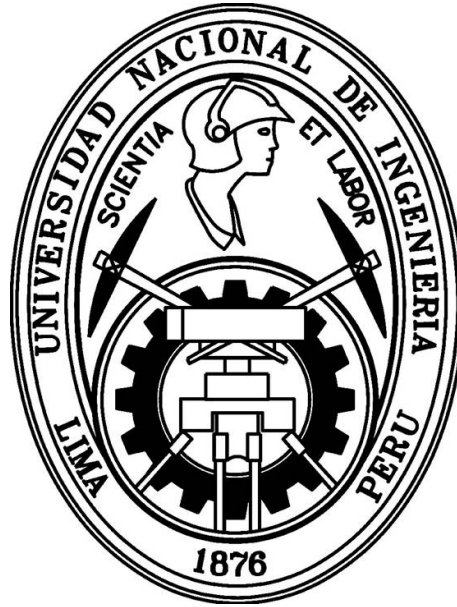


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**“ESTUDIO DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS ESTÁTICOS CON  
SIMETRÍA AXIAL EN ESPACIOS CURVOS”**

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
**LICENCIADO EN FÍSICA**

ELABORADO POR:  
**ESLY ABNER CALCINA SALAS**

ASESOR:  
Lic. RENATO TOVAR LANDEO

LIMA-PERÚ  
2020

*En memoria de  
Emmanuel*

*..¿Qué es lo que significa?*

## Agradecimientos

El siguiente trabajo de tesis ha sido realizado con el asesoramiento incondicional de por su puesto el profesor Renato Tovar Landeo a quien se agradece la colaboración y disposición para la elaboración de esta tesis.

Así también un agradecimiento a los profesores de la facultad de ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería que han contribuido a mi formación y en especial aquellos que me animaron a obtener el título de licenciado vía la elaboración de esta tesis.

También está al apoyo constante en los diversos ámbitos de mi vida a mis padres que hicieron también posible que mi formación académica sea de lo mejor para poder ingresar a esta casa de estudios y tener la oportunidad de obtener el título profesional. Finalmente, sin palabras para describir lo que el Eterno ha hecho, hace y hará por mí, y no solo por mí; sino también por aquellos que necesitan de Él.

# Índice general

Índice de figuras	5
Resumen	7
Introducción	8
<b>1. Campos electromagnéticos en espacios curvos</b>	<b>10</b>
1.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	10
1.2. Dualización de Hodge . . . . .	12
1.3. Tensor energía momento para campos electromagnéticos . . . . .	13
1.4. Ecuación de onda . . . . .	14
<b>2. Campos electromagnéticos en la métricas con simetría axial</b>	<b>15</b>
2.1. Métrica estática de Weyl-Lewis-Papapetrou . . . . .	15
2.2. Campo magnetostático . . . . .	18
2.2.1. Solución hiperbólica . . . . .	20
2.2.2. Solución parabólica . . . . .	20
2.2.3. Solución elíptica . . . . .	21
2.2.4. Solución general . . . . .	21
2.3. Campo electrostático . . . . .	22
2.3.1. Solución hiperbólica . . . . .	23
2.3.2. Solución parabólica . . . . .	23
2.3.3. Solución elíptica . . . . .	24
2.3.4. Solución general . . . . .	24
2.4. Dipolos y campos electromagnéticos . . . . .	24
<b>3. Trayectoria de partículas en campo electromagnético en métrica con simetría axial</b>	<b>26</b>
3.1. Potencial efectivo . . . . .	26
3.2. Campo magnetostático . . . . .	29
3.2.1. Solución hiperbólica . . . . .	30
3.2.2. Solución parabólica . . . . .	33
3.2.3. Solución elíptica . . . . .	37
3.3. Campo electrostático . . . . .	42
3.3.1. Solución hiperbólica . . . . .	43
3.3.2. Solución parabólica . . . . .	46
3.3.3. Solución elíptica . . . . .	49
<b>4. Resultados y conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>A. Convenciones, métrica y algunas definiciones</b>	<b>55</b>

B. El tensor de Levi Civita, antisimetrización y delta de Kronecker generalizado	57
C. Pseudocódigo general para programación en Python	61
D. Ecuaciones de Maxwell de forma covariante en métrica de Minkowski	65
E. Formas diferenciales, producto cuña y derivada exterior	67
F. Ecuaciones de Maxwell y de onda en espacios curvos	69
G. Parámetro afín para caracterizar curvas en el espacio tiempo	72
Bibliografía	74

# Índice de figuras

3.1. Trayectoria para partícula masiva de prueba en campo dipolar magnético en el caso hiperbólico. La parametrización es respecto a $\lambda$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.01 . . . . .	32
3.2. Potencial efectivo a la que es sometida la partícula de prueba en campo dipolar magnético en el caso hiperbolico. ( $V_{eff} \leq 3,28, 0 \leq \rho \leq 2, -1 \leq z \leq 1$ ) . . . .	32
3.3. Trayectoria para la luz en campo dipolar magnético en el caso hiperbólico. La parametrización es respecto a $\lambda$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.01 . . . . .	33
3.4. Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar magnético en el caso hiperbolico. ( $V_{eff} \leq 0,43, 0 \leq \rho \leq 2, -1 \leq z \leq 1$ ) . . . . .	33
3.5. Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso parabólico. La parametrización es respecto a $\tau$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.01	35
3.6. Potencial efectivo a la que es sometida la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso parabólico. ( $V_{eff} \leq 0,01, 0 \leq \rho \leq 2, -1 \leq z \leq 1$ ) . . . . .	35
3.7. Trayectoria para la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso parabólico. Nótese que en este caso la partícula se aleja en la dirección eje $z$ negativo. La parametrización es respecto a $\tau$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.01	36
3.8. Potencial efectivo a la que es sometida la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso parabólico. ( $V_{eff} \leq 0,0025, 0 \leq \rho \leq 2, -1 \leq z \leq 1$ ) . . . .	36
3.9. Trayectoria para la luz en campo dipolar magnético en el caso parabólico. Nótese que en este caso se aleja en una trayectoria curva. La parametrización es respecto a $\lambda$ y va de 0 a 680 en pasos de 0.1 . . . . .	37
3.10. Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar magnético en el caso parabólico. ( $V_{eff} \leq 1,2232; 10,5 \leq \rho \leq 20; 1,9 \leq z \leq 23$ ) . . . . .	37
3.11. Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso elíptico. La parametrización es respecto a $\tau$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.01 . . . .	39
3.12. Potencial efectivo a la que es sometido la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso elíptico. ( $V_{eff} \leq 0,0069, 0 \leq \rho \leq 2, -1 \leq z \leq 1$ ) . . . . .	39
3.13. Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso elíptico. Nótese que en este caso la partícula se aleja en la dirección eje $z$ positivo. La parametrización es respecto a $\tau$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.01 . . . . .	40
3.14. Potencial efectivo a la que es sometido la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso elíptico. ( $V_{eff} \leq 0,0215, 0 \leq \rho \leq 2, -1 \leq z \leq 1$ ) . . . . .	40
3.15. Trayectoria para la luz en campo dipolar magnético en el caso elíptico. Nótese que en este caso la luz se acerca ala fuente de campo magnético. La parametrización es respecto a $\lambda$ y va de 0 a 15 en pasos de 0.01 . . . . .	41
3.16. Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar magnético en el caso elíptico. ( $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ). En el caso presente hemos mostrado regiones en donde $0 \leq V_{eff} \leq 0,001$ . . . . .	41

3.17. Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso hiperbólico. Nótese que en este caso la partícula se aleja en una línea casi recta. La parametrización es respecto a $\tau$ y va de 0 a 5 en pasos de 0.1 . . . . .	44
3.18. Potencial efectivo a la que es sometido la partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso hiperbólico. ( $V_{eff} \leq 0,0615, 1,5 \leq \rho \leq 3, -1 \leq z \leq 1$ ). . .	45
3.19. Trayectoria para la luz en campo dipolar eléctrico en el caso hiperbólico. La parametrización es respecto a $\lambda$ y va de 0 a 10 en pasos de 0.01 . . . . .	45
3.20. Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar eléctrico en el caso hiperbólico. ( $0 \leq V_{eff} \leq 0,2, 1,7 \leq \rho \leq 4, 0,57 \leq z \leq 0,7$ ). . . . .	46
3.21. Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso parabólico. La parametrización es respecto a $\tau$ y va de 0 a 23.4 en pasos de 0.01 . . . . .	47
3.22. Potencial efectivo a la que es sometido la partícula de prueba masiva en campo dipolar eléctrico en el caso parabólico. ( $V_{eff} \leq 3,8491, 0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq z \leq 6$ ). . . . .	48
3.23. Trayectoria para la luz en campo dipolar eléctrico en el caso parabólico. La parametrización es respecto a $\lambda$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.1 . . . . .	48
3.24. Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar eléctrico en el caso parabólico. ( $0 \leq V_{eff} \leq 1, 3 \leq \rho \leq 100, 4 \leq z \leq 7$ ). . . . .	49
3.25. Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso elíptico. La parametrización es respecto a $\tau$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.01 . . . . .	50
3.26. Potencial efectivo a la que es sometido la partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso elíptico. ( $V_{eff} \leq 0,7614, 0 \leq \rho \leq 1,7, 0 \leq z \leq 1,4$ ). . . . .	51
3.27. Trayectoria para la luz en campo dipolar eléctrico en el caso elíptico. La parametrización es respecto a $\lambda$ y va de 0 a 100 en pasos de 0.01 . . . . .	51
3.28. Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar eléctrico en el caso elíptico. ( $V_{eff} \leq 0,09, 1 \leq \rho \leq 10, -1 \leq z \leq 1$ ). . . . .	52

# Resumen

El presente trabajo de tesis pretende resolver el problema de tener un campo electromagnético con simetría axial y ver sus efectos en la curvatura del espacio tiempo, para lo cual hacemos uso de una métrica con simetría axial. Además de esto también se pretende encontrar algunas trayectorias de partículas de prueba de manera numérica y caracterizarlas.

Para cumplir con estos objetivos se desarrolló la teoría electromagnética en espacio tiempo curvo de manera general. Los resultados obtenidos se usaron para simplificar el análisis y cálculo de las soluciones en el caso eléctrico y magnético. Mediante la dualización de Hodge que establece una relación en las soluciones de campo eléctrico y magnético. Una vez desarrolladas las herramientas nos enfocamos en la métrica de Weyl, en la cual se procedió a resolver las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell y relacionamos los términos de la métrica y el potencial para el caso del magnético y, usando la dualización de Hodge, para el caso eléctrico, en ambos nos encontramos básicamente con tres casos: hiperbólico, parabólico y elíptico.

En cada uno de estos casos se establece la relación entre los parámetros de la métrica  $(f, \gamma)$  y los correspondientes potenciales. Dichas relaciones se obtienen gracias a la función  $\Psi$  que se define, para simplificar los cálculos, como una función armónica que cumple con  $\Delta\Psi = 0$ . De esta manera se llega a encontrar que una expresión cuadrática de los potenciales está relacionado de manera directamente proporcional con el parámetro  $f$  de la métrica en el caso eléctrico e inversamente proporcional en el caso magnético. Para el caso de  $\gamma$  solo es posible hallarlo analíticamente definiendo a  $\Psi$  como el potencial clásico de un dipolo eléctrico o magnético según sea el caso.

Por último, hallamos algunas trayectorias para partículas de prueba en cada caso. Vemos que algunas trayectorias son órbitas mientras que en otras la partícula se acerca o aleja de la fuente. La explicación a estas trayectorias se encuentra en la forma del potencial efectivo en las vecindades de la posición inicial de la partícula de prueba. Mostramos tanto la gráfica en tres dimensiones de la partícula como el potencial efectivo para partícula masiva y la luz.

**Palabras clave:** Campos electromagnéticos, espacios curvos, métrica de Weyl, simetría axial.



# Introducción

Los antecedentes de este trabajo se encuentran en las primeras soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, junto con las ecuaciones de Maxwell, para el tratamiento de campos electromagnéticos en espacios curvos. Podemos encontrar diferentes soluciones analíticas y clasificarlas según sus simetrías y álgebras involucradas (Stephani et al. (2003)). Entre dichas soluciones nos centramos en este trabajo a aquellas que involucran campos electromagnéticos con simetría axial para lo cual se tendría una métrica con la misma simetría. Dicha métrica fue construida por Weyl (1917), en donde halla de manera analítica una integral que relaciona la métrica con los potenciales electromagnéticos. Dicha integral es resuelta por (Bonnor 1954), en la cual obtiene funciones trigonométricas en base a la asunción de introducir un potencial clásico dipolar.

La justificación de este trabajo está en encontrar más soluciones analíticas en base a los procedimientos ya encontrados en los antecedentes. En el presente trabajo mostramos que las soluciones no se restringen a funciones trigonométricas sino también a funciones hiperbólicas y funciones que son inversamente proporcionales al cuadrado de sus argumentos los cuales para simplificar llamamos soluciones elípticas, hiperbólicas y parabólicas, respectivamente. Otra justificación es también determinar el comportamiento de una partícula de prueba en las vecindades de la fuente de estos campos electromagnéticos. Se analizan los casos de partículas masivas y de masa nula, tratándose en el último caso de la luz.

Cabe mencionar también que se tienen antecedentes de trabajos cuyo objetivo es encontrar y analizar trayectorias, como por ejemplo Hackmann and Xu (2013), quienes realizaron un estudio de partículas cargadas en espacios tiempo estacionario en presencia de una fuente rotante de campo electromagnético. En aquel trabajo, las trayectorias fueron obtenidas por el formalismo hamiltoniano aplicado a relatividad general. Sin embargo en el presente trabajo mostramos un procedimiento con el formalismo lagrangiano el cual nos ayuda a hacer una analogía con el potencial efectivo y conservación de energía que se tiene en mecánica clásica. Además, en el caso presente solo presentamos el caso eléctrico y magnético por separado. En cada uno de estos casos se considera que dichos campos son estáticos mas no uniformes. Esto le da una gran simplificación al problema ya que en el caso de no ser estáticos se tendría que cambiar la métrica con la cual se trabaja. Mencionamos también que dichas fuentes de campos eléctrico y magnético guardan relación con los campos clásicos para dipolos eléctrico y magnéticos. También dichas fuentes son estáticas de manera que no hay lugar para la rotación de dichas fuentes, en caso contrario ocasionaría algún efecto de arrastre en el espacio tiempo.

En el capítulo 1 establecemos las ecuaciones que gobiernan el electromagnetismo así como la manera en que los campos electromagnéticos pueden generar curvatura en el espacio tiempo a través del tensor energía momento. También se establece la dualidad de Hodge que permite resumir las ecuaciones de Maxwell en una forma más compacta y nos permitirá establecer relaciones entre campos eléctricos y magnéticos. Mencionamos también una forma alternativa de escribir las ecuaciones de Maxwell en el vacío dado por la ecuación de onda que se deriva a partir de las ecuaciones de Maxwell y tienen a la curvatura como una fuente de acople entre los campos electromagnéticos.

En el capítulo 2 nos centramos en la métrica de Weyl-Lewis-Papapetrou que se caracteriza por poseer simetría axial. Analizamos los casos por separado de tener solo campo eléctrico y magnético. Estos campos son estáticos de manera que la métrica también será estática. Para que los parámetros de la métrica sean determinados escogemos un potencial de dipolo electromagnético, el cual es el potencial que conecta los parámetros de la métrica con los campos electromagnéticos.

En el capítulo 3 presentamos las trayectorias de partículas masivas y la luz en presencia de los campos descritos en el capítulo 2. El potencial efectivo es el que nos sirve para predecir el comportamiento de la partícula al desarrollar una trayectoria. Para cada campo dividimos en tres casos: hiperbólico, parabólico y elíptico dependiendo de que funciones estén involucradas. Finalmente, en el capítulo 4 damos los resultados y conclusiones.

# Capítulo 1

## Campos electromagnéticos en espacios curvos

En el capítulo presente desarrollamos la teoría electromagnética de Maxwell, primero en espacio tiempo plano (métrica de Minkowski) y luego generalizamos a espacio tiempo curvo. Además introducimos la dualización de Hodge que nos sirve para establecer la relación de dualidad de los campos eléctrico y magnético.

### 1.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell, de manera diferencial, se expresan de la siguiente manera (Jackson (1975))

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

Debido a (1.4), se introduce el vector potencial  $\mathbf{A}$ , relacionado con  $\mathbf{B}$  por la expresión

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.5)$$

Reemplazando la ecuación anterior en (1.3) obtenemos

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.6)$$

lo que permite introducir el potencial escalar  $\phi$  definido por la expresión

$$-\nabla \phi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Por lo tanto, los campos electromagnéticos se pueden describir por medio de los potenciales  $\phi$  y  $\mathbf{A}$ . Para hacer una descripción en forma covariante y evidenciar la invarianza respecto a las transformaciones de Lorentz denotamos

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad j^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Definimos el tensor electromagnético como  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Calculando sus componentes obtenemos

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Las componentes contravariantes las hallamos subiendo los índices  $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

donde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Se demuestra (ver apéndice D) que las ecuaciones (1.1) y (1.2) se expresan de manera invariante por medio de la expresión

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \quad (1.12)$$

De manera similar las ecuaciones (1.3) y (1.4) se resumen en la siguiente ecuación

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0 \quad (1.13)$$

Gracias a que el tensor  $F_{\mu\nu}$  es antisimétrico, la ecuación (1.13) puede ser escrita con ayuda de la antisimetrización

$$\partial_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0 \quad (1.14)$$

En el caso de tener espacios curvos se utiliza la métrica  $g_{\mu\nu}$  en vez de  $\eta_{\mu\nu}$  y se reemplaza la derivada parcial por la covariante  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$  en las ecuaciones (1.12) y (1.14):

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \quad (1.15)$$

$$\nabla_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0 \quad (1.16)$$

En la ecuación (1.15), el primer término toma la forma:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\mu F^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma}. \quad (1.17)$$

Como los índices mudos son intercambiables, se tiene que el último término de la ecuación 1.17 se puede escribir como:

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma} = \frac{1}{2}[\Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu F^{\sigma\mu}] \quad (1.18)$$

dado que  $F^{\mu\nu}$  es antisimétrico:

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma} = \frac{1}{2}[\Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\nu F^{\mu\sigma}] \quad (1.19)$$

y los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$  son simétricos:

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma} = \frac{1}{2}[\Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma}] = 0. \quad (1.20)$$

Como  $\Gamma_{\sigma\mu}^{\nu}F^{\mu\sigma} = 0$ , se tiene que la ecuación (1.17) se escribe como:

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}F^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\mu}F^{\sigma\nu}. \quad (1.21)$$

Sabemos que  $\Gamma_{\sigma\mu}^{\mu} = \frac{\partial_{\sigma}\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}$ , por lo tanto

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}F^{\mu\nu} + \frac{\partial_{\sigma}\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}F^{\sigma\nu} \quad (1.22)$$

Haciendo el cambio de índice mudo  $\sigma \rightarrow \mu$  y agrupando términos de derivación, obtenemos:

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}) = -\mu_0j^{\nu} \quad (1.23)$$

Por otro lado, para la ecuación (1.16) tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{[\sigma}F_{\mu\nu]} &= 2(\nabla_{\sigma}F_{\mu\nu} + \nabla_{\nu}F_{\sigma\mu} + \nabla_{\mu}F_{\nu\sigma}) \\ &= 2(\partial_{\sigma}F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{\sigma\mu} + \partial_{\mu}F_{\nu\sigma}) - 2(\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}F_{\alpha\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}F_{\mu\alpha} \\ &\quad \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}F_{\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}F_{\sigma\alpha} + \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}F_{\alpha\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}F_{\nu\alpha}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Aprovechando que el tensor  $F_{\mu\nu}$  es antisimétrico y que además los símbolos de Christoffel son simétricos en sus dos sub-índices se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla_{[\sigma}F_{\mu\nu]} &= 2(\partial_{\sigma}F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{\sigma\mu} + \partial_{\mu}F_{\nu\sigma}) \\ &= \partial_{[\sigma}F_{\mu\nu]} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Por lo tanto, de (1.23) y (1.25) obtenemos que las ecuaciones de Maxwell en espacios curvos se escriben como:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}) = -\mu_0j^{\nu} \quad (1.26)$$

$$\partial_{[\sigma}F_{\mu\nu]} = 0 \quad (1.27)$$

## 1.2. Dualización de Hodge

Para el caso del espacio tiempo de cuatro dimensiones, se define la dualización de Hodge para el tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$  como:

$$(*F)_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\epsilon^{\sigma\rho\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (1.28)$$

de tal manera que para métricas con un autovalor negativo, se obtiene (ver apéndice B (B.32), (B.41) y (B.30))

$$(**F)_{\omega\gamma} = -F_{\omega\gamma} \quad (1.29)$$

De la definición (1.28) obtenemos las expresiones para la dualización de las componentes covariantes y contravariantes del tensor del campo electromagnético.

$$(F*)^{\sigma\rho} = \frac{1}{2}\epsilon^{\sigma\rho\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (1.30)$$

$$(F*)_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.31)$$

De (1.28) y (1.29) se deriva que

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(F^*)_{\rho\sigma}. \quad (1.32)$$

Por otro lado, de (1.15) y (1.16), tenemos que las ecuaciones de Maxwell en el vacío son

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.33)$$

$$\nabla_{[\sigma}F_{\mu\nu]} = 0 \quad (1.34)$$

Teniendo en cuenta a Carroll (2013) con respecto a las ecuaciones de Maxwell y el uso de formas diferenciales, desarrollado en el apéndice E, se tiene

$$d(*F) = 0 \quad (1.35)$$

$$dF = 0 \quad (1.36)$$

Por otro lado, la ecuación (1.29) en formas diferenciales se expresa como

$$**F = -F \quad (1.37)$$

de manera que las ecuaciones de Maxwell en el vacío son invariantes respecto a la dualización de Hodge. Esta dualización permite establecer un isomorfismo entre dos escenarios distintos: el de tener solo un campo magnético y solo uno eléctrico.

### 1.3. Tensor energía momento para campos electromagnéticos

El tensor energía momento para campos electromagnéticos en espacio tiempo curvo es:

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\sigma}F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}), \quad (1.38)$$

el cual tiene traza nula:

$$\begin{aligned} T^{(EM)} &= T_{\mu\nu}^{(EM)}g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\sigma}F_{\nu\gamma}g^{\sigma\gamma}g^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\sigma}F^{\mu\sigma} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\delta_{\mu}^{\mu}) \\ &= \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\sigma}F^{\mu\sigma} - F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Por otro lado, contrayendo las ecuaciones de Einstein llegamos al siguiente resultado

$$-R = \frac{8\pi G}{c^4}T, \quad (1.40)$$

y como vimos que la traza del tensor energía momento electromagnético es cero, se tiene que las ecuaciones de Einstein se pueden escribir:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}^{(EM)} \quad (1.41)$$

De manera análoga a como se obtuvo la ecuación (1.29), se demuestra que el tensor energía momento electromagnético es invariante respecto a la dualización de Hodge

$$(T^*)_{\mu\nu}^{(EM)} = T_{\mu\nu}^{(EM)}. \quad (1.42)$$

Basándonos en lo que acabamos de encontrar y el resultado de la sección anterior, se tiene que las ecuaciones de Einstein y Maxwell son invariantes respecto a la dualización de Hodge en un espacio tiempo libre de cargas y corrientes. De manera que va a haber relación semejante entre las soluciones de un fenómeno físico descrito por el tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$  y por otro fenómeno descrito por su dualizado. Este paralelismo fue desarrollado por Bonnor en 1954 (ver Bonnor 1954).

## 1.4. Ecuación de onda

Cabe recalcar lo siguiente cuando se habla de la luz y campos electromagnéticos: ambos no interactúan directamente ya que la luz no posee carga; sin embargo podrían interactuar de manera indirecta a través de las ecuaciones de campo de Einstein ya que la presencia de campos electromagnéticos también curvan el espacio tiempo. Es más en base a lo encontrado en el apéndice D podríamos postular que la curvatura del espacio tiempo acoplado al cuadri vector potencial sirve de fuente al igual que una densidad d carga o corriente mediante

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}A_{\sigma} = R_{\beta\sigma}A^{\beta} \quad (1.43)$$

Esto también se manifiesta al ver la ecuación de ondas electromagnéticas en espacio tiempo curvo

$$\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}F_{\theta\gamma} = R_{\gamma\beta}F_{\theta}^{\beta} - R_{\theta\beta}F_{\gamma}^{\beta} + 2R_{\gamma\beta\sigma\theta}F^{\sigma\beta} \quad (1.44)$$

lo cual coincide con lo encontrado por Tsagas (2004).

## Capítulo 2

# Campos electromagnéticos en la métricas con simetría axial

### 2.1. Métrica estática de Weyl-Lewis-Papapetrou

Como vamos a trabajar con campos electromagnéticos cuyo cuadripotencial posee solo un componente en dependencia con la coordenada radial  $\rho$  y  $z$ , se tiene que utilizar una métrica que también tenga este tipo de simetría. Por ello es conveniente usar la métrica de Weyl-Lewis-Papapetrou (Gutsunaev et al. 2007)

$$ds^2 = -f c^2 dt^2 + \frac{1}{f} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (2.1)$$

donde:  $f = f(\rho, z)$   $\gamma = \gamma(\rho, z)$  y  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \rho, \varphi, z)$ .

Por lo tanto el tensor métrico y su recíproco toman la forma,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{-1}e^{2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^{-1}\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f^{-1}e^{2\gamma} \end{bmatrix}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & fe^{-2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f\rho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & fe^{-2\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{\partial_\rho f}{2f} & \Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = \frac{\partial_z f}{2f} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{\rho e^{-2\gamma}}{2f} (-2f + \rho \partial_\rho f) \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{f}{2} e^{-2\gamma} \partial_\rho f & \Gamma_{11}^1 &= -\frac{\partial_\rho f}{2f} + \partial_\rho \gamma & & \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{\partial_\rho f}{2f} - \partial_\rho \gamma & \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = -\frac{\partial_z f}{2f} + \partial_z \gamma & & \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\rho} - \frac{\partial_\rho f}{2f} & \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = -\frac{\partial_z f}{2f} & & \\ \Gamma_{00}^3 &= \frac{f}{2} e^{-2\gamma} \partial_z f & \Gamma_{11}^3 &= \frac{\partial_z f}{2f} - \partial_z \gamma & \Gamma_{22}^3 &= \frac{\rho^2}{2f} e^{-2\gamma} \partial_z f \\ \Gamma_{33}^3 &= -\frac{\partial_z f}{2f} + \partial_z \gamma & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = -\frac{\partial_\rho f}{2f} + \partial_\rho \gamma & & \end{aligned}$$

El tensor de Ricci toma la forma

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} R_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & R_{13} \\ 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & R_{31} & 0 & R_{33} \end{bmatrix},$$

donde

$$R_{00} = \frac{e^{-2\gamma}}{2} [f \Delta f - |\nabla f|^2], \quad (2.3)$$



$$R_{11} = -\frac{1}{2f^2} \left[ |\nabla f|^2 + (\partial_\rho f)^2 - f\Delta f + 2f^2(\Delta\gamma - \frac{2\partial_\rho\gamma}{\rho}) \right] \quad (2.4)$$

$$R_{13} = R_{31} = \frac{\partial_z\gamma}{\rho} - \frac{\partial_z f \partial_\rho f}{2f^2} \quad (2.5)$$

$$R_{22} = \frac{\rho^2 e^{-2\gamma}}{2f^2} [f\Delta f - |\nabla f|^2] \quad (2.6)$$

$$R_{33} = -\frac{1}{2f^2} [|\nabla f|^2 + (\partial_z f)^2 - f\Delta f + 2f^2\Delta\gamma] \quad (2.7)$$

(donde, hemos definido:  $\Delta \equiv \partial_\rho^2 + \frac{\partial_\rho}{\rho} + \partial_z^2$      $\nabla \equiv \hat{e}_\rho \partial_\rho + \hat{e}_z \partial_z$ )

El escalar de Ricci es

$$R = \frac{e^{-2\gamma}}{f} \left[ f\Delta f - \frac{3}{2}|\nabla f|^2 - 2f^2(\Delta\gamma - \frac{\partial_\rho\gamma}{\rho}) \right]. \quad (2.8)$$

Para establecer las ecuaciones de Einstein ahora necesitamos introducir un campo electromagnético con simetría axial. Vamos a resolver las ecuaciones de campo de Einstein afuera de las fuentes que generan campos electromagnéticos con simetría axial. Veamos los casos más sencillos: un campo magnetostático con simetría axial viene dado por el siguiente potencial electromagnético:  $A_\mu = (0, 0, A_2(\rho, z), 0)$ , el tensor electromagnético es:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\rho A_2 & 0 \\ 0 & -\partial_\rho A_2 & 0 & -\partial_z A_2 \\ 0 & 0 & \partial_z A_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Comparando (2.9) con (1.9) vemos que el campo descrito es un campo magnético puro. Para  $F^{\mu\nu}$  tenemos:

$$F^{\mu\nu} = \frac{f^2}{\rho^2} e^{-2\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\rho A_2 & 0 \\ 0 & -\partial_\rho A_2 & 0 & -\partial_z A_2 \\ 0 & 0 & \partial_z A_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Recordemos que el tensor energía-momento para campos electromagnéticos viene expresado por:

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = \frac{1}{\mu_0} (F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}), \quad (2.11)$$

por otro lado tenemos que:

$$F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{\rho^2} (\partial_\rho A_2)^2 & 0 & \frac{f}{\rho^2} (\partial_\rho A_2) (\partial_z A_2) \\ 0 & 0 & f e^{-2\gamma} |\nabla A_2|^2 & 0 \\ 0 & \frac{f}{\rho^2} (\partial_\rho A_2) (\partial_z A_2) & 0 & \frac{f}{\rho^2} (\partial_z A_2)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Además

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2 \frac{f^2}{\rho^2} e^{-2\gamma} |\nabla A_2|^2 \quad (2.13)$$

En consecuencia de (2.2), (2.12) y (2.13); obtenemos:

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} T_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & T_{31} & 0 & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

donde

$$T_{00} = \frac{f^3}{2\rho^2} e^{-2\gamma} |\nabla A_2|^2 \quad (2.15)$$

$$T_{11} = \frac{f}{2\rho^2} [(\partial_\rho A_2)^2 - (\partial_z A_2)^2] \quad (2.16)$$

$$T_{13} = T_{31} = \frac{f}{\rho^2} (\partial_\rho A_2)(\partial_z A_2) \quad (2.17)$$

$$T_{22} = \frac{f}{2} e^{-2\gamma} |\nabla A_2|^2 \quad (2.18)$$

$$T_{33} = \frac{f}{2\rho^2} [(\partial_z A_2)^2 - (\partial_\rho A_2)^2]. \quad (2.19)$$

Las ecuaciones de Einstein para campos electromagnéticos son:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(EM)} \quad (2.20)$$

Notemos que ya habíamos definido una métrica en (2.1), incluso antes de resolver las ecuaciones de Einstein dada en (2.20); sin embargo, es necesario precisar que solo se han definido las simetrías involucradas en el sistema lo cual involucra la definición de la métrica. Para mayor información sobre la selección de la métrica en base a simetrías véase Stephani et al., p.296 (2003). Reemplazando las ecuaciones (2.3)-(2.6), (2.15)-(2.19) en (2.20), obtenemos:

$$f\Delta f = |\nabla f|^2 + \tau \frac{f^3}{\rho^2} |\nabla A_2|^2 \quad (2.21)$$

$$|\nabla f|^2 + (\partial_\rho f)^2 - f\Delta f + 2f^2(\Delta\gamma - 2\frac{\partial_\rho\gamma}{\rho}) = \tau \frac{f^3}{\rho^2} [(\partial_z A_2)^2 - (\partial_\rho A_2)^2] \quad (2.22)$$

$$2\partial_z\gamma = \frac{\rho}{f^2} \partial_z f \partial_\rho f + \frac{2f\tau}{\rho} \partial_\rho A_2 \partial_z A_2 \quad (2.23)$$

$$|\nabla f|^2 + (\partial_z f)^2 - f\Delta f + 2f^2\Delta\gamma = \tau \frac{f^3}{\rho^2} [(\partial_\rho A_2)^2 - (\partial_z A_2)^2] \quad (2.24)$$

Utilizando (2.22) y (2.24)

$$4\partial_\rho\gamma = \frac{\rho}{f^2} [(\partial_\rho f)^2 - (\partial_z f)^2] + 2\tau \frac{f}{\rho} [(\partial_\rho A_2)^2 - (\partial_z A_2)^2], \quad (2.25)$$

donde  $\tau = \frac{8\pi G}{\mu_0 c^4}$ . Por otro lado, recordando (1.26) y (1.27), obtenemos que las ecuaciones de Maxwell en el vacío son:

$$\partial_\mu(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\partial_{[\sigma}F_{\mu\nu]} = 0. \quad (2.27)$$

Usando (2.9) y (2.10), tenemos:

$$\nabla \cdot \left( \frac{f}{\rho} \nabla A_2 \right) = 0 \quad (2.28)$$

$$\partial_\rho \partial_z A_2 = \partial_z \partial_\rho A_2. \quad (2.29)$$

AL aplicar la dualización de Hodge, según (1.30) y (1.31), obtenemos

$$(F^*)^{\sigma\rho} = \frac{f}{\rho} e^{-2\gamma} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z A_2 & 0 & \partial_\rho A_2 \\ \partial_z A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_\rho A_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$(F^*)_{\sigma\rho} = -\frac{f}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z A_2 & 0 & \partial_\rho A_2 \\ \partial_z A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_\rho A_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

El tensor electromagnético dualizado también cumple con las ecuaciones de Maxwell, como lo aseguramos en (1.35) y (1.36). Teniendo en cuenta la definición de tensor electromagnético  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , el caso dualizado corresponderá a un campo con 4-potencial viene dado por  $A'_\mu = (A'_0, 0, 0, 0)$ , de tal manera que:

$$F'^{\sigma\rho} = (F^*)^{\sigma\rho} = e^{-2\gamma} \begin{pmatrix} 0 & \partial_\rho A'_0 & 0 & \partial_z A'_0 \\ -\partial_\rho A'_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_z A'_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$F'_{\sigma\rho} = (F^*)_{\sigma\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\rho A'_0 & 0 & -\partial_z A'_0 \\ \partial_\rho A'_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_z A'_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

donde

$$\partial_\rho A'_0 = -\frac{f}{\rho} \partial_z A_2 \quad (2.34)$$

$$\partial_z A'_0 = \frac{f}{\rho} \partial_\rho A_2. \quad (2.35)$$

Fácilmente se puede ver que el tensor electromagnético dualizado (2.32) representa el caso de un campo puramente eléctrico, mientras que en el caso del tensor electromagnético el caso es de un campo puramente magnético (2.9).

## 2.2. Campo magnetostático

Reescribamos las ecuaciones de Einstein y Maxwell para un campo magnético estático con simetría axial. (ecuaciones (2.21), (2.23), (2.25), (2.28) y (2.29))

$$f\Delta f = |\nabla f|^2 + \frac{\tau f^3}{\rho^2} |\nabla A_2|^2 \quad (2.36)$$

$$2\partial_z \gamma = \frac{\rho}{f^2} \partial_z f \partial_\rho f + \frac{2\tau f}{\rho} \partial_\rho A_2 \partial_z A_2 \quad (2.37)$$

$$4\partial_\rho \gamma = \frac{\rho}{f^2} [(\partial_\rho f)^2 - (\partial_z f)^2] + \frac{2\tau f}{\rho} [(\partial_\rho A_2)^2 - (\partial_z A_2)^2] \quad (2.38)$$

$$0 = \nabla \cdot \left( \frac{f}{\rho} \nabla A_2 \right) \quad (2.39)$$

$$\partial_z \partial_\rho A_2 = \partial_\rho \partial_z A_2 \quad (2.40)$$

Nos centraremos en hallar  $f$  en función de  $A_2$ . Para ello hacemos el cambio de variable  $f = u^2$  en las ecuaciones (2.36) y (2.39).

$$u\Delta u = |\nabla u|^2 + \frac{\tau u^4}{2\rho^2} |\nabla A_2|^2 \quad (2.41)$$

$$0 = \nabla \cdot \left( \frac{u^2}{\rho} \nabla A_2 \right). \quad (2.42)$$

Ahora hacemos el cambio de variable  $u = \frac{\rho}{F}$ , de donde obtenemos

$$F\Delta F = |\nabla F|^2 - \frac{\tau}{2}|\nabla A_2|^2 \quad (2.43)$$

$$0 = \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{F^2} \nabla A_2 \right) \quad (2.44)$$

La ecuación (2.44) puede ser escrita como

$$F\Delta A_2 = 2(\nabla F) \cdot (\nabla A_2) \quad (2.45)$$

y las ecuaciones (2.43) y (2.44) se pueden escribir de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\rho}{F^2} \nabla (F^2 + \frac{\tau}{2} A_2^2) \right] = 0 \quad (2.46)$$

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\rho}{F^2} \nabla (A_2) \right] = 0. \quad (2.47)$$

Para simplificar las ecuaciones anteriores de manera que solo trabajemos con una variable, definimos la función  $\Psi$  de tal manera que cumpla con

$$F = U(\Psi_{(\rho,z)}) \quad (2.48)$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau}} V(\Psi_{(\rho,z)}) \quad (2.49)$$

Reemplazando se obtienen funciones que sólo dependen de la función  $\Psi$ , las cuales se reducen significativamente si se cumple que:

$$\Delta \Psi = 0. \quad (2.50)$$

En este caso, las ecuaciones (2.46) y (2.47) se pueden escribir como

$$U(U^2 + V^2)'' = 2U'(U^2 + V^2)' \quad (2.51)$$

$$UV'' = 2U'V' \quad (2.52)$$

las cuales se reducen a las siguientes ecuaciones

$$(U^2 + V^2)' = BU^2 \quad (2.53)$$

$$V' = AU^2 \quad (2.54)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes reales. Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales encontramos

$$\Psi = \int \frac{dV}{aV^2 + BV + C}, \quad (2.55)$$

donde  $a = -A$ . Resolviendo la integral obtenemos tres casos distintos dependiendo del signo de  $\Delta = B^2 + 4AC$ . Nos referiremos a ellas como solución hiperbólica, parabólica o elíptica debido al hecho de que involucran funciones hiperbólicas, cuadráticas y trigonométricas cuyos argumentos son directamente proporcionales a  $\Psi$ . Además dichas nomenclaturas son análogas a las trayectorias bajo un potencial central en mecánica clásica. La ecuación anterior fue encontrada por primera vez por Weyl (1917). Por otro lado, Bonnor (1954) encuentra algunas soluciones a esta integral involucrando funciones trigonométricas. En el caso presente no solo resolveremos dicha integral, sino que también encontraremos la relación existente entre el parámetro  $f$  que caracteriza a la métrica y el término del cuadripotencial  $A_2$  que caracteriza al campo magnético en el caso de funciones hiperbólicas y trigonométricas.

### 2.2.1. Solución hiperbólica

Para  $\Delta \equiv B^2 - 4aC > 0$  obtenemos

$$\Psi = -\frac{2}{\sqrt{\Delta}} \text{ArcTanh}\left(\frac{2aV + B}{\sqrt{\Delta}}\right) + \text{cte.} \quad (2.56)$$

Despejando la función  $V$  obtenemos

$$V = -\frac{B}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{Tanh}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.57)$$

donde  $d$  es una constante de integración. Al derivar obtenemos

$$V' = -\frac{\Delta}{4a} \text{Sech}^2\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.58)$$

Reemplazando en (2.54) y haciendo  $a = -A$  hallamos:

$$U^2 = \frac{\Delta}{4A^2} \text{Sech}^2\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.59)$$

Teniendo en cuenta la anterior ecuación, la ecuación (2.48) y la sustitución que hemos hecho,  $f = \frac{\rho^2}{F^2}$ , hallamos la relación entre  $f$  y  $\Psi$

$$f = \frac{\rho^2}{\Delta} 4A^2 \text{Cosh}^2\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.60)$$

Teniendo en cuenta (2.49) y (2.57), con  $a = -A$ , obtenemos

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}} A_2 = \frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \text{Tanh}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.61)$$

Como  $\text{Sech}^2 + \text{Tanh}^2 = 1$ , se tiene que

$$\frac{\rho^2}{f} + \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}} A_2 - \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{\Delta}{4A^2} \quad (2.62)$$

### 2.2.2. Solución parabólica

Para  $\Delta = B^2 - 4aC = 0$  obtenemos:

$$\Psi = -\frac{2}{2aV + B} + \text{cte.} \quad (2.63)$$

de donde despejamos  $V$

$$V = -\frac{1}{a(\Psi + d)} - \frac{B}{2a} \quad (2.64)$$

Al derivar obtenemos

$$V' = \frac{1}{a(\Psi + d)^2} \quad (2.65)$$

Reemplazando en (2.54) y renombrando  $a = -A$ , obtenemos:

$$U^2 = \frac{1}{-A^2(\Psi + d)^2}. \quad (2.66)$$

Teniendo en cuenta la anterior ecuación y la ecuación (2.48), teniendo en cuenta que  $f = \frac{\rho^2}{F^2}$ , se obtiene que:

$$f = -\rho^2 A^2 (\Psi + d)^2. \quad (2.67)$$

Luego, de las ecuaciones (2.64) , (2.49) y el hecho de que  $a = -A$ , hallamos:

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_2 = \frac{1}{A(\Psi + d)} + \frac{B}{2A} \quad (2.68)$$

De las dos ecuaciones anteriores se concluye que

$$\frac{\rho^2}{f} + \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_2 - \frac{B}{2A}\right)^2 = 0 \quad (2.69)$$

### 2.2.3. Solución elíptica

Para  $\Delta \equiv B^2 - 4aC < 0$  obtenemos:

$$\Psi = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \text{ArcTan}\left(\frac{2aV + B}{\sqrt{-\Delta}}\right) + cte. \quad (2.70)$$

de donde despejamos  $V$

$$V = -\frac{B}{2a} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{Tan}\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right]. \quad (2.71)$$

Al derivar obtenemos

$$V' = -\frac{\Delta}{4a} \text{Sec}^2\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.72)$$

Reemplazando en (2.54) y renombrando  $a = -A$ , obtenemos

$$U^2 = \frac{\Delta}{4A^2} \text{Sec}^2\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.73)$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior y la ecuación (2.48), teniendo en cuenta que  $f = \frac{\rho^2}{F^2}$ , se obtiene:

$$f = \frac{\rho^2}{\Delta} 4A^2 \text{Cos}^2\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right]. \quad (2.74)$$

Luego, de las ecuaciones (2.71), (2.49) y el hecho de que  $a = -A$ , hallamos:

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_2 = \frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{Tan}\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right]. \quad (2.75)$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones anteriores

$$\frac{\rho^2}{f} + \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_2 - \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{\Delta}{4A^2} \quad (2.76)$$

### 2.2.4. Solución general

Sea cual fuere el signo del determinante  $\Delta$ , obtuvimos la siguiente ecuación en los tres casos vistos

$$\frac{\rho^2}{f} + \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_2 - \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{\Delta}{4A^2}, \quad (2.77)$$

la cual se puede escribir de la forma

$$\frac{\rho^2}{f} = -\frac{\tau}{2}(A_2)^2 + \frac{B}{A}\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_2 + \frac{C}{A} \quad (2.78)$$

### 2.3. Campo electrostático

Al aplicar la dualización de Hodge obtuvimos que un campo magnético definido por el potencial  $\mathbf{A} = (0, 0, A_2, 0)$  es análogo a un campo eléctrico estático con potencial electromagnético  $\mathbf{A}' = (A_0, 0, 0, 0)$  relacionado con  $\mathbf{A}$  por las expresiones

$$\begin{aligned}\partial_\rho A_0 &= -\frac{f}{\rho} \partial_z A_2 \\ \partial_z A_0 &= \frac{f}{\rho} \partial_\rho A_2.\end{aligned}\quad (2.79)$$

Se debe tener en cuenta que este paso cambia el escenario del problema pasando de un cuadripotencial magnético a uno eléctrico

$$\mathbf{A}(0, 0, A_2, 0) \mapsto \mathbf{A}'(A_0, 0, 0, 0)$$

Al reemplazar las ecuaciones (2.79) en las ecuaciones (2.40) obtenemos

$$f\Delta f = |\nabla f|^2 + \tau f |\nabla A_0|^2 \quad (2.80)$$

$$2\partial_z \gamma = \frac{\rho}{f^2} \partial_z f \partial_\rho f - \frac{2\tau\rho}{f} \partial_\rho A_0 \partial_z A_0 \quad (2.81)$$

$$4\partial_\rho \gamma = \frac{\rho}{f^2} [(\partial_\rho f)^2 - (\partial_z f)^2] + \frac{2\tau\rho}{f} [(\partial_z A_0)^2 - (\partial_\rho A_0)^2] \quad (2.82)$$

$$\partial_\rho \partial_z A_0 = \partial_z \partial_\rho A_0 \quad (2.83)$$

$$0 = \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{f} \nabla A_0 \right) \quad (2.84)$$

En las ecuaciones (2.80) y (2.84); para hallar  $f$ , hacemos  $f = u^2$

$$u\Delta u = |\nabla u|^2 + \frac{\tau}{2} |\nabla A_0|^2 \quad (2.85)$$

$$u\Delta A_0 = 2(\nabla u) \cdot (\nabla A_0) \quad (2.86)$$

Escribamos (2.85) y (2.86) de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\rho}{u^2} \nabla (u^2 - \frac{\tau}{2} A_0^2) \right] = 0 \quad (2.87)$$

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\rho}{u^2} \nabla (A_0) \right] = 0 \quad (2.88)$$

Procedemos de manera análoga al utilizado para el campo magnético, eligiendo  $\Psi$  de tal manera que cumpla con

$$u = U(\Psi_{(\rho,z)}) \quad (2.89)$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{2}{\tau}} V(\Psi_{(\rho,z)}) \quad (2.90)$$

$$\Delta \Psi = 0. \quad (2.91)$$

En ese caso, las ecuaciones (2.87) y (2.88) se pueden escribir como

$$U(U^2 - V^2)'' = 2U'(U^2 - V^2)' \quad (2.92)$$

$$UV'' = 2U'V' \quad (2.93)$$

Las cuales se reducen a las siguientes ecuaciones

$$(U^2 - V^2)' = BU^2 \quad (2.94)$$

$$V' = AV^2 \quad (2.95)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes reales. Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales encontramos

$$\Psi = \int \frac{dV}{AV^2 + BV + C} \quad (2.96)$$

donde  $C$  es otra constante real. Resolviendo la integral obtenemos

### 2.3.1. Solución hiperbólica

Cuando  $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ , de manera similar al caso de campo magnetostático se tiene que

$$V = -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \operatorname{Tanh}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.97)$$

Luego teniendo en cuenta que  $f = u^2$  obtenemos

$$V' = -\frac{\Delta}{4A} \operatorname{Sech}^2\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.98)$$

$$U^2 = -\frac{\Delta}{4A^2} \operatorname{Sech}^2\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.99)$$

de donde hallamos

$$f = -\frac{\Delta}{4A^2} \operatorname{Sech}^2\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.100)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 = -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \operatorname{Tanh}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right]. \quad (2.101)$$

Como  $\operatorname{Tanh}^2 + \operatorname{Sech}^2 = 1$ , finalmente obtenemos:

$$f - \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 + \frac{B}{2A}\right)^2 = -\frac{\Delta}{4A^2} \quad (2.102)$$

### 2.3.2. Solución parabólica

Para  $\Delta = 0$ , de manera similar al caso magnetostático

$$V = -\frac{1}{A(\Psi + d)} - \frac{B}{2A} \quad (2.103)$$

$$V' = \frac{1}{A(\Psi + d)^2} \quad (2.104)$$

$$U^2 = \frac{1}{A^2(\Psi + d)^2}. \quad (2.105)$$

Entonces

$$f = \frac{1}{A^2(\Psi + d)^2} \quad (2.106)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{A(\Psi + d)} \quad (2.107)$$

donde se cumple que

$$f - \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 + \frac{B}{2A}\right)^2 = 0. \quad (2.108)$$



### 2.3.3. Solución elíptica

Para  $\Delta < 0$ , obtenemos:

$$V = -\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{Tan}\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.109)$$

$$V' = -\frac{\Delta}{4A} \text{Sec}^2\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.110)$$

$$U^2 = -\frac{\Delta}{4A^2} \text{Sec}^2\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right]. \quad (2.111)$$

En consecuencia

$$f = -\frac{\Delta}{4A^2} \text{Sec}^2\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.112)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 = -\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{Tan}\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (2.113)$$

de donde

$$f - \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 + \frac{B}{2A}\right)^2 = -\frac{\Delta}{4A^2} \quad (2.114)$$

### 2.3.4. Solución general

Sea cual fuere el signo del determinante  $\Delta$ , se presenta la siguiente ecuación en los tres casos vistos

$$f - \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 + \frac{B}{2A}\right)^2 = -\frac{\Delta}{4A^2}, \quad (2.115)$$

la cual se puede escribir como:

$$f = \frac{\tau}{2} (A_0)^2 + \frac{B}{A} \sqrt{\frac{\tau}{2}} A_0 + \frac{C}{A} \quad (2.116)$$

## 2.4. Dipolos y campos electromagnéticos

Para el caso del campo magnetostático: teniendo en cuenta que  $f = \frac{\rho^2}{F^2}$  al reemplazar las ecuaciones (2.48) y (2.49) en las ecuaciones (2.37) y (2.38), obtenemos

$$\partial_z \gamma = -2 \frac{U'}{U} \partial_z \Psi + 2 \frac{\rho}{U^2} [(U')^2 + (V')^2] \partial_\rho \Psi \partial_z \Psi \quad (2.117)$$

$$\partial_\rho \gamma = \frac{1}{\rho} - 2 \frac{U'}{U} \partial_\rho \Psi + \frac{\rho}{U^2} [(U')^2 + (V')^2] [(\partial_\rho \Psi)^2 - (\partial_z \Psi)^2]. \quad (2.118)$$

Luego nos vemos en la necesidad de definir  $\Psi$  para que  $\gamma$  pueda ser definido analíticamente. Debido a que se cumple

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{\partial_\rho}{\rho} + \partial_z^2\right) \Psi = 0, \quad (2.119)$$

es decir, la función  $\Psi$  satisface  $\nabla^2 \Psi = 0$  en coordenadas cilíndricas, con independencia en el ángulo polar (simetría axial). Debido a ello escogemos el potencial escalar clásico para un dipolo magnético

$$\Psi = \mu \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.120)$$

donde  $\mu = \frac{\mu_0 m}{4\pi}$ . De esta manera, para  $\gamma$  obtenemos:

$$\gamma = \ln\left(\frac{\rho}{F^2}\right) + \frac{\Delta}{16} \frac{\mu^2 \rho^2 (\rho^2 - 8z^2)}{(\rho^2 + z^2)^4} \quad (2.121)$$

donde  $\Delta = B^2 + 4AC$ . Para el campo electrostático: teniendo en cuenta que  $f = u^2$  reemplazamos las ecuaciones (2.89) y (2.90) en (2.81) y (2.82), de donde obtenemos:

$$\partial_z \gamma = \frac{1}{U^2} [(U') - (V')^2] 2\rho \partial_\rho \Psi \partial_z \Psi \quad (2.122)$$

$$\partial_\rho \gamma = \frac{1}{U^2} [(U')^2 - (V')^2] \rho [(\partial_\rho \Psi)^2 - \partial_z \Psi]^2 \quad (2.123)$$

donde nuevamente  $\Psi$  cumple con la ecuación (2.119). Entonces escogemos el potencial escalar clásico para un dipolo eléctrico

$$\Psi = \frac{\nu z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.124)$$

donde  $\nu = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$ . De la misma manera, para el caso electrostático, obtenemos:

$$\gamma = \frac{\Delta}{16} \frac{\nu^2 \rho^2 (\rho^2 - 8z^2)}{(\rho^2 + z^2)^4} \quad (2.125)$$

donde  $\Delta = B^2 - 4AC$

En resumen, en este capítulo hemos desarrollado el cálculo de los parámetros que caracterizan a la métrica en función de los que caracterizan a el campo magnético  $A_2(\rho z)$  y eléctrico  $A_0(\rho z)$ . Corroboramos los resultados obtenidos por Bonnor (1954). Para obtener esos resultados seguimos los procedimientos realizados por Gutsunaev et al. (2007). Por nuestra parte avanzamos hasta obtener tres casos: hiperbólico, parabólico y elíptico en ambos casos de solo campo magnético y solo eléctrico. Estos casos se denotan en analogía con el tratamiento clásico del problema de los dos cuerpos donde se tienen trayectorias que se caracterizan según dichas categorías. El parámetro  $f$  de la métrica es la que se expresa en función de funciones hiperbólicas o trigonométricas según sea la categoría.

La función  $\Psi$  que es independiente del ángulo  $\varphi$  es la que conecta el parámetro  $f$ , que caracteriza a la métrica con el potencial del campo magnético  $A_2$  y el del eléctrico  $A_0$ . El problema se simplifica entonces a determinar la función  $\Psi$  la cual cumple con la ecuación de Laplace. Para lo cual se asume un potencial clásico de dipolo ya sea magnético o eléctrico dependiendo del caso.

## Capítulo 3

# Trayectoria de partículas en campo electromagnético en métrica con simetría axial

Las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de las geodésicas a las cuales se les tiene que agregar la interacción electromagnética externa. Para una partícula de prueba de carga  $q$  y masa en reposo  $m$  tenemos que su movimiento en el espacio tiempo curvo viene descrito por la siguiente ecuación

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu \quad (3.1)$$

donde  $F^\mu{}_\nu$  es el tensor mixto del campo electromagnético,  $\Gamma_{\alpha\beta}$  son los símbolos de Christoffel y  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  es la cuadrivelocidad. Mientras que la luz realiza trayectorias que no se ven afectadas directamente por el tensor electromagnético ya que no posee carga o masa en reposo. Dichas trayectorias se hallan mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (3.2)$$

Sin embargo, las geodésicas de la luz si se ven afectadas por el campo electromagnético, ya que el parámetro  $f$  se expresa en función de los potenciales electromagnéticos; de manera que se puede decir que las ecuaciones de movimiento en este caso son afectadas, indirectamente, por los campos electromagnéticos. Nótese que la parametrización es respecto a  $\lambda$  ya que el tiempo propio  $\tau$ , por tratarse de la luz ya no vendría a ser un buena variable para parametrizar las geodésicas pues se cumple

$$c^2 d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (3.3)$$

Con esta información procedemos a construir el potencial efectivo en analogía con lo que se tenía en el caso clásico. Veremos que el potencial efectivo nos ayuda a determinar si la trayectoria será un órbita, se alejará o se acercará al origen. Luego, en las secciones siguientes procedemos a construir las ecuaciones adimensionales asumiendo constantes de manera que las ecuaciones sean las más simples y representativas a la hora de describir el movimiento. Para resolver las ecuaciones diferenciales utilizamos el método de Runge Kutta de orden cuatro, según el algoritmo descrito en Kiusalaas (2013). El pseudocódigo general para cada solución ya sea hiperbólica, parabólica o elíptica se encuentra en el apéndice C.

### 3.1. Potencial efectivo

De manera análoga al caso clásico, en presencia de fuerzas centrales, podemos introducir un “potencial efectivo”. En base a Mukhiemer (2020), mostramos el siguiente lagrangiano

para una partícula de prueba de carga  $q$  y masa en reposo  $m$  en presencia de un campo electromagnético en espacio tiempo curvo:

$$L = -mc\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} + qA_\mu\dot{x}^\mu, \quad (3.4)$$

el cual al aplicar el principio de mínima acción

$$S = \int L d\tau, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \quad (3.5)$$

se obtiene la ecuación (3.1). Comprobemos que este lagrangiano se reduce lagrangiano clásico cuando se tiene espacio tiempo sin curvatura ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ) y velocidades no relativistas. Teniendo en cuenta que en espacio tiempo plano se cumple

$$A^\mu = \left( \frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (3.6)$$

se tiene que

$$-mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} d\tau = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (3.7)$$

$$qA_\mu\dot{x}^\mu d\tau = (-q\phi + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) dt. \quad (3.8)$$

Para velocidades no relativistas podemos hacer la siguiente aproximación

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq 1 - \frac{v^2}{2c^2} \quad (3.9)$$

De (3.8) y (3.9) se tiene la acción y el lagrangiano clásicos son

$$S_{\text{clásico}} = \int L_{\text{clásico}} = \int \left( \frac{mv^2}{2} - q\phi + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - mc^2 \right) dt. \quad (3.10)$$

. En la ecuación anterior notamos que el término extra  $-mc^2$  es solo un término constante que no afecta a las ecuaciones de movimiento al aplicar el principio de mínima acción y por lo tanto el lagrangiano propuesto (3.4) es aceptable.

Notemos que como la métrica es independiente de  $t$  y  $\phi$ , debido a las ecuaciones de Euler-Lagrange en(3.4), habrán dos cantidades conservadas:

$$c_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = mc \frac{g_{0\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} + qA_0 \quad (3.11)$$

$$c_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = mc \frac{g_{2\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} + qA_2 \quad (3.12)$$

Como la parametrización es respecto al tiempo propio se tiene que

$$\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = c, \quad (3.13)$$

entonces

$$c_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = mg_{0\nu}\dot{x}^\nu + qA_0 \quad (3.14)$$

$$c_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = mg_{2\nu}\dot{x}^\nu + qA_2 \quad (3.15)$$

Teniendo en cuenta la métrica de Weyl y reemplazando las dos ecuaciones anteriores en (3.13), obtenemos:

$$\left(\frac{qA_0}{mc} - \frac{c_1}{mc}\right)^2 = \frac{e^{2\gamma}}{c^2} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + f + \frac{f^2}{\rho^2} \left(\frac{c_2}{mc} - \frac{qA_2}{mc}\right)^2 \quad (3.16)$$

En el caso electrostático ( $A_2 = 0$ ,  $A_0 = A_0(\rho, z)$ ), considerando las cantidades adimensionales,

$$\bar{c}_1 = -\frac{c_1}{mc}, \quad (3.17)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{c_2}{mc^2 T}, \quad (3.18)$$

$$\bar{A}_0 = \frac{q}{mc} A_0, \quad (3.19)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{q}{mc^2 T} A_2, \quad (3.20)$$

donde  $T = 1$  s, obtenemos la ecuación adimensional

$$(\bar{c}_1 + \bar{A}_0)^2 = e^{2\gamma} (\dot{\bar{\rho}}^2 + \dot{\bar{z}}^2) + f + \frac{f^2}{\bar{\rho}^2} \bar{c}_2^2 \quad (3.21)$$

donde  $\rho$  y  $z$  son las distancias adimensionales normalizadas a  $cT$ . En el caso magnetostático ( $A_0 = 0$ ,  $A_2 = A_2(\rho, z)$ ) obtenemos:

$$\bar{c}_1^2 = e^{2\gamma} (\dot{\bar{\rho}}^2 + \dot{\bar{z}}^2) + f + \frac{f^2}{\bar{\rho}^2} (\bar{c}_2 - \bar{A}_2)^2. \quad (3.22)$$

En esta última ecuación se ve claramente que en la parte izquierda se tienen una constante mientras que en el otro se tiene un término cinético relacionado con las velocidades radial y en el eje  $z$ . El término adicional de la derecha se puede tratar como una especie de potencial efectivo dependiente de  $\bar{\rho}$  y  $\bar{z}$

$$V_{\text{mag, eff}} = f + \frac{f^2}{\bar{\rho}^2} (\bar{c}_2 - \bar{A}_2)^2 \quad (3.23)$$

mientras que para el caso electrostático el potencial efectivo depende de la constante adimensional  $\bar{c}_1$

$$V_{\text{elec, eff}} = f + \frac{f^2}{\bar{\rho}^2} \bar{c}_2^2 - \bar{A}_0^2 - 2\bar{A}_0 \bar{c}_1 \quad (3.24)$$

En el caso de la luz utilizamos el lagrangiano utilizado por Shirafuji (1983)

$$L = \kappa g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad S = \int L d\lambda \quad (3.25)$$

donde  $\kappa$  es una constante de proporcionalidad. Notemos que en este caso la parametrización es respecto a  $\lambda$  ya que no podemos parametrizar utilizando el tiempo propio pues en el caso de la luz es cero. Para ver más detalles sobre el uso de este otro parámetro afín  $\lambda$  véase el apéndice G. Además se cumple:

$$\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 0 \quad (3.26)$$

De manera análoga a como hemos procedido para el caso anterior, se tiene que el potencial efectivo en la luz para ambos casos magnético y eléctrico es

$$V_{\text{luz, eff}} = \frac{f^2}{\bar{\rho}^2} (\bar{c}_2)^2 \quad (3.27)$$

Los potenciales efectivos anteriores; para partículas con masa y la luz ayudarán a determinar si una trayectoria es acotada o no. .

### 3.2. Campo magnetostático

En el caso de un campo **magnetostático** obtenemos

$$0 = c\ddot{t} + \frac{c\dot{t}\dot{f}}{f} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{m}\dot{\varphi}f e^{-2\gamma}\partial_\rho A_2 &= \ddot{\rho} + c^2\dot{t}^2\frac{f}{2}e^{-2\gamma}\partial_\rho f + \left(\partial_\rho\gamma - \frac{\partial_\rho f}{2f}\right)(\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) \\ &\quad + \left(\partial_z\gamma - \frac{\partial_z f}{2f}\right)2\dot{\rho}\dot{z} + \dot{\varphi}^2\frac{\rho e^{-2\gamma}}{2f}(\rho\partial_\rho f - 2f) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$-\frac{q}{m}\frac{f}{\rho^2}\dot{A}_2 = \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}\frac{d}{d\tau}\ln\left(\frac{\rho^2}{f}\right) \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{m}\dot{\varphi}f e^{-2\gamma}\partial_z A_2 &= \ddot{z} + c^2\dot{t}^2\frac{f}{2}e^{-2\gamma}\partial_z f + \left(\frac{\partial_z f}{2f} - \partial_z\gamma\right)(\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) \\ &\quad + \left(\partial_\rho\gamma - \frac{\partial_\rho f}{2f}\right)2\dot{\rho}\dot{z} + \dot{\varphi}^2\frac{\rho^2}{2f}e^{-2\gamma}\partial_z f \end{aligned} \quad (3.31)$$

La primera y tercera ecuación de las anteriores pueden ser simplificadas:

$$\dot{t} = \frac{C_1}{f} \quad (3.32)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{q}{m}\frac{f}{\rho^2}A_2 + \frac{f}{\rho^2}C_2 \quad (3.33)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. Definimos las siguientes cantidades adimensionales:  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{z}$ ,  $\bar{A}_2$ ; las cuales cumplen con las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \tau &= T\bar{\tau} \\ t &= T\bar{t} \\ \rho &= cT\bar{\rho} \\ z &= cT\bar{z} \\ A_2 &= \frac{mc^2T}{q}\bar{A}_2 \end{aligned}$$

donde  $T = 1$  s y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Luego las ecuaciones de movimiento para el caso magnetostático se convierten en las siguientes:

$$0 = f\ddot{\bar{t}} + \dot{\bar{t}}\dot{f} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} f e^{-2\gamma}\partial_{\bar{\rho}}\bar{A}_2\dot{\varphi} &= \ddot{\bar{\rho}} + \dot{\bar{t}}^2\frac{f}{2}e^{-2\gamma}\partial_{\bar{\rho}}f + \left(\partial_{\bar{\rho}}\gamma - \frac{\partial_{\bar{\rho}}f}{2f}\right)(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ &\quad + \left(\partial_{\bar{z}}\gamma - \frac{\partial_{\bar{z}}f}{2f}\right)2\dot{\bar{\rho}}\dot{\bar{z}} + \dot{\varphi}^2\frac{\bar{\rho}e^{-2\gamma}}{2f}(\bar{\rho}\partial_{\bar{\rho}}f - 2f) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$-\frac{f}{\bar{\rho}^2}\dot{\bar{A}}_2 = \ddot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{\varphi}}\frac{d}{d\bar{\tau}}\ln\left(\frac{\bar{\rho}^2}{f}\right) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} f e^{-2\gamma}\partial_{\bar{z}}\bar{A}_2\dot{\varphi} &= \ddot{\bar{z}} + \dot{\bar{t}}^2\frac{f}{2}e^{-2\gamma}\partial_{\bar{z}}f + \left(\frac{\partial_{\bar{z}}f}{2f} - \partial_{\bar{z}}\gamma\right)(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ &\quad + \left(\partial_{\bar{\rho}}\gamma - \frac{\partial_{\bar{\rho}}f}{2f}\right)2\dot{\bar{\rho}}\dot{\bar{z}} + \dot{\varphi}^2\frac{\bar{\rho}^2}{2f}e^{-2\gamma}\partial_{\bar{z}}f \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde la derivación punto es sobre el tiempo propio adimensional  $\bar{\tau}$ .

### 3.2.1. Solución hiperbólica

Consideramos el caso del dipolo magnético en el que  $\Delta > 0$ . Recordando que  $F^2 = \frac{\rho^2}{f}$ , tenemos:

$$f = \frac{\rho^2}{\Delta} 4A^2 \cosh^2 \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2} (\Psi + d) \right] \quad (3.38)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}} A_2 = \frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \tanh \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2} (\Psi + d) \right] \quad (3.39)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) + \frac{\Delta}{16} \frac{\mu^2 \rho^2 (\rho^2 - 8z^2)}{(\rho^2 + z^2)^4} \quad (3.40)$$

$$\Psi = \frac{\mu z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.41)$$

Definimos la constante adimensional  $\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\tau}} \frac{a}{mc}$ , además, por razones de simplicidad en las ecuaciones, hacemos que las constantes cumplan con:

$$\frac{c^2 T^2}{\Delta} 4A^2 = 1 \quad (3.42)$$

$$\frac{A\mu}{cT} = 1 \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

y también definimos la constante adimensional

$$d = \frac{\mu}{c^2 T^2} \bar{d}. \quad (3.45)$$

Con estas constantes definidas, las ecuaciones (3.38), (3.39), (3.40) y (3.41) se convierten en

$$f = \bar{\rho}^2 \cosh^2 [\bar{\Psi} + \bar{d}] \quad (3.46)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{\delta B}{cT 2A} + \delta \tanh [\bar{\Psi} + \bar{d}] \quad (3.47)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) + \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho}^2 (\bar{\rho}^2 - 8\bar{z}^2)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} \quad (3.48)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.49)$$

donde  $\bar{d}$  es una fase que no afecta el carácter de las magnitudes, por ello, tomamos  $\bar{d} = 0$ . Además, según el sistema de unidades elegido, podemos seleccionar un objeto de prueba con relación  $\frac{a}{m}$ , tal que sin pérdida de generalidad,  $\delta = 1$ , por lo tanto

$$f = \bar{\rho}^2 \cosh^2 [\bar{\Psi}] \quad (3.50)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{B}{cT 2A} + \tanh [\bar{\Psi}] \quad (3.51)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) + \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho}^2 (\bar{\rho}^2 - 8\bar{z}^2)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} \quad (3.52)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.53)$$

No podemos hacer que  $f \rightarrow 1$  cuando  $\rho, z \rightarrow \infty$ . Entonces nos vemos tentados a decir que la métrica no es asintóticamente plana y no debe ser aceptada como una métrica que

describa algún fenómeno físico. Sin embargo la correcta definición para que una métrica sea asintóticamente plana vá mas allá del simple cálculo cuando  $r \rightarrow \infty$ , según Wald (1984), se puede encontrar que la correcta definición tiene que ver con diagramas conformes. En consecuencia para descartarlos habría que realizar mayor análisis; sin embargo, realizamos el estudio de las trayectorias de partículas en estos campos sin comprobar que sean planas en el infinito.

A partir de las ecuaciones anteriores, las ecuaciones de movimiento adimensionales para el caso magnetostático se escriben de la siguiente manera:

$$\ddot{\bar{t}} = -2\dot{\bar{t}} [\tanh \bar{\Psi} (\partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} \dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{\bar{z}}) + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}] \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\rho}} = & \bar{\rho}^2 e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} (\dot{\bar{\phi}} - \tanh \bar{\Psi} \dot{\bar{\phi}}^2) - [\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \frac{1}{\bar{\rho}} - \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}] (\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ & - [\partial_{\bar{z}} \gamma - \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi}] 2\dot{\bar{\rho}} \dot{\bar{z}} - \dot{\bar{t}}^2 \bar{\rho}^4 \cosh^4 \bar{\Psi} e^{-2\gamma} [\frac{1}{\bar{\rho}} + \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}] \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\ddot{\bar{\phi}} = (2 \tanh \bar{\Psi} \dot{\bar{\phi}} - 1) (\partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} \dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{\bar{z}}) \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{z}} = & \bar{\rho}^2 e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} (\dot{\bar{\phi}} - \tanh \bar{\Psi} \dot{\bar{\phi}}^2) + (\partial_{\bar{z}} \gamma - \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi}) (\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ & - (\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \frac{1}{\bar{\rho}} - \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}) 2\dot{\bar{\rho}} \dot{\bar{z}} - \dot{\bar{t}}^2 \bar{\rho}^4 \cosh^4 \bar{\Psi} e^{-2\gamma} \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Como vimos en la sección de potencial efectivo, hay tres cantidades que se conservan, las cuales caracterizan a las trayectorias. Estas son la derivada del tiempo propio con respecto a la parametrización  $\lambda$ , el momento angular y la energía. La conservación de dichas tres es debido a que la longitud de arco espacio temporal se conserva y el lagrangiano no presenta dependencia con respecto a  $t$  y  $\phi$ . Por otro lado, otra cosa que caracteriza a las trayectorias son sus condiciones iniciales, los cuales a su vez determinan las tres cantidades conservadas antes mencionadas.

Para el caso de una partícula de prueba masiva se tiene que existe una órbita alrededor de la fuente del campo magnético . Por ejemplo, con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\bar{\phi}}, \dot{\bar{z}}) = (0; 1,6; 0; 0,5; 0,7; -0,31; 0,41; 0) \quad (3.58)$$

los parámetros de la órbita son

$$\bar{c}_2 = 0,51 \quad \bar{c}_1 = 1,81$$



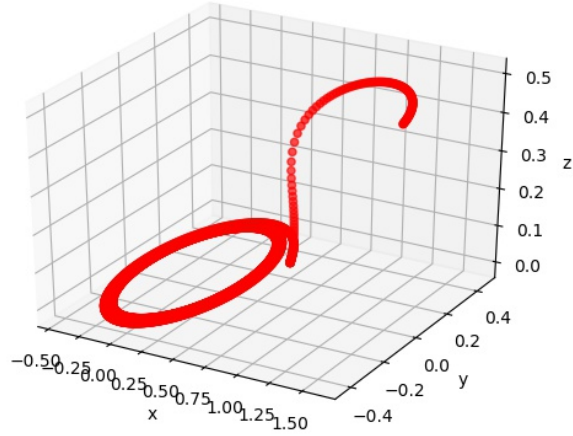


Figura 3.1: Trayectoria para partícula masiva de prueba en campo dipolar magnético en el caso hiperbólico. La parametrización es respecto a  $\lambda$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a esta trayectoria explica el porque de la existencia de la órbita debido a que hay un pozo de potencial cerca de  $z = 0$ . Las regiones cuadrículadas son permitidas y las de color celeste son las prohibidas definidas por la condición  $V_{eff} \leq \bar{c}_1^2$ .

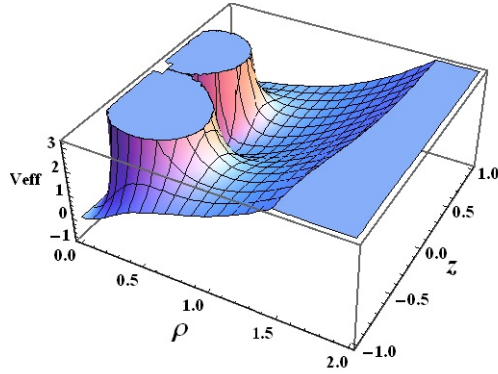


Figura 3.2: Potencial efectivo a la que es sometida la partícula de prueba en campo dipolar magnético en el caso hiperbolico. ( $V_{eff} \leq 3,28$ ,  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ )

Para el caso de la luz se tiene también que existe una órbita alrededor de la fuente de campo magnético. Con los siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 1.27, 0, 0.3, 0.4, -0.31, 0.4, 0) \quad (3.59)$$

se tienen los parámetros de la órbita:

$$\bar{c}_2 = 0,39 \quad \bar{c}_1 = 0,66$$

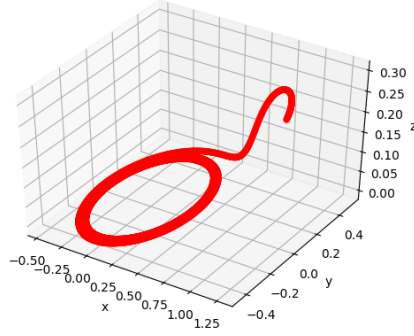


Figura 3.3: Trayectoria para la luz en campo dipolar magnético en el caso hiperbólico. La parametrización es respecto a  $\lambda$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria de la luz explica también el porque de dicha trayectoria ya que existe un pozo de potencial donde el movimiento puede ser órbita.

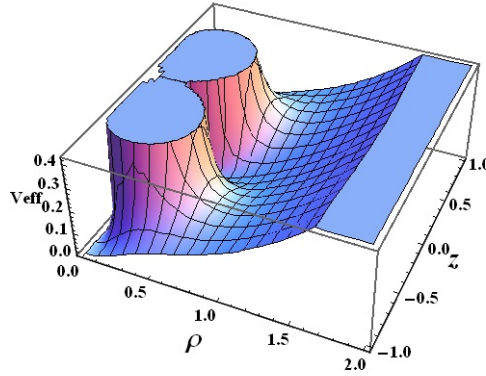


Figura 3.4: Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar magnético en el caso hiperbolico. ( $V_{eff} \leq 0,43$ ,  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ )

### 3.2.2. Solución parabólica

Consideramos el caso del dipolo magnético en el que  $\Delta = 0$

$$f = -\rho^2 A^2 (\Psi + d)^2 \quad (3.60)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}} A_2 = \frac{1}{A(\Psi + d)} + \frac{B}{2A} \quad (3.61)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) \quad (3.62)$$

$$\Psi = \frac{\mu z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.63)$$

Utilizamos la constante adimensional  $\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\tau} \frac{q}{mc}}$ ; además

$$\frac{A\mu}{cT} = 1 \quad (3.64)$$

y definimos la constante adimensional

$$d = \frac{\mu}{c^2 T^2} \bar{d}. \quad (3.65)$$

Con estas constantes definidas, las ecuaciones(3.60)-(3.63) se convierten en

$$f = -\bar{\rho}^2(\bar{\Psi} + \bar{d})^2 \quad (3.66)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{\delta}{\bar{\Psi} + \bar{d}} + \frac{\delta B}{2A cT} \quad (3.67)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) \quad (3.68)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.69)$$

Sin pérdida de generalidad, escogemos  $\delta = 1$  y  $\bar{d} = 1$ . Este último debido a que  $\bar{A}_2$  debe ser constante en el infinito ( $\bar{\rho}, \bar{z} \rightarrow \infty$ ), de esta manera se asegura que las derivadas de  $\bar{A}_2$  sean nulas y que no haya campo electromagnético en el infinito.

$$f = -\bar{\rho}^2(\bar{\Psi} + 1)^2 \quad (3.70)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{\bar{\Psi} + 1} + \frac{B}{2A cT} \quad (3.71)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) \quad (3.72)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.73)$$

Con las anteriores ecuaciones, las ecuaciones de movimiento adimensionales para la solución parabólica del caso magnetostático son

$$\ddot{t} = -2\dot{t}\left[\left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}}{\bar{\Psi} + 1}\right)\dot{\bar{\rho}} + \frac{\partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}}{\bar{\Psi} + 1}\dot{\bar{z}}\right] \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\rho}} = & \bar{\rho}^2 e^{-2\gamma} \partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi} \left(\dot{\bar{\rho}} - \frac{\dot{\bar{\rho}}^2}{\bar{\Psi} + 1}\right) - \left[\partial_{\bar{\rho}}\gamma - \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}}{\bar{\Psi} + 1}\right](\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ & - \left[\partial_{\bar{z}}\gamma - \frac{\partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}}{\bar{\Psi} + 1}\right] 2\dot{\bar{\rho}}\dot{\bar{z}} - \dot{t}^2 \bar{\rho}^4 (\bar{\Psi} + 1)^4 e^{-2\gamma} \left[\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}}{\bar{\Psi} + 1}\right] \end{aligned}$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = \left(\frac{2\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\Psi} + 1} - 1\right)(\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}\dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}\dot{\bar{z}})$$

$$\ddot{\bar{z}} = \bar{\rho}^2 e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}}\bar{\Psi} \left(\dot{\bar{z}} - \frac{\dot{\bar{z}}^2}{\bar{\Psi} + 1}\right) + \left(\partial_{\bar{z}}\gamma - \frac{\partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}}{\bar{\Psi} + 1}\right)(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \quad (3.75)$$

$$- \left(\partial_{\bar{\rho}}\gamma - \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}}{\bar{\Psi} + 1}\right) 2\dot{\bar{\rho}}\dot{\bar{z}} - \dot{t}^2 \bar{\rho}^4 (\bar{\Psi} + 1)^4 e^{-2\gamma} \left(\frac{\partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}}{\bar{\Psi} + 1}\right) \quad (3.76)$$

Para el caso de una partícula de prueba masiva se tiene que existe una trayectoria en espiral hacia arriba en donde la partícula se aleja de la fuente del campo magnético en sentido horario. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 0.7, 0, 0.7, 0.08, 0, -1.73, 0) \quad (3.77)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = 1,16 \quad \bar{c}_1 = -0,12$$

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria de la partícula masiva explica el hecho de que la partícula se aleja debido a que el potencial no tiene algún pozo de potencial prominente y por lo tanto la partícula se va hacia afuera.

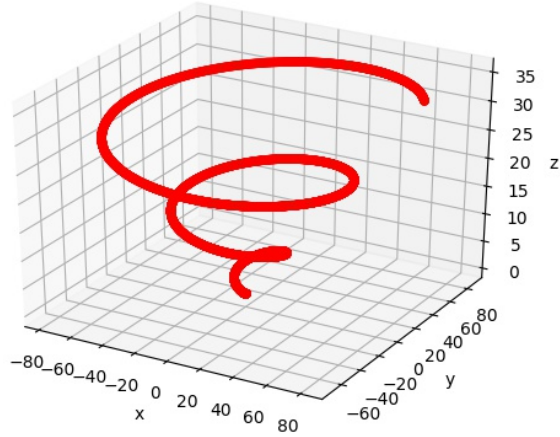


Figura 3.5: Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso parabólico. La parametrización es respecto a  $\tau$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.01

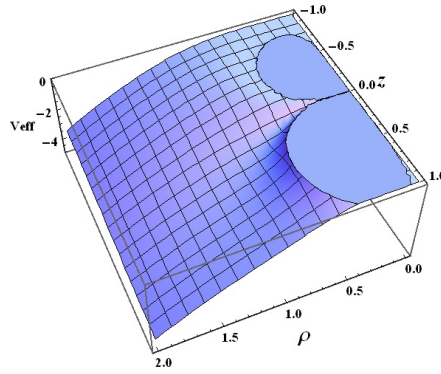


Figura 3.6: Potencial efectivo a la que es sometida la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso parabólico. ( $V_{eff} \leq 0,01$ ,  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ )

Existe otra trayectoria para la cual la partícula masiva también se aleja en sentido antihorario de manera espiral, pero esta vez hacia la dirección  $z$  negativo. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \bar{\phi}, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\bar{\phi}}, \dot{\bar{z}}) = (0, 0.8, 0, 0.23, 0.04, 0, -1.4, 0) \quad (3.78)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = 1,43 \quad \bar{c}_1 = -0,05$$

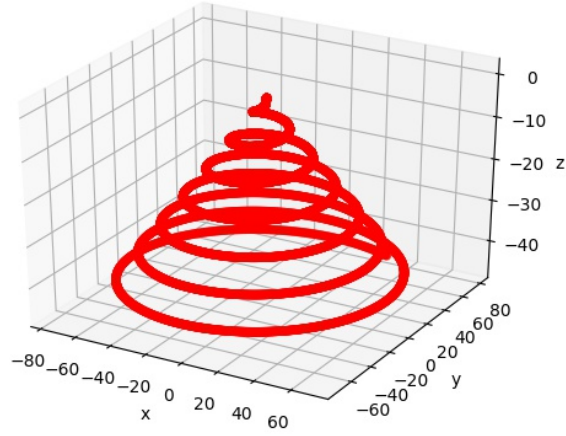


Figura 3.7: Trayectoria para la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso parabólico. Nótese que en este caso la partícula se aleja en la dirección eje  $z$  negativo. La parametrización es respecto a  $\tau$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria de la partícula masiva explica porque la partícula se aleja y esto es también debido a que no hay algún pozo de potencial profundo.

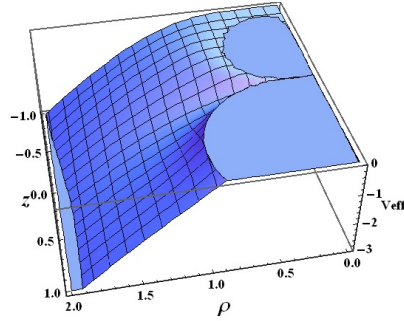


Figura 3.8: Potencial efectivo a la que es sometida la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso parabólico. ( $V_{eff} \leq 0,0025$ ,  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ )

Una de las trayectorias de la luz, muestra que esta se aleja de la fuente del campo magnético en línea curva. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 10.5, 0, 1.9, 0.01, 0.09, 0, 0.07) \quad (3.79)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = 0,0 \quad \bar{c}_1 = -1,11$$

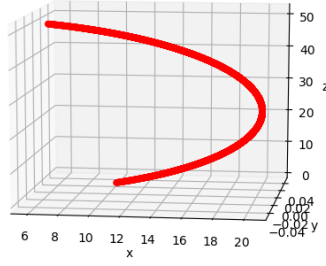


Figura 3.9: Trayectoria para la luz en campo dipolar magnético en el caso parabólico. Nótese que en este caso se aleja en una trayectoria curva. La parametrización es respecto a  $\lambda$  y va de 0 a 680 en pasos de 0.1

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria de la luz es nulo. Esto debido a que la constante  $\bar{c}_2$  es nula.

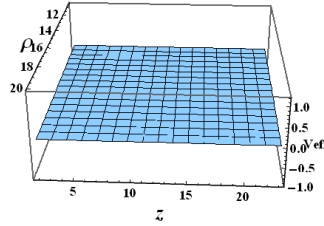


Figura 3.10: Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar magnético en el caso parabólico. ( $V_{eff} \leq 1,2232$ ;  $10,5 \leq \rho \leq 20$ ;  $1,9 \leq z \leq 23$ )

### 3.2.3. Solución elíptica

Consideramos el caso del dipolo magnético en el que  $\Delta < 0$

$$f = \frac{\rho^2}{\Delta} 4A^2 \cos^2\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (3.80)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}} A_2 = \frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A} \tan\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (3.81)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) + \frac{\Delta}{16} \frac{\mu^2 \rho^2 (\rho^2 - 8z^2)}{(\rho^2 + z^2)^4} \quad (3.82)$$

$$\Psi = \frac{\mu z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.83)$$

Utilizamos la constante adimensional  $\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\tau}} \frac{q}{mc}$ ; además hacemos:

$$\frac{c^2 T^2}{\Delta} 4A^2 = -1 \quad (3.84)$$

$$\frac{A\mu}{cT} = 1 \quad (3.85)$$

$$(3.86)$$

y también definimos la constante adimensional

$$d = \frac{\mu}{c^2 T^2} \bar{d}. \quad (3.87)$$

Con estas constantes definidas, las ecuaciones (3.80)-(3.83) se convierten en

$$f = -\bar{\rho}^2 \cos^2 [\bar{\Psi} + \bar{d}] \quad (3.88)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{\delta B}{cT 2A} - \delta \tan [\bar{\Psi} + \bar{d}] \quad (3.89)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) - \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho}^2(\bar{\rho}^2 - 8\bar{z}^2)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} \quad (3.90)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.91)$$

Luego escogemos  $\bar{d} = 0$  y  $\delta = 1$ , en consecuencia

$$f = -\bar{\rho}^2 \cos^2 [\bar{\Psi}] \quad (3.92)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{B}{cT 2A} - \tan [\bar{\Psi}] \quad (3.93)$$

$$\gamma = \ln\left(\frac{f}{\rho}\right) - \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho}^2(\bar{\rho}^2 - 8\bar{z}^2)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} \quad (3.94)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.95)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento adimensionales para la solución elíptica del caso magnetostático son:

$$\ddot{\bar{t}} = 2\dot{\bar{t}} [\tan \bar{\Psi} (\partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} \dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{\bar{z}}) - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}] \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\rho}} = & \bar{\rho}^2 e^{-2\gamma} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} (\dot{\bar{\rho}} + \tan \bar{\Psi} \dot{\bar{\rho}}^2) - [\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \frac{1}{\bar{\rho}} + \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}] (\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ & - [\partial_{\bar{z}} \gamma + \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi}] 2\dot{\bar{\rho}} \dot{\bar{z}} - \dot{\bar{t}}^2 \bar{\rho}^4 \cos^4 \bar{\Psi} e^{-2\gamma} [\frac{1}{\bar{\rho}} - \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}] \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\ddot{\bar{\phi}} = -(2 \tan \bar{\Psi} \dot{\bar{\phi}} + 1) (\partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} \dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{\bar{z}}) \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{z}} = & \bar{\rho}^2 e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} (\dot{\bar{\rho}} + \tan \bar{\Psi} \dot{\bar{\rho}}^2) + (\partial_{\bar{z}} \gamma + \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi}) (\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ & - (\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \frac{1}{\bar{\rho}} + \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}) 2\dot{\bar{\rho}} \dot{\bar{z}} + \dot{\bar{t}}^2 \bar{\rho}^4 \cos^4 \bar{\Psi} e^{-2\gamma} \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Para el caso de una partícula de prueba masiva se tiene que existe una trayectoria en espiral dirigida hacia  $z$  positivo en donde la partícula se aleja de la fuente del campo magnético en sentido horario. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \bar{\phi}, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\bar{\phi}}, \dot{\bar{z}}) = (0, 0.7, 0, 0.7, 0.3, 0, -0.76, 0) \quad (3.100)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = 0,47 \quad \bar{c}_1 = -0,08$$

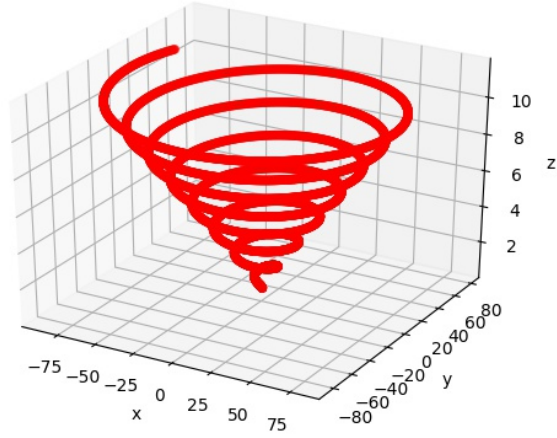


Figura 3.11: Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso elíptico. La parametrización es respecto a  $\tau$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a esta trayectoria de la partícula masiva explica el hecho de que la partícula se aleje porque no hay algún pozo de potencial profundo.

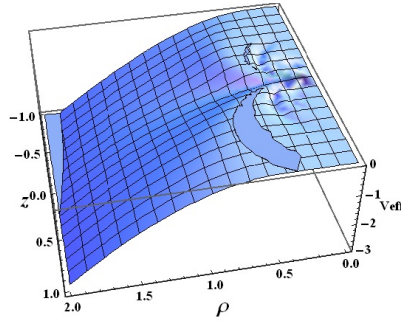


Figura 3.12: Potencial efectivo a la que es sometido la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso elíptico. ( $V_{eff} \leq 0,0069$ ,  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ )

Existe otra trayectoria para la cual la partícula masiva también se aleja en sentido horario de manera espiral, pero esta vez hacia la dirección  $z$  positivo. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 0.8, 0, 0.23, 0.27, 0, -0.94, 0) \quad (3.101)$$

tenemos los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = 0,69 \quad \bar{c}_1 = -0,15$$



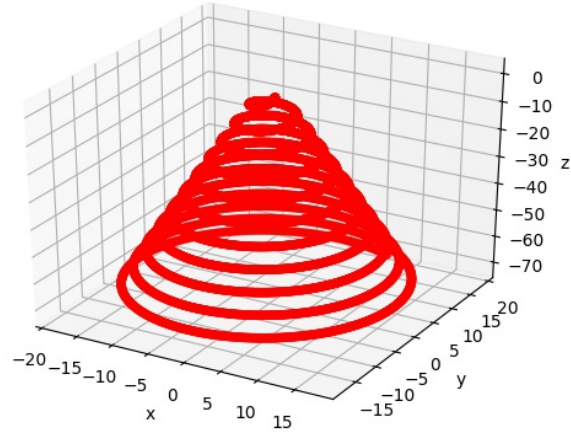


Figura 3.13: Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso elíptico. Nótese que en este caso la partícula se aleja en la dirección eje  $z$  positivo. La parametrización es respecto a  $\tau$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.01

En el correspondiente potencial efectivo se observa que no hay pozo de potencial por lo que la partícula se alejará de la fuente.

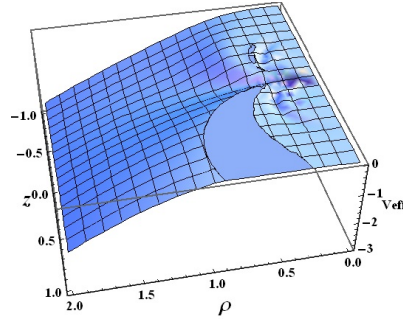


Figura 3.14: Potencial efectivo a la que es sometido la partícula masiva en campo dipolar magnético en el caso elíptico. ( $V_{eff} \leq 0,0215$ ,  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ )

Una de las trayectorias de la luz muestra que se acerca a la fuente de campo magnético. Se puede saber que se acerca a la fuente de campo magnético y no retornará ya que los valores crecen demasiado al ingresar a regiones donde  $\rho \sim 0$  y por lo tanto se produce un colapso haciendo que los parámetros sean demasiado grandes. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \bar{\phi}, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\bar{\phi}}, \dot{\bar{z}}) = (0, 0.4, 0, 0.9, 0.10, 0.02, 0.01, 0.01) \quad (3.102)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = -0,03 \quad \bar{c}_1 = -0,01$$

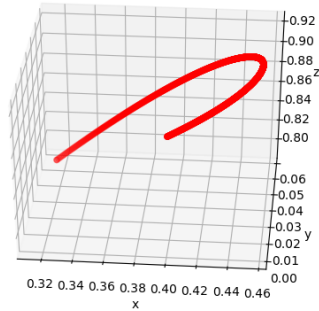


Figura 3.15: Trayectoria para la luz en campo dipolar magnético en el caso elíptico. Nótese que en este caso la luz se acerca ala fuente de campo magnético. La parametrización es respecto a  $\lambda$  y va de 0 a 15 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria de la luz explica porque esta colapsa hacia el origen donde se encuentra la fuente del campo electromagnético. El potencial efectivo tiene un pozo grande en el origen lo cual hace que la luz vaya al interior

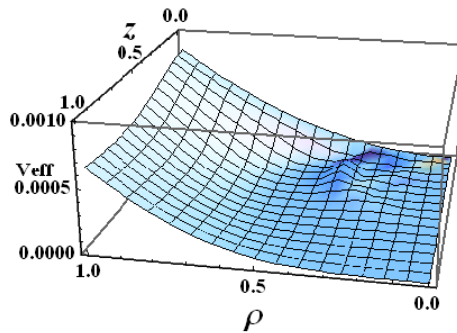


Figura 3.16: Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar magnético en el caso elíptico. ( $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ ). En el caso presente hemos mostrado regiones en donde  $0 \leq V_{eff} \leq 0,001$ .

### 3.3. Campo electrostático

En el caso de un campo **electrostático** tenemos

$$\frac{q}{m} \frac{\dot{A}_0}{f} = c\ddot{t} + \frac{c\dot{t}\dot{f}}{f} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{m} f e^{-2\gamma} \partial_\rho A_0 c \dot{t} &= \ddot{\rho} + c^2 \dot{t}^2 \frac{f}{2} e^{-2\gamma} \partial_\rho f + (\partial_\rho \gamma - \frac{\partial_\rho f}{2f})(\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) \\ &+ (\partial_z \gamma - \frac{\partial_z f}{2f}) 2\dot{\rho}\dot{z} + \dot{\varphi}^2 \frac{\rho e^{-2\gamma}}{2f} (\rho \partial_\rho f - 2f) \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$0 = \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{d}{d\tau} \ln\left(\frac{\rho^2}{f}\right) \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{m} f e^{-2\gamma} \partial_z A_0 c \dot{t} &= \ddot{z} + c^2 \dot{t}^2 \frac{f}{2} e^{-2\gamma} \partial_z f + (\frac{\partial_z f}{2f} - \partial_z \gamma)(\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) \\ &+ (\partial_\rho \gamma - \frac{\partial_\rho f}{2f}) 2\dot{\rho}\dot{z} + \dot{\varphi}^2 \frac{\rho^2}{2f} e^{-2\gamma} \partial_z f \end{aligned} \quad (3.106)$$

La primera y tercera ecuación de las anteriores pueden ser simplificadas:

$$\dot{t} = \frac{q}{m} \frac{A_0}{f c} + \frac{C_1}{f} \quad (3.107)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{f}{\rho^2} C_2. \quad (3.108)$$

Definimos las siguientes cantidades adimensionales:  $\bar{\tau}, \bar{t}, \bar{\rho}, \bar{z}, \bar{A}_0$ ; las cuales cumplen con las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \tau &= T \bar{\tau} \\ t &= T \bar{t} \\ \rho &= c T \bar{\rho} \\ z &= c T \bar{z} \\ \bar{A}_0 &= \frac{q}{m c} A_0 \end{aligned}$$

Donde  $T = 1$  s. Luego las ecuaciones de movimiento para caso electrostático se convierten en las siguientes ecuaciones adimensionales.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{A}}_0 &= f \ddot{\bar{t}} + \dot{\bar{t}} \dot{f} \\ f e^{-2\gamma} \partial_{\bar{\rho}} \bar{A}_0 \dot{\bar{t}} &= \ddot{\bar{\rho}} + \dot{\bar{t}}^2 \frac{f}{2} e^{-2\gamma} \partial_{\bar{\rho}} f + (\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \frac{\partial_{\bar{\rho}} f}{2f})(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) + (\partial_{\bar{z}} \gamma - \frac{\partial_{\bar{z}} f}{2f}) 2\dot{\bar{\rho}}\dot{\bar{z}} \\ &+ \frac{\bar{\rho} e^{-2\gamma}}{2f} (\bar{\rho} \partial_{\bar{\rho}} f - 2f) \dot{\varphi}^2 \\ 0 &= \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{d}{d\bar{\tau}} \ln\left(\frac{\bar{\rho}^2}{f}\right) \\ f e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}} \bar{A}_0 \dot{\bar{t}} &= \ddot{\bar{z}} + \frac{f}{2} e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}} f \dot{\bar{t}}^2 + (\frac{\partial_{\bar{z}} f}{2f} - \partial_{\bar{z}} \gamma)(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) + (\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \frac{\partial_{\bar{\rho}} f}{2f}) 2\dot{\bar{\rho}}\dot{\bar{z}} \\ &+ \frac{\bar{\rho}^2}{2f} e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}} f \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

### 3.3.1. Solución hiperbólica

Consideramos el caso del dipolo eléctrico en el que  $\Delta > 0$ .

$$f = -\frac{\Delta}{4A^2} \text{Sech}^2\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (3.109)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 = -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \text{Tanh}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (3.110)$$

$$\gamma = \frac{\Delta \nu^2 \rho^2 (\rho^2 - 8z^2)}{16 (\rho^2 + z^2)^4} \quad (3.111)$$

$$\Psi = \frac{\nu z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.112)$$

Utilizaremos nuevamente la constante adimensional definida por  $\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\tau}} \frac{q}{mc}$ . Además, debido a que queremos que las ecuaciones sean las más simples posibles, hacemos que las constantes cumplan con

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2A} = 1 \quad (3.113)$$

$$\frac{A\nu}{c^2 T^2} = 1 \quad (3.114)$$

También definimos la constante de integración adimensional

$$d = \frac{\nu}{c^2 T^2} \bar{d} \quad (3.115)$$

De manera que las ecuaciones (3.109), (3.110), (3.111) y (3.112); de manera adimensional, se escriben como

$$f = -\text{sech}^2[\bar{\Psi} + \bar{d}] \quad (3.116)$$

$$\bar{A}_0 = -\frac{B}{2A} \delta - \delta \tanh[\bar{\Psi} + \bar{d}] \quad (3.117)$$

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho}^2 (\bar{\rho}^2 - 8\bar{z}^2)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} \quad (3.118)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \quad (3.119)$$

Sin pérdida de generalidad escogemos  $\bar{d} = 0$  y  $\delta = 1$

$$f = -\text{sech}^2[\bar{\Psi}] \quad (3.120)$$

$$\bar{A}_0 = -\frac{B}{2A} - \tanh[\bar{\Psi}] \quad (3.121)$$

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho}^2 (\bar{\rho}^2 - 8\bar{z}^2)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} \quad (3.122)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \quad (3.123)$$

Entonces las ecuaciones de movimiento se escriben como

$$\begin{aligned}
\ddot{t} &= (1 + 2 \tanh \bar{\Psi} \dot{t})(\partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} \dot{\rho} + \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{z}) \\
\ddot{\rho} &= \operatorname{sech}^4 \bar{\Psi} e^{-2\gamma} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} (\dot{t} + \tanh \bar{\Psi} \dot{t}^2) - (\partial_{\bar{\rho}} \gamma + \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi})(\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) \\
&\quad - (\partial_{\bar{z}} \gamma + \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi}) 2\dot{\rho} \dot{z} + (1 + \bar{\rho} \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}) \bar{\rho} e^{-2\gamma} \dot{\phi}^2 \\
\ddot{\phi} &= -2\dot{\phi} [\tanh \bar{\Psi} (\partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} \dot{\rho} + \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{z}) + \frac{\dot{\rho}}{\bar{\rho}}] \\
\ddot{z} &= \operatorname{sech}^4 \bar{\Psi} e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} (\dot{t} + \tanh \bar{\Psi} \dot{t}^2) + (\partial_{\bar{z}} \gamma + \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi})(\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) \\
&\quad - (\partial_{\bar{\rho}} \gamma + \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}) 2\dot{\rho} \dot{z} + \bar{\rho}^2 e^{-2\gamma} \tanh \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

Para el caso de una partícula de prueba masiva se tiene que existe una trayectoria que se asemeja a una línea recta, en la cual la partícula se aleja. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 1.7, 0, 0.57, 0.35, 0, 0.62, 0) \quad (3.124)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = -1,81 \quad \bar{c}_1 = -0,25$$

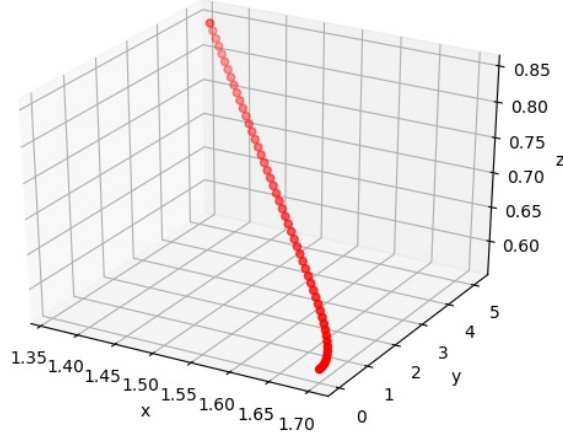


Figura 3.17: Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso hiperbólico. Nótese que en este caso la partícula se aleja en una línea casi recta. La parametrización es respecto a  $\tau$  y va de 0 a 5 en pasos de 0.1

El potencial efectivo correspondiente ala trayectoria de la partícula masiva explica el hecho de que esta se aleje ya que no hay algún pozo de potencial.

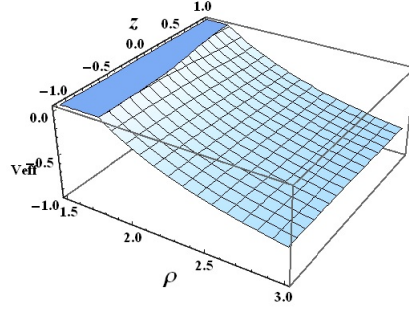


Figura 3.18: Potencial efectivo a la que es sometido la partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso hiperbólico. ( $V_{eff} \leq 0,0615$ ,  $1,5 \leq \rho \leq 3$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ ).

Para el caso de la luz, hay una trayectoria en la que este se aleja en línea casi recta. Con los siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 1.7, 0, 0.57, 0.36, 0, 0.21, 0) \quad (3.125)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = -0,61 \quad \bar{c}_1 = -0,36$$

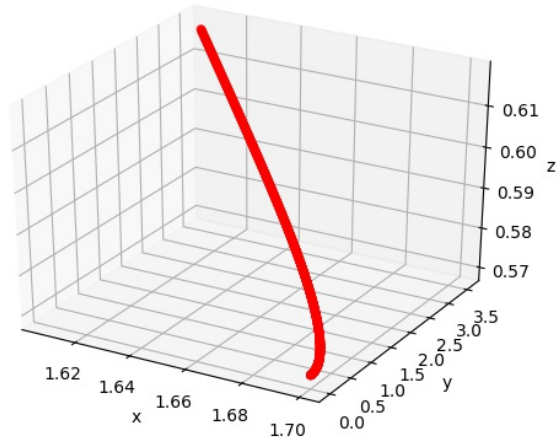


Figura 3.19: Trayectoria para la luz en campo dipolar eléctrico en el caso hiperbólico. La parametrización es respecto a  $\lambda$  y va de 0 a 10 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria la luz explica el hecho de que se aleje ya que no hay pozo de potencial.

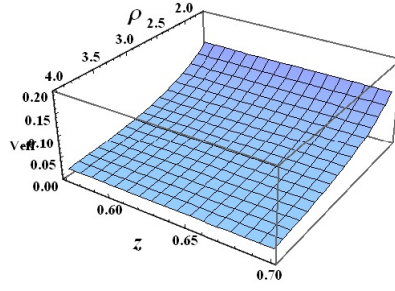


Figura 3.20: Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar eléctrico en el caso hiperbólico. ( $0 \leq V_{eff} \leq 0,2$ ,  $1,7 \leq \rho \leq 4$ ,  $0,57 \leq z \leq 0,7$ ).

### 3.3.2. Solución parabólica

Ahora veamos el caso del mismo dipolo eléctrico con  $\Delta = 0$

$$f = \frac{1}{A^2(\Psi + d)^2} \quad (3.126)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}} A_0 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{A(\Psi + d)} \quad (3.127)$$

$$\gamma = 0 \quad (3.128)$$

$$\Psi = \frac{\nu z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.129)$$

Utilizamos la constante adimensional  $\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\tau}} \frac{q}{mc}$ ; además

$$\frac{A\nu}{c^2 T^2} = 1. \quad (3.130)$$

Definimos nuevamente la constante de integración adimensional

$$d = \frac{\nu}{c^2 T^2} \bar{d} \quad (3.131)$$

Recordando que  $\bar{A}_0 = \frac{q}{mc} A_0$ , las ecuaciones (3.126), (3.127) y (3.129) se escriben como

$$f = \frac{1}{(\bar{\Psi} + \bar{d})^2} \quad (3.132)$$

$$\bar{A}_0 = -\frac{B\delta}{2A} - \frac{\delta}{\bar{\Psi} + \bar{d}} \quad (3.133)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.134)$$

Sin pérdida de generalidad escogemos  $\delta = 1$  y  $\bar{d} = 1$

$$f = \frac{1}{(\bar{\Psi} + 1)^2} \quad (3.135)$$

$$\bar{A}_0 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{\bar{\Psi} + 1} \quad (3.136)$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.137)$$

Con las ecuaciones anteriores, las ecuaciones de movimiento adimensionales para la solución parabólica del caso electrostático se escriben de la siguiente manera

$$\ddot{\bar{t}} = \left(1 + \frac{2\dot{\bar{t}}}{1 + \bar{\Psi}}\right)(\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}\dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}\dot{\bar{z}}) \quad (3.138)$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = \frac{\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}}{(1 + \bar{\Psi})^4}\left(\dot{\bar{t}} + \frac{\dot{\bar{t}}^2}{1 + \bar{\Psi}}\right) - \left(\frac{\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}}{1 + \bar{\Psi}}\right)(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \quad (3.139)$$

$$-\left(\frac{\partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}}{1 + \bar{\Psi}}\right)2\dot{\bar{\rho}}\dot{\bar{z}} + \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}}{1 + \bar{\Psi}}\right)\bar{\rho}^2\dot{\phi}^2 \quad (3.140)$$

$$\ddot{\phi} = -2\dot{\phi}\left[\frac{1}{1 + \bar{\Psi}}(\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}\dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}\dot{\bar{z}}) + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}\right] \quad (3.141)$$

$$\ddot{\bar{z}} = \frac{\partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}}{(1 + \bar{\Psi})^4}\left(\dot{\bar{t}} + \frac{\dot{\bar{t}}^2}{1 + \bar{\Psi}}\right) + \left(\frac{\partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}}{1 + \bar{\Psi}}\right)(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \quad (3.142)$$

$$-\left(\frac{\partial_{\bar{\rho}}\bar{\Psi}}{1 + \bar{\Psi}}\right)2\dot{\bar{\rho}}\dot{\bar{z}} + \bar{\rho}^2\frac{\partial_{\bar{z}}\bar{\Psi}}{1 + \bar{\Psi}}\dot{\phi}^2. \quad (3.143)$$

Para el caso de una partícula de prueba masiva se tiene que existe una trayectoria que se asemeja a una línea recta en la cual la partícula se acerca. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 3.7, 0, 5.3, 1.02, 0, 0.01, 0) \quad (3.144)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = 0,14 \quad \bar{c}_1 = 1,96$$

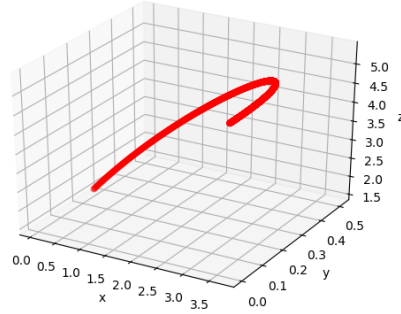


Figura 3.21: Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso parabólico. La parametrización es respecto a  $\tau$  y va de 0 a 23.4 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria esta partícula masiva explica el hecho de que este se acerque, ya que existe un pozo de potencial del cual la partícula no puede salir ya que para regiones cercanas a  $\rho = 0$  la partícula de prueba sería capturada por el objeto celeste que produzca el campo dipolar eléctrico.



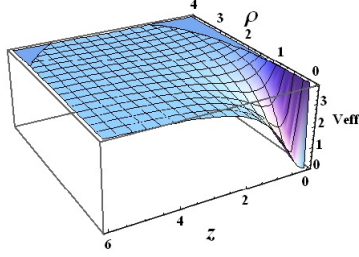


Figura 3.22: Potencial efectivo a la que es sometido la partícula de prueba masiva en campo dipolar eléctrico en el caso parabólico. ( $V_{eff} \leq 3,8491$ ,  $0 \leq \rho \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 6$ ).

Para el caso de la luz se tiene que hay una trayectoria en casi línea recta en la cual la luz se aleja. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 3.69, 0, 6.09, 1.03, 0, -0.27, 0) \quad (3.145)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = -3,80 \quad \bar{c}_1 = 1,00$$

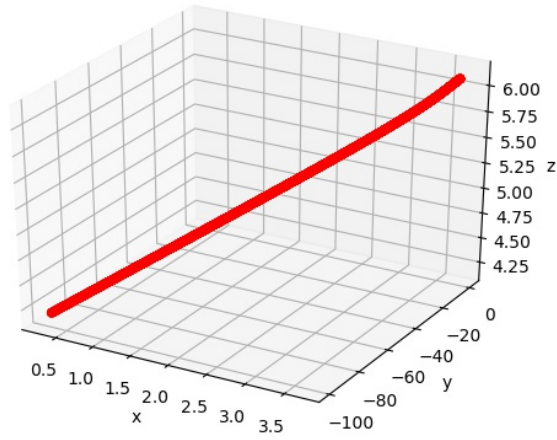


Figura 3.23: Trayectoria para la luz en campo dipolar eléctrico en el caso parabólico. La parametrización es respecto a  $\lambda$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.1

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria de la luz explica el hecho de que este se aleje pues no hay pozo de potencial alguno

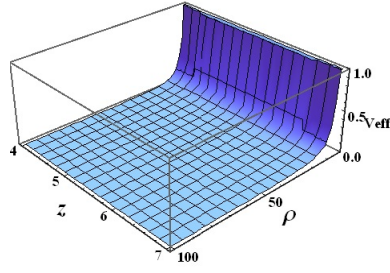


Figura 3.24: Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar eléctrico en el caso parabólico. ( $0 \leq V_{eff} \leq 1$ ,  $3 \leq \rho \leq 100$ ,  $4 \leq z \leq 7$ ).

### 3.3.3. Solución elíptica

Donde la derivación punto es sobre el tiempo propio adimensional  $\bar{\tau}$ . Consideremos el caso del dipolo eléctrico en el que  $\Delta < 0$

$$f = -\frac{\Delta}{4A^2} \text{Sec}^2\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (3.146)$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}} A_0 = -\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{Tan}\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\Psi + d)\right] \quad (3.147)$$

$$\gamma = \frac{\Delta \nu^2 \rho^2 (\rho^2 - 8z^2)}{16 (\rho^2 + z^2)^4} \quad (3.148)$$

$$\Psi = \frac{\nu z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.149)$$

Utilizando la constante adimensional definida  $\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\tau}} \frac{q}{mc}$ ; además hacemos

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{2A} = 1 \quad (3.150)$$

$$\frac{A\nu}{c^2 T^2} = 1 \quad (3.151)$$

Cabe recalcar que esta asignación dada por (3.150) compete a un dipolo eléctrico puro. Mientras que para otros valores se tiene la presencia del dipolo eléctrico con otro dipolo de masa, según lo mencionado por Bonnor (1954). También definimos la constante de integración adimensional  $\bar{d}$  que cumple con

$$d = \frac{\nu}{c^2 T^2} \bar{d} \quad (3.152)$$

De manera que las ecuaciones (3.146), (3.147) y (3.149) se escriben como

$$\begin{aligned} f &= \text{Sec}^2[\bar{\Psi} + \bar{d}] \\ \bar{A}_0 &= -\frac{B}{2A} \delta + \delta \text{Tan}[\bar{\Psi} + \bar{d}] \\ \bar{\Psi} &= \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad elegimos  $\delta = 1$  y  $\bar{d} = 0$ .

$$\begin{aligned} f &= \text{Sec}^2[\bar{\Psi}] \\ \bar{A}_0 &= -\frac{B}{2A} + \text{Tan}[\bar{\Psi}] \\ \gamma &= -\frac{1}{4} \frac{\bar{\rho}^2(\bar{\rho}^2 - 8\bar{z}^2)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} \\ \bar{\Psi} &= \frac{\bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Luego las ecuaciones de movimiento adimensionales se escriben como

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{t}} &= (1 - 2 \tan \bar{\Psi} \dot{\bar{t}})(\partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} \dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{\bar{z}}) \\ \ddot{\bar{\rho}} &= \sec^4 \bar{\Psi} e^{-2\gamma} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} (\dot{\bar{t}} - \tan \bar{\Psi} \dot{\bar{t}}^2) - (\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi})(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ &\quad - (\partial_{\bar{z}} \gamma - \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi}) 2\dot{\bar{\rho}} \dot{\bar{z}} + (1 - \bar{\rho} \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}) \bar{\rho} e^{-2\gamma} \dot{\bar{\rho}}^2 \\ \ddot{\bar{\phi}} &= 2\dot{\bar{\phi}} [\tan \bar{\Psi} (\partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi} \dot{\bar{\rho}} + \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{\bar{z}}) - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}] \\ \ddot{\bar{z}} &= \sec^4 \bar{\Psi} e^{-2\gamma} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} (\dot{\bar{t}} - \tan \bar{\Psi} \dot{\bar{t}}^2) + (\partial_{\bar{z}} \gamma - \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi})(\dot{\bar{\rho}}^2 - \dot{\bar{z}}^2) \\ &\quad - (\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{\rho}} \bar{\Psi}) 2\dot{\bar{\rho}} \dot{\bar{z}} - \bar{\rho}^2 e^{-2\gamma} \tan \bar{\Psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} \dot{\bar{\phi}}^2. \end{aligned}$$

Para el caso de una partícula masiva se tiene una órbita caótica alrededor de la fuente de campo dipolar eléctrico. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \bar{\phi}, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\bar{\phi}}, \dot{\bar{z}}) = (0, 1.5, 0, 0.65, 1, 0, 0.1, 0) \quad (3.153)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = 0,22 \quad \bar{c}_1 = 0,87 .$$

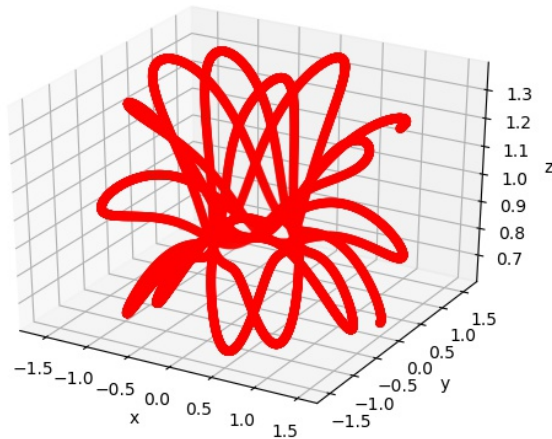


Figura 3.25: Trayectoria para partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso elíptico. La parametrización es respecto a  $\tau$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria de la partícula masiva explica el hecho de que este confinado a una órbita ya que hay un pozo de potencial muy profundo que obliga a la partícula a permanecer en órbita.

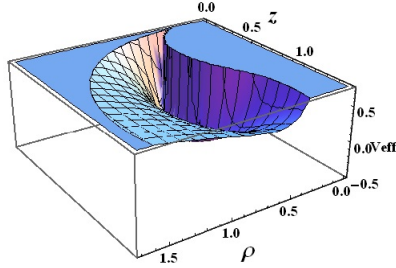


Figura 3.26: Potencial efectivo a la que es sometido la partícula masiva en campo dipolar eléctrico en el caso elíptico. ( $V_{eff} \leq 0,7614$ ,  $0 \leq \rho \leq 1,7$ ,  $0 \leq z \leq 1,4$ ).

Para el caso de la luz, se tiene una trayectoria en la cual se aleja de la fuente y lo hace en aproximadamente una línea recta. Con las siguientes condiciones iniciales

$$(\bar{t}, \bar{\rho}, \phi, \bar{z}, \dot{\bar{t}}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\phi}, \dot{\bar{z}}) = (0, 1.5, 0, 0.0, 0.3, 0, 0.2, 0) \quad (3.154)$$

se tienen los siguientes parámetros

$$\bar{c}_2 = 0,45 \quad \bar{c}_1 = 0,30$$

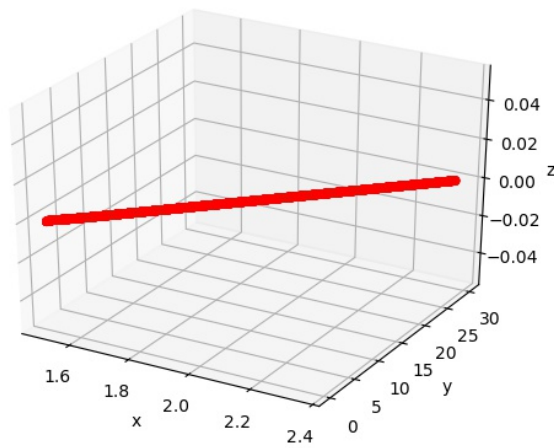


Figura 3.27: Trayectoria para la luz en campo dipolar eléctrico en el caso elíptico. La parametrización es respecto a  $\lambda$  y va de 0 a 100 en pasos de 0.01

El potencial efectivo correspondiente a la trayectoria de la luz explica el hecho de que este no experimente cierta fuerza y siga en línea recta debido a que no hay pozo de potencial.

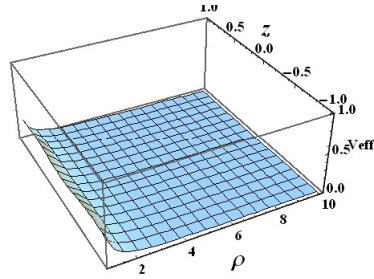


Figura 3.28: Potencial efectivo a la que es sometida la luz en campo dipolar eléctrico en el caso elíptico. ( $V_{eff} \leq 0,09$ ,  $1 \leq \rho \leq 10$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ ).

## Capítulo 4

# Resultados y conclusiones

Hemos llegado al objetivo de obtener trayectorias de partículas para campos eléctricos y magnéticos con simetría axial. Debe recalcarse que el estudio realizado fue para la presencia de solo un campo: o bien eléctrico o magnético. Para futuras investigaciones donde se tenga la presencia de ambos campos se puede tener en cuenta a Bonnor (1961) y proseguir con el problema tratando de hallar el potencial  $U$  involucrado. Para nosotros, el potencial clásico involucrado que conectaba  $f$  con los potenciales eléctrico o magnético es  $\Psi(\rho, z)$ . Una vez definido tal potencial es donde el problema puede ser resuelto analíticamente. De la misma manera se tendría que seguir los procedimientos para la solución que plantea Bonnor (1961) cuando se tiene la métrica de Weyl y campo eléctrico con magnético presentes a la vez.

Para cada tipo de campo se obtiene tres casos: hiperbólico, parabólico y elíptico. Y para cada caso encontramos la relación que existe entre  $f$  y el potencial clásico  $\Psi$ . Estos vienen dados por funciones hiperbólicas y trigonométricas. Podemos resumir lo encontrado en las dos siguientes ecuaciones, siendo  $A_2$  el potencial para campo magnético y  $A_0$  para campo eléctrico

$$\frac{\rho^2}{f} = -\frac{\tau}{2}(A_2)^2 + \frac{B}{A}\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_2 + \frac{C}{A} \quad (4.1)$$

$$f = \frac{\tau}{2}(A_0)^2 + \frac{B}{A}\sqrt{\frac{\tau}{2}}A_0 + \frac{C}{A}. \quad (4.2)$$

A diferencia de  $f$  que puede escribirse en función de los potenciales de campo  $A_2$  y  $A_0$  independientemente del potencial clásico  $\Psi$ ; el término  $\gamma$  de la métrica solo es posible hallarlo definiendo  $\Psi$ . Los resultados para campo magnético y eléctrico respectivamente son dados a continuación teniendo en cuenta que en cada caso  $\Psi$  es potencial clásico de dipolo.

$$\gamma = \ln\left(\frac{\rho}{F^2}\right) + \frac{\Delta}{16} \frac{\mu^2 \rho^2 (\rho^2 - 8z^2)}{(\rho^2 + z^2)^4} \quad (4.3)$$

$$\gamma = \frac{\Delta}{16} \frac{\nu^2 \rho^2 (\rho^2 - 8z^2)}{(\rho^2 + z^2)^4}. \quad (4.4)$$

Cabe recalcar que hemos ampliado lo encontrado por Bonnor (1954) no solo mostrando soluciones con funciones trigonométricas sino también las que involucran funciones hiperbólicas. Por otro lado hemos seguido un procedimiento similar al seguido por Gutsunaev et al. (2007) con la diferencia que en el trabajo presente hemos utilizado solo el potencial  $\Psi$  que cumple con la ecuación de Laplace con dependencia de coordenada angular.

Las soluciones presentadas tanto para caso electrostático como magnetostático son en presencia de dipolo eléctrico o magnético puro. Una variación en las constantes asumidas para el determinante  $\Delta$  llevaría a tener la presencia adicional del dipolo de masa, según lo indicado por Bonnor (1954).

También encontramos trayectorias seguidas por partículas de prueba ya sean masivas o sin masa (luz). En el caso hiperbólico del campo magnético obtenemos una órbita alrededor de la fuente tanto para partícula masiva y la luz, lo que implica que estaríamos en presencia de campos intensos. En el caso parabólico encontramos que la partícula masiva se aleja de la fuente de manera espiral cónica; sin embargo la luz se aleja en línea casi recta. En el caso elíptico se tiene que la partícula masiva también se aleja en forma espiral cónica; mas para el caso de la luz se obtiene una trayectoria caótica que al final termina en la fuente. Podríamos interpretar como un caso crítico para la luz en el que no hay órbita pero al fin no logra escapar de la fuente colapsando en su interior.

Para el campo eléctrico, en el caso hiperbólico encontramos que tanto la partícula masiva como para la luz, estas se alejan en líneas casi rectas. En el caso parabólico también se tienen para ambas líneas casi rectas pero con la diferencia que la partícula masiva es la única que se acerca a la fuente. En el caso elíptico para la partícula masiva se obtiene una órbita caótica alrededor de la fuente; sin embargo la luz tiene a la línea recta como trayectoria.

Las líneas casi rectas para el caso de la luz significan que la luz si experimenta interacción con los campos electromagnéticos a través de la curvatura del espacio tiempo; sin embargo, para los casos presentados, esas interacciones son mínimas. En estos casos el potencial efectivo que depende del parámetro  $f$  no produce un pozo de potencial para capturar a la luz en sus interiores .

El trabajo aquí realizado es solo un modelo de juguete cuya mejora podría tener datos más aproximados al cotejo experimental. En la sección 3.2 al definir las constantes adimensionales, se puede demostrar que el campo magnético está en el orden de los mil millones de Teslas lo que está en concordancia con lo publicado por Simone en el caso de una estrella de neutrones.

## Apéndice A

# Convenciones, métrica y algunas definiciones

Asumimos la convención de suma utilizando los índices mudos

$$A_\mu B^\mu \equiv \sum_\mu A_\mu B^\mu \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mu$  va de 0 a 3. Las letras griegas siempre denotarán suma de 0 a 3 mientras que las latinas indicarán suma de 1 a 3.

Denotaremos tensores contravariantes con super índices y covariantes con sub índices. Puede darse también el caso de tensores mixtos que tienen super índices y sub índices a la vez. En el caso de que haya un índice se llamaran tensores de primer (o también quadri vectores). En el caso de tener dos índices serán llamados de segundo orden y así sucesivamente. Todos los tensores tienen la característica de transformarse, al pasar a otro sistema de coordenadas, de la siguiente forma

$$\bar{A}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{\beta_1 \dots \beta_n} = \frac{\partial \bar{x}^{\beta_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\beta_n}}{\partial x^{\mu_n}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_m}}{\partial \bar{x}^{\alpha_m}} A_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (\text{A.2})$$

Un tensor es llamado simétrico con respecto a dos índices covariantes o contravariantes (subíndices o superíndices) si sus componentes no se alteran después de un cambio de índices. Entonces si  $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\theta} = A_{\nu\mu}^{\beta\alpha\theta}$ , el tensor es llamado simétrico en  $\alpha$  y  $\beta$ . Análogamente, un tensor es antisimétrico con respecto a dos índices covariantes o contravariantes si sus componentes cambian de signo después de intercambiar tales índices. Si un tensor es simétrico con respecto a cualquier par de índices que lo denotan es llamado simplemente tensor simétrico. Análogamente, si un tensor es antisimétrico con respecto a cualquier par de índices que lo denotan es llamado simplemente tensor antisimétrico.

El diferencial de arco al cuadrado tiene la siguiente forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.3})$$

Las cantidades  $g_{\mu\nu}$  son componentes de un tensor simétrico covariante de segundo orden. También se define el tensor recíproco que es simétrico contravariante de segundo orden  $g^{\nu\alpha}$  que cumple con

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha \quad (\text{A.4})$$

Para subir o bajar índices en cualquier tensor nos ayudamos del tensor métrico y recíproco. Por ejemplo en la siguiente ecuación subimos un índice

$$A_\mu^\alpha = g^{\alpha\sigma} A_{\mu\sigma} \quad (\text{A.5})$$



Los símbolos de Christoffel son expresados mediante la métrica de la siguiente manera

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}g_{\mu\alpha} + \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.6})$$

Donde  $\partial_{\nu}$  significa  $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ , para futuros cálculos asumiremos dicha notación. El símbolo de Christoffel es simétrico en sus sub índices; sin embargo no es un tensor porque no se transforma como tal. Una propiedad interesante de los símbolos de Christoffel es la siguiente

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\mu} = \frac{\partial_{\sigma}\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} \quad (\text{A.7})$$

Se define la derivada covariante como

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma}A_{\alpha_1\dots\alpha_m}^{\beta_1\dots\beta_n} &= \partial_{\sigma}A_{\alpha_1\dots\alpha_m}^{\beta_1\dots\beta_n} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\beta_1}A_{\alpha_1\dots\alpha_m}^{\rho\dots\beta_n} + \dots + \Gamma_{\rho\sigma}^{\beta_n}A_{\alpha_1\dots\alpha_m}^{\beta_1\dots\rho} \\ &\quad - \Gamma_{\alpha_1\sigma}^{\rho}A_{\rho\dots\alpha_m}^{\beta_1\dots\beta_n} - \dots - \Gamma_{\alpha_m\sigma}^{\rho}A_{\alpha_1\dots\rho}^{\beta_1\dots\beta_n} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Las reglas de derivación covariante de sumas y producto de tensores son las mismas que para la derivada común. El delta de Kronecker, tensor métrico y su recíproco pueden ser tratados como constantes ya que su derivada covariante es nula.

## Apéndice B

# El tensor de Levi Civita, antisimetrización y delta de Kronecker generalizado

Se define el símbolo de Levi-Civita, en cualquier sistemas de coordenadas, como:

$$\varepsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \equiv \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n \text{ es una permutación par de } 01\cdots n \\ -1 & \text{si } \alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n \text{ es una permutación impar de } 01\cdots n \\ 0 & \text{si algunos índices son iguales} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Donde  $0 \leq \alpha_i \leq n$ . Veamos como se altera con una transformación de coordenadas, consideremos la expresión:

$$\frac{\partial x'^{\beta_0}}{\partial x^{\alpha_0}} \frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \varepsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.2})$$

En virtud de la propiedad de las matrices:  $M_{\alpha_0}^{\beta_0} M_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots M_{\alpha_n}^{\beta_n} \varepsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} = M \varepsilon^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}$ , donde  $M$  es el determinante de la matriz  $M_{\alpha}^{\beta}$ ; podemos expresar que

$$\frac{\partial x'^{\beta_0}}{\partial x^{\alpha_0}} \frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \varepsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} = \frac{\partial x'}{\partial x} \varepsilon^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \quad (\text{B.3})$$

Donde  $\frac{\partial x'}{\partial x}$  es el Jacobiano de la transformación. Se ve fácilmente que el símbolo de Levi-civita es una densidad tensorial de peso -1:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial x'^{\beta_0}}{\partial x^{\alpha_0}} \frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \varepsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} = \varepsilon^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \quad (\text{B.4})$$

La transformada inversa se expresa como

$$g_{\sigma\eta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\eta}} g'_{\mu\nu} \quad (\text{B.5})$$

Entonces las determinantes cumplen con

$$g = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 g' \quad (\text{B.6})$$

Entonces se tiene que sin importar el sistema de coordenadas, el signo del determinante del tensor métrico es un invariante, al cual denotaremos por  $\text{sgn}(g)$ . Teniendo en cuenta (B.4) y (B.6), se puede definir el tensor contravariante

$$\epsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \equiv \frac{\varepsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\sqrt{|g|}} \quad (\text{B.7})$$

Hallemos su versión covariante:

$$\epsilon_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} = g_{\beta_0\alpha_0}g_{\beta_1\alpha_1}\cdots g_{\beta_n\alpha_n}\epsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{g}{\sqrt{|g|}}\epsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.9})$$

$$= \text{sgn}(g)\sqrt{|g|}\epsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.10})$$

Entonces definimos

$$\varepsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \equiv \text{sgn}(g)\epsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.11})$$

Para tener la versión covariante del tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.12})$$

Construyamos a partir de cualquier tensor, un tensor totalmente antisimétrico. A esta acción la denominaremos antisimetrización y se define de la siguiente manera:

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} \equiv \frac{1}{(n+1)!}\varepsilon^{\mu\nu\cdots\sigma}T_{\alpha_\mu\alpha_\nu\cdots\alpha_\sigma} \quad (\text{B.13})$$

$$T^{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} \equiv \frac{\text{sgn}(g)}{(n+1)!}\varepsilon_{\mu\nu\cdots\sigma}T^{\alpha_\mu\alpha_\nu\cdots\alpha_\sigma} \quad (\text{B.14})$$

Por ejemplo, en el caso de  $n = 2$

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\alpha_2]} \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\sigma}T_{\alpha_\mu\alpha_\nu\alpha_\sigma} \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{1}{3!}(T_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + T_{\alpha_2\alpha_0\alpha_1} + T_{\alpha_1\alpha_2\alpha_0} - T_{\alpha_0\alpha_2\alpha_1} - T_{\alpha_1\alpha_0\alpha_2} - T_{\alpha_2\alpha_1\alpha_0}) \quad (\text{B.16})$$

El tensor a antisimetrizar podría también tener otros sub-índices o super-índices; sin embargo solo importa los índices sobre los cuales se realiza la antisimetrización. En lo que sigue solo tomaremos el caso de antisimetrizar un tensor covariante ya que el tratamiento de tensores contravariantes y mixtos es similar. En el caso de tensores totalmente antisimétricos sobre los cuales se antisimetriza, se tiene que

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} = T_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.17})$$

$$T^{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} = T^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.18})$$

Es decir, antisimetrizar un tensor que ya es totalmente antisimétrico, da como resultado el mismo tensor. En cualquier caso, el tensor antisimétrico que se construye es totalmente antisimétrico:

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p\cdots\alpha_q\cdots\alpha_n]} = -T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_q\cdots\alpha_p\cdots\alpha_n]} \quad (\text{B.19})$$

Como lo anterior es válido para cualquier índice  $\alpha_0, \alpha_1 \cdots \alpha_n$ , se tiene que el valor absoluto de todos los coeficientes del tensor antisimétrico construido son iguales. Entonces bastaría con hallar  $T_{[01\cdots n]}$  y luego los demás coeficientes se hallan multiplicando por 1 o  $-1$ , dependiendo si se tiene una permutación par o impar del arreglo de números  $0, 1 \cdots n$ . Es decir, hay una proporcionalidad con el símbolo de Levi-Civita  $\varepsilon^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} = \text{sgn}(g)\varepsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n}$ . Lo dicho anteriormente se puede expresar como:

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} = \text{sgn}(g)T_{[01\cdots n]}\varepsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.20})$$

El número  $T_{[01\cdots n]}$ , puede ser calculado mediante

$$T_{[01\cdots n]} = \frac{1}{(n+1)!}\varepsilon^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \quad (\text{B.21})$$

entonces

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} = \frac{sgn(g)}{(n+1)!} \varepsilon^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \varepsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} \quad (\text{B.22})$$

La ecuación anterior también podría ser otra forma de definir la antisimetrización; sin embargo solo es válida cuando los índices toman los valores de 0 hasta  $n$ , ya que el símbolo de Levi-Civita solo está definido para  $n+1$  índices que pueden tomar valores de 0 hasta  $n$ ; si los índices toman valores mayores a  $n$ , entonces no se puede aplicar (B.22).

Por otro lado, la ecuación (B.13) se puede escribir como:

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} = \frac{1}{(n+1)!} \varepsilon^{\theta_0\theta_1\cdots\theta_n} T_{\alpha_{\theta_0}\alpha_{\theta_1}\cdots\alpha_{\theta_n}} \quad (\text{B.23})$$

El tensor cuyos índices son cambiados  $T_{\alpha_{\theta_0}\alpha_{\theta_1}\cdots\alpha_{\theta_n}}$  puede ser expresado mediante el tensor de índices no cambiados  $T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}$ , gracias al tensor delta de Kronecker

$$T_{\alpha_{\theta_0}\alpha_{\theta_1}\cdots\alpha_{\theta_n}} = \delta_{\alpha_{\theta_0}}^{\beta_0} \delta_{\alpha_{\theta_1}}^{\beta_1} \cdots \delta_{\alpha_{\theta_n}}^{\beta_n} T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \quad (\text{B.24})$$

$$= \prod_{i=0}^n \delta_{\alpha_{\theta_i}}^{\beta_i} T_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} \quad (\text{B.25})$$

(B.25) en (B.23):

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n \delta_{\alpha_{\theta_i}}^{\beta_i} \varepsilon^{\theta_0\theta_1\cdots\theta_n} T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \quad (\text{B.26})$$

Como el tensor  $T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}$  es un tensor cualquiera, de (B.22) y (B.26), se puede afirmar que:

$$sgn(g) \varepsilon^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \varepsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} = \prod_{i=0}^n \delta_{\alpha_{\theta_i}}^{\beta_i} \varepsilon^{\theta_0\theta_1\cdots\theta_n} \quad (\text{B.27})$$

El término de la derecha de la ecuación (B.27) puede ser escrito como un determinante:

$$sgn(g) \varepsilon^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \varepsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha_0}^{\beta_0} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_0} & \cdots & \delta_{\alpha_n}^{\beta_0} \\ \delta_{\alpha_0}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} & \cdots & \delta_{\alpha_n}^{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{\alpha_0}^{\beta_n} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_n} & \cdots & \delta_{\alpha_n}^{\beta_n} \end{vmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Dicho determinante es también denominado el delta de Kronecker generalizado (dKg)

$$\delta_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha_0}^{\beta_0} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_0} & \cdots & \delta_{\alpha_n}^{\beta_0} \\ \delta_{\alpha_0}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} & \cdots & \delta_{\alpha_n}^{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{\alpha_0}^{\beta_n} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_n} & \cdots & \delta_{\alpha_n}^{\beta_n} \end{vmatrix} \quad (\text{B.29})$$

De (B.26), podemos escribir la fórmula para antisimetrizar como:

$$T_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n]} = \frac{1}{(n+1)!} \delta_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} T_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \quad (\text{B.30})$$

De la misma manera, procediendo de manera similar, se tiene para el caso de tensor contra-variante:

$$T^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]} = \frac{1}{(n+1)!} \delta_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} T^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \quad (\text{B.31})$$

De (B.29) y (B.28) se puede concluir que:

$$\varepsilon^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \varepsilon_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n} = sgn(g) \delta_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} \quad (\text{B.32})$$

El dKg también puede tener menos índices:  $\delta_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_p}$   $p \leq n$ . Y también se puede utilizar para antisimetrizar tensores de menores índices.

$$\delta_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_p} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha_0}^{\beta_0} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_0} & \cdots & \delta_{\alpha_p}^{\beta_0} \\ \delta_{\alpha_0}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} & \cdots & \delta_{\alpha_p}^{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{\alpha_0}^{\beta_p} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_p} & \cdots & \delta_{\alpha_p}^{\beta_p} \end{vmatrix} \quad p \leq n \quad 1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq n \quad (\text{B.33})$$

Como el dKg es un determinante, se puede tomar como referencia la primera fila de la matriz de la ecuación (B.33)

$$\delta_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_p} = (-1)^{0+0}\delta_{\alpha_0}^{\beta_0}\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} + (-1)^{0+1}\delta_{\alpha_1}^{\beta_0}\delta_{\alpha_0\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} + \cdots + (-1)^{0+p}\delta_{\alpha_p}^{\beta_0}\delta_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \quad (\text{B.34})$$

Si  $\alpha_0 = \beta_0 \equiv \gamma_0$

$$\delta_{\gamma_0\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_p} = (n+1)\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} + (-1)^1\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} + (-1)^2\delta_{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} + \cdots + (-1)^p\delta_{\alpha_p\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \quad (\text{B.35})$$

Nuevamente, como el dKg es un determinante; cambiando las filas o columnas en la matriz se traduce como cambiar los super-índices  $\beta$  o los sub-índices  $\alpha$  respectivamente. Lo cual traerá como consecuencia la multiplicación por  $(-1)$  dependiendo del número de permutaciones que se realice

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} &= (-1)^1\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \\ \delta_{\alpha_3\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} &= (-1)^2\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \\ &\vdots = \vdots \\ \delta_{\alpha_p\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} &= (-1)^{p-1}\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Reemplazando las ecuaciones (B.36) en (B.35)

$$\delta_{\gamma_0\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_p} = (n+1)\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} + (-1)^1\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} + (-1)^{2+1}\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} + \cdots + (-1)^{2p-1}\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \quad (\text{B.37})$$

Finalmente

$$\delta_{\gamma_0\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_p} = (n-p+1)\delta_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \quad (\text{B.38})$$

Ahora si  $\alpha_1 = \beta_1 \equiv \gamma_1$ , podemos inferir que

$$\delta_{\gamma_0\gamma_1\alpha_2\cdots\alpha_p}^{\beta_0\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} = (n-p+1)(n-p+2)\delta_{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_p}^{\beta_2\beta_3\cdots\beta_p} \quad (\text{B.39})$$

Se puede seguir así sucesivamente hasta que:  $\alpha_q = \beta_q \equiv \gamma_q$ . Luego,

$$\delta_{\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_q\beta_{q+1}\cdots\beta_p} = \frac{(n-p+q+1)!}{(n-p)!}\delta_{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p}^{\beta_{q+1}\cdots\beta_p} \quad (\text{B.40})$$

En el caso particular  $n = p$

$$\delta_{\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_n}^{\beta_0\beta_1\cdots\beta_q\beta_{q+1}\cdots\beta_n} = (q+1)!\delta_{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_n}^{\beta_{q+1}\cdots\beta_n} \quad (\text{B.41})$$

## Apéndice C

# Pseudocódigo general para programación en Python

```
%Antes de comenzar a declarar las funciones, debemos mencionar que se
trabaja en base a un vector e de longitud 8 que contiene los coordenadas
espacio temporales y sus derivadas %
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(rho,z):
    psi=z/(rho**2+z**2)**(3/2)
    result=%se define f dependiendo del caso (hiperbólico,
    parabólico o elíptico)%
    return result

def exp_2gamma(x,y):%funcion exponencial de 2 gamma dependiendo si
es dipolo eléctrico o magnético%

def function_caracteristica(q,w):%se define de acuerdo al caso%
    psi3=w/(q**2+w**2)**(3/2)
    res3=función_caracteristica(psi3)
    return res3

def eval(e):%se utiliza para calcular la tasa de cambio del tiempo propio%
    rho3=e[1]
    z3=e[3]
    res=f(rho3,z3)*e[4]**2 - (e[5]**2+e[7]**2)/f(rho3,z3)-
    (rho3**2*e[6]**2)/f(rho3,z3)
    return res

def T_mtrx(e):
    T_mtrx=np.zeros(8)
    x=e[1]
    y=e[3]
    T_mtrx[0]=%derivada parcial de psi respecto a rho%
    T_mtrx[1]=%derivada parcial de psi respecto a z%
```

```

T_mtrx[2]=%función tangente de acuerdo al caso%
T_mtrx[3]=%función secante de acuerdo al caso%
T_mtrx[4]=%función exponencial de -2 gamma de acuerdo al caso%
T_mtrx[5]=%derivada de gamma respect a rho%
T_mtrx[6]=%derivada de gamma respect a z$
T_mtrx[7]=x
return T_mtrx

```

```

def M_mtrx(w):
M_mtrx=np.zeros(16)
aux=T_mtrx(w)
%En las siguientes igualdades cada término se define según
sea el caso lo amerite. En esta oportunidad presentamos para el
caso parabólico en campo parabólico%
M_mtrx[0]=aux[0]
M_mtrx[1]=aux[1]
M_mtrx[2]=2*aux[2] aux[0]
M_mtrx[3]=2*aux[2] aux[1]
M_mtrx[4]=aux[3] aux[0]
M_mtrx[5]=aux[3] aux[2] aux[0]
M_mtrx[6]=-aux[2] aux[0]
M_mtrx[7]=-2*aux[2] aux[1]
M_mtrx[8]=(1+aux[7] aux[2] aux[0])*aux[7]
M_mtrx[9]=-2*aux[2] aux[0]-2/aux[7]
M_mtrx[10]=-2*aux[2] aux[1]
M_mtrx[11]=aux[3] aux[1]
M_mtrx[12]=aux[3] aux[2] aux[1]
M_mtrx[13]=aux[2] aux[1]
M_mtrx[14]=-2*aux[2] aux[0]
M_mtrx[15]=aux[7]**2aux[2] aux[1]
return M_mtrx

```

%En la función siguiente se definen los términos que acompañaran a las variables de las coordenadas espacio temporales. Debe recalcar que en solo en esta función ponemos como ejemplo a los términos que corresponden a campo eléctrico en el caso parabólico%

```

def F(z,q):
F=np.zeros(8)
M=M_mtrx(q)
F[0]=q[4]
F[1]=q[5]
F[2]=q[6]
F[3]=q[7]
F[4]=M[0]*q[5]+M[1]*q[7]+M[2]*q[4]*q[5]+M[3]*q[4]*q[7]
F[5]=M[4]*q[4]+M[5]*q[4]**2+M[6]*(q[5]**2-q[7]**2)+M[7]*q[5]*q[7]
+M[8]*q[6]**2
F[6]=M[9]*q[5]*q[6]+M[10]*q[6]*q[7]
F[7]=M[11]*q[4]+M[12]*q[4]**2+M[13]*(q[5]**2-q[7]**2)
+M[14]*q[5]*q[7]+M[15]*q[6]**2
return F

```

```

%En las dos funciones siguientes establecemos el procedimiento de
Runge-Kutta en orden 4%
def run_kut4(x1,y1,h1):
    K0=h1*F(x1,y1)
    K1=h1*F(x1 + h1/2.0, y1 + K0/2.0)
    K2=h1*F(x1 + h1/2.0, y1 + K1/2.0)
    K3=h1*F(x1 + h1, y1 + K2)
    return (K0 + 2.0*K1 + 2.0*K2 + K3)/6.0

def integrate(x,y,xStop,h):
    X=[]
    Y=[]
    X.append(x)
    Y.append(y)
    while x<xStop:
        h=min(h,xStop-x)
        y=y+run_kut4(x,y,h)
        x=x+h
        X.append(x)
        Y.append(y)
    return np.array(X),np.array(Y)

%Se define el término que parametriza a las coordenadas, en este caso va
de 0 a 400 en pasos de 0.01. Las condiciones iniciales del vector e
vienen dadas por el vector g%
t=0.0
tStop=400.0
g=np.array([0.0, 3.69, 0.0, 6.09, 1.03, 0, -0.27, 0.0])
l=.01

%Todas las funciones definidas anteriormente nos ayudan a simplificar
el cuerpo del pseudocódigo que se escribe simplemente como la aplicación
de la función integrate%
T,G=integrate(t,g,tStop,l)

%Se definen la tasa de cambio al cuadrado del tiempo propio, el potencial
efectivo, la energía y el momento angular. La sentencia \for" es utilizada
para asignar los valores a los términos definidos, en esta oportunidad
para campo eléctrico en caso hiperbólico%
proptimerivativecuad=[]
veff=[]

energy=f(G[:,1],G[:,3])*G[:,4]+inverse_psi_plusone(G[:,1],G[:,3])
angular_momenta=G[:,1]**2*G[:,6]/f(G[:,1],G[:,3])

for i in range(len(G)):
    proptimerivativecuad.append(eval(G[i]))
    axh=f(G[i][1],G[i][3])*eval(G[i])
        +f(G[i][1],G[i][3])**2*angular_momenta[i]**2/(G[i][1])**2

```



```

        +inverse_psi_plusone(G[i][1],G[i][3])
        *(-inverse_psi_plusone(G[i][1],G[i][3])+2*energy[i])
veff.append(axh)

%Se definen los términos necesarios para graficar la trayectoria %
X1=G[:,1]*np.cos(G[:,2])
Y1=G[:,1]*np.sin(G[:,2])
Z1=G[:,3]

fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.scatter(X1,Y1,Z1,c='r',marker='o')

ax.set_xlabel('x ')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z ')
plt.savefig('electric_parabolic_masive.jpg')
plt.show()

```

## Apéndice D

# Ecuaciones de Maxwell de forma covariante en métrica de Minkowski

Teniendo en cuenta la definición de  $j^\mu$  en la ecuación (1.8); las ecuaciones (1.1) y (1.2) se pueden escribir como:

$$\frac{1}{c}(\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) = \mu_0 j^0 \quad (\text{D.1})$$

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t E_1 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 = \mu_0 j^1 \quad (\text{D.2})$$

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t E_2 + \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 = \mu_0 j^2 \quad (\text{D.3})$$

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t E_3 + \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 = \mu_0 j^3 \quad (\text{D.4})$$

Teniendo en cuenta que  $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{c\partial t} = \frac{1}{c}\partial_t$ ; las ecuaciones (D.1)-(D.4) se pueden escribir como:

$$\partial_1\left(-\frac{E_1}{c}\right) + \partial_2\left(-\frac{E_2}{c}\right) + \partial_3\left(-\frac{E_3}{c}\right) = -\mu_0 j^0 \quad (\text{D.5})$$

$$\partial_0\left(\frac{E_1}{c}\right) - \partial_2 B_3 + \partial_3 B_2 = -\mu_0 j^1 \quad (\text{D.6})$$

$$\partial_0\left(\frac{E_2}{c}\right) + \partial_1 B_3 - \partial_3 B_1 = -\mu_0 j^2 \quad (\text{D.7})$$

$$\partial_0\left(\frac{E_3}{c}\right) - \partial_1 B_2 + \partial_2 B_1 = -\mu_0 j^3 \quad (\text{D.8})$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.10); luego las ecuaciones (D.5)-(D.8) se pueden resumir en una ecuación tensorial

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \quad (\text{D.9})$$

Por otro lado las ecuaciones (1.3) y (1.4) se pueden escribir como:

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_t B_1 = 0 \quad (\text{D.11})$$

$$\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + \partial_t B_2 = 0 \quad (\text{D.12})$$

$$\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_t B_3 = 0 \quad (\text{D.13})$$

Teniendo en cuenta que  $\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t$

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\partial_2 \left( \frac{E_3}{c} \right) - \partial_3 \left( \frac{E_2}{c} \right) + \partial_0 B_1 = 0 \quad (\text{D.15})$$

$$\partial_3 \left( \frac{E_1}{c} \right) - \partial_1 \left( \frac{E_3}{c} \right) + \partial_0 B_2 = 0 \quad (\text{D.16})$$

$$\partial_1 \left( \frac{E_2}{c} \right) - \partial_2 \left( \frac{E_1}{c} \right) + \partial_0 B_3 = 0 \quad (\text{D.17})$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.9)

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \quad (\text{D.18})$$

$$\partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} = 0 \quad (\text{D.19})$$

$$\partial_3 F_{10} + \partial_1 F_{03} + \partial_0 F_{31} = 0 \quad (\text{D.20})$$

$$\partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} + \partial_0 F_{12} = 0 \quad (\text{D.21})$$

Entonces podemos escribir:

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0 \quad (\text{D.22})$$

La anterior ecuación sigue siendo verdadera si algún par de índices son iguales debido a la antisimetría del tensor electromagnético.

## Apéndice E

# Formas diferenciales, producto cuña y derivada exterior

### Producto cuña

Las  $p$ -formas son tensores covariantes totalmente antisimétricos. El producto cuña se utiliza para generar una  $p + q$ -forma de dos formas  $p$  y  $q$ . Dados dos formas, dependiendo del caso se tendrá que su producto cuña es:

Para dos 1-formas

$$A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu \quad (\text{E.1})$$

Para 1-forma y 2-forma

$$A_\sigma B_{\mu\nu} + A_\nu B_{\sigma\mu} + A_\mu B_{\nu\sigma} \quad (\text{E.2})$$

Para dos 2-formas

$$A_{\mu\nu} B_{\rho\sigma} + A_{\sigma\rho} B_{\nu\mu} + A_{\mu\rho} B_{\sigma\nu} + A_{\mu\sigma} B_{\nu\rho} + A_{\sigma\nu} B_{\mu\rho} + A_{\nu\rho} B_{\mu\sigma} \quad (\text{E.3})$$

Para 1-forma y 3-forma

$$A_\mu B_{\nu\rho\sigma} + A_\nu B_{\rho\mu\sigma} + A_\rho B_{\mu\nu\sigma} + A_\sigma B_{\nu\mu\rho} \quad (\text{E.4})$$

Donde se utilizó la definición

$$A \wedge B \equiv \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]} \quad (\text{E.5})$$

Si calculamos

$$\begin{aligned} B \wedge A &= \frac{(q+p)!}{q!p!} B_{[\mu_1 \dots \mu_q} A_{\mu_{q+1} \dots \mu_{p+q}]} \\ &= \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_{q+1} \dots \mu_{p+q}} B_{\mu_1 \dots \mu_q]} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Lo cual equivale a permutar dos sucesiones de términos cada una con  $q$  y  $p$  términos. Si consideramos el signo de esta permutación tendríamos que agregar el término  $(-1)^{pq}$ . Entonces se tiene que

$$B \wedge A = (-1)^{pq} A \wedge B \quad (\text{E.7})$$

### Derivada exterior

Se genera una  $p + 1$ -forma a partir de una  $p$ -forma.

Para 1-forma

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{E.8})$$

Para 2-forma

$$\partial_\mu A_{\nu\rho} + \partial_\nu A_{\rho\mu} + \partial_\rho A_{\mu\nu} \quad (\text{E.9})$$

Para 3-forma

$$\partial_\mu A_{\nu\rho\sigma} + \partial_\nu A_{\rho\mu\sigma} + \partial_\rho A_{\mu\nu\sigma} + \partial_\sigma A_{\mu\rho\nu} \quad (\text{E.10})$$

Donde se utilizó la definición

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \equiv (p+1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \quad (\text{E.11})$$

Según Wald (1984) el mapeo definido por la derivada exterior es independiente del operador derivada utilizado. De manera que también podemos expresarlo como

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \equiv (p+1) \nabla_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \quad (\text{E.12})$$

## Apéndice F

# Ecuaciones de Maxwell y de onda en espacios curvos

Asumimos que se tiene una conexión ( $\Gamma$ ) compatible con la métrica ( $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ ) y libre de torsión ( $\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = 0$ ). Se tiene que el tensor de curvatura de Riemann viene dado por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\sigma}^\rho + 2\Gamma_{\lambda[\mu}^\rho\Gamma_{\nu]\sigma}^\lambda \quad (\text{F.1})$$

El tensor de curvatura de Riemann totalmente covariante cumple con las siguientes propiedades

$$R_{\alpha\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\sigma} \quad (\text{F.2})$$

$$R_{\alpha\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\alpha\mu\nu} \quad (\text{F.3})$$

$$R_{\alpha\sigma\mu\nu} = -R_{\alpha\sigma\nu\mu} \quad (\text{F.4})$$

El tensor de Ricci se define como la contracción del tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\sigma\nu} \equiv R^\beta{}_{\sigma\beta\nu} \quad (\text{F.5})$$

### Propiedad de conmutación de derivadas covariantes

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l} = \sum_{i=1}^k R^{\alpha_i}{}_{\sigma\mu\nu}T^{\alpha_1\cdots\sigma\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l} - \sum_{i=1}^l R^\sigma{}_{\beta_i\mu\nu}T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\sigma\cdots\beta_l} \quad (\text{F.6})$$

#### Lema 1

$$\nabla_\sigma\nabla^\mu A^\nu = \nabla^\mu\nabla_\sigma A^\nu + g^{\mu\alpha}R^\nu{}_{\beta\sigma\alpha}A^\beta \quad (\text{F.7})$$

Prueba: En efecto

$$\nabla_\sigma\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\mu\nabla_\sigma A^\nu = 2g^{\mu\alpha}\nabla_{[\sigma}\nabla_{\alpha]}A^\nu \quad (\text{F.8})$$

Utilizando la propiedad de la conmutación de derivadas covariantes obtenemos

$$\nabla_\sigma\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\mu\nabla_\sigma A^\nu = g^{\mu\alpha}R^\nu{}_{\beta\sigma\alpha}A^\beta \quad (\text{F.9})$$

#### Lema 2

$$2\nabla^{[\sigma}\nabla^{\mu]}\nabla_\sigma A^\nu = g^{\mu\beta}R^\nu{}_{\eta\alpha\beta}\nabla^\alpha A^\eta + g^{\mu\beta}R_{\theta\beta}\nabla^\theta A^\nu \quad (\text{F.10})$$

Prueba: En efecto

$$2\nabla^{[\sigma}\nabla^{\mu]}\nabla_\sigma A^\nu = 2g^{\sigma\alpha}g^{\mu\beta}\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}\nabla_\sigma A^\nu \quad (\text{F.11})$$

Utilizando la propiedad de la conmutación de derivadas covariantes

$$2\nabla^{[\sigma}\nabla^{\mu]}\nabla_{\sigma}A^{\nu} = g^{\sigma\alpha}g^{\mu\beta}(R^{\nu}_{\eta\alpha\beta}\nabla_{\sigma}A^{\eta} - R^{\eta}_{\sigma\alpha\beta}\nabla_{\eta}A^{\nu}) \quad (\text{F.12})$$

$$= g^{\mu\beta}R^{\nu}_{\eta\alpha\beta}\nabla^{\alpha}A^{\eta} - g^{\mu\beta}g^{\sigma\alpha}R^{\eta}_{\sigma\alpha\beta}\nabla_{\eta}A^{\nu} \quad (\text{F.13})$$

De la propiedad (F.3) y la definición del tensor de Ricci, se tiene que  $g^{\sigma\alpha}R^{\eta}_{\sigma\alpha\beta} = -g^{\eta\theta}R_{\theta\beta}$ . Entonces:

$$2\nabla^{[\sigma}\nabla^{\mu]}\nabla_{\sigma}A^{\nu} = g^{\mu\beta}R^{\nu}_{\eta\alpha\beta}\nabla^{\alpha}A^{\eta} + g^{\mu\beta}g^{\eta\theta}R_{\theta\beta}\nabla_{\eta}A^{\nu} \quad (\text{F.14})$$

$$= g^{\mu\beta}R^{\nu}_{\eta\alpha\beta}\nabla^{\alpha}A^{\eta} + g^{\mu\beta}R_{\theta\beta}\nabla^{\theta}A^{\nu} \quad (\text{F.15})$$

### Primera ecuación de Maxwell en función del vector potencial

Sabiendo que el tensor electromagnético viene dado por  $F^{\mu\nu} = 2\nabla^{[\mu}A^{\nu]}$  y las ecuaciones de Maxwell en el vacío demandan que  $\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$ , se tiene que el vector potencial cumple con

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}A^{\nu} - \nabla_{\mu}\nabla^{\nu}A^{\mu} = 0 \quad (\text{F.16})$$

Utilizando el Lema 1

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}A^{\mu} = \nabla^{\nu}\nabla_{\mu}A^{\mu} + g^{\nu\alpha}R^{\mu}_{\beta\mu\alpha}A^{\beta} \quad (\text{F.17})$$

En el gauge de Lorentz se tiene que  $\nabla_{\mu}A^{\mu} = 0$ , además utilizando la definición del tensor de Ricci, obtenemos

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}A^{\nu} = g^{\nu\alpha}R_{\beta\alpha}A^{\beta} \quad (\text{F.18})$$

Multiplicando por  $g_{\sigma\nu}$

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}A_{\sigma} = R_{\beta\sigma}A^{\beta} \quad (\text{F.19})$$

Notemos que en ausencia de curvatura y siendo la métrica de Minowski; la ecuación anterior se reduce a  $\partial_{\mu}\partial^{\mu}A_{\sigma} = 0$ . Es decir

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{c^2\partial t^2} = 0 \quad (\text{F.20})$$

$$\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{c^2\partial t^2} = 0 \quad (\text{F.21})$$

Donde  $\mathbf{A}$  es el clásico vector potencial en tres dimensiones y  $\phi$  es el potencial escalar.

### Ecuación de onda

La ecuación (F.19) puede ser vista como las ecuaciones de onda no homogéneas para el vector potencial  $A_{\sigma}$ . La parte derecha de dicha ecuación que esta compuesta por el tensor de Ricci y el vector potencial actúan como fuente. Ahora tratemos de hallar la ecuación de onda para el tensor electromagnético. Teniendo en cuenta que  $\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma} = g_{\sigma\eta}\nabla^{\eta}\nabla^{\sigma} = \nabla_{\eta}\nabla^{\eta} = \nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}$ :

$$\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}F^{\mu\nu} = \nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}\nabla^{\mu}A^{\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (\text{F.22})$$

Aplicando el lema 1

$$\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}F^{\mu\nu} = \nabla^{\sigma}\nabla^{\mu}\nabla_{\sigma}A^{\nu} + g^{\mu\alpha}\nabla^{\sigma}(R^{\nu}_{\beta\sigma\alpha}A^{\beta}) - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (\text{F.23})$$

Aplicando el lema 2

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma \nabla^\sigma F^{\mu\nu} &= \nabla^\mu \nabla^\sigma \nabla_\sigma A^\nu + g^{\mu\beta} R^\nu_{\eta\alpha\beta} \nabla^\alpha A^\eta + g^{\mu\beta} R_{\theta\beta} \nabla^\theta A^\nu + g^{\mu\alpha} \nabla^\sigma (R^\nu_{\beta\sigma\alpha} A^\beta) \\ &\quad - (\mu \leftrightarrow \nu)\end{aligned}\quad (\text{F.24})$$

Aplicando (F.19), la regla de derivación covariante de producto de dos tensores y acomodando los índices

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma \nabla^\sigma F^{\mu\nu} &= g^{\nu\alpha} R_{\alpha\beta} \nabla^\mu A^\beta + 2g^{\alpha(\nu} (\nabla^\mu) R_{\alpha\beta}) A^\beta + 2g^{\mu\alpha} R^\nu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta \\ &\quad + g^{\mu\beta} R_{\theta\beta} \nabla^\theta A^\nu - (\nabla_\beta R^{\mu\nu}) A^\beta - (\mu \leftrightarrow \nu)\end{aligned}\quad (\text{F.25})$$

Los términos simétricos en  $\mu$  y  $\nu$  se anulan; es decir,  $2g^{\alpha(\nu} (\nabla^\mu) R_{\alpha\beta}) A^\beta$  y  $(\nabla_\beta R^{\mu\nu}) A^\beta$ . Esto debido a que al ser aplicado  $-(\mu \leftrightarrow \nu)$  se van a anular.

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma \nabla^\sigma F^{\mu\nu} &= g^{\nu\alpha} R_{\alpha\beta} \nabla^\mu A^\beta + 2g^{\mu\alpha} R^\nu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta + g^{\mu\beta} R_{\theta\beta} \nabla^\theta A^\nu \\ &\quad - (\mu \leftrightarrow \nu)\end{aligned}\quad (\text{F.26})$$

En el último término de la mano derecha hacemos  $\theta \rightarrow \beta$  y  $\beta \rightarrow \alpha$ .

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma \nabla^\sigma F^{\mu\nu} &= R_{\alpha\beta} (g^{\nu\alpha} \nabla^\mu A^\beta + g^{\mu\alpha} \nabla^\beta A^\nu) + 2g^{\mu\alpha} R^\nu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta \\ &\quad - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= R_{\alpha\beta} [g^{\nu\alpha} F^{\mu\beta} + (\nabla^\beta A^{(\nu} g^{\mu)\alpha}] + 2g^{\mu\alpha} R^\nu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta \\ &\quad - (\mu \leftrightarrow \nu)\end{aligned}\quad (\text{F.27})$$

Luego, el término simétrico en  $\mu$  y  $\nu$ ; el cual es  $(\nabla^\beta A^{(\nu} g^{\mu)\alpha})$ , se anula al efectuar  $-(\mu \leftrightarrow \nu)$

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma \nabla^\sigma F^{\mu\nu} &= R_{\alpha\beta} g^{\nu\alpha} F^{\mu\beta} + 2g^{\mu\alpha} R^\nu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= R_{\alpha\beta} (g^{\nu\alpha} F^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} F^{\nu\beta}) + 2g^{\mu\alpha} R^\nu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta - 2g^{\nu\alpha} R^\mu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta\end{aligned}\quad (\text{F.28})$$

Intercambiando índices mudos y utilizando las propiedades del tensor de Riemann totalmente covariante se demuestra que  $2g^{\nu\alpha} R^\mu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta = 2g^{\mu\alpha} R^\nu_{\beta\sigma\alpha} \nabla^\sigma A^\beta$

$$\nabla_\sigma \nabla^\sigma F^{\mu\nu} = R_{\alpha\beta} (g^{\nu\alpha} F^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} F^{\nu\beta}) + 2g^{\mu\alpha} R^\nu_{\beta\sigma\alpha} F^{\sigma\beta}\quad (\text{F.29})$$

Multiplicando por  $g_{\mu\theta} g_{\nu\gamma}$

$$\nabla_\sigma \nabla^\sigma F_{\theta\gamma} = R_{\gamma\beta} F_\theta^\beta - R_{\theta\beta} F_\gamma^\beta + 2R_{\gamma\beta\sigma\theta} F^{\sigma\beta}\quad (\text{F.30})$$

Notemos que en ausencia de curvatura y siendo la métrica de Minkowski; la ecuación anterior se reduce a  $\partial_\mu \partial^\mu F_{\theta\gamma} = 0$ . Es decir

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{c^2 \partial t^2} = 0\quad (\text{F.31})$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{c^2 \partial t^2} = 0\quad (\text{F.32})$$



## Apéndice G

# Parámetro afín para caracterizar curvas en el espacio tiempo

Cuando tratamos con partículas masivas, las curvas que desarrollan en el espacio tiempo se parametrizan según el tiempo propio:

$$c^2 d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{G.1})$$

de manera que en presencia de campos electromagnéticos, con masa en reposo  $m$  y carga  $q$ , las curvas que desarrollan estas partículas se hallan mediante la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{q}{m} F_{\nu}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (\text{G.2})$$

Al tratar con la luz, el término de la mano derecha se hace cero ya que la luz no interacciona directamente con el campo electromagnético por no tener carga. Además no es posible utilizar el tiempo propio como variable para parametrizar la curva ya que la longitud de curva espacio temporal es nula  $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (\text{G.3})$$

De manera que se utilizamos otro parámetro afín para parametrizar las curvas,  $\lambda$  en este caso. La determinación de  $\lambda$  puede darse de varias formas, por ejemplo en Borissova and Rabounski (2010) elijen la parametrización respecto a la longitud de arco espacial. En nuestro caso, las condiciones iniciales de cuadrivelocidad en el espacio tiempo determinarán la parametrización ya sea con respecto al tiempo propio  $\tau$  donde se cumple (3.13) o respecto a otro parámetro  $\lambda$  para el cual se cumple (3.26). Para que esta elección de parámetro afín sea válida para cada punto de la curva, se debe de tener ue la siguiente cantidad

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (\text{G.4})$$

se conserva. Notemos que en este caso ya sea que parametricemos según  $\lambda$  o  $\tau$ , se debe de tener que la cantidad anterior se conserva. Entonces, de manera general procedemos ha hallar la derivada absoluta de dicha cantidad teniendo un parámetro afín general  $\xi$

$$\frac{d}{d\xi} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\xi} \quad (\text{G.5})$$

Aprovechando que los índices mudos son intercambiables y que el tensor métrico es simétrico, obtenemos

$$\frac{d}{d\xi} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \ddot{x}^\nu \quad (\text{G.6})$$

$$= \partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \left( \frac{q}{m} F_{\beta}^\mu \dot{x}^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) \quad (\text{G.7})$$

Como la derivada covariante del tensor métrico es cero tenemos

$$\frac{d}{d\xi}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 2g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \frac{q}{m} F_{\beta}^{\mu} \dot{x}^\beta \quad (\text{G.8})$$

Ahora bien, si tratamos con la luz, la interacción electromagnética sería cero y quedaría demostrado que  $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$  es una constante. Pero en caso contrario tenemos que continuar trabajando la anterior ecuación, en efecto

$$\frac{d}{d\xi}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = \frac{2q}{m} F_{\nu\beta}\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta \quad (\text{G.9})$$

como el tensor electromagnético es anti simétrico y aprovechando que los indices mudos se pueden intercambiar se tiene que :

$$\frac{d}{d\xi}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 0 \quad (\text{G.10})$$

Luego queda demostrado que efectivamente, trátense partículas masivas o luz, con parametrización  $\tau$  o  $\lambda$ ; la cantidad  $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$  es una constante que no varía. De manera que es suficiente con establecer las condiciones iniciales para determinar que estamos tratando con partículas ( $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -c^2 \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ ) o con la luz ( $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ ).

Esta cantidad conservada, cuando se habla de la luz y espacio tiempo plano, viene a ser justamente proporcional al modulo del cuadvivector de onda.

$$\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \propto k_\mu k^\mu \quad (\text{G.11})$$

Para llegar a dicha conclusión nos apoyamos en el lagrangiano propuesto por Shirafuji (1983) en el cual el momento generalizado, para espacio tiempo plano viene a ser

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \kappa \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (\text{G.12})$$

por otra parte,  $p_\mu$  en espacio tiempo plano se expresa como  $(-\frac{E}{c}, \mathbf{p})$ , el cual para el caso de la luz en el vacío, en concordancia con Wang (2011), viene dado por  $(-\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\mathbf{k})$ . De manera que, definiendo al cuadri vector de onda como

$$k^\mu = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\mathbf{k}\right) \quad |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (\text{G.13})$$

se tiene que (G.11) se cumple.

# Bibliografía

- W. B. Bonnor. Static magnetic fields in general relativity. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 67(3):225–232, mar 1954. doi: 10.1088/0370-1298/67/3/305. URL <https://doi.org/10.1088/0370-1298/67/3/305>.
- W. B. Bonnor. Exact solutions of the einstein-maxwell equations. *Zeitschrift für Physik*, 161(4):439–444, Aug 1961. ISSN 0044-3328. doi: 10.1007/BF01342458. URL <https://doi.org/10.1007/BF01342458>.
- L. Borissova and D. Rabounski. *Fields, vacuum, and the mirror universe*. 2010. URL <http://sfa.ptep-online.com/books/fields2009.pdf>.
- S. Carroll. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity; International ed.* Pearson Education, Essex, Aug 2013. doi: 1292026634. URL <https://cds.cern.ch/record/1602292>.
- I. Gutsunaev, A. Shaideman, and W. Elsayad. A new class of solutions of the magnetostatic einstein-maxwell equations. *Gravitation & Cosmology - GRAVIT COSMOL*, 13, 01 2007.
- E. Hackmann and H. Xu. Charged particle motion in kerr-newmann space-times. *Physical Review D*, 87, 04 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.87.124030.
- J. D. Jackson. *Classical electrodynamics; 2nd ed.* Wiley, New York, NY, 1975. URL <https://cds.cern.ch/record/100964>.
- J. Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with Python 3*. Cambridge University Press, 3 edition, 2013. doi: 10.1017/CBO9781139523899.
- S. Mukhiemer. Relativistic charged particles in external em field. 04 2020.
- T. Shirafuji. Lagrangian Mechanics of Massless Particles With Spin. *Prog. Theor. Phys.*, 70: 18–35, 1983. doi: 10.1143/PTP.70.18.
- M. Simone. Astronomers measure a 1-billion tesla magnetic field on the surface of a neutron star. URL [bit.ly/2UtrCDK](http://bit.ly/2UtrCDK).
- H. Stephani, D. Krämer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations; 2nd ed.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003. doi: 10.1017/CBO9780511535185. URL <https://cds.cern.ch/record/624239>.
- C. Tsagas. Electromagnetic fields in curved spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22, 07 2004. doi: 10.1088/0264-9381/22/2/011.
- R. M. Wald. *General relativity*. Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984. URL <https://cds.cern.ch/record/106274>.

C. Wang. Plane waves in a moving medium and the lorentz covariance of minkowski's photon and electromagnetic momentum-energy four-vectors. 01 2011.

H. Weyl. Zur gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 359(18):117–145, 1917. doi: 10.1002/andp.19173591804. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19173591804>.