UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIRÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

"DUALIDAD FUERTE EN OPTIMIZACIÓN NO CONVEXA Y APLICACIONES"

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADA POR:

MÁXIMO FLOREAN CHÁVEZ SANTOS

ASESOR:

Dr. ELADIO TEÓFILO OCAÑA ANAYA

ASESOR EXTERNO:

Dr. FABIÁN FLORES BAZÁN

LIMA - PERÚ

2019

Agradecimientos

El agradecimiento por la realización esta tésis es primero para los profesores del Instituto de Matemáticas y Ciencas Afines, quienes gracias a sus conocimientos me hicieron ver el camino para culminar este trabajo. En particular agradecer al profesor Eladio Ocaña, quien desde el inicio del programa, me mostró su apoyo no sólo académico sino también su apoyo moral. También agradezco al profesor Fabian Flores quien me acogió muy amablemente en mi estadía en la Universidad de Concepción y me ayudó en la realización final de este trabajo. Siempre quedaré en deuda con ellos. Agradezco al Fondecyt - Concytec por haber ofrecido becas a traves del **"Fortalecimiento de programas de maestría en universidades peruanas"**- Contrato 182-2015 - FONDECYT, PERÚ.

El tema de la tesis es parte del trabajo de investigación financiado parcialmente por los proyectos CONICYT-CHILE a través de FONDECYT 118-1316 y PIA- Concurso Apoyo a Centros Científicos y Tecnológicos de Excelencia con financiamiento Basal AFB170001.

Resumen

De la teoría de Dualidad Fuerte en Optimización no Convexa se tienen dos resultados, uno que caracteriza de manera general la dualidad fuerte en el dual de un problema de optimización y otro resultado donde la dualidad fuerte (en el dual) es una condición necesaria. Estos resultados son tomados de [1] y [2] respectivamente. Compararemos los resultados de ambos artículos y veremos como relacionarlos hasta cierto punto y analizar sus diferencias. En este trabajo también presentamos una corrección en la demostración de uno de los resultados obtenidos en [2] y finalmente aplicaremos los resultados a dos ejemplos.

Introducción

Desde que concebimos la noción de obtener un mejor resultado con el menor esfuerzo nace la necesidad natural de querer aplicarlo en todo ámbito más aún en el aspecto académico y tecnológico. La matemática no fue la excepción y se hizo la responsable de entender este fenómeno y buscar darle un planteamiento teórico y solución conveniente. En muchos casos, siempre encontramos restricciones que se deben tener en cuenta para un mejor modelamiento del problema estudiado, también ocurren casos que, mediante sus restriccionesnaturales, no se puede encontrar solución, para estos casos lo que nos queda es dar una explicación del porqué no existe solución. Es así que se establece un estudio objetivo del problema y da origen al área que llamamos *Optimización* utilizando como base el Análisis Convexo, el Análisis Funcional, la Topología y algunas otras áreas de las matemáticas.
Para ello necesitamos definir un problema inicial, sus características asi como las restricciones que actuarán en la búsqueda de la solución. Esto lo haremos partiendo de un conjunto y una función que establecerán el problema y con este, el inicio de una de las ramas más estudiadas de las matemáticas.

Podemos enfocar el análisis en dos casos: el caso convexo y el caso no convexo. Algunos resultados del caso convexo son expuestos en [8] , [9] y [10]. No está de más señalar que el estudio del caso convexo es el que más se ha estudiado a lo largo de los años y donde al parecer es el caso con resultados más diversos, respecto al caso no convexo. Nosotros nos interesaremos en el caso no convexo, precisamente en dos conceptos centrales que son el *salto de dualidad o gap de dualidad* y la *dualidad fuerte* en el problema primal o dual, que más adelante precisaremos.

Así, tomamos un conjunto no vacio X, una función $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ y $K \subset X$ un subconjunto no vacio. Definimos el problema primal (P) de nuestro estudio,

$$\mu := \inf_{x \in K} f(x),$$

el cual K será conocido como conjunto factible o el conjunto de restricciones que en este trabajo consideraremos restricciones cónicas.

Ejemplos de problemas de optimización los vemos en el día a día, desde que nos preguntamos ¿cual sería el recorrido que nos tome menos tiempo para llegar a nuestro destino?, en programación ¿cómo hacer que un programa que resuelva el problema con menor costo computacional, o en la naturaleza, ¿cómo es que las abejas construyen sus panales con secciones hexagonales para almacenar la mayor cantidad de miel usando la mínima cantidad de cera?

Muchos problemas presentan un conjunto de restricciones al cual llamaremos $c$onjunto factible, los cuales serán caracterizados mediante funciones. Estas restricciones pueden ser de igualdad o desigualdad, esto lo contemplaremos más adelante.

Los problemas de optimización son estudiados desde muchos enfoques, como ya mencionamos del caso convexo y no convexo, también esta la búsqueda de algoritmos que aproximen el valor de μ. Este trabajo estudia el problema desde el enfoque de la Teoría de la Dualidad Lagrangiana, por ello es necesario que al problema primal (P) se le defina su problema dual (D) como:

$$\nu := \sup_{\lambda \in P^*} \inf_{x \in C} [f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle],$$

cuyos resultados han servido para enriquecer aún más la optimización no solo en el aspecto teórico sino también en el aspecto numérico desarrollando métodos computacionales (algoritmos) que resuelvan el problema primal o el problema dual.

La Teoría de Dualidad Lagrangiana ha dado herramientas de mucha importancia para estudiar problemas de optimización ya sea desde ambos puntos de vista (teórico y numérico). Se requiere del concepto de Lagrangiano del problema, pues precisamente la teoría que estudiamos en esta tesis trata del *Lagrangiano Lineal.* Cabe señalar que hay estudios donde el Lagrangiano no es lineal, de los cuales destacamos el método del Lagrangiano aumentado desarrollado principalmente por Rockafellar con el fin de reducir el salto de dualidad.

Esta tésis tiene doble propósito.

El primero es hacer una formulación general del problema planteado en [1], pues consideraremos también restricciones del tipo igualdad, $h(x) = 0$, a parte de las restricciones cónicas, $g(x) \in -P$. Se presentará una condición necesaria y suficiente para que la propiedad de dualidad fuerte sea válida, sin tener en cuenta condiciones de convexidad.

El segundo próposito es corregir la demostración de un teorema presentado en [2], luego de haber revisado detenidamente el dicho trabajo, donde se presenta condiciones suficientes que garantizan la validez de la propiedad de dualidad fuerte, suponiendo que el problema primal admite una solución y condiciones de diferenciabilidad, convexidad y P-convexidad en las funciones involucradas.

Durante el estudio del teorema 3.3 se detectó un error en la demostración, presentamos una correción de dicha demostración y además se calculará la función de valor óptimo explicitamente de dos ejemplos cuando esta función tiene como dominio el espacio de las funciones constantes definidas en [0,1], el cual se identifica con el espacio de los números reales.

Lamentablemente no ha sido posible identificar una clase de funciones no necesariamente convexas, f, g y h (aparte de las funciones cuadráticas y fraccionales vistas en [1]) para las cuales se tiene dualidad fuerte. Esto corresponde a un trabajo a corto plazo que podría generar algún artículo para ser sometido a alguna revista de prestigio del área.

Este trabajo consiste de cuatro capítulos.

El primer capítulo como es habitual, se expone los preliminares o herramientas matemáticas que haremos uso como del análisis convexo y funcional para la comprensión sistemático de los siguientes capítulos además de las notaciones que se usarán para un mejor entendimiento.

En el segundo capítulo se presenta la formulación del problema primal y la del lagrangiano lineal que nos permite dar una formulación del problema dual, además del concepto de dualidad fuerte y gap de dualidad.

En el tercero capítulo reformularemos el trabajo de Fabián Flores [1] agregando la condición de igualdad. Además se revisará la demostración de un resultado del trabajo de A. Maugeri y D. Puglisi [2]. Como punto final trataremos de ver cuan semejantes son dichos trabajos y se mencionará que camino seguir para buscar una implicancia en entre [1] y [2].

En el cuarto capítulo presentaremos dos ejemplos que capten las ideas y conceptos de [1] y [2].

ÍNDICE GENERAL

1. Preliminares **6**

1.1. Generalidades 6

1.2. Análisis Convexo 12

1.2.1. Semicontinuidad 12

1.2.2. Regularización de una función 13

1.2.3. Conjugada de Fenchel y subdiferencial de una función 15

1.2.4. Conos 18

1.3. Diferenciabilidad 21

2. Teoría de Dualidad Lagrangiana **24**

2.1. Formulación del problema primal 24

3. Resultados sobre Dualidad fuerte **28**

3.1. Una condición necesaria y suficiente: Caso General 28

3.2. Una condición necesaria usando P-convexidad 29

3.3. Reformulación del caso general y comparación 37

4. Aplicaciones **40**

4.1. Ejemplo 1 40

4.2. Ejemplo 2 43

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En el presente capítulo expondremos todas las herramientas que necesitaremos para entender los resultados de [1] y [2] y poder llegar a los objetivos trazados.
En adelante consideraremos a $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ como espacios de Banach reales, a menos que se precise que sean solo espacios normados (para algunas definiciones). Tendremos en cuenta nociones básicas de conjuntos (conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto) y de análisis funcional, como aplicaciones lineales, continuidad, además consideraremos a $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ $(Y^*, \|\cdot\|_{Y^*})$, $(Z^*, \|\cdot\|_{Z^*})$ como el espacio dual de X, Y, Z respectivamente.

1.1. Generalidades

Definición 1.1. *Un conjunto $C \subseteq X$ es convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in C$ y cualquier $t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$. Es decir,*

$$\forall x, y \in C, t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in C.$$

Si $(x_k)_{1\leq k\leq n} \subset X$, decimos que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ es una combinación convexa de $(x_k)_{1\leq k\leq n}$, siendo $\lambda_k \geq 0$ para todo $k \in [1, ..., n]$ y $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Definición 1.2. *Dado $A \subseteq X$ un conjunto no vacio, la cápsula convexa de A, denotada por $co(A)$, se define como el conjunto de todas combinaciones convexas de elementos de A.*

Observación:

También podemos decir que, $co(A) = \bigcap_{D \in \mathcal{A}} D$, donde $\mathcal{A} := \{A \subseteq D : D \text{ convexo }\}$. Es decir $co(A)$ es el menor conjunto convexo (respecto a la inclusión) que contiene a A.

Por otra parte, señalamos que $\overline{co}(A) := \bigcap_{D \in \mathcal{A}} D$, donde $\mathcal{A} := \{A \subseteq D : D \text{ convexo y cerrado}\}$. Es decir $\overline{co}(A)$ es el menor conjunto cerrado y convexo (respecto a la inclusión) que contiene a A.

De lo anterior, tenemos $\overline{co(A)} = \overline{co}(A)$.

Ejemplo 1.1. *El conjunto* $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leq \alpha\}$ *es convexo, donde* $a \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2. *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *una matriz simétrica semidefinida positiva, el conjunto* $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x \rangle \leq c\}$ *es convexo donde* $c \in \mathbb{R}_+$.

Como primer resultado importante, expondremos uno de los teoremas más clásicos del análisis funcional, que será pieza clave en los resultados de [1] y [2].

Teorema 1.1 (Teorema de Hahn-Banach). *Sea* $\rho \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que:*

1. $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x), \qquad \forall x \in X$ *y* $\lambda > 0$.

2. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y), \qquad \forall x, y \in X$.

Sea W *un subespacio vectorial de* X *y* $h \colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funcional lineal tal que*

$$h(x) \leq \rho(x), \quad \forall x \in W.$$

Entonces existe una funcional lineal $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que extiende a* h*, es decir* $f(x) = h(x)$*, para todo* $x \in W$ *y además*

$$f(x) \leq \rho(x), \quad \forall x \in X.$$

La demostración de este teorema la podemos encontrar en [7] donde hacen uso del Lema de Zorn.

El teorema de Hahn-Banach, tiene varias implicaciones en topologia y teoría de conjuntos. En análisis convexo también se desprenden dos versiones geométricas del teorema de este teorema que serán útiles en el capítulo 3, sobretodo la segunda versión que más adelante señalaremos. Antes de ello, tengamos en cuenta lo siguiente.

Definición 1.3. *Sean A y B dos subconjuntos no vacio de X, f una funcional lineal no nula definida en X y $\alpha \in \mathbb{R}$. Decimos que el hiperplano $H := \{x \in X : \langle f, x\rangle = \alpha\}$, separa a A y B si*

$$\langle f, x\rangle \leq \alpha, \;\; \forall x \in A \text{ y } \langle f, x\rangle \geq \alpha, \;\; \forall x \in B.$$

También decimos que H separa estrictamente a A y B si existe un $\delta > 0$, tal que

$$\langle f, x\rangle \leq \alpha - \delta, \;\; \forall x \in A \text{ y } \langle f, x\rangle \geq \alpha + \delta, \;\; \forall x \in B.$$

Teorema 1.2 (Primera versión geométrica - Teorema de Separación)**.** *Sean A y B dos subconjuntos convexos de X tales que $A \cap B = \emptyset$. Si uno de ellos es abierto entonces existe un hiperplano cerrado que separa a A y B.*

Notemos que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, $H = \{x \in X : \langle f, x\rangle \leq \alpha\}$ es cerrado si f es continua.
Para la demostracíon de este teorema, consideremos los siguientes lemas.

Lema 1.1. *Sea $C \subset X$ un subconjunto abierto donde $0 \in C$. Sea $\rho\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función definida como $\rho(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$. Entonces ρ satisface:*

1. *$\exists M > 0$ tal que $0 \leq \rho(x) \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X$.*

2. *$C = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$.*

Lema 1.2. *Sea $C \subset X$ un conjunto abierto y convexo y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin C$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $\langle f, x\rangle < \langle f, x_0\rangle$, para todo $x \in C$. En particular se observa que el hiperplano $[x \in X : \langle f, x\rangle = \langle f, x_0\rangle]$ separa a $\{x_0\}$ y C.*

Prueba: [Demostración del Teorema 1.2] Sea $C = A - B$, claramente C es convexo y abierto, pues $C = \bigcup\limits_{y \in B}(A - y)$, además $0 \notin C$ pues $A \cap B = \emptyset$. Por el Lema 1.2, existe un $f \in X^*$ tal que

$$\langle f, z\rangle < 0, \quad \forall z \in C,$$

esto es,

$$\langle f, x\rangle < \langle f, y\rangle, \quad \forall x \in A, y \in B.$$

Tomando $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$\sup_{x \in A}\langle f, x\rangle \leq \alpha \leq \inf_{y \in B}\langle f, y\rangle.$$

De esta manera vemos que el hiperplano $H = \{x \in X : \langle f, x \rangle = \alpha\}$ separa a A y B. $\square$

Teorema 1.3 (Segunda versión geométrica - Teorema de Separación). *Sean A y B dos subconjuntos de X convexos tales que $A \cap B = \emptyset$. Si A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado tal que separa estrictamente a A y B.*

Prueba: Sea $C = A - B$, claramente C es cerrado, convexo y además $0 \notin C$. Por lo tanto existe un $r > 0$ tal que $B(0, r) \cap C = \emptyset$. Por el teorema 1.2 existe un hiperplano cerrado que separa a $B(0, r)$ y C. Por lo tanto existe un $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que

$$\langle f, x - y \rangle \leq \langle f, rz \rangle, \forall x \in A, y \in B \text{ y } z \in B(0, 1).$$

Luego, $\langle f, x - y \rangle \leq -r\|f\|$ (considerando que $-z \in B(0, 1)$), $\forall x \in A$ y $y \in B$. Tomando $\delta = \frac{1}{2} r\|f\| > 0$, tenemos

$$\langle f, x \rangle + \delta \leq \langle f, y \rangle - \delta, \qquad \forall x \in A, y \in B.$$

Tomando α tal que

$$\langle f, x \rangle + \delta \leq \sup_{x \in A} +\delta \leq \alpha \inf_{y \in B} \langle f, y \rangle - \delta \leq \langle f, y \rangle - \delta,$$

y considerando el hiperplano $H = \{x \in X : \langle f, x \rangle = \alpha\}$, tenemos que este separa estrictamente a A y B. $\square$

Ahora tengamos en cuenta el concepto de minimizador o maximizador de una función.

Definición 1.4. *Sea $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $x_0 \in X$ es minimizador global de f, si*

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \textit{para todo } x \in X;$$

Decimos que $x_0 \in X$ es minimizador local de f, si existe una vecindad $V \subset X$, tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \textit{para todo } x \in X \cap V.$$

Definición 1.5. *Sea $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función definida sobre X y toma valores en los reales extendidos $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$. Tengamos en cuenta lo siguiente:*

- *El **dominio efectivo de f** es el conjunto $dom(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$.*
- *Decimos que f es una **función propia** si tenemos que $dom(f) \neq \emptyset$ y para todo $x \in X$: $f(x) > -\infty$.*
- *El **epígrafo de** f es el conjunto $epi(f) := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$*
- *El conjunto $[f \leq \lambda] := \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ lo llamaremos **subnivel de** f **en** λ.*

Definición 1.6. *Decimos que una función $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es convexa si para cada par $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$ tenemos que*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1.1}$$

Por convención tendremos en cuenta que $+\infty + (-\infty) = \infty, 0.(+\infty) = +\infty$ y $0.(-\infty) = -\infty$.
*Se dice que una función f es **cóncava** si $(-f)$ es convexa.*
Decimos que f es una función estrictamente convexa si (1.1) cumple solo la desigualdad estricta cuando $x \neq y$ y $t \in (0, 1)$.

Observación: Sean $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

1. Si f y g son convexas entonces $f+g$, $\max\{f, g\}$ y αf, para $\alpha > 0$, son convexas en $\bar{x}$.
2. Si $\{f_i\}_{i \in I}$ es una familia de funciones convexas, entonces la función definida como $(\sup_{i \in I} f_i)(x) := \sup_{i \in I} f_i(x)$ para todo $x \in X$, es convexa.

Como consecuencuia de la definición anterior, son equivalentes:

- Una función f es convexa.
- El epígrafo de f, $epi(f)$, es un conjunto convexo en $X \times \mathbb{R}$.
- Si f es una función convexa, el dominio efectivo es un conjunto convexo, pues $dom(f) = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f \leq n]$.

Además tenemos que si f es convexa entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $[f \leq \lambda]$ es convexo. Lo recíproco no se cumple necesariamente pues si consideramos a $f(x) = x^3$, vemos que esta no es continua pero sus subniveles si son conjuntos convexos.

Ejemplo 1.3. *Sean $f, g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, la convolución de f y g, denotado por la función $f * g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se define como*

$$\begin{aligned}(f * g)(w) \ &:= \inf_{x \in X}\{f(u) + g(v) : u, v \in X, u + v = w\} \\ &= \inf_{x \in X}\{f(w - x) + g(x) : x \in X\}.\end{aligned}$$

Se observa que si $(f * g)(w) < +\infty$, entonces $w \in dom(f) + dom(g)$.

Afirmación: Si f y g con convexas entonces $f * g$ es convexa.

Prueba: Sean w_1 y $w_2 \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$, debemos probar que

$$(f * g)(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) \leq \lambda(f * g)(w_1) + (1 - \lambda)(f * g)(w_2).$$

• Si $(f * g)(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) = -\infty$, se tiene trivialmente que

$$-\infty \leq \lambda(f * g)(w_1) + (1 - \lambda)(f * g)(w_2).$$

• Si $(f * g)(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) = +\infty$, se tiene que

$$f(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 - x) = +\infty \text{ o } g(x) = +\infty \text{ para todo } x \in X.$$

Por lo tanto, se tiene que $f(x) = +\infty$ o $g(x) = +\infty$ o sea $(f * g)(w_1) = +\infty$.

• Si $(f * g)(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) < +\infty$, dado $\epsilon > 0$, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que

$$(f * g)(w_1) \leq f(w_1 - x_1) + g(x_1) < (f * g)(w_1) + \frac{\epsilon}{2} \text{ y}$$

$$(f * g)(w_2) \leq f(w_2 - x_2) + g(x_2) < (f * g)(w_2) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Multiplicando por λ y $(1 - \lambda)$ respectivamente a las desigualdades anteriores y sumandolas tenemos,

$$\lambda f(w_1 - x_1) + (1 - \lambda)f(w_2 - x_2) + \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) < \lambda(f * g)(w_1) + (1 - \lambda)(f * g)(w_2) + \epsilon.$$

Por la convexidad de f y g tenemos,

$$f(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 - (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) + g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda(f * g)(w_1) + (1 - \lambda)(f * g)(w_2) + \epsilon.$$

Como $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$, tenemos que
$(f*g)(\lambda w_1+(1-\lambda)w_2) \leq f(\lambda w_1+(1-\lambda)w_2-(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2))+g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$,
es decir,

$$(f * g)(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) < \lambda(f * g)(w_1) + (1-\lambda)(f * g)(w_2) + \epsilon.$$

Asi tenemos que:

$$(f * g)(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \leq \lambda(f * g)(w_1) + (1-\lambda)(f * g)(w_2).$$

$\square$

Teorema 1.4. *Toda función convexa y sci puede escribirse como supremo de funciones afines minorantes.*

Teorema 1.5. *Sea $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa y $\bar{x} \in X$ un mínimo local. Entonces $\bar{x}$ es un mínimo global.*

1.2. Análisis Convexo

1.2.1. Semicontinuidad

Definición 1.7. *Decimos que una función $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua inferior (sci) en el punto $\bar{x} \in X$ si para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < f(\bar{x})$ existe una vecindad V de $\bar{x}$ tal que para todo $x \in V$ se tiene $\lambda < f(x)$.*

Observación:
Como consecuencia de la definición, tenemos que para una función f sci son equivalentes:

- El epígrafo de f, *epi*(f), es un conjunto cerrado.
- Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $[f \leq \lambda]$ es cerrado.
- Para todo $x_0 \in X$ y para toda sucesión $(x_n) \in X$ convergente a x_0, tenemos que
$$f(x_0) \leq \liminf_n f(x_n).$$

Proposición 1.1. *Sean* $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *y* $g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. *Entonces*

1. *Si* f *y* g *son sci en* $\bar{x}$ *entonces,* $f+g$, $\min\{f,g\}$ *y* αf, *para* $\alpha > 0$, *son sci en* $\bar{x}$.

2. *Si* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una familia de funciones sci en* $\bar{x}$ *entonces la función definida como* $(\sup_{i\in I} f_i)(x) := \sup_{i\in I} f_i(x)$ *para todo* $x \in X$, *es sci en* $\bar{x}$.

Ejemplo 1.1. *Dos funciones importantes para el análisis de nuestro estudio son:*

1. *La función Indicador de un conjunto* $C \subset X$ *no vacio, denotado por* I_C *es* $I_C\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *definido como*
$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in C, \\ +\infty & si \quad x \notin C \end{cases}$$
Esta función es sci si C *es cerrado, y es convexa si* C *es convexo.*

2. *La función soporte de un conjunto* $C \subset X$ *no vacio, denotado por* σ_C, *es* $\sigma_C\colon X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, *definido como*
$$\sigma_C(x^*) = \sup_{x\in C}\{\langle x^*, x\rangle\}.$$
Esta es una función sci en X^*.

Observación:

Una definición topológica de una función sci en x_0, vendría a ser si
$$f(x_0) = \liminf_{x\to x_0} f(x) := \sup_{V\in\mathcal{V}(x_0)} \inf_{x\in V} f(x),$$
donde $\mathcal{V}(x_0)$ es el conjunto de entornos de x_0.

1.2.2. Regularización de una función

Definiremos la regularización sci y sci convexa de una función, desde el punto de vista de trabajo de J-P. Crouzeix E. Ocaña en [6].

Observación:

Sea $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función, consideremos la familia de funciones
$$\mathcal{I} = \{g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : g \text{ es sci y } g(x) \le f(x), \text{para todo } x \in X\}.$$
Claramente este conjunto es no vacio pues $g = -\infty$ pertenece al conjunto.

Definición 1.8. *Se define la regularización sci de* f*, a la función* $\bar{f}\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *definida como*

$$\bar{f}(x) := \sup_{g\in\mathcal{I}}\{g(x)\}.$$

Textualmente la regularización sci de f, es la mayor función sci que está acotada superiormente por f.

Proposición 1.2. *Se tiene* $epi(\bar{f}) = \overline{epi(f)}$.

Proposición 1.3. f *es sci en* x_0 *si y solo si* $f(x_0) = \bar{f}(x_0)$

Prueba: Por definición tenemos que $\bar{f} \leq f$. Supongamos $\bar{f}(x_0) < f(x_0)$, consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{f}(x_0) < \lambda < f(x_0).$$

Como $(x_0, \bar{f}(x_0)) \in epi(\bar{f})$, entonces por la proposición anterior se tiene que para toda vecindad V de x_0, $epi(f) \cap [V \times (-\infty, \lambda)] \neq \emptyset$. Es decir existe $x \in V$ y $\mu < \lambda$ tal que $f(x) \leq \mu < \lambda$. Esto contradice la condición de que f sea sci en x_0. Reciprocamente, tomando $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < f(x_0) = \bar{f}(x_0)$, como $\bar{f}$ es sci, tenemos que existe una vecindad V de x_0 tal que para todo $x \in V$, se tiene $\lambda < \bar{f}(x) \leq f(x)$. Es decir f es sci en x_0. □

El siguiente teorema es un resultado clásico del análisis convexo, que más allá del resultado en sí, nos indica que para poder obtener el menor valor de la función, debemos de trabajar con funciones cercanas a ser una función sci.

Teorema 1.6 (Weierstrass)**.** *Sea* $f\colon M \subset X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *una función sci, donde* M *es un conjunto compacto. Entonces el conjunto de minimizadores*

$$Argmin(f) := \{\bar{x} \in M : f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in M\},$$

es no vacio.

Prueba: Sea $m = \inf_{x\in M} f(x)$. Si $m = +\infty$, entonces $f = +\infty$ y $Argmin(f) = M$. Ahora si $m < +\infty$, para $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in M$ tal que $m \leq f(x_n) < m + \dfrac{1}{n}$. Como $(x_n) \subset M$ y M es compacto, tenemos que existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ convergente en M. Si $x_{n_k} \longrightarrow \bar{x}$ entonces tomando límite tenemos que

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} f(x_{n_k}) \leq \lambda.$$

$\square$

Similarmente definimos la regularización sci convexa de una función $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Observación:

Considerando el conjunto $\mathcal{J} = \{h\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : h$ es sci, convexa y $h(x) \leq f(x), \forall x \in X\}$. Claramente este conjunto es no vacio pues $g = -\infty$ le pertenece.

Definición 1.9. *Se define la regularización convexa y sci de f, a la función $\overline{co}f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como*

$$\overline{co}f(x) := \sup_{h \in \mathcal{J}}\{h(x)\}.$$

Textualmente la regularización sci convexa de f, es la mayor función sci y convexa que esta acotada superiormente por f.

Observemos que $\overline{co}f(x) \leq \bar{f}(x) \leq f(x), \forall x \in X$.

Proposición 1.4. *Se tiene que $epi(\overline{co}(f)) = \overline{co}(epi(f))$.*

Prueba: Como $\overline{co}(f) \leq f$, entonces $epi(f) \subset epi(\overline{co}(f))$, como $\overline{co}(f)$ es sci y convexa, entonces $\overline{co}(epi(f)) \subset epi(\overline{co}(f))$. Para probar la otra inclusión, definimos la función $g(x) := \inf_{(x,\lambda) \in \overline{co}(epi(f))}\{\lambda\}$. Esta función es convexa y sci y además $epi(g) = \overline{co}(epi(f))$. Así tenemos $g \leq \overline{co}(f)$. Luego,

$$epi(\overline{co}(f)) \subset epi(g) = \overline{co}(epi(f)).$$

Por lo tanto se tiene que $epi(\overline{co}(f)) = \overline{co}(epi(f))$. $\square$

1.2.3. Conjugada de Fenchel y subdiferencial de una función

Definición 1.10. *Sea $h\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función. Se define la conjugada de Fenchel o conjugada de h a la función $h^*\colon X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como*

$$h^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - h(x)\}.$$

Sean las funciones $h_1, h_2\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

- Si $h_1 \leq h_2$ entonces $h_2^* \leq h_1^*$.

- Si $c > 0$ tenemos que para todo $x^* \in X^*$, $(ch)^*(x^*) = ch^*(c^{-1}x^*)$, además si para todo $x \in X$ se define $f(x) := h(cx)$, tenemos que para todo $x^* \in X^*$, $f^*(x^*) = h^*(c^{-1}x^*)$.
- Si $\ell \in X^*$, tenemos que para todo $x^* \in X^*$, $(h+\ell)^*(x^*) = h^*(x^* - \ell)$.
- Si $\bar{x} \in X$, se define $f(x) := h(x+\bar{x})$ entonces tenemos que para todo $x^* \in X^*$, $f^*(x^*) = h^*(x^*) - \langle x^*, \bar{x}\rangle$.

Ejemplo 1.2. *Veamos los siguientes ejemplos:*

1. *Dada la función indicadora de C, I_C. Se tiene que $\sigma_C(x) = I_C^*(x)$. Es decir la conjugada de una función indicadora es una función soporte.*
2. *Sea σ_S la función soporte de $S \subset X$. Se tiene que $\sigma_S^* = I_C$, donde $C = \overline{co}(S)$.*
3. *Si$X = \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{1}{p}|x|^p$, donde $p \in (1, +\infty)$, tenemos que $f^*(x^*) = \dfrac{1}{q}|x|^q$ donde $q = (1 - \dfrac{1}{p})^{-1}$.*

Definición 1.11. *Sea $f \colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función, se define la biconjugada de f, denotada por f^{**}, a la conjugada de Fenchel de f^*, es decir $f^{**} = (f^*)^*$.*

A continuación unos resultados que nos llevan a relaciónar el conjunto de minimizadores con la congujada de Fenchel.

Teorema 1.7. *Para toda función $f \colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se tiene que $f^{**} \leq f$. Si f es sci y convexa entonces $f^{**} = f$. Si $f = +\infty$ ó $f = -\infty$, $f^{**} = f$.*

Prueba: Sean $x \in X$ y $x^* \in X^*$, por definición se tiene que $-f^*(x^*) \leq f(x) - \langle x^*, x\rangle$ por lo tanto $f^{**}(x) = \sup\limits_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\} \leq f(x)$.

Ahora supongamos que existe un $x_0 \in X$ tal que $f^{**}(x_0) < f(x_0)$, y tomamos un $r \in \mathbb{R}$ tal que $f^{**}(x_0) < r < f(x_0)$. Como f es convexa existe un $x^* \in X^*$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $r < \langle x^*, x_0\rangle - c$ y para todo $x \in X$, $\langle x^*, x\rangle - c \leq f(x)$. Entonces se tiene que $f^*(x^*) \leq c$. Luego, $r < \langle x^*, x_0\rangle - c \leq \langle x^*, x_0\rangle - f^*(x^*) \leq f^{**}(x_0)$, lo cual es una contradicción pues $f^{**}(x_0) < r$. Si $f = +\infty$, rápidamente se tiene que $f^{**} = \infty$, lo mismo cuando $f = -\infty$. $\square$

Corolario 1.1. *Para toda función* $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *acotada por debajo por una función afín continua, se tiene que la mayor función convexa y sci acotada superiormente por* f, *es* f^{**}. *Si* f *no esta acotada por debajo por alguna función afín continua, entonces* $f^{**} = -\infty$.

Corolario 1.2. *Para toda función* $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *se tiene que* $f^{***} = f^*$.

Definición 1.12. *Sea* $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *una función convexa. Se define la subdiferencial de* f *en el punto* $\bar{x} \in dom(f)$ *al conjunto*

$$\partial f(\bar{x}) = \{\bar{x}^* \in X^* : \langle \bar{x}^*, x - \bar{x}\rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in X\}.$$

Se dice que una función es subdiferenciable en $\bar{x}$ *si* $\partial f(\bar{x})$ *es no vacio.*

Teorema 1.8 (Fenchel - Young)**.** *Sea una función* $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *y sean* $x \in X$ *y* $x^* \in X^*$ *cualesquiera entonces se tiene*

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle.$$

Si $f(x) \in \mathbb{R}$, *se tiene la igualdad si y solo si* $x^* \in \partial f(x)$. *Además,* $x^* \in \partial f(x)$ *implica* $x \in \partial f^*(x^*)$.

Prueba: Por definición se tiene $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle$ para cualquier $x \in X$ y $x^* \in X^*$. Sea $x \in X$ fijo tal que $f(x) \in \mathbb{R}$. Si $f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$, tenemos por definición que para todo $w \in X$,

$$f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x) \geq \langle x^*, w\rangle - f(w).$$

Así, para todo $w \in X$, $f(w) \geq f(x) + \langle x^*, w - x\rangle$. Esto es $x^* \in \partial f(x)$. Ahora, si $x^* \in \partial f(x)$, entonces para todo $w \in X$, $f(w) \geq f(x) + \langle x^*, w - x\rangle$. De esto tenemos que para todo $w \in X$, $\langle x^*, w\rangle - f(w) \leq \langle x^*, x\rangle - f(x)$. Asi, por definición tenemos que $f^*(x^*) \leq \langle x^*, x\rangle - f(x)$. Así $f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x)$. $\square$

Corolario 1.3. *Si* $f = f^{**}$ *entonces* $x^* \in \partial f(x)$ *si y solo si* $x \in \partial f^*(x^*)$.

Corolario 1.4. *Si* $f(0) = f^{**}(0) \in \mathbb{R}$ *el conjunto de minimizadores de* f^* *es* $\partial f(0)$. *Si* $f^{**} = f$ *y* $f^*(0) \in \mathbb{R}$, *entonces* $\partial f^*(0)$ *es el conjunto de minimizadores de* f.

Observación: Si $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, tenemos que $\bar{x}^* \in \partial f(\bar{x})$ si y sólo si la función afín $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(x) = \langle \bar{x}^*, x - \bar{x} \rangle + f(\bar{x})$ cumple que $\varphi \leq f$ y $\varphi(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

Teorema 1.9. *Dada $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función. Si $\partial f(x) \neq \emptyset$, entonces $f^{**} = f$. Además si $f^{**}(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ tenemos que $\partial f(x) = \partial f^{**}(x)$ y $x^* \in \partial f(x)$ si y solo si $x \in \partial f^*(x^*)$.*

Corolario 1.5. *Si $f = f^{**}$, $x^* \in \partial f(x)$ si y solo si $x \in \partial f^*(x^*)$.*

1.2.4. Conos

Definición 1.13. *Sea $A \subset X$ un subconjunto. El cono más pequeño que contiene a A se define como*

$$cone(A) := \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda A.$$

Y $\overline{cone}(A)$ vendría a ser el cono cerrado más pequeño que contiene a A.

Claramente se tiene que $\overline{cone}(A) = \overline{cone(A)}$.

Cono Tangente

Definición 1.14. *Sea $S \subset X$ y $a \in \overline{S}$. Decimos que el conjunto denotado por $T_S(a)$, es el cono tangente (o cono cotingente) de S en el punto a si esta compuesto por $v \in X$ tales que existen sucesiones $(v_n) \subset X$ y $(t_n) \subset \mathbb{R}_{++}$ tales que $v_n \longrightarrow v$ y $t_n \longrightarrow 0$ y $a + t_n v_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observación 1.1. *Si $a \in int(S)$, entonces $T_S(a) = X$.*

Proposición 1.5. *Se cumple lo siguiente:*

1. *Si $S \subset S'$ y $a \in S$, entonces $T_S(a) \subset T_{S'}(a)$.*
2. *Si tenemos subconjuntos $S_i \subset X$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $a \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} S_i}$, entonces $T_{\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)}(a) = \bigcup_{i \in I(a)} T_{S_i}(a)$, donde $I(a) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : a \in \overline{S_i}\}$.*
3. *Si tenemos subconjuntos $S_i \subset X$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $a \in \overline{\bigcap_{i=1}^{n} S_i}$, entonces $T_{\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right)}(a) \subset \bigcap_{i=1}^{n} T_{S_i}(a)$.*

4. Si $g \in C^1(X,Y)$, $S \subset X$, $a \in \overline{S}$ y $M \subset Y$, entonces $\overline{g'(a)(T_S(a))} \subset T_{g(S)}(g(x))$ y $T_{(g^{-1}(M))}(x)) \subset g'(x)^{-1}T_M(g(x))$.

Ejemplo 1.3. *Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$. Se tiene que $T_S((0,0)) = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$.*

Proposición 1.6. *Si S es un conjunto convexo y $a \in \overline{S}$, entonces*

$$T_S(a) = \overline{cone}(\overline{S} - a)$$

Conos asintóticos y funciones asintóticas

La noción de conos y funciones asintóticas nos será útil para estudiar una aplicación directa del resultado del siguiente capítulo.

Definición 1.15. *Sea $C \in X$, se define el cono asintótico de C,al conjunto*

$$C^\infty := \{u \in X : \exists t_k \downarrow 0, \exists\, x_k \in C \text{ tal que } t_k x_k \to u\}.$$

Si $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una función, se define la función asintótica de f, a $f^\infty\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que satisface $epi(f^\infty) = epi(f)^\infty$.

Ahora veremos algunas propiedades que se desprenden de las definiciones anteriores.

Proposición 1.7. *Sea $C \subset X$ y $x_0 \in C$, un conjunto no vacío. Tenemos:*

- *C^∞ siempre es un cono cerrado.*
- *Dado C un conjunto convexo y cerrado, y sea $x_0 \in C$, entonces*

  $$C^\infty = \{u \in X : x_0 + \lambda u \in C, \forall\, t > 0\}.$$

  En efecto, sea $u \in C^\infty$, existen $t_k \downarrow 0$ y $x_k \in C$, $\forall k \in \mathbb{N}$ tales que $t_k x_k \longrightarrow u$. Sea $t > 0$, como C es convexo tenemos que para k suficientemente grande $(1 - \lambda t_k)x_0 + \lambda t_k x_k \in C$, tomando límite, tenemos que $x_0 + \lambda u \in C$ pues C es cerrado. Por otra parte si $u \in X$ tal que para todo $\lambda > 0$, $x_0 + \lambda u \in C$, tomamos $t_k = \dfrac{1}{k}$ y $x_k = x_0 + ku \in C$ tenemos que $t_k x_k \longrightarrow u$.
- *Dados $\{C_i\}$, con $i = 1, \dots m$, una familia finita de conjuntos en X, entonces*

  $$(\bigcup_{i=1}^{m} C_i)^\infty = \bigcup_{i=1}^{m} (C_i)^\infty.$$

En efecto, sea $u \in (\bigcup_{i=1}^{m} C_i)^{\infty}$*, entonces existen* $t_k \downarrow 0$ *y* $x_k \in \bigcup_{i=1}^{m} C_i$*. Existe una subsucesión* (x_{k_q}) *de* (x_k) *tal que* $x_{k_q} \in C_j$ *para todo* $q \in \mathbb{N}$ *y para algún* $j \in [1, \ldots, m]$*. Así,* $t_{k_q} x_{k_q} \longrightarrow u$*, es decir* $u \in C_j^{\infty}$*.*
Por otro lado si $u \in \bigcup_{i=1}^{m} (C_i)^{\infty}$*, entonces para algún* $j \leq m$*,* $j \in \mathbb{N}$ *existe* $t_k \downarrow 0$ *y* $x_k \in C_j$ *tal que* $t_k x_k \longrightarrow u$ *pero* $x_k \in \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ *entonces* $u \in (\bigcup_{i=1}^{m} C_i)^{\infty}$*. Así queda demostrada la propiedad.*

- *Dados* $\{C_i\}$ *con* $i \in I$*, (*I *un intervalo) una familia arbitraria de conjuntos en* X*, entonces*

$$(\bigcap_{i \in I} C_i)^{\infty} \subseteq \bigcap_{i \in I} (C_i)^{\infty}.$$

Además si cada C_i *es cerrado y convexo y se tiene que* $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$*, entonces*

$$(\bigcap_{i \in I} C_i)^{\infty} = \bigcap_{i \in I} (C_i)^{\infty}.$$

- *Si* $X = \mathbb{R}^n$ *entonces* $C^{\infty} = \{0\}$ *sí y solo si* C *es acotado.*

Proposición 1.8. *Para una función* $f \colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$*, se tiene:*

$$f^{\infty}(x) = \inf\{\liminf_{k \longrightarrow +\infty} t_k f(\frac{x_k}{t_k}) : t_k \downarrow 0, x_k \to x\}.$$

Prueba:
Definimos la función $g \colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como $g(x) = \inf\{\liminf_{k \to +\infty} t_k f(\frac{x_k}{t_k}) : t_k \downarrow 0, x_k \longrightarrow x\}$, vamos a probar que $epi(g) = epi(f)^{\infty}$. Esto significa que $g(x) = f^{\infty}(x)$.
En efecto, sea $(x, \lambda) \in (epi(f))^{\infty}$, entonces existen $((x_k, \lambda_k))_{k \in \mathbb{N}} \subset epi(f)$ y $t_k \downarrow 0$ tal que $(x, \lambda) = \lim_{k \longrightarrow \infty} t_k (x_k, \lambda_k)$. Lo cual tenemos que $x = \lim_{k \longrightarrow \infty} t_k x_k$ y $f(x_k) \leq \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$g(x) \leq \liminf_{k \longrightarrow +\infty} t_k f(\frac{x_k}{t_k}) \leq \liminf_{k \longrightarrow +\infty} t_k \lambda_k = \lambda.$$

Es decir, $(x, \lambda) \in epi(g)$. Reciprocamente, si $(x, \lambda) \in epi(g)$, por definición, existen suceciones $t_k \downarrow 0, x_k \longrightarrow x$ tal que $(t_k f(\frac{x_k}{t_k}))$ converge y $\lim_{k \longrightarrow +\infty} t_k f(\frac{x_k}{t_k}) \leq \lambda$. Tomando $\varepsilon > 0$, tenemos que para k suficientemente grande $t_k f(\frac{x_k}{t_k}) \leq \lambda + \varepsilon$, de esto claramente vemos que $(\frac{x_k}{t_k}, \frac{(\lambda+\varepsilon)}{t_k}) \in epi(f)$ para k suficientemente grande. Entonces $(x, \lambda+\varepsilon) = \text{lím}_{k\longrightarrow+\infty} t_k(\frac{x_k}{t_k}, \frac{(\lambda+\varepsilon)}{t_k})$. Esto implica que $(x, \lambda+\varepsilon) \in epi(f)^\infty$ y como $\varepsilon > 0$ es cualquier valor, entonces $(x, \lambda) \in epi(f)^\infty$. $\square$

El siguiente teorema nos facilita el manejo analítico de la función asintótica de una función f. Esta caracterización sirve para definir un nuevo tipo de función asintótica, tal como se verá en el capítulo siguiente.

Teorema 1.10. *Sea $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función propia, sci y convexa. Entonces para todo $x \in X$ se tiene*

$$\begin{aligned} f^\infty(x) &= \sup_{\lambda>0} \frac{f(x_0+\lambda x)-f(x_0)}{\lambda} \\ &= \text{lím}_{\lambda+\infty} \frac{f(x_0+\lambda x)-f(x_0)}{\lambda}, \end{aligned}$$

con algún $x_0 \in dom(f)$.

P-Convexidad

Definición 1.16. *Sea X un espacio de Banach y $P \subset X$ un cono convexo cerrado. Se dice que P induce un orden parcial " $\leq_P$ " en X definido como $x \leq y$ si y solo si $y - x \in P$, para cada par $x, y \in X$.*

Definición 1.17. *Sean X, Y dos espacios de Banach, $P \subset Y$ un cono convexo cerrado que induce un orden parcial en Y y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Se dice que f es $P-convexa$ si para cada $x, y \in X$ y $t \in [0,1]$ se tiene que*

$$f(tx + (1-t)y) \leq_P tf(x) + (1-t)f(y).$$

1.3. Diferenciabilidad

En esta sección definiremos la diferenciabilidad para funciones que van de un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ a otro normado $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Además de dos teoremas clásicos que caracterizan la convexidad de una función diferenciable.

Definición 1.18. *Sean* $U \subset X$ *un subconjunto abierto,* $x_0 \in U$ *y* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una función con* $U \subset dom(f)$*. Decimos que* f *es Gâteaux* $diferenciable$ *en* x *si para todo* $h \in X$ *existe el límite*

$$f'(x_0)(h) := \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

y $f'(x_0)\colon X \longrightarrow Y$ *definida como arriba, es una aplicación lineal y continua. Entonces* $f'(x_0)$ *es llamada la derivada de Gâteaux de* f *en* x_0*.*
Decimos que f *es Gâteaux* $diferenciable$ *en* U *si para cada* $x \in U$*,* f *es Gâteaux* $diferenciable$ *en* x*.*

En un caso más general, tenemos lo siguiente.

Definición 1.19. *Sean* $U \subset X$ *un subconjunto abierto,* $x_0 \in U$ *y* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una función con* $U \subset dom(f)$*. Decimos que* f *es Frechet diferenciable en* x_0*, si existe una aplicación* $f'(x_0)\colon X \longrightarrow Y$ *lineal y continua, tal que el límite*

$$\lim_{\|h\|_X \mapsto 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Entonces $f'(x_0)$ *es llamada la derivada de Frechet de* f *en* x_0*. Decimos que* f *es Frechet diferenciable en* U*, si para cada* $x \in U$*,* f *es Frechet diferenciable en* x*.*

A continuación exponemos dos resultados que relacionan estas derivadas con la convexidad.

Teorema 1.11. *Sean* $S \subset X$ *un subconjunto no vacio tal que* $S \subset dom(f)$ *y* $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *una función. Se tiene:*

1. *Sea* $x_0 \in S$ *un punto mínimo de* f*. Si* f *es* $G\hat{a}teaux$ *diferenciable en* x_0*, en cualquier dirección* $x - x_0$*, con* $x \in S$*, entonces*

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \;\; \forall s \in S \quad (A).$$

2. *Si* S *es un conjunto convexo y* f *una función convexa,* $G\hat{a}teaux$ *diferenciable en* x_0*, en cualquier dirección* $x - x_0$*, con* $x \in S$ *que satisface la desigualdad* (A)*, entonces* x_0 *es un punto mínimo de* f *en* S*.*

Teorema 1.12. *Sea* $S \in X$ *un conjunto abierto y* $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función* $Frechet$ $diferenciable$*. Si* $C \subset S$*, es un conjunto convexo. Entonces*

1. *f es convexo en C si y solo si*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall\, x, x_0 \in C.$$

2. *Además considerando la función $f' \colon C \longrightarrow Y$, tenemos que f' es monótona, es decir*

$$(f'(x) - f'(y))(x - y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in C.$$

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE DUALIDAD LAGRANGIANA

Se observa que en [1], se define el problema primal y dual en términos de los espacios X e Y y de funciones $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (función objetivo) y $g\colon X \longrightarrow Y$(restricción).
En esta parte, agregaremos la condición de igualdad, debido a que el trabajo de [2] lo utiliza, que viene dad bajo una función $h\colon X \longrightarrow Z$ y para nuestro propósito definiremos el problema en los espacios X e $Y \times Z$. Consideraremos $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ nuestra función objetivo y $m\colon X \longrightarrow Y\times Z$ nuestras restricciones (cónica e igualdad). Viéndolo de manera análoga a [1] $m = (g, h)$. En Y se tiene el cono de restricciones P, ahora consideraremos el cono de restricciones en $Y \times Z$, como $P\times\{0_Z\}$ para simplicidad solo colocaremos $P\times 0$. Bajo esta aclaración, formularemos el problema.

2.1. Formulación del problema primal

Consideramos el problema de optimización

$$\mu = \inf_{x\in K} f(x), \tag{2.1}$$

donde $K = \{x \in C : m(x) \in -(P \times 0)$ es el conjunto factible o conjunto de restricciones y supondremos que es un conjunto no vacio. Además asumiremos que $\mu \in \mathbb{R}$ y $C \subset domf$.

El problema dual se define como

$$\nu = \sup_{\lambda \in (P \times \{0_Z\})^*} \inf_{x \in C} \{f(x) + \langle \lambda, m(x) \rangle\}, \tag{2.2}$$

donde $(P \times 0)^*$ es el cono dual de $P \times 0$.

Asociamos al problema primal el lagrangiano definido como

$$L(\gamma, \lambda, x) = \gamma f(x) + \langle \lambda, m(x) \rangle,$$

donde $\gamma \geq 0$ y $\lambda \in (P \times 0)^*$.

En consecuencia a la definición anterior tenemos,

$$\inf_{x \in C} L(\gamma, \lambda, x) \leq \inf_{x \in K} L(\gamma, \lambda, x) \leq \gamma \inf_{x \in K} f(x) = \gamma \mu, \tag{2.3}$$

para todo $\gamma \geq 0$ y todo $\lambda \in (P \times 0)^*$.

Para $\gamma = 1$,

$$\nu \leq \mu. \tag{2.4}$$

Esto nos permite definir la noción de salto de dualidad y dualidad fuerte.

Definición 2.1. *Decimos que no hay salto de dualidad entre (2.1) y (2.2) cuando* $\mu = \nu$.
Decimos que (2.1) tiene la propiedad de dualidad fuerte en el dual si $\nu = \mu$ *y el problema dual (2.2) admite solución y (2.1) tiene la propiedad de dualidad fuerte en el primal si* $\nu = \mu$ *y el problema primal admite solución.*

Con el fin de conseguir la igualdad en 2.3 para algún $\gamma \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda \in (P \times 0)^*$, necesitamos establecer condiciones para asegurar que se cumpla

$$L(\gamma, \lambda, x) - \lambda \mu = \gamma(f(x) - \mu) + \langle \lambda, m(x) \rangle \geq 0, \ \forall x \in C.$$

Donde podemos asegurar que conseguido un $\gamma > 0$, implica dualidad fuerte en el dual.

A continuación definiremos conjuntos cuya utilidad es necesaria para desarrollar la teoria de dualidad.

Definición 2.2. *Considerando* $C subset X$ *no vacio y* $F := (f, m)$ *, definimos* $\mathcal{F}_{P \times 0} = F(C) + \mathbb{R}_+ \times P \times 0$ *y* $\mathcal{E}_\rho = \mathcal{F}_{P \times 0} - \rho(0, 1), \rho \in \mathbb{R}$.

Para cualquier $\rho \in \mathbb{R}$, tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_\rho \cap -\mathbb{R}_{++} \times \{0 \times 0\} & = & \emptyset \\ & \Updownarrow & \\ \mathcal{E}_\rho \cap -(\mathbb{R}_{++} \times P \times 0) & = & \emptyset \\ & \Updownarrow & \\ cone(\mathcal{E}_\rho) \cap -(\mathbb{R}_{++} \times P \times 0) & = & \emptyset. \end{array}$$

Asumiendo $\mu \in \mathbb{R}$ y por lo anterior, tenemos

$$\begin{array}{rcl} (F(C) - \mu(0,1)) \cap -(\mathbb{R}_{++} \times P \times 0) & = & \emptyset \\ & \Updownarrow & \\ \mathcal{E}_\mu = (\mathcal{F}_{P\times 0} - \mu(0,1)) \cap -(\mathbb{R}_{++} \times P \times 0) & = & \emptyset \\ & \Updownarrow & \\ cone(\mathcal{E}_\mu) \cap -(\mathbb{R}_{++} \times \{0 \times 0\}) & = & \emptyset. \end{array}$$

Por ende, $cone(\mathcal{E}_\mu) \neq \mathbb{R} \times Y \times Z$.

De manera análoga a [1] definiremos la función valor óptimo.

Definición 2.3. *Se define la función valor $\psi\colon Y \times Z \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ del problema 2.1 como,*

$$\psi(a.b) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in K(a,b)} f(x), & si\ K(a,b) \neq \emptyset. \\ +\infty, & otro\ caso. \end{cases}$$

donde

$$K(a,b) = \{x \in C : m(x) \in (a,b) - (P \times 0)\}.$$

Claramente cuando $(a,b) = (0_Y, 0_Z)$, tenemos que $\mu = \psi(0_Y, 0_Z)$, además $K(a,b) \neq \emptyset$ sí y solo si $(a,b) \in m(C) + P \times 0$ y por tanto,

$$dom(\psi) = \{(a,b) \in Y \times Z : \psi(a,b) < +\infty\} = m(C) + P \times 0,$$

considerando $C \subset dom f$.

El siguiente resultado nos muestra la necesidad de definir la función valor.

Teorema 2.1. *Si $K(0_Y, 0_Z) \neq \emptyset$ entonces $\nu = \psi^{**}(0,0)$.*

Veamos algunas propiedades geométricas y topológicas de la función valor.

Teorema 2.2. *Considerando las definiciones anteriores, tenemos*

1. $(r,a,b) \in epi(\psi)$ *si y solo si* $(r+\dfrac{1}{k},a,b) \in F(C)+\mathbb{R}_+ \times P \times 0, \forall k \in \mathbb{N}$. *Además si* $F(C)+\mathbb{R}_+ \times P \times 0$ *es convexo entonces* ψ *es convexo.*

2. $F(C)+\mathbb{R}_+ \times P \times 0 \subset epi\psi \subset \overline{F(C)+\mathbb{R}_+ \times P \times 0}$.

   Consecuentemente,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{E}}_\mu &= \overline{epi\,\psi} - \mu(0,0,1) = epi\overline{\psi} - \mu(0,0,1);\\ \overline{co}\mathcal{E}_\mu &= \overline{co}(epi\,\psi) - \mu(0,1) = epi(\overline{\psi}) - \mu(0,1);\\ \overline{cone}(\mathcal{E}_\mu) &= \overline{cone}(epi\,\psi - \mu(0,0,1));\\ \overline{cone}(co\,\mathcal{E}_\mu) &= \overline{cone}(\overline{co}\,epi\,\psi - \mu(0,0,1)).\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

RESULTADOS SOBRE DUALIDAD FUERTE

3.1. Una condición necesaria y suficiente: Caso General

En esta sección se caracteriza la semicontinuidad inferior de la funcion valor ψ, el salto de dualidad y la dualidad fuerte en términos de las propiedades topológicas y geométricas del conjunto $F(C) + \mathbb{R}_+ \times (P \times 0)$, más preciso haremos uso de la clausura de $co\,(F(C)) + \mathbb{R}_+ \times (P \times 0))$ y la subdiferencial de la función valor.

El siguiente teorema nos caracteriza cuando no existe salto de dualidad.

Teorema 3.1. *Considerando $\mu \in \mathbb{R}$, entonces*

1. $\overline{\psi}(0,0) = \psi(0,0)$ *si y solo si* $\overline{\mathcal{E}}_\mu \cap (-\mathbb{R}_{++} \times (0 \times 0)) = \emptyset$.
2. $\nu = \overline{co}\psi(0,0)$.
3. *No existe salto de dualidad, es decir,* $\overline{co}\psi(0,0) = \psi(0,0)$ *si y solo si*

$$\overline{co}(\mathcal{E}_\mu) \cap (-\mathbb{R}_{++} \times (0 \times 0)) = \emptyset.$$

.

El siguiente teorema nos caracteriza cuando el problema 2.1 tiene dualidad fuerte en el dual.

Teorema 3.2. *Considerando $\mu = \psi(0,0) \in \mathbb{R}$, tenemos las siguientes equivalencias.*

1. *Tenemos dualidad fuerte, es decir, existe $\lambda_0^* \in (P \times 0)^*$ tal que*

$$f(x) + \langle \lambda_0^*, m(x) \rangle \geq \mu, \tag{3.1}$$

   $\forall x \in C$;

2. $\overline{cone}(co\,\mathcal{E}_\mu) \cap (-\mathbb{R}_{++} \times (0 \times 0)) = \emptyset$

3. $\partial\psi(0,0) \neq \emptyset$.

3.2. Una condición necesaria usando P-convexidad

En esta sección hablaremos de otro resultado visto en [2].

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $(Z, \|\cdot\|_Z)$ espacios reales de Banach ordenados por los conos convexos y cerrados X^+, P y D, respectivamente. Sea C un subconjunto convexo de X, $f\colon C \to \mathbb{R}$, $g\colon C \to Y$ y $h\colon C \to Z$, funciones. El conjunto de restricciones, o conjunto factible sera definido como

$$K := \{x \in C : g(x) \in -P, h(x) = 0_Z\}.$$

Ahora el problema primal que estudiaremos será el mismo, es decir,

$$\mu = \inf_{x \in K} f(x),$$

con la condición que ahora aseguramos que existe $x_0 \in K$ tal que

$$f(x_0) = \inf_{x \in K} f(x).$$

Por lo que en realidad el problema podría escribirse como

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x).$$

De manera similar, podemos decir que el problema dual queda establecido comoa

$$\eta = \sup_{\substack{u \in P^* \\ v \in Z^*}} \inf_{x \in C} [f(x) + \langle u, g(x) \rangle + \langle v, h(x) \rangle].$$

Se busca un $\bar{u} \in P^*$ y $\bar{v} \in Z^*$ tal que

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x) = \max_{\substack{u \in P^* \\ v \in Z^*}} \inf_{x \in C} [f(x) + \langle u, g(x) \rangle + \langle v, h(x) \rangle]$$

Definición 3.1. *Sean f, g, h como la descripción anterior y con derivada direccional en $x_0 \in K$ para toda dirección $x - x_0$, con $x \in C$ arbitrario. Denotamos a $T_M(x)$ como el cono tangente de M en el punto x. Decimos que se cumple la condicionS' en $x_0 \in K$ si*

$$T_{M'}(0, \theta_Y, \theta_Z) \cap (\mathbb{R}^{--} \times \{\theta_Y\}) \times \{\theta_Z\} = \emptyset,$$

donde

$$M' = \{(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha, g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + y, h'(x_0)(x - x_0)) : \\ x \in C \setminus K, \alpha \geq 0, y \in P\}.$$

Una defininción similar a la definición anterior es la siguiente.

Definición 3.2. *Sean f, g, h funciones Gâteaux diferenciable en el punto $x_0 \in K$. Decimos que se cumple la condición mS' en $x_0 \in K$ si*

$$T_{M^1}(0, \theta_Y, \theta_Z) \cap (\mathbb{R}^{--} \times \{\theta_Y\} \times \{\theta_Z\}) = \emptyset,$$

donde

$$M^1 = \{(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha, g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + y, h'(x_0)(x - x_0) + z) : \\ x \in C \setminus K, \alpha \geq 0, y \in P, z \in D\}.$$

Teorema 3.3. *Sea C un subconjunto abierto y convexo de X, Y y Z espacios de Banach ordenados por los conos cerrados y convexos P y D, respectivamente. Sea $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y Frechét diferenciable en x_0, $g\colon C \longrightarrow Y$ y $h\colon C \longrightarrow Z$ funciones convexas en P y D respectivamente, ambas Gateaux diferenciable en x_0 y se cumple las siguientes condiciones:*

i) $f'(x_0)(x) \leq 0$, *para todo* $x \in C \cap X^+$,

ii) $g'(x_0)(x) \in -P$, *para todo* $x \in C \cap X^+$,

iii) $h'(x_0)(C \cap X^+) = D$,

iv) $\lim\limits_{\substack{\|\lambda(x - x_0)\|_X \to +\infty \\ x \in K}} \|h'(x_0)(\lambda(x - x_0))\|_Z = +\infty$.

Si la condicion S' se cumple para el punto mínimo $x_0 \in K$, entonces se tiene dualidad fuerte en el problema.

Demostración: Empecemos demostrando que

$$T_{M^*}(0,\theta_Y,\theta_Z) \cap (-\mathbb{R}_{++} \times \theta_y \times \theta_Z) = \emptyset$$

donde

$$M^* = \{(f'(x_0)(x-x_0)+\alpha, g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+y, h'(x_0)(x-x_0)) : x \in C,\ \alpha \geq 0,\ y \in P\}$$

En efecto, sea $(\ell,\theta_Y,\theta_Z) \in T_{M^*}(0,\theta_Y,\theta_Z)$. Por definición tenemos:

$$\ell = \lim_n \lambda_n[f'(x_0)(x_n - x_0) + \alpha_n], \tag{3.2}$$

para las suceciones $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}_{++}$, $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ y $(x_n)_n \subset C$ tales que

$$\lim_n [f'(x_0)(x_n - x_0) + \alpha_n] = 0. \tag{3.3}$$

Sin pérdida de generalidad afirmamos que $\lim_n \lambda_n = +\infty$, ya que si $(\lambda_n)_n$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, se obtiene $\ell = 0$ por (3.2) y (3.3).

Por otra parte, si una subsucesión $(x_{k_n})_n$ de $(x_n)_n$ pertenece a $C \setminus K$, entonces $(\ell,\theta_Y,\theta_Z) \in T_{M'}(0,\theta_Y,\theta_Z)$. Como S' se cumple, concluimos que $\ell \geq 0$. En consecuencia asumiremos que $(x_n)_n \subset K$.
De la parte inicial también tenemos:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda_n[h'(x_0)(x_n - x_0)] = \theta_Z. \tag{3.4}$$

Por la condición (iv) y la linealidad de $h'(x_0)$, obtenemos que la sucesión $h_n = \lambda_n(x_n - x_0)$ con $n \in \mathbb{N}$, esta acotada en X. Como $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ obtenemos,

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x_0\|_X = 0.$$

Teniendo en cuenta que $f(x_0) = \min_{x\in K} f(x)$ y $(x_n)_n \subset K$ se sigue que,

$$\begin{aligned}
\lambda_n[f'(x_0)(x_n - x_0) + \alpha_n] &\geq \lambda_n[f'(x_0)(x - x_0)] \\
&= \lambda_n[f(x_n) - f(x_0) - (f(x_n) - f(x_0) - f'(x_0)(x_n - x_0))] \\
&\geq -\lambda_n[f(x_n) - f(x_0) - f'(x_0)(x_n - x_0)] \\
&= \|h_n\|[\frac{f(x_n) - f(x_0) - f'(x_0)(x_n - x_0)}{\|x_n - x_0\|}].
\end{aligned}$$

Tomando límite a lo anterior, obtenemos que $\ell \geq 0$, en particular

$$(-1, \theta_Y, \theta_Z) \notin T_{M^*}(0, \theta_Y, \theta_Z).$$

Por (1.2), separamos a $(-1, \theta_Y, \theta_Z)$ y M^*, pues $M^* \subset T_{M^*}(0, \theta_Y, \theta_Z)$; es decir, existe $(\mu, y^*, z^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \times Z^*$ tal que

$$-\mu < 0 \leq \mu(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha) + \langle y^*, g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + y \rangle + \langle z^*, h'(x_0)(x - x_0) \rangle, \ \forall x \in C, \alpha \geq 0, y \in P.$$

Y notamos que $\mu > 0$.

Definiendo $\bar{u} = \frac{y^*}{\mu}$ y $\bar{v} = \frac{z^*}{\mu}$ tenemos que,

$$f'(x_0)(x - x_0) + \alpha + \langle \bar{u}, g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + y \rangle + \langle \bar{v}, h'(x_0)(x - x_0) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \alpha \geq 0, y \in P. \tag{3.5}$$

Ahora, tomando $\alpha = 0$ y $x = x_0$, tenemos

$$\langle \bar{u}, g(x_0) + y \rangle \geq 0, \ \ \forall y \in P,$$

lo cual implica que $\bar{u} \in P^*$.
Como C es subconjunto abierto de X y x_0 pertenece a C, existe una bola $B(\theta_X, r)$ centrada en el origen y de radio $r > 0$, tal que

$$x_0 + B(\theta_X, r) \subset C.$$

Reescribiendo (3.5) respecto lo anterior, tenemos

$$f'(x_0)(x) + \alpha + \langle \bar{u}, g(x_0) + g'(x_0)(x) + y \rangle + \langle \bar{v}, h'(x_0)(x) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in B(\theta_X, r). \tag{3.6}$$

Sea $x \neq 0$ un elemento fijo de S, y tomamos $\alpha = 0$, $y = -g(x_0)$ y $\bar{x} = \delta \dfrac{x}{\|x\|}$ donde $0 < \delta < r$, entonces (3.6) puede ser escrito como

$$\frac{\delta}{\|x\|}[f'(x_0)(x) + \langle \bar{u}, g'(x_0)(x) \rangle + \langle \bar{v}, h'(x_0)(x) \rangle] \geq 0,$$

asi tenemos,

$$f'(x_0)(x) + \langle \bar{u}, g'(x_0)(x) \rangle + \langle \bar{v}, h'(x_0)(x) \rangle \geq 0, \ \forall x \in C.$$

Si $0 \in C$, por 3.6 también tenemos el resultado de arriba.

Además, para $x \in C \cap X^{+}$ y de las condiciones $(i), (ii)$ y (iii) se observa que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq f'(x_0)(x) + \langle \bar{u}, g'(x_0)(x)\rangle + \langle \bar{v}, h'(x_0)(x)\rangle \\ &\leq \langle \bar{v}, h'(x_0)(x)\rangle. \end{aligned}$$

Así tenemos que $\bar{v} \in D^{*}$.

Considerando (3.5) con $\alpha = 0$, $y = \theta_Y$ tenemos

$$f'(x_0)(x-x_0)+\langle \bar{u}, g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)\rangle+\langle \bar{v}, h'(x_0)(x-x_0)\rangle \geq 0,\ \forall x \in C, y \in P. \tag{3.7}$$

Ahora como f, g, h son funciones convexas y $u \in P^{*}$ and $v \in D^{*}$, notamos que, el lagrangiano

$$\mathcal{L}(x,u,v) = f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle$$

también es convexo (necesariamente $\bar{u} \in P^{*}$ y $\bar{v} \in D^{*}$ permiten la convexidad de $\mathcal{L}(x, \bar{u}, \bar{v})$).

Ahora, aplicando [1, Theorem 3.8 (b)] a $\mathcal{L}(\cdot, \bar{u}, \bar{v})$, y considerando (2.7) y $x_0 \in K$, obtenemos

$$f(x_0) = \inf_{x \in C}[f(x) + \langle \bar{u}, g(x)\rangle + \langle \bar{v}, h(x)\rangle].$$

Para todo $u \in P^{*}$, $v \in Z^{*}$, tenemos

$$\begin{aligned} \inf_{x \in C}[f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle] &\leq \mathcal{L}(x_0, u, v) \leq f(x_0) \\ &= \inf_{x \in C}[f(x) + \langle \bar{u}, g(x)\rangle + \langle \bar{v}, h(x)\rangle]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \max_{\substack{u \in P^{*} \\ v \in Z^{*}}} \inf_{x \in C}[f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle] &\leq f(x_0) \\ &= \inf_{x \in C}[f(x) + \langle \bar{u}, g(x)\rangle + \langle \bar{v}, h(x)\rangle] \\ &\leq \max_{\substack{u \in P^{*} \\ v \in Z^{*}}} \inf_{x \in C}[f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle]. \end{aligned}$$

o

$$\min_{x \in K} = f(x_0) = \max_{\substack{u \in P^{*} \\ v \in Z^{*}}} \inf_{x \in C}[f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle].$$

□

Teorema 3.4. *Sean S un conjunto abierto y convexo de X, Y y Z estan ordenados por los conos convexos y cerrados P y D, respectivamente. Dadas $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional convexa, $g\colon S \longrightarrow Y$ y $h\colon S \longrightarrow Z$ funciones convexas respecto a C y D respectivamente, todas son funciones Gâteaux diferenciable en el punto $x_0 \in K$. Supongamos que*

- $f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$, *para todo* $x \in K$.

Si se cumple la condicion mS' en x_0, entonces hay dualidad fuerte en el problema.

Demostración: Como C es un conjunto convexo y f, g y h son funciones $Gâteaux\ diferenciables$ en x_0, tenemos que el conjunto

$$\tilde{M} = \{(f'(x_0)(x-x_0)+\alpha, g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+y, h'(x_0)(x-x_0)+z) : x \in C, \alpha \geq 0, y \in P, z \in D\}, \tag{3.8}$$

es convexo y por lo tanto

$$T_{\tilde{M}}(0, \theta_Y, \theta_Z) = \overline{cone}(\tilde{M} - \{(0, \theta_Y, \theta_Z)\}).$$

Como paso previo a al objetivo del teorema, es necesario probar que

$$T_{\tilde{M}}(0, \theta_Y, \theta_Z) \cap (\mathbb{R} \times \{\theta_Y\} \times \{\theta_Z\}) = \emptyset.$$

En efecto, sea $(\ell, \theta_Y, \theta_Z) \in T_{\tilde{M}}(0, \theta_Y, \theta_Z)$, por definición tenemos que $\ell = \lim_n \lambda_n[f'(x_0)(x_n - x_0) + \alpha_n]$, donde las sucesiones son $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}^{++}$, $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ y $(x_n)_n \subset C$.

Si una subsucesión $(x_k)_n$ de (x_n) está contenida en $C \setminus K$, entonces $(\ell, \theta_Y, \theta_Z) \in T_{M^1}(0, \theta_Y, \theta_Z)$. Por hipótesis tenemos que se cumple la *condicion mS'* en el punto x_0, por lo tanto $\ell \geq 0$.

Ahora, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x_k)_n \subset K$, pero por la condición (i) tenemos que $\ell \geq 0$.

En particular $(-1, \theta_Y, \theta_Z) \notin T_{\tilde{M}}(0, \theta_Y, \theta_Z)$. Por el teorema de Hahn-Banach, separamos estrictamente $(-1, \theta_Y, \theta_Z)$ y $\tilde{M}$, ya que tenemos $\tilde{M} \subset T_{\tilde{M}}(0, \theta_Y, \theta_Z)$, entonces existe $(\mu, y^*, z^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \times Z^*$ tal que

$$\begin{aligned} -\mu < 0 \leq \mu(f'(x_0)(x-x_0)+\alpha) &+ \langle y^*, g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+y\rangle \\ &+ \langle z^*, h'(x_0)(x-x_0)+z\rangle, \end{aligned}$$

$\forall x \in C$, $\alpha \geq 0$, $y \in P$ y $z \in D$.
Claramente de lo anterior se tiene que $\mu > 0$. Haciendo que $\bar{u} = \dfrac{y^*}{\mu}$ y $\bar{v} = \dfrac{z^*}{\mu}$, tenemos

$$f'(x_0)(x-x_0)+\alpha+\langle \bar{u}, g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+y\rangle+\langle \bar{v}, h'(x_0)(x-x_0)+z\rangle \geq 0 \quad (3.9)$$

$\forall x \in C$, $\alpha \geq 0$, $y \in P$, $z \in D$.

Para $\alpha = 0$ y $x = x_0$ en 3.9, tenemos que

$$\langle \bar{u}, g(x_0)+y\rangle + \langle \bar{v}, z\rangle \geq 0, \ \forall y \in P, z \in D,$$

esto implica que $\bar{u} \in P^*$ y $\bar{v} \in D^*$.
Considerando $\alpha = 0, x = x_0, y = \theta_Y, z = \theta_Z$ y como $g(x_0) \in -P$, tenemos que

$$\langle \bar{u}, g(x_0)\rangle = 0.$$

Por lo tanto concluimos que

$$f'(x_0)(x-x_0) + \langle \bar{u}, g'(x_0)(x-x_0)\rangle + \langle \bar{v}, h'(x_0)(x-x_0)\rangle \geq 0, \ \forall x \in C.$$

Ahora como f, g, h son funciones convexas y $\bar{u} \in P^*$ and $\bar{v} \in D^*$, notamos que, el lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, \bar{u}, \bar{v}) = f(x) + \langle \bar{u}, g(x)\rangle + \langle \bar{v}, h(x)\rangle$$

tambien es convexo (necesariamente $\bar{u} \in C^+$ y $\bar{v} \in D^*$ tenemos la convexidad de $\mathcal{L}(x, \bar{u}, \bar{v})$). Ahora, aplicando [1, Theorem 3.8 (b)] a $\mathcal{L}(\cdot, \bar{u}, \bar{v})$, y considerando (2.7) y $x_0 \in K$, obtenemos

$$f(x_0) = \inf_{x \in C}[f(x) + \langle \bar{u}, g(x)\rangle + \langle \bar{v}, h(x)\rangle].$$

Para todo $u \in P^*$, $v \in Z^*$, tenemos

$$\begin{aligned} \inf_{x \in C}[f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle] &\leq \mathcal{L}(x_0, u, v) \leq f(x_0) \\ &= \inf_{x \in C}[f(x) + \langle \bar{u}, g(x)\rangle + \langle \bar{v}, h(x)\rangle]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{u\in P^* \\ v\in Z^*}} \inf_{x\in C}[f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle] &\leq f(x_0) \\
&= \inf_{x\in C}[f(x) + \langle \bar{u}, g(x)\rangle + \langle \bar{v}, h(x)\rangle] \\
&\leq \max_{\substack{u\in P^* \\ v\in Z^*}} \inf_{x\in C}[f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle].
\end{aligned}$$

$$\min_{x\in K} f(x) = f(x_0) = \max_{\substack{u\in P^* \\ v\in Z^*}} \inf_{x\in C}[f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle].$$

$\square$

3.3. Reformulación del caso general y comparación

Como se puede observar, el problema dual que aparece hemos definido en 2.2 difiere a como se define el problema dual en [2]. Esto es debido a que los espacios $(Y \times Z)^*$ y $Y^* \times Z^*$ no son iguales. Con el siguiente resultado demostraremos como valor numérico ν y η son iguales.

Teorema 3.5 (Isometria entre el espacios duales producto y el dual del espacio producto)**.** *Sea* $(Y, \|\cdot\|_Y$*,* $(Z, \|\cdot\|_Z)$ *dos espacios de Banach reales. Entonces* $Y^* \times Z^*$ *y* $(Y \times Z)^*$ *son isométricos.*

Prueba: Consideremos la norma de $Y \times Z$, $\|(\cdot,\cdot)\|_{Y\times Z} \colon Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$\|(y,z)\|_{Y\times Z} := \|y\|_Y + \|z\|_Z$$

y la norma de $Y^* \times Z^*$, $\|(\cdot,\cdot)\|_{Y^*\times Z^*} \colon Y^* \times Z^* \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$\|(u,v)\|_{Y^*\times Z^*} = \text{máx}\{\|u\|_{Y^*}, \|v\|_{Z^*}\}.$$

Definimos la aplicación $\iota \colon Y^* \times Z^* \longrightarrow (Y \times Z)^*$ como

$$\iota(u,v)(y,z) = u(y) + v(z).$$

Vamos a demostrar que ι es una isometría.

Veamos la buena definición de ι.
En efecto, $(u,v) \in Y^* \times Z^*$ arbitrario, veamos que $\iota(u,v) \in (Y \times Z)^*$.
Sea $(y_1,z_1),(y_2,z_2) \in Y \times Z$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\iota(u,v)((y_1,z_1) + \alpha(y_2,z_2)) &= u(y_1 + \alpha y_2) + v(z_1 + \alpha z_2) \\
&= u(y_1) + v(z_1) + \alpha(u(y_2) + v(z_2)) \\
&= \iota(u,v)(y_1,z_1) + \alpha\iota(u,v)(y_2,z_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto ι esta bien definido.

Ahora para la inyectividad.

Sean $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in Y^* \times Z^*$ tales que $\iota(u_1, v_1) = i(u_2, v_2)$. Entonces para todo $(y, z) \in Y \times Z$, tenemos

$$\iota(u_1, v_1)(y, z) = \iota(u_2, v_2)(y, z)$$

en particular para $z = 0$, tenemos que $u_1 = u_2$ y para $y = 0$, $v_1 = v_2$. Es decir $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ y por tanto ι es inyectiva.

Sobreyectividad.

De la buena definicion de ι tenemos $\iota(Y^* \times Z^*) \subset (Y \times Z)^*$. Reciprocamente, sea $w \in (Y \times Z)^*$, es decir, $w \colon Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal. sea $u = w(\cdot, 0)$ la restricción de W en y $v = w(0, \cdot)$. Claramente $u \in Y^*$ y $v \in Z^*$, entonces $i(u, v) = w$. En efecto, sea $(y, z) \in Y \times Z$, entonces $i(u, v)(y, z) = u(y) + v(z) = w(y, 0) + w(0, z) = w(y, z)$. Entonces ι es sobreyectiva.

Veamos que $\|\iota(u, v)\|_{(Y\times Z)^*} = \|(u, v)\|_{Y^*\times Z^*}$. Si $u = 0$ o $v = 0$, la igualdad se comprueba de manera trivial. Por definición para cualquier $(u, v) \in Y^* \times Z^*$ con u y v no nulos, se tiene que $\|\iota(u, v)\|_{\|(Y\times Z)^*\|} = \sup\limits_{(y,z)\in Y\times Z} \dfrac{|\iota(u, v)(y, z)|}{\|(y, z)\|_{Y\times Z}}$, entonces para cualquier $(y, z) \in Y \times Z$,

$$\begin{aligned}
\frac{\iota(u, v)(y, z)}{\|(y, z)\|_{Y\times Z}} &= \frac{|u(y) + v(z)|}{\|y\|_Y + \|z\|_Z} \\
&\leq \frac{|u(y)| + |v(z)|}{\|y\|_Y + \|z\|_Z} \\
&= \frac{\|y\|_Y}{\|y\|_Y + \|z\|_Z}\frac{|u(y)|}{\|y\|_Y} + \frac{\|z\|_Z}{\|y\|_Y + \|z\|_Z}\frac{|v(z)|}{\|z\|_Z} \\
&\leq \frac{\|y\|_Y}{\|y\|_Y + \|z\|_Z}\|u\|_{Y^*} + \frac{\|z\|_Z}{\|y\|_Y + \|z\|_Z}\|v\|_{Z^*} \\
&\leq \max\{\|u\|_{Y^*}, \|v\|_{Z^*}\} = \|(u, v)\|_{Y^*\times Z^*}.
\end{aligned}$$

Como $(y, z) \in Y \times Z$ es arbitrario, entonces $\|\iota(u, v)\|_{(Y\times Z)^*} \leq \|(u, v)\|_{Y^*\times Z^*}$.

Por otra parte, sin pérdida de generalidad supongamos que $\|u\|_{Y^*} = \max\{\|u\|_{Y^*}, \|v\|_{Z^*}\} = \|(u, v)\|_{Y^*\times Z^*}$ y sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que existe y_ε con

$$\|u\|_{Y^*} - \varepsilon\|u\|_{Y^*} < \frac{|u(y_\varepsilon)|}{\|y_\varepsilon\|_Y} \leq \|u\|_{Y^*}.$$

Para $(y_\varepsilon, 0) \in Y \times Z$, tenemos $\iota(u, v)(y_\varepsilon, 0) = u(y_\varepsilon)$ y por lo anterior tenemos que

$$(1 - \varepsilon)\|u\|_{Y^*} < \frac{\iota(u, v)(y_\varepsilon, 0)}{\|y_\varepsilon\|}_Y \leq \|\iota(u, v)\|_{(Y\times Z)^*},$$

tomando $\varepsilon \to 0$ y como $\|u\|_{Y^*} = \|(u,v)\|_{Y^* \times Z^*}$, tenemos que

$$\|(u,v)\|_{Y^* \times Z^*} \leq \|\iota(u,v)\|_{(Y\times Z)^*}.$$

Por lo tanto $\|(u,v)\|_{Y^* \times Z^*} = \|\iota(u,v)\|_{(Y\times Z)^*}$, es decir, ι es una isometría entre $Y^* \times Z^*$ y $(Y \times Z)^*$ □

Corolario 3.1. *Sea P un cono convexo cerrado en Y y P^* su cono dual. Considerando $P \times \{0\}$ un cono en $Y \times Z$, tenemos $\iota(P^* \times Z^*) = (P \times \{0\})^*$.*

Por lo tanto para la reformulación del problema dual Flores-Bazan en [1], se tiene

$$\nu = \sup_{\lambda \in (P\times\{0\})^*} \inf_{x \in C} \{f(x) + \langle \lambda, (g(x), h(x)) \rangle\}.$$

y el problema dual de Maugeri y Puglisi en [2]

$$\eta = \max_{\substack{u \in P^* \\ v \in Z^*}} \inf_{x\in C} [f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle].$$

Desde que $\lambda = \iota(u,v)$ para algun $u \in P^*$ y $v \in Z^*$, se tiene que $\langle \lambda, (g(x), h(x))\rangle = \iota(u,v)(g(x),h(x)) = \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle$, entendiendose a $\langle u, g(x)\rangle = u(g(x))$, entonces por el corolario anterior, $\eta = \nu$.

Esto nos permite decir que ambas formulaciones del problema dual son equivalentes.

CAPÍTULO 4

APLICACIONES

4.1. Ejemplo 1

Sea $z\colon L^2([0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2_+, z(t) = (z_1(t), z_2(t))$, tenemos el problema

$$\mu = \min_{z\in K} \int_0^1 (\frac{1}{2}z_2^2(t) + z_1(t))dt$$

donde $K = \{z \in L^2([0,1], \mathbb{R}^2) : z(t) \geq 0, z_1^2(t) + z_2^2(t) = 1, t \in [0,1]\}$.
Hallaremos la función valor del problema.

Consideramos $f\colon L^2([0,1], \mathbb{R}^2_+) \to \mathbb{R}$, donde $f(z) = \int_0^1 (\frac{1}{2}z_2^2(t) + z_1(t))dt$ y $h\colon L^2([0,1], \mathbb{R}^2) \to L^1([0,1], \mathbb{R})$ con h(z) $= z_1^2(t) + z_2^2 - 1$.

En el problema, identificamos que el dominio de f es

$$C = L^2([0,1], \mathbb{R}^2_+)$$

y el conjunto de restricciones es

$$K = \{z \in L^2([0,1], \mathbb{R}^2_+) : h(z) \in a - P\},$$

donde $P = \{0\}$.

Podemos precisar que Z es el conjunto de funciones constantes en X, que se identifican como $\mathbb{R}$, para lo cual $h\colon X \longrightarrow Z$ será nuestra restricción de igualdad.

Notemos que $\min_{z\in K} \int_0^1 (\frac{1}{2}z_2^2(t) + z_1(t))dt = \frac{1}{2} = f(0,1)$
Para este caso no estamos considerando la condición de desigualdad.

Para $a < -1$, claramente $K = \emptyset$ y $\Psi(a) = +\infty$.

Considerando $-1 \leq a$, se tiene $h(z) = z_1^2(t) + z_2^2(t) = 1 + a$ y junto a $f(z) = \int_0^1 (\frac{1}{2}z_2^2(t) + z_1(t))dt$ decimos que

$$f(z) = \frac{1+a}{2} + \frac{1}{2} - \int_0^1 (\frac{z_1(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 dt.$$

Por otra parte, $0 \leq z_1(t) \leq \sqrt{1+a}$, y por lo anterior obtenemos

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq (\frac{z_1(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}) \leq (\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}). \tag{4.1}$$

Si $a \leq 3$, tenemos que $(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ y junto con la desigualdad anterior se obtiene

$$0 \leq (\frac{z_1(t)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2})^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$f(z) = \frac{1+a}{2} + \frac{1}{2} - \int_0^1 (\frac{z_1(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 dt \geq \frac{1+a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1+a}{2}.$$

Como z ha sido tomado arbitrariamente se tiene $f(z) \geq \psi(a) \geq \frac{1+a}{2}$. Por otra parte, tomando $z(t) = (0, \sqrt{a+1}) \in K(a)$ se tiene que $f(z) = \frac{1+a}{2}$, entonces tenemos que $\psi(a) = \frac{1+a}{2}$.

Si $3 < a$, tenemos que $\frac{\sqrt{2}}{2} < (\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2})$. Por (4.1),

$$0 \leq (\frac{z_1(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \leq (\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2.$$

Por lo tanto

$$f(z) = \frac{1+a}{2} + \frac{1}{2} - \int_0^1 (\frac{z_1(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 dt \geq \sqrt{1+a},$$

es decir, $f(z) \geq \psi(a) \geq \sqrt{1+a}$. Tomando $z = (\sqrt{1+a}, 0)$, se tiene que $f(z) = \sqrt{1+a}$, por lo tanto $\psi(a) = \sqrt{1+a}$.

Así tenemos que

$$\psi(a) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a < -1, \\ \dfrac{1+a}{2}, & \text{si } -1 \leq a \leq 3, \\ \sqrt{1+a}, & \text{si } 3 < a \end{cases}$$

Evidentemente, $\psi(0) = \dfrac{1}{2} = \mu$, y

$$\partial\psi(0) = \{\xi \in Z^* : \psi(y) \geq \frac{1}{2} + \langle \xi, y \rangle \ \forall y \in Z\} \text{ es vacio .}$$

Luego, por (3.2) tenemos que no hay dualidad fuerte.

4.2. Ejemplo 2

Sea $z\colon L^2([0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2_+, z(t) = (z_1(t), z_2(t))$, tenemos el problema

$$\mu = \min_{z\in K} \int_0^1 (z_2^2(t) - z_1(t))dt,$$

donde $K = \{z \in L^2([0,1], \mathbb{R}^2) : z(t) \geq 0, z_1^2(t) + z_2^2(2) = 1, t \in [0,1]\}$. Hallaremos la función valor del problema.

Consideramos $f\colon L^2([0,1], \mathbb{R}^2_+) \longrightarrow \mathbb{R}$,definida como $f(z) = \displaystyle\int_0^1 (z_2^2(t) - z_1(t))dt$, $h : L^2([0,1], \mathbb{R}^2) \to L^1([0,1], \mathbb{R})$ con $h(z) = z_1^2(t) + z_2^2 - 1$.
En el problema precisamos que el dominio de f es

$$C = L^2([0,1], \mathbb{R}^2_+)$$

y el conjunto de restricciones es

$$K = \{z \in L^2([0,1], \mathbb{R}^2_+) : h(z) \in a - P\},$$

donde $P = \{0\}$.
Podemos precisar que Z es el conjunto de funciones constantes en X, que se identifican como $\mathbb{R}$, para lo cual $h\colon X \longrightarrow Z$ será nuestra restricción de igualdad.

Notemos que el $\displaystyle\min_{z\in K} \int_0^1 (z_2^2(t) - z_1(t))dt = -1 = f(1,0)$.

Para este caso no estamos considerando la condición de desigualdad.

Ahora para $a < -1$, claramente $K = \emptyset$ y $\Psi(a) = +\infty$.
Tenemos que $h(z) = z_1^2(t) + z_2^2(t) = 1 + a$ y como $f(z) = \displaystyle\int_0^1 (z_2^2(t) - z_1(t))dt$ entonces

$$f(z) = \frac{5}{4} + a - \int_0^1 (z_1(t) + \frac{1}{2})^2 dt,$$

como $0 \leq z_1(t) \leq \sqrt{1+a}$ tenemos que

$$\frac{1}{2} \leq z_1(t) + \frac{1}{2} \leq \sqrt{1+a} + \frac{1}{2}.$$

Para $a \geq 1$, vemos que $\sqrt{1+a} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}$ y concluimos que

$$-\sqrt{1+a} \leq f(z) \leq 1 + a.$$

Como $\psi(a) \leq \inf\limits_{z \in K(a)} f(z)$, entonces $\psi(a) \leq -\sqrt{1+a}$. Para $z = (\sqrt{a+1}, 0)$, tenemos que $f(z) = -\sqrt{1+a} \leq \psi(a)$. Por lo tanto $\psi(a) = -\sqrt{1+a}$.

Así tenemos que

$$\psi(a) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a < -1, \\ -\sqrt{a+1}, & \text{si } -1 \leq a. \end{cases}$$

Evidentemente, $\psi(0) = -1 = \mu$. y

$$\partial\psi(0) = \{\xi \in Z^* : \psi(y) \geq -1 + \langle \xi, y \rangle \ \forall y \in Z\} \text{ es no vacio.}$$

Luego, por (3.2) tenemos que hay dualidad fuerte.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Flores-Bazán F., Ocaña E., Echegaray W., Flores-Bazán F.: Primal or dual strong-duality in nonconvex optimization and a class of quasiconvex problems having zero duality gap. J. Global Optim. Volume 69 pp 823-845 (2017).

[2] Maugeri A., Puglisi D.: On nonlinear strong duality and the infinite dimensional Lagrange multiplier rule. Journal of Nonlinear and Convex Analysis. Volume 18, Number 3, pp 369-378, (2017).

[3] Flores Bazán F., Mastroeni G.: Strong duality in cone constrained nonconvex optimization. SIAM J. Optim. 23, pp 153-169 (2013).

[4] Penot J. Jahn.: Calculus without derivatives. Springer. University Pierre et Marie Curie. (2013)

[5] Rockafellar R.T.: Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton. (1970)

[6] Crouzeix J-P., Ocaña E.: Análisis Convexo. Fondo Editorial-EDUNI. Universidad Nacional de Ingeniería. (2018)

[7] Brezis Haim.: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer. Rutgers University. (2010)

[8] Borwein, J.M., Burachik, R., Yao, L.: Conditions for zero duality gap in convex programming. J. Convex Nonlinear Anal. 15, pp 167-190 (2014)

[9] Champion, T.: Duality gap in convex programming. Math. Program. A 99, pp 487-498 (2004)

[10] Jeyakumar, V.: Constraint qualifications characterizing Lagrangian duality in convex optimization. J. Optim. Theory Appl. 136, pp 31-41 (2008)