

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS



T E S I S

“DIFUSIVIDAD INDUCIDA POR UNA INESTABILIDAD  
DE TIPO PINCH AXIAL ROTANTE”

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
LICENCIADO EN FÍSICA

ELABORADA POR:

**ALEJANDRO DANIEL PAREDES CABREL**

ASESOR:

MG. EDGARD VIDALON VIDALON

LIMA-PERU

2021

## Dedicatoria

*Para mamá quien, con su ejemplo, me enseñó el valor del trabajo constante.*

*Para papá quien desde la niñez sembró en mi corazón el amor al conocimiento en su  
más amplio sentido.*

*Para Sonia, mi amor, quien es mi inagotable fuente de fortaleza y un gran ejemplo  
paciencia.*

*Para Sophie, mi razón de existir, quien llena mi espíritu de alegría con su sonrisa.*

*Para Camila, quien me enseña a ser padre todos los días.*

*Para Andy.*

---

## Agradecimientos

Mi formación escolar comenzó en el colegio Nuestra Señora del Prado que se encuentra en el tradicional Barrios Altos y mi carrera profesional se ha desarrollado en instituciones públicas nacionales e internacionales: UNI (Perú), M2P2 (Francia) y AIP (Alemania). Quiero agradecer a todos y cada uno de los docentes que me guiaron a través del camino de la búsqueda incesante del conocimiento. Gracias por transmitirme su curiosidad, por su paciencia, sus ejemplos, su esfuerzo y su tiempo. En particular quiero agradecer a mi actual director de tesis, de quien también fui alumno, el Prof. Edgar Vidalón por su paciencia y sus comentarios que han enriquecido este documento. Debo agradecer al Prof. Guenther Ruediger con quien se inicia este trabajo por las gratificantes discusiones sobre los fluidos inestables, a Eric Serre y Frédéric Schwander por iniciarme en el estudio de la dinámica de fluidos computacional y también al Prof. Richard Grimm por su consejo y apoyo en un momento decisivo de mi formación. Finalmente, deseo agradecer al Prof. Pereyra quien a mi ingreso a la UNI, como docente, me puso en contacto con el Prof. Julio Kuroiwa jefe del Laboratorio Nacional de Hidráulica (LNH) donde se han realizado alguno de los cálculos de este trabajo.

La educación pública, en los diferentes países donde la he recibido, es gratuita y está financiada por los impuestos que pagan los contribuyentes de los respectivos países. Este sistema permite a los estudiantes alcanzar, en función a su desempeño y vocación, diferentes grados académicos en una gran variedad de especialidades. Inclusive en especialidades que no tienen una contribución inmediata y/o directa al desarrollo económico de un país. Al rededor de este sistema educativo se generan otros servicios estudiantiles subvencionados por el estado (contribuyentes) como vivienda, salud y alimentación. Estos servicios crean las condiciones apropiadas para que un estudiante, muchas veces con escasos recursos económicos, desarrolle a plenitud sus capacidades. Gracias a este modelo educativo me ha sido posible obtener las competencias necesarias, en diferentes niveles de especialización, para llevar a cabo este trabajo. En ese sentido, agradezco a los contribuyentes del Perú, Francia y Alemania que sustentan las instituciones públicas donde me formé. Los contribuyentes peruanos continúan financiando la formación de mis actuales estudiantes, los futuros profesionales del Perú. Mi actual compromiso con la sociedad peruana es retribuir con mi trabajo de docente el apoyo recibido y fortalecer el sistema educativo público.

La vida profesional jamás será el único aspecto de la vida de una persona. Un aspecto importante esta formado por la relación que desarrolla está con los demás miembros

de la sociedad. En mi opinión, esa relación esta determinada, en gran medida, por el entorno familiar. Entiéndase, este entorno familiar, como aquel formado por los miembros unidos por vínculos de sangre así como por las amistades forjadas a través de los años. Este entorno ha cumplido un rol importantísimo pues me ha brindado un apoyo moral, emocional y económico a lo largo de mi formación académica y en particular durante el desarrollo de este trabajo. Quiero agradecer a mis padres por la confianza que siempre han depositado en mí, por el apoyo en las difíciles decisiones que he tomado y por haber puesto siempre por delante mi formación académica a pesar de las adversidades. Agradezco a Sonia, mi esposa, por incentivar me con amor y paciencia a terminar este trabajo, por su apoyo incondicional durante los momentos difíciles de la redacción y por ser mi soporte emocional durante mi etapa de estudiante y mi vida profesional . También quiero agradecer a Carmen Rosa quién, como una hermana, siempre vigila por el bienestar de mis padres, me apoya con las correcciones ortográficas y todo lo hace siempre con buen ánimo. Agradezco también a *Pipo* quién creyó en mí cuando le manifesté mi intención de realizar el postgrado en el extranjero y garantizó el crédito educativo que me permitió continuar mi educación en Francia. Agradezco a los demás integrantes de mi entorno familiar quienes a lo largo de mi trayectoria académica han celebrado mis triunfos como si fueran suyos. Ellos estuvieron presentes para celebrar mi partida hace ya más de 10 años y también estuvieron presentes a mi regreso. Desafortunadamente algunos de ellos ya no se encuentran entre nosotros. Intentaré mencionarlos con el temor de olvidar algún nombre: Tía Toña, Toño, Beto, Susana, Tía Carmen, Rossmery, Yessy, Tía Marta, Tío Pancho, Luis Nogales, Señora Delia, Andy, Max, Odile, Jose Luis, José, Mauricio, Lucie, Tali, Esperanza, Geno, Andy Castañeda, Darío, Mauro, Lucho, Martín y Oswaldo.

Muchas gracias a todos.

Lima, 10 de marzo de 2021

## Resumen

Los fluidos conductores como los metales líquidos o plasmas, cuando son sometidos a ciertos agentes que producen campos magnéticos y rotaciones, son capaces de fluir formando patrones específicos. En estas condiciones se dice que el fluido se encuentra en un régimen inestable. En particular, la inestabilidad se denomina *inestabilidad magneto rotacional*. En este trabajo se desea investigar como una inestabilidad magneto rotacional denominada pinch rotante es capaz de modificar el coeficiente de difusión, en la dirección radial, de un metal líquido contenido dentro de dos cilindros concéntricos (configuración Taylor-Couette). Esto se lleva a cabo modelando el transporte de un escalar pasivo (pensar en granos de arena o tinta líquida) dentro de un fluido conductor que experimenta la mencionada inestabilidad. Una vez identificados los parámetros del problema, se diseña un método para evaluar numéricamente el incremento del coeficiente de difusión en función de los parámetros del problema. Se encuentra que el incremento en el coeficiente de difusión depende linealmente de la viscosidad del fluido. Además, el coeficiente de proporcionalidad, conocido en la literatura como número Schatzman, alcanza un valor máximo cuando el número magnético de Mach ( $Mm$ ) es igual a 2 y decrece para valores grandes de  $Mm$ . Estos resultados podrían explicar la discrepancia entre el valor observado de la abundancia de litio en el Sol y el predicho por modelos de evolución estelar.

## Abstract

Conducting fluids such as liquid metals or plasmas, when subjected to certain agents that produce magnetic fields and rotations, are capable to flow forming specific patterns. Under these conditions it is said that the fluid is in an unstable regime. In particular, the instability is called *magneto-rotational instability*. The aim of this work is to investigate how the so called rotating pinch magneto-rotational instability is capable of modifying the diffusion coefficient, in the radial direction, of a liquid metal contained within two concentric cylinders (Taylor-Couette configuration). This is achieved by modeling the transport of a passive scalar (think of grains of sand or liquid ink) within a conducting fluid that experiences the aforementioned instability. Once the parameters of the problem have been identified, a method is designed to numerically evaluate the increase in the diffusion coefficient as a function of the problem parameters. It is found that the increase in the diffusion coefficient depends linearly on the viscosity of the fluid. Furthermore, the coefficient of proportionality, known in the literature as the Schatzman number, reaches a maximum when the magnetic number of Mach ( $Mm$ ) is equal to 2 and decreases for large values of  $Mm$ . These results could explain the discrepancy between the observed value of the abundance of lithium in the Sun and the predicted one by stellar evolution models.

---

## Prólogo

Durante el período de mi formación de pregrado en la Facultad de Ciencias de la UNI, la simulación numérica de física de altas energías, la física teórica, la caracterización de materiales y películas delgadas y la datación radiométrica se destacaban como sólidas líneas de investigación. Mis intereses se alineaban principalmente con la física teórica y luego se formalizaron cuando inicié los estudios de maestría en ese rama a mediados del año 2007 en la ciudad de Marsella, Francia. Dos años después, al finalizar la maestría e iniciar el doctorado mis intereses habían cambiado. Empecé a trabajar en la simulación numérica de fluidos aplicada a reactores nucleares de fusión. A mediados del año 2013 obtuve un puesto de tres años en un instituto de astrofísica como investigador postdoctoral en un proyecto de simulación numérica de fluidos, pero esta vez aplicada a un modelo del Sol.

Durante la maestría, la formación en física teórica fue bastante amplia. Esta comprendía cursos obligatorios como mecánica cuántica, teoría de grupos, geometría diferencial y teoría cuántica de campos. La formación se completa con cursos electivos como teoría de sistemas dinámicos, física estadística, superfluidez y un proyecto informático. Es durante este proyecto informático que tuve el primer contacto real con el cálculo científico. Si bien en la UNI había llevado cursos de programación, es recién durante el proyecto informático que estoy en la necesidad de implementar un algoritmo sencillo en un código FORTRAN para calcular magnitudes físicas (energía y magnetización) en un modelo físico (modelo de Ising). Salvo el curso de superfluidez y el proyecto informático, ningún otro curso de la maestría estaba directamente relacionado con los temas que abordaría en el doctorado o el postdoctorado. Sin embargo, es necesario precisar que muchas de las teorías, técnicas y métodos aprendidos durante la maestría en física teórica son perfectamente aplicables en otras ramas de la física e inclusive en el diseño de algoritmos para la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP). En ese sentido, puedo decir que la formación en física teórica fue fundamental para los posteriores trabajos de investigación y para mi actual desempeño en la física computacional.

En la década del 2000, cerca de la ciudad de Marsella se inicia la construcción de un reactor nuclear experimental de fusión denominado ITER por sus siglas en inglés International Thermonuclear Experimental Reactor. Su construcción incrementó la oferta de becas de doctorado en temas relacionados a la tecnología usada por ITER: fusión por confinamiento magnético (FCM). Gran parte de las becas ofrecidas fueron puestas a concurso entre los diferentes institutos de investigación de próximos a ITER, beneficiando directa-

---

mente a los candidatos doctor de la región. Concurse por una de las becas propuestas y luego de una evaluación y entrevista fui aceptado para realizar la tesis de doctorado en el año 2009. El trabajo de doctorado marca un punto importante en mi carrera profesional, pues por primera vez me planteaba un doble desafío : ser autodidacta y generador de artículos científicos. El aprendizaje autodidacta<sup>1</sup> se concentró en las bases de la fusión nuclear, mecánica de fluidos, modelos fluidos de transporte, métodos numéricos para la solución de EDP's hiperbólicas, programación paralela en FORTRAN y tratamiento de datos con intérpretes de comando como Python y Gnuplot. La experiencia y disciplina adquirida durante la formación en la UNI y los cursos de maestría fueron fundamentales para asimilar la gran cantidad de información y así llevar a cabo el doble desafío.

El trabajo de post doctorado se desarrollo en el contexto de una colaboración teórica-experimental. El equipo en el que trabajaba realizaba las simulaciones numéricas y generaba mediciones  *sintéticas*  (valores numéricos de ciertas variables físicas) que luego eran verificadas por otro equipo de experimentales. El trabajo coordinado entre experimentadores y simuladores fue lo más gratificante durante esta etapa. Con respecto al desarrollo del trabajo, la situación fue similar a lo ocurrido durante el doctorado. El trabajo estuvo nuevamente marcado por el auto aprendizaje y la producción de resultados. El auto aprendizaje se concentró en el estudio de inestabilidades en Magneto Hidrodinámica (MHD), la configuración Taylor Couette y el perfeccionamiento en el uso del ordenador como herramienta para la solución de EDP's. Ahora el auto aprendizaje y la producción de resultados eran parte de la rutina.

Las ecuaciones diferenciales resueltas en esta tesis de licenciatura provienen de la MHD. Los fenómenos físicos que éstas describen no son abordados en el plan curricular de pre grado de física de la facultad de ciencias de la UNI. Sin embargo, debido a la experiencia adquirida a lo largo de mi formación profesional es posible abordar estos temas de una manera simple. Los capítulos intitulados  *Introducción y Conceptos generales*  son un reflejo de todos los períodos de auto aprendizaje e intentan presentar, a los lectores no familiarizados con las inestabilidades en MHD y la configuración Taylor-Couette, los conceptos más importantes. La información expuesta en estos capítulos se encuentra dispersa en diferentes libros y artículos de investigación. En este trabajo se ha hecho un esfuerzo por presentarlos de una manera clara y auto consistente. A lo largo de esos capítulos se incluyen, también, las referencias para que sean consultadas por el lector con el fin de profundizar el conocimiento en los temas que se considere necesario.

---

<sup>1</sup>En el período de tiempo que lleve a cabo el programa de doctorado no se contemplaba la asistencia a cursos de formación.



Puedo decir que, durante mi formación profesional, mis intereses científicos han evolucionado de la física teórica hacia la simulación numérica de fluidos y ahora hacia la física computacional en general. He llegado a la conclusión que la herramienta numérica es fundamental para la comprensión de los fenómenos físicos y pienso, debe ser un elemento importante en la formación de estudiantes de pre grado de física. Este descubrimiento marca la dirección de mi actual desarrollo profesional e inclusive mi desempeño como docente investigador en la UNI. Esto se materializa con la proposición, a estudiantes de pre grado, de cursos electivos y proyectos de investigación relacionados a la solución numérica de EDP's obtenidas al modelar fenómenos físicos.

La redacción de esta tesis ha estado marcada por dos hechos históricos trascendentales para el Perú: la pandemia de COVID-19 y la campanã electoral para la presidencia del Perú en plena celebración del bicentenario de la independencia. Ambos acontecimientos llevan a la inevitable reflexión del papel que debemos jugar los científicos en la vida social de nuestro país.

Ningún país estaba preparado para afrontar una pandemia de esta magnitud. Para hacer frente a este nuevo escenario, los diferentes países han tenido que conducir estudios científicos para determinar el mecanismo de transmisión del virus, desarrollar pruebas de diagnóstico rápido, diseñar modelos epidemiológicos, etc. En base a ésta información se han diseñado y aplicado estrategias para la contención del avance de la infección mientras se organizaba la respuesta de los centros de salud. Los estudios sobre el modo en que el virus logra entrar a las células humanas han permitido crear, en un tiempo récord, varias vacunas basadas en tecnologías novedosas. Los países que han liderado estos estudios son los que están más desarrollados. No sorprende que sean justamente estos países, los que tienen las más sólidas políticas de promoción de la investigación científica y del desarrollo tecnológico. Esta crisis sanitaria ha puesto en evidencia el importante rol que cumple, en la sociedad, la comunidad científica (biólogos, epidemiólogos, médicos, matemáticos, físicos, ingenieros, etc.) y los aparatos gubernamentales de gestión de la investigación y desarrollo tecnológico.

La inestabilidad política de finales del 2020, entre otras cosas, se vio agudizada por los reclamos sobre el deficiente manejo de la crisis sanitaria. Las contradicciones en algunas de las medidas así como el retroceso en la aplicación de otras, sugiere que muchas de las decisiones, para el control de la epidemia, no fueron tomadas en base a evidencia científica. La campanã electoral presidencial, como es habitual, ha traído el enfrentamiento entre grupos políticos que apuestan por la desinformación para desprestigiar a los oponentes. Ese juego ha incrementado la preexistente desconfianza, de gran parte de

la población, en las vacunas desarrolladas por diferentes laboratorios, a pesar que éstas están respaldadas por publicaciones científicas ampliamente reconocidas. Además, la alta demanda de tratamientos médicos con nula o cuestionable verificación científica no hacen más que confirmar que hay un déficit de cultura científica en la población. Identificar el origen de este déficit amerita un análisis más profundo de la realidad peruana. Pienso que los científicos podemos ayudar a combatir tanto el déficit de cultura científica como la vulnerabilidad de la población frente a los mecanismos de desinformación, vulgarizando el conocimiento y poniendo a disposición de la población la principal herramienta que utilizamos en nuestro trabajo: el rigor científico.

En conclusión, considero que los científicos peruanos tenemos una doble tarea: generar nuevo conocimiento básico y/o aplicado y divulgar. Debemos hacer un esfuerzo por vulgarizar nuestro trabajo, acercarlo a las grandes mayorías y, en ese esfuerzo, enseñar a los ciudadanos a cultivar el rigor científico y fomentar el pensamiento crítico. La pandemia de COVID-19 no es la primera ni será última dificultad que la sociedad peruana tendrá que enfrentar con conocimiento científico. Por lo tanto, es también importante que los científicos participemos activamente en el diseño de las instituciones que organizan el desarrollo de la ciencia y la tecnología en el Perú. La construcción de la ciencia que queremos en el futuro para nuestro país está en nuestras manos.

Lima, 10 de marzo de 2021

*The partial differential equations are made by God, the boundary conditions by the Devil.*

*Las ecuaciones diferenciales parciales están hechas por Dios, las condiciones de frontera por el Diablo.*

Alan Turing.

# Índice general

<b>Título</b>	
<b>Dedicatoria</b>	<b>1</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>Resumen</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Prólogo</b>	<b>6</b>
<b>Índice general</b>	<b>12</b>
<b>1. Estructura de la tesis</b>	<b>13</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>15</b>
2.1. Fluidos conductores y Magnetohidrodinámica . . . . .	15
2.2. Destrucción de Litio en el Sol . . . . .	16
2.3. Inestabilidades magnetorotacionales . . . . .	17
2.4. Inestabilidad de Pinch rotante . . . . .	20
2.5. Pregunta de investigación, hipótesis de trabajo y objetivo de la tesis . . . .	21
2.6. Estrategia numérica . . . . .	22
<b>3. Conceptos generales</b>	<b>24</b>
3.1. Maxwell y Navier-Stokes incompresible . . . . .	24
3.2. Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica . . . . .	26
3.3. Configuración geométrica Taylor-Couette . . . . .	29
3.4. Ecuaciones adimensionales de la MHD . . . . .	32
3.4.1. Ecuación de balance de momento adimensionada . . . . .	33
3.4.2. Ecuación de evolución del campo magnético adimensionada. . . .	34
3.5. Rotación diferencial Cuasi-kepleriana . . . . .	36

<b>Índice general</b>	<b>12</b>
<hr/>	
<b>4. Inestabilidad de pinch rotante y escalar pasivo</b>	<b>38</b>
4.1. Condiciones de frontera y condiciones iniciales . . . . .	38
4.2. Inestabilidad de pinch rotante . . . . .	40
4.3. Modelamiento del transporte de un escalar pasivo . . . . .	48
4.4. Método de cálculo de la razón $D^*/D$ . . . . .	50
<b>5. Resultados</b>	<b>54</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>7. Recomendaciones</b>	<b>63</b>
<b>Apéndices</b>	<b>64</b>
<b>A Fuerza de Lorentz</b>	<b>64</b>
<b>B Ley de Ohm</b>	<b>67</b>
<b>C Aproximaciones para escalas de tiempo grandes</b>	<b>69</b>
C.1. Fuerza eléctrica por unidad de volumen . . . . .	69
C.2. Ley de Ampère-Maxwell . . . . .	71
<b>Referencias</b>	<b>73</b>
Referencias . . . . .	73

# Estructura de la tesis

---

Antes de comenzar con la introducción a este trabajo, se presenta la estructura de la tesis con el objetivo de orientar al lector a través del documento y así facilitar su lectura.

En el Cap. 2 se inicia con una descripción de los fluidos conductores y se explica como la interacción de los mismos con campos electromagnéticos, da origen a una dinámica compleja denominada Magneto Hidro Dinámica (MHD). Esta dinámica puede describir el comportamiento del plasma contenido entre el núcleo del Sol y su superficie externa. Se introduce también el problema de la abundancia del litio en el Sol, que es la motivación principal de este trabajo. Luego se describen las inestabilidades magneto rotacionales, en particular la inestabilidad de pinch rotante. También se presentan las preguntas de investigación, hipótesis de trabajo y objetivos de la tesis, donde se plantea la posibilidad que la inestabilidad de pinch rotante sea un mecanismo capaz de incrementar el coeficiente de difusión de un fluido. Finalmente se describe la estrategia numérica que se llevará a cabo para mostrar la veracidad o falsedad de la hipótesis de trabajo.

El Cap. 3 profundiza en la deducción de las ecuaciones de la MHD, que son las ecuaciones que gobiernan los fluidos conductores sometidos a campos eléctricos y magnéticos. Las ecuaciones son deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. Luego se describe la configuración Taylor-Couette y se definen los parámetros físicos y geométricos del problema que serán utilizados para adimensionar las ecuaciones de la MHD y así resolverlas numéricamente. También se muestran las soluciones estacionarias de las ecuaciones MHD en configuración Taylor-Couette y hacia el final se describe el valor que debe adoptar uno de los parámetros físicos ( $\mu = 0,35$ ) para que los cilindros de la configuración Taylor-Couette representen adecuadamente la capa exterior del Sol y la capa exterior del núcleo interno.

En el Cap. 4 empieza mostrando las condiciones de frontera y las condiciones iniciales del problema. Éstas últimas se plantean a partir de la solución estacionaria de las ecuaciones de la MHD. Se explica, también, bajo que condiciones la inestabilidad de tipo pinch rotante se puede desarrollar. Es decir, se identifican los valores que deben tener los números adimensionales del problema, para que la inestabilidad se produzca y se cons-

truye el denominado mapa de estabilidad marginal. A manera de ilustrar la inestabilidad de pinch rotante, se muestran algunos perfiles de la componente radial del campo velocidad cuando se aumenta uno de los parámetros del problema. Finalmente, se presenta un modelo para estudiar el transporte de un escalar pasivo como el litio y se explica en detalle la metodología para validar la hipótesis de trabajo.

En el Cap. 5 se presentan las simulaciones realizadas para diferentes valores de los números adimensionales. A partir de la abundancia de datos se busca realizar una síntesis y organización de los resultados para relacionarlos mediante una dependencia sencilla. En el Cap. 6 se muestran las conclusiones y finalmente en Cap. 7 se presentan las recomendaciones para futuras investigaciones.

La sección de apéndices consta de tres partes y están principalmente desarrolladas a partir de (Davidson, 2001). En el Ap. A la fuerza de *Lorentz* es descrita y la correspondiente fuerza por unidad de volumen es obtenida para ser integrada como término de fuerza de cuerpo en las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones serán utilizadas para la deducción de las ecuaciones MHD. En el Ap. B el objetivo es mostrar como se modifica la ley de Ohm cuando están presentes campos eléctricos y magnéticos que dependen del tiempo. Ésta deducción supone que las velocidades involucradas en los fenómenos de la MHD son no relativistas. Para obtener la expresión final de las ecuaciones de la MHD es necesario hacer aproximaciones para escalas de tiempo largas. En el Ap. C, se justifican y detallan estas aproximaciones así como sus consecuencias.

Estimado lector está usted invitado a descubrir este trabajo. Le deseo una buena lectura.

# Introducción

---

## Resumen

En este capítulo se expone una descripción de los fluidos conductores y se explica como la interacción de los mismos con campos electromagnéticos da origen a una dinámica compleja denominada Magneto Hidrodinámica (MHD). Se describe también el problema de la abundancia de litio y su relación con las inestabilidades magneto rotacionales. Se plantean las preguntas de investigación, hipótesis de trabajo y objetivos de la tesis. Finalmente se describe la estrategia numérica para mostrar la veracidad o falsedad de la hipótesis de trabajo.

## 2.1. Fluidos conductores y Magnetohidrodinámica

Gases ionizados (plasmas) y metales líquidos como el mercurio, sodio líquido o galio líquido (29°C), son claros ejemplos de fluidos conductores de electricidad o simplemente llamados fluidos conductores. Se piensa que el núcleo externo de la tierra, a diferencia del sólido núcleo interno, está compuesto por hierro fundido mezclado con níquel y pocos rastros de elementos más ligeros. Magnetósferas de planetas y estrellas, colas de cometas, jets extragalácticos, discos de acreción y muchos otros objetos astrofísicos, son estudiados tratándolos como fluidos conductores viscosos. La magnetohidrodinámica (MHD) se interesa en el estudio de fluidos conductores en interacción con campos magnéticos y se basa en dos ramas bien conocidas de la física: la hidrodinámica y la electrodinámica.

Por el lado de la hidrodinámica consideraremos las ecuaciones de Navier-Stokes que describen la dinámica de un fluido con viscosidad  $\nu$ . Debemos recordar que estas ecuaciones se obtienen al modelar al fluido como un continuo. Este modelo es válido siempre y cuando el camino libre medio de las partículas constituyentes del continuo es mucho



más pequeño que la escala espacial en la que es observada el fluido. De acuerdo a este criterio, cualquier sustancia puede ser tratada como un fluido para una escala espacial determinada. Las ecuaciones de Navier-Stokes están formadas por la ecuación de continuidad y la ecuación de balance del momento. Si adicionalmente consideraremos que el fluido no experimenta variaciones temporales de la densidad, entonces la ecuación de continuidad se transforma en la denominada condición de incompresibilidad: divergencia nula para el campo de velocidades del fluido. Una consecuencia directa de la condición de incompresibilidad, es que elimina la existencia de ondas acústicas en el sistema.

Por el lado de la electrodinámica en primer lugar, consideraremos las ecuaciones de Maxwell que describen la dinámica entre los campos magnéticos y eléctricos. En segundo lugar, consideraremos la ley de Ohm, ya que al tratar con un fluido conductor (hecho de un material con conductividad  $\sigma$ ), éste debe generar una respuesta cuando es sometido a un campo eléctrico. En tercer lugar, consideramos la fuerza de Lorentz que es la fuerza que experimentará el fluido conductor debido a su interacción con los campos eléctricos y magnéticos.

Los fenómenos magnetohidrodinámicos se dan como una consecuencia de la interacción entre un fluido conductor y los campos eléctricos y magnéticos. Cuando un fluido conductor, o simplemente un conductor, se mueve a través de una zona donde existe un campo magnético; se inducirá un movimiento de cargas (corriente eléctrica) y por lo tanto un campo eléctrico. Esta corriente se puede considerar como un elemento constitutivo del fluido en movimiento quien experimentará una fuerza de Lorentz. Esta fuerza acelerará el fluido a través del campo magnético induciendo un nuevo campo eléctrico y una nueva corriente que modificará el campo magnético original. Esta dinámica se retro alimenta así misma y debe ser planteada de manera auto-consistente mediante un acople de las ecuaciones de Navier-Stokes, Maxwell, ley de Ohm y la fuerza de Lorentz. Los efectos radiativos no serán considerados en este trabajo.

## 2.2. Destrucción de Litio en el Sol

En el modelo BBN (Big Bang nucleosynthesis) (Boesgaard y Steigman, 1985) se considera que el litio, junto al berilio y boro, fue sintetizado durante el Big Bang y por lo tanto, estuvo presente en la formación de estrellas. Mediante análisis espectrales (Müller, 1968, Capítulo 5) de la superficie solar se ha podido identificar la presencia de litio en la atmósfera del sol y se presume que también esté presente en la zona convectiva. Sin embargo, la abundancia de litio, determinada por estas observaciones, discrepan con la

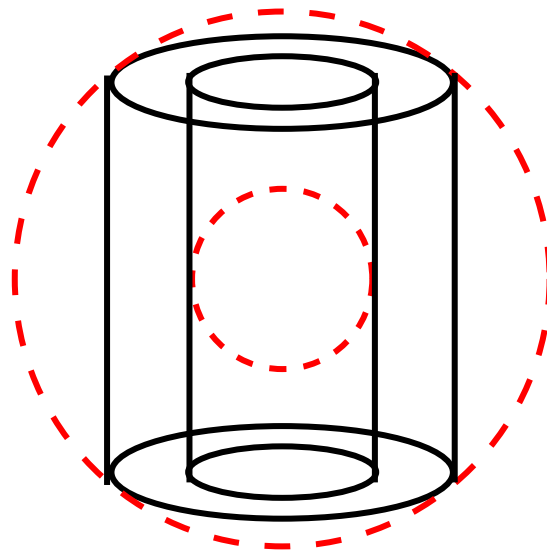
abundancia predicha por modelos de evolución estelar (Zahn, 1974). Esta discrepancia fue inicialmente señalada por (Greenstein y Richardson, 1951) y ha sido ampliamente discutida en (Hughes, 2007). La explicación más aceptada para resolver esta discrepancia, es considerar que el litio está siendo destruido o “quemado” al interior del Sol. Este proceso de destrucción no puede suceder al interior de la zona convectiva ( $\approx 2,00 \times 10^6 K$ ) pues no existen las condiciones de temperatura necesarias ( $\approx 2,8 \times 10^6 K$ ), por lo que la destrucción debe ocurrir en una región más profunda. Si consideramos que el sol está compuesto por un plasma (fluido conductor), entonces es posible pensar que un mecanismo de difusión, propio de un fluido, es el responsable del transporte del litio de la zona convectiva hacia el interior. Sin embargo, al estimar el coeficiente de difusión (Hughes, 2007) en regiones próximas a la taoclina<sup>1</sup> se encuentra que haría falta un coeficiente de difusión aproximadamente 100 veces más grande para poder afirmar que la difusión es la responsable del transporte del litio al interior del Sol. Esto nos lleva a la hipótesis propuesta por (Schatzman, 1977) que indica que debe existir un coeficiente de difusión adicional  $D^*$  que es generado por turbulencia al interior del Sol. Según este mismo autor, dicho coeficiente debe ser proporcional a la viscosidad del plasma. El coeficiente de proporcionalidad, en este trabajo, recibe el nombre de número de Shatzman  $Re^*$ . Un detalle particular de la explicación propuesta por Shatzman, es que no se detalla el mecanismo que origina la turbulencia.

## 2.3. Inestabilidades magnetorotacionales

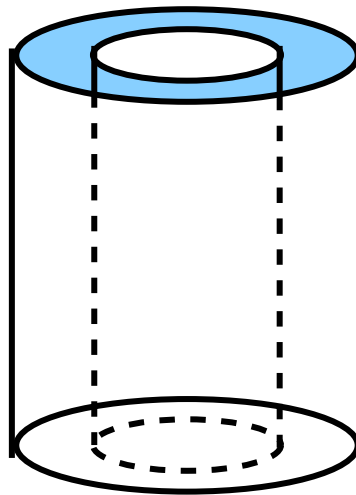
En el problema descrito en la Sec. 2.2, el Sol puede ser considerado como un plasma con simetría esférica en rotación que no gira de manera rígida, sino más bien las “capas” se mueven con rapidez angular diferentes debido a la viscosidad “fricción” entre ellas. Este fenómeno recibe el nombre de rotación diferencial y es un elemento importante como generador de turbulencia y de difusión turbulenta. Si bien un modelo de plasma con rotación diferencial en geometría esférica debe ser aplicado al Sol, existe mucha más literatura teórica, experimental y de simulación numérica desarrollada para la rotación diferencial en geometría cilíndrica. Por esa razón en este trabajo, para modelar el problema descrito en la sección anterior, se utilizará la geometría cilíndrica. La configuración cilíndrica para estudiar la rotación diferencial recibe el nombre de Taylor-Couette y consiste de dos cilindros concéntricos que pueden rotar de manera independiente uno con respecto del otro.

---

<sup>1</sup>Zona de transición entre la región radiativa del Sol y la zona convectiva



(a)



(b)

Figura 2.1: La geometría esférica del Sol considerado como un plasma rotante es convertida en una geometría cilíndrica

La Fig. 2.1(a) representa, con líneas punteadas rojas, el núcleo y la superficie exterior del Sol; ambas rotando diferencialmente. De esta manera podemos identificar el núcleo con el cilindro interior y la superficie exterior del Sol con el cilindro exterior de la Fig. 2.1(b). El plasma contenido entre el núcleo y la superficie externa es reemplazado por un fluido conductor contenido entre los cilindros. Por ahora no tiene ninguna relevancia que el fluido sea conductor o no, ya que por el momento no hay campos eléctricos

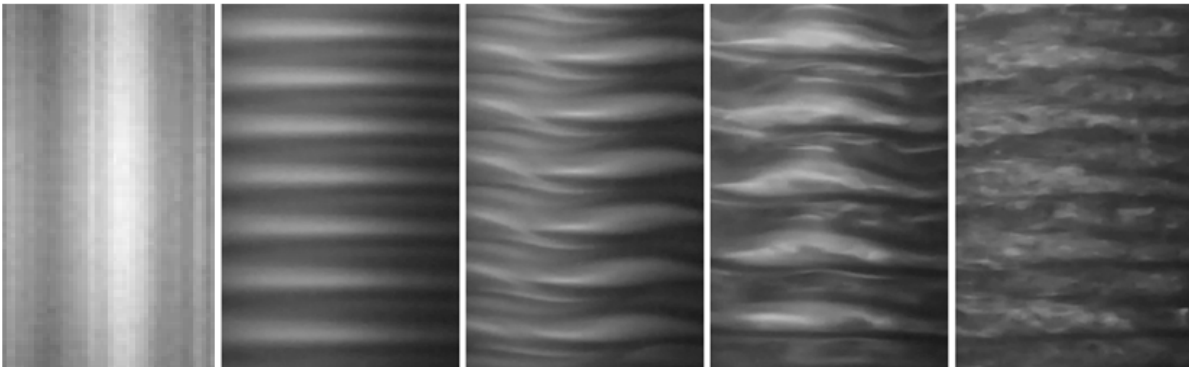


Figura 2.2: Vista lateral de una configuración Taylor-Couette. Fluido contenido entre los cilindros de la configuración Taylor-Couette. Al rotar los cilindros el fluido transita del régimen laminar (primera imagen) al turbulento (última imagen) pasando por el régimen inestable (imágenes centrales) donde se puede apreciar la aparición de patrones en el fluido.

o magnéticos presentes. El sistema conformado por la configuración Taylor-Couette y un fluido conductor o no conductor es conocido como flujo de Taylor-Couette. En términos generales este flujo transitará a través de diferentes regímenes (ver Fig. 2.3) a medida que se incremente la rapidez angular de los cilindros que está directamente asociada al número de Reynolds. Inicialmente para un número de Reynolds bajo, el flujo estará en un régimen laminar en el cual el flujo se mueve por capas que se mezclan poco o casi nada entre ellas (primera imagen en Fig. 2.3). En segunda instancia, para números de Reynolds medianamente elevados, el flujo estará en el régimen inestable caracterizado por la formación de patrones o estructuras (segunda, tercera y cuarta imagen en Fig. 2.3). Finalmente para números de Reynolds elevados, el flujo estará en el régimen turbulento caracterizado por la ausencia de estructuras, irregularidad en el flujo y la energía cinética es transformada en energía interna (última imagen Fig. 2.3).

Por otro lado, el Sol posee un campo magnético producido por el plasma en movimiento de la zona convectiva y otro denominado campo magnético primordial que adquirió al momento de su formación. En este trabajo suponemos que este campo magnético primordial es el más importante y será modelado como un campo puramente poloidal<sup>2</sup> en una geometría cilíndrica. Debido al mecanismo de interacción entre fluidos conductores y campos magnéticos descrito en la Sec. 2.1, el campo magnético primordial, tiene un rol importante en la inestabilidad o turbulencia de un fluido de Taylor-Couette. Las ines-

---

<sup>2</sup>paralelo al vector  $\hat{e}_\phi$

tabilidades generadas a partir de un campo magnético y la rotación diferencial reciben el nombre de inestabilidades magnetorotacionales. Cabe señalar que tanto los regímenes inestables como turbulentos se caracterizan por una modificación de las propiedades de un fluido, como la difusión. Para una revisión más detallada sobre las diferentes inestabilidades magnetorotacionales en configuración Taylor-Couette actualmente identificadas ver (Ruediger, Gellert, Hollerbach, Schultz, y Stefani, 2017a).

## 2.4. Inestabilidad de Pinch rotante

Entre las inestabilidades magnetorotacionales disponibles, nos concentramos en la denominada pinch rotante o también llamada inestabilidad de Tayler. En la literatura, el nombre de pinch se refiere al efecto de compresión que experimentan los conductores, portadores de corriente, cuando están sometidos a fuerzas magnéticas (ver Fig. 2.4).



Figura 2.3: Conductor eléctrico experimenta efectos de compresión debido a la interacción con campo magnético.

En la inestabilidad que estudiamos, los perfiles de las componentes de los campos de velocidad y campo magnético, durante el desarrollo de la inestabilidad, evidencian un

## 2.5. Pregunta de investigación, hipótesis de trabajo y objetivo de la tesis 21

patrón que se puede identificar como una aparente compresión producto de la interacción entre los mismos. Debido que el fluido además de la aparente compresión, está en rotación, la inestabilidad recibe el nombre de pinch rotante. Ésta inestabilidad es producida al llenar el espacio entre los cilindros de la configuración Taylor-Couette con un fluido conductor, hacer pasar una corriente uniforme axial a través de todo el sistema y hacer rotar los cilindros según la ley de Kepler (ver Sec. 3.5). La corriente axial genera un campo magnético tangente a toda circunferencia contenida en un plano perpendicular a la corriente. Es decir, el campo magnético resultante tiene una sola componente en la dirección  $\hat{e}_\phi$  (vector unitario en coordenadas cilíndricas). Tales campos son comúnmente referidos en la literatura como campos poloidales. En consecuencia, un fluido conductor sometido a un campo magnético poloidal, es un modelo simplificado para el estudio de transporte turbulento de litio en el Sol.

## 2.5. Pregunta de investigación, hipótesis de trabajo y objetivo de la tesis

Si bien este trabajo está motivado por la discrepancia entre el valor observado de la abundancia de litio en el Sol y el predicho por modelos de evolución estelar, se considera que este problema es muy complejo para analizarlo con todos los fenómenos físicos involucrados. Por ese motivo, modelamos al núcleo del Sol y la superficie externa del Sol como una configuración de Taylor-Couette, el plasma en su interior como un fluido conductor y nos concentramos en la posibilidad que el transporte difusivo del litio, en la dirección radial, sea acelerado por un coeficiente difusivo turbulento originado por una inestabilidad magnetorotacional de tipo pinch rotante. Por lo anteriormente expuesto estamos en condiciones de plantear:

- **Pregunta de investigación:** ¿Es posible que una inestabilidad magnetorotacional de tipo pinch rotante modifique, en la dirección radial, el coeficiente de difusión de un fluido conductor mediante un coeficiente de difusión turbulento?
- **Hipótesis de trabajo:** Suponemos que cuando un fluido conductor experimenta una inestabilidad de tipo pinch rotante el coeficiente de difusión del fluido  $D$  se modifica en la dirección radial. Esta modificación se manifiesta como un incremento al coeficiente de difusión del fluido inestable. El incremento corresponde al coeficiente de difusión turbulento  $D^*$  y es producido únicamente por la inestabilidad.

- **Objetivo de la tesis:** Calcular numéricamente la razón  $D^*/D$  como función de los parámetros físicos y geométricos del problema que están completamente definidos por los números adimensionales de Reynolds (Re), Hartman (Ha), Schmidt (Sc) y magnético de Prandtl (Pm).

Si al calcular numéricamente la razón  $D^*/D$  se obtiene que ésta es diferente de cero para el conjunto números adimensionales para el cual se produce la inestabilidad de pinch rotante, estaremos en la posición de afirmar que la inestabilidad de pinch rotante efectivamente incrementa el coeficiente de difusión del fluido en la dirección radial y nuestra hipótesis será validada.

## 2.6. Estrategia numérica

El cálculo de la razón  $D^*/D$  se desarrolla en dos etapas bien definidas que se describirán en detalle en Sec. 4.4. La primera etapa consiste en la solución de las ecuaciones MHD en configuración Taylor-Couette. En la segunda etapa se soluciona adicionalmente una ecuación de transporte y se realiza un ajuste de curvas a partir de los datos generados.

La parte más laboriosa del cálculo es la relacionada a la solución de las ecuaciones de la MHD y la ecuación de transporte. Éstas ecuaciones se resuelven con un código escrito en FORTRAN denominado **FSEM** que utiliza un enfoque DNS (Direct Numérical Simulation), es decir resuelve las ecuaciones sin haber sido promediadas con anticipación. El código toma su nombre de la técnica mixta que utiliza para resolver las ecuaciones MHD. Esta técnica combina los Elementos Finitos Espectrales y descomposición discreta de Fourier. Para un sistema de coordenadas cilíndrico  $(R, \phi, z)$ , el dominio de cálculo se divide en planos  $RZ$  para valores específicos de  $\phi$ . Cada plano  $Rz$  se divide en elementos rectangulares y sobre cada elemento las soluciones de todos los campos se expande en una base polinomial de  $n$  elementos. En la parte angular todos los campos escalares (concentración de litio y presión) y vectoriales (velocidad y magnético) son descompuestos en una serie discreta de Fourier. Las primeras pruebas del código sobre inestabilidades de pinch rotante indican que con  $n = 14$  o inclusive  $n = 12$  junto con una descomposición de Fourier de 17 términos en total, se genera un error numérico promedio del orden  $4 \times 10^{-2} \%$  con respecto al valor de la solución numérica. Un error relativo tan pequeño garantiza la confiabilidad de los cálculos realizados. Adicionalmente el código está paralelizado con la librería MPI, es decir el código resuelve varias partes de las ecuaciones simultáneamente en diferentes procesadores. Esta característica reduce considerablemente el tiempo

de cálculo, con respecto a un código secuencial que utilice la misma técnica mixta pero sobre un solo procesador. Para una solución aproximada con una base polinomial de 14 elementos, una descomposición de Fourier con 17 términos y una ejecución utilizando 8 procesadores en un cluster de cálculo (supercomputadora), el tiempo promedio de duración de una simulación puede alcanzar las 72 horas (3 días). Los detalles sobre el desarrollo del código, la precisión de las soluciones y las pruebas de verificación pueden ser revisados en (Fournier, Bunge, Hollerbach, y Vilotte, 2005).

Una vez obtenidas las soluciones de las ecuaciones MHD y la ecuación de transporte, se extraen los datos y se realiza un ajuste de curvas con ellos. Ambas tareas se realizan con un script *Python* utilizando funciones incorporadas de la librería *numpy*. La visualización de los campos escalares y vectoriales en tres dimensiones se realizan con la herramienta *Paraview* mientras, los gráficos bidimensionales se realizan con el interprete de comandos *Gnuplot*.



# Conceptos generales

---

## Resumen

Se muestra una deducción de las ecuaciones de la MHD a partir de las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. Las ecuaciones de la MHD están sujetas a las aproximaciones de escalas de tiempo grandes y velocidades no relativistas. Se describe la configuración Taylor-Couette y se definen los parámetros físicos y geométricos del problema. Se adimensionan las ecuaciones de la MHD, según la geometría Taylor-Couette y se muestran las correspondientes soluciones estacionarias. Se describe la rotación diferencial cuasi-kepleriana.

## 3.1. Maxwell y Navier-Stokes incompresible

Para describir los fenómenos en los cuales interactúan los campos magnético  $\mathbf{B}$  y eléctrico  $\mathbf{E}$  con materiales conductores, necesitamos las ecuaciones de Maxwell, la fuerza de Lorentz y la ley Ohm. En la parte superior del Cdr. 3.1 se muestra la versión diferencial de las ecuaciones de Maxwell. En la parte intermedia se muestra la expresión de la fuerza de Lorentz que experimenta una carga  $q$ . Tanto las ecuaciones de Maxwell como la fuerza de Lorentz no necesitan mayor explicación pues ambas son abordadas en los cursos de pregrado universitario. Luego, en el mismo cuadro, se presenta la generalización de la ley de Ohm para el caso en que los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  no sean estáticos. Cabe señalar que esta generalización es necesaria, pues los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  con los que trataremos en este trabajo varían en el tiempo. En el Ap. B, el lector podrá encontrar, con detalle, la deducción de la expresión de la ley de Ohm generalizada.

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen la dinámica de un fluido con viscosidad y se componen de la ecuación de balance de momento y de la ecuación de continuidad.

En la parte inferior del Cdr. 3.1 se presentan ambas ecuaciones con la particularidad que consideramos un fluido incompresible. Un fluido incompresible es aquel en el cuál la densidad se mantiene constante y por lo tanto no se puede propagar ninguna perturbación de la densidad. En otras palabras, en un fluido incompresible no hay ondas acústicas. En esta situación la ecuación de continuidad se transforma en la denominada condición incompresibilidad que indica que el campo velocidad tiene divergencia nula. Nótese que el último término del lado derecho en la ecuación de balance de momento ( $\mathbf{f}$ ) corresponde a la fuerza externa (fuerza de cuerpo) por unidad de volumen que experimenta el fluido. Para el caso de un fluido en interacción con campos magnéticos, este término estará asociado a las fuerza de Lorentz. Para mayores detalles sobre las ecuaciones de Navier-Stokes se sugiere, al lector, revisar ([White, 2015](#)).

Cuadro 3.1: Ecuaciones involucradas en la MHD.

	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Ley de Gauss
Ecuaciones de Maxwell	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	Ley de Ampère-Maxwell
	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{ch}}{\varepsilon_0}$	Ley de Gauss
	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Ley de Faraday
Fuerza de Lorentz	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})$	
Ley de Ohm generalizada	$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})$	
Ecuación de Navier-Stokes		
Balance de momento	$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla P + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{f}$	
condición de incompresibilidad	$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$	

- $\mathbf{B}$  : campo magnético.
- $\mathbf{J}$  : densidad de corriente.
- $\mathbf{E}$  : campo eléctrico total.
- $\mu_0$ : permeabilidad magnética del vacío.
- $\varepsilon_0$ : permitividad eléctrica del vacío.
- $c$ : velocidad de la luz en el vacío.
- $\rho_{ch}$ : densidad de carga eléctrica total.
- $\mathbf{F}$ : fuerza de Lorentz.
- $\mathbf{U}$ : campo velocidad del fluido.
- $\sigma$ : conductividad eléctrica.
- $\rho$ : densidad del fluido.
- $P$ : presión ejercida en el fluido.
- $\nu$ : viscosidad microscópica<sup>1</sup> (cinemática).
- $\mathbf{f}$ : fuerza por unidad de volumen que actúa en el fluido (conductor).

## 3.2. Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica

Éstas ecuaciones se obtienen considerando la interacción de un fluido conductor y campos eléctricos y magnéticos. De aquí en adelante cada vez que se mencione a un fluido estará sobreentendido que se trata de un fluido conductor. Por otro lado, el sistema de ecuaciones resultantes debe reflejar la influencia de la dinámica del fluido, representada por su velocidad  $\mathbf{U}$ , en la dinámica entre los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  y *viceversa*.

El primer paso para obtener estas ecuaciones es introducir el campo magnético  $\mathbf{B}$  o eléctrico en  $\mathbf{E}$  en las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto se realiza identificando la fuerza por unidad de volumen  $\mathbf{f}$  que actúa sobre el fluido. Si despreciamos la fuerza de interacción gravitatoria sobre el fluido, es de esperar que la única fuerza que experimentará el fluido corresponde a la fuerza de Lorentz (ver Cdr. 3.1). Es posible encontrar la expresión de  $\mathbf{f}$  a partir de la fuerza de Lorentz (ver Ap. A) y obtenemos

$$\mathbf{f} = \rho_{ch}\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Los términos  $\rho_{ch}\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  en Eq. 3.1 representan la fuerza eléctrica y magnética por unidad de volumen sobre el fluido respectivamente. Es preciso mencionar que los fenómenos físicos que se tratan en este trabajo, principalmente procesos difusivos, se desarrollan en escalas de tiempo superiores al tiempo de relajación  $t_e = \varepsilon_0/\sigma$  que para metales líquidos es del orden de  $10^{-8}s$ . En esas condiciones (ver Ap. C.1), es posible

<sup>1</sup>Existen dos tipos de viscosidad: cinemática ( $\nu$ ) y dinámica ( $\mu$ ). La relación entre ambas es  $\nu = \mu/\rho$

mostrar que

$$|\rho_{ch}\mathbf{E}| \ll |\mathbf{J} \times \mathbf{B}|. \quad (3.2)$$

Esto significa que la fuerza magnética por unidad de volumen es más importante que la eléctrica. Con este resultado podemos reescribir la fuerza de Lorentz por unidad de volumen como

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (3.3)$$

Continuando con la aproximación de escalas de tiempo superiores al tiempo de relajación  $t_e$ , también se puede despreciar la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère-Maxwell (ver Ap. C.2) y obtener

$$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (3.4)$$

El hecho que se pueda despreciar la corriente de desplazamiento asegura la no existencia de ondas electromagnéticas en el sistema. Este resultado también implica que la densidad de corriente es un vector a divergencia nula

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.5)$$

Finalmente tenemos una expresión reducida para la fuerza de Lorentz por unidad de volumen

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (3.6)$$

Al insertar  $\mathbf{f}$  en las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible, tenemos

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla P + \rho \nu \Delta \mathbf{U} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3.8)$$

El segundo paso es introducir el campo de velocidades del fluido  $\mathbf{U}$  en las ecuaciones de Maxwell. Para esto hacemos uso de la ley de Ohm generalizada que se puede deducir a partir de la ley de Ohm tradicional considerando que el sistema no alcanza velocidades relativistas, ver Ap. B para más detalles. De esta manera tenemos una expresión para el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{U} \times \mathbf{B}, \quad (3.9)$$

que podemos reemplazar en la ley de Faraday

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{U} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.10)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{U} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.11)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}) \quad (3.14)$$

finalmente, debido a la ley de Gauss para campos magnéticos  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.15)$$

donde el coeficiente  $\eta = 1/\mu_0 \sigma$  recibe el nombre de difusividad magnética.

De esta manera hemos encontrado las ecuaciones que describen la interacción entre un fluido conductor y campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo y reciben el nombre ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD)

$$\boxed{\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla P + \rho \nu \Delta \mathbf{U} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0} \quad (3.16)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.18)$$

Podemos decir que las ecuaciones de la MHD son el acople de las ecuaciones de Maxwell y Navier-Stokes para un fluido incompresible no relativista que describe fenómenos en una escala de tiempo superior al tiempo de relajación  $t_e$ . Cabe precisar que las ondas de sonido y las electromagnéticas quedan fuera del alcance de las ecuaciones de la MHD.

### 3.3. Configuración geométrica Taylor-Couette

Se denomina configuración Taylor-Couette a un par de cilindros concéntricos con radios  $R_{in}$ , para el cilindro interior, y  $R_{out}$ , para el cilindro exterior. Estos cilindros son capaces de rotar independientemente uno con respecto del otro con rapidez angular  $\Omega_{out}$  y  $\Omega_{in}$  para el cilindro externo e interno, respectivamente. Cabe resaltar que los cilindros pueden rotar ambos en el mismo sentido, en sentidos contrarios o inclusive uno de ellos puede estar en reposo. Este dispositivo fue inicialmente diseñado por Maurice Marie Alfred Couette para determinar la viscosidad de un fluido (ver (Couette, 1888)) y luego utilizado por Geoffrey Ingram Taylor para estudiar la estabilidad de un fluido viscoso (ver (Taylor, 1923)). Por lo anteriormente descrito, decimos que un fluido de Taylor-Couette consiste en un fluido viscoso confinado entre dos cilindros coaxiales rotantes (ver (Ruediger y cols., 2017a)).

La geometría del problema permite utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas  $(R, \phi, z)$  para describir el problema. En este trabajo se considerará un fluido de Taylor-Couette conductor que está sometido a un campo magnético  $\mathbf{B}$  (ver Fig. 3.3) que sólo tiene una componente poloidal *i.e.*  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\phi$ . Como hemos visto en la sección anterior, en particular en la Ec. 3.18, este campo es producido por una densidad de corriente  $\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$  y visto que exigimos que el campo magnético sea puramente poloidal, entonces es necesario que la densidad de corriente sea axial y no nula dentro del cilindro para  $R < R_{out}$

Es posible mostrar que el sistema de Ec. 3.16-3.17, resuelto en una configuración Taylor-Couette, posee una solución estacionaria. En (Taylor, 1923), se muestra como se obtiene la solución estacionaria para el problema puramente hidrodinámico mientras que en (Rüdiger, Schultz, y Shalybkov, 2003) se utiliza este último resultado para encontrar la solución estacionaria para el sistema MHD. Si bien los campos incógnitos en las ecuaciones de la MHD son tres: velocidad ( $\mathbf{U}$ ), magnético ( $\mathbf{B}$ ) y presión ( $P$ ); la solución estacionaria queda completamente determinada por los campos de velocidad y magnético. Esto se debe a que al usar la condición de incompresibilidad ( $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ ) junto con las expresiones estacionarias de los campos de velocidad y magnético, es posible eliminar el gradiente de la solución estacionaria de la presión ( $\nabla \bar{P}$ ) de las ecuaciones. La solución estacionaria estará denotada por  $\bar{\mathbf{U}} = (0, \bar{U}_\phi, 0)$  y  $\bar{\mathbf{B}} = (0, \bar{B}_\phi, 0)$  donde

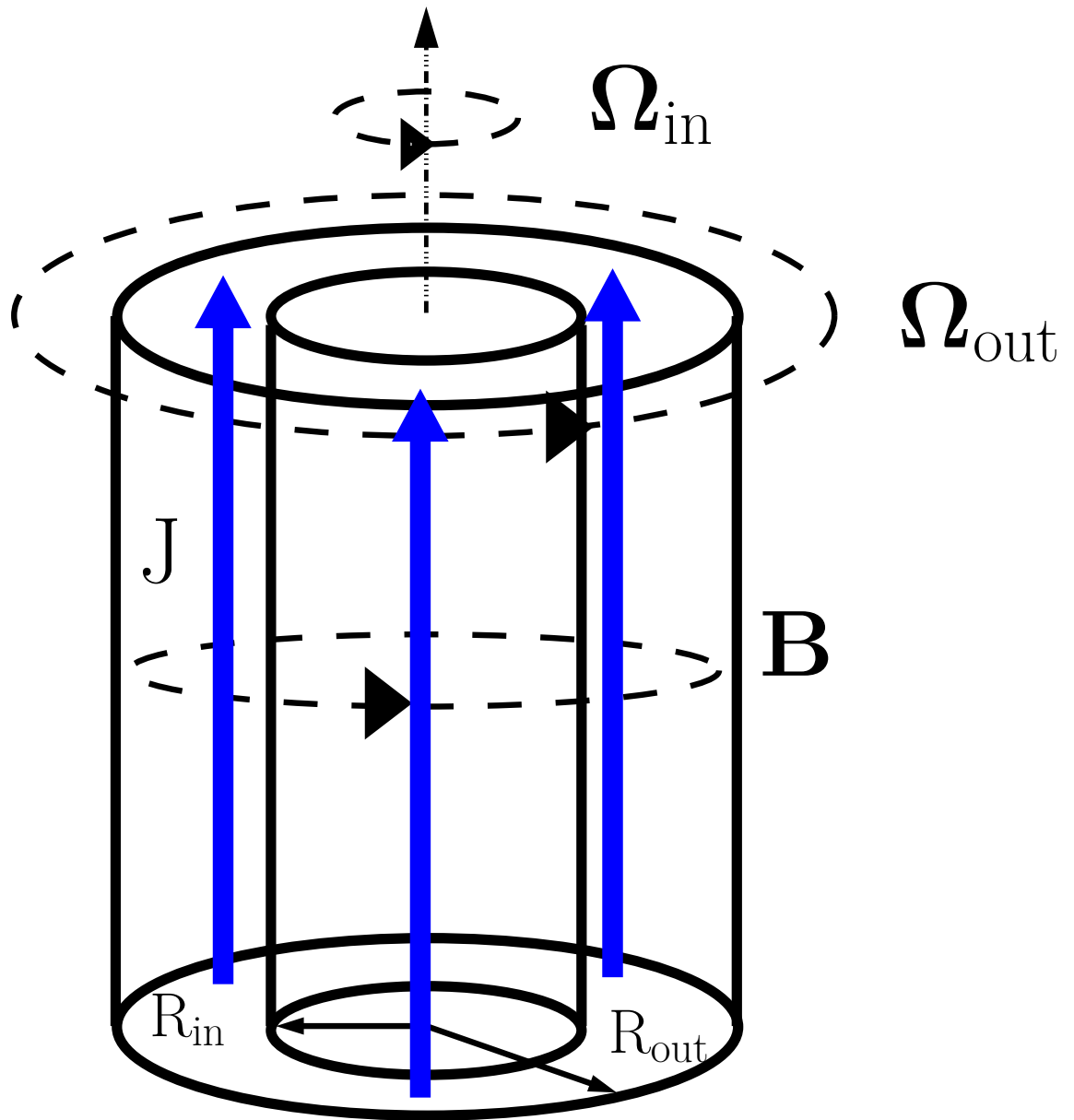


Figura 3.1: Sistema compuesto por un fluido conductor en una configuración de Taylor-Couette con campo magnético poloidal

$$\bar{U}_\phi = R\Omega = aR + \frac{b}{R}, \quad \bar{U}_R = \bar{U}_z = 0, \quad (3.19)$$

$$\bar{B}_\phi = AR, \quad \bar{B}_R = \bar{B}_z = 0 \quad (3.20)$$

con

$$\Omega(R) = a + b/R^2, \quad (3.21)$$

donde  $A$ ,  $a$  y  $b$  son constantes que dependen de los parámetros de la geometría. Las constantes  $a$  y  $b$  están relacionadas a las rapidezces angulares  $\Omega_{\text{in}}$  (cilindro interior) y  $\Omega_{\text{out}}$  (cilindro exterior) y a  $R_{\text{in}}$  y  $R_{\text{out}}$  que son los radios del cilindro interior y exterior, respectivamente. Evaluando  $\Omega(R)$  en  $R_{\text{in}}$  y  $R_{\text{out}}$  tenemos

$$\Omega_{\text{in}} = a + b/R_{\text{in}}^2 \quad \text{y} \quad \Omega_{\text{out}} = a + b/R_{\text{out}}^2. \quad (3.22)$$

Las ecuaciones Ec. 3.22 corresponden a un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas que se puede resolver para  $a$  y  $b$ . La solución del sistema lineal es

$$a = \frac{\mu_{\Omega} - r_{\text{in}}^2}{1 - r_{\text{in}}^2} \Omega_{\text{in}} \quad b = \frac{1 - \mu}{1 - r_{\text{in}}^2} \Omega_{\text{in}} R_{\text{in}}^2 \quad (3.23)$$

donde

$$\mu_{\Omega} = \frac{\Omega_{\text{out}}}{\Omega_{\text{in}}} \quad \text{y} \quad r_{\text{in}} = \frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{out}}}. \quad (3.24)$$

corresponden a la razón entre las rapidezces angulares y los radios de los cilindros externo e interno, respectivamente. De la misma manera se puede mostrar que

$$A = \frac{B_{\text{in}} r_{\text{in}} (\mu_B - r_{\text{in}})}{R_{\text{in}} (1 - r_{\text{in}}^2)} \quad \text{con} \quad \mu_B = \frac{B_{\text{out}}}{B_{\text{in}}} \quad (3.25)$$

donde  $B_{\text{out}}$  y  $B_{\text{in}}$  es el campo magnético evaluado en  $R_{\text{in}}$  y  $R_{\text{out}}$ , respectivamente. Finalmente las soluciones estacionarias de la MHD en configuración Taylor-Couette quedarán:

$$\bar{\mathbf{U}} = (0, \bar{U}_{\phi}, 0) \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{B}} = (0, \bar{B}_{\phi}, 0) \quad (3.26)$$

$$\bar{U}_{\phi} = aR + \frac{b}{R}, \quad \bar{B}_{\phi} = AR \quad (3.27)$$



$$\begin{aligned}
a &= \frac{\mu_\Omega - r_{\text{in}}^2}{1 - r_{\text{in}}^2} \Omega_{\text{in}}, & b &= \frac{1 - \mu}{1 - r_{\text{in}}^2} \Omega_{\text{in}} R_{\text{in}}^2 \\
\mu_\Omega &= \frac{\Omega_{\text{out}}}{\Omega_{\text{in}}}, & r_{\text{in}} &= \frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{out}}} \\
A &= \frac{B_{\text{in}} r_{\text{in}} (\mu_B - r_{\text{in}})}{R_{\text{in}} (1 - r_{\text{in}}^2)}, & \mu_B &= \frac{B_{\text{out}}}{B_{\text{in}}}.
\end{aligned}$$

Es necesario definir un parámetro geométrico adicional para completar la descripción de la geometría de Taylor-Couette. Ese parámetro corresponde a la separación entre los cilindros y se define como

$$D_0 = \sqrt{R_{\text{in}}(R_{\text{out}} - R_{\text{in}})}. \quad (3.28)$$

El parámetro  $D_0$  se utilizará en el adimensionamiento de las ecuaciones de la MHD.

### 3.4. Ecuaciones adimensionales de la MHD

Las ecuaciones de la MHD Ec. 3.16-3.17 junto con un fluido de Taylor-Couette conductor se estudiarán en las siguientes secciones. Para poder resolver numéricamente estas ecuaciones es necesario adimensionarlas. Esto se logra expresando los campos (coordenadas) involucrados como la multiplicación de una escala - valor característico del problema con dimensiones- y un campo (coordenada) sin dimensiones. Los campos o coordenadas adimensionales se denotarán por una letra latina con una tilde ( $\sim$ ) en la parte superior, mientras que las escalas o valores característicos se denotan por una letra latina con subíndice 0. De esta manera cada término de Ec. 3.16-3.17 será una simple expresión matemática multiplicada por un número adimensional. Cuando estos números son distintos de la unidad reciben nombres particulares como: número de Reynolds (Re), número de Hartman (Ha), etc. Estos números se les puede interpretar, por lo general, como la razón entre dos fuerzas presentes en la dinámica del fluido. La formulación adimensional también nos permite identificar los términos más *importantes* en una ecuación ya que al escoger una escala característica determinada, los números adimensionales adquieren un valor específico y por lo tanto se evidenciará que términos son pequeños.

Si consideramos la velocidad característica del problema  $U_0$  como la razón entre la distancia característica  $D_0$  y el tiempo característico  $t_0$  así como la magnitud de un campo magnético característico  $B_0$ , podemos reescribir de manera adimensional (ver Cdr. 3.2) tanto las variables y los campos así como los operadores diferenciales que aparecen en

Ec. 3.16-3.18.

Cuadro 3.2: Adimensionamiento de variables, campos y operadores diferenciales.

Variables independientes	$D = D_0 \tilde{D}$
adimensionales	$t = t_0 \tilde{t}$
Operadores diferenciales	$\nabla = \frac{1}{D_0} \tilde{\nabla}$
asociados	$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{t_0 \tilde{t}}$
Campos	$\mathbf{U} = U_0 \tilde{\mathbf{U}}, \quad U_0 = D_0/t_0$
adimensionales	$P = \rho \nu \frac{U_0}{D_0} \tilde{P}$
	$\mathbf{B} = B_0 \tilde{\mathbf{B}}$

### 3.4.1. Ecuación de balance de momento adimensionada

Recordando que  $\mathbf{J} = (1/\mu_0)\nabla \times \mathbf{B}$ , la ecuación de balance de momento toma la forma

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla P + \rho \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (3.29)$$

Para adimensionar esta ecuación, consideramos la ley de Ohm generalizada  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})$  (ver Ap. B), la cual nos permite afirmar que  $\mathbf{J}$  y  $\sigma \mathbf{U} \times \mathbf{B}$  tienen las mismas dimensiones, por lo tanto

$$\mathbf{J} = \sigma B_0 U_0 \tilde{\mathbf{J}}. \quad (3.30)$$

Reemplazando este resultado en Ec. 3.29 y utilizando la relaciones de adimensionamiento descritas en Cdr. 3.2, tenemos que

$$\frac{\rho U_0}{t_0} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\rho U_0^2}{D_0} (\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{U}} = -\frac{\rho \nu U_0}{D_0^2} \tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{\rho \nu U_0}{D_0^2} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{U}} + \sigma B_0^2 U_0 (\tilde{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{B}}). \quad (3.31)$$

Usando la relación  $D_0 = U_0 t_0$ , la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{\rho U_0}{t_0} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{U}} \right) = -\frac{\rho \nu U_0}{D_0^2} \tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{\rho \nu U_0}{D_0^2} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{U}} + \sigma B_0^2 U_0 (\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}. \quad (3.32)$$

Los coeficientes delante del gradiente de la presión adimensional y del laplaciano de la velocidad adimensional en Ec. 3.32 son idénticos, por lo tanto al multiplicar toda la ecuación por  $D_0^2/\rho \nu U_0$ , tenemos

$$\frac{D_0^2}{\nu t_0} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{U}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{U}} + \frac{\sigma B_0^2 D_0^2}{\rho \nu} (\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}. \quad (3.33)$$

Los coeficientes diferentes a la unidad que permanecen en Ec. 3.33 son asociados a los números adimensionales de Hartman (Ha) y de Reynolds (Re) mediante las siguientes expresiones

$$\text{Ha}^2 = \frac{\sigma B_0^2 D_0^2}{\rho \nu} = \frac{B_0^2 D_0^2}{\mu_0 \rho \nu \eta}, \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{1}{\mu_0 \eta}$$

entonces,

$$\text{Ha} = \frac{B_0 D_0}{\sqrt{\mu_0 \rho \nu \eta}} \quad \text{y} \quad \text{Re} = \frac{D_0^2}{\nu t_0}. \quad (3.34)$$

Finalmente tenemos la primera ecuación de la MHD adimensionada

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{U}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{U}} + \text{Ha}^2 (\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}. \quad (3.35)$$

### 3.4.2. Ecuación de evolución del campo magnético adimensionada.

Para adimensionar la segunda ecuación de la MHD asociada al campo magnético, se procede de manera similar. Se reemplazan relaciones de Cdr. 3.2 en Ec. 3.17 y se tiene

$$\frac{B_0}{t_0} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} = \frac{U_0 B_0}{D_0} \tilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{U}} \times \tilde{\mathbf{B}}) + \frac{\eta B_0}{D_0^2} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.36)$$

entonces

$$\frac{B_0}{t_0} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{U}} \times \tilde{\mathbf{B}}) \right) = \frac{\eta B_0}{D_0^2} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.37)$$

donde

$$\frac{D_0^2}{\eta t_0} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{U}} \times \tilde{\mathbf{B}}) \right) = \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{B}}. \quad (3.38)$$

En esta oportunidad se tiene un sólo coeficiente distinto a la unidad y es asociado al número adimensional conocido como número magnético de Reynolds (Rm)

$$\text{Rm} = \frac{D_0^2}{\eta t_0}. \quad (3.39)$$

Este número está relacionado al número magnético de Prandtl ( $\text{Pm} = \nu/\eta$ ) y al número de Reynolds (ver Ec. 3.34) mediante la relación

$$\text{Pm} = \frac{\text{Rm}}{\text{Re}} = \frac{\nu}{\eta}. \quad (3.40)$$

En las secciones Sec. 3.4.1 y Sec. 3.4.2 se ha descrito un adimensionamiento general que es válido en cualquier geometría. Ahora corresponde relacionar los números adimensionales de Re, Rm, Ha y Pm con los parámetros geométricos de la configuración Taylor-Couette, es decir particularizar esos números a nuestro problema de interés. Si consideramos que el tiempo característico del problema que nos interesa es  $t_0 = \Omega_{in}^{-1}$ , que la velocidad característica es  $U_0 = \Omega_{in} D_0$  y que la distancia característica del problema es la separación entre los cilindros  $D_0 = R_{out} - R_{in}$ , entonces

$$\text{Re} = \frac{D_0^2}{\nu t_0} = \frac{D_0 U_0 t_0}{\nu t_0} = \frac{D_0 U_0}{\nu} = \frac{D_0 \Omega_{in} D_0}{\nu} = \frac{\Omega_{in} D_0^2}{\nu}, \quad (3.41)$$

$$\text{Rm} = \frac{D_0^2}{\eta t_0} = \frac{\Omega_{in} D_0^2}{\eta}, \quad (3.42)$$

$$\text{Ha} = \frac{B_0 D_0}{\sqrt{\mu_0 \rho \nu \eta}}, \quad (3.43)$$

$$\text{Pm} = \frac{\text{Rm}}{\text{Re}} = \frac{\nu}{\eta}. \quad (3.44)$$

Para no recargar la notación con las tildes sobre los campos y coordenadas sin di-

mensiones, se suprimen de las ecuaciones adimensionales de la MHD dejando claro que se tratan de variables, campos y operadores diferenciales adimensionales.

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla P + \Delta \mathbf{U} + \text{Ha}^2 \text{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \quad (3.45)$$

$$\text{Rm} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{curl} (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \right) = \Delta \mathbf{B} \quad (3.46)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.48)$$

Para resolver numéricamente las ecuaciones anteriores es necesario dar las condiciones iniciales y de frontera para  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{B}$ . Estas condiciones serán detalladas en la Sec. 4.1.

### 3.5. Rotación diferencial Cuasi-kepleriana

En la Sec. 3.3 se describe la configuración Taylor-Couette. En esta configuración, los cilindros concéntricos son capaces de rotar de manera independiente y esta característica del sistema queda completamente determinada por el parámetro  $\mu_\Omega = \Omega_{out}/\Omega_{in}$ . De manera general, los cilindros pueden rotar en sentidos opuestos o en la misma dirección. En cualquiera de los casos, si las rapidezces son iguales, se dice que la rotación es rígida y por lo tanto  $\mu = 1$ . Si las magnitudes de las rapidezces angulares son diferentes, la rotación se dice que es diferencial. También es posible que uno de los cilindros permanezca en reposo mientras el otro rota. Debido a la forma como se ha definido  $\mu$ , esta condición se realizará cuando  $\Omega_{out} = 0$  y como consecuencia  $\mu = 0$ . Dentro del conjunto de rotaciones diferenciales de cilindros que rotan en la misma dirección, en este trabajo se utilizará la rotación diferencial denominada cuasi-kepleriana donde  $\mu_\Omega = 0,35$ .

En la Sec. 2.5 se especificó en la hipótesis de trabajo que la rotación diferencial entre la capa externa del Sol y superficie externa del núcleo interno, el plasma (fluido conductor) y el campo magnético magnético de fondo del Sol son los responsable de una inestabilidad de tipo magnetorotacional que produce un incremento en el coeficiente de difusión del fluido. En la Sec. 2.3 se detalló que la capa externa del Sol y la capa externa del núcleo interno se modelan con una configuración Taylor-Couette. En este modelo, los cilindros interior y exterior se identifican con la capa externa del Sol y la capa externa del núcleo interno, respectivamente. En ese sentido, cada cilindro obedece la ley de gravitación universal Newtoniana con respecto a un cuerpo atrayente de masa  $M$ . Por lo tanto la velocidad

orbital de cada uno de ellos estará dada por la ecuación

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (3.49)$$

donde  $G$  es la constante gravitacional y  $R$  el radio del cilindro. Esto implica que el perfil de rapidez angular de cada cilindro debe seguir la ley de Kepler

$$\Omega(R) \propto R^{-3/2} \quad (3.50)$$

Al evaluar Ec. 3.50 en  $R_{in}$  y  $R_{out}$  es posible determinar una relación para las rapidezces angulares del cilindro interno  $\Omega_{in}$  y el cilindro externo  $\Omega_{out}$

$$\Omega_{in} = \Omega(R_{in}) \propto R_{in}^{-3/2} \quad \text{y} \quad \Omega_{out} = \Omega(R_{out}) \propto R_{out}^{-3/2} \quad (3.51)$$

ahora es posible evaluar

$$\mu_{\Omega} = \frac{\Omega_{out}}{\Omega_{in}} = \frac{R_{in}^{3/2}}{R_{out}^{3/2}} = \left( \frac{R_{in}}{R_{out}} \right)^{3/2} = r_{in}^{3/2}. \quad (3.52)$$

Este resultado quiere decir que  $\mu$  depende de la razón entre los radios interno y externo de los cilindros. Para fines prácticos  $r_{in} = 0,5$  y el valor de  $\mu$  se puede obtener con catorce cifras significativas. Cuando se considera el valor  $\mu = 0,35$ , sólo con tres cifras significativas se dice que se está utilizando una rotación diferencial cuasi-kepleriana.

# Inestabilidad de pinch rotante y escalar pasivo

---

## Resumen

Se describen las condiciones de frontera y condiciones iniciales para los campos de velocidad y magnético. Luego se presenta la descripción de la inestabilidad de pinch rotante y el correspondiente mapa de estabilidad marginal. En este mapa se pueden leer los parámetros adimensionales para los cuales se produce la inestabilidad. Se muestra también un modelo para estudiar el transporte de un escalar pasivo como el litio y se explica en detalle la metodología para validar la hipótesis de trabajo.

Antes de pasar a describir la inestabilidad de pinch rotante e introducir la ecuación de transporte para el escalar pasivo, se debe especificar las condiciones de frontera e iniciales del problema que nos interesa

## 4.1. Condiciones de frontera y condiciones iniciales

Al finalizar la Sec. 3.2 se establecieron las ecuaciones adimensionales de la MHD con respecto a una geometría Taylor-Couette donde el fluido conductor está sometido a un campo magnético  $\mathbf{B} = B_\phi e_\phi$  puramente poloidal.

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla P + \Delta \mathbf{U} + \text{Ha}^2 \text{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \quad (4.1)$$

$$\text{Rm} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{curl} (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \right) = \Delta \mathbf{B} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.4)$$

Los números adimensionales que aparecen en las ecuaciones de la MHD dependen de los parámetros físicos y geométricos del problema y corresponden al número de Hartman (Ha), número de Reynolds (Re), número de Reynolds magnético y número Prandtl (Pm)

$$\text{Ha} = \frac{B_{in} D_0}{\sqrt{\mu_0 \rho \nu \eta}} \quad (4.5)$$

$$\text{Re} = \frac{\Omega_{in} D_0^2}{\nu} \quad (4.6)$$

$$\text{Rm} = \text{Pm Re}, \quad \text{Pm} = \frac{\nu}{\eta} \quad (4.7)$$

donde  $D_0 = \sqrt{R_{in}(R_{out} - R_{in})}$  es la unidad de longitud y  $B_{in}$  es el valor del campo magnético sobre la pared del cilindro interior. Para resolver las Ec. 4.1-4.4, se deben especificar tanto las condiciones de frontera así como las condiciones iniciales.

Para simplificar el problema se asume que se trabaja con un cilindro con periodicidad a lo largo de la dirección axial, es decir el fluido que sale por la parte superior, ingresa nuevamente por la parte inferior. Con respecto al campo velocidad se adoptan condiciones de frontera antideslizantes (non-slip boundary conditions), para el campo magnético condiciones de conductor perfecto para las paredes de los cilindros y para la presión se asume que es constante en las paredes. La condición de frontera antideslizante para la velocidad implica que la capa del fluido que está en contacto con la pared tiene la misma velocidad que ésta. Si la pared está en reposo (movimiento), la capa del fluido en contacto con ésta lo estará también. La condición de conducción perfecta para las paredes, significa que las paredes tienen una conductividad considerablemente superior al fluido; lo que implica que la densidad de corriente axial así como la componente del campo magnético normal a la pared, ambos son cero. Para más detalles sobre las condiciones de frontera anteriormente descritas ver (Rüdiger y Shalybkov, 2002).

Con respecto a las condiciones iniciales, partimos de las soluciones estacionarias detalladas en la Sec. 3.3. Éstas soluciones tienen la forma

$$\bar{\mathbf{U}} = (0, \bar{U}_\phi, 0) \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{B}} = (0, \bar{B}_\phi, 0) \quad (4.8)$$

$$\bar{U}_\phi = aR + \frac{b}{R}, \quad \bar{B}_\phi = AR \quad (4.9)$$



$$\begin{aligned}
a &= \frac{\mu_\Omega - r_{\text{in}}^2}{1 - r_{\text{in}}^2} \Omega_{\text{in}}, & b &= \frac{1 - \mu_\Omega}{1 - r_{\text{in}}^2} \Omega_{\text{in}} R_{\text{in}}^2 \\
\mu_\Omega &= \frac{\Omega_{\text{out}}}{\Omega_{\text{in}}}, & r_{\text{in}} &= \frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{out}}} \\
A &= \frac{B_{\text{in}} r_{\text{in}} (\mu_B - r_{\text{in}})}{R_{\text{in}} (1 - r_{\text{in}}^2)}, & \mu_B &= \frac{B_{\text{out}}}{B_{\text{in}}}.
\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales para la velocidad, campo magnético y presión se proponen a partir de las soluciones estacionarias  $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{P}$ . Éstas son modificadas adicionándoles perturbaciones  $\mathbf{u}, \mathbf{b}$  y  $p$ . Las perturbaciones se pueden entender como campos con magnitud (amplitud) inicial **pequeña** y **aleatoria**. Cabe recordar que en la Sec. 3.3 se mencionó que el gradiente de la presión  $\nabla \bar{P}$  se podía eliminar de las ecuaciones cuando se utiliza de manera conjunta  $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{B}}$  y la condición de incompresibilidad. Este resultado se mantiene, sin embargo, no se puede afirmar lo mismo para el gradiente de la perturbación  $p$ . De esta manera, escribimos la condición inicial como:

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{b} \quad (4.11)$$

$$P = \bar{P} + p \quad (4.12)$$

## 4.2. Inestabilidad de pinch rotante

El objetivo principal de esta sección es describir, en grandes líneas, como se obtiene el mapa de estabilidad (Fig. 4.2) para la inestabilidad denominada pinch rotante o de Tayler. Los mapas se obtienen reescribiendo las perturbaciones en Ec. 4.11-4.12 en la forma de una descomposición discreta de Fourier y aplicando un proceso de linealización en Ec. 4.14-4.16. Los detalles pueden ser revisados en (Rüdiger y Schultz, 2010) o (Ruediger, Gellert, Hollerbach, Schultz, y Stefani, 2017b) en la sección correspondiente a la inestabilidad de Tayler.

Para usar una descomposición discreta de Fourier para las perturbaciones, recordemos que una función  $f(\phi)$ , periódica en  $\phi$  con periodo  $2\pi$ , admite una descomposición de Fourier de la forma

$$f(R, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} f^m e^{i(m\phi)} \quad (4.13)$$

donde  $f^m$  son los coeficientes de la descomposición de Fourier. Para el problema que nos interesa, la periodicidad de las soluciones en la variable  $\phi$  y la dirección axial (eje  $z$ ), nos permite expresar las perturbaciones  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $p$  como una descomposición de Fourier en  $\phi$  y  $z$ , es decir

$$\mathbf{u}(R, \phi, z, t) = \sum_{m,k=-\infty}^{m,k=\infty} \mathbf{u}^{m,k}(R) e^{i(\omega t + m\phi + kz)} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{b}(R, \phi, z, t) = \sum_{m,k=-\infty}^{m,k=\infty} \mathbf{b}^{m,k}(R) e^{i(\omega t + m\phi + kz)} \quad (4.15)$$

$$p(R, \phi, z, t) = \sum_{m,k=-\infty}^{m,k=\infty} p^{m,k}(R) e^{i(\omega t + m\phi + kz)} \quad (4.16)$$

donde el coeficiente  $\omega$  recibe el nombre de tasa de crecimiento y es un número complejo puro, mientras que  $m$  y  $k$  son números reales y se les denomina modos. La Ec. 4.14 es una forma compacta para escribir una descomposición de Fourier para cada componente de la perturbación  $\mathbf{u}$ . Esta implica que el vector  $\mathbf{u}^{m,k}$  tiene componentes en coordenadas cilíndricas etiquetadas con los índices  $m$  y  $k$

$$\mathbf{u}^{m,k} = (u_R^{m,k}, u_\phi^{m,k}, u_z^{m,k}). \quad (4.17)$$

Esto quiere decir que para cada componente de la perturbación del campo de velocidades

$$u_R = \sum_{m,k=-\infty}^{m,k=\infty} u_R^{m,k} e^{i(\omega t + m\phi + kz)} \quad (4.18)$$

$$u_\phi = \sum_{m,k=-\infty}^{m,k=\infty} u_\phi^{m,k} e^{i(\omega t + m\phi + kz)} \quad (4.19)$$

$$u_z = \sum_{m,k=-\infty}^{m,k=\infty} u_z^{m,k} e^{i(\omega t + m\phi + kz)} \quad (4.20)$$

tendremos una descomposición de Fourier en  $\phi$  y en  $z$ . De esta manera los coeficientes  $u_R^{m,k}$ ,  $u_\phi^{m,k}$  y  $u_z^{m,k}$  pueden ser identificados como amplitudes de onda (correspondientes a diferentes longitudes de onda) en la descomposición de Fourier. El mismo razonamiento se aplica a las perturbaciones del campo magnético  $\mathbf{b}$  y la presión  $p$ .

Una inestabilidad es identificada con el crecimiento, sostenido en el tiempo, de la amplitud de la perturbación en la correspondiente descomposición de Fourier. Si  $\omega = \hat{\omega}i$  con  $\hat{\omega} < 0$ , entonces podemos afirmar que la amplitud de la perturbación crecerá sostenidamente en el tiempo y se dice que la solución general del sistema MHD  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{P}$  es inestable. En caso contrario ( $\hat{\omega} > 0$ ) se dice que la solución es estable. Al insertar  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{P}$  en las ecuaciones MHD para determinados números adimensionales  $Re$ ,  $Rm$  y  $(Pm)$  y condiciones iniciales de frontera específicas, es posible en teoría, identificar  $\omega$  y los coeficientes  $\mathbf{u}^{m,k}(R)$ ,  $\mathbf{b}^{m,k}(R)$  y  $p^{m,k}(R)$ . Al proceder de esta manera, podríamos establecer los valores de los números adimensionales para los cuales  $\hat{\omega} < 0$  e identificaríamos las soluciones inestables del sistema. Realizando un estudio paramétrico, es decir, repitiendo el proceso para varios conjuntos de números adimensionales, se podría construir un mapa de estabilidades (inestabilidades). La lectura de este mapa indicaría rápidamente que valores de los números adimensionales deberíamos escoger para tener una solución inestable o estable. El mapa se debería construir resolviendo  $\hat{\omega}$  y  $\mathbf{u}^{m,k}(R)$ ,  $\mathbf{b}^{m,k}(R)$ ,  $p^{m,k}(R)$  a partir del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) que se obtiene de reemplazar las Ec. 4.14-4.16 en Ec. 4.1-4.4. Este sistema está fuertemente acoplado y es altamente no lineal. Obtener una solución analítica para  $\omega$  y los coeficientes  $\mathbf{u}^{m,k}(R)$ ,  $\mathbf{b}^{m,k}(R)$  y  $p^{m,k}(R)$  resulta inviable.

Una opción para encontrar el mapa de estabilidades es linearizar el problema, es decir, una vez que las soluciones estacionarias perturbadas son insertadas en las ecuaciones MHD se desprecian los términos que contengan  $\omega, k$  o  $m$  con exponentes superiores o iguales a 2. Si bien el sistema de ecuaciones resultante es menos complejo, aún se tiene que diferentes modos  $m$  y  $k$  estarán presentes en el sistema linearizado. Adicionalmente se puede asumir que en la expansión de Fourier de las Ec. 4.14-4.16 solo uno de los coeficientes es dominante con respecto a los demás. Los modo  $m$  y  $k$  correspondientes a este coeficiente reciben el nombre de modo líder o dominante. En estas condiciones se resuelve el sistema de ecuaciones para las perturbaciones y es posible, después de un estudio paramétrico, obtener un mapa de estabilidad denominado marginal. Para los detalles del método de linerización descrito en los párrafos anteriores, revisar ([Rüdiger y Schultz, 2010](#)) o ([Ruediger y cols., 2017b](#)) en la sección correspondiente a la inestabilidad de Tayler.

La inestabilidad de pinch rotante es la inestabilidad ( $\hat{\omega} < 0$ ) en la cuál el único modo dominante es  $m = 1$ . Cabe mencionar que si  $m = 1$  es el modo dominante para alguna componente del campo velocidad, se puede verificar que también lo será para las demás componentes e inclusive para las perturbaciones de los campos de presión y magnético.

La solución numérica de las ecuaciones MHD perturbadas, donde ninguna aproximación se realiza, confirman la hipótesis del modo dominante. La Fig. 4.1 muestra la evolución temporal de las amplitudes de la descomposición de Fourier de la componente radial del campo velocidad para los modos  $m = 0, m = 1$  y  $m = 2$ . Se observa claramente que el modo dominante es  $m = 1$  característico de la inestabilidad de pinch rotante. El crecimiento de la amplitud es sostenido y exponencial durante un intervalo de tiempo, para luego permanecer oscilante al rededor de un valor determinado. El comportamiento oscilante se denomina saturación y es producto de la interacción no lineal con los demás modos. La evolución de las amplitudes mostradas en la Fig. 4.1 se repite en las demás componentes del campo velocidad y también en las componentes de los campos magnético y de presión.

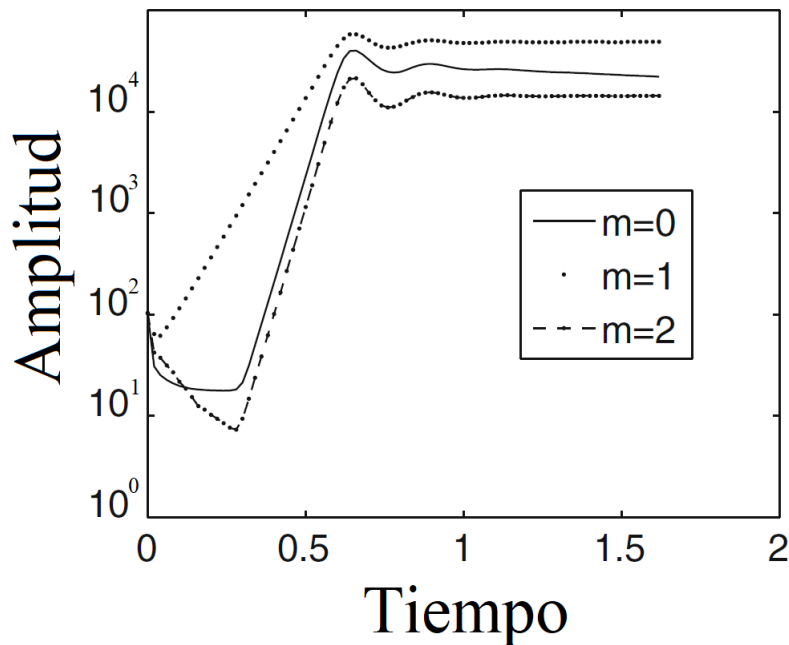
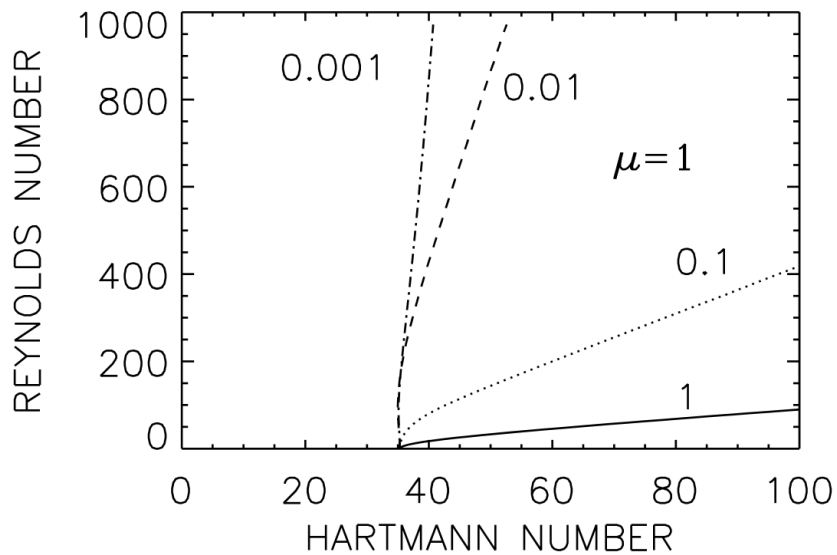
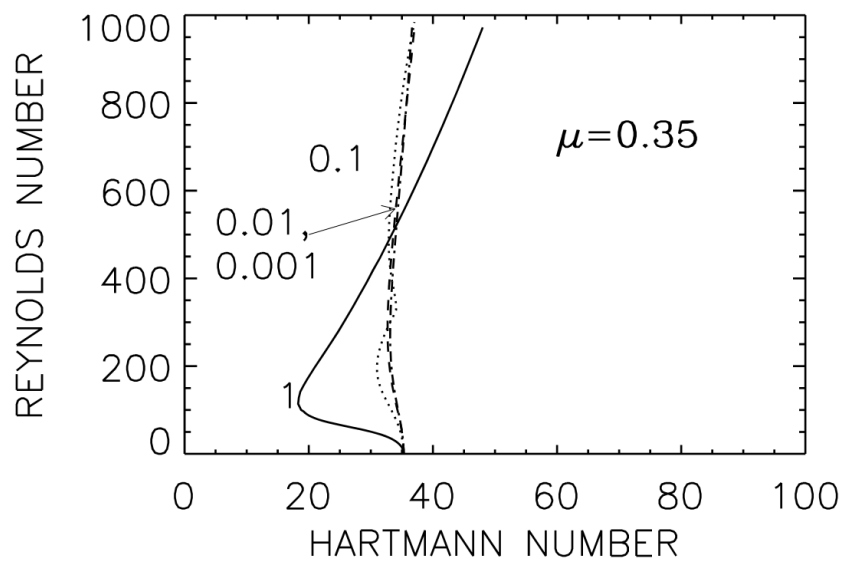


Figura 4.1: Amplitudes de la descomposición de Fourier de la componente radial del campo velocidad para los modos  $m = 0, m = 1$  y  $m = 2$ . Se utiliza  $\mu_{\Omega} = 0,35$ ,  $Pm=0.1$ ,  $Ha=80$ ,  $\mu_B = 2$ ,  $r_{in} = 0,5$ .

Los mapas de estabilidad marginal correspondientes a la inestabilidad de pinch rotante se muestran en la Fig. 4.2 para dos perfiles de rotación distintos. La Fig. 4.2(a) muestra el mapa de estabilidad marginal para el caso de una rotación rígida ( $\mu = 1$ ),  $r_{in} = 0,5$  y varios valores de  $Pm$ . Cada línea, etiquetada con un valor de  $Pm$ , representa la frontera entre el régimen estable e inestable. Así por ejemplo, la región (conjunto de parámetros)



(a)



(b)

Figura 4.2: Mapa de estabilidad para el modo  $m = 1$  para la inestabilidad de tipo pinch con rotación rígida ( $\mu_{\Omega} = 1$  imagen superior) y con rotación cuasi-kepleriana ( $\mu_{\Omega} = 0,35$  imagen inferior). El número crítico de Hartman para un sistema con un cilindro en reposo es 35.3 para todos los valores de Pm. Las curvas están etiquetadas con los valores de Pm.  $r_{in} = 0,5$ , paredes conductoras perfectas.

a la derecha de la línea punteada etiquetada con  $Pm = 0,01$ , el sistema será inestable mientras que la región (conjunto de parámetros) a la izquierda de ésta línea, el sistema será estable. Esta figura también nos brinda información de la influencia del número magnético de Prandtl, ya que la región inestable decrece conforme aumenta  $Pm$ . En ese sentido podemos afirmar que conforme  $Pm$  se aleja de la unidad, ningún valor del número de Reynolds hará inestable el sistema. Estamos hablando de una inestabilidad que experimenta una supresión por rotación. La influencia de  $Pm$  desaparece completamente, para el caso en que uno de los cilindros permanezca en reposo  $Re = 0$ . Para números magnéticos de Prandtl muy pequeños las curvas son indistinguibles. Esto significa que la frontera entre los regímenes estables e inestable sólo está determinada por los valores de  $Re$  y  $Ha$  cuando  $Pm \rightarrow 0$ . Este es un resultado estándar para todas las ecuaciones de la MHD linearizadas en la aproximación  $Pm = 0$  llamada libre de inducción. Por otro lado, la inestabilidad de pinch rotante con rotación rígida pertenece a las configuraciones donde las componentes  $\bar{U}_\phi$  y  $\bar{B}_\phi$  comparten el mismo perfil radial proporcional a  $R$  definida por (Chandrasekhar, 1956). Es posible mostrar que todas las soluciones de este tipo solo dependen de  $Re$  y  $Ha$  cuando  $Pm \rightarrow 0$  (Rüdiger, Schultz, Stefani, y Mond, 2015). Estos hechos implican que para una difusividad magnética fija, una disminución en la viscosidad molecular desestabiliza el sistema.

La situación cambia drásticamente si los cilindros no rotan con la misma rapidez angular, ya que ahora la energía de cizallamiento puede excitar modos por interacción con un campo magnético. La Fig. 4.2(b) muestra el mapa de inestabilidades para un sistema que sigue una ley de rotación cuasi-kepleriana  $\mu_\Omega = 0,35$  para varios valores de  $Pm$ . Se pone de manifiesto la influencia de la rotación diferencial en el mapa de inestabilidades del pinch rotante. Nuevamente, el valor crítico del número de Hartman para el caso de un cilindro en reposo no depende del número magnético de Prandtl. Por otro lado, las fronteras entre las regiones estables e inestables para  $Pm \leq 1$  difieren muy poco. Para el rango de valores de  $Re$  mostrado, la supresión de la inestabilidad por rotación prácticamente no está presente para  $Pm < 1$ . Para el caso de  $Pm = 1$  y para  $Re < 400$ , la inestabilidad se vuelve inclusive subcrítica (pasa de una región inestable a una estable) y la rotación estabilizadora cambia a rotación desestabilizadora. Para valores elevados del número de Reynolds (rotaciones rápidas), la excitación subcrítica desaparece. De acuerdo a la Fig. 4.2(b) el valor de  $Pm = 1$ , que será usado sistemáticamente en este trabajo, pertenece al régimen de  $Pm$  pequeño.

El patrón de flujo de la inestabilidad de pinch rotante ( $\mu_\Omega = 0,35$ ) cuando se alcanza la saturación, es mostrado en la Fig. 4.3 para números de Reynolds crecientes entre 500

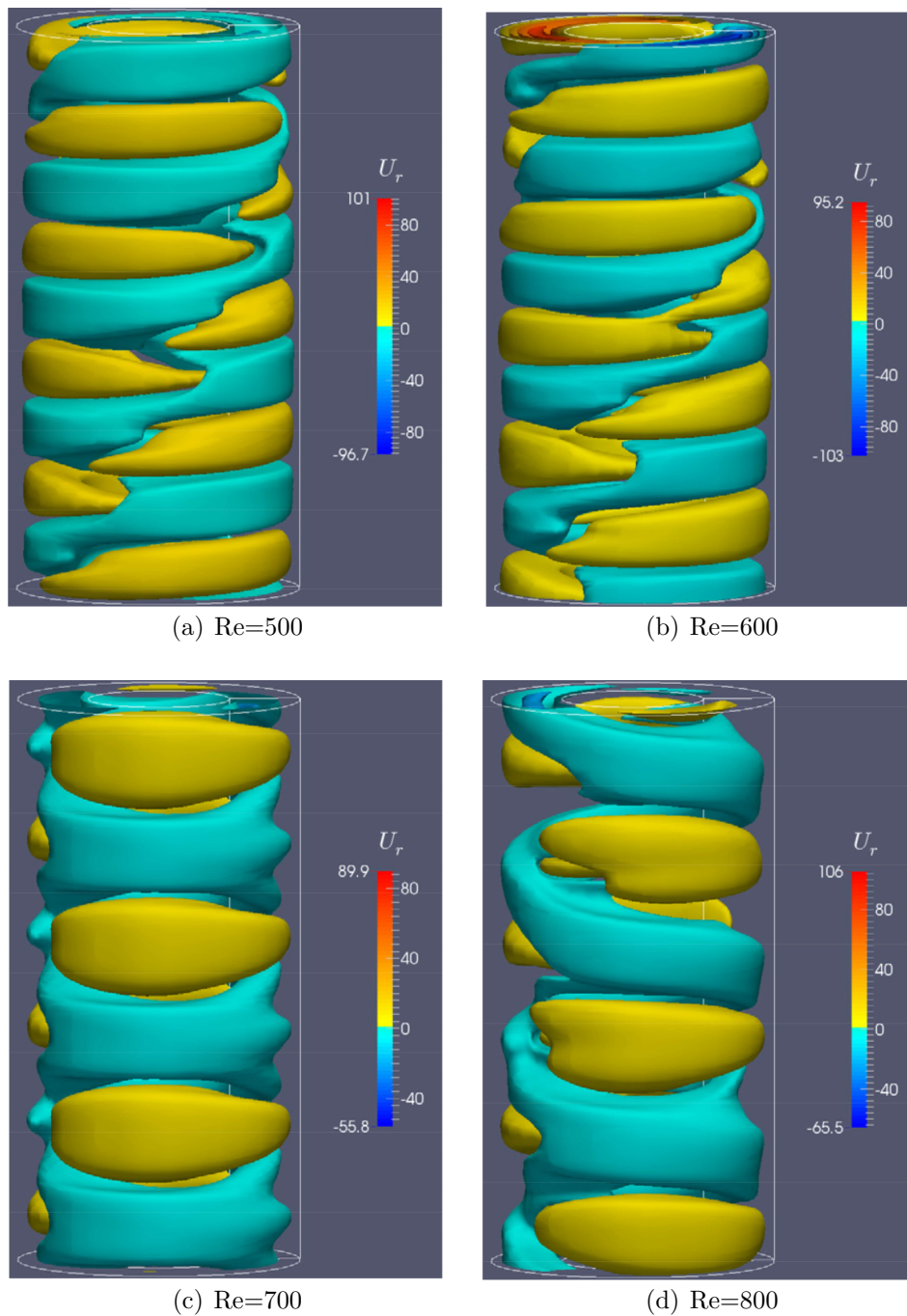


Figura 4.3: Isolíneas para la componente radial de la velocidad en unidades de  $\nu/D$ . De acuerdo al teorema de Taylor-Proudman, para rotaciones rápidas (mayor número de Reynolds) las longitudes de onda axiales se hacen cada vez más grandes y la media cuadrática de la velocidad decae.  $Ha = 80$ ,  $\mu_\Omega = 0,35$ ,  $Pm = 0,1$

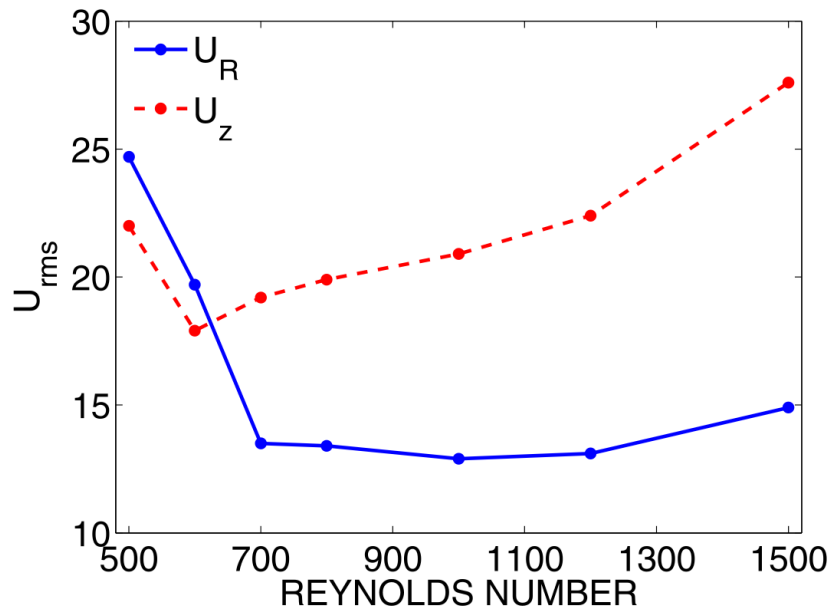


Figura 4.4: Raíz cuadrada media de las componentes radial  $U_R$  y axial  $U_z$  de la velocidad para  $Mm \leq 6$ .  $Ha=80$ ,  $\mu_\Omega = 0,35$ ,  $Pm= 0,1$

y 800. El número de Hartman es fijado a 80. Las gráficas muestran los perfiles radiales de la velocidad que básicamente son responsables de la mezcla radial. La amplitud de la velocidad varía muy poco para rotaciones rápidas pero la velocidad media cuadrática de  $u_R$  ( $U_R$  en el Fig. 4.4) decrece por un factor de 1,6 entre  $Re= 500$  y  $Re= 700$ , para luego alcanzar la saturación, mientras que la componente axial de la perturbación ( $U_z$ ) se incrementa (ver Fig. 4.4). Bajo la influencia de una rotación rápida, un campo turbulento que es inicialmente isotrópico se transforma en anisotrópico verificando la relación  $U_z^2 \approx U_R^2 + U_\phi^2$  para la velocidad promedio en todo el cilindro. A partir de las Fig. 4.3 y Fig. 4.4 se encuentra que la anisotropía- o dicho en otras palabras la transición entre los regímenes de rotación rápida y rotación lenta- empieza alrededor de  $Re= 600$  o  $Mm \approx 2$ , donde

$$Mm = \frac{\Omega_{in}}{\Omega_A} = \frac{\sqrt{PmRe}}{Ha} \quad (4.21)$$

refleja la tasa de rotación en unidades de la frecuencia de Alfvén

$$\Omega_A = \frac{B_{in}}{\sqrt{\mu_0 \rho R_0^2}} \quad (4.22)$$



### 4.3. Modelamiento del transporte de un escalar pasivo

Como ha sido detallado en la Sec. 2.5, una de las motivaciones de este trabajo es el modelamiento del transporte difusivo turbulento del litio entre la capa exterior del Sol y la capa exterior del núcleo del Sol. Se postula que el transporte difusivo turbulento es originado por la inestabilidad de tipo pinch rotante que ha sido caracterizada en la sección anterior. Para esta inestabilidad también se dispone de un mapa de estabilidad marginal que nos permite saber los valores de números adimensionales para los cuales se desarrollará la inestabilidad. Ahora modelaremos el transporte del litio en la región comprendida entre la capa exterior del Sol y la capa exterior del núcleo del Sol. El litio es modelado como un escalar pasivo. Un escalar pasivo es un campo escalar  $C(R, \phi, z, t)$  que no influye en la dinámica del sistema, es decir,  $C(R, \phi, z, t)$  no modifica los campos de velocidad y magnético. El escalar pasivo es transportado (llevado) y difundido por el flujo del fluido conductor. De esta manera, la ecuación diferencial adimensional que verifica el escalar pasivo, es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{UC}) = \frac{1}{Sc} \Delta C. \quad (4.23)$$

La Ec. 4.23 se denomina ecuación de advección-difusión y los términos  $\nabla \cdot (\mathbf{UC})$  y  $(1/Sc)\Delta C$  son llamados términos advectivo y difusivo correspondientemente. El escalar pasivo  $C(R, \phi, z)$  representa la concentración de litio y  $Sc$  es el número de Schmidt microscópico

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (4.24)$$

donde  $D$  es la difusividad molecular del fluido y  $\nu$  es la viscosidad del fluido. El número de Schmidt para gases es del orden de la unidad, mientras que para fluidos es del orden de 100. (Hughes, 2007) proporciona un valor de  $Sc = 3$  con una viscosidad de  $27 \text{ cm}^2/\text{s}$  para el plasma en la tacoclina solar. Estos valores justifican que en el presente trabajo se varíe el número de Schmidt entre 0,1 y 2,0. La Ec. 4.23 se debe resolver con condiciones iniciales y de frontera apropiadas. La condición inicial  $C_0$  se escoge de tal manera que se tenga un pico de concentración en forma de gaussiana al centro de la región entre los cilindros.

$$C_0 = \exp\left(-\left(\frac{r-r_0}{0,1}\right)^2\right). \quad (4.25)$$

Con respecto a las condiciones de frontera consideramos de Neumann puras. Esto significa que el flujo de  $C(R, \phi, z, t)$  a través de las paredes es cero y por lo tanto la cantidad de escalar pasivo contenido en la región entre los cilindros siempre es la misma.

Es importante notar que las escalas de tiempo de los términos advectivos y difusivos son diferentes, siendo la escala de tiempo difusiva mayor. Por esa razón decimos que el término difusivo es el principal responsable de la mezcla del escalar pasivo. Por lo tanto, existe un tiempo característico  $\tau$  para el cual podemos afirmar que la mezcla del escalar pasivo se ha homogeneizado. Es decir, para tiempos  $t > \tau$ , el término difusivo será dominante y la concentración  $C$  permanecerá prácticamente constante en la región entre los cilindros. Para el cálculo que se detallará en la siguiente sección, es importante establecer una relación entre el tiempo característico  $\tau$  y el coeficiente de difusión. Si bien la Ec. 4.23 es evidentemente una ecuación en tres dimensiones, visto que nos interesa analizar solo la difusión en la dirección radial, es suficiente analizar un caso unidimensional en la dirección radial para tiempos largos ( $t > \tau$ ). El caso unidimensional se puede obtener al promediar la concentración  $C(R, \phi, z, t)$  a lo largo de la dirección axial ( $z$ ) y poloidal ( $\phi$ ). A este promedio lo llamaremos  $\bar{C}(R, t)$  y representa la concentración de escalar pasivo a lo largo de la dirección radial en cada instante de tiempo. Para tiempos largos  $\bar{C}(R, t)$  verifica

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \frac{D}{\nu} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial R^2}. \quad (4.26)$$

El hecho que  $\bar{C}(R, t)$  verifica una ecuación de difusión (Ec. 4.26) implica que la solución debe decaer exponencialmente para tiempos largos. De esta manera podemos afirmar que la solución para  $\bar{C}(R, t)$  en cualquier instante de tiempo debe ser de la forma

$$\bar{C}(R, t) = B + M(R)e^{-t/\tau}, \quad (4.27)$$

$$\tau = \frac{\nu}{\lambda D} \quad (4.28)$$

donde  $\tau$  es el tiempo característico o también llamado tiempo de relajación, mientras que  $\lambda$  es una constante que depende de las condiciones iniciales y de frontera impuestas al resolver Ec. 4.26. Por otro lado,  $B$  es una constante y representa una concentración del escalar pasivo uniforme que es numéricamente igual a la cantidad de materia ingresada al sistema debido a la condición inicial. Al considerar la condición inicial Ec. 4.25 veremos

que a medida que pase el tiempo el perfil de la gaussiana se transformará en un perfil constante (ver Fig. 4.5(a)). Si consideramos el valor máximo de  $\bar{C}(R, t)$  en cada instante de tiempo  $C_{max}(t)$ , veremos que estos máximos alcanzarán un valor constante en un tiempo característico  $\tau$  como lo muestra la Fig. 4.5(b). Por lo tanto podemos afirmar que  $C_{max}(t)$  verifica

$$C_{max}(t) = \hat{B} + \hat{M}e^{-t/\tau}. \quad (4.29)$$

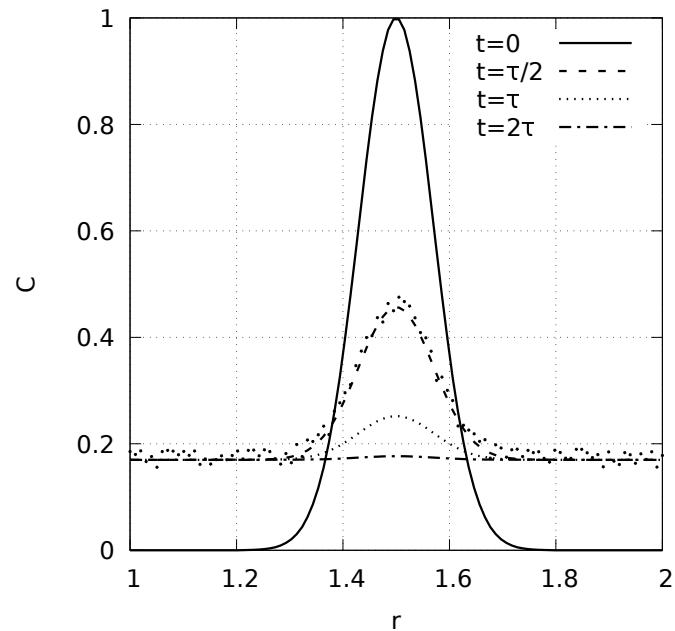
El resultado más importante de éste análisis es la Ec. 4.29 y la relación inversamente proporcional que existe entre el coeficiente de difusión  $D$  y el tiempo característico  $\tau$  (Ec. 4.28). Para terminar esta sección diremos que el modelamiento del litio como un escalar pasivo vía Ec. 4.23 así como los resultados obtenidos en esta sección, en particular Ec. 4.28, son independientes del régimen en el que se encuentre el fluido. Es decir, todos los resultados son válidos cuando el fluido contenido entre los cilindros es estable o inestable.

#### 4.4. Método de cálculo de la razón $D^*/D$

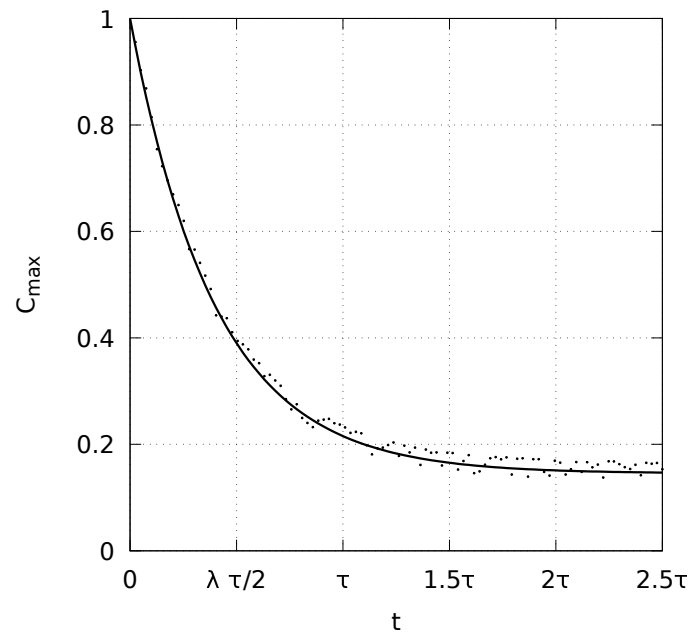
Cuando la inestabilidad de pinch rotante está completamente desarrollada, ésta modificará las propiedades de transporte difusivo del fluido. Este comportamiento es una característica de los fluidos inestables o turbulentos y se manifiesta como una modificación isotrópica o anisotrópica del coeficiente de difusión. En el caso general (modificación anisotrópica) el coeficiente de difusión modificado es diferente en la dirección axial y radial. Para el caso de la anisotropía axial y puramente hidrodinámico, (Nemri, Climent, Charton, Lanoë, y Ode, 2013) y (Akonur y Lueptow, 2002) encuentran una dependencia lineal entre  $D^*$  y el número de Reynolds  $Re$  cuando el cilindro externo permanece en reposo. Este trabajo se concentra en la anisotropía en la dirección radial. Si  $D$  es considerada como la difusividad original del fluido, entonces la modificación que experimenta el coeficiente de difusión se puede modelar con una difusividad efectiva

$$D_{\text{eff}} = D + D^* \quad (4.30)$$

donde el término  $D^*$  es originado únicamente por la inestabilidad magneto rotacional. El objetivo de este trabajo es calcular numéricamente la razón  $D^*/D$  como una función de los números adimensionales del sistema. Al igual que en la Sec. 4.3, es posible promediar Ec. 4.23 en la dirección axial ( $z$ ) y poloidal  $\phi$  cuando la inestabilidad de pinch rotante está completamente desarrollada. El campo promediado  $\bar{C}(R, t)$ , de manera similar que



(a)



(b)

Figura 4.5: a) La curva  $t = 0$  muestra la condición inicial (ver Ec.4.25) en forma de gaussiana centrada en  $r_0 = 1,5$ , centro de la región entre los cilindros. Las curvas para diferentes valores de  $\tau$  muestran como la condición inicial evoluciona hacia un perfil constante. Solo para la curva  $t = \tau/2$  se muestran, en forma de puntos, los resultados de una simulación numérica. b) La curva muestra el valor máximo de  $\bar{C}(R, t)$  a lo largo de la dirección radial para un tiempo  $t$  determinado (múltiplo de  $\tau$ ). Los puntos representan los resultados de una simulación y estos están ajustados a una curva (línea sólida) de la forma Ec. 4.27.

en Ec. 4.26, verifica

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{U}} \bar{C}) = \frac{1}{Sc_{\text{eff}}} \Delta \bar{C} \quad (4.31)$$

donde, ahora, en la Ec. 4.31 aparece el número de Schmidt efectivo  $Sc_{\text{eff}} = \nu/D_{\text{eff}}$ . Nótese  $Sc_{\text{eff}}$  aparece debido a que la inestabilidad de pinch rotante está presente. El cálculo de la razón  $D^*/D$  se realiza mediante los siguientes pasos:

- Paso 1:

Una simulación numérica del conjunto de Ec. 4.1-4.4 con las condiciones de frontera descritas en Sec. 4.1 y los parámetros (fijos) correspondientes a una **solución estable** (ver Fig. 4.2(b)) es realizada. La simulación se detiene luego de un tiempo prudencial guardando los campos de velocidad, campo magnético y presión.

Los campos guardados se utilizan como condiciones iniciales. Ahora se resuelven, al mismo tiempo, las Ec. 4.1-4.4 y la ecuación de transporte del escalar pasivo Ec. 4.23 para un número de Schmidt fijo. Los parámetros de la solución estable se mantienen y se resuelven al mismo tiempo Ec. 4.23 y Ec. 4.1-4.4 con la condición inicial Ec. 4.25. Esto equivale a colocar un escalar pasivo en la región formada por la separación entre los dos cilindros. El escalar pasivo se mezclará en la cavidad por un doble efecto: advectivo y difusivo. Como se ha descrito en la sección anterior, el proceso de difusión lleva a una homogeneización (mezcla) del escalar pasivo. A partir de los perfiles producidos por el código se calcula numéricamente el valor máximo de  $\bar{C}(R, t)$  a lo largo de la dirección radial en ciertos instantes de tiempo. Estos resultados se ajustan a la curva cuya ecuación es Ec. 4.29 y se obtiene el valor del tiempo característico para una simulación cuya solución es estable. El tiempo característico calculado se denomina  $\tau$ . El tiempo característico  $\tau$  es el mismo para cualquier conjunto de parámetros que generen la solución estable, pues se asume que solo una inestabilidad es capaz de modificar las propiedades de transporte del fluido.

- Paso 2:

Una simulación numérica del conjunto de Ec. 4.1-4.4 con las condiciones de frontera descritas en Sec. 4.1 y los parámetros (fijos) correspondientes a la inestabilidad de pinch rotante es realizada. El sistema se hace evolucionar en el tiempo hasta que la inestabilidad de pinch rotante esté completamente desarrollada. Esta situación

se pone de manifiesto cuando la amplitud (energía) de cada modo de la solución ha llegado a la saturación como se observa en la Fig. 4.1. La simulación se detiene guardando los campos de velocidad campo magnético y presión.

Los campos guardados se utilizan como condiciones iniciales. Ahora se resuelven, al mismo tiempo, las Ec. 4.1-4.4 y la ecuación de transporte del escalar pasivo Ec. 4.23 para un número de Schmidt fijo. Los parámetros de la inestabilidad de pinch rotante del paso anterior se mantienen y se resuelven al mismo tiempo Ec. 4.23 y Ec. 4.1-4.4 con la condición inicial Ec. 4.25. Esto equivale a colocar un escalar pasivo en la región formada por la separación entre los dos cilindros cuando la inestabilidad del fluido está completamente desarrollada. El escalar pasivo se mezclara en la cavidad por un doble efecto: advectivo y difusivo.

Como se ha descrito en la sección anterior, el proceso de difusión lleva a una homogeneización (mezcla) del escalar pasivo. A partir de los perfiles producidos por el código se calcula numéricamente el valor máximo de  $\bar{C}(R, t)$  a lo largo de la dirección radial en ciertos instantes de tiempo. Estos resultados se ajustan a la curva cuya ecuación es Ec.4.29 y se obtiene el valor del tiempo característico para una simulación de pinch rotante inestable. El tiempo característico calculado se denomina  $\tau^*$ .

Para obtener la razón  $D^*/D$  la Ec. 4.30 se divide entre  $D$  y se despeja la razón deseada

$$\frac{D^*}{D} = \frac{D_{\text{eff}}}{D} - 1. \quad (4.32)$$

Por lo explicado en la Sec. 4.3 y en particular teniendo en cuenta la Ec. 4.28, el coeficiente  $D_{\text{eff}}$  es inversamente proporcional a  $\tau^*$  mientras que  $D$  es inversamente proporcional a  $\tau$ . Finalmente tenemos

$$\frac{D^*}{D} = \frac{\tau}{\tau^*} - 1. \quad (4.33)$$

De esta manera tenemos un método para calcular la razón  $D^*/D$  (Ec. 4.33) para diferentes conjuntos de números adimensionales que generen una inestabilidad de pinch rotante. El paso 1 del método se realiza solo una vez mientras que el paso 2 del método se repite para diferentes conjuntos de números adimensionales que generen una inestabilidad de pinch rotante según el mapa de estabilidad marginal Fig. 4.2(b).

# Resultados

---

## Resumen

Se presentan las simulaciones realizadas para el cálculo de la razón  $D^*/D$  para diferentes valores de los números adimensionales. A partir de la abundancia de datos se busca realizar una síntesis y organización de los resultados para relacionarlos mediante una línea de tendencia.

En el Cap. 3 se definieron los parámetros geométricos del problema así como los números adimensionales, que son a su vez parámetros del problema. En general, los parámetros independientes del problema serán :  $\mu$  ,  $r_{in}$ , Ha, Re, Pm y Sc. De este conjunto de seis parámetros independientes, dos de ellos tienen valores:  $\mu_{\Omega} = 0,35$  y  $r_{in} = 0,5$ . El primer parámetro indica que los cilindros interior y exterior rotan según una ley cuasi-kepleriana como se detalló en la Sec. 3.5 mientras que el segundo indica que el radio del cilindro externo es el doble que el radio del cilindro interior.

A continuación se presenta un conjunto de resultados donde, adicionalmente, se fija el valor del número magnético de Prandtl  $Pm = 0,1$  y se hace variar Ha, Re y Sc. Las simulaciones numéricas se llevan a cabo en la configuración Taylor-Couette con condiciones de frontera periódicas en la dirección axial (eje  $z$ ). Junto con las condiciones de contorno para la velocidad y el campo magnético, condiciones de contorno de Neumann en  $R_{in}$  y  $R_{out}$  son aplicadas para el escalar pasivo  $C$ . Para enfocarse sólo en el fenómeno del transporte radial, la condición inicial para el escalar pasivo  $C_0$  es la descrita en la Sec. 4.3. Se procede a calcular los tiempos característicos  $\tau$  y  $\tau^*$  a partir  $C_{max}(t)$  como se a descrito en la Sec. 4.4.

La Fig. 5.1 muestra la razón  $D^*/D$  en función Ha en el eje horizontal inferior y en función Mm (ver Ec. 4.21) en el eje horizontal superior. El número de Reynolds se fija a un valor de 500, pues se sabe que para ese valor el sistema es inestable (ver Fig. 4.2(b) en Sec. 4.2). Los tres perfiles mostrados corresponden a los valores de  $Sc = 0,5, 1$  y  $2$ . El

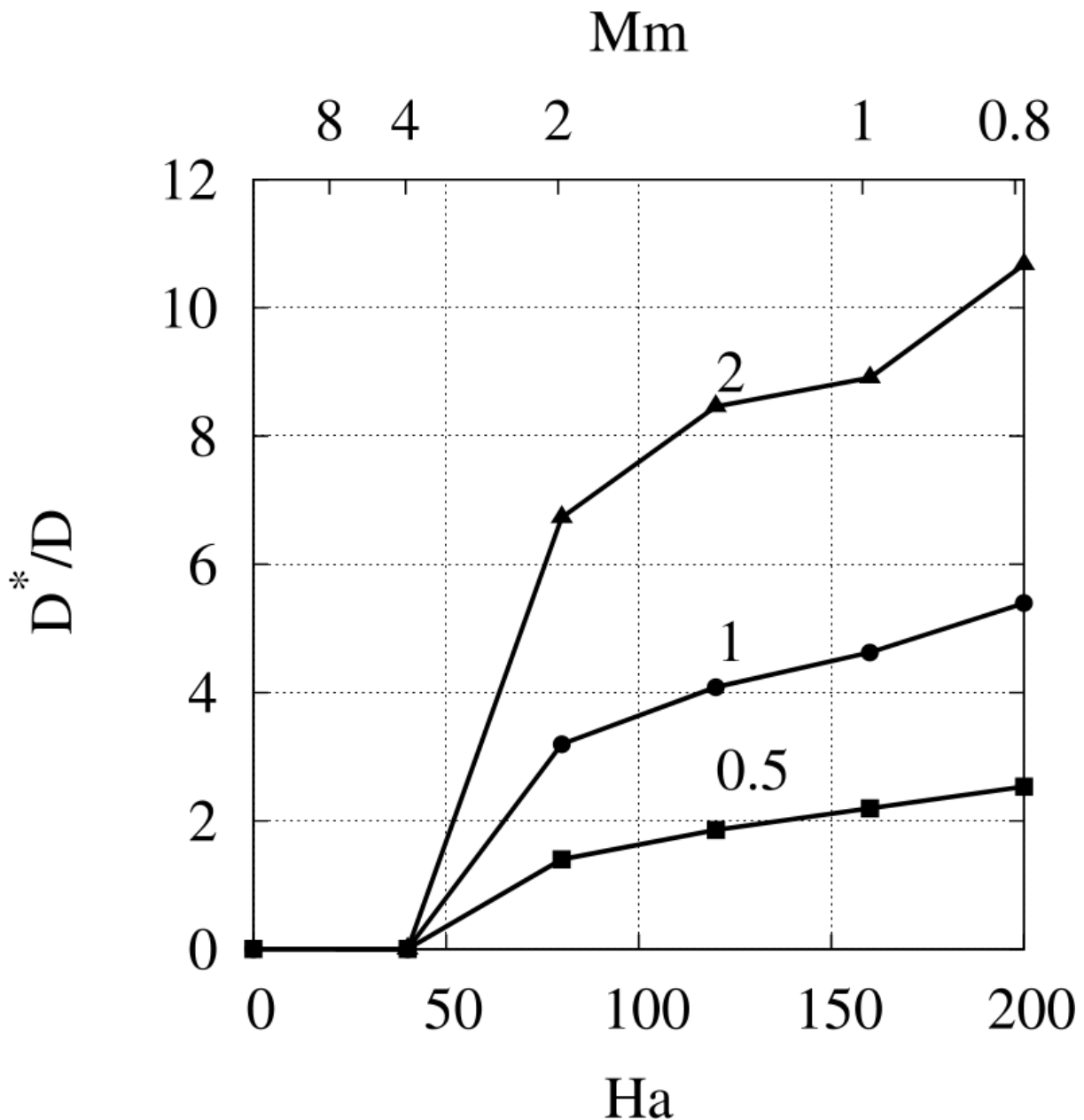


Figura 5.1: Difusividad normalizada  $D^*$  vs. el número de Hartman-Ha (eje horizontal superior) y número magnético de Mach-Mm (eje horizontal superior). Las curvas están etiquetadas con diferentes valores del número de Schmidt ( $Sc$ ). El valor de  $Mm=1$  separa los regímenes de rotación lenta y rápida.  $Re=500$ ,  $\mu_\Omega=0,35$ ,  $Pm=0,1$ .

valor límite para el desarrollo de la inestabilidad es  $Ha=35$  a partir del cual el valor de la difusividad normalizada aumenta. Esto implica que  $D^*$  aumenta ya que  $D$  tiene un valor fijo. Para el valor de  $Ha=158$ , el número magnético de Mach ( $Mn$ ) es igual a la



unidad, definiendo los regímenes de rotación lenta ( $Mn < 1$ ) y rotación rápida ( $Mn > 1$ ). En el régimen de rotaciones lentas, las difusividades normalizadas crecen mientras aumenta  $Ha$ . En el régimen de rotación rápida las difusividades normalizadas decrecen cuando  $Ha$  disminuye. La figura Fig. 5.1 también demuestra que  $D^*/D$  crece linealmente cuando  $Sc$  aumenta de tal manera que  $D^* \propto \nu$  para  $Sc > 1$ . Por lo tanto se infiere, que es solo, la viscosidad molecular la única que determina el efecto de difusión inducida y esta es producto de la inestabilidad de pinch rotante.

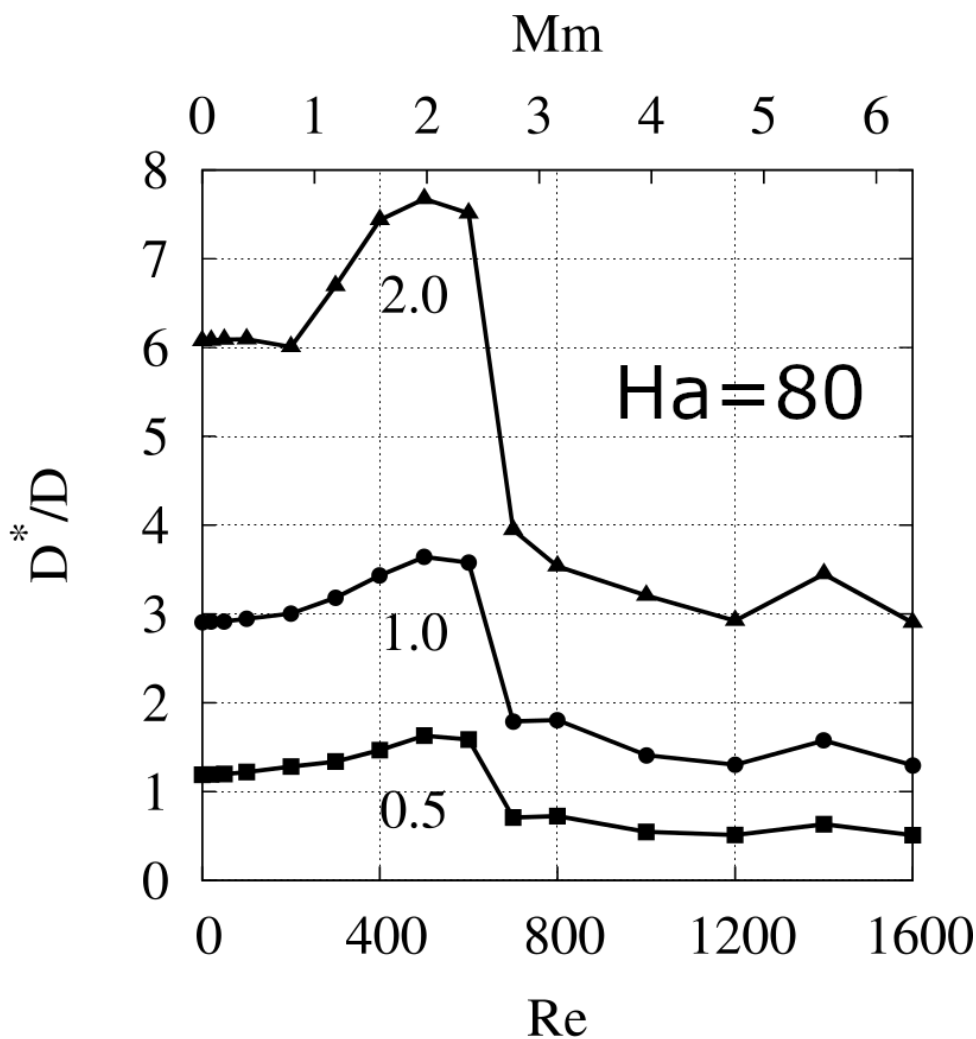


Figura 5.2: Al igual que en la Fig. 5.1, pero con respecto al número de Reynolds (eje horizontal inferior) y al número magnético de Mach (eje horizontal superior) para un valor de  $Ha=80$ . El valor de  $Mm=1$  separa los regímenes de rotación rápida y lenta. Nótese la reducción de  $D^*/D$  para  $Mm > 2$ .  $\mu_\Omega = 0,35$ ,  $Pm=01$ .

La razón  $D^*/D$  para un valor fijo del número de Hartman es mostrado en la Fig. 5.2.

Ahora el número magnético de Mach alcanza el valor de uno cuando  $Re = 253$ . En el régimen de rotación lenta, la difusividad efectiva cambia muy poco. El hecho que la razón  $D^*/D$  sea diferente de cero inclusive para un caso en el cual no hay rotación es debido a que el sistema es inestable para  $Re = 0$  (ver Fig. 4.2(b) en Sec. 4.2). En el régimen de rotación rápido, la razón  $D^*/D$  se incrementa de manera monótona hasta que alcanza su valor más elevado en  $Mn = 2$ . Finalmente, para un régimen de rotación extra rápido ( $Mn > 2$ ), la difusividad efectiva decae. Sin embargo, en todos los casos la difusividad efectiva normalizada se incrementa cuando aumenta el número de Schmidt de tal manera que nuevamente tenemos que  $D^* \propto \nu$ . Para todos los valores del número de Schmidt, la razón  $D^*/D$  se incrementa monótonamente hasta que un cierto valor de  $Re$  es alcanzado, más allá de ese valor decrece.

La Fig. 5.3 muestra la difusividad normalizada para  $\mu_\Omega = 0,35$  para un valor fijo de  $Ha$  como función de  $Sc$ . Para todos los valores simulados del número de Reynolds, las difusividades inducidas  $D^*$  son diferentes de cero y la razón  $D^*/D$  tiene una dependencia lineal con  $Sc$ . La figura sólo muestra la relación para aquellos números de Reynolds para los cuales las difusividades máximas han sido alcanzadas para  $Mn$  alrededor de 2. Sin embargo, cabe resaltar que el resultado es el mismo, si la gráfica se realiza para cualquier otro valor del número de  $Re$ . Cuando el número de Schmidt tiende a cero, la difusividad  $D^*$  también tiende a cero. Como resultado, para números de Schmidt  $Sc > 0,1$ , la esencia de la Fig. 5.3 es la relación lineal entre  $D^*/D$  y  $Sc$  (revisar la definición de  $Sc$  en Ec. 4.24). En el lenguaje de (Schatzman, 1977), significa que

$$D^* = Re^* \nu \quad (5.1)$$

donde  $Re^*$  es un factor de escala que en realidad cumple la función de un número de Reynolds. Adicionalmente, las Fig. 5.1 y Fig. 5.2 demuestran que la dependencia lineal se verifica para todos los casos de  $Re$  y  $Ha$  simulados. El número de Shatzman  $Re^*$ , de acuerdo a la Fig. 5.3, aumenta cuando se incrementa  $Ha$ , mientras que para los tres modelos, el número magnético de Mach es prácticamente el mismo. Se han encontrado  $Re^* = 4$  para  $Ha = 80$  que se incrementa a  $Re^* = 8$  para  $Ha = 200$ . Una saturación, se pone de manifiesto, para valores grandes de  $Ha$  como lo muestra la Fig. 5.3. Debido a limitaciones numéricas, aún no es claro si para valores grandes de  $Ha$ , existe un límite superior para  $Re^*$ .

La Fig. 5.4 resume el resultado de este trabajo presentando los valores numéricos de  $Re^*$  para una ley de rotación de Kepler. En la Fig. 5.4(a),  $Re^*$  es dado para cuatro valores

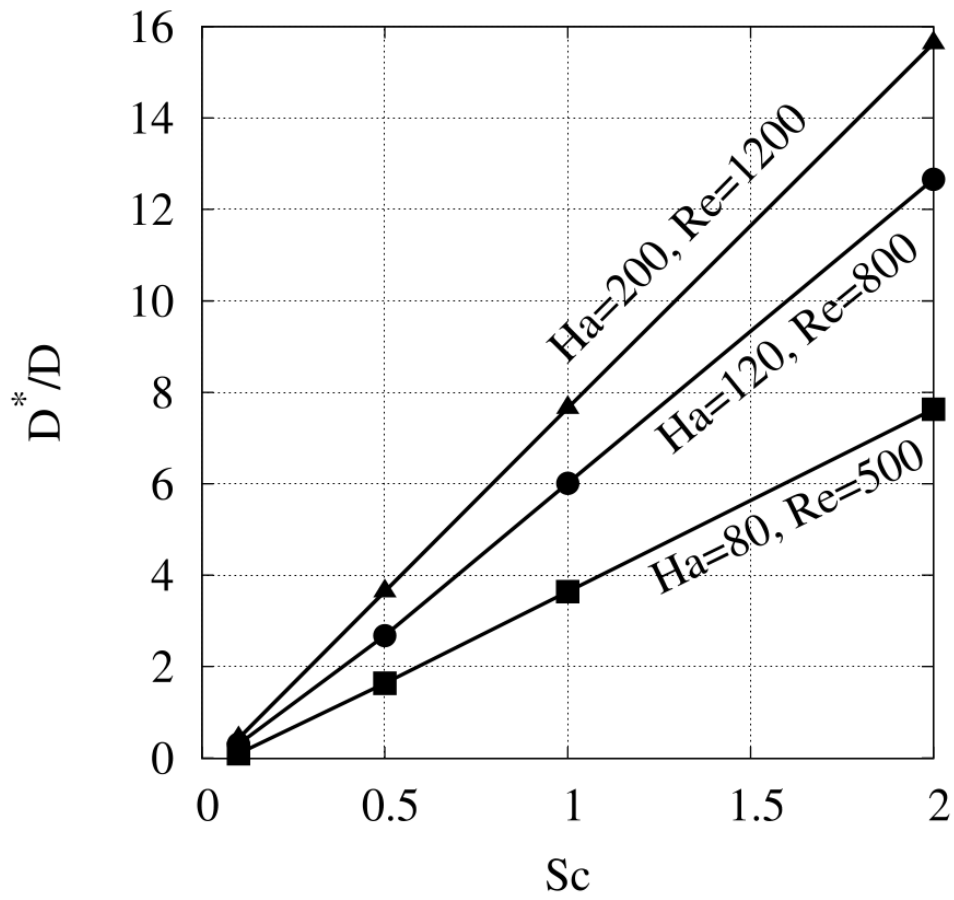


Figura 5.3:  $D^*/D$  como una función de  $Sc$  y para los valores de números de Reynolds que producen una máxima difusividad. El número magnético de Mach ligeramente excede 2 en todos los casos.  $\mu_\Omega = 0,35$ ,  $Pm = 0,1$ .

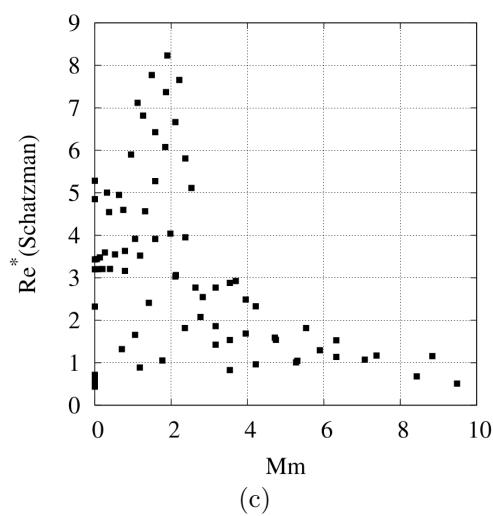
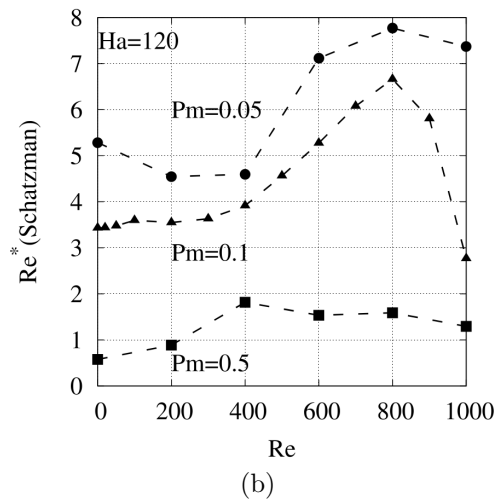
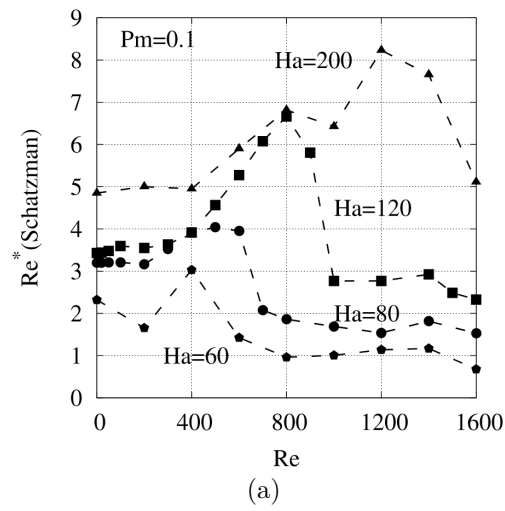


Figura 5.4: El número de Schatzman  $Re^*$  vs  $Re$  en función de  $Ha$  (imagen superior),  $Pm$  (imagen intermedia) y  $Mm$  (imagen inferior). En la imagen inferior, todas las simulaciones de este trabajo son mostradas.  $\mu_\Omega = 0,35$ .

del número de Hartman en función del número de Reynolds. Cuando no hay rotación, se encuentra que  $Re^*$  aumenta conforme lo hace  $Ha$ . Esto significa que para valores realistas de  $Ha$  en estrellas tipo solares, donde  $Ha$  es elevado, se producirán valores de  $Re^*$  más grandes que los encontrados en este trabajo. Con rotación ( $Re \neq 0$ ), un máximo de  $Re^*$  existe para aproximadamente un mismo valor del número magnético de Mach  $Mm = 2$ . El valor de  $Re^*$  se incrementa rápidamente con el incremento de  $Ha$ . Para valores de  $Mm \gg 2$ ,  $Re^*$  es atenuado e incluso adquiere valores inferiores que los obtenidos para  $Re = 0$ . Las restricciones numéricas del código con el que se trabaja, impiden que se hagan simulaciones con valores elevados de  $Re$ , pero al mismo tiempo, nos permite variar el número magnético de Prandtl.

La Fig. 5.4(b) muestra claramente una relación inversa entre  $Re^*$  y el número de Prandtl magnético. Mientras más pequeño sea  $Pm$ , más grande será  $Re^*$ . Inclusive para cuando tenemos ausencia de rotación, podemos encontrar una relación  $Re^* \propto 1/Pm$ . Para el caso de rotaciones rápidas, los resultados no excluyen la posibilidad de que se produzca una saturación para  $Pm \ll 0,1$  de tal manera que influencia de  $Pm$  se reduzca como lo sugieren la cercanía de las líneas de inestabilidad marginal para los mismos valores de  $Pm$  en la Fig. 4.2.

La Fig. 5.4(c) completa el resultado, mostrando  $Re^*$  como una función de  $Mm$  para todas las simulaciones utilizadas en este trabajo. Muestra que  $Re^*$  tiene un máximo en  $Mm \approx 2$  y disminuye rápidamente para  $Mm$  grande y parece que se satura en  $Re^* = 1$ .

# Conclusiones

---

1. La influencia de la inestabilidad de pinch rotante en la difusividad efectiva en la dirección radial ha sido estudiada para una ley de rotación cuasi-kepleriana ( $\mu_\Omega = 0,35$ ) y un valor del parámetro geométrico  $r_{in} = 0,5$  (razón entre el radio del cilindro interno y externo). Al encontrar que la difusividad normalizada  $D^*/D$  es diferente de cero como es mostrado en el Cap. 5, se comprueba la hipótesis planteada en la Sec. 2.5. En ese sentido podemos afirmar que una inestabilidad de tipo pinch rotante en configuración Taylor-Couette es capaz de modificar el coeficiente de difusión de un metal líquido en la dirección radial.
2. En el primer conjunto de resultados se fija el valor del número magnético de Prandtl (Pm) a 0,1 mientras que el número de Schmidt (Sc) toma los valores 0,1, 0,5, 1 y 2 y se calcula la razón  $D^*/D$  para diferentes valores de Re y Ha que son parámetros libres del problema. El resultado principal es una relación estrictamente lineal entre la difusividad normalizada  $D^*/D$  y el número de Schmidt dado. Utilizando la expresión de Sc (ver Ec. 4.24), se encuentra una relación lineal entre  $D^*$  y  $\nu$  (ver Ec. 5.1) donde el factor de proporcionalidad es el denominado número de Schatzman ( $Re^*$ ). La relación de Schatzman (Eq. 5.1) ha sido demostrada de una manera auto consistente. Esta relación también nos indica que la difusividad  $D^*$  es muy pequeña para números de Schmidt inferiores a 0,1.
3. El modelo también provee valores numéricos para el número de Schatzman ( $Re^*$ ), el cuál se incrementa cuando el número de Hartman (relacionado al campo magnético poloidal) se eleva. Para números de Schmidt  $\leq 0,1$ , la difusividad  $D^*$  debido a la inestabilidad es pequeña, sin embargo  $Re^*$  es diferente de cero e inclusive excede la unidad, en nuestros cálculos. Para el valor de Hartman igual a 80, se encuentra  $Re^* = 4$  y este valor se incrementa cuando se eleva el número de Hartman (ver Fig. 5.3).
4. En el segundo conjunto de resultados (ver Fig. 5.4) se muestra la dependencia de  $Re^*$  en función de los diferentes números adimensionales del sistema. Un resultado

importante concierne al rol del número magnético de Mach ( $M_m$ ). Para rotaciones lentas ( $M_n < 1$ ), la difusividad  $D^*$  tiene una dependencia lineal con  $M_m$ , pero en todos los casos simulados un máximo de  $D^*/D$  existe para  $M_m \approx 2$ . Para rotaciones rápidas, la difusividad inducida  $D^*$  es suprimida y luego parece mantenerse constante (ver Fig. 5.2).

5. Si bien, en este trabajo, se tiene un método para evaluar el número de Schatzman en función de los diferentes números adimensionales, no es posible establecer si  $Re^*$  alcanza un valor de saturación para valores elevados  $Re$  y  $Ha$  y valores pequeños  $P_m$  ( $Re > 1600$ ,  $Ha > 200$  y  $P_m < 0,05$ ). Esto responde a una limitación numérica ya que el método implementado en el código no está diseñado para trabajar en ese rango de valores.
6. Con respecto a la destrucción de litio en el Sol (la motivación inicial de este trabajo); a pesar que la inestabilidad de pinch rotante ha mostrado incrementar el coeficiente de difusión en la dirección radial, no podemos afirmar que esta inestabilidad sea el mecanismo que incremente el coeficiente de difusión del plasma en el Sol. Esto es debido a que los números adimensionales de  $Re$  y  $Ha$  que se alcanzan en el Sol son de varios órdenes de magnitud mayor con respecto a los utilizados en este trabajo.

# Recomendaciones

---

1. La limitación numérica que impide acceder a valores elevados de  $Re$  y  $Ha$  puede ser superada cambiando el enfoque con el cual se resuelven las ecuaciones. Actualmente el código resuelve las ecuaciones de la MHD mediante una DNS (Direct Numerical Simulation). Es decir, los campos incógnitas se resuelven por completo en cada instante de tiempo. Se recomienda optar por enfoques que incluyan un promedio espacial LES (Large Eddy Simulation) o promedios temporales RANS (Reynolds Average Navier-Stokes). Estos enfoques además de extender el rango de valores permitidos para  $Re$  y  $Ha$  permite disminuir considerablemente el tiempo de cálculo. La implementación de uno de estos enfoques permitirá explorar el comportamiento de  $D^*$  para un rango de valores de  $Re$  y  $Ha$  realistas para una estrella como el Sol. Se podría establecer la verdadera contribución de la inestabilidad de pinch rotante en la destrucción de litio en el Sol.
2. El trabajo se ha realizado en una configuración Taylor-Couette con el objetivo de simplificar el modelo. Sin embargo es innegable que la geometría apropiada para el estudio de la destrucción de litio en el Sol es la esférica. Se recomienda desarrollar un código que resuelva las ecuaciones de la MHD en geometría esférica para enriquecer el modelo y los resultados.
3. La ecuación de transporte del escalar pasivo se ha utilizado para modelar la concentración de litio considera un término advectivo y uno difusivo. En la teoría de fenómenos de transporte está establecido que los gradientes de temperatura también contribuyen con términos de transporte y al mismo tiempo influyen en la dinámica del fluido. Se recomienda adicionar la ecuación de la conservación de la energía a las ecuaciones de Navier-Stokes y los correspondientes términos de transporte en la ecuación del escalar pasivo.



# Apéndice A: Fuerza de Lorentz

Describir la fuerza de Lorentz sobre fluidos conductores en interacción con campos eléctricos y magnéticos es particularmente interesante. El campo eléctrico total del sistema está compuesto, en general, por un campo eléctrico estático y un campo eléctrico inducido por el campo magnético variable. Consideremos un elemento de fluido con velocidad  $\mathbf{u}$  y carga  $q$ . Este se desplaza en una región donde está presente un campo eléctrico estático  $\mathbf{E}_s$  y un campo magnético variable en el tiempo  $\mathbf{B}$ . El elemento experimentará una fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_s + q\mathbf{E}_i + q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.1})$$

donde el primer término es la fuerza electrostática, o fuerza de *Coulomb* producida por  $\mathbf{E}_s$  (campo electrostático). El segundo término es la fuerza eléctrica que experimenta el elemento de fluido producto de un campo eléctrico inducido ( $\mathbf{E}_i$ ) generado a partir del campo magnético variable  $\mathbf{B}$ . La tercera contribución es la fuerza magnética que experimenta el elemento de fluido en movimiento debido al campo magnético  $\mathbf{B}$ . Dado que  $\mathbf{E}_s$  genera una fuerza conservativa irrotacional entonces  $\mathbf{E}_s$  es a su vez irrotacional. Por otro lado, la ley de Gauss fija la divergencia de  $\mathbf{E}_s$ , con lo que, en consecuencia, tenemos

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = 0, \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\rho_{ch}}{\varepsilon_0}. \quad (\text{A.2})$$

donde  $\rho_{ch}$  es la densidad de carga total, entendida como cargas libres y cargas ligadas. Adicionalmente, la propiedad de irrotacionalidad de  $\mathbf{E}_s$  nos permite escribirlo en función a un potencial escalar  $V$ , tal que

$$\mathbf{E}_s = -\nabla V, \quad \text{por lo tanto} \quad \nabla^2 V = -\rho_{ch}/\varepsilon_0. \quad (\text{A.3})$$

donde la última ecuación es una ecuación de Poisson escalar y el potencial  $V$  se puede expresar en función a la distribución de cargas  $\rho(\mathbf{x})$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{r}|} d\mathbf{x}', \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'. \quad (\text{A.4})$$

Con respecto al campo eléctrico inducido  $\mathbf{E}_i$  podemos afirmar que tiene divergencia cero (no es producido por cargas estáticas), mientras que su rotacional está dado por la ley de *Faraday*, con lo que tendremos que

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_i = 0, \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.5})$$

Como se mencionó al comienzo de esta sección el campo eléctrico total  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i$ , de modo que tenemos

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{ch}}{\varepsilon_0}, \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.7})$$

Las ecuaciones Ec. A.5 junto con condiciones de frontera adecuadas determinan unívocamente el campo  $\mathbf{E}$ . La ecuación Ec. A.6 recibe el nombre de fuerza de *Lorentz* y es utilizada para definir el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el campo magnético  $\mathbf{B}$ . Así, por ejemplo, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es la fuerza por unidad de carga sobre una pequeña carga de prueba en *reposo* en el marco de referencia de un observador.

En las ecuaciones de Navier-Stokes presentadas en el Cdr. 3.1, el último término corresponde a la fuerza de cuerpo por unidad de volumen que experimenta el fluido. En el caso de la magnetohidrodinámica, este término corresponde a la fuerza de *Lorentz* por unidad de volumen la cual se puede encontrar fácilmente considerando que

$$\mathbf{F}_{total} = \int \mathbf{f} dV \quad (\text{A.8})$$

donde  $\mathbf{f}$  una fuerza por unidad de volumen y la integral se hace sobre el volumen del fluido conductor. Por otro lado tenemos que la fuerza total  $\mathbf{F}_{total}$  sobre el conductor es la suma de las fuerzas de *Lorentz*  $\mathbf{F}_i$  sobre cada uno de los elementos de fluido, entonces

$$\mathbf{F}_{total} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i q_i \mathbf{E} + \sum_i q_i \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.9})$$

$$= \sum_i \rho_{ch}(x_i) \Delta V \mathbf{E} + \sum_i \Delta V \mathbf{J}(x_i) \times \mathbf{B} \quad (\text{A.10})$$

donde  $\Delta V$  es el volumen del elemento de fluido y se ha utilizado las definiciones para la cantidad de carga en el elemento de fluido  $i$  en la posición  $x_i$

$$q_i = \rho_{ch}(x_i) \Delta V \quad (\text{A.11})$$

y la densidad de corriente en el mismo elemento

$$\mathbf{J}(x_i) = \rho_{ch}(x_i)\mathbf{u} = q_i\mathbf{u}\Delta V. \quad (\text{A.12})$$

pasando al límite la Ec. A.10 cuando  $\Delta V \rightarrow 0$ , tenemos

$$\mathbf{F}_{total} = \int (\rho_{ch}\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})dv. \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto, la fuerza de *Lorentz* por unidad de volumen que actúa sobre el fluido conductor es

$$\mathbf{f} = \rho_{ch}\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.14})$$

# Apéndice B: Ley de Ohm

La ley de Ohm no es una ley fundamental, es más bien una ley efectiva que aparece como una aproximación lineal de ciertas expansiones no relativistas de las ecuaciones de Maxwell. Considerando materiales ohmicos tenemos que la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , es proporcional a la fuerza experimentada por las cargas libres. Esto es reflejado en la forma convencional de la ley de Ohm,  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$  donde  $\mathbf{E}$  es un campo *estático* que proviene de una fuerza conservativa, es decir, es un campo irrotacional a divergencia cero.

Para el caso de la MHD esta relación debe modificarse, pues, como se discutió en el An. A, el campo eléctrico total experimentado por el fluido conductor está compuesto por un campo eléctrico estático y otro inducido. Para llegar a la versión modificada de la ley de Ohm para la MHD, plantaremos inicialmente, la ley de Ohm desde un marco de referencia que se mueve con el fluido. En este marco de referencia el campo eléctrico es estático. Luego considerando argumentos no relativistas, veremos como éste se asocia a los campos eléctrico y magnético totales, medidos desde un marco de referencia en el laboratorio, que experimenta el fluido conductor.

Supongamos que, en el marco de laboratorio, hay un campo eléctrico y uno magnético. El campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , es definido como la fuerza por unidad de carga sobre un elemento de fluido cargado en reposo con respecto a este marco. Si el elemento cargado está en movimiento, además de la fuerza debido al campo eléctrico ( $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ), estará presente la fuerza magnética  $q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ . Sin embargo, si utilizamos un marco de referencia en el que el elemento de fluido cargado está instantáneamente en reposo (pero moviéndose con velocidad  $\mathbf{u}$  relativa al marco de laboratorio), entonces la fuerza sobre el elemento cargado es debida únicamente a un campo eléctrico  $\mathbf{E}_r$ . Donde  $\mathbf{E}_r$  es el campo eléctrico relativo al marco móvil. La segunda ley de Newton nos da, para los dos marcos,  $\mathbf{F}_{total}^{Lab} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$  y  $\mathbf{F}_{total}^{Rel} = q\mathbf{E}_r$ . Sin embargo, de la relatividad Newtoniana (que es todo lo que se requiere para la magnetohidrodinámica) nos dice que  $\mathbf{F}_{total}^{Lab} = \mathbf{F}_{total}^{Rel}$ . Esto permite relacionar los campos eléctricos en los dos marcos de referencia.

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (\text{B.1})$$

En un fluido conductor se aplica la misma ley, solo que ahora debemos usar el campo eléctrico medido en un marco en movimiento con la velocidad local del conductor, ya que

este es conservativo (ver Ec A.2). Por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_r = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (\text{B.2})$$

relacionando, de esta manera, la densidad de corriente con el campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , ambos medidos en el marco del laboratorio.

# Apéndice C: Aproximaciones para escalas de tiempo grandes

## C.1. Fuerza eléctrica por unidad de volumen

En el Ap. A se obtuvo una relación para la fuerza de Lorentz por unidad de volumen (ver Ec. A.14). El primer y segundo término representan la fuerza eléctrica y magnética por unidad de volumen que experimenta un elemento de fluido. Es posible mostrar que el término eléctrico es despreciable con respecto al magnético si se consideran tiempos considerablemente mayores al tiempo de relajación  $t_e = \varepsilon_0/\sigma$  que es del orden de  $10^{-8}s$  para metales líquidos. Para mostrar la afirmación anterior, primero consideramos la ecuación de la conservación de la carga

$$\frac{\partial \rho_{ch}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{C.1})$$

que si bien es una condición necesaria en cualquier sistema, también se puede obtener al tomar la divergencia a la ecuación de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (\text{C.2})$$

La Ec. C.1 indica que la tasa a la cual la carga está cambiando (aumentando o disminuyendo) dentro de un volumen pequeño debe ser igual a la tasa a la cual la carga fluye a través de la superficie de ese volumen. Tomando divergencia a la ley de Ohm (Ec. B.2) y usando la ley de Gauss, encontramos que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (\text{C.3})$$

$$-\frac{\partial \rho_{ch}}{\partial t} = \sigma \frac{\rho_{ch}}{\varepsilon_0} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (\text{C.4})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_{ch}}{\partial t} + \frac{\rho_{ch}}{t_e} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0, \quad t_e = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \quad (\text{C.5})$$

donde la cantidad  $t_e$  tiene dimensiones de tiempo, es del orden de  $10^{-8}s$  para metales líquidos y es llamado tiempo de relajación. Para entender el origen de su nombre analicemos el caso cuando  $\mathbf{u} = 0$ , entonces la Ec. C.5 se transforma en

$$\frac{\partial \rho_{ch}}{\partial t} + \frac{\rho_{ch}}{t_e} = 0 \quad (\text{C.6})$$

cuya solución general es de la forma

$$\rho_{ch}(t) = \rho_{ch}(0) \exp(-t/t_e). \quad (\text{C.7})$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de carga en el tiempo  $t = 0$ . En la Fig. C.1 la gráfica de la densidad de carga normalizada  $\rho_{ch}/\rho_0$  en función del tiempo adimensional  $t/t_e$ , muestra que  $\rho_{ch}(t)$  se mantiene constante para  $t \gg t_e$  y confirma que  $t_e$  cumple, efectivamente, el rol de un tiempo de relajación.

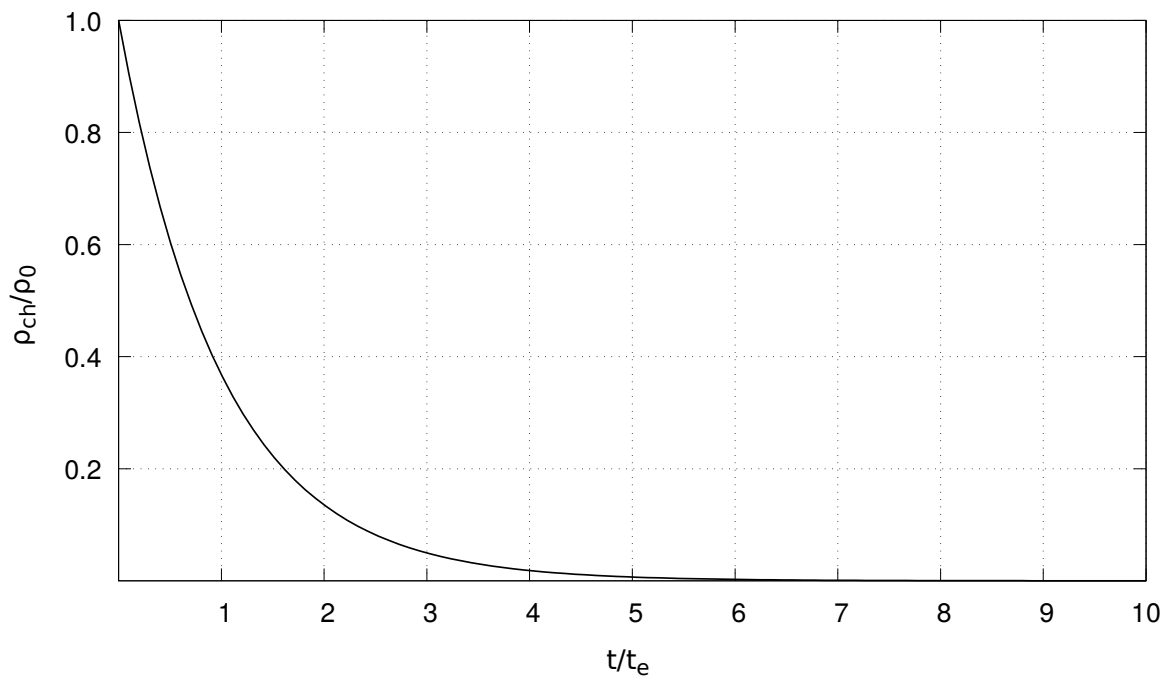


Figura C.1: Solución de la Ec. C.7 para el caso  $\mathbf{u} = 0$ . Se observa que para  $t/t_e \gg 1$ ,  $\rho_{ch}$  tiende a cero.

Para el caso  $\mathbf{u} \neq 0$ , suponemos que trabajamos en fenómenos con escalas de tiempo considerablemente mayores al tiempo de relajación  $t_e$  ( $t \gg t_e$ ), de modo que

$$\frac{\partial \rho_{ch}}{\partial t} \ll \frac{\rho_{ch}}{t_e} \quad (\text{C.8})$$

por lo que la Ec. C.5 se transforma en una ecuación cuasi estática

$$\rho_{ch} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (\text{C.9})$$

El orden de la magnitud de  $\rho_{ch}$  se puede obtener utilizando las variables características del problema. En ese sentido, consideramos a  $D$ ,  $u$  y  $B$  como la longitud, velocidad y magnitud de campo magnético característicos del problema. Es decir,

$$\rho_{ch} \sim \frac{\varepsilon_0 u B}{D}. \quad (\text{C.10})$$

Por otro, de la ley de Ohm tenemos que  $\mathbf{E} \sim \mathbf{J}/\sigma$ , entonces

$$\rho_{ch} |\mathbf{E}| \sim (\varepsilon_0 u B / D) (J / \sigma) \sim \frac{u t_e}{D} J B \sim J B \left( \frac{t_e}{t} \right).$$

donde se ha usado el hecho que  $u/D$  tiene dimensiones de tiempo y corresponde al tiempo característico  $t$ . Ahora podemos comparar los ordenes de magnitud de los términos de la Ec. A.14

$$\frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{|\rho_{ch} \mathbf{E}|} = \frac{J B}{J B \left( \frac{t_e}{t} \right)} = \frac{t}{t_e} \gg 1, \quad (\text{C.11})$$

con lo cual se muestra que el término eléctrico en Ec. A.14 se puede despreciar y se tiene que la fuerza de Lorentz por unidad de volumen simplemente queda

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (\text{C.12})$$

Otro resultado que se desprende de considerar escalas de tiempo superiores a  $t_e$  es que el término  $\partial \rho_{ch} / \partial t$  también se puede despreciar de la ecuación de conservación de la carga eléctrica Ec. C.1. Esto nos lleva a la conclusión que para tiempos  $t \gg t_e$  la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es un campo a divergencia nula

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (\text{C.13})$$

## C.2. Ley de Ampère-Maxwell

Ahora mostraremos los efectos de considerar escalas de tiempo largas en la ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (\text{C.14})$$



Al comparar las magnitudes de los dos términos del lado derecho de Ec. C.14 vemos que

$$\frac{|\mu_0 \mathbf{J}|}{|\mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t|} = \frac{\sigma t J}{\varepsilon_0 J} = \left(\frac{t}{t_e}\right) \gg 1. \quad (\text{C.15})$$

Donde nuevamente se han usado las magnitudes de las variables características del sistema. Este resultado nos indica que la magnitud de la corriente de desplazamiento  $|\mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t|$  es despreciable y que por lo tanto no hay propagación de ondas electromagnéticas. Por lo tanto la ley de Ampère-Maxwell, se convierte en

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (\text{C.16})$$

lo cual es compatible con la neutralidad eléctrica

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{C.17})$$

## Referencias

- Akonur, A., y Lueptow, R. (2002, 07). Chaotic mixing and transport in wavy taylorcouette flow. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 167, 183-196. doi: 10.1016/S0167-2789(02)00529-8 50
- Boesgaard, A. M., y Steigman, G. (1985). Big bang nucleosynthesis: Theories and observations. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 23(1), 319-378. Descargado de <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.23.090185.001535> doi: 10.1146/annurev.aa.23.090185.001535 16
- Chandrasekhar, S. (1956, mayo). On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics. *Proceedings of the National Academy of Science*, 42(5), 273-276. doi: 10.1073/pnas.42.5.273 45
- Couette, M. (1888). On a new apparatus for the study of friction of fluids. *Compt. Rend*, 107, 388-390. 29
- Davidson, P. A. (2001). *An introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511626333 14
- Fournier, A., Bunge, H.-P., Hollerbach, R., y Vilotte, J.-P. (2005, abril). A Fourier-spectral element algorithm for thermal convection in rotating axisymmetric containers. *Journal of Computational Physics*, 204(2), 462-489. doi: 10.1016/j.jcp.2004.10.020 23
- Greenstein, J. L., y Richardson, R. S. (1951, mayo). Lithium and the Internal Circulation of the Sun. *Astrophysical Journal*, 113, 536. doi: 10.1086/145424 17
- Hughes, D. W. (2007). *The solar tachocline*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511536243 17, 48
- Müller, E. A. (1968). Lithium observations in the sun. En P. L. (Ed.), *Highlights of astronomy. international astronomical union / union astronomique internationale* (Vol. 1, p. 243-246). Springer. 16
- Nemri, M., Climent, E., Charton, S., Lanoë, J.-Y., y Ode, D. (2013, 12). Experimental and numerical investigation on mixing and axial dispersion in taylorcouette flow patterns. *Chemical Engineering Research and Design*, 91, 23462354. doi: 10.1016/j.cherd.2012.11.010 50
- Rüdiger, G., Schultz, M., y Shalybkov, D. (2003, Apr). Linear magnetohydrodynamic taylor-couette instability for liquid sodium. *Phys. Rev. E*, 67, 046312. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.67.046312> doi: 10.1103/PhysRevE.67.046312 29

- Rüdiger, G., Schultz, M., Stefani, F., y Mond, M. (2015, octubre). Diffusive magnetohydrodynamic instabilities beyond the Chandrasekhar theorem. *The Astrophysical Journal*, 811(2), 84. doi: 10.1088/0004-637X/811/2/84 45
- Rüdiger, G., y Shalybkov, D. (2002, Jul). Stability of axisymmetric Taylor-Couette flow in hydromagnetics. *Phys. Rev. E*, 66, 016307. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.66.016307> doi: 10.1103/PhysRevE.66.016307 39
- Ruediger, G., Gellert, M., Hollerbach, R., Schultz, M., y Stefani, F. (2017a, 03). Stability and instability of hydromagnetic Taylor-Couette flows. *Physics Reports*, 741. doi: 10.1016/j.physrep.2018.02.006 20, 29
- Ruediger, G., Gellert, M., Hollerbach, R., Schultz, M., y Stefani, F. (2017b, 03). Stability and instability of hydromagnetic Taylor-Couette flows. *Physics Reports*, 741. doi: 10.1016/j.physrep.2018.02.006 40, 42
- Rüdiger, G., y Schultz, M. (2010). Tayler instability of toroidal magnetic fields in MHD Taylor-Couette flows. *Astronomische Nachrichten*, 331(1), 121-129. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asna.200911249> doi: 10.1002/asna.200911249 40, 42
- Schatzman, E. (1977). Turbulent transport and lithium destruction in main sequence stars. *Astronomy and Astrophysics*, 56(1-2), 211-218. 17, 57
- Taylor, G. I. (1923). VIII. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 223(605-615), 289-343. 29
- White, F. (2015). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill Higher Education. Descargado de <https://books.google.com.pe/books?id=NqpZCgAAQBAJ> 25
- Zahn, J.-P. (1974). Rotational instabilities and stellar evolution. *Symposium - International Astronomical Union*, 59, 185-195. doi: 10.1017/S0074180900237492 17