

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**“UN ESTUDIO E INTRODUCCIÓN DE RIESGO
EN EL PROBLEMA DE DESPACHO
DE MERCADOS ELÉCTRICOS”**

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADA POR:

Sintia Dayana Huaytalla Tineo

ASESOR:

Dr. Eladio Teofilo Ocaña Anaya (IMCA)

ASESOR EXTERNO:

Dr. Alejandro Jofré (CMM, Chile)

LIMA, PERÚ
2019

Dedico esta tesis a Dios, a mi familia
y a mis asesores que me han
guiado con mucho esmero en este proceso.

Índice general

1. Introducción	2
2. Mercados Eléctricos	4
2.1. Modelos de Mercados de Electricidad	4
2.1.1. Modelo Verticalmente Integrado	4
2.1.2. Modelo Pool	5
2.1.3. Modelo Bilateral	5
2.2. Independent System Operator (ISO)	6
2.3. Poder de Mercado	7
3. Problema de Despacho del ISO	9
3.1. Marco general de los modelos eléctricos	9
3.2. Modelo del Problema de Despacho	11
3.3. Equilibrio	12
4. Medidas de Riesgo	20
4.1. Riesgo	20
4.1.1. Riesgo y Optimización	22
4.2. Value-at-Risk y Conditional Value-at-Risk	23
4.2.1. Value-at-Risk	23
4.2.2. Conditional Value-at-Risk	25
4.2.3. Relaciones entre VaR y CVaR	28
4.2.4. Comparación de VaR y CVaR en problemas de optimización	29
5. El Problema de Despacho con Funciones Lineales a trozos	31
5.1. Descripción del Problema de Despacho con funciones lineales a trozos.	31
5.2. Caso ejemplo: Problema de Despacho Binodal	32
5.3. Caso: $d < \bar{q}$	34
5.3.1. Caso 1: Si $P(\frac{c_2-c_1}{r(c_1+c_2)}) \leq \bar{q}$	35

5.3.2.	Caso 2: Si $P(\frac{c_2-c_1}{r(c_1+c_2)}) > \bar{q}$ y $P(\frac{c_2-\bar{c}_1}{r(\bar{c}_1+c_2)}) \leq \bar{q}$.	35
5.3.3.	Caso 3: Si $P(\frac{c_2-c_1}{r(c_1+c_2)}) > \bar{q}$ y $P(\frac{c_2-\bar{c}_1}{r(\bar{c}_1+c_2)}) > \bar{q}$ y $P(\frac{\bar{c}_1-c_2}{r(\bar{c}_1+c_2)}) > 0$.	36
5.3.4.	Caso 4: Si $P(\frac{c_2-c_1}{r(c_1+c_2)}) > \bar{q}$ y $P(\frac{c_2-\bar{c}_1}{r(\bar{c}_1+c_2)}) > \bar{q}$ y $P(\frac{\bar{c}_1-c_2}{r(\bar{c}_1+c_2)}) \leq 0$.	38
5.4.	Caso: $d \geq \bar{q}$	39
5.4.1.	Caso 1: Si $c_i \leq \bar{c}_j$, con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$.	39
5.4.2.	Caso 2: Si $\bar{c}_1 < c_2$.	39
5.5.	Estudio del Caso general	40
5.5.1.	Hipótesis	41
5.5.2.	Función de producción	41
5.5.3.	Límites de F_i	42
6.	Problema de Despacho con Riesgo	47
6.1.	Modelamiento e introducción de Productores de energía con capacidad máxima de producción aleatoria.	47
6.1.1.	Función de Pérdida	50
6.1.2.	Caso Binodal	53
6.1.3.	Resultados del caso binodal	54
6.2.	Problema CVaR con capacidades de producción aleatorias	54
6.2.1.	Caso particular: Binodal 1	57
6.2.2.	Caso particular: Binodal 2	58
7.	Conclusiones y Recomendaciones	61
	Bibliografía	63

Índice de figuras

2.1. Mercado Verticalmente Integrado.	5
2.2. ISO.	6
2.3. Sistema Eléctrico Interconectado Nacional - 2017. Fuente: COES. . .	8
3.1. Red eléctrica.	9
6.1. Valor Optimal vs k.	55
6.2. Valores Optimales - Binodal 2.	59
6.3. Tabla de valores.	60

Resumen

En el presente trabajo hacemos un estudio al modelamiento del problema de despacho de Mercados Eléctricos; comenzando con un corto repaso a la teoría de mercados eléctricos que son las bases en las que se desarrolla el modelamiento del problema de optimización a estudiar. Hacemos el estudio del modelo de despacho en especial para el caso en el que las funciones de costo de generación son lineales a trozos, primero para un caso binodal, en donde se resuelve por completo este problema, y luego se resuelve el caso general. Estos resultados están dados por B. Heymann y A. Jofré.

Un estudio a las medidas de riesgo es desarrollado con el fin de analizar su implementación en los problemas de optimización. En especial estudiamos a las medidas de riesgo VaR y CVaR que usamos para introducir riesgo en el problema de despacho.

Finalmente, hacemos el modelamiento del problema de despacho con funciones lineales a trozos e introducimos una medida de riesgo a este modelo que proviene de forma natural por considerar generadores de energía con capacidades máximas de generación aleatorias, estos generadores inducen a tener un riesgo de desabastecimiento de energía que es considerado en el problema de despacho. Hacemos un estudio a este modelo para dos casos uno en el cual consideramos capacidades máximas de generación deterministas en las restricciones y el otro en el cual consideramos que estas son variables aleatorias, damos también ejemplos para casos binodales y examinamos su comportamiento.

Capítulo 1

Introducción

Los mercados eléctricos han venido tomando un gran impulso desde los años 80's. En un principio estos mercados funcionaban de forma monopolizada, pero esto ha ido cambiando para dar paso a los mercados eléctricos competitivos, que permiten un equilibrio de mercado y buscar un mejor beneficio social. Los mercados eléctricos están compuestos principalmente por: consumidores y productores de energía; además un agente importante que encontramos es al coordinador de mercado, también llamado agente principal o ISO (Independent System Operator), quien es el encargado de coordinar todas las operaciones del mercado.

Una de las funciones importantes del ISO es calcular las cantidades de producción optimales que los agentes generadores deben de producir y el precio al cual se les debe de pagar por la energía producida, teniendo en cuenta varias restricciones que se encuentran en este mercado y además buscando el beneficio social. Por este último motivo y otros más (como por ejemplo, que toda la información llegue a cada uno de los productores), el agente principal es una entidad independiente.

El mercado eléctrico se enfrenta a varios problemas como: la energía no puede ser almacenada así que la energía que se produce debe ser igual a la energía demandada, pero la demanda es por lo general incierta; también tenemos que la energía debe de ser transportada de los generadores hacia los consumidores, pero estas líneas de transmisión tienen capacidad máxima y también encontramos una pérdida en la transmisión de energía.

Hoy en día un hecho importante es combatir el cambio climático, es por eso que se están tomando muchas medidas para disminuir la contaminación que cada sector produce. En el caso de los mercados eléctricos, se han venido implementando generadores de energía renovable no convencional al mercado que principalmente tiene dos beneficios, la reducción de la contaminación y su bajo costo de producción. El problema de la energía renovable es que su producción es aleatoria, ya que depende principalmente de fuerzas naturales que no podemos controlar. El ISO al considerar estos generadores de energía renovable debe tener en cuenta en su modelo la aleatoriedad de la capacidad máxima de producción y el riesgo que conlleva ello.

Actualmente en el Perú menos del 3% del total de energía consumida proviene de plantas de energía renovable no convencional, este porcentaje es muy bajo comparado con otros países (por ejemplo, Chile 17% y México 28,31%) teniendo en cuenta el gran potencial que tiene el Perú para su implementación, así que sabemos que esto debe ir aumentando en el tiempo. Por lo tanto, el estudio de los modelos eléctricos, en donde se consideran generadores de energía renovable no convencional, y la implementación de resultados son de gran importancia por el impacto positivo que tendrá al ser implementados en los modelos ajustados a la realidad peruana.

Capítulo 2

Mercados Eléctricos

Los **mercados eléctricos** tienen sus inicios a fines del siglo XIX, y este nombre se usa para englobar las diferentes formas de la producción y de la comercialización de energía eléctrica. En un principio los mercados eléctricos fueron monopolios verticalmente integrados, pero en la actualidad se ha optado por tener competencia en el mercado eléctrico; aunque en muchos lugares aún existe un monopolio que es debido a las características del mercado, por lo general cuando se encuentra un sistema aislado o rural. Así que, el modelo verticalmente integrado hoy en día ha sido desplazado por Modelos Competitivos, estos modelos tienen muchos beneficios como por ejemplo proveer un fuerte incentivo para minimizar el costo de generación y la tendencia de los precios de electricidad hacia su mínimo.

Daremos a continuación las nociones necesarias, sobre los mercados eléctricos, para la comprensión de este trabajo, para más detalles de esta parte ver las referencias [1] y [2].

2.1. Modelos de Mercados de Electricidad

2.1.1. Modelo Verticalmente Integrado

Este modelo integra las tres componentes de la industria del mercado eléctrico: generación, transmisión y distribución de la electricidad, que es gestionada por una misma entidad, ver la Figura 2.1.

Uno de los inconvenientes de este modelo es referente al costo, ya que este se calcula en función de los costos de operación y mantenimiento, agregando también

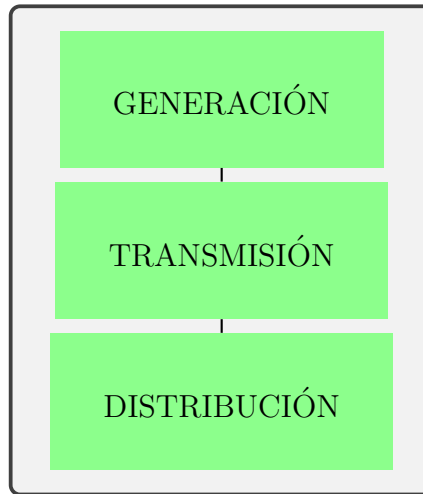


Figura 2.1: Mercado Verticalmente Integrado.

todo lo que las normativas vigentes le permitiesen a la empresa, esto hace que los costos sean muy elevados en muchos casos.

2.1.2. Modelo Pool

Este modelo encarga las coordinaciones del mercado a un organismo denominado **Pool**, el cual determina como sería el despacho económico en función de la oferta y demanda que recibe. Tenemos dos partes que examinar aquí, la de los generadores y la de los compradores. Los generadores compiten en este mercado para proveer de energía a la red general, es por ello que deben de ofertar la energía a un bajo precio, ya que vendiendo a un precio elevado pueden quedarse sin dar energía a la red. Los compradores por su parte compiten por comprar energía y no pueden ofrecer un precio muy bajo porque pueden quedarse sin comprar energía.

Los compradores y vendedores envían su demanda y oferta de energía, respectivamente, al pool para que se lleven a cabo las transacciones del mercado. El ISO tiene aquí un papel importante ya que se encarga del despacho económico y fija un precio de la energía, y así los participantes pueden tomar decisiones sobre el consumo e inversión.

2.1.3. Modelo Bilateral

En este modelo la compra y venta de energía se hace de forma directa entre comprador y vendedor, o por un intermediario, en donde se ponen de acuerdo el precio y las condiciones (fijación del precio, determinación del tiempo, además del contrato de servicios auxiliares, entre otros) en las cuales se llevará a cabo la compra - venta

de energía. Los términos y condiciones del contrato que se hacen son independientes del ISO. Este modelo es muy flexible, ya que permite hacer contratos solamente con las decisiones de los dos participantes, pero a la misma vez es algo desventajoso, ya que se puede tener un alto costo de negociación.

2.2. Independent System Operator (ISO)

En un mercado competitivo es necesario un coordinador independiente que administre las operaciones, este coordinador es al que denominamos ISO (muchas veces llamado también coordinador de mercado, agente principal o simplemente el principal). Damos a continuación algunas de las características que tiene el ISO.

- El ISO es un agente independiente de todos los demás participantes: generadores y compradores de energía (ver Figura 2.2).
- Garantiza que se envíe toda la información adecuada a cada uno de los participantes del mercado eléctrico.
- Se encarga de calcular las cantidades de producción de los agentes generadores y en la determinación del precio de la electricidad.
- Administra las tarifas de transmisión, mantiene la seguridad del sistema, coordina las programaciones y tiene un rol en el planeamiento a largo plazo.
- Puede asumir la autoridad para manejar el mercado de servicios auxiliares y manejar una red de transmisión, entre otras más.

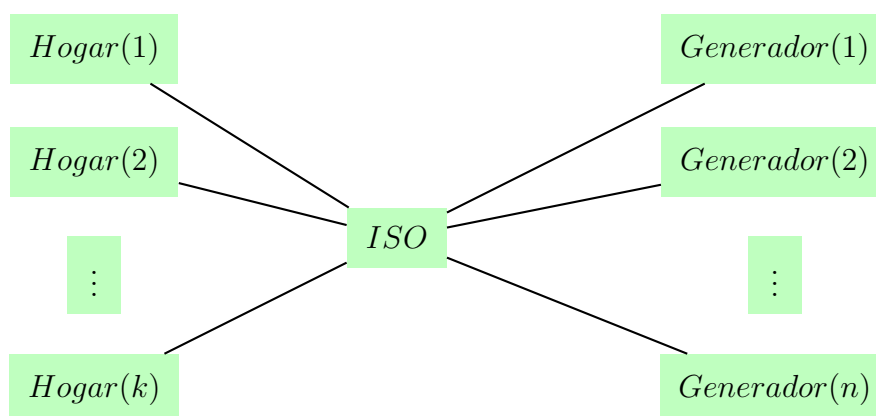


Figura 2.2: ISO.

En el capítulo 3, introducimos uno de los problemas principales que tiene el ISO con respecto a la determinación de las cantidades de generación de los agentes productores y del precio, este modelo es llamado “Problema de Despacho”. Este trabajo se centra en el estudio de este problema, con algunas características particulares sobre las funciones de costo de los productores, que se desarrollarán en los capítulos 5 y 6.

En el Perú, el agente coordinador del mercado eléctrico es el Comité de Operación Económica del Sistema (COES) quien se encarga de administrar el Sistema Eléctrico Interconectado Nacional (SEIN) y planificar la transmisión eléctrica del sistema. Ver Fig. 2.3.

2.3. Poder de Mercado

El **poder de mercado** se puede definir de forma simple como la capacidad de que un agente (o varios agentes) pueda influir sobre el precio de la electricidad o la disponibilidad de ella, para incrementar su beneficio propio. Un ejemplo claro del ejercicio de poder de mercado lo encontramos en los mercados verticalmente integrado, en donde los generadores pueden manejar generalmente el precio, ya que se tiene un monopolio.

El ISO es consciente de que los agentes generadores pueden ejercer un poder de mercado, así que debe de ser cuidadoso y tratar de mitigar este problema ya que es el responsable de todas las operaciones del mercado.

Por este motivo el ISO también maneja un problema llamado “El problema del diseño del mecanismo optimal”; este problema revierte el rol del agente principal (ISO) con el de los agentes, esto es, el ISO construye su función de respuesta (las posibles funciones de costo de generación de cada productor) conociendo que los agentes quieren maximizar su beneficio. Con esta información el ISO puede evitar que algún agente pueda ejercer el poder de mercado.



Figura 2.3: Sistema Eléctrico Interconectado Nacional - 2017. Fuente: COES.

Capítulo 3

Problema de Despacho del ISO

En este capítulo hablaremos sobre el problema de despacho del ISO, comenzando con un marco general en donde se trabajan los modelos, introduciendo el problema de despacho del ISO y haciendo un estudio de este modelo.

3.1. Marco general de los modelos eléctricos

Una **red** (o grafo) eléctrica, contiene nodos y aristas. En cada **nodo** podemos encontrar solo generadores o solo consumidores (o ambos), así cada nodo posee una cantidad de producción y/o una demanda de energía eléctrica. Una **arista** es una línea por la cual se puede enviar energía. Esta línea por lo general esta sujeta a restricciones físicas como la capacidad máxima de flujo que puede pasar por ella y una pérdida cuadrática de energía. (Figura 3.1)

Cada agente productor provee al ISO una función de costo de producción, esta función depende de la cantidad de energía producida y otros costos que tiene cada

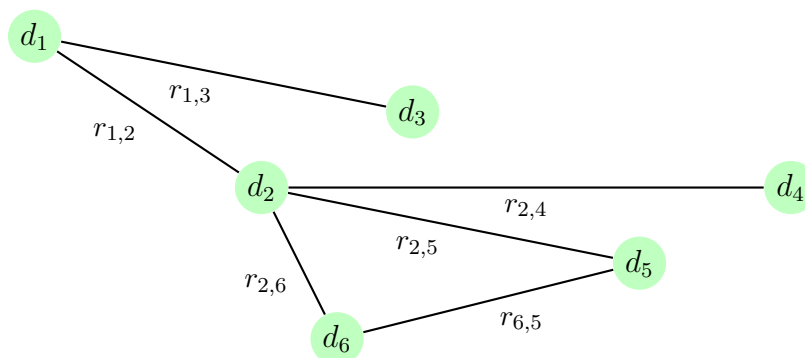


Figura 3.1: Red eléctrica.

agente. La función de costo es una función no decreciente y convexa, y en muchos casos lineales a trozos. Una vez que el ISO obtiene las funciones de costo de producción de todos los agentes y conociendo una realización de la demanda, minimiza el costo total de producción sujeto a balances nodales, restricciones de transmisión y de generación (estas restricciones las detallaremos más adelante), con el fin de calcular las cantidades de producción y los precios óptimos.

Generación a Corto Plazo: El ISO debe afrontar diariamente el siguiente problema:

- **Hoy:** Los generadores hacen una estimación de la demanda del día de mañana, con esta información calculan su función de costo de producción y todos simultáneamente envían su función al ISO.
- **Mañana:** El ISO conociendo una realización de la demanda, usa la información que le enviaron los generadores (funciones de costo) y minimiza la suma total de costo de producción, satisfaciendo la demanda en cada nodo y considerando todas las restricciones de transmisión y generación.
- **Mañana:** El ISO envía a los generadores las cantidades y precios óptimos.

Del marco descrito notamos que tenemos un juego entre todos los participantes del mercado, i.e. el ISO desea minimizar el costo de producción total de energía, y cada productor desea suministrar de energía a la red maximizando su beneficio (o beneficio esperado) individual, de esto resulta una competencia entre todos los generadores. Consideraremos que tenemos un juego no cooperativo, i.e. un juego en donde todos los productores compiten entre ellos.

Observación: Las funciones de costo de producción que envían los productores al ISO pueden no ser las verdaderas, ya que el productor desea maximizar sus ganancias, así que si es más conveniente para el productor mentir sobre su verdadero costo de producción entonces lo hará.

Observación: La demanda que consideramos en nuestro trabajo es inelástica, i.e. que no depende del precio.

3.2. Modelo del Problema de Despacho

Consideremos una red compuesta por los nodos $\{1, \dots, N\}$ y un conjunto de aristas $\{1, \dots, E\} \subseteq \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$. Denotemos con $G \subseteq \{1, \dots, N\}$ al conjunto de nodos productores de electricidad.

Un **plan de producción** es un vector $(f, q) \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^G$, significando que el productor en el nodo n , produce q_n y que el flujo a lo largo de la arista e (línea e) es f_e . Consideramos un agente central (ISO) que puede establecer planes de producción respetando algunas restricciones de la red.

Los generadores envían simultáneamente sus funciones de costo c_n , que son convexas, no decreciente y de valuación real, y conoce una realización de la demanda $d = (d_n)_{n=1}^N$, donde $d_n \geq 0$. El ISO después de observar los vectores de oferta $c = (c_n)_{n \in G}$ y demanda d , resuelve el problema de minimizar el costo total sujeto a las restricciones de red; luego envía las cantidades q_i y precios a cada generador i , y los generadores producen según lo acordado y se les paga los costos marginales de la electricidad en sus nodos.

El Agente principal (ISO) minimiza el costo total de producción,

$$\sum_{n \in G} c_n(q_n)$$

sujeto a restricciones físicas y tecnológicas que detallamos a continuación.

- **Balances Nodales:** En cada nodo, la energía disponible debe satisfacer la demanda, pero además debemos de tener en cuenta que hay una pérdida de energía debido a consideraciones térmicas, esta pérdida está bien aproximada por una función cuadrática de flujo, es decir, si el flujo sobre la arista $e \in E$ es f_e , la pérdida esta dada por $r_e f_e^2$, donde $r_e \geq 0$ es la resistencia de la línea. Se asume que las pérdidas son divididas entre los nodos asociados a cada línea y consideramos los siguientes balances nodales,

$$\sum_{e \in K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 + d_n \leq q_n + \sum_{e \in K_n} f_e \operatorname{sgn}(e, n), \quad n \in G \quad (3.1)$$

$$\sum_{e \in K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 + d_n \leq \sum_{e \in K_n} f_e \operatorname{sgn}(e, n), \quad n \notin G \quad (3.2)$$

donde K_n es el conjunto de líneas de transmisión que conectan al nodo n y $\operatorname{sgn}(e, n)$ es igual a 1 o -1 dependiendo de la orientación del grafo y si $e = (n, m)$

entonces $\text{sgn}(e, n) = -\text{sgn}(e, m)$. Denotaremos con K a la unión de todos los conjuntos de líneas de transmisión de los generadores, es decir $K = \cup_{n \in G} K_n$. La explicación de la restricción (3.1) es que la suma de la mitad de todas las pérdidas asociadas al nodo n y la demanda d debe ser menor que la cantidad de energía generada en el nodo n más la energía que llega al nodo n por los nodos asociados a este. La restricción (3.2) es similar a (3.1), pero para los nodos $n \notin G$ en donde no hay un productor local, así que la demanda local debe ser satisfecha con la producción externa.

- **Restricciones de Generación:** Cada generador tiene una cantidad máxima de producción, que denotamos con $\bar{q}_n \geq 0$. Entonces las cantidades de producción de cada generador son:

$$q_n \in [0, \bar{q}_n], \quad \forall n \in G. \quad (3.3)$$

- **Restricciones de Transmisión:** Cada línea de transmisión $e \in E$ tiene una capacidad máxima:

$$\underline{f}_e \leq f_e \leq \bar{f}_e \quad (3.4)$$

donde $\underline{f}_e \leq 0 \leq \bar{f}_e$.

Observación: El conjunto de restricciones de transmisión, se puede considerar de forma general como un conjunto $F \subset \mathbb{R}^E$ convexo, compacto y no vacío, ($f \in F$). En el presente trabajo nos enfocamos en el modelamiento con las restricciones del tipo (3.4). El lector interesado en el modelamiento con $f \in F$, puede seguir la referencia [14].

Así el **Problema de Despacho del ISO**, esta dado por

$$\begin{aligned} \min_{(f, q)} \quad & \sum_{n \in G} c_n(q_n) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 + d_n \leq q_n + \sum_{e \in K_n} f_e \text{sgn}(e, n) \quad n \in G \\ & \sum_{e \in K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 + d_n \leq \sum_{e \in K_n} f_e \text{sgn}(e, n) \quad n \notin G \\ & q_n \in [0, \bar{q}_n] \\ & \underline{f}_e \leq f_e \leq \bar{f}_e \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3. Equilibrio

Dado un vector de demanda $d = (d_n)_{n=1}^N$, definimos

$$\Omega(d) = \{(f, q) \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^G : (f, q) \text{ satisface (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4)}\}$$

Proposición 3.3.1 *El conjunto $\Omega(d)$ es un conjunto convexo y compacto.*

Prueba: Ver referencia [14].

Luego el problema de despacho del ISO se escribe de la siguiente forma

$$\min \left\{ \sum_{n \in G} c_n(q_n) : (f, q) \in \Omega(d) \right\} \quad (3.6)$$

Denotaremos con $\text{OPT}(c, d)$ a su valor optimal, y definimos $Q(c, d)$ como el conjunto de cantidades optimales,

$$Q(c, d) = \{q \in \mathbb{R}^G : \exists f \in \mathbb{R}^E, (f, q) \text{ es una solución de (3.6)}\}$$

El precio en cada nodo está dado por la variable dual asociada a la restricción del balance nodal de cada nodo. La Teoría de dualidad nos dice que si el conjunto de variables duales es un singleton, entonces este es el costo del sistema de servir una unidad de demanda adicional. Denotamos al conjunto de variables duales asociadas al balance nodal (3.1)-(3.2), como

$$\Lambda(c, d) = \{\lambda \in \mathbb{R}^G : \exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{N \setminus G}, (\lambda, \bar{\lambda}) \text{ variable dual asociadas a (3.1)-(3.2) de (3.6)}\}$$

Observación: Asumiremos que los conjuntos $Q(c, d)$ y $\Lambda(c, d)$ son no vacíos. Las condiciones para que estos conjuntos sean no vacíos no la desarrollamos aquí, solo asumiremos que lo son. Para más detalles sobre este tema puede seguir la referencia [14].

Como ya lo mencionamos antes, cada agente generador desea maximizar su beneficio individual, es por ello que compiten entre ellos para que suministren de energía a la red. Detallamos formalmente esto a continuación.

Supongamos que el agente productor n produce q_n y es pagado al precio p_n por cada unidad producida. Sea $u_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (continua) la función de utilidad del productor n , esta dada por

$$u_n(p_n, q_n) = p_n q_n - \hat{c}_n(q_n),$$

donde \hat{c}_n es la función de costo real del productor n .

Para $p, q \in \mathbb{R}^{|G|}$, definimos al vector de utilidad u como,

$$u(p, q) = (u_1(p_1, q_1), \dots, u_{|G|}(p_{|G|}, q_{|G|})).$$

Como mencionamos en la sección 3.2, las empresas generadoras envían sus funciones de costo de producción c_n ($n \in G$) simultáneamente al ISO; además debemos resaltar que los generadores no conocen la demanda d , pero si conocen su función de distribución de probabilidad que denotamos con P , y usan está información para calcular sus funciones de costo c_n ; luego consideramos que cada productor $n \in G$ tiene un conjunto de estrategias que denotamos con S_n , ($c_n \in S_n$). Consideraremos que el conjunto S_n solo posee funciones c_n convexas, con valores en los reales, no decrecientes y $c_n(0) = 0$.

Definición 3.3.1 (Soporte de una variable aleatoria) Dada una variable aleatoria X sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$. El **soporte** de X , denotado con $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, es el subconjunto cerrado mas pequeño en \mathbb{R} tal que $\mathbb{P}(X \in \mathcal{D}) = 1$.

Denotamos con Γ a la construcción del modelo descrito en las secciones 3.2 y 3.3.

Definición 3.3.2 (Equilibrio) Un **equilibrio no cooperativo** (o equilibrio) del juego Γ es una 3-tupla $(q, \lambda, (\bar{m}_n)_{n \in G})$ tal que

- i) q es una selección de $Q(\cdot, \cdot)$, así una solución del problema de despacho.
- ii) λ es una selección de $\Lambda(\cdot, \cdot)$, así un multiplicador de Lagrange del problema de despacho.
- iii) $\bar{m} = (\bar{m}_n)_{n \in G}$ es un **Equilibrio de Nash de estrategia mixta no trivial** del juego en forma normal entre productores $\bar{\Gamma}(\lambda, q) = (S_n, V_n)_{n \in G}$, donde cada productor escoge una estrategia c_n en S_n , y obtiene un pago dado por el beneficio esperado,

$$V_n(c_n, c_{-n}) = \mathbb{E}[u_n(\lambda_n(c, \cdot), q_n(c, \cdot))] = \int u_n(\lambda_n(c, d), q_n(c, d)) dP(d), \quad c \in S.$$

En la definición previa, decimos que las selecciones λ y q **soportan** la medida \bar{m} , como un equilibrio de Nash de primera etapa.

A continuación se muestra un ejemplo dado en [14], de un juego entre generadores en el cual no importa como las cantidades q y λ son seleccionadas, no existe un equilibrio de estrategia pura.

Ejemplo 3.3.1 Consideremos una red de 3 nodos, en donde tenemos solo generadores en el nodo 1 y nodo 3, con capacidades máximas de producción iguales a \bar{q} en ambos nodos. En el nodo 2 solo encontramos una demanda dada por d con función de distribución F . Consideremos además que no tenemos pérdida de transmisión, es decir $r = r_{1,2} = r_{3,2} = 0$. Supondremos que siempre es posible satisfacer la demanda, esto es $2\bar{q} > d$, para todo $d \in \mathcal{D}$, (\mathcal{D} es soporte de d); y que la probabilidad que solo un generador despache y que ambos generadores despachen energía, son estrictamente positivas, esto es

$$\mathbb{P}(d < \bar{q}) \in (0, 1).$$

Asumiremos que los costos de producción de cada generador n es igual a 0, entonces la función de beneficio del generador n es $u_n(q_n) = p_n q_n$. Además cada generador está permitido a ofertar un único precio $p_n \in [0, p^*]$, donde p^* es el precio tope. Esto es que cada generador tiene función de oferta lineal. Luego el conjunto de funciones de costo del generador n esta dado por

$$S_n = \{c_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : c_n \text{ es lineal, } c_n(0) = 0 \text{ y } c'_n(0) \in [0, p^*]\}. \quad (3.7)$$

El problema de despacho de este modelo descrito es el siguiente. Dados los precios $p_1, p_3 \in [0, p^*]$ y la demanda d , tenemos

$$\text{mín}\{p_1 q_1 + p_3 q_3 : q_1 + q_3 \geq d, q_i \in [0, \bar{q}], i = 1, 3\}. \quad (3.8)$$

Consideremos las selecciones $q(p, d) \in Q(p, d)$ y $\lambda(p, d) \in \Lambda(p, d)$. Se muestra que **el juego no tiene un equilibrio de estrategia pura**. En efecto,

Supongamos por contradicción que existe un equilibrio de estrategia pura $p_1, p_3 \in [0, p^*]$. Tenemos los 2 siguientes casos.

Caso 1: Si $p_1 < p_3$. En este caso los generadores pueden incrementar su beneficio mediante un ligero aumento de su oferta, pues eso no afectará al momento de asignar las cantidades de producción. Esto contradice el hecho de que p_1 y p_3 sean un equilibrio de estrategia pura.

Caso 2: Si $p_1 = p_3$.

i) Si $p_1 = p_3 = 0$, entonces cada empresa puede incrementar su beneficio, ofertando el precio tope p^* , luego no son un equilibrio de estrategia pura.

ii) Si $p_1 = p_2 > 0$, entonces cualquiera que sea la selección $q(p, d)$, hay un generador, digamos que sea del nodo 1, tal que su beneficio es al menos

$$\frac{p_1 \mathbb{E}[d]}{2} \quad (3.9)$$

En efecto, de la restricción en (3.8) tomando esperanza tenemos

$$2q_1 = q_1 + q_3 \geq \mathbb{E}[d]$$

así,

$$u_1(q_1) = p_1 q_1 \geq \frac{p_1 \mathbb{E}[d]}{2}.$$

Pero el generador 1, ofertando $p_1 - \epsilon$ obtendría un pago igual a

$$p_1 \bar{q}(1 - F(\bar{q})) + (p_1 - \epsilon) \int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi) \quad (3.10)$$

y notemos que

$$2\bar{q} > \sup\{d \mid d \in \mathcal{D}\} > \frac{\int_{\bar{q}}^1 \psi dF(\psi)}{1 - F(\bar{q})} - \frac{\int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi)}{1 - F(\bar{q})} \quad (3.11)$$

pues,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{q}}^1 \psi dF(\psi) &< \mathbb{E}[d] = \int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi) + \int_{\bar{q}}^{\infty} \psi dF(\psi) \\ \int_{\bar{q}}^1 \psi dF(\psi) - \int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi) &< \int_{\bar{q}}^{\infty} \psi dF(\psi) \\ \int_{\bar{q}}^1 \psi dF(\psi) - \int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi) &< \sup\{d \mid d \in \mathcal{D}\} \int_{\bar{q}}^{\infty} dF(\psi) \end{aligned}$$

luego como $\mathbb{P}(d < \bar{q}) \in (0, 1)$ entonces $1 - F(\bar{q}) = \mathbb{P}(d \geq \bar{q}) \in (0, 1)$, así

$$\frac{\int_{\bar{q}}^1 \psi dF(\psi)}{1 - F(\bar{q})} - \frac{\int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi)}{1 - F(\bar{q})} < \sup\{d \mid d \in \mathcal{D}\} \leq 2\bar{q}$$

Por lo tanto de (3.11) tenemos,

$$\bar{q}(1 - F(\bar{q})) + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi) > \frac{1}{2} \int_{\bar{q}}^1 \psi dF(\psi)$$

sumando el factor $\frac{1}{2} \int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi)$ a ambos lados, se tiene

$$\bar{q}(1 - F(\bar{q})) + \int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi) > \frac{1}{2} \int_0^1 \psi dF(\psi)$$

Luego para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que

$$p_1 \bar{q}(1 - F(\bar{q})) + (p_1 - \epsilon) \int_0^{\bar{q}} \psi dF(\psi) > \frac{p_1 \mathbb{E}[d]}{2},$$

así concluimos que es mucho mas rentable ofertar $p_1 - \epsilon$ que p_1 , y por lo tanto p_1 y p_3 no forman un equilibrio de estrategia pura.

Así hemos demostrado que este juego no tiene un equilibrio de estrategia pura.

Sin embargo se pueden dar condiciones para que exista un equilibrio no cooperativo en Γ , y las damos a continuación.

Hipótesis.

(H1) Para todo $c_n \in S_n$ y $q_n \in \mathbb{R}$, la derivada a derecha

$$c_n^+(q_n) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{c_n(q_n + h) - c_n(q_n)}{h}$$

es menor o igual a p^* .

(H2) Para todo $d \in \mathcal{D}$, existe $\delta_d > 0$ tal que

$$\forall \hat{d} \in \mathbb{B}(d, \delta_d), \Omega(\hat{d}) \neq \emptyset.$$

En particular, el problema (3.6) es factible.

(H3) Una de las dos siguientes hipótesis se cumple:

- (i) \mathbb{P} no tiene átomos, i.e. para todo conjunto medible A con $\mathbb{P}(A) > 0$, existe un subconjunto $B \subset A$ talque $\mathbb{P}(B) > 0$.
- (ii) Para todos los conjuntos compactos convexos $M, N \subset \mathbb{R}^G$, el conjunto $u(M \times N) \subset \mathbb{R}^G$ es convexo.

(H4) Para todo $n \in G$, S_n es cerrado bajo convergencia puntual.

Observación: El soporte de d (\mathcal{D}) es un conjunto compacto. En efecto, de la definición de soporte tenemos que \mathcal{D} es cerrado. Veamos que \mathcal{D} también es acotado, sea $d \in \mathcal{D}$, entonces

$$0 \leq \sum_{n=1}^N d_n \leq \sum_{n \in G} \bar{q}_n$$

pues, de (3.1) tenemos,

$$d_n + \sum_{e \in K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 \leq q_n + \sum_{e \in K_n} f_e \operatorname{sgn}(e, n), \quad n \in G$$

luego, sumando en $n \in G$

$$\sum_{n \in G} d_n + \sum_{e \in \cup_{n \in G} K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 \leq \sum_{n \in G} q_n + \sum_{n \in G} \sum_{e \in K_n} f_e \operatorname{sgn}(e, n) \quad (3.12)$$

Por otro lado de (3.2) tenemos,

$$\sum_{e \in K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 + d_n \leq \sum_{e \in K_n} f_e \operatorname{sgn}(e, n), \quad n \notin G$$

sumando en $n \notin G$

$$\sum_{n \notin G} d_n + \sum_{e \in \cup_{n \notin G} K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 \leq \sum_{n \notin G} \sum_{e \in K_n} f_e \operatorname{sgn}(e, n) \quad (3.13)$$

sumando (3.12) y (3.13), se tiene

$$\sum_{n=1}^N d_n + \sum_{e \in \cup_{n=1}^N K_n} \frac{r_e}{2} f_e^2 \leq \sum_{n \in G} q_n + \sum_{n=1}^N \sum_{e \in K_n} f_e \operatorname{sgn}(e, n) \quad (3.14)$$

luego como $\cup_{n=1}^N K_n = E$ y $\sum_{n=1}^N \sum_{e \in K_n} f_e \operatorname{sgn}(e, n) = 0$, pues se estan sumando y restando todos los flujos de las líneas, tenemos de (3.14) que,

$$\sum_{n=1}^N d_n + \sum_{e \in E} \frac{r_e}{2} f_e^2 \leq \sum_{n \in G} q_n.$$

Observación: Existe $\delta > 0$, tal que para todo $d \in \mathcal{D}$, se tiene

$$\forall \hat{d} \in \mathbb{B}(d, \delta), \Omega(\hat{d}) \neq \emptyset$$

En efecto, de la observación anterior tenemos que \mathcal{D} es compacto y

$$\mathcal{D} \subset \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \mathbb{B}(d, \delta_d)$$

es un cubrimiento abierto de \mathcal{D} , luego existe $\delta > 0$ (número de Lebesgue) talque para cualquier $d \in \mathcal{D}$ hay un abierto del cubrimiento conteniendo a $\mathbb{B}(d, \delta)$, esto es

$$\mathbb{B}(d, \delta) \subset \mathbb{B}(d, \delta_d)$$

luego $\forall \hat{d} \in \mathbb{B}(d, \delta)$ de (H2) tenemos que

$$\Omega(\hat{d}) \neq \emptyset.$$

Con las hipótesis dadas anteriormente, tenemos el siguiente resultado de existencia de equilibrio.

Teorema 3.3.1 *Bajo las condiciones (H1)-(H4). El juego Γ tiene un equilibrio no cooperativo $(q, \lambda, m = (m_n)_n)$, donde m_n es una medida regular sobre el σ -álgebra de Borel puntual sobre S_n .*

Demostración: Para los detalles de la demostración puede revisar la referencia [14].

En los artículos de A. Jofré y J. Escobar [14] y [17], se puede encontrar más resultados sobre equilibrio no cooperativo y equilibrio Walrasiano para el modelo de despacho, en donde se dan algunas hipótesis, como (H1)-(H4), para garantizar la existencia de estos equilibrios, los resultados están basados en el uso de multifunciones y epiconvergencia, que no estudiamos en este trabajo, sin embargo el lector interesado en estos temas puede seguir estas referencias.

Capítulo 4

Medidas de Riesgo

Este capítulo está dedicado a las Medidas de Riesgo, daremos algunos resultados importantes así como su enfoque en la optimización y dedicaremos una sección para las Medidas de Riesgo VaR y CVaR que son medidas que usamos para el modelamiento del Problema de Despacho en el capítulo 6, para más detalles sobre este tema puede ver las siguientes referencias [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] y [12].

4.1. Riesgo

Las Medidas de Riesgo dan información cuantitativa de las variables aleatorias, variables que pueden representar costos o pérdidas, para poder administrar y controlar los problemas en que nos podría llevar la incertidumbre.

Matemáticamente, una **Medida de Riesgo** \mathcal{R} es una aplicación definida sobre el espacio de variables aleatorias, que denotaremos con \mathcal{A} , hacia \mathbb{R} (o $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), i.e. $\mathcal{R} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.1.1 Sea X una variable aleatoria, tenemos las siguientes medidas de riesgo

(i) $\mathcal{R}(X) = \mu(X) = \mathbb{E}(X)$ la esperanza de X .

(ii) $\mathcal{R}(X) = \mu(X) + \lambda\sigma(X)$, donde σ denota la desviación estándar.

(iii) $\mathcal{R}(X) = q_\beta(X) = VaR_\beta(X)$ el cuantil izquierdo en el nivel β .

(iv) $\mathcal{R}(X) = Sup(X)$

(v) $\mathcal{R}(X) = CVaR_\beta(X)$.

Hay muchas medidas de riesgo, entre ellas algunas son muy bien vistas por la información que nos pueden brindar, pero muchas veces estas son de difícil manejo sobre todo al momento de tener estas medidas en problemas de optimización; en particular encontramos un grupo de medidas de riesgo que al introducirlas a un modelo de optimización nos permiten un fácil manejo, estas medidas son llamadas “*Coherentes*” y a continuación daremos su definición en el sentido de Artzner et al. [13].

Definición 4.1.1 Decimos que una medida de riesgo es **coherente** si,

i) Es **convexa**, i.e. si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\mathcal{R}(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda \mathcal{R}(X_1) + (1 - \lambda)\mathcal{R}(X_2). \quad (4.1)$$

ii) Es **monótona**, i.e. si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias tal que $X_1 \leq X_2$ con probabilidad 1, entonces

$$\mathcal{R}(X_1) \leq \mathcal{R}(X_2). \quad (4.2)$$

iii) Es **positivamente homogénea**, i.e.

$$\mathcal{R}(cX) = c\mathcal{R}(X), \quad (4.3)$$

si $c > 0$.

iv) Es **equivariante por translación**, i.e.

$$\mathcal{R}(X + c) = \mathcal{R}(X) + c, \quad (4.4)$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Damos a continuación algunas deficiones adicionales sobre medidas de riesgo.

Definición 4.1.2 Sea X una variable aleatoria. Decimos que una medida de riesgo \mathcal{R} es **cerrada** si, para todo $C \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{X : \mathcal{R}(X) \leq C\}$ es cerrado.

Definición 4.1.3 Sea X una variable aleatoria. Decimos que una medida de riesgo \mathcal{R} es **subaditiva** si, para X_1 y X_2 dos variables aleatorias, $\mathcal{R}(X_1 + X_2) \leq \mathcal{R}(X_1) + \mathcal{R}(X_2)$.

Definición 4.1.4 Sea X una variable aleatoria. Decimos que una medida de riesgo $\mathcal{R} : \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ es **regular** si es convexa, cerrada, $\mathcal{R}(C) = C$ para constantes C y $\mathcal{R}(X) > \mathbb{E}[X]$ para X no constante.

Ejemplo 4.1.2 Sea X una variable aleatoria, tenemos

(i) $\mathcal{R}(X) = \mu(X) + \lambda\sigma(X)$ es regular y no coherente.

(ii) $\mathcal{R}(X) = q_\beta(X) = VaR_\beta(X)$ no es convexa.

(iii) $\mathcal{R}(X) = Sup(X)$ es regular y coherente.

(iv) $\mathcal{R}(X) = CVaR_\beta(X)$ es regular y coherente.

4.1.1. Riesgo y Optimización

Consideremos el siguiente problema determinístico, i.e. sin incertidumbre, donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ es el vector de decisión

$$(P) \begin{aligned} \min_{x \in S \subset \mathbb{R}^n} \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Este tipo de problema de minimización usualmente puede ser resuelto con técnicas ya conocidas. ¿Pero que pasaría si ahora las funciones $f_i(x)$ son variables aleatorias? Veamos:

Supongamos que tomando una decisión x tenemos las variables aleatorias

$$X_0(x) = \underline{f}_0(x), X_1(x) = \underline{f}_1(x), \dots, X_m(x) = \underline{f}_m(x)$$

Entonces el problema, con estas funciones, se convierte en un problema de optimización estocástica que no es evidente como debemos tratarla, pero este problema se puede pasar a un problema determinista haciendo uso de las medidas de Riesgo, de la siguiente forma

$$(\underline{P}) \begin{aligned} \min_{x \in S} \quad & \bar{f}_0(x) = \mathcal{R}_0(\underline{f}_0(x)) \\ \text{s.t.} \quad & \bar{f}_i(x) = \mathcal{R}_i(\underline{f}_i(x)) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Teniendo este problema ahora nos surge una pregunta sobre ¿Cómo deberíamos escoger las medidas de riesgo \mathcal{R}_i de forma tal que podamos preservar propiedades importantes como la convexidad para asegurar la solubilidad del problema? Para responder esta pregunta enunciamos sin demostración el siguiente teorema, para más detalles y demostración puede revisar [5].

Teorema 4.1.1 (Teorema de Convexidad) En el Problema (\underline{P}) , la convexidad de $\bar{f}_i(x)$ con respecto a x es asegurada si $\underline{f}_i(x)$ es lineal en x y \mathcal{R}_i es una medida de riesgo regular, o si $\underline{f}_i(x)$ es convexo en x y \mathcal{R}_i es además una medida de riesgo monótona.

4.2. Value-at-Risk y Conditional Value-at-Risk

Esta sección esta dedicada a las medidas de Riesgo Value-at-Risk (VaR) y Conditional Value-at-Risk (CVaR), para más detalles puede ver la referencia [12].

4.2.1. Value-at-Risk

Sea X una variable aleatoria. Denotemos con F_X a la función de distribución de X , esto es

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

y sea F_X^{-1} su inversa continua a izquierda,

$$F_X^{-1}(u) = \min\{t : F_X(t) \geq u\}. \quad (4.7)$$

Definición 4.2.1 Sean X una variable aleatoria y $\beta \in (0, 1)$. Definimos Value-at-Risk, denotado con **VaR**, como el β -cuantil izquierdo de la función de distribución acumulada F_X , i.e.

$$\text{VaR}_\beta(X) = F_X^{-1}(\beta). \quad (4.8)$$

De ahora en adelante denotaremos con F a la función de distribución asociada a X , esto es $F = F_X$, cuando no tenemos problemas de confusión.

Proposición 4.2.1 VaR_β posee las siguientes propiedades:

i) VaR_β es **positivamente homogenea**, es decir

$$\text{VaR}_\beta(cX) = c\text{VaR}_\beta(X), \quad (4.9)$$

si $c > 0$.

ii) VaR_β es **equivariante por translación**, es decir

$$\text{VaR}_\beta(X + c) = \text{VaR}_\beta(X) + c, \quad (4.10)$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

iii) VaR_β es **monótona**, es decir, si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias tal que $X_1 \leq X_2$ con probabilidad 1, entonces

$$\text{VaR}_\beta(X_1) \leq \text{VaR}_\beta(X_2). \quad (4.11)$$

iv) VaR_β cumple que,

$$VaR_\beta(X) = -VaR_{1-\beta}(-X). \quad (4.12)$$

cuando X es una variable aleatoria continua.

Demostración: i) Sea $c > 0$, de la definición de VaR tenemos

$$\begin{aligned} VaR_\beta(cX) &= \text{mín}\{t : F_{cX}(t) \geq \beta\} \\ &= \text{mín}\{t : \mathbb{P}(cX \leq t) \geq \beta\} \\ &= c \text{mín}\left\{\frac{t}{c} : \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t}{c}\right) \geq \beta\right\} \\ &= c \text{mín}\{u : \mathbb{P}(X \leq u) \geq \beta\} \\ &= cVaR_\beta(X). \end{aligned}$$

ii) Sea $c \in \mathbb{R}$, de la definición de VaR tenemos

$$\begin{aligned} VaR_\beta(X) + c &= \text{mín}\{u : F_X(u) \geq \beta\} + c \\ &= \text{mín}\{u + c : F_X(u) \geq \beta\} \\ &= \text{mín}\{v : F_X(v - c) \geq \beta\} \\ &= \text{mín}\{v : F_{X+c}(v) \geq \beta\} \\ &= VaR_\beta(X + c). \end{aligned}$$

iii) Tenemos que $X_1 \leq X_2$ con probabilidad, para $u \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} \{X_2 \leq u\} &\subseteq \{X_1 \leq u\} \\ 1_{\{X_2 \leq u\}} &\leq 1_{\{X_1 \leq u\}} \\ \mathbb{E}[1_{\{X_2 \leq u\}}] &\leq \mathbb{E}[1_{\{X_1 \leq u\}}] \\ \mathbb{P}(X_2 \leq u) &\leq \mathbb{P}(X_1 \leq u) \\ F_{X_2}(u) &\leq F_{X_1}(u) \end{aligned}$$

sea $\beta \in (0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \{u : F_{X_2}(u) \geq \beta\} &\subseteq \{u : F_{X_1}(u) \geq \beta\} \\ \text{mín}\{u : F_{X_1}(u) \geq \beta\} &\leq \text{mín}\{u : F_{X_2}(u) \geq \beta\} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$VaR_\beta(X_1) \leq VaR_\beta(X_2).$$

iv) De la definición de VaR tenemos

$$\begin{aligned}
VaR_{1-\beta}(-X) &= \min\{u : F_{-X}(u) \geq 1 - \beta\} \\
&= \min\{u : 1 - F_X(-u) \geq 1 - \beta\} \\
&= \min\{u : \beta \geq F_X(-u)\} \\
&= -\max\{-u : \beta \geq F_X(-u)\} \\
&= -\max\{u : \beta \geq F_X(u)\} \\
&= -\min\{u : F_X(u) \geq \beta\} \\
&= -VaR_\beta(X),
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se da porque X es una variable aleatoria continua.

Observación: Debemos resaltar que la medida de riesgo VaR no es convexa, sin embargo si es una medida **comonótona aditiva** esto es, si X_1 y X_2 son variables aleatorias comonótonas, entonces

$$VaR_\beta(X_1 + X_2) = VaR_\beta(X_1) + VaR_\beta(X_2). \quad (4.13)$$

Para más detalles puede seguir la referencia [12].

4.2.2. Conditional Value-at-Risk

Definición 4.2.2 Sean X una variable aleatoria y $\beta \in (0, 1)$, *Conditional Value-at-Risk*, denotado con **CVaR**, esta definido como

$$CVaR_\beta(X) = \inf\left\{a + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[X - a]^+ : a \in \mathbb{R}\right\}, \quad (4.14)$$

donde $[x]^+ = \max\{x; 0\}$.

Por Rockafellar y Uryasev (ref.[8]), tenemos que CVaR se puede expresar de forma equivalente como una esperanza condicional de la siguiente forma,

$$CVaR_\beta(X) = \mathbb{E}[X|X > VaR_\beta(X)]. \quad (4.15)$$

Muchas veces se suele dar esta última igualdad como definición principal de $CVaR_\beta$; si X es una variable de costo aleatoria entonces una interpretación de la expresión anterior es que $CVaR_\beta(X)$ es el promedio de los costos de X más allá del valor $VaR_\beta(X)$.

Observación: Debemos notar que el problema en (4.14) tiene siempre solución y una de ellas es VaR_β , es decir VaR_β es un minimizador de (4.14), para más detalles puede seguir la referencia [12].

Proposición 4.2.2 $CVaR_\beta$ posee las siguientes propiedades:

i) $CVaR_\beta$ es **positivamente homogénea**, es decir

$$CVaR_\beta(cX) = c.CVaR_\beta(X), \quad (4.16)$$

si $c > 0$.

ii) $CVaR_\beta$ es **equivariante por translación**, es decir

$$CVaR_\beta(X + c) = CVaR_\beta(X) + c, \quad (4.17)$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

iii) $CVaR_\beta$ es **monótona**, es decir, si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias tal que $X_1 \leq X_2$ con probabilidad 1, entonces

$$CVaR_\beta(X_1) \leq CVaR_\beta(X_2). \quad (4.18)$$

iv) Si X tiene densidad, entonces

$$\mathbb{E}(X) = (1 - \beta)CVaR_\beta(X) - \beta CVaR_{1-\beta}(-X). \quad (4.19)$$

v) $CVaR$ es **convexa**, es decir, sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias y $\lambda \in [0, 1]$,

$$CVaR_\beta(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda CVaR_\beta(X_1) + (1 - \lambda)CVaR_\beta(X_2). \quad (4.20)$$

Demostración: i) Sea $c > 0$, de la definición de $CVaR_\beta$ y de la Proposición 4.2.1 ítem (i), tenemos que

$$\begin{aligned} CVaR_\beta(cX) &= \mathbb{E}[cX | cX > VaR_\beta(cX)] \\ &= \mathbb{E}[cX | cX > cVaR_\beta(X)] \\ &= c.\mathbb{E}[X | X > VaR_\beta(X)] \\ &= c.CVaR_\beta(X). \end{aligned}$$

ii) Sea $c \in \mathbb{R}$, de la Proposición 4.2.1 ítem (ii) tenemos

$$\begin{aligned}
CVaR_\beta(X + c) &= \mathbb{E}[X + c | X + c > VaR_\beta(X + c)] \\
&= \mathbb{E}[X + c | X + c > c + VaR_\beta(X)] \\
&= \mathbb{E}[X + c | X > VaR_\beta(X)] \\
&= \mathbb{E}[X | X > VaR_\beta(X)] + c \\
&= CVaR_\beta(X) + c.
\end{aligned}$$

iii) Tenemos que para cualquier $a \in \mathbb{R}$,

$$CVaR_\beta(X_1) \leq a + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}[X_1 - a]^+$$

y como $X_1 \leq X_2$ entonces

$$\mathbb{E}[X_1 - a]^+ \leq \mathbb{E}[X_2 - a]^+$$

pues $y \mapsto [y - a]^+$ es no decreciente, luego

$$CVaR_\beta(X_1) \leq a + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}[X_2 - a]^+$$

por lo tanto,

$$CVaR_\beta(X_1) \leq CVaR_\beta(X_2).$$

iv) De la Proposición 4.2.1 ítem (iv), tenemos

$$\begin{aligned}
CVaR_{(1-\beta)}(-X) &= \mathbb{E}[-x | -X > VaR_{(1-\beta)}(-x)] \\
&= -\mathbb{E}[X | -X > -VaR_\beta(X)] \\
&= -\mathbb{E}[X | X < VaR_\beta(X)]
\end{aligned}$$

luego, $(1 - \beta)CVaR_\beta(X) - \beta CVaR_{1-\beta}(-X) =$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \beta)\mathbb{E}[X | X > VaR_\beta(X)] + \beta\mathbb{E}[X | X < VaR_\beta(X)] \\
&= (1 - \beta) \left(\frac{1}{1 - \beta} \int_{\Omega} X(w) 1_{\{X(w) > VaR_\beta(X)\}}(w) dP(w) \right) \\
&\quad + \beta \left(\frac{1}{\beta} \int_{\Omega} X(w) 1_{\{X(w) < VaR_\beta(X)\}}(w) dP(w) \right) \\
&= \int_{\Omega} X(w) [1_{\{X(w) > VaR_\beta(X)\}}(w) + 1_{\{X(w) < VaR_\beta(X)\}}(w)] dP(w) \\
&= \int_{\Omega} X(w) dP(w) \\
&= \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

v) Sea $\lambda \in (0, 1)$ y a_i tal que

$$CVaR_\beta(X_i) = a_i + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[X - a_i]^+$$

con $i = 1, 2$. Denotemos con $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$,

$$\begin{aligned} CVaR_\beta(X) &= \inf\left\{a + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 - a]^+ : a \in \mathbb{R}\right\} \\ &\leq \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 - \lambda a_1 - (1-\lambda)a_2]^+ \\ &\leq \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + \frac{1}{1-\beta} [\lambda \mathbb{E}[X_1 - a_1]^+ + (1-\lambda) \mathbb{E}[X_2 - a_2]^+] \\ &\leq \lambda \left[a_1 + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[X_1 - a_1]^+\right] + (1-\lambda) \left[a_2 + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[X_2 - a_2]^+\right] \\ &\leq \lambda CVaR_\beta(X_1) + (1-\lambda) CVaR_\beta(X_2). \end{aligned}$$

Observación:

- a) Notemos que por la Proposición anterior, CVaR es una Medida de Riesgo coherente.
- b) Las propiedades iii) y v) nos dice que si $C(\cdot, X)$, una función de costo que depende de una variable aleatoria X , es convexa entonces $CVaR_\beta(C(\cdot, X))$ también es convexa. Esta propiedad, de preservar la convexidad, como sabemos es importante para poder tratar los problemas de minimización con las herramientas que conocemos del análisis convexo.

4.2.3. Relaciones entre VaR y CVaR

Damos las relaciones entre VaR y CVaR en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.3 Sean X una variable aleatoria y un nivel $\beta \in (0, 1)$, tenemos

- i) $CVaR_\beta(X) \geq VaR_\beta(X)$.
- ii) $VaR_\beta(X) = \sup\{u : CVaR_\beta([X]^u) = u\}$, donde $[X]^c = \min(X, c)$.
- iii) Para X no negativa,

$$\left[\frac{\mathbb{E}(X^n) - (1-\beta)CVaR_\beta(X^n)}{\beta} \right]^{\frac{1}{n}} \longrightarrow VaR_\beta(X),$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración:

i) Debemos recordar aquí que $CVaR_\beta(X) = \inf\{a + \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[X - a]^+ : a \in \mathbb{R}\}$ y $VaR_\beta(X)$ es un minimizador de $CVaR_\beta$, luego

$$CVaR_\beta(X) = VaR_\beta(X) + \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[X - VaR_\beta(X)]^+ \geq VaR_\beta(X).$$

Para las demostraciones de ii) y iii) puede revisar la referencia [12].

4.2.4. Comparación de VaR y CVaR en problemas de optimización

Sea X un vector aleatorio, x un vector de decisión, $f_0(\cdot, X)$ una función lineal, f_k ($k = 1, \dots, M$) funciones lineales y un nivel $\beta \in (0, 1)$. Consideremos los siguientes problemas,

(a) Problema de Optimización VaR,

$$\begin{aligned} \min_x \quad & VaR_\beta(f_0(x, X)) \\ \text{s.t.} \quad & f_k(x) \geq 0 \quad k = 1, \dots, M \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.21)$$

(b) Problema de Optimización CVaR,

$$\begin{aligned} \min_x \quad & CVaR_\beta(f_0(x, X)) \\ \text{s.t.} \quad & f_k(x) \geq 0 \quad k = 1, \dots, M \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tenemos en general que (a) no es un problema convexo, sin embargo (b) si es un problema convexo y es más se puede escribir como un problema de PL, de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \min_{x,a} \quad & a + \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[Z] \\ \text{s.t.} \quad & Z \geq f_0(x, X) - a \quad \text{con probabilidad 1} \\ & f_k(x) \geq 0 \quad k = 1, \dots, M \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & Z \geq 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

y por último tenemos su representación discreta,

$$\begin{aligned} \min_{x,a,z} \quad & a + \frac{1}{(1-\beta)N} \sum_{i=1}^N z^i \\ \text{s.t.} \quad & z^i \geq f_0(x, x^i) - a \quad i = 1, \dots, N \\ & f_k(x) \geq 0 \quad k = 1, \dots, M \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & z^i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.24)$$

este es un problema que puede ser resuelto con PL. Para detalles sobre la solución puede seguir la referencia [8]. La técnica de pasar el modelo original a su forma discreta es llamado “Sample Average Approximation (SAA)”, para más detalles sobre este método puede seguir la referencia [18].

Como vimos el problema de Optimización CVaR se puede representar de forma sencilla como un problema de PL que puede ser resuelto con herramientas ya conocidas. Algo importante que debemos mencionar es que CVaR es la mejor aproximación convexa, por arriba, de VaR. Un resultado importante que encontramos en el artículo de Pflug [12], para el problema de portafolio, Problema VaR en a) con $f_0(x, X) = -x^T X$, es que la solución de este problema puede ser escrito como un punto fijo de Problemas CVaR.

Capítulo 5

El Problema de Despacho con Funciones Lineales a trozos

5.1. Descripción del Problema de Despacho con funciones lineales a trozos.

Consideremos un modelo con n agentes (nodos productores). Denotamos con $I = [1 \dots n]$ al conjunto de agentes; usamos i para referirnos a un agente específico y $-i$ para referirnos a $I \setminus \{i\}$. Denotamos con $J = [1 \dots N]$ al conjunto que usamos para indexar las zonas con costos marginales constantes y usamos j para numerar el coeficiente de costo del j -ésimo segmento. Escribimos $V(i)$, para denotar al conjunto de nodos diferentes de i conectados a i , y $E = \{(i_1, i_2) : i_1 \in V(i_2)\}$, al conjunto de aristas no dirigidas. Cada nodo $i \in I$ tiene una demanda inelástica d_i . Para cada $(i_1, i_2) \in E$, denotamos con r_{i_1, i_2} a la resistencia de la línea que conecta el nodo i_1 con el nodo i_2 ($r_{i_1, i_2} = r_{i_2, i_1}$) y con $h_{i, i'}$ al flujo de la línea orientada del nodo i al nodo i' .

El agente principal resuelve un problema basado en las ofertas que él recibe, denotadas con c_i^j , donde $i \in I$ corresponde al i -ésimo agente y $j \in J$ a la j -ésima zona con precio marginal constante ($c_i^j < c_i^{j+1}$). Con el fin de modelar el hecho de que los costos de producción son lineales a trozos con cambio de costo marginal en los multiples de \bar{q} ; sea q_i la cantidad total producida por el agente i , denotamos con q_i^j a la cantidad producida por el agente i al costo marginal c_i^j , así

$$q_i^j = \min\{[q_i - (j-1)\bar{q}]^+, \bar{q}\} \quad (5.1)$$

donde $[x]^+ = \max\{0, x\}$ y $q_i^j \leq \bar{q}$ para todo $i \in I, j \in J$. Luego la cantidad total

producida por el agente i es $q_i = \sum_{j \in J} q_i^j$ y el costo total de producción es

$$c(q) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j \quad (5.2)$$

Como vimos en el capítulo 3, el ISO resuelve el problema de minimizar el costo total de producción sujeto a balances nodales, restricciones de generación y transmisión, con el fin de determinar las cantidades que los generadores producen $q = (q_i)_{i \in I}$, manejando adecuadamente las restricciones de transmisión h . Así el Problema de Despacho del ISO, con los detalles anteriores, se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_{(q,h)} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \\ & h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i,i') \in E \\ & q_i^j \geq 0 \quad \forall (i,j) \in I \times J \\ & q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i,j) \in I \times J \end{aligned} \quad (5.3)$$

En la práctica, este modelo es más cercano a los problemas reales ya que por lo general las funciones de costo se presentan como funciones lineales a trozos o se pueden aproximar bien con ellas.

El modelo anterior ha sido estudiado por B. Heymann y A. Jofré y junto a este problema de optimización (Problema de Despacho) realizan el estudio de un modelo llamado “El problema del diseño del mecanismo optimal” (en inglés “The optimal mechanism design problem”), este es un problema que se modela y estudia con la importancia de evitar que alguno de los agentes generadores pueda ejercer poder de mercado, esto es que pueda influenciar en los costos de la energía y así obtener algún beneficio, para más detalles sobre este modelo puede revisar los artículos de los autores, citados al principio del párrafo, que damos en la bibliografía .

5.2. Caso ejemplo: Problema de Despacho Binodal

Antes de tratar el caso general descrito en la sección anterior, desarrollaremos un caso particular del modelo descrito que ha sido estudiado en el artículo de B. Heymann y A. Jofré [15].

Supongamos que tenemos 2 nodos y consideremos que las funciones de costo de producción de los agentes tienen dos trozos lineales cada uno. Denotemos con c_i al costo marginal del productor i ($i = 1, 2$) cuando su nivel de producción es menor que \bar{q} , y con \bar{c}_i cuando es mayor. Consideremos además que $c_i < \bar{c}_i$, esto es que las funciones de costo de producción son convexas, y que la demanda es igual a d en los dos nodos. Entonces el **Problema de Despacho Binodal** está dado por,

$$\begin{aligned} \min_{q_i, \bar{q}_i} \quad & c_1 q_1 + \bar{c}_1 \bar{q}_1 + c_2 q_2 + \bar{c}_2 \bar{q}_2 \\ \text{s.t.} \quad & q_i + \bar{q}_i + (-1)^i h - \frac{r h^2}{2} \geq d \quad i = 1, 2 \\ & q_i, \bar{q}_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \\ & q_i \leq \bar{q} \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

en donde denotamos con q_i y \bar{q}_i a la cantidad producida por el agente i al costo marginal c_i y \bar{c}_i respectivamente ($i = 1, 2$).

Denotaremos con λ_i ($i = 1, 2$) a los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones nodales dadas en la primera restricción, con μ_i y $\bar{\mu}_i$ ($i = 1, 2$) a los multiplicadores asociados a la segunda restricción y con γ_i ($i = 1, 2$) a los multiplicadores asociados a la tercera restricción. Además daremos las siguientes notaciones que nos ayudaran a simplificar los cálculos

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = d + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{r(\lambda_2 + \lambda_1)} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \right)^2 \quad (5.5)$$

$$P(h) = h + \frac{r h^2}{2} + d \quad (5.6)$$

$$k(\lambda_1, \lambda_2) = P \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{r(\lambda_2 + \lambda_1)} \right) \quad (5.7)$$

$$q_i^{tot} = q_i + \bar{q}_i \quad (5.8)$$

Hipótesis. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\bar{q} < 2d$ y $c_1 < c_2$.

Observación: Notemos que si $q_1 < \bar{q}$ entonces $\bar{q}_1 = 0$; pues como $c_1 < \bar{c}_1$ entonces para que $\bar{q}_1 > 0$ tendríamos que haber consumido lo máximo posible al precio c_1 , esto es que $q_1 = \bar{q}$.

Este problema se separa en dos casos, cuando $d < \bar{q}$ y cuando $d \geq \bar{q}$.

5.3. Caso: $d < \bar{q}$

Tenemos por hipótesis que $c_1 < c_2$, ocurre lo siguiente:

- (i) Entonces $q_1 \geq q_2$, ya que el costo marginal c_1 es menor y así la cantidad de producción solicitada a este precio sera mayor o igual a la cantidad solicitada a un precio mayor.
- (ii) Supongamos que $\bar{q}_2 > 0$ entonces $q_2 = \bar{q}$, esto es cuando se solicita energía al precio \bar{c}_2 entonces se debio de pedir la máxima cantidad de energía generada al precio c_2 (pues este precio es menor, $c_2 < \bar{c}_2$), además por el item (i) también tenemos que $q_1 = \bar{q}$, pues $\bar{q} \geq q_1 \geq q_2$. Luego $q_1 = q_2 > d$, pero esto no es optimal ya que en cada nodo se estaría pidiendo que genere mas energía de la requerida. Por lo tanto $\bar{q}_2 = 0$.

Además podemos quitar la restricción $q_2 < \bar{q}$ ya que esta restricción no juega un papel fundamental en la solución optimal, esto se analiza con el mismo razonamiento que hicimos en el item (ii). Así el problema (5.4) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \min_{q_i, \bar{q}_1} \quad & c_1 q_1 + \bar{c}_1 \bar{q}_1 + c_2 q_2 \\
 \text{s.t.} \quad & q_1 + \bar{q}_1 - h - \frac{r h^2}{2} \geq d \quad (\lambda_1) \\
 & q_2 + h - \frac{r h^2}{2} \geq d \quad (\lambda_2) \\
 & q_1, q_2, \bar{q}_1 \geq 0 \quad (\mu_i) \\
 & q_1 \leq \bar{q} \quad (\gamma_1).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

y las condiciones de primer orden son

$$c_1 - \lambda_1 - \mu_1 + \gamma_1 = 0 \tag{5.10}$$

$$c_2 - \lambda_2 - \mu_2 = 0 \tag{5.11}$$

$$\bar{c}_1 - \lambda_1 - \bar{\mu}_1 = 0 \tag{5.12}$$

$$h = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{r(\lambda_1 + \lambda_2)} \tag{5.13}$$

De aquí tenemos 4 subcasos que estudiamos a continuación.

5.3.1. Caso 1: Si $P\left(\frac{c_2 - c_1}{r(c_1 + c_2)}\right) \leq \bar{q}$.

Consideremos primero una relajación del problema (5.9), quitando la restricción $q_1 \leq \bar{q}$. Luego en este nuevo problema se tiene que $\bar{q}_1 = 0$, ya que $c_1 < \bar{c}_1$, así el problema se reduce a un problema de despacho con funciones de costo lineales, el cual por [16] se obtienen las soluciones de forma explícita

$$\lambda_1 = c_1, \quad \lambda_2 = c_2, \quad h = \frac{c_2 - c_1}{r(c_2 + c_1)}$$

y

$$q_1^{tot} = q_1 = d + h + \frac{r}{2}h^2, \quad q_2^{tot} = q_2 = d - h + \frac{r}{2}(-h)^2$$

esta solución es admisible al problema (5.9) y por lo tanto también es solución óptima de (5.9).

5.3.2. Caso 2: Si $P\left(\frac{c_2 - c_1}{r(c_1 + c_2)}\right) > \bar{q}$ y $P\left(\frac{c_2 - \bar{c}_1}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) \leq \bar{q}$.

Con estas hipótesis mostraremos que $\bar{q}_1 = 0$ y $q_1 = \bar{q}$.

- (i) Supongamos que primero que $\bar{q}_1 > 0$, entonces por las condiciones de holgura complementarias tenemos que $\bar{\mu}_1 = 0$, luego de (5.12) tenemos $\lambda_1 = \bar{c}_1$, y así en (5.13)

$$h = \frac{\lambda_2 - \bar{c}_1}{r(\lambda_2 + \bar{c}_1)}$$

De (5.11), $c_2 = \lambda_2 + \mu_2$ entonces $\lambda_2 \leq c_2$ y P es una función creciente, pues $P'(h) = 1 + rh > 0$. Además $g(x) = \frac{x - \bar{c}_1}{r(x + \bar{c}_1)}$ también es una función creciente, ya que $g'(x) = \frac{2\bar{c}_1}{r(x + \bar{c}_1)^2} \geq 0$. Luego $P(g(\lambda_2)) \leq P(g(c_2))$, esto es

$$P(h) \leq P\left(\frac{c_2 - \bar{c}_1}{r(c_2 + \bar{c}_1)}\right)$$

y de la hipótesis se tiene que

$$P(h) \leq \bar{q}$$

Luego del balance nodal del agente 1, tenemos que $P(h) \leq q^{tot}$ y así $q^{tot} \leq \bar{q}$, pero como $q_1 \leq \bar{q}$ entonces $\bar{q}_1 = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto se tiene que $\bar{q}_1 = 0$.

Por hipótesis tenemos que $\bar{q} < 2d$, $q_1 \leq \bar{q}$ y $\bar{q}_1 = 0$. Sumando los balances nodales de los 2 nodos, se tiene

$$q_1 + q_2 \geq rh^2 + 2d > rh^2 + \bar{q} \geq rh^2 + q_1 \geq q_1$$

entonces $q_2 > 0$, luego por las condiciones de complementaridad tenemos que $\mu = 0$, así de (5.11) tenemos que

$$\lambda_2 = c_2.$$

- (ii) Supongamos que $q_1 < \bar{q}$, entonces por condiciones de complementaridad $\gamma_1 = 0$; y como $q_1 > 0$ entonces también tenemos que $\mu_1 = 0$, así en (5.10) tenemos $c_1 = \lambda_1$.

Luego reemplazando estos valores en (5.13),

$$h = \frac{c_2 - c_1}{r(c_2 + c_1)}$$

luego $q_1^{tot} = q_1 + \bar{q}_1 \geq P\left(\frac{c_2 - c_1}{r(c_2 + c_1)}\right) > \bar{q}$, y como estamos suponiendo que $q_1 < \bar{q}$ entonces $\bar{q}_1 > 0$, que es una contradicción. Por lo tanto $q_1 = \bar{q}$.

Así hemos probado que $\bar{q}_1 = 0$ y $q_1 = \bar{q}$; y nuevamente nos encontramos en un caso líneal, el cual tiene la siguiente solución de acuerdo a la ref. [16],

$$q_1^{tot} = \bar{q} \quad y \quad q_2^{tot} = \bar{q} + 2 \left[\frac{1 - \sqrt{1 + 2r(\bar{q} - d)}}{r} \right].$$

5.3.3. Caso 3: Si $P\left(\frac{c_2 - c_1}{r(c_1 + c_2)}\right) > \bar{q}$ y $P\left(\frac{c_2 - \bar{c}_1}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) > \bar{q}$ y $P\left(\frac{\bar{c}_1 - c_2}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) > 0$.

En este caso mostraremos que $q_2 > 0$, $q_1 = \bar{q}$, $\bar{q}_1 > 0$ y $q_2 = P\left(\frac{\bar{c}_1 - c_2}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right)$.

- (i) Supongamos que $q_2 = 0$. De la segunda restricción en (5.9) tenemos

$$0 \geq -h + \frac{r}{2}(-h)^2 + d \implies 0 \geq P(-h)$$

Además como $2d > \bar{q}$, entonces $\bar{q}_1 > 0$, pues estamos suponiendo que $q_2 = 0$ y $\bar{q}_2 = 0$. Así por complementaridad $\mu_1 = 0$ y en (5.12),

$$\bar{c}_1 = \lambda_1$$

Sea $g_1(x) = \frac{\lambda_2 - x}{r(\lambda_2 + x)}$, está es una función decreciente, ya que $g_1'(x) = \frac{-2\lambda_2}{r(\lambda_2 + x)^2} < 0$. De (5.11) tenemos que $\lambda_2 \leq c_2$ y entonces $P(g_1(c_2)) \leq P(g_1(\lambda_2))$, esto es

$$P\left(\frac{\bar{c}_1 - c_2}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) \leq P\left(\frac{\bar{c}_1 - \lambda_2}{r(\bar{c}_1 + \lambda_2)}\right) = P(-h) \leq 0$$

esto es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto $q_2 > 0$.

De este ítem (i) tenemos por complementaridad que $\mu_2 = 0$ y así de (5.11) concluimos que

$$\lambda_2 = c_2.$$

- (ii) En este ítem supongamos que $q_1 < \bar{q}$. Entonces por complementaridad $\gamma_1 = 0$ y además $\mu_1 = 0$, ya que como $c_1 < \bar{c}_1$ entonces $\bar{q}_1 = 0$ y así $q_1 > 0$. Luego en (5.10), $c_1 = \lambda_1$ y reemplazando este valor en (5.13)

$$h = \frac{c_2 - c_1}{r(c_2 + c_1)}$$

Así de la hipótesis y de la primera restricción en (5.9), se tiene

$$q_1^{tot} \geq P\left(\frac{c_2 - c_1}{r(c_2 + c_1)}\right) > \bar{q}$$

entonces

$$q_1 = q_1^{tot} > \bar{q}$$

que es una contradicción con la hipótesis de este ítem. Por lo tanto se tiene que $q_1 = \bar{q}$.

- (iii) Supongamos que $\bar{q}_1 = 0$. De (5.12) tenemos $\lambda_1 - \bar{c}_1 = -\bar{\mu}_1 \leq 0$ entonces $\lambda_1 \leq \bar{c}_1$, además la función $g_2(x) = \frac{c_2 - x}{r(c_2 + x)}$ es decreciente, así $g_2(\bar{c}_1) \leq g_2(\lambda_1) = g(h)$ y como P es una función creciente se tiene,

$$q_1^{tot} \geq P(h) \geq P\left(\frac{c_2 - \bar{c}_1}{r(c_2 + \bar{c}_1)}\right) < \bar{q}$$

así $q_1^{tot} < \bar{q} \implies \bar{q}_1 > 0$, que es una contradicción con la suposición que hicimos en este ítem. Por lo tanto $\bar{q}_1 > 0$.

Esto nos lleva por complementaridad a que $\bar{\mu}_1 = 0$, así en (5.12) tenemos,

$$\lambda_1 = \bar{c}_1.$$

- (iv) Sabemos que $\bar{q}_2 = 0$. Entonces de la segunda restricción en (5.9), tenemos que

$$q_2 \geq -h + \frac{r}{2}h^2 + d = P(-h)$$

$$q_2 \geq P\left(\frac{\bar{c}_1 - c_2}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right)$$

y como estamos minimizando el costo total, se debe de tener que

$$q_2 = P\left(\frac{\bar{c}_1 - c_2}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right)$$

Además de la primera restricción en (5.9) tenemos,

$$\bar{q} + \bar{q}_1 \geq h + \frac{r}{2}h^2 + d \implies \bar{q}_1 \geq P\left(\frac{c_2 - \bar{c}_1}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) - \bar{q}$$

y por el mismo argumento anterior se tiene que

$$\bar{q}_1 = P\left(\frac{c_2 - \bar{c}_1}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) - \bar{q}$$

Por lo tanto el problema está resuelto.

5.3.4. Caso 4: Si $P\left(\frac{c_2 - c_1}{r(c_1 + c_2)}\right) > \bar{q}$ y $P\left(\frac{c_2 - \bar{c}_1}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) > \bar{q}$ y $P\left(\frac{\bar{c}_1 - c_2}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) \leq 0$.

Mostraremos aquí que $q_2 = 0$.

Supongamos por contradicción que $q_2 > 0$ entonces por complementaridad $\mu_2 = 0$ y así en (5.11),

$$\lambda_2 = c_2$$

con esta información podemos proceder como lo hicimos en los items (ii) y (iii) del caso 3, y obtener que $q_1 = \bar{q}$ y $\bar{q}_1 > 0$, luego por complementaridad $\bar{\mu}_1 = 0$ y así de (5.12)

$$\lambda_1 = \bar{c}_1$$

Reemplazando los valores de λ_1 y λ_2 en (5.13),

$$h = -\frac{\bar{c}_1 - c_2}{r(\bar{c}_1 + c_2)}$$

Por hipótesis tenemos que

$$P(-h) = P\left(\frac{\bar{c}_1 - c_2}{r(\bar{c}_1 + c_2)}\right) \leq 0$$

y de la segunda restricción en (5.9) que

$$q_2 \geq -h + \frac{r}{2}(-h)^2 + d = P(-h)$$

así que la restricción se satisface tomando $q_2 = 0$, que es una contradicción con la suposición que hicimos al inicio de este caso. Por lo tanto $q_2 = 0$.

Luego el problema puede ser resuelto, y la solución por la ref. [16] esta dada por,

$$q_1^{tot} = 2 \left[\frac{1 - \sqrt{1 - 2dr}}{r} \right] \quad y \quad q_2^{tot} = 0.$$

Resumimos estos 4 subcasos estudiados en el siguiente Teorema.

Teorema 5.3.1 Si $d < \bar{q} < 2d$, entonces

1. Si $k(c_1, c_2) \leq \bar{q}$,

$$q_1^{tot} = k(c_1, c_2) \quad y \quad q_2^{tot} = k(c_2, c_1)$$

2. Si $k(c_1, c_2) > \bar{q}$ y $k(\bar{c}_1, c_2) \leq \bar{q}$,

$$q_1^{tot} = \bar{q} \quad y \quad q_2^{tot} = \bar{q} - 2 \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 2r(\bar{q} - d)}}{r} \right]$$

3. Si $k(c_1, c_2) > \bar{q}$, $k(\bar{c}_1, c_2) > \bar{q}$ y $k(c_2, \bar{c}_1) > 0$,

$$q_1^{tot} = k(\bar{c}_1, c_2) \quad y \quad q_2^{tot} = k(c_2, \bar{c}_1)$$

4. Si $k(c_1, c_2) > \bar{q}$, $k(\bar{c}_1, c_2) > \bar{q}$ y $k(c_2, \bar{c}_1) \leq 0$,

$$q_1^{tot} = 2 \left[\frac{1 - \sqrt{1 - 2dr}}{r} \right] \quad y \quad q_2^{tot} = 0.$$

5.4. Caso: $d \geq \bar{q}$

Aquí el problema se divide en los 2 siguientes subcasos.

5.4.1. Caso 1: Si $c_i \leq \bar{c}_j$, con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$.

Notemos que por hipótesis $d \geq \bar{q}$ y $q_i \leq \bar{q}$, entonces primero se debe solicitar la máxima cantidad de energía posible a los precios c_i , esto es $q_1 = q_2 = \bar{q}$, y aún no hemos satisfecho la demanda. El problema (5.4) se escribe entonces de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \min_{\bar{q}_i} \quad & \bar{c}_1 \bar{q}_1 + \bar{c}_2 \bar{q}_2 \\ \text{s.t.} \quad & \bar{q}_1 - h \geq \frac{r}{2} h^2 + d - \bar{q} \quad (\lambda_1) \\ & \bar{q}_2 + h \geq \frac{r}{2} h^2 + d - \bar{q} \quad (\lambda_2) \\ & \bar{q}_1, \bar{q}_2 \geq 0 \quad (\bar{\mu}_i) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Que es un problema de optimización lineal con demanda $d - \bar{q}$ y costos \bar{c}_i , y este problema puede ser resuelto.

5.4.2. Caso 2: Si $\bar{c}_1 < c_2$.

Debemos notar que este es el último caso, dadas las suposiciones que hemos hecho sobre los precios marginales, esto es $c_1 < \bar{c}_1 < c_2 < \bar{c}_2$.

En la siguiente sección veremos que F es interpretada como la función de producción; luego tenemos los siguientes 2 subcasos.

(i) Si $0 \leq F(c_2, \bar{c}_1) \leq \bar{q}$. Primero notemos que como $c_1 < c_2$ y $d \geq \bar{q}$ entonces $q_1 = \bar{q}$ y esto también vale para el item (ii).

Ahora como $F(c_2, \bar{c}_1) \leq \bar{q}$ entonces quiere decir que la cantidad producida al precio c_2 es menor que \bar{q} , luego debe pasar que $\bar{q}_2 = 0$. Así el problema se reduce nuevamente a un problema lineal con cantidad demandada igual a d y costos marginales \bar{c}_1 y c_2 .

(ii) Si $F(c_2, \bar{c}_1) > \bar{q}$. En este caso se tiene que $q_2 = \bar{q}$, luego nuevamente estamos en un problema de optimización lineal con demanda igual a $d - \bar{q}$ y costos marginales \bar{c}_1 y \bar{c}_2 .

Por lo tanto resumimos este caso en el siguiente Teorema, dado en [15].

Teorema 5.4.1 Si $d \geq \bar{q}$, entonces

1. Si $c_i \leq \bar{c}_j$, con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$, entonces el problema se reduce al problema de despacho lineal con demanda $d - \bar{q}$ y costos \bar{c}_i .
2. Si $0 \leq F(c_2, \bar{c}_1) \leq \bar{q}$, entonces el problema de despacho se reduce al caso lineal con demanda d y costos marginales \bar{c}_1 y c_2 .
3. Si $F(c_2, \bar{c}_1) > \bar{q}$, entonces el problema nuevamente se reduce a un problema de despacho lineal con demanda $d - \bar{q}$ y costos marginales \bar{c}_1 y \bar{c}_2 .

5.5. Estudio del Caso general

De igual forma como en el caso binodal, sean $\lambda_i, \gamma_{i,i'}, \mu_{i,j}$ y $\nu_{i,j}$ (todos en \mathbb{R}_+) los multiplicadores de Lagrange asociados al problema de despacho (5.3),

$$\begin{aligned}
& \min_{(q,h)} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i(\lambda_i) \quad \forall i \in I \\
& \qquad \qquad \qquad h_{i,i'} \geq 0 \quad (\gamma_{i,i'}) \quad \forall (i,i') \in E \\
& \qquad \qquad \qquad q_i^j \geq 0 \quad (\mu_{i,j}) \quad \forall (i,j) \in I \times J \\
& \qquad \qquad \qquad q_i^j \leq \bar{q} \quad (\nu_{i,j}) \quad \forall (i,j) \in I \times J
\end{aligned} \tag{5.15}$$

5.5.1. Hipótesis

Asumiremos que,

$$d_i - \sum_{i' \in V(i)} \frac{1}{2r_{i,i'}} < 0 \quad \text{y} \quad d_i + \sum_{i' \in V(i)} \frac{3}{2r_{i,i'}} > N\bar{q}. \quad (5.16)$$

Observación: La hipótesis (5.16) nos dice que requerimos que las resistencias de línea $r_{i,j}$ sean suficientemente pequeñas, que es algo que se pide que pase en la mayoría de problemas.

5.5.2. Función de producción

Para cada $i \in I$, definamos F_i para cada $\lambda \in [\text{mín}_{i \in I}(c_i^1), \text{máx}_{i \in I}(c_i^N)]^n$ como,

$$F_i(\lambda_i, \lambda_{-i}) = d_i + \sum_{i' \in V(i)} \frac{\lambda_{i'} - \lambda_i}{r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})} + \frac{(\lambda_{i'} - \lambda_i)^2}{2r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})^2} \quad (5.17)$$

Observación: Debemos notar que se está definiendo para cada $k \in I$,

$$\lambda_k \in [\text{mín}_{i \in I}(c_i^1), \text{máx}_{i \in I}(c_i^N)]$$

y esto nos dice que cada coordenada de λ debe de ser mayor o igual al menor de todos los costos y menor o igual al mayor de todos los costos nodales, recordemos que estamos considerando que $c_i^j < c_i^{j+1}, \forall i \in I, j \in J$.

Derivadas parciales de F_i : Tenemos que la derivada parcial de F_i con respecto de λ_i es

$$\partial_{\lambda_i} F_i(\lambda_i, \lambda_{-i}) = - \sum_{i' \in V(i)} \frac{4\lambda_{i'}^2}{r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})^3} < 0 \quad (5.18)$$

Esto nos dice que si el productor del nodo i aumenta su precio entonces se le asignará menos producción.

La derivada parcial de F_i con respecto de $\lambda_{i'}, i' \in I \setminus \{i\}$ es

$$\partial_{\lambda_{i'}} F_i(\lambda_i, \lambda_{-i}) = \frac{4\lambda_{i'}\lambda_i}{r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})^3} > 0, \quad \text{si } i' \in V(i), \quad (5.19)$$

y $\partial_{\lambda_{i'}} F_i(\lambda_i, \lambda_{-i}) = 0$, si $i' \notin V(i)$. Significando que cuando otro agente $i' \in I \setminus \{i\}$ aumenta su precio entonces se le asignará mayor producción al agente i .

5.5.3. Límites de F_i

Sea $k \in J \cup \{0\}$ y sea la función $x \mapsto F_i(x, \lambda_{-i}) - k\bar{q}$. Calculemos sus límites hacia el ∞ y 0,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x, \lambda_{-i}) - k\bar{q} &= \lim_{x \rightarrow \infty} d_i + \sum_{j \in V(i)} \frac{\lambda_j - x}{r_{i,j}(x + \lambda_j)} + \frac{(\lambda_j - x)^2}{2r_{i,j}(x + \lambda_j)^2} - k\bar{q} \\ &= d_i + \sum_{j \in V(i)} -\frac{1}{r_{i,j}} + \frac{1}{2r_{i,j}} - k\bar{q} \\ &= d_i - k\bar{q} - \sum_{j \in V(i)} \frac{1}{2r_{i,j}} \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F_i(x, \lambda_{-i}) - k\bar{q} &= d_i + \sum_{j \in V(i)} \frac{\lambda_j}{r_{i,j}(\lambda_j)} + \frac{(\lambda_j)^2}{2r_{i,j}(\lambda_j)^2} - k\bar{q} \\ &= d_i - k\bar{q} + \sum_{j \in V(i)} \frac{1}{r_{i,j}} + \frac{1}{2r_{i,j}} \\ &= d_i - k\bar{q} + \sum_{j \in V(i)} \frac{3}{2r_{i,j}} \end{aligned}$$

En resumen tenemos que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x, \lambda_{-i}) - k\bar{q} = d_i - k\bar{q} - \sum_{j \in V(i)} \frac{1}{2r_{i,j}} \quad (5.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F_i(x, \lambda_{-i}) - k\bar{q} = d_i - k\bar{q} + \sum_{j \in V(i)} \frac{3}{2r_{i,j}} \quad (5.21)$$

De la hipótesis que impusimos en la subsección 5.5.1, como $-k\bar{q} \leq 0$ y $N\bar{q} - k\bar{q} \geq 0$ (pues $N \geq k$) tenemos que el límite (5.20) es estrictamente negativo y el límite (5.21) es estrictamente positivo. Así por el Teorema del valor intermedio $F_i(\cdot, \lambda_{-i}) - k\bar{q}$ tiene un cero, además este cero es único ya que por (5.18) tenemos que $F_i(\cdot, \lambda_{-i}) - k\bar{q}$ es una función decreciente en λ_i .

Ahora definimos para cada $i \in I$ y $k \in J \cup \{0\}$, la función g_i^k como la función que asocia cualquier $\lambda_{-i} \in [\min_{i \in I}(c_i^1), \max_{i \in I}(c_i^N)]^{n-1}$ con el único x conseguido anteriormente, esto es

$$F_i(g_i^k(\lambda_{-i}), \lambda_{-i}) = k\bar{q} \quad (5.22)$$

y

$$g_i^k(\lambda_{-i}) > 0 \quad (5.23)$$

Lema 5.5.1 Para cualquier $i \in I$, $k \in J \cup \{0\}$, $\lambda_{-i} \in [\text{mín}_{i \in I}(c_i^1), \text{máx}_{i \in I}(c_i^N)]^{n-1}$ y $i' \in V(i)$, tenemos

$$\partial_{\lambda_{i'}} g_i^k(\lambda_{-i}) > 0 \quad (5.24)$$

En particular, g_i^k es creciente en λ_{-i} , $i' \in V(i)$.

Prueba. Derivando (5.22) con respecto de λ_{-i} , tenemos

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_i} \frac{\partial g_i^k(\lambda_{-i})}{\partial \lambda_{i'}} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_{i'}} \frac{\partial \lambda_{i'}}{\partial \lambda_{i'}} = 0$$

entonces,

$$\frac{\partial g_i^k(\lambda_{-i})}{\partial \lambda_{i'}} = -\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_{i'}} / \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_i}$$

así de (5.18) y (5.19) tenemos que,

$$\frac{\partial g_i^k(\lambda_{-i})}{\partial \lambda_{i'}} > 0.$$

Proposición 5.5.1 La función $g_i^k(\lambda_{-i})$ es decreciente en k .

Prueba. Supongamos que $g_i^k(\lambda_{-i})$ no es decreciente, entonces existe un k tal que

$$g_i^{k+1}(\lambda_{-i}) > g_i^k(\lambda_{-i}),$$

como la función F_i es estrictamente decreciente en λ_i tenemos que,

$$\begin{aligned} F_i(g_i^{k+1}(\lambda_{-i}), \lambda_{-i}) &< F_i(g_i^k(\lambda_{-i}), \lambda_{-i}) \\ (k+1)\bar{q} &< k\bar{q} \\ \bar{q} &< 0, \end{aligned}$$

que es una contradicción.

Supongamos que podemos aplicar el Teorema de dualidad fuerte al problema de optimización (5.15), entonces

$$\begin{aligned} &\text{mín}_{q,h} \text{máx}_{\lambda,\gamma,\nu,\mu} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + \sum_{i \in I} \lambda_i \{d_i - (\sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'})\} \\ &- \sum_{(i,i') \in E} \gamma_{i,i'} h_{i,i'} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \nu_{i,j} (q_i^j - \bar{q}) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mu_{i,j} q_i^j \\ &= \text{máx}_{\lambda,\gamma,\nu,\mu} \text{mín}_{q,h} \sum_{i \in I} \lambda_i d_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j (c_i^j - \lambda_i + \nu_{i,j} - \mu_{i,j}) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \nu_{i,j} \bar{q} - \sum_{(i,i') \in E} \lambda_i h_{i',i} \\ &+ \sum_{(i,i') \in E} \lambda_i h_{i,i'} + \frac{1}{2} \sum_{(i,i') \in E} \lambda_i r_{i,i'} h_{i,i'}^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,i') \in E} \lambda_i r_{i,i'} h_{i',i}^2 - \sum_{(i,i') \in E} \gamma_{i,i'} h_{i,i'} = * \end{aligned}$$

Debemos notar que,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \sum_{i' \in V(i)} \lambda_i h_{i',i} &= \sum_{(i,i') \in E} \lambda_i h_{i',i} \\ \sum_{(i,i') \in E} \lambda_i h_{i',i} &= \sum_{(i',i) \in E} \lambda_{i'} h_{i,i'} = \sum_{(i,i') \in E} \lambda_{i'} h_{i,i'}\end{aligned}$$

así en la igualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned} * &= \max_{\lambda, \gamma, \nu, \mu} \min_{q, h} \sum_{i \in I} \lambda_i d_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} [q_i^j (c_i^j - \lambda_i + \nu_{i,j} - \mu_{i,j}) - \nu_{i,j} \bar{q}] \\ &+ \sum_{(i,i') \in E} [h_{i,i'} (\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'}) + r_{i,i'} h_{i,i'}^2 (\frac{\lambda_i + \lambda_{i'}}{2})]\end{aligned}$$

Luego para cualquier $(i, i') \in E$ por condiciones de primer orden, tenemos derivando la función objetivo del problema anterior con respecto de $h_{i,i'}$ que

$$\begin{aligned}\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'} + 2r_{i,i'} h_{i,i'} (\frac{\lambda_i + \lambda_{i'}}{2}) &= 0 \\ h_{i,i'} &= \frac{\gamma_{i,i'} + \lambda_{i'} - \lambda_i}{r_{i,i'} (\lambda_i + \lambda_{i'})}\end{aligned}\tag{5.25}$$

reemplazando el valor de $h_{i,i'}$ en el problema anterior, se tiene

$$\begin{aligned} * &= \max_{\lambda, \gamma, \nu, \mu} \min_q \sum_{i \in I} \lambda_i d_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} [q_i^j (c_i^j - \lambda_i + \nu_{i,j} - \mu_{i,j}) - \nu_{i,j} \bar{q}] \\ &+ \sum_{(i,i') \in E} [(\frac{\gamma_{i,i'} + \lambda_{i'} - \lambda_i}{r_{i,i'} (\lambda_i + \lambda_{i'})}) \cdot (\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'}) + r_{i,i'} (\frac{\gamma_{i,i'} + \lambda_{i'} - \lambda_i}{r_{i,i'} (\lambda_i + \lambda_{i'})})^2 \cdot (\frac{\lambda_i + \lambda_{i'}}{2})] \\ &= \max_{\lambda, \gamma, \nu, \mu} \min_q \sum_{i \in I} \lambda_i d_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} [q_i^j (c_i^j - \lambda_i + \nu_{i,j} - \mu_{i,j}) - \nu_{i,j} \bar{q}] \\ &+ \sum_{(i,i') \in E} [\frac{-(\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'})^2}{r_{i,i'} (\lambda_i + \lambda_{i'})} + \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'})^2}{2r_{i,i'} (\lambda_i + \lambda_{i'})}] \\ &= \max_{\lambda, \gamma, \nu, \mu} \min_q \sum_{i \in I} \lambda_i d_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} [q_i^j (c_i^j - \lambda_i + \nu_{i,j} - \mu_{i,j}) - \nu_{i,j} \bar{q}] - \sum_{(i,i') \in E} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'})^2}{2r_{i,i'} (\lambda_i + \lambda_{i'})}\end{aligned}$$

Como los $q_i^j \geq 0$ entonces tenemos el siguiente problema dual equivalente al anterior

$$\begin{aligned}\max_{\lambda, \gamma, \nu, \mu} \quad & \sum_{i \in I} \lambda_i d_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \nu_{i,j} \bar{q} - \sum_{(i,i') \in E} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'})^2}{2r_{i,i'} (\lambda_i + \lambda_{i'})} \\ \text{s.t.} \quad & c_i^j - \lambda_i + \nu_{i,j} - \mu_{i,j} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in I \times J.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Luego derivando la función objetivo de (5.26) con respecto de $\gamma_{i,i'}$ e igualando a 0, tenemos

$$\frac{2(\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'}) \cdot (-1)}{2r_{i,i'} (\lambda_i + \lambda_{i'})} = 0$$

entonces,

$$\gamma_{i,i'} = \lambda_i - \lambda_{i'}$$

y notemos que si $\lambda_i - \lambda_{i'} \leq 0$ entonces $\gamma_{i,i'} = 0$, pues por hipótesis $\gamma_{i,i'} \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto para cualquier $(i, i') \in E$, tenemos

$$\gamma_{i,i'} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } \lambda_i \leq \lambda_{i'} \\ \lambda_i - \lambda_{i'} & , \quad \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (5.27)$$

Observación: Debemos notar que,

$$\sum_{(i,i') \in E} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'} - \gamma_{i,i'})^2}{2r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})} = \sum_{(i,i') \in E} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})^2}{4r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})}$$

ya que si $(i, i') \in E$ entonces $(i', i) \in E$, así que tendremos que juntos (i, i') y (i', i) solo agregan un elemento a la suma de la izquierda igual a $\frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})^2}{2r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})}$.

Luego (5.26) es equivalente a,

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, \nu, \mu} \quad & \sum_{i \in I} \lambda_i d_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \nu_{i,j} \bar{q} - \sum_{(i,i') \in E} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})^2}{4r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})} \\ \text{s.t.} \quad & c_i^j + \nu_{i,j} \geq \lambda_i + \mu_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in I \times J. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Como μ no afecta la admisibilidad de los otros multiplicadores y tampoco afecta a la función objetivo de (5.28), tenemos el siguiente problema dual equivalente

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, \nu} \quad & \sum_{i \in I} \lambda_i d_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \nu_{i,j} \bar{q} - \sum_{(i,i') \in E} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})^2}{4r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})} \\ \text{s.t.} \quad & c_i^j + \nu_{i,j} \geq \lambda_i, \quad \forall (i, j) \in I \times J. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ahora de la restricción en (5.29), $\nu_{i,j} \geq \lambda_i - c_i^j$ y surgen los siguientes casos.

Caso 1: Si $\lambda_i - c_i^j > 0$, entonces $\nu_{i,j} = \lambda_i - c_i^j$ pues estamos buscando el máximo de la función objetivo.

Caso 2: Si $\lambda_i - c_i^j \leq 0$, entonces $\nu_{i,j} = 0$.

Por lo tanto, para cualquier $(i, j) \in I \times J$

$$\nu_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } \lambda_i \leq c_i^j \\ \lambda_i - c_i^j & , \quad \text{si } \lambda_i > c_i^j. \end{cases} \quad (5.30)$$

Luego, podemos escribir (5.29) como,

$$\max_{\lambda \geq 0} \sum_{i \in I} \left\{ \lambda_i d_i - \bar{q} \sum_{j \in J} (\lambda_i - c_i^j) \cdot \delta_{\lambda_i \geq c_i^j} - \sum_{i' \in V(i)} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})^2}{4r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})} \right\} \quad (5.31)$$

donde

$$\delta_{x \geq y} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x \geq y \\ 0 & , \quad \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (5.32)$$

Para cada $i \in I$, las funciones $\lambda_i \mapsto$

$$\lambda_i d_i - \bar{q} \sum_{j \in J} (\lambda_i - c_i^j) \cdot \delta_{\lambda_i \geq c_i^j} - \sum_{i' \in V(i)} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})^2}{4r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})} \quad (5.33)$$

son estrictamente cóncavas para cualquier λ_{-i} , pues es suma de funciones cóncavas y estrictamente cóncavas.

Así podemos resolver los problemas por separado, para cada $i \in I$

$$\max_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i d_i - \bar{q} \sum_{j \in J} (\lambda_i - c_i^j) \cdot \delta_{\lambda_i \geq c_i^j} - \sum_{i' \in V(i)} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})^2}{4r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})} \quad (5.34)$$

y denotamos con $\Lambda_i(\lambda_{-i})$ a su maximizador.

Calculamos a continuación el subdiferencial de (5.33). Tenemos primero que el subdiferencial de

$$\bar{q} \sum_{j \in J} (\lambda_i - c_i^j) \cdot \delta_{\lambda_i \geq c_i^j} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } \lambda_i < c_i^1 \\ \bar{q}(j\lambda_i - \sum_{k=1}^j c_i^k) & , \quad \text{si } c_i^j \leq \lambda_i < c_i^{j+1} \\ \bar{q}(N\lambda_i - \sum_{k=1}^N c_i^k) & , \quad \text{si } \lambda_i \geq c_i^N \end{cases}$$

es,

$$K_i(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } \lambda_i < c_i^1 \\ [j-1, j]\bar{q} & , \quad \text{si } \lambda_i = c_i^j \\ j\bar{q} & , \quad \text{si } \lambda_i \in]c_i^j, c_i^{j+1}[, j \neq N \\ N\bar{q} & , \quad \text{si } \lambda_i > c_i^N \end{cases} \quad (5.35)$$

además, la derivada de

$$\lambda_i d_i - \sum_{i' \in V(i)} \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})^2}{4r_{i,i'}(\lambda_i + \lambda_{i'})} \quad (5.36)$$

es igual a $F_i(\lambda_i, \lambda_{-i})$; luego el subdiferencial de (5.33), está dado por

$$F_i(\lambda_i, \lambda_{-i}) - K_i(\lambda_i) \quad (5.37)$$

y así las condiciones de primer orden para el problema (5.34), es que

$$0 \in F_i(\Lambda_i, \lambda_{-i}) - K_i(\Lambda_i) \quad (5.38)$$

Resumimos todo lo desarrollado anteriormente con el siguiente Lema.

Lema 5.5.2 Para cualquier $i \in I$ y $\lambda_{-i} \in [\min_{i \in I}(c_i^1), \max_{i \in I}(c_i^N)]^{n-1}$, $\Lambda_i(\lambda_{-i})$ es la única solución de

$$F_i(\Lambda_i, \lambda_{-i}) \in K_i(\Lambda_i). \quad (5.39)$$

Capítulo 6

Problema de Despacho con Riesgo

Queremos introducir en el Problema de Despacho del ISO, con funciones de costo lineales a trozos estudiado en el capítulo anterior, generadores de energía renovable no convencional, es así que debemos de tener en cuenta que la producción máxima de estos productores es incierta, esto es que la producción máxima es una variable aleatoria. Planteamos primero un modelo con restricciones deterministas en la siguiente sección y luego de ello planteamos el modelo de restricciones con variables aleatorias, en ambos casos la capacidad máxima de energía es aleatoria, en el primer caso no se considera esto en las restricciones y en el segundo si.

6.1. Modelamiento e introducción de Productores de energía con capacidad máxima de producción aleatoria.

Consideraremos aquí las notaciones hechas para modelamiento del Problema de Despacho con funciones lineales a trozos estudiado en el capítulo 5.

Denotemos con $I_R \subseteq I$ al conjunto de productores de energía (renovable no convencional) con capacidad máxima aleatoria, $|I_R| = m$ ($m \leq n$), y denotaremos con \bar{y}_i a la capacidad máxima que pueden generar los productores de energía renovable no convencional, notemos que este si es un número que por lo general lo conocemos.

Sean $q = (q_1, \dots, q_m)$ el vector energía producida por los generadores $k \in I_R$ e $y = (y_1, \dots, y_m)$ el vector aleatorio de capacidades máximas de generación. Denotamos con $\epsilon_k = q_k - y_k(w)$ a la pérdida de carga, cuando la energía máxima actual $y_k(w)$ es menor que el valor de despacho q_k . Si las funciones de costo de producción del productor

$k \in I_R$ es $p_k(q_k)$, entonces definimos la función de pérdida $L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(q, y) = \sum_{k \in I_R, \epsilon_k > 0} p_k(q_k - y_k), \quad (6.1)$$

notemos que esta función depende de la cantidad de producción q y del vector aleatorio y ; además que para cada q , $L(q, y)$ es una variable aleatoria con función de distribución en \mathbb{R} inducida por la distribución de y . Denotemos con $p(y)$ a la densidad de $y = (y_k)_{k \in I_R}$, y consideremos por conveniencia que sus densidades marginales son independientes.

La probabilidad de que la pérdida $L(q, y)$ no exceda α está dada por

$$\Phi(q, \alpha) = \int_{L(q, y) \leq \alpha} p(y) dy. \quad (6.2)$$

Para un q fijo, $\Phi(q, \cdot)$ es la función de distribución acumulada de las pérdidas asociadas a q . Los valores de VaR y CVaR para las pérdidas aleatorias asociadas con q y para un nivel de probabilidad específico $\beta \in (0, 1)$, vienen dados por

$$VaR_\beta(q) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : \Phi(q, \alpha) \geq \beta\}$$

y

$$CVaR_\beta(q) = \frac{1}{1 - \beta} \int_{L(q, y) \geq VaR_\beta(q)} L(q, y) p(y) dy$$

Seguendo Rockafellar and Uryasev [10], tenemos que $CVaR_\beta$ puede ser expresado como un problema de minimización. Sea $F_\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F_\beta(q, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_{y \in \mathbb{R}^m} [L(q, y) - \alpha]^+ p(y) dy, \quad (6.3)$$

donde $[x]^+ = \max\{0, x\}$, y así el $CVaR_\beta(q)$ de las pérdidas asociadas con el despacho de energía q preprogramada puede ser calculado por

$$CVaR_\beta(q) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(q, \alpha) \quad (6.4)$$

Observación: Debemos notar que $F_\beta(q, \alpha)$ es una función convexa con respecto de α .

Luego el ISO desea resolver el siguiente **CVaR - Problema de Despacho**:

$$\begin{aligned}
\min_{q_i^j} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + CVaR_\beta(q_k)_{k \in I_R} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \\
& h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i,i') \in E \\
& q_i^j \geq 0 \quad \forall (i,j) \in I \times J \\
& q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i,j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& q_i = \sum_{j \in J} q_i^j \leq \bar{y}_i \quad \forall i \in I_R.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Por lo discutido anteriormente, podemos expresar el último problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\min_{q_i^j, \alpha} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + F_\beta(q_k, \alpha)_{k \in I_R} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \\
& h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i,i') \in E \\
& q_i^j \geq 0 \quad \forall (i,j) \in I \times J \\
& q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i,j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& q_i = \sum_{j \in J} q_i^j \leq \bar{y}_i \quad \forall i \in I_R.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

reemplazando el valor de F_β , tenemos

$$\begin{aligned}
\min_{q_i^j, \alpha} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + \left(\alpha + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}_{P_y}[L(q, y) - \alpha]^+ \right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \\
& h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i,i') \in E \\
& q_i^j \geq 0 \quad \forall (i,j) \in I \times J \\
& q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i,j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& q_i = \sum_{j \in J} q_i^j \leq \bar{y}_i \quad \forall i \in I_R.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

A continuación damos algunos casos particulares de este problema, en los cuales se transforman en problemas mas sencillos y en muchos casos pueden resolverse.

Por lo general, en la práctica, y es una variable aleatoria continua, pero muchas veces se puede hacer una buena aproximación usando un número de escenarios suficientemente grande. Si consideramos que podemos aproximar $F_\beta(q_k, \alpha)_{k \in I_R}$ usando escenarios $y(s)$ ($s = 1, \dots, S$), que son una muestra de la función de densidad $p(y)$

y suponemos que tienen la misma probabilidad de ocurrencia ($\frac{1}{S}$), entonces de (6.7) tenemos,

$$\begin{aligned}
\min_{q_i^j, \alpha} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + \left(\alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{s=1}^S [L(q, y(s)) - \alpha]^+ \right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \\
& h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i, i') \in E \\
& q_i^j \geq 0 \quad \forall (i, j) \in I \times J \\
& q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i, j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& q_i = \sum_{j \in J} q_i^j \leq \bar{y}_i \quad \forall i \in I_R.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

En este problema si consideramos que las funciones de costo de los productores de energía renovable son lineales, la función de pérdida $L(q, y)$ es lineal, y que $r = 0$, así el conjunto factible de (6.8) esta dado por funciones lineales, entonces (6.8) tiene la siguiente forma equivalente,

$$\begin{aligned}
\min_{q_i^j, z, \alpha} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + \left(\alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{s=1}^S z(s) \right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \\
& h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i, i') \in E \\
& q_i^j \geq 0 \quad \forall (i, j) \in I \times J \\
& q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i, j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& q_i = \sum_{j \in J} q_i^j \leq \bar{y}_i \quad \forall i \in I_R \\
& L(q, y(s)) - \alpha \leq z(s) \quad s = 1, \dots, S \\
& z(s) \geq 0 \quad s = 1, \dots, S.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Este es un problema de optimización convexa que puede ser resuelto con técnicas usuales de PL, ya que sus restricciones son lineales.

En la práctica es inusual tener el caso anterior, ya que estamos considerando que no tenemos resistencia de línea ($r = 0$). En general siempre tenemos una pérdida de energía por condiciones físicas del sistema, es decir $r > 0$. Pero considerar este caso nos ayuda a darnos cuenta si el modelo se desarrolla de forma esperada al calcular las cantidades optimales.

6.1.1. Función de Pérdida

A continuación vamos a describir la forma de la función de pérdida $L(q, y)$, para nuestro caso con funciones lineales a trozos.

Tenemos que $L(q, y) = \sum_{k \in I_R, \epsilon_k > 0} p_k(q_k - y_k)$, cuando las funciones de costo de producción son de forma general $p_k(q_k)$ y $\epsilon_k = q_k - y_k(w)$. En el caso estudiado las funciones de costo son lineales a trozos, esto es $p_i(q_i) = \sum_{j \in J} c_i^j q_i^j, \forall i \in I$. Del capítulo 5, tenemos que

$$q_i^j = \min\{[q_i - (j-1)\bar{q}]^+; \bar{q}\} \quad (6.10)$$

Consideremos que $\bar{y}_i = \bar{q}$ para todo $i \in I_R$, luego podemos expresar a y_i^j como

$$y_i^j = \min\{[y_i - (j-1)\bar{q}]^+; \bar{q}\} \quad (6.11)$$

y entonces las variables aleatorias se expresan como $y_i = \sum_{j \in J} y_i^j$ para todo $i \in I_R$; luego tenemos que

$$\epsilon_i = \sum_{j \in J} q_i^j - y_i(w) = \sum_{j \in J} q_i^j - \sum_{j \in J} y_i^j(w) = \sum_{j \in J} (q_i^j - y_i^j(w))$$

y así,

$$L(q, y) = \sum_{i \in I_R, \epsilon_i > 0} \sum_{j \in J} p_i^j(q_i^j - y_i^j) \quad (6.12)$$

Observación: Notemos que los y_i^j escritos como en (6.11) son menores o iguales a \bar{q} entonces $y_i \leq N\bar{q}$, y esto no afecta a nuestro problema; ya que para $y_i(w) > N\bar{q}$ no tendremos problemas en que se pueda realizar el despacho y por lo tanto no se considera en la suma de L .

Observación: De (6.12), la función de pérdida $L(q, y)$ asociado a nuestro problema es convexo.

Damos a continuación un ejemplo práctico de como se calculan los valores q_i^j y y_i^j .

Ejemplo 6.1.1 Sean $i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4; \bar{q} = 3; q_i = 8$ y $y_i = 5$ ($y_i < q_i$). Entonces calculamos los valores de q_i^j ,

$$\begin{aligned} q_i^1 &= \min\{[q_i]^+, \bar{q}\} = \min\{[8]^+, 3\} = 3 \\ q_i^2 &= \min\{[q_i - \bar{q}]^+, \bar{q}\} = \min\{[8 - 3]^+, 3\} = 3 \\ q_i^3 &= \min\{[q_i - 2\bar{q}]^+, \bar{q}\} = \min\{[8 - 6]^+, 3\} = 2 \\ q_i^4 &= \min\{[q_i - 3\bar{q}]^+, \bar{q}\} = \min\{[8 - 9]^+, 3\} = 0 \end{aligned}$$

y los valores de y_i^j ,

$$\begin{aligned} y_i^1 &= \min\{[y_i]^+, \bar{q}\} = \min\{[5]^+, 3\} = 3 \\ y_i^2 &= \min\{[y_i - \bar{q}]^+, \bar{q}\} = \min\{[5 - 3]^+, 3\} = 2 \\ y_i^3 &= \min\{[y_i - 2\bar{q}]^+, \bar{q}\} = \min\{[5 - 6]^+, 3\} = 0 \\ y_i^4 &= \min\{[y_i - 3\bar{q}]^+, \bar{q}\} = \min\{[5 - 9]^+, 3\} = 0 \end{aligned}$$

así,

$$L_i(q, y) = c_i^1(3 - 3) + c_i^2(3 - 2) + c_i^3(2 - 0) + c_i^4(0 - 0) = c_i^2 + 2c_i^3.$$

A continuación tenemos algunos teoremas y un corolario acerca sobre la convexidad y factibilidad de algunos problemas mencionados anteriormente.

Teorema 6.1.1 *Si la función de pérdida $L(q, y)$ (caso general) es convexa con respecto de q y la función de densidad de y no depende de q entonces $CVaR_\beta(q)$ y $F_\beta(q, \alpha)$ son convexas con respecto de q .*

Demostración: Ver referencia [10].

Teorema 6.1.2 *El problema (6.5) es convexo.*

Prueba: Como la función de costo de cada productor es convexa entonces la función costo total es convexa y por el Teorema 6.1.1. Tenemos que $CVaR_\beta(q)$ es convexo, así la función objetivo de (6.5) es una función convexa; además el conjunto factible de (6.5) es convexa. Así (6.5) es un problema de optimización convexa.

Corolario 6.1.1 *Para la función de pérdida $L(q, y)$ como en (6.12), se tiene que (6.8) es un problema de optimización convexa.*

Prueba: De la observación anterior tenemos que $L(q, y)$ dada en (6.12) es una función convexa con respecto de q , $[\cdot]^+$ es una función convexa no decreciente y además el conjunto factible de (6.8) es convexo, entonces (6.8) es un problema convexo.

6.1.2. Caso Binodal

Consideremos ahora un caso particular del modelo (6.7). Supongamos que tenemos 2 nodos, en el cual encontramos un generador de energía convencional (nodo 1) y un generador de energía renovable (nodo 2), y consideremos que las funciones de costo de producción de los agentes tienen dos trozos lineales cada uno. Denotemos con c_i al costo marginal del productor i ($i = 1, 2$) cuando su nivel de producción es menor que \bar{q} , y con \bar{c}_i cuando es mayor. Consideremos además que $c_i < \bar{c}_i$, esto es que las funciones de costo de producción son convexas, y que la demanda es igual a d_i en el nodo respectivo.

El CVaR - Problema de Despacho Binodal es,

$$\begin{aligned}
 \min_{q_i, \bar{q}_i, \alpha} \quad & c_1 q_1 + \bar{c}_1 \bar{q}_1 + c_2 q_2 + \bar{c}_2 \bar{q}_2 + \left(\alpha + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}_{P_y} [L(q, y) - \alpha]^+ \right) \\
 \text{s.t.} \quad & q_i + \bar{q}_i + (-1)^i h - \frac{r h^2}{2} \geq d_i & i = 1, 2 \\
 & q_i, \bar{q}_i \geq 0 & i = 1, 2 \\
 & q_i, \bar{q}_i \leq \bar{q} & i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

En donde denotamos con q_i y \bar{q}_i a la cantidad producida por el agente i al costo marginal c_i y \bar{c}_i respectivamente ($i = 1, 2$), y con y a la variable aleatoria de producción máxima del nodo 2.

Dada la cantidad de producción (total) y en el nodo 2 y dadas las cantidades q_2 , \bar{q}_2 de despacho. La función de pérdida para el caso binodal es

$$L(q, y) = c_2 [q_2 - y_2]^+ + \bar{c}_2 [\bar{q}_2 - \bar{y}_2]^+,$$

donde

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \min\{[y]^+; \bar{q}\}, \\
 \bar{y}_2 &= \min\{[y - \bar{q}]^+; \bar{q}\}
 \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos los escenarios $y(s)$, ($s = 1, \dots, k$), que son una muestra de y , entonces como antes podemos escribir (6.12) de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
& \min_{q_i, \bar{q}_i, \alpha} \quad c_1 q_1 + \bar{c}_1 \bar{q}_1 + c_2 q_2 + \bar{c}_2 \bar{q}_2 + \alpha + \frac{1}{k(1-\beta)} \sum_{s=1}^k [c_2 [q_2 - y_2(s)]^+ + \bar{c}_2 [\bar{q}_2 - \bar{y}_2(s)]^+ - \alpha]^+ \\
& \text{s.t.} \quad q_i + \bar{q}_i + (-1)^i h - \frac{r h^2}{2} \geq d_i \quad i = 1, 2 \\
& \quad \quad \quad q_i, \bar{q}_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \\
& \quad \quad \quad q_i, \bar{q}_i \leq \bar{q} \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

6.1.3. Resultados del caso binodal

Hemos elaborado un programa en Python para resolver este problema con algunos parametros específicos y con distintos tamaños de escenarios k , usando el método Sequential Least Squares Programming (SLSQP). Presentamos los resultados a continuación escogiendo los parametros $c_1 = 12$, $\bar{c}_1 = 13$, $c_2 = 1$, $\bar{c}_2 = 3$, $\bar{q} = 120$, $d_1 = 100$, $d_2 = 125$, $r = 0.1$, $\beta = 0.95$, consideramos que $y \sim \text{unif}(0, 2\bar{q})$ y generamos una muestra de tamaño $k = 10000$; obtenemos los siguientes valores redondeados a tres dígitos

$$q_1^* = 97.222, \bar{q}_1^* = 0.0, q_2^* = 120, \bar{q}_2^* = 8.889, \alpha^* = 134.869, h^* = -3.333$$

y el valor de la función objetivo

$$z^* = 1453.8$$

En la Figura 6.1 mostramos el comportamiento del valor mínimo del problema; corrimos el programa con diferentes tamaños de escenarios k y notamos la tendencia cercana al valor $z^* = 1453.8$ aproximadamente.

6.2. Problema CVaR con capacidades de producción aleatorias

A continuación damos la formulación del Problema de despacho CVaR con capacidades de producción aleatorias en las restricciones.

Recordemos que denotamos con y_i a la capacidad aleatoria de producción de cada generador $i \in I_R$, con $y = (y_i)_{i \in I_R}$ y con $q = (q_k)_{k \in I_R}$. Consideraremos en esta sección que las funciones de costo de los productores $i \in I_R$ son lineales y como las cantidades de producción q_i , con $i \in I_R$, dependen de las variables aleatorias y_i tenemos que los q_i también son aleatorios, luego de (6.6) tenemos el nuevo **CVaR - Problema de despacho**:

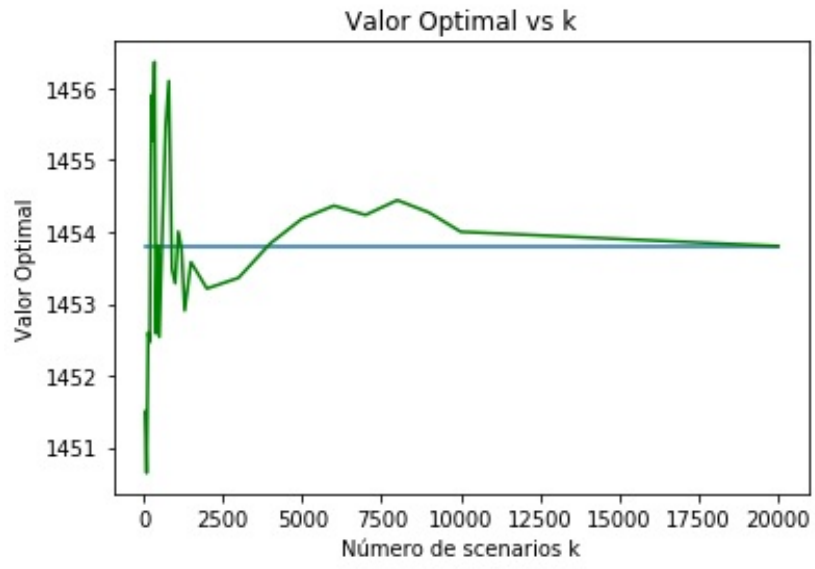


Figura 6.1: Valor Optimal vs k.

$$\begin{aligned}
& \min_{q_i^j, \alpha} \sum_{i \in I \setminus I_R} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + E_{P_y} \left[\sum_{i \in I_R} q_i c_i \right] + F_\beta(q_k, \alpha)_{k \in I_R} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \setminus I_R \\
& \quad \quad \quad q_i + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I_R \\
& \quad \quad \quad h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i, i') \in E \\
& \quad \quad \quad q_i^j \geq 0 \quad \forall (i, j) \in I \setminus I_R \times J \\
& \quad \quad \quad q_i \geq 0 \quad \forall (i, j) \in I_R \\
& \quad \quad \quad q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i, j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& \quad \quad \quad q_i(w) \leq y_i(w) \quad \forall i \in I_R, \forall w.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

donde

$$q_i = \sum_{j \in J} q_i^j, \quad i \in I \setminus I_R$$

Veamos diferentes casos que resultan al considerar a y como una variable aleatoria discreta con pocos escenarios y su generalización.

Primero supongamos que las variables aleatorias capacidad de producción de cada productor $i \in I_R$ es discreta y tiene 3 escenarios (pesimista, regular y optimista) con igual probabilidad de ocurrencia, es decir cada escenario con probabilidad $\frac{1}{3}$, denotaremos con

$$q_i(s), \quad s = 1, 2, 3$$

a las cantidades de generación de los productores de energía renovable no convencional y donde s representa el número de escenario. Entonces el CVaR - Problema despacho con 3 escenarios, tiene la forma

$$\begin{aligned}
& \min_{q_i^j, q_i(s), \alpha} \sum_{i \in I \setminus I_R} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 \sum_{i \in I_R} q_i(s) c_i(s) + F_\beta(q_k, \alpha)_{k \in I_R} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \setminus I_R \\
& \quad \quad \quad q_i(s) + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I_R, \quad s = 1, 2, 3 \\
& \quad \quad \quad h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i, i') \in E \\
& \quad \quad \quad q_i^j \geq 0 \quad \forall (i, j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& \quad \quad \quad q_i(s) \geq 0 \quad \forall i \in I_R, \quad s = 1, 2, 3 \\
& \quad \quad \quad q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i, j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& \quad \quad \quad q_i(s) \leq y_i(s) \quad \forall i \in I_R, \quad s = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

En este caso la función objetivo tiene la siguiente forma:

$$\sum_{i \in I \setminus I_R} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 \sum_{i \in I_R} q_i(s) c_i(s) + \left(\alpha + \frac{1}{3(1-\beta)} \sum_{s=1}^3 [L(q, y(s)) - \alpha]^+ \right)$$

6.2.1. Caso particular: Binodal 1

Los resultados que obtuvimos para un caso particular en Python con 2 nodos, en donde el nodo 1 es de generación convencional con función de costo con 2 trozos y el nodo 2 es de generación de energía renovable con función de costo lineal, y con y teniendo 3 escenarios, los damos a continuación.

Considerando las mismas notaciones del caso binodal en la sección anterior, el problema de despacho en este caso particular tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \min_{q_i, \bar{q}_1, \alpha} \quad & c_1 q_1 + \bar{c}_1 \bar{q}_1 + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 c_2 q_2(s) + \alpha + \frac{1}{3(1-\beta)} \sum_{s=1}^3 [c_2 [q_2(s) - y(s)]^+ - \alpha]^+ \\ \text{s.t.} \quad & q_1 + \bar{q}_1 + (-1)h - \frac{r h^2}{2} \geq d_1 \\ & q_2(s) + h - \frac{r h^2}{2} \geq d_2 \quad s = 1, 2, 3 \\ & q_1, \bar{q}_1 \geq 0 \\ & q_2(s) \geq 0 \quad s = 1, 2, 3 \\ & q_1, \bar{q}_1 \leq \bar{q} \\ & q_2(s) \leq y(s) \quad s = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Si nos ponemos en el siguiente escenario $y(1) = 90$; $y(2) = 110$; $y(3) = 180$ y los datos $d_1 = 100$; $d_2 = 125$; $c_1 = 12$; $\bar{c}_1 = 13$; $c_2 = 1$; $\bar{q} = 120$; $r = 0.1$; obtenemos los siguientes resultados redondeados a 3 dígitos,

$$q_1^* = 115.002; \quad \bar{q}_1^* = 0.003$$

$$q_2^*(1) = 90; \quad q_2^*(2) = 90; \quad q_2^*(3) = 90$$

$$\alpha^* = -97.157; \quad h^* = 10.004.$$

Extendemos el modelo anterior cuando y_i toma un número arbitrario pero finito de escenarios S con diferentes probabilidades de ocurrencia p_s , $s \in S^* = \{1, \dots, S\}$ con $\sum_{s \in S^*} p_s = 1$, como sigue

$$\begin{aligned}
& \min_{q_i^j, q_i(s), \alpha} \sum_{i \in I \setminus I_R} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + \sum_{s \in S^*} \sum_{i \in I_R} p_s q_i(s) c_i(s) + F_\beta(q_k, \alpha)_{k \in I_R} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} q_i^j + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I \setminus I_R \\
& \quad \quad q_i(s) + \sum_{i' \in V(i)} h_{i',i} - h_{i,i'} - \frac{h_{i,i'}^2 + h_{i',i}^2}{2} r_{i,i'} \geq d_i \quad \forall i \in I_R, \quad \forall s \in S^* \\
& \quad \quad h_{i,i'} \geq 0 \quad \forall (i, i') \in E \\
& \quad \quad q_i^j \geq 0 \quad \forall (i, j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& \quad \quad q_i(s) \geq 0 \quad \forall i \in I_R, \forall s \in S^* \\
& \quad \quad q_i^j \leq \bar{q} \quad \forall (i, j) \in (I \setminus I_R) \times J \\
& \quad \quad q_i(s) \leq y_i(s) \quad \forall i \in I_R, \quad \forall s \in S^*.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

donde la función objetivo tiene la siguiente forma en este caso

$$\sum_{i \in I \setminus I_R} \sum_{j \in J} q_i^j c_i^j + \sum_{s=1}^S \sum_{i \in I_R} p_s q_i(s) c_i(s) + \left(\alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{s=1}^S p_s [L(q, y(s)) - \alpha]^+ \right)$$

Debemos de resaltar aquí que este problema de optimización propuesto, ya viene siendo una aproximación a los modelos más generales, en donde incluyan los posibles casos en el cual uno o varios generadores de energía renovable no pueda cumplir con la cantidad acordada de generación.

La siguiente extensión del modelo anterior es considerar que las variables aleatorias y son continuas. En el caso que se consideren generadores de energía eólica la función de distribución de y que mejor la aproxima son la distribución Weibull con 3 parametros (WD_{3p}) y la distribución generalizada extendida de Lindley con 3 parametros ($EGLD_{3p}$). Para más detalles sobre estas distribuciones puede seguir la referencia [19].

6.2.2. Caso particular: Binodal 2

Consideremos los mismos datos que en el ejemplo binodal 1, y un número finito de escenarios S todos con igual probabilidad de ocurrencia p_s , es decir $p_s = \frac{1}{S}$. Para $S = 10$, corrimos 500 veces el programa y mostramos las cantidades optimales que obtuvimos la Figura 6.2. Mostramos a continuación una parte de las cantidades q_1, \bar{q}_1 y $q_2(s)$, con $s = 1, \dots, 10.$, que obtuvimos Figura 6.3 (donde los valores de las 14 variables estan dadas en el siguiente orden $q_1; \bar{q}_1; q_2(s), s = 1, \dots, 10; \alpha, h$).

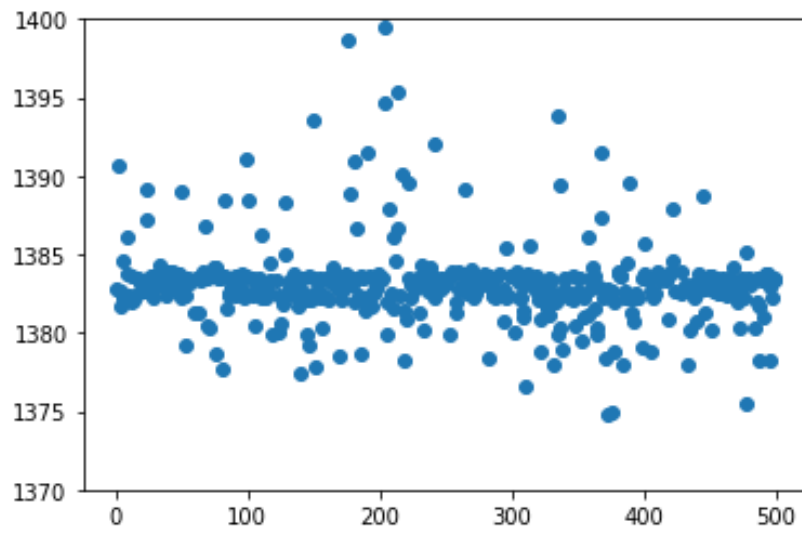


Figura 6.2: Valores Optimales - Binodal 2.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	114.747	1.10800e-09	14.1705	33.4883	17.4748	21.2446	21.2446	18.3363	21.2446	21.2446	21.2446	21.2446	6.17355e-09	9.87334	14.1705
1	114.909	1.66835e-09	1.51187	14.9838	1.51186	1.5141	1.5141	1.5141	1.5141	1.5141	1.5141	1.5141	6.83276e-09	9.97449	213.426
2	110.394	3.89699	35.1631	53.5818	39.7197	45.8846	35.0961	35.669	35.0961	35.0961	43.2402	38.5754	16286.8	9.65705	35.1631
3	113.784	1.81123e-08	48.8985	59.9452	48.8985	48.8985	48.8985	48.8985	48.8985	48.8985	48.8985	48.8985	2.64301e-07	9.38229	107.988
4	114.756	2.58823e-10	15.6158	32.4359	15.6158	15.9903	11.1349	15.9903	15.9903	15.9903	15.9903	15.9903	-7.45059e-10	9.87773	64.5915
5	114.993	4.82775e-07	1.22587	20.9413	1.22587	1.32979	1.32979	1.32979	1.32979	1.32979	0.790103	1.32979	-2.46577e-08	9.99649	149.611
6	114.766	8.50181e-10	10.1055	32.0567	15.5266	14.3106	20.3349	20.3349	20.3349	20.3349	20.3349	20.3349	1.2229e-09	9.88259	10.1055
7	114.949	4.4803e-08	10.9335	28.7024	10.9335	11.0374	6.60596	11.0374	11.0374	11.0374	11.0374	11.0374	1.64556e-08	9.97446	97.6515
8	114.264	1.2434e-10	35.5718	48.6905	35.5718	35.5718	35.5718	35.5718	35.5718	35.5718	35.5718	35.5718	1.33365e-08	9.6286	188.296
9	114.893	0.0049856	6.21443	24.9025	6.12803	3.70101	6.28901	6.35966	6.34618	6.39191	6.28966	6.29201	0.084363	9.99823	146.192
10	112.996	0	66.427	74.7497	66.427	66.427	66.427	66.427	66.427	66.427	66.427	66.427	-7.45219e-10	8.97134	88.4753
11	114.985	2.17137e-08	0.181069	20.1165	0.181068	0.167583	0.28107	0.281075	0.28107	0.281073	0.281074	0.281074	0.000952787	9.99491	108.013
12	114.805	1.899e-06	7.58054	29.9982	12.5298	12.6298	12.6298	12.6298	12.6298	12.6298	12.6298	12.6298	1.27741e-08	9.90201	7.58054
13	114.672	3.27005e-10	19.643	35.2398	19.643	19.643	19.643	19.643	19.643	19.643	19.643	19.643	-2.7125e-10	9.83557	63.2789
14	114.751	1.8791e-10	15.9816	32.7004	15.9816	16.0816	16.0816	16.0816	12.005	16.0816	16.0816	16.0816	6.62756e-10	9.87492	191.698
15	114.698	7.03942e-09	1.83312	19.2077	1.83312	1.83622	1.83622	1.83622	1.83622	1.83622	1.83622	1.83622	5.2978e-09	9.8484	132.962
16	68.4064	46.2062	22.3366	37.5136	22.3366	22.3366	22.3366	22.3366	22.3366	22.3366	22.3366	22.3366	1.03829e-08	9.80533	216.367
17	114.853	4.26998e-18	8.71445	26.9163	8.71445	8.81446	5.33942	8.81446	8.81446	8.81446	8.81446	8.81446	6.19111e-09	9.92658	126.345
18	114.77	3.64159e-11	15.5374	32.043	15.5374	9.71375	20.3433	20.3433	20.3433	20.3433	20.3433	20.3433	-7.4503e-10	9.88485	22.4055

Figura 6.3: Tabla de valores.

Capítulo 7

Conclusiones y Recomendaciones

En el problema de despacho con funciones lineales a trozos y riesgo, que llamamos CVaR - Problema de Despacho, se implementa la generación de energía de capacidad aleatoria que naturalmente nos lleva a considerar el riesgo de desabastecimiento que es introducido en el problema, para que el ISO pueda administrar y controlar la incertidumbre.

Cuando la capacidad de producción de energía es aleatoria, podemos aproximar el CVaR - Problema de Despacho usando posibles escenarios, o mejor dicho mediante muestras de los posibles valores de la capacidad de generación, resultando ser un problema convexo.

Notamos que los resultados para el caso binodal son los que esperábamos, ya que al considerar menores costos el problema trata de abastecerse primero con la energía generada a ese precio.

El trabajo que continua es analizar la solución del CVaR - Problema de Despacho, de forma extensa como se hizo para el Problema de Despacho con funciones lineales a trozos visto en el capítulo 5, hacer la implementación general del problema en Python y debe hacerse más hipótesis al CVaR - Problema de Despacho ya que aún es algo restrictivo para que se parezca más a los casos que se dan en la realidad.

El problema del modelo en la sección 6.2, es que el número de cantidades $q_2(s)$ va creciendo muy rapido ya que es igual al número de escenarios que generamos de $y(s)$, esto dificulta el cálculo de las soluciones, ya que la mejor aproximación se da cuando tenemos un número muy grande de escenarios.

En el modelo de la sección 6.2, solo hemos analizado como es que nuestro nuevo modelo propuesto se comporta en la obtención de las cantidades de generación de cada productor, para datos que hemos generado aleatoriamente en Python; el siguiente paso es hacer estos cálculos con datos reales que podamos obtener del COES. Luego de ello hacer la generalización de este modelo al caso cuando el vector aleatorio y tiene una distribución continua.

Bibliografía

- [1] M. Shahidehpour and H. Yamin and Z. Li. Market Operations in Electric Power Systems: Forecasting, Sheduling and Risk Management, 2002.
- [2] S. Stoft. Power System Economics: Designing Markets for Electricity, 2002.
- [3] R. Bajo-Buenestado. A Survey on Auctions in electricity markets: the challenges of recent advances in auction theory, 2014.
- [4] A.K. David and Fushuan Wen. Strategic Bidding in Competitive Electricity Markets: a Literature Survey, 2000.
- [5] T. Rockafellar and S. Uryasev. The Fundamental Risk Quadrangle In Risk Management, Optimization and Statistical Estimation, 2012.
- [6] S. Uryasev. Introduction to the Theory of Probabilistic Functions and Percentils (Value-at-Risk), 2000.
- [7] S. Sarykalin and G. Serraino an S. Uryasev. Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization, 2008.
- [8] T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk, 1999.
- [9] T. Rockafellar and S. Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions, 2002.
- [10] S. Uryasev and T. Rockafellar. Conditional Value-at-Risk: Optimization Approach, 2001.
- [11] T. Rockafellar. Coherent Approaches to Risk in Optimization Under Uncertainty, 2007.
- [12] G. Pflug. Some Remarks on The Value-at-Risk and The conditional Value-at-risk, 2000.

- [13] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber and D. Heath. Coherent measure of risk, 2000.
- [14] J. Escobar and A. Jofré. Equilibrium Analysis of Electricity Auctions, 2014.
- [15] B. Heymann and A. Jofré. Mechanism Design and Auctions for Electricity Network, 2016.
- [16] N. Figueroa and A. Jofré and B. Heymann. Cost-Minimizing Regulations for a Wholesale Electricity Market, 2016.
- [17] J. Escobar and A. Jofré. Equilibrium Analysis for a Network Market Model, 2006.
- [18] A. Shapiro and A. Philpott. A Tutorial on Stochastic Programming, 2007.
- [19] Y. Kantar, I. Usta, I. Arik and I. Yenilmez. Wind speed analysis using the Extended generalized Lindley Distribution, 2017.