \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{p}_2' + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma_\nu) \left(\frac{\not{p}_1 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma_\mu) \right] \times \\ \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{p}_1' + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma^\nu) \left(\frac{\not{p}_2 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma^\mu) \right],$$

luego, por conveniencia factorizamos las masas en reposo m_{e^-} del denominador de la ecuación anterior, hallándose

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{4(p_1 - p_2')^4 16(m_{e^-})^4} \text{Tr} [(\not{p}_2' + m_{e^-}) (\gamma_\nu) (\not{p}_1 + m_{e^-}) (\gamma_\mu)] \times \\ \text{Tr} [(\not{p}_1' + m_{e^-}) (\gamma^\nu) (\not{p}_2 + m_{e^-}) (\gamma^\mu)]. \quad (4.85)$$

Multiplicando cada uno de los términos que están entre paréntesis dentro de la función traza, de la ecuación anterior y considerando que los términos dentro de las trazas que están afectados por las masas en reposo m_{e^-} en el numerador, tienen una contribución despreciable para el cálculo de χ_{22} , entonces podemos establecer la siguiente aproximación

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{4(p_1 - p_2')^4 16(m_{e^-})^4} \text{Tr} [\not{p}_2' \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\mu] \text{Tr} [\not{p}_1' \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu], \quad (4.86)$$

utilizando la ecuación (4C.24) del Apéndice 4C, podemos simplificar los términos que están dentro de las trazas de la ecuación anterior, encontrándose

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{64(p_1 - p_2')^4 (m_{e^-})^4} \left[4 (p_{2\nu}' p_{1\mu} - g_{\nu\mu} (p_2' \cdot p_1) + p_{2\mu}' p_{1\nu}) \right] \times \\ \left[4 (p_1^{\nu} p_2^{\mu} - g^{\nu\mu} (p_1 \cdot p_2) + p_1^{\mu} p_2^{\nu}) \right]. \quad (4.87)$$

Ordenando convenientemente los términos que están dentro de los corchetes de la ecuación (4.87), obtenemos

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{4(p_1 - p_2')^4 (m_{e^-})^4} \left[p_{2\nu}' p_{1\mu} + p_{2\mu}' p_{1\nu} - g_{\nu\mu} (p_2' \cdot p_1) \right] \times \\ \left[p_1^{\nu} p_2^{\mu} + p_1^{\mu} p_2^{\nu} - g^{\nu\mu} (p_1 \cdot p_2) \right],$$

efectuando los productos de cada uno de los términos que están dentro de los corchetes de la ecuación anterior, hallamos

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{4(p_1 - p_2')^4 (m_{e^-})^4} \{ p_{2\nu}' p_{1\mu} p_1^{\nu} p_2^{\mu} + p_{2\nu}' p_{1\mu} p_1^{\mu} p_2^{\nu} - p_{2\nu}' p_{1\mu} g^{\nu\mu} (p_1 \cdot p_2) + \\ p_{2\mu}' p_{1\nu} p_1^{\nu} p_2^{\mu} + p_{2\mu}' p_{1\nu} p_1^{\mu} p_2^{\nu} - p_{2\mu}' p_{1\nu} g^{\nu\mu} (p_1 \cdot p_2) - p_1^{\nu} p_2^{\mu} g_{\nu\mu} (p_2' \cdot p_1) + \\ - p_1^{\mu} p_2^{\nu} g_{\nu\mu} (p_2' \cdot p_1) + g_{\nu\mu} (p_2' \cdot p_1) g^{\nu\mu} (p_1 \cdot p_2) \}, \quad (4.88)$$

agrupando convenientemente los términos semejantes de la ecuación (4.88), encontramos la siguiente expresión:

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{4(p_1 - p'_2)^4 (m_{e^-})^4} \{2p'_1{}'' p'_{2\nu} p''_2 p_{1\mu} + 2p'_2{}'' p'_{2\nu} p_{1\mu} p''_1{}'' - 2p'_{2\nu} p''_1 (p'_1 \cdot p_2) +$$

$$-2p'_{1\nu} p''_2 (p'_2 \cdot p_1) + 4(p'_2 \cdot p_1)(p'_1 \cdot p_2)\}.$$

Simplificando los términos semejantes de la ecuación anterior, obtenemos

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{2(m_{e^-})^4 (p_1 - p'_2)^4} \{(p'_{1\nu} p''_2)(p_{1\mu} p''_1) + (p'_{2\nu} p''_1)(p_{1\mu} p''_1)\}. \quad (4.89)$$

A continuación, utilizando la ecuación (4.38) y la figura 4.3 calculamos el valor de la siguiente expresión

$$(p_1 - p'_2)^4 = \left[(E_1 - E'_2)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}'_2)^2 \right]^2 = \left[(\vec{p}_1 - \vec{p}'_2)^2 \right]^2 = \left(2E_1^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}'_2 \right)^2$$

$$= (2E_1^2 - 2E_1^2 \cos(\pi - \theta))^2 = 4E_1^4 (2\cos^2(\theta/2))^2 = 16E_1^4 \cos^4(\theta/2). \quad (4.90)$$

Substituyendo, los resultados de las ecuaciones (4.81) y (4.90) en la ecuación (4.89) obtenemos la siguiente expresión

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{2(m_{e^-})^4 16E_1^4 \cos^4(\theta/2)} \{(2E_1^2)(2E_1^2) + (2E_1^2 \sec^2(\theta/2))(2E_1^2 \sec^2(\theta/2))\},$$

ahora, efectuemos el productos de los términos que están dentro de los corchetes, de la ecuación anterior para tener

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{32(m_{e^-})^4 E_1^4 \sec^4(\theta/2)} \{(4E_1^4) + 4E_1^4 \sec^4(\theta/2)\},$$

simplificando los términos semejantes de la ecuación anterior, encontramos

$$\chi_{22} = \frac{e^4}{8(m_{e^-})^4 \cos^4(\theta/2)} \{1 + \sec^4(\theta/2)\}. \quad (4.91)$$

Nuevamente hemos encontrado que el valor del término χ_{22} , depende solamente de la masa del electrón y del ángulo de dispersión, medidos en el SCM.

A continuación, calculamos el valor del término χ_{12} .

Cálculo del término χ_{12} .

Utilizando las ecuaciones (4.65a) y (4.66b) vamos a calcular el valor de:

$$\chi_{12} = \frac{1}{4} \sum_{s'_1, s'_2=1}^2 \sum_{s_1, s_2=1}^2 M^{(2,1)} M^{\dagger(2,2)} = \frac{-e^4 \sum_{s'_1, s'_2=1}^2 \sum_{s_1, s_2=1}^2 (\bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0}}{4(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} \times$$

$$(\bar{u}_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{0\lambda} (\gamma'_\nu)_{\lambda\sigma} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\epsilon} (\gamma_\mu)_{\epsilon\eta} (u_{s'_2}(\vec{p}'_2))_{\eta 0} (\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\varphi} (\gamma''_\mu)_{\varphi\rho} (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{\rho 0},$$

escribiendo convenientemente cada uno de los términos y las sumatorias de la ecuación anterior, obtenemos

$$\chi_{12} = \frac{-e^4 \sum_{s'_1} (u_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{\rho 0} \bar{u}_{s'_1}(\vec{p}'_1))_{0\alpha} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} \sum_{s_1} (u_{s_1}(\vec{p}_1))_{\beta 0} (\bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1))_{0\epsilon} (\gamma_\mu)_{\epsilon\eta}}{4(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} \times$$

$$\sum_{s_2'} (u_{s_2'}(\vec{p}_2'))_{\eta 0} (\bar{u}_{s_2'}(\vec{p}_2'))_{0\lambda} (\gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \sum_{s_2} (u_{s_2}(\vec{p}_2))_{\sigma 0} (\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2))_{0\varphi} (\gamma^\mu)_{\varphi\rho}. \quad (4.92)$$

A continuación, considerando la definición de traza e introduciendo el proyector de energía positiva definido en la ecuación (1A.5) del Apéndice 1A, eliminamos las sumatorias sobre los estados de espín de la ecuación anterior, encontrándose

$$\chi_{12} = \frac{-e^4}{4(p_1 - p_1')^2(p_1 - p_2')^2} Tr \left\{ \left(\frac{\not{p}_1 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma_\nu) \left(\frac{\not{p}_1 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma_\mu) \times \right. \\ \left. \left(\frac{\not{p}_2 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma^\nu) \left(\frac{\not{p}_2 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \right) (\gamma^\mu) \right\},$$

luego, por conveniencia factorizamos las masas en reposo m_{e^-} del denominador de la ecuación anterior, hallándose

factorizando las masas m_{e^-} y multiplicando cada uno de los términos que están entre paréntesis dentro de la función traza, en la ecuación anterior hallamos

$$\chi_{12} = \frac{-e^4}{4(p_1 - p_1')^2(p_1 - p_2')^2 16(m_{e^-})^4} Tr \left\{ (\not{p}_1 + m_{e^-}) (\gamma_\nu) (\not{p}_1 + m_{e^-}) (\gamma_\mu) \times \right. \\ \left. (\not{p}_2 + m_{e^-}) (\gamma^\nu) (\not{p}_2 + m_{e^-}) (\gamma^\mu) \right\}. \quad (4.93)$$

Multiplicando cada uno de los términos que están entre paréntesis dentro de la función traza, de la ecuación anterior y considerando que los términos dentro de las trazas que están afectados por las masas en reposo m_{e^-} en el numerador, tienen una contribución despreciable para el cálculo de χ_{12} , entonces podemos establecer la siguiente aproximación

$$\chi_{12} = \frac{e^4}{64(p_1 - p_1')^2(p_1 - p_2')^2(m_{e^-})^4} Tr \left\{ \not{p}_1' \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \right\}. \quad (4.94)$$

Ahora, deseamos calcular el valor de la $Tr \left\{ \not{p}_1' \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \right\}$. Para esto utilizamos la ecuación (4C.4) del Apéndice 4C, y por conveniencia vamos a escribir esta traza de la siguiente manera

$$Tr(\gamma^\sigma \gamma_\nu \gamma^\lambda [\gamma_\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu]) p_{1\sigma}' p_{1\lambda} p_{2\beta}' p_{2\alpha} = Tr(\gamma^\sigma \gamma_\nu \gamma^\lambda \{-2\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta\}) p_{1\sigma}' p_{1\lambda} p_{2\beta}' p_{2\alpha} \\ = Tr(-2\gamma^\sigma [\gamma_\nu \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\nu] \gamma^\beta) p_{1\sigma}' p_{1\lambda} p_{2\beta}' p_{2\alpha}, \quad (4.95)$$

a continuación, usando las ecuaciones (4C.3) y (4C.16) del Apéndice 4C en la ecuación anterior, encontramos el siguiente resultado

$$Tr(\not{p}_1' \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu) = -2 Tr(\gamma^\sigma [\gamma_\nu \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\nu] \gamma^\beta) p_{1\sigma}' p_{1\lambda} p_{2\beta}' p_{2\alpha} \\ = -2 Tr(\gamma^\sigma \{4g^{\lambda\alpha}\} \gamma^\beta) p_{1\sigma}' p_{1\lambda} p_{2\beta}' p_{2\alpha}, \quad (4.96)$$

ahora, usando nuevamente la ecuación (4C.16) del Apéndice 4C en la ecuación (4.96), obtenemos el siguiente resultado

$$Tr(\not{p}_1' \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu) = -8g^{\lambda\alpha} Tr(\gamma^\sigma \gamma^\beta) p_{1\sigma}' p_{1\lambda} p_{2\beta}' p_{2\alpha} \\ = -8(p_1 \cdot p_2) Tr(\gamma^\sigma \gamma^\beta) p_{1\sigma}' p_{2\beta}', \quad (4.97)$$

haciendo uso de la ecuación (4C.20) (ver Apéndice 4C) en la ecuación (4.97) encontramos la siguiente expresión matemática

$$Tr \left\{ \not{p}_1' \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \right\} = -8(p_1 \cdot p_2) \{4g^{\sigma\beta}\} p_{1\sigma}' p_{2\beta}' = -32(p_1 \cdot p_2)(p_1' \cdot p_2'). \quad (4.98)$$

emplazando la ecuación (4.98) en la ecuación (4.94), encontramos

$$\chi_{12} = \frac{c^4}{64(p_1 - p'_1)^2(p_1 - p'_2)^2(m_{e^-})^4} (32(p_1 \cdot p_2)(p'_1 \cdot p'_2)). \quad (4.99)$$

Substituyendo, los resultados de las ecuaciones (4.81), (4.82) y (4.90) en la ecuación (4.99), encontramos la siguiente expresión

$$\chi_{12} = \frac{c^4}{8(m_{e^-})^4 \text{sen}^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)}. \quad (4.100)$$

Similarmente, esta ecuación representa el valor del término χ_{12} , la cual depende solamente de la masa del electrón y del ángulo de dispersión, medidos en el SCM.

Cálculo del término χ_{21} .

Procediendo de igual manera como en el caso anterior podemos mostrar que

$$\chi_{21} = \frac{1}{4} \sum_{s'_1, s'_2=1}^2 \sum_{s_1, s_2=1}^2 M^{(2,2)} M^{(2,1)} = \frac{c^4}{8(m_{e^-})^4 \text{sen}^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)}. \quad (4.101)$$

Similarmente, esta ecuación representa el valor del término χ_{21} , la cual depende solamente de la masa del electrón y del ángulo de dispersión, medidos en el SCM.

Reemplazando los resultados de las ecuaciones (4.83), (4.91), (4.100) y (4.101) en la ecuación (4.68), encontramos la expresión matemática para la sección eficaz no polarizada en el SCM para la dispersión elástica electrón-electrón

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SCMnp} = \frac{(m_{e^-})^4}{16\pi^2(E_1)^2} \left[\frac{c^4}{8(m_{e^-})^4 \text{sen}^4(\theta/2)} \{1 + \cos^4(\theta/2)\} + \frac{2c^4}{8(m_{e^-})^4 \text{sen}^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} + \frac{c^4}{8(m_{e^-})^4 \cos^4(\theta/2)} \{1 + \text{sen}^4(\theta/2)\} \right],$$

eliminando los términos comunes, reescribimos la ecuación anterior como:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{SCMnp} = \frac{(e^-)^4}{16\pi^2(E_1)^2} \left\{ \frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{8 \text{sen}^4(\theta/2)} + \frac{2}{8 \text{sen}^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} + \frac{1 + \text{sen}^4(\theta/2)}{8 \cos^4(\theta/2)} \right\}. \quad (4.102)$$

En esta expresión E_1 representa la energía de cada electrón incidente en el SCM y θ el ángulo de dispersión medido en el SCM.

Estos cálculos nos muestran la forma de como se debe proceder para encontrar los valores de las secciones eficaces no-polarizadas para cualquier proceso de dispersión elástica que involucren electrones, positrones y fotones.

CONCLUSIONES.

En el presente trabajo, hemos tratado de deducir las reglas Feynman de la EDC, de una manera autoconsistente, de modo que nos permita construir en forma directa las amplitudes de Feynman M_{if} a partir de los vértices básicos propuestos por el Modelo 3-3-1. Esto nos servirá para estudiar el proceso de dispersión elástica neutrino-electrón (ν_e-e^-) para el caso de altas energías. En el Capítulo 5 hemos encontrado las expresiones generales para la sección eficaz total tanto en el Sistema Laboratorio como en el Sistema Centro de Masa. Dichas expresiones muestran la contribución del Modelo 3-3-1 por la presencia del factor G' . Su ausencia implicará que la masa del bosón vectorial V^+ sea muy grande comparado con la masa del bosón cargado W^+ (o con la del bosón neutro Z^0), es decir, $V^+ \gg W^+$ ó $V^+ \gg Z^0$, esto hará que los resultados obtenidos coincidan con los predichos por el Modelo Standard. Los valores de la secciones eficaces para este proceso de dispersión, son muy pequeñas, aproximadamente del orden de $10^{-42}cm^2$ en el Sistema Laboratorio y $10^{-38}cm^2$ en el Sistema Centro de Masa respectivamente. Estos valores hacen que su estudio experimental sea extremadamente difícil. Por este motivo se cree que las dificultades experimentales observadas se deben al hecho de considerar al neutrino como una partícula sin carga y de masa despreciable. Interpretamos el valor de $10^{-42}cm^2$ (ó $10^{-38}cm^2$) como la sección eficaz de captura de un neutrino por un electrón. El neutrino al pasar por $1cm^3$ del material que sirve como blanco, va a encontrar aproximadamente 10^{24} electrones.

Por lo tanto, el factor 10^{-18} (10^{-14}) representa la probabilidad para que ocurra esta dispersión elástica.

Esperamos que en el futuro existan mayores evidencias experimentales que aumenten nuestras informaciones para una cabal comprensión de las interacciones débiles.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

- [1] J. Leite Lopes. Introducción a la Electrodinámica Cuántica. Editorial Trillas México, 1977.
- [2] J. M. Jauch and F. Rohrlich. The Theory of photons and electrons. Cambridge. Mass Addison-Wesley Publishing Company. Inc 1955.
- [3] S. Schweber. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York. Harper & Row. Publishers. Inc.1961.
- [4] A. Akhiezer and V.B . Bereztetski. Quantum Electrodynamics.2d ed. New York. John Wiley & Sons. Inc.1963.
- [5] R. P. Feynman. Quantum Electrodynamics. New York. W. A. Benjamin. Inc.1962.
- [6] James D. Bjorken and S. D. Drell. Tomo I. Copyright 1965 by McGraw-Hill.
- [7] James D. Bjorken and S. D. Drell. Tomo II. Copyright 1965 by McGraw-Hill.
- [8] F. Mandl and Shaw. Quantum Field Theory. A Wiley-Interscience Publication. Copyright 1984 by John Wiley and Sons Ltd.
- [9] David Griffiths. Introduction to Elementary Particles. Copyright 1987 by Harper & Row Publishers.
- [10] Albert Messiah. Mecánica Cuántica. Tomo II. Editorial Tecnos, S. A; 1973 O' Donnell, 27 Madrid 9.
- [11] Chris Quigg. Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions. Copyright 1987 by Addison-Wesley Publishing Company.
- [12] Holger Valqui. Expansión de un operador por efecto de un prisma. Revista Peruana de Física. Vol. I, No 2, p. 198-209, 1981.
- [13] F. Pisano, V. Pleitez. Phys. Rev. D46 (1992), 410, P. Frampton. Phys. Lett 69 (1992) 2889.
- [14] J. C. Montero, F. Pisano, V. Pleitez. Phys Rev. D47 (1993), 2918.
- [15] P. Jordan and E. Wigner. Über das paulische äquivalenzverbot Zeitschrift für Physik. Vol 47, p.631 (1928)
- [16] Enrico Fermi. Sopra l'elettrodinamica quantistica. Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Vol. 12, p. 431 (1930).
- [17] W. Pauli. The connection between spin and statistics. Physical Review. Vol 58, p. 716 (1940).
- [18] S. Tomonaga. On a relativistically invariant formulation of the Quantum Theory of wave fields. Progress of Theoretical Physics. Vol. I, p. 27 (1946).
- [19] R. P. Feynman. Theory of positron. Physical Review. Vol 76, p. 749 (1949).
- [20] F. J. Dayson. The S-Matrix in Quantum Electrodynamics. Physical Review. Vol 75, p. 1736 (1949).
- [21] S. N. Gupta. Proc. Phys. Soc. 63, 681(1950); 64, 850 (1951).

- [22] K. Bleuler. *Helv. Phys. Acta* 23, 567 (1950). *Progr. Theor. Phys* 5, 600 (1950).
- [23] G. C. Wick. *Physical Review*. Vol 80, Número 2, p. 268 (1950).
- [24] R. C. Allen et al. *Phys. Rev. Lett.* 55, 2401 (1985).
- [25] R. C. Allen. et al. *Nucl. Instr & Meth* 269A, 177 (1988).
- [26] R. C. Allen et al. *Phys. Rev. Lett.* 64, 1330 (1990).
- [27] O. L. Pereyra Ravinez. *Violación de CP en los Modelos 3-3-1*. Tese de Doutoramento. Instituto de Física Teórica. Universidade Estadual Paulista (1998)