

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS



T E S I S

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO, ESPECIALIDAD: MATEMATICAS**

TITULADA:

EXISTENCIA DE CICLOS LIMITES

PRESENTADO POR:

ASTETE CHUQUICHAICO ROLANDO GANDHI

LIMA-PERU

1999

INDICE

	Pag.
0 INTRODUCCION.....	1
I. LA ECUACION DE VAN DER POL.....	8
II. INVESTIGACION DE LA SALLE.....	14
III. EXISTENCIA DE n CICLOS LIMITES.....	21
IV. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	48

RESUMEN

En el presente trabajo se realiza el estudio de la **Exsistencia de Ciclos Límites en Sistemas Dinámicos de la forma:** $x' = y - F(x)$, $y' = -g(x)$. Este sistema puede tener uno o mas ciclos límites el cual dependerá de las características propias de la función $y = F(x)$, además, si el sistema tiene más de un ciclo límite estos estarán distribuidos de diferentes maneras dependiendo del número de puntos singulares que pueda tener el sistema.

Si consideramos que el sistema dado, tiene como único punto singular el origen $(0, 0)$, si $f(x) = F'(x)$, y n el número de ceros positivos de $f(x)$ en el intervalo $\langle 0, d \rangle$. Se puede encontrar condiciones apropiadas para la función $y = F(x)$ de modo que el sistema tenga al menos n ciclos límites.

En el presente trabajo probaremos el teorema que sigue.

Teorema. *Supongamos que en el sistema $x' = y - F(x)$, $y' = -g(x)$, $F(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones:*

1): $F(-x) = -F(x)$ y $g(-x) = -g(x)$

2): *En el intervalo $\langle 0, b \rangle$, $f(x)$ tiene a lo más n ceros:*

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < b ; \text{ y } F(\alpha_0) = 0 , F(\alpha_1) < 0 \text{ y}$$

$$F(\alpha_k) \cdot F(\alpha_{k+1}) < 0 , k = 1, 2, \dots, n \text{ donde } 0 = \alpha_0 \text{ y } \alpha_{n+1} = b$$

3): $(-1)^k F(\alpha_k) < (-1)^k F(\alpha_{k+2})$ y

$$(-1)^{k+1} F(\alpha_{k+1}) > (-1)^k F(\alpha_k) + \sqrt{2G(\beta_{k+1})} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n - 1$$

$$\text{donde } \beta_{k+1} \in \langle \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2} \rangle \text{ y } F(\beta_{k+1}) = F(\alpha_k).$$

Entonces en la franja $|x| \leq b$, el sistema dado tiene a lo más n ciclos límites.

EXISTENCIA DE CICLOS LIMITES

En Sistemas Dinámicos de la forma:

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y' = -g(x) \end{cases}$$

0. INTRODUCCION

Definiciones y teoremas previos:

Teorema de la Función Implícita.[13] Sea $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 donde $I \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ son abiertos.

Sea $(t_0, x_0) \in I \times U / F(t_0, x_0) = 0$, y supongamos además que

$$\left| \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \right|_{(t_0, x_0)} \neq 0$$

Entonces:

A) $\exists!$ $\varphi : J \rightarrow V$ solución de clase C^1 de la ecuación $F(t, \varphi(t)) = 0$.

B) \exists una vecindad $J \times V \subset I \times U$ del punto (t_0, x_0) tal que $\forall (t, x) \in J \times V$ que verifica $F(t, x) = 0$, satisface también la ecuación $x = \varphi(t)$.

Definición. Un segmento $\Sigma \subset U$ se denomina una sección transversal para el sistema dinámico $x' = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^r(U)$, $r \geq 1$ si :

- 1) Σ no contiene puntos singulares del sistema $x' = f(x)$
- 2) $\forall (x, y) \in \Sigma$, $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ nunca es tangente a Σ

OBS. De (1) y (2) implica que el campo $f(x, y)$ apunta de un solo lado de Σ , pues $f(x, y)$ es continua sobre Σ .

Transformación de Poincaré

Teorema 1.[14] Sea $\varphi(t, x_0) = (x(t, x_0), y(t, x_0))$ una trayectoria para el sistema dinámico $x' = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^r(U)$, $r \geq 1$. Sea Σ una sección transversal para el sistema tal que $a(x_0) = \varphi(t_0, x_0) \in \Sigma$.

Dado un $\varepsilon > 0$ pequeño y $x \in U$ con $|x - x_0| < \varepsilon$, entonces $\exists \delta > 0$ y un único $t(x) \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ con $a(x) = \varphi(t(x), x) \in \Sigma$.

Además las funciones $a = a(x)$ y $t = t(x)$ son continuas y diferenciables en una vecindad $|x - x_0| < \varepsilon$.

Obs.

Consideramos $\varphi(t, x_0)$ solución del sistema $x' = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

1) $\varphi(t, x_0) \in \Sigma$

2) $\exists t_1 > 0 / \varphi(t_1, x_0) \in \Sigma$, t_1 el mínimo con esta propiedad. Entonces el teorema anterior implica que existe una aplicación definida en $\Sigma \cap V_0$; esto es:

$$\Pi : \Sigma \cap V_0 \rightarrow \Sigma, x \rightarrow \Pi(x) \text{ de clase } C^1.$$

Denominada Aplicación de Poincaré, tal que $\Pi(x)$ es el primer retorno de la trayectoria que pasa por el punto x .

Esto es :

$$\Pi(x) = \varphi(t_1 + T(\varphi(t_1, x)), x) = \varphi(T(\varphi(t_1, x)), \varphi(t_1, x))$$

Teorema 2[3, 12]: *Por un punto $x_0 \in \Sigma$ pasa una trayectoria cerrada para el sistema dinámico $x' = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow x_0$ es un punto fijo de la aplicación de Poincaré.*

Definición. Definamos $K : \varphi(t, x_0)$ una trayectoria cerrada del sistema dinámico $x' = f(x)$. Diremos que K es un Ciclo Límite para el sistema, si existe una vecindad $V(k)$ que no contiene otras trayectorias cerradas distintas de K del sistema $x' = f(x)$. Esto es K es una trayectoria periódica aislada del sistema $x' = f(x)$.

Teorema 3[11, 12]. *Por un punto $x_0 \in \Sigma$ pasa un ciclo límite K para el sistema $x' = f(x) \Leftrightarrow x_0$ es un punto fijo aislado de la aplicación de Poincaré.*

Teorema 4[7]. Sea $K : \varphi(t, x_0)$, $t \in R$ un ciclo límite del sistema dinámico $x' = f(x)$, $x \in U \subset R^2$, $f \in C^r(U)$, $r \geq 1$. Denotemos por $V(K)$ una vecindad en la cual no hay otras trayectorias periódicas distintas de K . Entonces, toda trayectoria $\varphi(t, x)$ con $x \in V(K)$ se espirala entorno de K , aproximándose a K cuando $t \rightarrow +\infty$ o bien cuando $t \rightarrow -\infty$.

Definición. Un ciclo límite K del sistema dinámico $x' = f(x)$, $x \in U \subset R^2$,

i) Se denomina Ciclo Límite Estable (atractora) sí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, y), K) = 0, \quad \forall y \in V(K)$$

ii) Se denomina Ciclo Límite Inestable (fuente) sí:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, y), K) = 0, \quad \forall y \in V(K)$$

iii) Se denomina Ciclo Límite Semi-estable cuando por un lado de K ocurre (i) y por el otro lado ocurre (ii), o recíprocamente.

Proposición. Sea $K : \varphi(t, x_0)$, $t \in R$ un ciclo límite .

- 1) Si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\Pi(x) - \Pi(x_0)| < |x - x_0|$, entonces K es un ciclo límite estable.
- 2) Si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\Pi(x) - \Pi(x_0)| > |x - x_0|$, entonces K es un ciclo límite inestable.
- 3) Si para $x_0 < x < x_0 + \delta$ (recíproco $x_0 - \delta < x < x_0$) se satisface (1) y para $x_0 - \delta < x < x_0$ (recíproco $x_0 < x < x_0 + \delta$) se satisface (2), entonces K es un ciclo límite semi-estable.

Corolario. Sea $K : \varphi(t, x_0)$, $t \in R$ un ciclo límite para el sistema dinámico $x' = f(x)$, $x \in U \subset R^2$.

- 1) K es un ciclo límite estable $\Leftrightarrow \Pi'(x_0) < 1$
- 2) K es un ciclo límite inestable $\Leftrightarrow \Pi'(x_0) > 1$
- 3) K es un ciclo límite semi-estable $\Leftrightarrow \Pi'(x_0) = 1$ y la curva $y = \Pi(x)$ está de un solo lado de $y = x$, en una vecindad de (x_0, y_0) .

Definición.

Sea $x' = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(U)$, $r \geq 1$, y U es abierto. Sea $\varphi(t, p)$ la trayectoria que pasa por el punto P , cuando $t = 0$, definido en el intervalo maximal $\langle m_1, m_2 \rangle$.

- i) Si $m_2 = +\infty$, definimos el conjunto:

$$\omega(p) = \{q \in U : \exists t_n \rightarrow +\infty, \varphi(t_n, p) \rightarrow q\}$$

- ii) Si $m_1 = -\infty$, definimos el conjunto:

$$\alpha(p) = \{q \in U : \exists t_n \rightarrow -\infty, \varphi(t_n, p) \rightarrow q\}$$

Los conjuntos $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ se denominan conjunto ω -límite y α -límite del punto P .

Definimos La semiórbita positiva que pasa por el punto P como::

$$\varphi_{(p)}^+ = \{\varphi(t, p) / t \geq 0\}$$

Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 5[11,14]. Sea $\varphi(t, p)$ la trayectoria del sistema dinámico $x' = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^r(U)$, $r > 1$. Asumamos que $\varphi(t, p)$ está definida para todo $t \geq 0$ y que $\varphi_{(p)}^+ \subset K \subset U$, donde K es un conjunto compacto.

supongamos además que el sistema tiene un número finito de singularidades en $\omega(p)$. Entonces:

- a) Si $\omega(p)$ contiene únicamente puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica..
- b) Si $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares, entonces $\omega(p)$ es un grafo. Esto es un conjunto de órbitas las cuales tienden a un punto singular cuando $t \rightarrow \pm\infty$
- c) Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ se reduce a un punto singular.

Aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 6[8, 9]

(I) Sea $x' = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^r(U)$, $r > 1$. tal que:

- i) R es un anillo topológico, sin puntos singulares para el sistema.
- ii) ∂R es una sección transversal para el sistema.

Entonces, el sistema tiene al menos una órbita periódica contenida en R .

(II) Si R es un disco topológico tal que:

- i) $\overset{\circ}{R}$ contiene una única singularidad inestable(estable) para el sistema.
- ii) ∂R es una sección transversal para el sistema, y el campo en ∂R siempre apunta al interior(exterior) de R .

Entonces R contiene al menos una órbita cerrada.

Definición.

Dado la ecuación diferencial de segundo orden:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = h(t)$$

Donde: $h(t)$ es una función periódica de t

Obs: En la mayoría de las aplicaciones

$f(x)$ representa la resistencia del medio

$g(x)$ representa la fuerza interna del sistema y

$h(t)$ representa la fuerza externa aplicada al sistema.

Nos interesa estudiar las soluciones periódicas del sistema (*) cuando la función $h(t) = 0$, que son de gran importancia en la práctica.

Cuando $h(t) = 0$ el sistema (*) puede escribirse de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) \end{cases} \quad (1)$$

El sistema puede tener uno o más ciclos límites el cual dependerá de las características propias de la función $y = F(x)$, además. si el sistema tiene más de un ciclo límite entonces ellos están distribuidos de diferentes maneras dependiendo de los puntos singulares. Por ejemplo si la ecuación tiene tres ciclos límites, estas pueden estar distribuidos en uno de las cuatro formas. (ver figura 1)

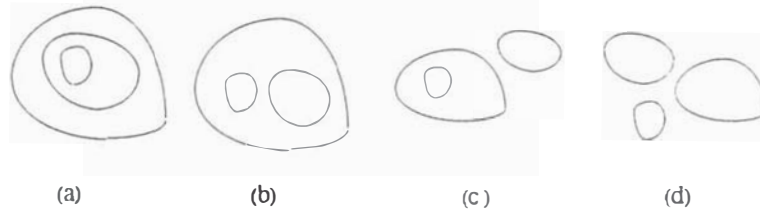


Figure 1:

Si consideramos que el sistema (1) tiene como único punto singular el origen $(0,0)$, y $f(x) = F'(x)$, y si n es el número de ceros positivos de $f(x)$ en un cierto intervalo $< 0, d >$. Se puede encontrar condiciones apropiadas

la función $y = F(x)$ de modo que el sistema (1) tenga exactamente n ciclos límites en la franja $|x| \leq d$ donde cada ciclo límite contenga en su interior al único punto singular del sistema.

En nuestro caso discutiremos la primera clase de distribución, es decir consideraremos ciclos concéntricos que contienen al único punto singular.

I. LA ECUACION DE VAN DER POL

Es un caso particular de la ecuación (*) tiene la forma:

$$x'' - \alpha(1 - x^2)x' + x = 0 \quad (1.1)$$

Donde α es una constante positiva. Si en la ecuación (1.1) hacemos $\tau = \alpha t$ se obtiene

$$\alpha^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} - \alpha^2(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad (1.2)$$

Escribimos esta ecuación como un sistema de dos ecuaciones, para lo cual sea $y = \int_0^x (1 - x^2) dx - \frac{dx}{d\tau}$ luego se tiene que $y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{dx}{d\tau}$, y si $\xi = \frac{1}{\alpha}$, y derivando respecto a τ , se tiene $\frac{dy}{d\tau} = (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} - \frac{d^2x}{d\tau^2}$, reemplazando en (1.2) se tiene:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \frac{dy}{d\tau} = \xi^2 x \end{cases} \quad (1.3)$$

Teorema 1.1[8,14]. *Para todo $\xi > 0$ ($\alpha > 0$) el sistema (1.3) (ó (1.1)) tiene uno y solo una solución periódica distinta de la trivial, esta solución es orbitalmente estable.*

Prueba:

Es facil observar que el único punto crítico del sistema (1.3) es el origen $(x, y) = (0, 0)$. El sistema lineal asociado a (1.3) tiene como matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \xi^2 & 0 \end{pmatrix}$ y su polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \xi^2$, cuyas raíces características son $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\xi^2}}{2}$, si $4\xi^2 < 1 \Rightarrow \lambda > 0$, si $4\xi^2 > 1 \Rightarrow \text{Re}(\lambda) > 0$, $\forall \xi > 0$. Entonces el origen es un atractor negativo (repulsor) $\forall \xi > 0$.(ver figura 2)

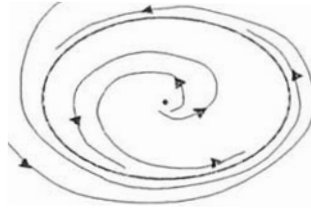


Figure 2:

Procedimiento:

Construimos en el plano fase una curva cerrada simple alrededor del origen tal que el campo vectorial (1.3) penetra a la región encerrada por la curva, entonces por el teorema 6 tendremos la existencia de una solución periódica. (ver figura 3)

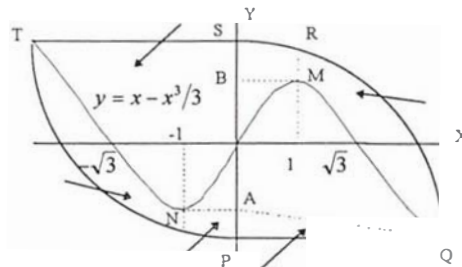


Figure 3:

Consideremos en el plano XY la función $\mathfrak{S} : y = x - \frac{x^3}{3}$ cuya gráfica corta al eje X en los puntos $(0, 0)$ y $(\pm\sqrt{3}, 0)$, además esta función \mathfrak{S} tiene un máximo absoluto (mínimo absoluto) en el intervalo $0 \leq x < +\infty$ ($-\infty < x < 0$) que se alcanza en $(1, \frac{2}{3})$ ($(-1, -\frac{2}{3})$). Apartir del punto A trazamos el segmento AQ con pendiente $-\xi$, se observa que cualquiera que sea $\xi > 0$ debe producirse la intersección Q con la gráfica de \mathfrak{S} , y sea $q > 0$ la abscisa de este punto. Sea PQ paralelo al eje X , en el segmento abierto PQ se tiene

que $\frac{dy}{d\tau} > 0$ entonces en este segmento el vector del campo (1.3) apunta de abajo hacia arriba.(ver figura 3)

Sea la función $y = x - \frac{x^3}{3} + \xi(q^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, cuando $1 \leq x \leq q$ cuya gráfica es la curva \widehat{QR} , cuyo vector tangente es $\mathbf{T} = (1, 1 - x^2 - \xi x(q^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}})$, el vector normal exterior es $\mathbf{N} = (x^2 - 1 + \xi x(q^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, 1)$ y el vector de campo del sistema (1.3) es $\mathbf{C} = \left(x - \frac{x^3}{3} - y, \xi^2 x\right)$ reemplazando el valor de y se tiene $\mathbf{C} = \left(\xi(q^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \xi^2 x\right)$. Donde el producto escalar de estos vectores $\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} = \xi(q^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - x^2)$, es negativo para $1 < x \leq q$, en consecuencia el vector de campo cruza de derecha a izquierda en el arco abierto \widehat{QR} .(ver figura 3).

Sea la función $y = \frac{2}{3} + \xi(q^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, para $0 \leq x \leq 1$ cuya gráfica es el arco \widehat{RS} , cuyo vector tangente es $\mathbf{T} = (1, -\xi x(q^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}})$ y el vector normal exterior es $\mathbf{N} = (\xi x(q^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, 1)$, el vector de campo de (1.3) es \mathbf{C} , luego de reemplazar el valor de y se tiene que $\mathbf{C} = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + \xi(q^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \xi^2 x\right)$. Donde el producto escalar $\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} = \xi x \left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\right) (q^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, para $0 \leq x \leq 1$, es negativo en este intervalo, en consecuencia el vector de campo cruza de arriba hacia abajo en el arco abierto \widehat{RS} .(ver figura 3)

Si tomamos \widehat{ST} y \widehat{TP} simétricos de \widehat{PQ} y \widehat{QS} respecto al origen, entonces la curva cerrada $P\widehat{QSTP}$ rodea el origen y salvo en algunos puntos aislados como P , el campo vectorial de (1.3) entra a la región encerrada por $P\widehat{QSTP}$ por la continuidad de (1.3). Entonces se satisface así las condiciones del teorema 6 y existe al menos una solución periódica en la región encerrada por $P\widehat{QSTP}$, dicha solución debe rodear al origen.

Probemos la unicidad.

Para probar la unicidad estudiemos la forma de la solución en el plano fase. Consideremos la trayectoria que sale del punto A (en el eje Y^+), en A se tiene que $\frac{dy}{d\tau} = 0$, $\frac{dx}{d\tau} < 0$, entonces la trayectoria cruza horizontalmente el eje Y entrando al segundo cuadrante. En este cuadrante mientras que la solución permanezca por encima de la curva \mathfrak{S} se tiene que $\frac{dy}{d\tau} < 0$, $\frac{dx}{d\tau} < 0$ por lo tanto llega a cortar a la curva \mathfrak{S} en algún punto como B , en este punto $\frac{dy}{d\tau} < 0$, $\frac{dx}{d\tau} = 0$ entonces la trayectoria corta a la curva verticalmente hacia abajo es decir el vector de campo en este punto es vertical hacia abajo, una vez debajo de la curva se tiene $\frac{dy}{d\tau} < 0$, $\frac{dx}{d\tau} > 0$, la trayectoria permanece debajo de la curva hasta llegar a un punto C del eje Y negativo donde $\frac{dy}{d\tau} = 0$, $\frac{dx}{d\tau} > 0$. De la simetría de la ecuación diferencial es inmediato ver que una condición necesaria y suficiente para que una órbita sea cerrada (periódica) es que $|\overline{OA}| = |\overline{OC}|$. Entonces para demostrar la unicidad bastará probar que la igualdad anterior vale solo para un punto A de Y positivo.

Para esto asociemos el número $P(A)$ como $P(A) = \int_{AC} (x - \frac{x^3}{3}) dy$, donde la integral es tomada a lo largo de la trayectoria entre A y C

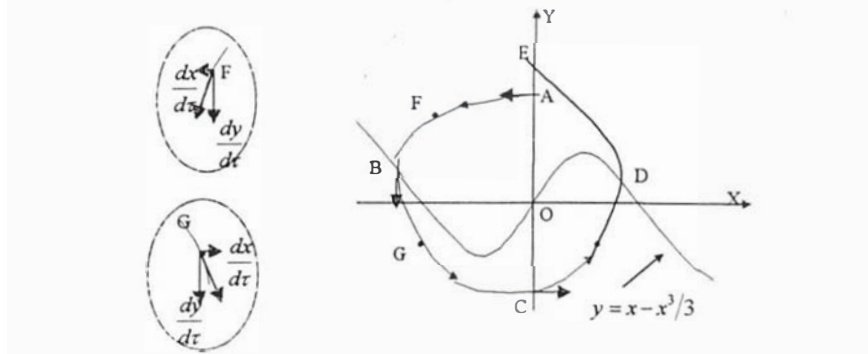


Figure 4:

en la expresión $\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\xi^2 x^2 + y^2) = \xi^2 x \frac{dx}{d\tau} + y \frac{dy}{d\tau}$ reemplazando $\frac{dx}{d\tau}$ y $\frac{dy}{d\tau}$ se tiene $\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\xi^2 x^2 + y^2) = \xi^2 x (x - \frac{x^3}{3})$, del sistema (1.3) $x - \frac{x^3}{3} = \frac{dx}{d\tau} - y$, además $dy = \xi^2 x d\tau$, entonces se tiene que:

$$P(A) = \int_{\widehat{AC}} (x - \frac{x^3}{3}) dy = \int_{\widehat{AC}} \xi^2 x (x - \frac{x^3}{3}) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\widehat{AC}} \frac{d}{d\tau} (\xi^2 x^2 + y^2) d\tau$$

$$P(A) = \frac{1}{2} [(OC)^2 - (OA)^2] \text{ entonces } |OC| = |OA| \iff P(A) = 0$$

Supongamos que el punto A sea tal que la trayectoria corta por primera vez a la curva \mathfrak{S} a la derecha de su intersección con el eje X (ver figura 5)

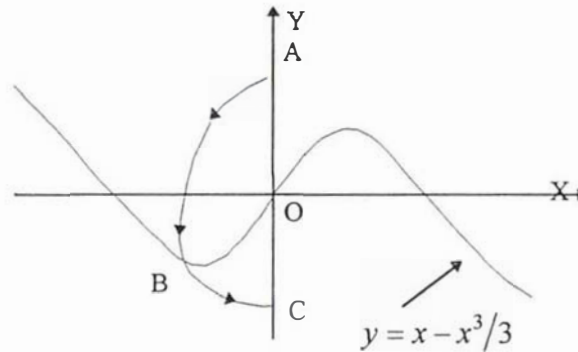


Figure 5:

veamos . $P(A) = \int_{\widehat{AC}} (x - \frac{x^3}{3}) dy$ en este caso $x - \frac{x^3}{3} < 0$ y $dy < 0$ en consecuencia $P(A) > 0$, esto es $|\overline{OC}| > |\overline{OA}|$ entonces por tal punto no puede pasar una solución periódica.

Supongamos ahora que la intersección B se produce a la izquierda del punto de corte de \mathfrak{S} con el eje X . (ver figura 6), entonces podemos escribir

$$P(A) = \int_{\widehat{AP}} + \int_{\widehat{QC}} + \int_{\widehat{PBQ}} .$$

Consideremos ahora el efecto de aumentar A, digamos a un punto A' (ver figura 6)

Para ello escribimos

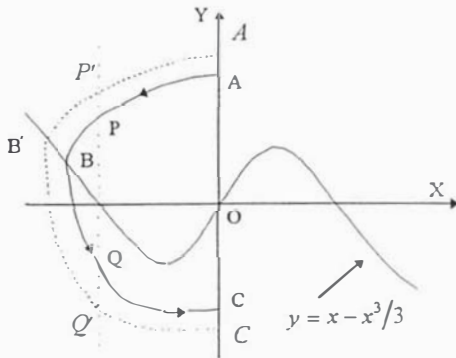


Figure 6:

$$\int (x - \frac{x^3}{3}) dy = \int (\frac{x - \frac{x^3}{3}}{x - \frac{x^3}{3} - y}) \xi^2 x dx.$$
 como $x - \frac{x^3}{3} < 0$, e $y_A < y_{A'}$, entonces se tiene $\int_{\widehat{AP}} + \int_{\widehat{QC}} > \int_{\widehat{A'P'}} + \int_{\widehat{Q'C'}}$, por otro lado $\int_{\widehat{PBQ}} < 0$ ya que en este tramo $x - \frac{x^3}{3} > 0$, $dy < 0$. Además $\int_{\widehat{P'B'Q'}} < \int_{\widehat{PBQ}}$. por lo tanto tenemos que $P(A) > P(A')$ y en consecuencia $P(A) = 0$. por lo tanto la órbita cerrada solo pasa por un punto A

II. INVESTIGACION DE LA SALLE

Dada la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (2.1)$$

con μ suficientemente pequeño, La Salle considera esta ecuación en su forma modificada

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - G'(x) \frac{dx}{d\tau} + \varepsilon^2 x = 0 \quad (2.2)$$

donde la variable t de (2.1) se ha reemplazado por $t = \frac{\tau}{\mu}$ y $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \frac{1}{\mu}$ y $G'(x) = -f(x)$. Expresando (2.2) como un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = G(x) - y \\ \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon^2 x \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde La Salle [3, 12] considera a $G(x)$ como una función que satisface las siguientes restricciones o condiciones

- a) $G'(x)$ continúa , $G(0) = 0$
- b) Existen puntos $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4$ tales que
 - i) $G(a_1) = G(a_3)$, $G(a_2) = G(a_4)$
 - ii) $G(a_2) \leq G(x) \leq G(a_3)$ para $a_1 \leq x \leq a_4$
 - iii) $G'(a_1) < 0$ y $G'(a_4) < 0$.

Una curva $\Delta : y = G(x)$ se muestra en la figura 7

Definamos las funciones $\Phi_a^+(x) = \max_{x \leq \sigma \leq a} \{G(\sigma)\}$, y $\Phi_a^-(x) = \min_{a \leq \sigma \leq x} \{G(\sigma)\}$, es posible construir una curva simple cerrada $\Gamma(a)$ formado por $\Phi_a^+(x)$, $\Phi_a^-(x)$, porciones de Δ y porciones de segmentos de líneas paralelos al eje X (ver

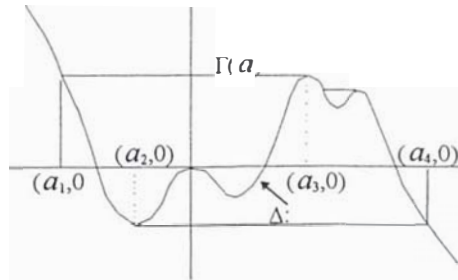


Figure 7:

figura 7). La letra a de $\Gamma(a)$ significa la dependencia de la curva sobre los parámetros a_1, a_2, a_3 y a_4 .

La Salle muestra que $\Gamma(a)$ es el ciclo límite para la ecuación(2.2) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Usando las restricciones anteriores para $G(x)$ es posible establecer la existencia de dos ciclos C_0 y C_1 , tal que C_0 contiene a C_1 y C_1 contiene al origen en su interior. Estos ciclos tienen la propiedad que si algún punto (supuesto) se mueve en la región o anillo $E(a, \varepsilon)$ limitado por C_0 y C_1 con el tiempo t_0 incrementándose este permanece en la región. Ya que el único punto singular para el sistema (2.2) es el origen y que no está en la región $E(a, \varepsilon)$ y por el teorema de Poincaré Bendixson la región $E(a, \varepsilon)$ es cíclico y este contiene al menos un ciclo límite además cuando $\varepsilon \rightarrow \infty, E(a, \varepsilon) \rightarrow \Gamma(a)$

Probemos la existencia de C_0 y C_1 .

Sea C una curva simple cerrada representada por

$$\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = \varphi(\theta) + g(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

cuyo vector normal es $\mathbf{n} = \left(\frac{dy}{d\theta}, -\frac{dx}{d\theta} \right)$ y el vector velocidad para el punto en movimiento de acuerdo a la ecuación (2.2) será $\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right) = (G(x) - y, \varepsilon^2 x)$.

Sea $\lambda = \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle$ el producto interno de \mathbf{v} y \mathbf{n} se tiene que

$$\lambda = (G(x) - \varphi(\theta) - g(x))(\varphi'(\theta) + g'(x)f'(\theta)) - \varepsilon^2 f(\theta)f'(\theta) \text{ luego } \lambda = \lambda(\theta),$$

nos interesa estudiar las curvas en las cuales $\lambda \geq 0$ y $\lambda \leq 0$ para lo cual consideremos ciertos casos especiales:

1) Consideremos $f(\theta) = \theta$, $g(x) = 0$, entonces $\lambda = (G(x) - \varphi(\theta))\varphi'(\theta) - \varepsilon^2 x$

a) Si $\varphi(\theta) = A$, tenemos que $\lambda = -\varepsilon^2 x$ y la curva C es $y = A$, de esto se obtiene que $\lambda \leq 0$ para $x \geq 0$ entonces el vector normal \mathbf{n} es paralelo al vector $(0, -1)$ (eje Y), las trayectorias para $x < 0$ cruzan las líneas horizontales desde abajo hacia arriba. Y cuando $\lambda > 0$ para $x \leq 0$ el vector normal \mathbf{n} es paralelo al vector $(0, 1)$ (eje Y) entonces las trayectorias cruzan la recta $y = A$ desde arriba hacia abajo.

b) Si $\varphi(x)\varphi'(x) + \varepsilon^2 x = A\varphi'(x)$, entonces C es la elipse $y = A \pm \varepsilon(c^2 - x^2)^{1/2}$
o $\frac{x^2}{c^2} + \frac{(y - A)^2}{\varepsilon^2 c^2} = 1$, con ejes c y εc , en este caso $\lambda = y'(G(x) - A)$
esto es $\lambda = \frac{\mp \varepsilon x}{(c^2 - x^2)^{1/2}} (G(x) - A)$.

En la mitad inferior de la elipse la normal sale de la elipse .

En la mitad superior de la elipse la normal entra a la elipse..

Si el eje horizontal de la elipse está por encima de la curva $\Delta : y = G(x)$ esto es $A > G(x)$ esto significa que para $x > 0$ se tiene que $\lambda > 0$ para la mitad superior y $\lambda < 0$ para la mitad inferior de la elipse.

Entonces la curva integral entra a la elipse para $x > 0$ y cuando $x < 0$ la curva integral sale de la elipse.

Si el eje horizontal de la elipse está por debajo de la curva $\Delta : y = G(x)$ Entonces la curva integral sale de la elipse para $x > 0$ y entra a la elipse para $x < 0$

2) Consideremos $f(\theta) = \theta$, $g(x) = \Phi_a^+(x)$, donde $\Phi_a^+(x) = \max_{x \leq \sigma \leq a} \{G(\sigma)\}$

a) Si $\varphi(x) \equiv 0$ y consideremos la porción de la curva C que está entre $0 \leq x \leq a$, por lo tanto se tiene que C es $y = \Phi_a^+(x)$, a lo largo de la curva se tiene $\frac{dy}{d\theta} = \frac{d\Phi_a^+(x)}{d\theta} \leq 0$ y $\lambda = -\xi^2 x$ usando la definición de $\Phi_a^+(x)$ y \mathbf{n} es paralelo al vector $(-1, -1)$.

b) Sea $\varphi(x) = \varepsilon(c^2 - x^2)^{1/2}$, consideremos la porción de C que está en el intervalo $0 \leq x \leq a$ tenemos que $C : y = \varepsilon(c^2 - x^2)^{1/2} + \Phi_a^+(x)$, a lo largo de esta curva, derivando respecto a θ se tiene $\frac{dy}{d\theta} = \frac{-\varepsilon x}{(c^2 - x^2)^{1/2}} + \frac{d}{d\theta} \Phi_a^+(x) \leq 0$, para $0 \leq x \leq a$ y además el vector \mathbf{n} es paralelo al vector $(-1, -1)$, y $\lambda = -\varepsilon(c^2 - x^2)^{1/2} \frac{d}{d\theta} \Phi_a^+(x) + \frac{\varepsilon x}{(c^2 - x^2)^{1/2}} + [\Phi_a^+(x) - G(x)]$, y $\lambda \geq 0$ para $x \geq 0$, por lo tanto la trayectoria cruza C de abajo hacia arriba

Así es posible construir dos curvas cerradas $C_0(a, \varepsilon)$ y $C_1(a, \varepsilon)$ donde C_0 contiene a C_1 y C_1 contiene el origen en su interior. (ver figura 8)

La curva interior $C_1(a, \varepsilon)$. Este será una curva cerrada con las curvas integrales cruzando $C_1(a, \varepsilon)$ desde su interior hacia su exterior, las trayectorias serán tangentes en solo un número finito de puntos. La curva $C_1(a, \varepsilon)$ será construido en cuatro partes como sigue:

a) Consideremos debajo de la curva $\Delta : y = G(x)$ y $x > 0$ (desde A hasta B). Trazamos desde $A(0, G(a_2))$ el segmento de recta L_1 con pendiente ε . La primera intersección de L_1 con Δ lo llamamos $B(b, G(b))$. Para

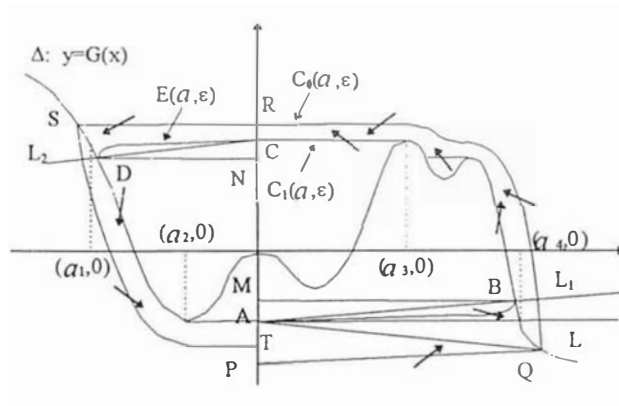


Figure 8:

ϵ suficientemente pequeño tomamos la línea horizontal desde B a M debajo de Δ y $b > a_3$.

$$C_1(a, \epsilon) : y = G(b) - \epsilon(b^2 - x^2)^{1/2}, \text{ para } 0 < x \leq b$$

es decir la porción de una elipse con centro en M y semiejes MB y MA , variando entre A y B debajo de MB .

La curva deseada queda definida como en el caso especial 1(b)

b) Arriba, a lo largo de la curva Δ y $x > 0$ (desde B hasta C)

$$C_1(a, \epsilon) : y = \Phi_b^+(x) \text{ para } 0 < x < b$$

esta curva está considerado en el caso 2(a)

c) Arriba de la curva $\Delta : y = G(x)$ y $x \leq 0$ (desde C hasta D). Trazamos desde $C(0, G(a_3))$ el segmento de recta L_2 con pendiente ϵ . La primera intersección de L_2 con Δ lo llamamos $D(d, G(d))$. Para ϵ suficientemente pequeño tomamos la línea horizontal desde B a M debajo de Δ y $b > a_3$.

$$C_1(a, \epsilon) : y = G(d) + \epsilon(d^2 - x^2)^{1/2}, \text{ para } d < x < 0$$

es decir la porción de una elipse con centro en M y semiejes DN y NC ,

variando entre D y C arriba de DN .

La curva deseada queda definida como en el caso especial 1(b)

d) Abajo , a lo largo de la curva Δ y $x \leq 0$ (desde D hasta A)

$$C_1(a, \varepsilon) : y = \Phi_b^-(x) \text{ para } d < x \leq 0$$

esta curva está considerado en el caso 2(a)

Por tanto de las partes a), b), c) y d) se define completamente la curva cerrada interior apropiada.

La curva exterior $C_0(a, \varepsilon)$. Este será una curva cerrada con las curvas integrales cruzando $C_0(a, \varepsilon)$ desde su exterior hacia su interior, las trayectorias serán tangentes en solo un número finito de puntos. La curva $C_0(a, \varepsilon)$ será construido en cinco partes como sigue:

a) Consideremos debajo de la curva $\Delta : y = G(x)$ y $x \geq 0$ (desde P hasta Q). Trazamos desde $A(0, G(a_2))$ el segmento de recta L con pendiente $-\varepsilon$. Para ε suficientemente pequeño L intersecta a la curva Δ en $Q(q, G(q))$.

$$C_0(a, \varepsilon) : y = G(q) , \text{ para } 0 < x \leq q$$

La curva deseada queda definida como en el caso especial 1(a)

b) Arriba , a lo largo de la curva Δ y $x \geq 0$ (desde Q hasta R)

$$C_0(a, \varepsilon) : y = \Phi_b^+(x) + \varepsilon(d^2 - x^2)^{1/2} , \text{ para } 0 < x < q$$

esta curva está considerado en el caso 2(b)

c) Arriba de la curva $\Delta : y = G(x)$ y $x \leq 0$ (desde R hasta S). Trazamos desde R el segmento de recta con pendiente ε . Para ε suficientemente pequeño la recta intersecta a la curva Δ en $S(s, G(s))$. Supongamos

que $RS < PQ$ (si $RS > PQ$, en este caso en vez de comenzar de A la construcción comenzamos de C). Tomamos:

$$C_0(a, \varepsilon) : y = G(a_3) + \varepsilon q, \quad \text{para } s < x \leq 0$$

es decir la porción de una elipse con centro en M y semiejes DN y NC , variando entre D y C arriba de DN .

La curva deseada queda definida como en el caso especial 1(b)

d) Debajo de la curva Δ y $x \leq 0$ (desde S hasta T)

$$C_0(a, \varepsilon) : y = \Phi_s^-(x) - \varepsilon (s^2 - x^2)^{1/2}, \quad \text{para } s < x \leq 0$$

donde $T = (0, G(a_2) + \varepsilon s)$, y $P = (0, G(a_2) - \varepsilon q)$.

e) A lo largo de $y = 0$ (desde T hasta P) La curva es cerrada por el segmento de línea vertical desde T hasta P . puesto que $|s| < |q|$, T se encuentra entre A y P .

Luego de las partes a), b), c), d) y e) queda definida completamente la curva cerrada exterior apropiada.

Siendo esta una región de Poincaré por lo tanto la región así formada contiene un ciclo límite.

III. EXISTENCIA DE n CICLOS LIMITES

Sea la ecuación:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

En la siguiente discusión asumiremos que $F(x) \in C^1$, $F(0) = 0$, $g(x) \in C$ y $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$. Es fácil ver que $(0, 0)$ es un único punto singular de la ecuación (3.1). Consideremos $F'(x) = f(x)$ y $G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi$. Presentamos el primer resultado[15, 16, 17]:

Lema 3.1 .Supongamos que existen constantes a, a', b y b' donde $b' < a' < 0 < a < b$, tal que las siguientes condiciones se cumplen:

- 1) $F(x) \geq F(a)$, $0 \leq x \leq a$ y $F(x)$ es monótonamente no creciente en $[a, b]$
- 2) $F(x) \leq F(a')$, $a' \leq x \leq 0$ y $F(x)$ es monótonamente no creciente en $[b', a']$
- 3) $F \neq 0$ con $a' \leq x \leq a$.

Entonces en la franja $b' \leq x \leq b$ el sistema (3.1) tiene a lo más un ciclo límite el cual intersecta a las líneas $x = a$ y $x = a'$.

Prueba:

Supongamos que en la banda $b' \leq x < b$ se tiene dos ciclos límites $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ las cuales intersectan a las líneas $x = a$ y $x = a'$.(ver figura 9) donde Γ_1 intersecta a la curva $y = F(x)$ en P_1 y P'_1 , supongamos $y_{P_1} = -N$ e $y_{P'_1} = M$ sea:

$$\lambda_1(x, y) = \frac{1}{2} (y + N)^2 + G(x)$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{1}{2} (y - M)^2 + G(x)$$

y sea $\lambda_i(x, y) = \lambda_i(A)$, donde (x, y) son las coordenadas de A . Las derivadas totales de $\lambda_1(x, y)$ y $\lambda_2(x, y)$ a lo largo de la trayectoria de (3.1)

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -g(x) [N + F(x)] \quad (\alpha)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = g(x) [M - F(x)] \quad (\beta)$$

de la condición 2) vemos que $F(x) \leq M$ con $x_{P'_1} \leq x \leq 0$ y $F(x) \geq M$ con $b' \leq x \leq x_{P'_1}$, inspeccionamos la parte de Γ_1 y Γ_2 en el semiplano izquierdo (ver figura 9)

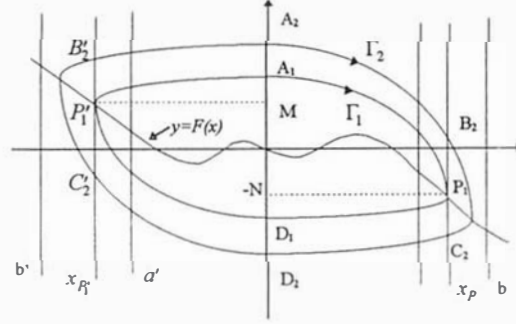


Figure 9:

donde se obtiene:

$$\int_{\widehat{B'_2 A_2}} d\lambda_2 = \int_{\widehat{B'_2 A_2}} \frac{g(x) [M - F(x)]}{y - F(x)} dx \geq \int_{\widehat{P'_1 A_1}} \frac{g(x) [M - F(x)]}{y - F(x)} dx = \int_{\widehat{P'_1 A_1}} d\lambda_2$$

$$, \int_{\widehat{D_2 C'_2}} d\lambda_2 = \int_{\widehat{D_2 C'_2}} \frac{g(x) [M - F(x)]}{y - F(x)} dx \geq \int_{\widehat{D_1 P'_1}} \frac{g(x) [M - F(x)]}{y - F(x)} dx = \int_{\widehat{D_1 P'_1}} d\lambda_2,$$

$$\text{y } \int_{\widehat{C'_2 B'_2}} d\lambda_2 = \int_{\widehat{C'_2 B'_2}} g(x) [M - F(x)] dt = \int_{\widehat{C'_2 B'_2}} -[M - F(x)] dy \geq 0. \text{ de estas tres relaciones se tiene que :}$$

$$\int_{\widehat{B'_2 A_2}} d\lambda_2 + \int_{\widehat{D_2 C'_2}} d\lambda_2 + \int_{\widehat{C'_2 B'_2}} d\lambda_2 \geq \int_{\widehat{P'_1 A_1}} d\lambda_2 + \int_{\widehat{D_1 P'_1}} d\lambda_2, \text{ luego de integrar y evaluar se tiene:}$$

$$\lambda_2(A_2) - \lambda_2(D_2) \geq \lambda_2(A_1) - \lambda_2(D_1)$$

$$(y_{A_2} - M)^2 - (y_{D_2} - M)^2 \geq (y_{A_1} - M)^2 - (y_{D_1} - M)^2 \quad (*)$$

Similarmente de la condición 1) $F(x) \geq -N$ con $0 \leq x < x_{P_1}$ y $F(x) \leq -N$ con $x_{P_1} \leq x < b$, inspeccionamos la parte de Γ_1 y Γ_2 en el semiplano derecho se tiene:

$$\int_{\widehat{A_2B_2}} d\lambda_1 = \int_{\widehat{A_2B_2}} \frac{-g(x) [N + F(x)]}{y - F(x)} dx \geq \int_{\widehat{A_1P_1}} \frac{-g(x) [N + F(x)]}{y - F(x)} dx = \int_{\widehat{A_1P_1}} d\lambda_1,$$

$$\int_{\widehat{C_2D_2}} d\lambda_1 = \int_{\widehat{C_2D_2}} \frac{-g(x) [N + F(x)]}{y - F(x)} dx \geq \int_{\widehat{P_1D_1}} \frac{-g(x) [N + F(x)]}{y - F(x)} dx = \int_{\widehat{P_1D_1}} d\lambda_1,$$

y $\int_{\widehat{B_2C_2}} d\lambda_1 = \int_{\widehat{B_2C_2}} -g(x) [N + F(x)] dt = \int_{\widehat{B_2C_2}} [N + F(x)] dy \geq 0$, luego de estas tres relaciones se tiene que:

$$\int_{\widehat{A_2B_2}} d\lambda_1 + \int_{\widehat{C_2D_2}} d\lambda_1 + \int_{\widehat{B_2C_2}} d\lambda_1 \geq \int_{\widehat{A_1P_1}} d\lambda_1 + \int_{\widehat{P_1D_1}} d\lambda_1, \text{ luego de integrar y evaluar se tiene:}$$

$$\lambda_1(D_2) - \lambda_1(A_2) \geq \lambda_1(D_1) - \lambda_1(A_1)$$

$$(y_{D_2} + N)^2 - (y_{A_2} + N)^2 \geq (y_{D_1} + N)^2 - (y_{A_1} + N)^2 \quad (**)$$

sumando las expresiones (*) y (**), simplificando se tiene:

$2(M + N)(y_{A_1} - y_{A_2}) > 2(M + N)(y_{D_1} - y_{D_2})$, de la condición 3) $F \neq 0$, $(M + N) \geq 0$ como $y_{A_1} - y_{A_2} < 0$ entonces $0 > y_{D_1} - y_{D_2}$, esto es una contradicción ($\rightarrow \leftarrow$). pues $y_{D_1} - y_{D_2} > 0$ por lo tanto el lema está probado.

Lema 3.2 .Supongamos que existen constantes a, a', b y b' donde $b' < a' < 0 < a < b$, tal que las siguientes condiciones se cumplen:

- 1) $F(x) \leq F(a)$, $0 \leq x \leq a$ y $F(x)$ es monótonamente no decreciente en $[a, b]$
- 2) $F(x) \geq F(a')$, $a' \leq x \leq 0$ y $F(x)$ es monótonamente no decreciente en $[b', a']$
- 3) $F \neq 0$ con $a' \leq x < a$.

Entonces en la franja $b' \leq x < b$ el sistema (3.1) tiene a lo más un ciclo límite el cual intersecta a las líneas $x = a$ y $x = a'$.

Prueba:

La prueba de este lema es similar al lema anterior, solo consideraremos las funciones $\lambda_i(x, y), i = 1, 2$ del siguiente modo:

$$\lambda_1(x, y) = \frac{-1}{2} (y + N)^2 - G(x)$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{-1}{2} (y - M)^2 - G(x)$$

y el proceso es similar al caso anterior.

Lema 3.3 .Supongamos que existen constantes $N \geq 0, a > 0$ y $b' < 0$ tal que:

$$1) F(x) \geq -N, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$2) F(b') \leq -N - \sqrt{2G(a)}$$

Entonces el ciclo límite de (3.1) el cual intersecta la línea $x = b'$ intersecta también la línea $x = a$.

Prueba:

Sea la trayectoria que se inicia desde $A(a, -N)$ con t incrementándose e intersecta el eje Y en A' y sea la trayectoria que empieza desde $B(b', F(b'))$ cuando t decrece intersecta al eje negativo Y en B' , de las condiciones conocemos que $y_{A'} \geq -N - \sqrt{2G(a)}$ y $y_{B'} < y_B = F(b')$, entonces $y_{B'} < y_{A'}$ i.e. B' es inferior a A' de esto se tiene el lema.(ver figura10)

Otra forma de probar el lema

La trayectoria se inicia en $A(a, -N)$ con t incrementándose:

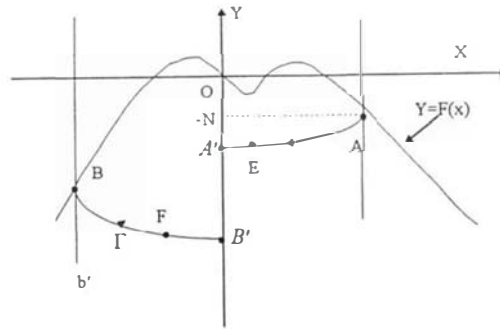


Figure 10:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - F(x) < 0 \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) < 0 \end{array} \right. , \quad \left(\begin{array}{c} \text{dx} \\ \text{dy} \end{array} \right) \text{ si } x = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y < 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Γ intersecta al eje Y negativo en A'

La trayectoria se inicia en $B(b', F(b'))$ con t decreciendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -(y - F(x)) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) < 0 \end{array} \right. , \quad \left(\begin{array}{c} \text{dx} \\ \text{dy} \end{array} \right) \text{ si } x = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} > 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Γ intersecta al eje Y negativo en B'

De la condición 1) y 2) vemos que $y_{B'} < y_B = F(b') \leq -N - \sqrt{2G(a)} < y_{A'}$

entonces $y_{B'} < y_{A'}$ i.e. B' es inferior a A' . De esto se tiene el Lema

La prueba de los siguientes lemas son similares a la anterior

Lema 3.4 .Supongamos que existen constantes $M \geq 0, a > 0$ y $b' < 0$ tal

que:

$$1) F(x) \leq M, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$2) F(b') \geq M + \sqrt{2G(a)}.$$

Entonces el ciclo límite de (3.1) el cual intersecta la línea $x = b'$ intersecta también la línea $x = a$.

Lema 3.5 .Supongamos que existen constantes $N \geq 0, a' < 0$ y $b > 0$ tal que:

$$1) F(x) \geq -N, \quad a' \leq x \leq 0$$

$$2) F(b) \leq -N - \sqrt{2G(a')}$$

Entonces el ciclo límite de (3.1) el cual intersecta la línea $x = b$ intersecta también la línea $x = a'$.

Lema 3.6 .Supongamos que existen constantes $M \geq 0, a' < 0$ y $b > 0$ tal que:

$$1) F(x) < M, \quad a' \leq x \leq 0$$

$$2) F(b) > M + \sqrt{2G(a')}$$

Entonces el ciclo límite de (3.1) el cual intersecta la línea $x = b$ intersecta también la línea $x = a'$.

Teorema 3.1 .Supongamos que en el sistema (3.1), $F(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones:

$$1) F(-x) = -F(x) \quad y \quad g(-x) = -g(x)$$

2) En el intervalo $\langle 0, b \rangle$, $f(x)$ tiene a lo más n ceros:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1} \quad y \quad F(\alpha_0) = 0, \quad F(\alpha_1) < 0 \quad y \\ F(\alpha_k) \cdot F(\alpha_{k+1}) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{donde } \alpha_0 = 0, \quad \alpha_{n+1} = b$$

$$3) (-1)^k F(\alpha_k) < (-1)^k F(\alpha_{k+2}) \quad y$$

$$(-1)^{k+1} F(\alpha_{k+1}) \geq (-1)^k F(\alpha_k) + \sqrt{2G(\beta_{k+1})} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-1$$

donde $\beta_{k+1} \in \langle \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2} \rangle$ y $F(\beta_{k+1}) = F(\alpha_k)$.

Entonces en la franja $|x| \leq b$, el sistema 3.1 tiene a lo más n ciclos límites.

Prueba

Dado que $F(x)$ y $g(x)$ son funciones impares la trayectoria del sistema (3.1) es simétrico respecto al origen, de las condiciones del teorema.

Sabemos que

$$\begin{cases} (-1)^{k+1}F(x) \text{ es monótonamente creciente cuando } x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}] \\ (-1)^k F(x) \geq (-1)^k F(\beta_k), x \in [0, \beta_k], \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \dots\dots\dots (*)$$

$\beta_1 \in [\alpha_1, \alpha_2]$ y $F(\beta_1) = 0$. Además sabemos que $F(x)$ es la integral de $f(x)$, ó $F'(x) = f(x)$, cada raíz α_i es un extremo relativo de $F(x) \forall i = 1, \dots, n$

Veamos:

De la condición 2) las n raíces de $f(x)$ y de la condición 3) se tiene

$$(-1)^k F(\alpha_k) < (-1)^k F(\alpha_{k+2}) \text{ esto es:}$$

$$0 > F(\alpha_1) > F(\alpha_3) > \dots > F(\alpha_n)$$

$$0 < F(\alpha_2) < F(\alpha_4) < \dots < F(\alpha_{n-1}) \text{ para } (k = 1, 2, \dots, n - 1) \quad \text{y}$$

$$F(\alpha_2) \geq -F(\alpha_1) + \sqrt{2G(\beta_2)}, \quad F(\alpha_3) \geq -F(\alpha_2) - \sqrt{2G(\beta_3)}, \quad F(\beta_2) = F(\alpha_1),$$

$$\beta_2 \in \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle$$

$$F(\alpha_4) \geq -F(\alpha_3) + \sqrt{2G(\beta_4)}, \quad F(\alpha_5) \geq -F(\alpha_4) - \sqrt{2G(\beta_5)}, \quad F(\beta_3) = F(\alpha_2),$$

$$\beta_3 \in \langle \alpha_3, \alpha_4 \rangle$$

así sucesivamente, luego utilizando los cuatro lemas anteriores para cada caso y usando uno de los criterios para la prueba del teorema de Van Der Pol es facil ver que para $|x| \leq \beta$, $\beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ el sistema (3.1) no tiene ciclos límites. De (*) , de la condición 3) y de los 4 lemas 3.1 – 3.4 sabemos que (3.1) tiene a

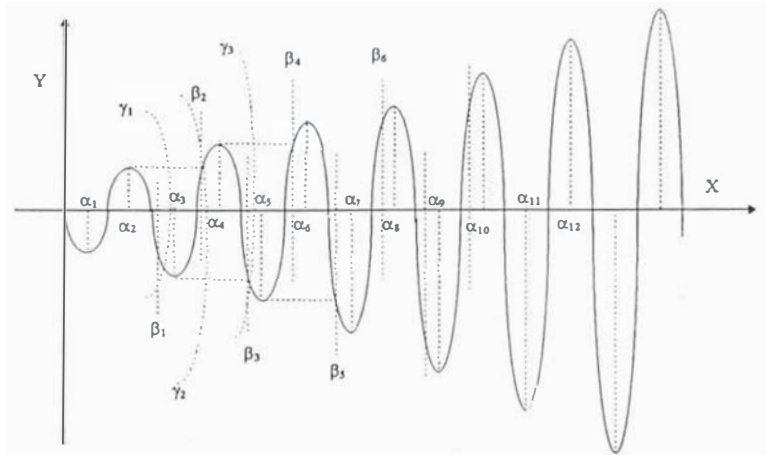


Figure 11:

lo más un ciclo límite en la franja $|x| \leq \alpha_2$. Algún ciclo límite que interseca la línea $x = \alpha_k$ también interseca la línea $x = -\beta_k$, ($k = 2, \dots, n - 1$) y en la franja $|x| \leq \alpha_{k+1}$ existe a lo más un ciclo límite que puede intersecar a $x = \alpha_k$. Así vemos que en la franja $|x| \leq b$ existe a lo más n ciclos límites para el sistema 3.1.(ver figura 11)

Para los siguientes lemas consideremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -x - f(x)v \end{cases} \quad (3.2)$$

Se obtiene información de [15, 16, 17]

Lema 3.7 .Supongamos que existen constantes $0 \leq \alpha < \varepsilon < \beta$, tal que:

1) $F(\alpha) = F(\beta)$, y

2) $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) , $x \in \langle \alpha, \varepsilon \rangle$, y $f(x) < 0$ ($f(x) > 0$) , $x \in \langle \varepsilon, \beta \rangle$

entonces a lo largo del arco S (algún arco S) de la trayectoria del sistema (3.2), en la franja $\alpha < x \leq \beta$, $v = v(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, se tiene:

$$\int_S (-f(x))dt > 0 \quad , \quad \left(\int_S (-f(x))dt < 0 \right)$$

Prueba:

Para la prueba consideremos el caso fuera del paréntesis, esto es:

$$\begin{cases} f(x) > 0, & x \in \langle \alpha, \varepsilon \rangle \\ f(x) < 0, & x \in \langle \varepsilon, \beta \rangle \end{cases} \implies \int_S (-f(x))dt > 0.$$

Sea $z = F(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ y $F(\alpha) = a = F(\beta)$, $F(\varepsilon) = b$, de la condición

2) $F(x)$ tiene inversa, sea:

$$x = x_1(z) \in [\alpha, \varepsilon] \quad ; \quad x_1(a) = \alpha \quad , \quad x_1(b) = \varepsilon$$

$$x = x_2(z) \in [\varepsilon, \beta] \quad ; \quad x_2(a) = \beta \quad , \quad x_2(b) = \varepsilon$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_S f(x)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{v(x)} dx = \int_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{f(x)}{v(x)} dx + \int_{\varepsilon}^{\beta} \frac{f(x)}{v(x)} dx \\ &= \int_a^b \frac{dz}{v(x_1(z))} + \int_b^a \frac{dz}{v(x_2(z))} \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{v(x_1(z))} - \frac{1}{v(x_2(z))} \right) dz \\ &< 0 \end{aligned}$$

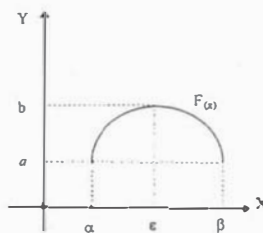


Figure 12:

por lo tanto: $\int_S -f(x)dt > 0$.

De igual forma se pueden probar los siguientes lemas:

Lema 3.8 .Supongamos que existen constantes $\alpha < \varepsilon < \beta \leq 0$, tal que:

1) $F(\alpha) = F(\beta)$, y

2) $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) , $x \in \langle \alpha, \varepsilon \rangle$, y $f(x) < 0$ ($f(x) > 0$) , $x \in \langle \varepsilon, \beta \rangle$

entonces a lo largo del arco S (algún arco S) de la trayectoria del sistema (3.2), en la franja $\alpha < x \leq \beta$, $v = v(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, se tiene:

$$\int_S (-f(x))dt < 0 \quad , \quad \left(\int_S (-f(x))dt > 0 \right)$$

Lema 3.9 .Si las condiciones del lema 3.7 se cumplen, entonces a lo largo de dos arcos $S_1 : v = v_1(x)$ y $S_2 : v = v_2(x)$, $v_2(x) > v_1(x) \geq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ de algún par de trayectorias del sistema (3.2), en la franja $\alpha \leq x \leq \beta$, se tiene:

$$\int_{S_1} (-f(x))dt > \int_{S_2} (-f(x))dt \quad , \quad \left(\int_{S_1} (-f(x))dt < \int_{S_2} (-f(x))dt \right)$$

Prueba:

Para la prueba consideremos el caso fuera del paréntesis, esto es:

$$\begin{cases} f(x) > 0, & x \in \langle \alpha, \varepsilon \rangle \\ f(x) < 0, & x \in \langle \varepsilon, \beta \rangle \end{cases} \implies \int_{S_1} (-f(x))dt > \int_{S_2} (-f(x))dt$$

De la prueba del lema 3.7 se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} (-f(x))dt - \int_{S_2} (-f(x))dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{v_1(x_2(z))} - \frac{1}{v_1(x_1(z))} \right) dz - \int_a^b \left(\frac{1}{v_2(x_2(z))} - \frac{1}{v_2(x_1(z))} \right) dz \\ &= \int_a^b \left[\left(\frac{1}{v_1(x_2(z))} - \frac{1}{v_2(x_2(z))} \right) - \left(\frac{1}{v_1(x_1(z))} - \frac{1}{v_2(x_1(z))} \right) \right] dz \end{aligned}$$

veamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(v_2(x) - v_1(x)) &= \frac{d}{dx}v_2(x) - \frac{d}{dx}v_1(x) \\ &= -\frac{x}{v_2(x)} - f(x) + \frac{x}{v_1(x)} + f(x) \end{aligned}$$

integrando ambos miembros

$$\int \frac{d}{dx}(v_2(x) - v_1(x)) = \int \left(-\frac{x}{v_2(x)} + \frac{x}{v_1(x)} \right) dx > 0$$

por lo tanto se tiene

$$\int_{S_1} (-f(x))dt > \int_{S_2} (-f(x))dt$$

Lema 3.10 .Si las condiciones del lema 3.8 se cumplen, entonces a lo largo de dos arcos $S_1 : v = v_1(x)$ y $S_2 : v = v_2(x)$, $v_2(x) > v_1(x) \geq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ de algún par de trayectorias del sistema (3.2), en la franja $\alpha \leq x \leq \beta$, se tiene:

$$\int_{S_1} (-f(x))dt < \int_{S_2} (-f(x))dt \quad , \quad \left(\int_{S_1} (-f(x))dt > \int_{S_2} (-f(x))dt \right)$$

Prueba:

Para la prueba consideremos el caso fuera del paréntesis, esto es:

$$\begin{cases} f(x) > 0, & x \in \langle \alpha, \varepsilon \rangle \\ f(x) < 0, & x \in \langle \varepsilon, \beta \rangle \end{cases} \implies \int_{S_1} (-f(x))dt < \int_{S_2} (-f(x))dt$$

De la prueba del lema 3.7 se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} (-f(x))dt - \int_{S_2} (-f(x))dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{v_1(x_2(z))} - \frac{1}{v_1(x_1(z))} \right) dz - \int_a^b \left(\frac{1}{v_2(x_2(z))} - \frac{1}{v_2(x_1(z))} \right) dz \\ &= \int_a^b \left[\left(\frac{1}{v_1(x_2(z))} - \frac{1}{v_2(x_2(z))} \right) - \left(\frac{1}{v_1(x_1(z))} - \frac{1}{v_2(x_1(z))} \right) \right] dz \end{aligned}$$

veamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(v_2(x) - v_1(x)) &= \frac{d}{dx}v_2(x) - \frac{d}{dx}v_1(x) \\ &= -\frac{x}{v_2(x)} - f(x) + \frac{x}{v_1(x)} + f(x) \end{aligned}$$

integrando ambos miembros

$$\int \frac{d}{dx}(v_2(x) - v_1(x)) = \int \left(-\frac{x}{v_2(x)} + \frac{x}{v_1(x)} \right) dx < 0$$

por lo tanto se tiene

$$\int_{S_1} (-f(x))dt < \int_{S_2} (-f(x))dt$$

Lema 3.11 Supongamos que $f(x) \leq 0$ ($f(x) \geq 0$), $f \neq 0$ entonces a lo largo de dos arcos $S_1 : v = v_1(x)$ y $S_2 : v = v_2(x)$, $v_2(x) > v_1(x) \geq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ de algún par de trayectorias del sistema (3.2), en la franja $\alpha \leq x \leq \beta$, se tiene:

$$\int_{S_1} (-f(x))dt > \int_{S_2} (-f(x))dt \quad , \quad \left(\int_{S_1} (-f(x))dt < \int_{S_2} (-f(x))dt \right)$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} -f(x)dt - \int_{S_2} -f(x)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{-f(x)}{v_1(x)} dx - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{v_2(x)} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \left(\frac{1}{v_1(x)} - \frac{1}{v_2(x)} \right) dz \\ &> 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{S_1} (-f(x))dt > \int_{S_2} (-f(x))dt.$$

Lema 3.12 Supongase que cuando $0 < \alpha < x \leq \beta$

- 1) $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) y
- 2) $f(x)$ es monótonamente no decreciente (no creciente), entonces a lo largo de dos arcos de trayectorias γ_i ($i = 1, 2$) del sistema (3.2), pasan por los puntos $(\beta_i^*, 0)$ ($i = 1, 2$) e intersecta la línea $x = \alpha$ dos veces, se tiene:

$$\int_{\gamma_1} (-f(x))dt > \int_{\gamma_2} (-f(x))dt \quad , \quad \left(\int_{\gamma_1} (-f(x))dt < \int_{\gamma_2} (-f(x))dt \right)$$

donde $\alpha < \beta_1^* < \beta_2^* < \beta$

Prueba:

Problemos el caso fuera del paréntesis:

$$f(x) \text{ es monótonamente no decreciente} \implies \int_{\gamma_1} (-f(x))dt > \int_{\gamma_2} (-f(x))dt$$

$$\text{sea } \gamma_1 = \widehat{A_1B_1}, \quad \gamma_2 = \widehat{AA_2} \cup \widehat{A_2B_2} \cup \widehat{B_2B}$$

de la condición 1) tenemos $\int_{\widehat{AA_2} \cup \widehat{B_2B}} (-f(x))dt < 0$, en el sistema (3.2) hacemos la transformación

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ v = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases} \text{ se tiene } \begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} = -\rho \operatorname{sen}^2 \theta f(\rho \cos \theta) \\ \frac{dv}{d\theta} = -1 - \rho \cos \theta \operatorname{sen} \theta f(\rho \cos \theta) \end{cases}$$

de la condición 2) vemos que el arco $\widehat{A_1B_1}$ puede ser expresado como:

$$\rho = \rho_i(\theta), \quad i = 1, 2$$

$$\rho_1(\theta) < \rho_2(\theta), \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (\text{ver figura 13})$$

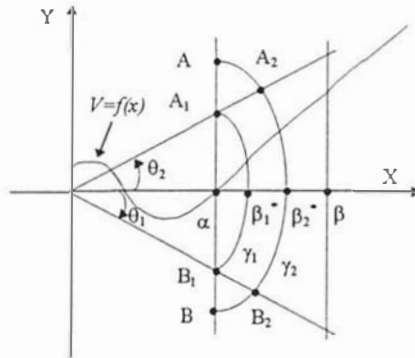


Figure 13:

Así se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{A_2B_2}} (-f(x))dt - \int_{\widehat{A_1B_1}} (-f(x))dt \\ &= \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{-f(\rho_2 \cos \theta) d\theta}{-1 - \rho_2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta f(\rho_2 \cos \theta)} - \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{-f(\rho_1 \cos \theta) d\theta}{-1 - \rho_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta f(\rho_1 \cos \theta)} \\ &= \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{-(f(\rho_2 \cos \theta) - f(\rho_1 \cos \theta)) d\theta}{(1 + \rho_2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta f(\rho_2 \cos \theta))(1 + \rho_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta f(\rho_1 \cos \theta))} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene:

$$\int_{\widehat{AA_2 \cup B_2 B}} (-f(x))dt + \int_{\widehat{A_2 B_2}} (-f(x))dt - \int_{\widehat{A_1 B_1}} (-f(x))dt < 0$$

$$\implies \int_{\gamma_2} (-f(x))dt - \int_{\gamma_1} (-f(x))dt < 0 \text{ por lo tanto el lema a sido probado.}$$

Teorema 3.2 .Supongase que cuando $x \in \langle -d, d \rangle$ las siguientes condiciones se cumplen:

- 1) $f(-x) = f(x)$
- 2) , $f(x)$ tiene solo ceros positivos α_1 y α_2 , $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < d$
- 3) $F(\alpha_1) > 0$ y $F(\alpha_2) < 0$
- 4) $f(x)$ es monótonamente creciente $x \in [\alpha_2, d]$

Entonces el sistema (3.2) tiene a lo más dos ciclos límites en la franja $|x| < d$.

Prueba:

El sistema (3.2), en la franja $|x| < d$. dado que $f(x)$ es una función par ($F(x)$ es impar) la trayectoria cerrada de (3.2) es simétrico respecto al origen . Sea β el cero mas pequeño de $F(x)$ ($\alpha_1 < \beta < \alpha_2$). Es facil ver que el sistema (3.2) no tiene ciclos límites en la franja $|x| \leq \beta$. Además $f(x) < 0$, $x \in \langle \beta, \alpha_2 \rangle$, luego de los lemas 3.7 y 3.8, si (3.2) tiene un ciclo límite en la franja $|x| \leq \alpha_2$ entonces este será un único ciclo inestable.

Por otra parte de los lemas 3.9 – 3.12 sabemos que si el sistema (3.2) tiene dos ciclos límites $L_1 \subset L_2$ ambos intersectan la línea $x = \alpha_2$, entonces

$$\oint_{L_1} -f(x)dt > \oint_{L_2} -f(x)dt \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

De esto conocemos que el sistema (3.2) no tiene ciclos compuestos y ciclos periódico

Dividimos la discusión en dos casos:

I) En la franja $|x| < \alpha_2$, el sistema (3.2) tiene un ciclo límite inestable L_1 .

Si existe un ciclo límite de (3.2) intersectando la línea $x = \alpha_2$, asumamos que el ciclo más próximo a L_1 es $L_2 (\supset L_1)$ entonces L_2 será internamente estable. En lo siguiente probamos que L_2 es externamente estable de otra manera L_2 sería internamente estable pero externamente inestable por ende sería un ciclo semiestable.

Examinemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -x - (f(x) + a\gamma(x))v \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $a > 0$, $\gamma(x) = 0$, cuando $|x| < \alpha_2$ y $\gamma(x) = (|x| - \alpha_2)^2$ cuando $\alpha_2 \leq |x| < d$.

De la teoría de campos vectoriales sabemos que cuando un sistema es perturbado, con a suficientemente pequeño, el sistema (3.2) tiene dos ciclos $L_2^{(1)} \subset L_2^{(2)}$ en la franja $|x| < d$ los cuales intersectan la línea $x = \alpha_2$ tal que

$$\oint_{L_2^{(2)}} -f_1(x) dt \geq 0, \quad \oint_{L_2^{(1)}} -f_1(x) dt \leq 0$$

donde $f_1(x) = f(x) + a\gamma(x)$ el cual todavía satisface las condiciones del teorema, pero esto contradice a (3.3). Entonces L_2 será un ciclo estable. De (3.3) también conocemos que no hay ciclos fuera de L_2 .

II) El sistema (3.2) no tiene más de un ciclo límite semiestable L_1 en la franja $|x| < \alpha_2$

Dado que el origen "0" es un punto singular estable. si el sistema (3.2) tiene ciclos, entonces el ciclo L_1 encierra a "0" será inestable. Si L_1 es también externamente inestable, entonces similarmente al caso 1) se puede probar que el exterior de L_1 tiene a lo más un ciclo límite más.

Si L_1 es externamente estable entonces $\oint_{L_1} -f(x)dt = 0$. Si hay un ciclo límite L_2 fuera de L_1 , entonces L_2 será internamente inestable., el cual contradice a (3.3). entonces el sistema (3.2) tiene solo un único ciclo límite semiestable L_1 .

Considerando las dos discusiones vemos que el sistema (3.2) tiene a lo más dos ciclos límites.

Teorema 3.3 .*El sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -x + (\mu \cos x)v \end{cases} \quad (3.5) \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \mu \operatorname{sen} x \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

tiene exactamente n ciclos límites en la franja $|x| \leq (n + 1)\pi$.

En la prueba consideraremos el caso que $\mu > 0$ y denotaremos :

$$f(x) = -\mu \cos x, \text{ entonces } F(x) = \int_0^x f(s)ds = -\mu \operatorname{sen} x$$

Antes probaremos algunos lemas previos.

Lema 3.13 .*En el semiplano superior a lo largo de alguna trayectoria*

$v = v(x)$ del sistema (3.5) se tiene que :

a) $v(x) > v(-\pi - x)$, cuando $x \geq 0$ y

b) $v(-x) > v(\pi + x)$, cuando $x \geq 0$.

Prueba .

Probemos el caso b) Del sistema (3.5) se tiene

$$\begin{aligned}
v(\pi + x) - v(-x) &= \int_{-x}^{x+\pi} dv = \int_{-x}^{x+\pi} \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} \\
&= \int_{-x}^0 \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_0^\pi \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_\pi^{x+\pi} \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} \\
&= \int_0^{-x} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_0^\pi \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_0^x \frac{-(\varepsilon + \pi) d\varepsilon}{v(\varepsilon + \pi)} \\
&= \int_0^x \frac{\varepsilon d\varepsilon}{v(-\varepsilon)} + \int_0^x \frac{-(\varepsilon + \pi) d\varepsilon}{v(\varepsilon + \pi)} + \int_0^\pi \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} \\
&= \int_0^x \varepsilon \left(\frac{1}{v(-\varepsilon)} - \frac{1}{v(\varepsilon + \pi)} \right) d\varepsilon + \int_0^x \frac{-\pi d\varepsilon}{v(\varepsilon + \pi)} + \int_0^\pi \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)}
\end{aligned}$$

derivando ambos miembros.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(v(\pi + x) - v(-x)) &= x \left(\frac{1}{v(-x)} - \frac{1}{v(x + \pi)} \right) - \frac{\pi}{v(x + \pi)} + 0 \\
&< \frac{x(v(x + \pi) - v(-x))}{v(-x) \cdot v(x + \pi)}
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dx}(v(\pi + x) - v(-x)) - \frac{x(v(x + \pi) - v(-x))}{v(-x) \cdot v(x + \pi)} < 0$$

$$\text{así } \frac{d}{dx} \left[(v(\pi + x) - v(-x)) \exp \left(- \int_0^x \frac{\varepsilon d\varepsilon}{v(-\varepsilon)v(\varepsilon + \pi)} \right) \right] < 0, x \geq 0$$

pero

$$v(\pi) - v(0) < 0 \text{ y así pues } v(\pi + x) - v(-x) < 0, x \geq 0.$$

Similarmente probamos el caso a)

$$\begin{aligned}
v(-\pi - x) - v(x) &= \int_x^{-x-\pi} dv = \int_{-x}^{x+\pi} \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} \\
&= \int_x^0 \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_0^{-\pi} \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_{-\pi}^{-x-\pi} \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} \\
&= - \int_0^x \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_0^\pi \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_0^{-x} \frac{-(\varepsilon - \pi) d\varepsilon}{v(\varepsilon - \pi)} \\
&= \int_0^x \frac{\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} + \int_0^x \frac{-(-\varepsilon - \pi) d\varepsilon}{v(-\varepsilon - \pi)} + \int_0^\pi \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)} \\
&= \int_0^x \varepsilon \left(\frac{1}{v(\varepsilon)} - \frac{1}{v(-\varepsilon - \pi)} \right) d\varepsilon + \int_0^x \frac{-\pi d\varepsilon}{v(-\varepsilon - \pi)} + \int_0^\pi \frac{-\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)}
\end{aligned}$$

diferenciando ambos miembros

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(v(-\pi-x) - v(x)) &= x \left(\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(x+\pi)} \right) - \frac{\pi}{v(-x-\pi)} + 0 \\ &< \frac{x(v(-x-\pi) - v(x))}{v(x).v(-x-\pi)} \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dx}(v(-\pi-x) - v(x)) - \frac{x(v(-x-\pi) - v(x))}{v(x).v(-x-\pi)} < 0$$

$$\text{así } \frac{d}{dx} \left[(v(-\pi-x) - v(x)) \exp \left(- \int_0^x \frac{\varepsilon d\varepsilon}{v(\varepsilon)v(-\varepsilon-\pi)} \right) \right] < 0, \quad x \geq 0$$

pero

$$v(\pi) - v(0) < 0 \text{ y así pues } v(-\pi-x) - v(x) < 0, \quad x \geq 0.$$

esta probado el lema.

$$\text{Construimos una función definida positiva } \lambda(x, v) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(v(x) + F(x))^2$$

de donde diferenciando

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{d\lambda}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\lambda}{dv} \frac{dv}{dt} \\ &= (x + [v(x) + F(x)].f(x))v(x) + (v(x) + F(x))(-x - f(x).v(x)) \\ &= -xF(x) \end{aligned}$$

por simplicidad denotamos $\lambda(x) = \lambda(x, v)$, $v = v(x)$, que es la ecuación de la trayectoria de (3.5).

En lo siguiente estudiaremos la variación de esta función así definida a lo largo de la trayectoria de (3.5).

Lema 3.14 *Si la trayectoria $v = v(x)$ del sistema (3.5). intersecta las líneas $x = \pm\pi$ en el semiplano superior $v \geq 0$. Entonces a lo largo de esta sección de la trayectoria tenemos:*

$$(-1)^{m+1} [\lambda(m\pi) - \lambda(-m\pi)] > 0, \quad m \geq 1$$

Prueba:

Sea $\Delta_k = \lambda(k\pi + \pi) - \lambda(k\pi)$, $\bar{\Delta}_k = \lambda(-k\pi) - \lambda(-k\pi - \pi)$, $k \geq 0$ entero

Primero probaremos las inecuaciones

$$\Delta_0 > 0, \bar{\Delta}_0 > 0$$

$$(-1)^{k+1} [\Delta_k + \bar{\Delta}_{k+1}] > 0, \quad k \geq 0$$

$$(-1)^{k+1} [\bar{\Delta}_k + \Delta_{k+1}] > 0, \quad k \geq 0$$

veamos : dado que $\frac{d\lambda}{dt} > 0$ cuando $0 < |x| < \pi$. pues $F'(x) = -\mu \operatorname{sen} x < 0$

por lo tanto se cumple que: $\Delta_0 = \lambda(\pi) - \lambda(0) > 0$
 $\bar{\Delta}_0 = \lambda(0) - \lambda(-\pi) > 0$

veamos:

$$\begin{aligned} \Delta_k + \bar{\Delta}_{k+1} &= \lambda(k\pi + \pi) - \lambda(k\pi) + \lambda(-\pi - k\pi) - \lambda(-k\pi - 2\pi) \\ &= \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} d\lambda(x) + \int_{-2\pi-k\pi}^{-k\pi-\pi} d\lambda(x) \\ &= \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} -xF(x)dt + \int_{-2\pi-k\pi}^{-k\pi-\pi} -xF(x)dt \\ &= \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{-xF(x)}{v(x)} dx + \int_{-2\pi-k\pi}^{-k\pi-\pi} \frac{-xF(x)}{v(x)} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{-(x+k\pi)F_{(x+k\pi)}}{v(x+k\pi)} dx + \int_0^{-\pi} \frac{(-x-\pi-k\pi)F_{(-x-\pi-k\pi)}}{v(-x-\pi-k\pi)} dx \\ &= (-1)^k \left\{ \int_0^\pi \frac{-(x+k\pi)|F(x)|}{v(x+k\pi)} dx + \int_0^\pi \frac{(-x-\pi-k\pi)|F(x)|}{v(-x-\pi-k\pi)} dx \right\} \\ &= (-1)^k \int_0^\pi \left(\frac{x+k\pi}{v(x+k\pi)} - \frac{x+\pi+k\pi}{v(-x-\pi-k\pi)} \right) |F(x)| dx \end{aligned}$$

del lema 3.13 sabemos que $v(x+k\pi) > v(-x-\pi-k\pi)$

entonces el integrando es positivo por lo tanto

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} [\Delta_k + \bar{\Delta}_{k+1}] &= (-1)^k \int_0^\pi \left(\frac{x+k\pi}{v(x+k\pi)} - \frac{x+\pi+k\pi}{v(-x-\pi-k\pi)} \right) |F(x)| dx \\ &> 0 \end{aligned}$$

Similarmente probamos que.

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_k + \Delta_{k+1} &= \lambda(-k\pi) - \lambda(-k\pi - \pi) + \lambda(k\pi + 2\pi) - \lambda(k\pi + \pi) \\
&= \int_{-\pi-k\pi}^{-k\pi} \frac{-x F(x)}{v(x)} dx + \int_{k\pi+\pi}^{k\pi+2\pi} \frac{-x F(x)}{v(x)} dx \\
&= \int_{-\pi}^0 \frac{-(-x - k\pi) F(x - k\pi)}{v(x - k\pi)} dx + \int_0^\pi \frac{-(x + \pi + k\pi) F(x + \pi + k\pi)}{v(x + \pi + k\pi)} dx \\
&= (-1)^k \left\{ \int_0^\pi \frac{-(x + k\pi) |F(x)|}{v(x + k\pi)} dx + \int_0^\pi \frac{-(x + \pi + k\pi) |F(x)|}{v(x + \pi + k\pi)} dx \right\} \\
&= (-1)^k \int_0^\pi \left(\frac{x + k\pi}{v(-x - k\pi)} - \frac{x + \pi + k\pi}{v(x + \pi + k\pi)} \right) |F(x)| dx
\end{aligned}$$

del lema 3.13 sabemos que $v(-x - k\pi) > v(x + \pi + k\pi)$

entonces el integrando es negativo por lo tanto

$$\begin{aligned}
(-1)^{k+1} [\overline{\Delta}_k + \Delta_{k+1}] &= (-1)^{2k+1} \int_0^\pi \left(\frac{x + k\pi}{v(-x - k\pi)} - \frac{x + \pi + k\pi}{v(x + \pi + k\pi)} \right) |F(x)| dx \\
&> 0
\end{aligned}$$

$\Delta_{-1} = \overline{\Delta}_{-1} = 0$, entonces de lo anterior

=

$$\begin{aligned}
(-1)^{m+1} [\lambda(m\pi) - \lambda(-m\pi)] &= (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} (\Delta_k + \overline{\Delta}_k) \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (\Delta_{m-2k-2} + \overline{\Delta}_{m-2k-1}) \\
&\quad + (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (\overline{\Delta}_{m-2k-2} + \Delta_{m-2k-1}) \\
&> 0
\end{aligned}$$

por lo tanto el lema queda probado.

Ahora sea $\int_{[\alpha, \beta]} f(x(t)) dt$ que denota la integral de $f(x)$ a lo largo de la trayectoria de (3.5), donde $[\alpha, \beta]$ es un intervalo de variación de x sea $x(t_1) = \alpha$, $x(t_2) = \beta$, entonces el intervalo de variación de t es $[t_1, t_2]$.

Lema 3.15 .En el semiplano superior $v \geq 0$

$$(-1)^{m-1} \int_{[-m\pi, m\pi]} f(x(t)) dt > 0$$

, m es un entero positivo.

Prueba:

Definamos:

$$\begin{aligned}
 d_k &= \int_{[k\pi, (k+1)\pi]} f(x(t)) dt = \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{F(x)}{v(x)} dx \\
 &= \int_0^\pi \frac{f(x+k\pi)}{v(x+k\pi)} dx = (-1)^k \int_0^\pi \frac{f(x)}{v(x+k\pi)} dx \\
 &= (-1)^k \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{v(x+k\pi)} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{f(x)}{v(x+k\pi)} dx \right\} \\
 &= (-1)^k \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{v(x+k\pi)} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(x+\pi)}{v(x+\pi+k\pi)} dx \right\} \\
 &= (-1)^k \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-|f(x)|}{v(x+k\pi)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|f(x)|}{v(x+\pi+k\pi)} dx \right\} \\
 &= (-1)^k \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{v(x+\pi+k\pi)} - \frac{1}{v(x+k\pi)} \right) |f(x)| dx \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{d}_k &= \int_{[-(k+1)\pi, -k\pi]} f(x(t)) dt = \int_{-\pi-k\pi}^{-k\pi} \frac{F(x)}{v(x)} dx \\
 &= \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+k\pi)}{v(x+k\pi)} dx = (-1)^k \int_{-\pi}^0 \frac{f(x)}{v(x-k\pi)} dx \\
 &= (-1)^k \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(-x)}{v(-x-k\pi)} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{f(x)}{v(-x+k\pi)} dx \right\} \\
 &= (-1)^k \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(-x)}{v(-x-k\pi)} dx - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{f(-x-\pi)}{v(-x-\pi-k\pi)} dx \right\} \\
 &= (-1)^k \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-|f(x)|}{v(-x-k\pi)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|f(x)|}{v(-x-\pi-k\pi)} dx \right\} \\
 &= (-1)^k \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{v(-x-\pi-k\pi)} - \frac{1}{v(-x-k\pi)} \right) |f(x)| dx \right\}
 \end{aligned}$$

del lema 3.13 se tiene:

$$v(x) > v(-x - \pi) \implies v(x + k\pi) > v(-x - \pi - k\pi) \text{ y } v(-x + \pi + k\pi) > v(x - 2\pi - k\pi)$$

$$\text{además } v(x + k\pi)v(-x + \pi + k\pi) > v(-x - \pi - k\pi)v(x - 2\pi - k\pi)$$

veamos:

$$\begin{aligned}
& v(-x - \pi - k\pi) - v(x - 2\pi - k\pi) \\
&= \int_{x-2\pi-k\pi}^{-x-\pi-k\pi} dv = \int_{x-2\pi-k\pi}^{-x-\pi-k\pi} - \left(\frac{x}{v(x)} - f(x) \right) dx \\
&= \int_{x-2\pi-k\pi}^{-x-\pi-k\pi} - \frac{x}{v(x)} dx = \int_{x-\pi-k\pi}^{-x-k\pi} - \frac{(x+\pi)}{v(x+\pi)} dx \\
&= \int_{x-\pi-k\pi}^{-x-k\pi} \frac{x}{v(x+\pi)} dx + \int_{x-\pi-k\pi}^{-x-k\pi} \frac{\pi}{v(x+\pi)} dx \\
&< \int_{x-\pi-k\pi}^{-x-k\pi} \frac{x}{v(-x)} dx = \int_{x-\pi-k\pi}^{-x-k\pi} -dv(-x) \\
&= - (v(-x + \pi + k\pi) - v(x + k\pi)) \\
&> 0
\end{aligned}$$

pues $v(-x) > v(x + \pi) \implies \frac{x}{v(-x)} < \frac{x}{v(x + \pi)}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

y $d_0 = \int_{[0,\pi]} f(x)dt > 0$, $\bar{d}_0 = \int_{[-\pi,0]} f(x)dt > 0$, y sea $d_{-1} = \bar{d}_{-1} = 0$

entonces:

$$\begin{aligned}
(-1)^{m-1} \int_{[-m\pi, m\pi]} f(x(t))dt &= (-1)^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (d_k + \bar{d}_k) \\
&\quad \left\| \frac{m-1}{2} \right\| \\
&= (-1)^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (d_{m-2k-2} + \bar{d}_{m-2k-1}) \\
&\quad \left\| \frac{m-1}{2} \right\| \\
&+ (-1)^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (\bar{d}_{m-2k-1} + d_{m-2k-2}) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto la prueba esta completa.

Dado que la trayectoria cerrada L_m del sistema 3.5 es simétrico respecto al origen y $(-1)^{m-1} f(x(t)) \geq 0$, $m\pi \leq x \leq m\pi + \frac{\pi}{2}$, del lema anterior se tiene:

Lema 3.16 *Si la trayectoria cerrada L_m del sistema 3.5 intersecta al intervalo $\left[m\pi, m\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ en el eje positivo X entonces.*

$$(-1)^{m-1} \oint_{L_m} f(x(t))dt > 0, \quad m \geq 1$$

m es un entero positivo.

Lema 3.17 Si el sistema 3.5 tiene dos trayectorias cerradas $L_1 \subset L_2$, ambos intersectan las líneas $x = \pm(2m + 1)\pi$ en el semiplano $v \geq 0$ entonces.

$$(-1)^m \int_{[-(2m+1)\frac{\pi}{2}, (2m+1)\frac{\pi}{2}]} (f(x_2(t)) - f(x_1(t))) dt > 0 \quad , \quad m > 0$$

Prueba:

De los lemas 3.9 y 3.10 tenemos:

$$\begin{aligned} (-1)^k D_k &= (-1)^k \int_{[(2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+5)\frac{\pi}{2}]} (f(x_2(t)) - f(x_1(t))) dt \\ &> 0 \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3, 6)$$

$$\begin{aligned} (-1)^k \bar{D}_k &= (-1)^k \int_{[-(2k+5)\frac{\pi}{2}, -(2k+1)\frac{\pi}{2}]} (f(x_2(t)) - f(x_1(t))) dt \\ &> 0 \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3, 7)$$

y

$$\int_{[-\pi, \pi]} (f(x_2(t)) - f(x_1(t))) dt < 0 \quad (3, 8)$$

entonces veamos:

cuando m es impar, por (3.6), (3, 7) y (3, 8) tenemos que $f(x) > 0$ cuando $\pi \leq |x| \leq \frac{3\pi}{2}$

y por el lema 3.11 tenemos:

$$\begin{aligned} &\int_{[-(2m+1)\frac{\pi}{2}, (2m+1)\frac{\pi}{2}]} (f(x_2(t)) - f(x_1(t))) dt \\ &= \int_{[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]} + \int_{[-\pi, \pi]} + \int_{[\pi, \frac{3\pi}{2}]} (f(x_2(t)) - f(x_1(t))) dt + \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} D_{2k-1} + \bar{D}_{2k-1} \\ &< 0 \end{aligned}$$

cuando m es par, por (3.6), (3, 7) y (3, 8) tenemos que $f(x) > 0$ cuando $\pi \leq |x| \leq \frac{3\pi}{2}$

y por el lema 3.11 tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{[-(2m+1)\frac{\pi}{2}, (2m+1)\frac{\pi}{2}]} (f(x_2(t)) - f(x_1(t))) dt &= \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} (f(x_2(t)) - f(x_1(t))) dt \\ &+ \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} D_{2k} + \bar{D}_{2k} \\ &> 0 \end{aligned}$$

de estos dos casos el lema esta probado.

De los lemas 3.12 y 3.17 se tiene.

Lema 3.18 *Si el sistema 3.5 tiene dos trayectorias cerradas $L_1 \subset L_2$, ambos intersectan el intervalo $\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}, (m+1)\pi\right]$ en el eje X entonces.*

$$(-1)^m \left[\oint_{L_2} f(x_2(t)) dt - \oint_{L_1} f(x_1(t)) dt \right] > 0, \quad m \geq 1$$

Teorema 3.3 *El sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -x - f(x)v \end{cases}$$

, donde $f(x) = -\mu \cos x$, tiene exactamente n , ciclos límites en la franja $|x| \leq (n+1)\pi$

Prueba:

Analicemos en dos casos

(I). *Mostremos que el sistema (3,5) tiene al menos n ciclos límites en la franja $|x| \leq (n+1)\pi$.*

Supongamos que la trayectoria que empieza en un punto $P_m(-m\pi, 0)$ del eje X negativo pasando atravez del plano superior $v \geq 0$, intersecta al eje X positivo en Q_m . Del lema 3.14 se sabe que cuando $m > 0$ e impar tendremos que $x_{Q_m} > m\pi$; cuando $m < 0$ y es par tendremos que $x_{Q_m} < m\pi$. Dado que el campo vectorial es simétrico respecto al origen sabemos que cuando la trayectoria que empieza en $P_m(m\pi, 0)$, luego atravieza el semiplano inferior

$v \leq 0$, interseca al eje X negativo en el punto \overline{Q}_m , se tiene $x_{\overline{Q}_m} = -x_{Q_m}$.
 Sea $\widehat{P_m Q_m}$ y $\widehat{P_m \overline{Q}_m}$ los segmentos de trayectoria que pasa por los puntos \overline{P}_m , Q_m y P_m , \overline{Q}_m respectivamente; si $\overline{P_m Q_m}$ y $\overline{P_m \overline{Q}_m}$ representan las líneas de segmentos que unen Q_m , P_m y \overline{Q}_m , \overline{P}_m respectivamente.

$$\text{Si } \Gamma_m = \widehat{P_m Q_m} \cup \overline{P_m Q_m} \cup \widehat{P_m \overline{Q}_m} \cup \overline{P_m \overline{Q}_m}$$

Cuando $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m, \dots, \Gamma_{n+1}$ Todo par de curvas cerradas simples adyacentes forman la frontera interior y exterior de una región anular de Poincaré. y ahí existe al menos una trayectoria cerrada entre ellos. Entonces en la franja $|x| \leq (n+1)\pi$ existe al menos n ciclos límites.

(II) Mostremos que existe exactamente n ciclos límites del sistema (3,5) en la franja $|x| \leq (n+1)\pi$. dividamos la discusión en dos casos.

1. Existe una trayectoria cerrada L_m el cual interseca al intervalo $\left[m\pi, (2m+1)\frac{\pi}{2} \right]$ en el eje X . Por el lema 3.16 sabemos que cuando m es impar (par), L_m es estable (inestable) y ahí no hay más trayectorias intersectando $\left[m\pi, (2m+1)\frac{\pi}{2} \right]$. Probemos que no es cerrada la trayectoria que interseca el intervalo $\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}, (m+1)\pi \right]$. Supongamos lo contrario. Sea la trayectorias L'_m que encierra a L_m este será internamente inestable (estable). Probemos que L'_m no puede ser semiestable. En efecto supongamos que L'_m es semiestable. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -x - f_\alpha(x)v \end{cases} \quad (3.5)^*$$

donde $f_\alpha(x) = -\mu \cos x + \alpha \gamma_m(x)$, y

$$\gamma_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } |x| \leq (2m+1)\frac{\pi}{2} \\ (-1)^m \left(|x| - (2m+1)\frac{\pi}{2} \right)^2 & \text{cuando } |x| > (2m+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

El sistema (3.5)* forma una familia de campos vectoriales con respecto a α , y cuando α es bastante pequeño allí existe trayectorias cerradas $L_m^{(1)} \subset L_m^{(2)}$ de (3.5)* los cuales intersectan al intervalo $\left\langle (2m+1)\frac{\pi}{2}, (m+1)\pi \right\rangle$ en el eje X , y además

$$(-1)^m \oint_{L_m^{(1)}} f_\alpha(x) dt > 0, \quad (-1)^m \oint_{L_m^{(2)}} f_\alpha(x) dt \leq 0.$$

Esto contradice los lemas 3.12 y 3.17. Entonces L'_m será un ciclo inestable (estable). De la prueba de (I), en un instante ahí existe al menos uno en un lado ó un par en ambos lados trayectorias cerradas fuera de L'_m los cuales intersectan al intervalo $\left\langle (2m+1)\frac{\pi}{2}, (m+1)\pi \right\rangle$. Esto contradice lema 3.18. entonces ahí no puede haber otra trayectoria cerrada que intersecta al intervalo $\left\langle (2m+1)\frac{\pi}{2}, (m+1)\pi \right\rangle$.

2. *No es una trayectoria cerrada el cual intersecta al intervalo $\left[m\pi, (2m+1)\frac{\pi}{2} \right]$ en el eje X .* De la prueba de (I) conocemos que existe al menos una trayectoria cerrada el cual intersecta al intervalo $\left\langle (2m+1)\frac{\pi}{2}, (m+1)\pi \right\rangle$. Supongamos que L_m es uno que encierra el origen, cuando m es impar (par), este será internamente estable (inestable). L_m no puede ser semiestable por otra parte por la prueba de (I) ahí existiría al menos uno a un lado o un par a ambos lados trayectorias cerradas estables (inestables) fuera de L_m el cual intersecta $\left\langle (2m+1)\frac{\pi}{2}, (m+1)\pi \right\rangle$; esto contradice al lema 3.18. Entonces L_m será una trayectoria cerrada estable (inestable). Similarmente al caso 1 podemos probar allí no hay otra trayectoria cerrada excepto L_m el cual intersecta al intervalo $\left\langle (2m+1)\frac{\pi}{2}, (m+1)\pi \right\rangle$

De las discusiones anteriores sabemos que cuando n es impar (par). el sistema 3.5 tiene una única trayectoria cerrada estable (inestable) el cual intersecta al intervalo $\left[m\pi, (2m+1)\frac{\pi}{2} \right]$ en el eje X positivo Además en la

franja $|x| \leq \pi$, el sistema 3.5 no tiene una trayectoria cerrada ; entonces en la franja $|x| \leq (n + 1)\pi$ tiene exactamente n ciclos límites, que estan distribuidos alternadamente.

Por lo tanto el teorema está completamente probado.

IV. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] ANDRONOV, A. A. and LEONTOVICH: Qualitative Theory of Second Order Dynamic Systems; Jerusalem, Wiley, New York, 1993.
- [2] BAUTIN, N. N.: On the number of Limit Cycles which appear with the Variation of Coefficients from an equilibrium position of focus or center type, American Mathematical Society
- [3] DAVIES, T. V. and JAMES E. M. : Nolinear Differential Equations, Addison - Wesley Publishing Company, 1966.
- [4] ESCALANTE, FELIX: Sistemas Dinamicos, Actas del coloquio de la SMP, 1995.
- [5] FERDINAND VERHULST: Nonlinear Differential Equations and Dynamic Systems; Springer-Verlag New York, 1996.
- [6] GUCKENHEIMER, J. and HOLMES, P. :Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields; Springer - Verlag New York, 1996.
- [7] HIRSCH, M. W. and SMALE S. : Differential Equations, Dynamical Systems; and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974.
- [8] IMAZ y VOREL: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Limusa-Wiley, 1968.
- [9] LEFSCHETS, SALOMON: Differential Eqquations, Geometric Theory, Interscience, New York, 1962.
- [10] NEMYTSKY and STEPANOV: Qualitative Theory of Diferential Equations; Princeton University Press, New York, 1969.

- [11] PALIS, J. and DE MELO, W. :Geometric Theory of Dynamical Systems. Springer- Verlag New York, 1986.
- [12] PERKO, LAWRENCE: Diferential Equations and Dynamic Systems; Springer-Verlag New York, 1991.
- [12] L.S. PONTRIAGUIN: Ecuaciones diferenciales Ordinrias; @ les editions mir moscú 1969
- [13] PERKO, LAWRENCE: Diferential Equations and Dynamic Systems; Springer-Verlag New York, 1991.
- [14] SOTOMAYOR, J.:Licoes de Equacoes Diferenciais Ordinarias, IMPA, 1979.
- [15] YE YAN QUIAN and CAL SUL LIN:Theory of Limit Cycles, Translation of Mzathematical monograph; 1982.
- [16] YE YAN QUIAN and CHEN LAN-SUN: Uniqueness of Limit Cycle of the System of equations Quadratic, Acta Math.SIMCA, 1975.
- [17] ZHANG ZHI-FEN: Qualitative Theory of Diferential Equations; Translations of Mathematical Monographs, 1992.