

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA



Diseño de un Controlador por Lógica Difusa para  
una planta de trituración secundaria y terciaria

TESIS

Para optar el Grado de Maestro en Ciencias

Mención: Automática e Instrumentación

Presentada por:

Juan Antonio Kobashicawa Chinen

LIMA - PERU

2006

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Diseño de un Controlador por Lógica Difusa para una planta de trituración  
secundaria y terciaria

TESIS

Para optar el grado de Maestro en Ciencias  
Mención: Automática e Instrumentación

Presentada por:

Juan Antonio Kobashicawa Chinen

Lima - Perú

**Extracto**

En la presente tesis se diseña un *controlador por lógica difusa* para la planta de trituración secundaria y terciaria de la unidad de Toquepala de Southern Perú Copper Corporation (SPCC). En esta planta se pretende controlar la granulometría del producto fijado en un 15 % en peso mayor a media pulgada, así mismo se desea maximizar la producción (i.e. toneladas por hora) teniendo cuidado de no sobrecargar las trituradoras (i.e. los amperajes deberán de mantenerse debajo de un límite de operación) y manteniendo los niveles de mineral en las tazas de las trituradoras constantes. Este control se ha realizado bajo perturbaciones, los cuales consisten en que la granulometría del alimento y el Work Index (factor relacionado a la dureza del mineral) varían estocásticamente.

Para realizar esto, se ha modelado matemáticamente toda la planta. Las trituradoras cónicas se basaron en el modelo de Whiten, las zarandas vibratorias por el modelo de Ferrara-Pretti-Schena, los alimentadores de mineral por medio de una relación no lineal (i.e. sigmoidea), los distribuidores de carga por medio de una relación lineal. Las perturbaciones se modelaron asumiendo que el valor en un instante de tiempo puede variar en un rango de  $\pm 5\%$  respecto al valor del instante anterior. En el caso del alimento, se ha utilizado la distribución gamma,

el cual fue determinado luego de hacer regresiones a los análisis granulométricos del alimento, para esto se aplicaron diez tipos de funciones y/o distribuciones de uso común en el procesamiento de minerales.

Para obtener los parámetros de los modelos de las trituradoras se realizó una regresión no-lineal, mientras que para las zarandas se hizo uso de los Algoritmos Genéticos (AG) debido a que se tenía que estimar 30 parámetros (para cada zaranda).

En el diseño del controlador, se elaboraron los conjuntos difusos y la base de reglas a criterio del autor basándose en un sistema del tipo Mamdani. Se simuló a diferentes condiciones con Set Points de niveles de taza constantes (al 70 %) y el Set Point de la granulometría variando según una función cuadrada entre valores de 15 y 20. En dichas simulaciones se evaluó los tipos de fuzzyficación (singleton y no-singleton), operadores difusos, formas de implicación, defuzzyficación y se evaluó además el controlador tipo Takagi-Sugeno, el cual fué basado en el sistema Mamdani y cuyos parámetros fueron estimados mediante la instrucción `mam2sug` de MATLAB 7,0 (sistema de orden cero) y por el método de *mínimos cuadrados recursivos* (RLS) en el cual se obtiene un sistema de primer orden. Finalmente se simuló mediante el sistema Mamdani a un Set Point constante igual a  $\%+1/2^{\circ} = 15$  que es lo que se desea en planta.

Adicionalmente se trató de optimizar el sistema de control (i.e. consecuentes de las reglas) mediante Algoritmos Genéticos. Lamentablemente el sistema dejó de controlar los niveles de taza y se sobrecargaron las trituradoras. Este es un punto muy delicado ya que se debe tomar en cuenta los factores de ponderación en la función de adaptación, operadores y/o mecanismos genéticos, codificación, etc. una deficiente elección en cualquiera de estos factores ocasionaría un mal desempeño y un consumo de tiempo innecesario en la optimización.

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Fuzzy Logic Controller design for a secondary and tertiary crushing plant

THESIS

Requirement for the degree of Master of Science  
Major: Automatic and Instrumentation

by:

Juan Antonio Kobashicawa Chinen

Lima - Perú

### **Abstract**

In this thesis, a *fuzzy logic controller* has been designed for the secondary and tertiary crushing plant of Southern Peru Copper Corporation (SPCC) at Toquepala's division. In this plant it is required to control the product size distribution fixed in 15% in weight over half inch with maximum production (i.e. tons per hour) taking care of not overloading crushers (i.e. amperes must be under an operation limit) and remaining mineral levels constant on crusher's bowls. This control has been done under disturbing events, which consist on the stochastic variation of the feed size distribution and Work Index (related with mineral hardness).

To accomplish this, all the plant was mathematically modeled. Conic crushers were based on Whiten's model, vibrating screens on Ferrara-Pretti-Schena's model, mineral feeders on a non-linear relationship (i.e. sigmoid), charge distributors on a linear relationship. Disturbing events were modeled assuming that the value of in a determined moment may vary in a range of  $\pm 5\%$  respect to the value of the previous moment. In feed case gamma distribution was used, which was determined after making regressions of feed size distributions, for this, ten kinds of functions or distributions of common use in mineral processing were applied.

Crusher parameters were estimated by non-linear regression, while Genetic Algorithms (GA) were used for vibrating screens because 30 parameters had to

be estimated (for each screen).

In the controller design, fuzzy sets and rule base were developed under autor's criteria based on Mamdani's system. Simulations were executed under different conditions with bowl levels Set Points constant (to 70%) and product size Set Point varying according a square function between values of 15 and 20. In those simulations, different methods of fuzzyfication were evaluated (singleton and no-singleton), fuzzy operators, implication and defuzzyfication methods and Takagi-Sugeno controller were also evaluated, this controller was based on Mamdani's system an whose parameters were estimated by `mam2sug` of MATLAB 7,0 (zero order system) and by *recursive least squares* (RLS) method in which a first order system has been obtained. Finally simulation was executed following the Mamdani's system with a Set Point equal to  $\% + 1/2'' = 15$  which is what is required in plant.

Moreover, it has tried to optimize the control system (i.e. rules consequents) using Genetic Algorithms. Lamentably the system could not control bowl levels and crusher were overloaded. This is an important point due to weighting factors in fitness function, genetic operators and/or mechanisms, coding, etc. A bad choice in any of such factors will produce low performance and wasting time in optimization process.

# Tabla de Contenido

Lista de Tablas	XI
Lista de Figuras	XV
<b>Capítulo 1.</b>	
<b>Introducción</b>	1
1.1. Procesamiento de minerales	1
1.1.1. Trituración . . . . .	2
1.1.2. Control en la cominución	4
1.2. Lógica difusa . . . . .	6
1.2.1. Razón de uso de un Controlador por Lógica Difusa	7
1.3. Objetivos de la presente tesis . . . . .	8
<b>Capítulo 2.</b>	
<b>Descripción de la planta</b>	9
2.1. Sección de trituración secundaria y terciaria . . . . .	9
2.2. Data utilizada . . . . .	13
2.3. Materiales que conforman el producto de la planta de trituración .	19
2.4. Discusión . . . . .	21
<b>Capítulo 3.</b>	
<b>Modelos Matemáticos</b>	22
3.1. Trituradora cónica: Granulometría del producto	22
3.1.1. Descripción del modelo	22
3.1.2. Nomenclatura . . . . .	23
3.1.3. Balance de masa . . . . .	23
3.1.4. Modelo matemático . . . . .	25
3.1.5. Modelo matricial . . . . .	28
3.1.6. Cálculo de los parámetros del modelo	32
3.2. Trituradora cónica: Potencia consumida . . . . .	34
3.2.1. Potencia consumida para la trituración	34
3.2.2. Potencia consumida sin carga	35
3.3. Trituradora cónica: Nivel de taza	36
3.4. Zaranda vibratoria . . . . .	38
3.4.1. Descripción del modelo	40
3.4.2. Modelo matemático . . . . .	41

3.4.3. Cálculo de los parámetros del modelo	46
3.5. Alimentadores de línea . . . . .	48
3.6. Distribuidores de carga . . . . .	51
3.7. Granulometría del alimento	52
3.8. Work Index	53
3.9. Discusión	54
<b>Capítulo 4.</b>	
<b>Control por Lógica Difusa</b>	55
4.1. Objetivo del control . . . . .	55
4.2. Tipos de perturbaciones . . . . .	55
4.3. Variables de entrada y salida del sistema de control	56
4.3.1. Entradas - Variables controladas .	56
4.3.2. Salidas - Variables manipuladas . . . . .	56
4.4. Efectos de las variables operativas . . . . .	57
4.5. Sistemas de control en plantas de trituración	58
4.5.1. Sistema de control basado en un CSS fijo de la trituradora	58
4.5.2. Sistema de control basado en un CSS regulado de la trituradora . . . . .	58
4.6. Lógica Difusa . . . . .	59
4.6.1. Conjuntos difusos . . . . .	59
4.6.2. Variables lingüísticas, variables difusas y base de las variables	60
4.6.3. Algunos otros términos . . . . .	63
4.6.4. Operadores Lógicos . . . . .	65
4.6.5. Razonamiento aproximado . . . . .	70
4.7. Sistemas de control por lógica difusa	80
4.7.1. Fuzzyficación . . . . .	0
4.7.2. Base de reglas . . . . .	83
4.7.3. Máquina de inferencia difusa (tipo Mamdani)	84
4.7.4. Defuzzyficación (tipo Mamdani) . . . . .	88
4.7.5. Defuzzyficación (tipo Takagi-Sugeno)	91
4.7.6. Mínimos cuadrados recursivos (RLS)	94
4.8. Discusión . . . . .	96
<b>Capítulo 5.</b>	
<b>Simulación del control</b>	98
5.1. Condiciones iniciales . . . . .	98
5.2. Set Points . . . . .	99
5.3. Reglas utilizadas (tipo Mamdani)	99
5.4. Fuzzyficación Singleton . . . . .	102
5.4.1. Condiciones para la simulación	102
5.4.2. Resultados . . . . .	102
5.5. Fuzzyficación No Singleton del tamaño del producto .	106
5.5.1. Condiciones para la simulación . . . . .	106
5.5.2. Resultados . . . . .	106
5.6. Fuzzyficación No Singleton a los niveles de taza	109

5.6.1.	Condiciones para la simulación	109
5.6.2.	Resultados . . . . .	109
5.7.	Variando la forma de implicación . . . . .	109
5.7.1.	Condiciones para la simulación	109
5.7.2.	Resultados . . . . .	111
5. .	Variando la forma de defuzzyficar . . . . .	111
5.8.1.	Condiciones para la simulación	111
5.8.2.	Resultados . . . . .	113
5.9.	Sistema tipo Takagi-Sugeno. Uso de mam2sug .	114
5.9.1.	Condiciones para la simulación .	114
5.9.2.	Resultados . . . . .	114
5.10.	Sistema tipo Takagi-Sugeno. Uso de RLS	114
5.10.1.	Condiciones para la simulación .	114
5.10.2.	Resultados . . . . .	116
5.11.	Manteniendo el Set Point en $\% + 1/2 = 15$	116
5.11.1.	Condiciones para la simulación	116
5.11.2.	Resultados .	121
5.12.	Discusión	125
<b>Capítulo 6.</b>		
<b>Optimización del FLC</b>		127
6.1.	Sistema del tipo Mamdani	127
6.1.1.	Metodología . . . . .	127
6.1.2.	Reglas - FAM . . . . .	128
6.1.3.	Operadores genéticos	128
6.1.4.	Función de adaptación	131
6.1.5.	Resultados .	134
6.2.	Discusión	137
<b>Capítulo 7.</b>		
<b>Conclusiones</b>		140
7.1.	Resumen de los resultados	140
7.2.	Trabajos futuros . . . . .	142
<b>Apéndice A.</b>		
<b>Análisis Granulométrico</b>		144
A.1.	Fracciones en peso . . . . .	144
A.2.	Fracciones acumuladas	145
<b>Apéndice B.</b>		
<b>Análisis Estadístico</b>		148
B.1.	Parámetros Estadísticos	148
B.2.	Funciones de Distribución . . . . .	148
B.2.1.	Comandos en MATLAB	150
B.3.	Aplicación a los alimentos de las líneas <i>A</i> , <i>B</i> y <i>C</i>	153
<b>Apéndice C.</b>		

<b>Funciones de Pertenencia</b>	157
<b>Apéndice D.</b>	
<b>Multiplicadores de Lagrange</b>	158
D.1. Esquema del nodo a corregir	158
D.2. Notación: . . . . .	159
D.3. Método . . . . .	159
D.4. Para una zaranda de un solo piso:	162
D.5. Para una zaranda de dos pisos:	162
<b>Apéndice E.</b>	
<b>Algoritmos Genéticos</b>	163
E.1. Componentes de los Algoritmos Genéticos	163
E.2. Estructura general . . .	166
E.3. Deterministic Crowding	168
E.3.1. Distancia	169
E.4. Preguntas previas	169
<b>Bibliografía.</b>	
	170

## Lista de Tablas

2.1. Notación de los equipos de la planta de trituración secundaria y terciaria según la Figura 2.1. . . . .	12
2.2. Mallas utilizadas y su correspondiente intervalo de tamaños.	13
2.3. Porcentajes en peso de los alimento y productos de las trituradoras secundarias con su respectivo CSS y tonelaje tratado. . . . .	14
2.4. Porcentajes en peso de los alimento y productos de las trituradoras terciarias con su respectivo CSS y tonelaje tratado . . . . .	15
2.5. Porcentajes en peso del alimento, oversize y undersize de las zarandas vibratorias 1, 2 y 3 . . . . .	16
2.6. Porcentajes en peso del alimento, oversize y undersize de las zarandas vibratorias 4, 5 y 6 . . . . .	17
2.7. Porcentajes en peso del alimento, oversize y undersize de las zarandas vibratorias 7, 8 y 9 . . . . .	18
2.8. Parámetros estadísticos de los productos de las trituradoras terciarias.	19
2.9. Parámetros estadísticos de los Undersize de las Zarandas.	20
3.1. Descripción de balance de basa en la trituradora . . . . .	24
3.2. Parámetros del modelo obtenidos para cada trituradora . . . . .	33
3.3. Amperajes de las trituradoras cuando operan sin carga (mineral).	36
3.4. Dimensiones de la taza . . . . .	37
3.5. Capacidades de las trituradora <i>MP800</i> , <i>HP500</i> y <i>HP800</i>	37
3.6. Parámetros del modelo obtenidos para las zarandas del $Z - 1$ al $Z - 5$	49
3.7. Parámetros del modelo obtenidos para las zarandas del $Z - 6$ al $Z - 9$	50
4.1. Variables lingüísticas, variables difusas y base de las variables empleadas para el control . . . . .	64
4.2. Lógica booleana: Tabla de verdad	69
4.3. Lógica booleana: Tabla Cayley . . . . .	70

4.4.	Lógica difusa: Tabla de Verdad (Regla del mínimo) . . . . .	70
5.1.	Representación de los conjuntos difusos para las FAM mediante números.	100
5.2.	Reglas generales (tipo Mamdani). . . . .	101
5.3.	Constantes para los CSS de las trituradoras en el sistema Takagi-Sugeno.	115
5.4.	Constantes para los Distribuidores de Carga en el sistema Takagi-Sugeno. . . . .	115
5.5.	Constantes para la Velocidad de Alimentación en el sistema Takagi-Sugeno. . . . .	115
5.6.	Promedio del CSS de las trituradoras secundarias para un Set Point del producto ( $\% + 1/2 = 15$ ) . . . . .	125
5.7.	Promedio del CSS de las trituradoras terciarias para un Set Point del producto ( $\% + 1/2 = 15$ ) . . . . .	125
6.1.	Representación de los conjuntos difusos para las FAM mediante números	129
6.2.	FAM: Variación del CSS en las trituradoras terciarias en función del tamaño del producto y del amperaje de las trituradoras terciarias. . .	129
6.3.	FAM: Variación de la Velocidad de Alimentadores en función del tamaño del producto y del amperaje de las trituradoras terciarias. . .	129
6.4.	FAM: Variación del CSS en las trituradoras secundarias en función del flujo en la línea. . . . .	129
6.5.	FAM: Variación de la Velocidad de Alimentadores en función del flujo en la línea. . . . .	130
6.6.	FAM: Variación de la Velocidad de Alimentadores en función del amperaje de las trituradoras terciarias de la misma línea. . . . .	130
6.7.	FAM: Variación del Distribuidor de Carga en función de los niveles de taza de las trituradoras terciarias de la misma línea. . . . .	130
6.8.	FAM: Variación del CSS en las trituradoras secundarias en función de los amperajes de las trituradoras secundarias y terciarias de la misma línea. . . . .	130
6.9.	FAM: Variación del Distribuidor de Carga según los amperajes de las trituradoras terciarias de la misma línea. . . . .	130
A.1.	Análisis granulométrico - Fracciones en peso . . . . .	147
A.2.	Análisis granulométrico - Porcentajes acumulados pasantes y retenidos	147

B.1. Clasificación de las funciones de distribución . . . . .	149
B.2. Funciones de Distribución Gates-Gaudin-Schuhmann y Gaudin-Meloy	150
B.3. Distribución Normal y Normal-Modificada . . . . .	151
B.4. Distribución Log-Normal y Distribución Gamma .	151
B.5. Funciones de distribución Rosin-Rammmler y Función Broadbent-Callcott.	152
B.6. Función de distribución de Harris y Distribución Beta .	152
B.7. Ajuste de curvas al alimento de la línea <i>A</i>	154
B.8. Ajuste de curvas al alimento de la línea <i>B</i>	155
B.9. Ajuste de curvas al alimento de la línea <i>C</i>	156
C.1. Funciones de Pertenencia en MATLAB . . . . .	157
E.1. Terminología empleada en los Algoritmos Genéticos . . . . .	163

## Lista de Figuras

1.1. Esquema del procesamiento de minerales . . . . .	3
2.1. Diagrama de flujo de la Planta de Trituración Secundaria y Terciaria de la unidad de Toquepala de SPCC. . . . .	11
2.2. Productos de la planta de trituración secundaria y terciaria.	20
3.1. Esquema de la fragmentación en una Trituradora .	24
3.2. Diagrama de bloques del modelo de la trituradora	26
3.3. Esquema: Open Side Set y Close Side Set	29
3.4. Esquema del cálculo del parámetro $X_{80}$ . .	35
3.5. Esquema de separación por una zaranda vibratoria de un piso.	39
3.6. Curva de partición típica para una zaranda vibratoria. . . . .	40
3.7. Esquema del modelo de Ferrara-Pretti-Schena para zarandas vibratorias de un piso. . . . .	41
3.8. Esquema de una zaranda de dos pisos.	46
3.9. Alimentadores de línea: Valor en PC vs. TMH alimentadas. .	51
3.10. Esquema del distribuidor de Carga. . . . .	52
4.1. Conjuntos difusos para Producto. Error. . . . .	66
4.2. Conjuntos difusos para $i$ . Amp. Error en <i>MP800</i> y <i>HP800</i> .	66
4.3. Conjuntos difusos para $i$ . Amp. Error en <i>HP700</i> . .	66
4.4. Conjuntos difusos para Línea. NTaza. Error	67
4.5. Conjuntos difusos para $t$ . NTaza. Error . . . .	67
4.6. Conjuntos difusos para el <i>Set de las trituradoras</i> .	67
4.7. Conjuntos difusos para los <i>Distribuidores de carga</i> .	68
4.8. Conjuntos difusos para la <i>Velocidad de los alimentadores</i>	68
4.9. Operador lógico de Conjunción: <b>Y</b> . . . . .	71
4.10. Operador lógico de Disyunción: <b>O</b> . . . . .	72
4.11. Operador lógico de Implicación: <b>SI ... ENTONCES</b> ...	73

4.12. Operador lógico de Equivalencia: <b>SI Y SOLO SI</b> . . . . .	74
4.13. Control directo de un proceso. . . . .	81
4.14. Estructura de un controlador difuso. . . . .	81
4.15. Fuzzyficación Singleton y No-Singleton . . . . .	82
4.16. Operación star al conjunto difuso de entrada $\mu_{X_i}(x_i)$ y el conjunto difuso del antecedente $\mu_{A_i}^l(x_i)$ . . . . .	85
4.17. Diagrama de inferencia difusa (Mamdani) . . . . .	90
4.18. Esquema del sistema Takagi-Sugeno como ANFIS. . . . .	93
5.1. Fuzzyficación singleton: Granulometría del producto (+1/2"). . . . .	103
5.2. Fuzzyficación singleton: Work Index. . . . .	103
5.3. Fuzzyficación singleton: Tamaños $X_{80}$ del alimento a la planta (por cada línea). . . . .	104
5.4. Fuzzyficación singleton: Variación del Closed Side Set (CSS). . . . .	104
5.5. Fuzzyficación singleton: Posición del distribuidor de carga. . . . .	105
5.6. Fuzzyficación singleton: TMH alimentadas por cada alimentador y por líneas. . . . .	105
5.7. Fuzzyficación singleton: Niveles de taza de las trituradoras. . . . .	106
5.8. Fuzzyficación singleton: Amperajes en las tres líneas. . . . .	107
5.9. Comparación entre la Fuzzyficación Singleton y No-Singleton (Gaussiana) para el tamaño del producto. . . . .	108
5.10. Comparación entre la Fuzzyficación Singleton y No-Singleton (Gaussiana) para los niveles de taza. . . . .	110
5.11. Comparación de las formas de realizar la implicación. . . . .	112
5.12. Comparación de los métodos de defuzzyficación . . . . .	113
5.13. Sistema Takagi-Sugeno (mam2sug): Granulometría del producto (+1/2"). . . . .	115
5.14. Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Comparación de la granulometría del producto (+1/2") utilizando mam2sug y RLS. . . . .	117
5.15. Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Variación del Closed Side Set (CSS). . . . .	118
5.16. Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Posición del distribuidor de carga. . . . .	118
5.17. Sistema Takagi-Sugeno (RLS): TMH alimentadas por cada alimentador y por líneas. . . . .	119
5.18. Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Niveles de taza de las trituradoras. . . . .	119
5.19. Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Amperajes en las tres líneas . . . . .	120

5.20. Set Point de la granulometria $\% + 1/2 = 15$ : Granulometría del producto (+1/2"). . . . .	121
5.21. Set Point de la granulometria $\% + 1/2 = 15$ : Variación del Closed Side Set (CSS). . . . .	122
5.22. Set Point de la granulometria $\% + 1/2 = 15$ : Posición del distribuidor de carga. . . . .	122
5.23. Set Point de la granulometria $\% + 1/2 = 15$ : TMH alimentadas por cada alimentador y por líneas. . . . .	123
5.24. Set Point de la granulometria $\% + 1/2 = 15$ : Niveles de taza de las trituradoras. . . . .	123
5.25. Set Point de la granulometria $\% + 1/2 = 15$ : Amperajes en las tres líneas . . . . .	124
6.1. Conjuntos difusos para Linea.Flujo.Error . . . . .	128
6.2. Optimizado con Algoritmos Genéticos: Variación de la función de adaptación vs. la generación. . . . .	134
6.3. Optimizado con Algoritmos Genéticos: Granulometría del producto (+1/2' '). . . . .	134
6.4. Utilizando Algoritmos Genéticos: Work Index. . . . .	135
6.5. Optimizado con Algoritmos Genéticos: Variación del Closed Side Set (CSS). . . . .	135
6.6. Optimizado con Algoritmos Genéticos: Posición del distribuidor de carga. . . . .	136
6.7. Optimizado con Algoritmos Genéticos: TMH alimentadas por cada alimentador y por líneas. . . . .	136
6.8. Optimizado con Algoritmos Genéticos: Niveles de taza de las trituradoras. . . . .	137
6.9. Optimizado con Algoritmos Genéticos: Amperajes en las tres líneas . . . . .	138
6.10. Esquema de las reglas estimadas en forma empírica y optimizada por Algoritmos Genéticos . . . . .	139
A.1. Esquema de la malla 200 de la serie Tyler. . . . .	145
A.2. Análisis granulométricos - Porcentajes acumulados pasantes y retenidos. . . . .	146
D.1. Esquema del nodo y análisis a corregir . . . . .	158

E.1. Diagrama de Actividad de Algoritmos Genéticos .	167
E.2. Diagrama de Actividad de nueva generación . . .	167

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Procesamiento de minerales

El procesamiento de minerales forma parte de la industria minera y básicamente consiste en separar el material valioso (mena) del material estéril (ganga) que provienen de las minas. En estas separaciones no se producen cambios químicos sustanciales[36] y pueden realizarse por:

**flotación** las partículas valiosas se adhieren a burbujas y son retiradas en forma de espuma, mientras que la ganga permanece en suspensión (pulpa) (e.g. óxidos, sulfuros, carbonatos, metales, escorias, ...).

**gravimetría** se trata de aprovechar la diferencia de los pesos específicos entre la mena y la ganga (e.g. mineral de Au, Sn, W, Pb, Zr, La, ...).

**electrostática** se basa en las diferencias de la resistencia interfacial que ofrecen los minerales al paso de electrones (e.g. mineral de Fe, W, La, Zr, ...).

**magnética** se basa en la diferencia de permeabilidad magnética de los minerales en cuestión (e.g. mineral de Fe, Ti, Ni, ...).

**escogido selectivo** se basa en la diferencia de colores, peso u otras propiedades como la fluorescencia (e.g.  $PbS$ ,  $CaWO_4$ ,  $CaF_2$ ).

El proceso de separación (llamado también llamado concentración) produce dos productos: *concentrado* (conjunto del material valioso) y *relave* (material no valioso ó estéril).

Para poder llevar a cabo la concentración se requiere liberar el material valioso. Esta liberación se produce por medio de la cominución (utilizándose equipos como trituradoras y molinos), y es en esta etapa en la que se produce el mayor consumo energético de todo el proceso. Por lo tanto, una excesiva reducción de

tamaño llega a ser contraproducente en términos de costos y operación (el exceso de partículas finas podría ocasionar bajas en la recuperación).

El proceso de concentración puede ser apreciado en la Figura 1.1.

### 1.1.1. Trituración

La reducción de tamaño ó *conminución* es importante en el procesamiento de minerales debido a que es utilizado para [16]:

- Producir partículas del tamaño y la forma requerida.
- Liberar minerales valiosos de la ganga<sup>1</sup> para que puedan concentrarse.
- Incrementar el área de superficie disponible para exhibirse a la reacción química.

Para lograr el tamaño óptimo para un proceso determinado se utilizan diversos equipos en distintas etapas.

- Trituración (hasta  $\approx 25mm$ )
  - Trituradora de quijadas
  - Trituradora giratorias
  - Trituradora de rodillos
  - Trituradora cónica. ...
- Molienda (para partículas menores a  $\approx 25mm$ )
  - Molino autógeno
  - Molino semiautógeno
  - Molino de barras
  - Molino de bolas, ...

Estos equipos generalmente trabajan en circuito abierto o cerrado con otros denominados *Clasificadores*, estos pueden ser tamices (para el caso de la trituración) ó hidrociclones, clasificadores helicoidales, etc. (para el caso de la molienda).

<sup>1</sup>Mineral no valioso.

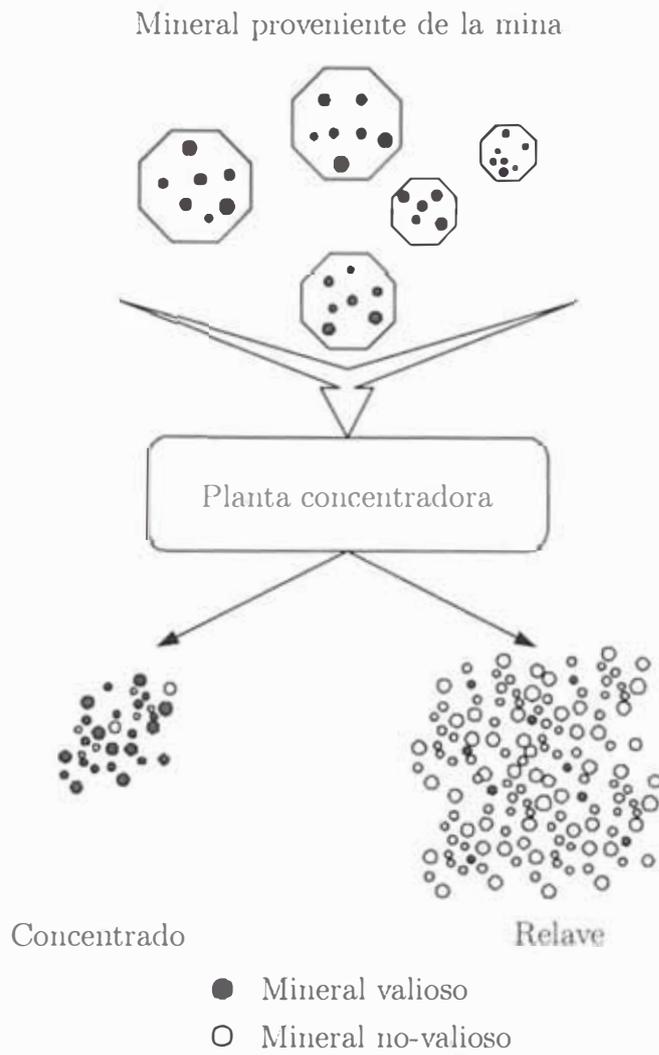


Figura 1.1: Esquema del procesamiento de minerales.

Tanto la trituración como la molienda se pueden subdividir en etapas primarias, secundarias y terciarias. pero el requerimiento de estas etapas depende de la operación.

La capacidad de las trituradoras depende del tamaño de la abertura de descarga y de la velocidad de la máquina. En los catálogos, textos e internet puede encontrarse tablas de capacidad vs. abertura de la trituradora [28], [8], [17], [35], [36].

### Objetivos de la trituración

Los objetivos son (en orden decreciente) [29]:

- Obtener una máxima reducción de tamaños, frecuentemente como la preparación del alimento para el circuito de molienda.
- Obtener un máximo producto de un tamaño específico, para agregados.
- Reducir el tamaño máximo para el manejo de materiales y diseño del medio de transporte.
- Controlar el tamaño máximo con una mínima producción de finos.

### 1.1.2. Control en la conminución

La aplicación de control de procesos en los procesos metalúrgicos no resulta ser tan avanzado como en otras industrias. Las aplicaciones son basadas en lazos de control PI, pero estas no dan una respuesta de control aceptable [13].

Los objetivos de un sistema de control en una planta de procesamiento de minerales pueden establecerse como [33]:

- Aumento de tratamiento (capacidad).
- Disminución de la energía por tonelada (energía específica) en molienda.
- Aumento de la recuperación.
- Aumento del contenido de metal (ley).

Para el caso de la cominución, el mayor enfoque en el control ha sido en el circuito de molienda-clasificación, esto debido a que es el paso previo a la concentración (recuperación) de los minerales valiosos.

En la molienda semiautógena se ha realizado un sistema de control experto permitiendo un aumento de la capacidad en 4.4 % y un menor consumo de energía específica de 4. % manteniendo al molino en un rango de operación estable [4].

El control de la granulometría que alimenta a los molinos resulta sumamente importante. Fernández *et al.* menciona que la eficiencia de los molinos semiautógenos depende fuertemente de la distribución granulométrica de las rocas alimentadas [7].

### Control automático en las trituradoras cónicas

« ... La fragmentación es un procedimiento ineficiente y de alto consumo de energía. Es típico que en la industria minera las operaciones de fragmentación ocupen más del 25 % del total de energía que se necesita para producir un metal terminado ... » [11].

La automatización en la sección de trituración, es un área en donde se deberán concentrar los estudios para minimizar el capital y los costos operativos en el futuro. Actualmente se utilizan sensores para monitorear la potencia ejercida por el motor, la granulometría del mineral, niveles de taza, presión hidráulica y temperaturas de las trituradoras entre otros.

Si la trituradora no está operando en las condiciones deseadas, se efectúa un ajuste en uno o ambos parámetros siguientes:

1. La tasa de alimentación.
2. Abertura de la trituradora (posteriormente lo denominaremos como *Closed Side Set*).

Las trituradoras que operan en modo automático, usualmente muestran una mejora significativa, siendo de 10 % a 20 % en el incremento del tonelaje cuando se controla la tasa de alimentación, y de 20 % a 50 % cuando se controla la abertura automáticamente (en comparación con trituradoras que se controlan manualmente). En el caso del control de la abertura, y en un menor grado al control de la tasa de alimentación, el control automático también provee protección para evitar sobrecargar la trituradora [39].

En la actualidad, compañías como Metso Minerals, Sage Automation, Agawalla, CEC, Chyi Meang Machinery Co., comercializan trituradoras cónicas con el ajuste automático de la abertura de descarga.

### Analizadores de tamaños de partículas

En el caso de partículas finas (como la molienda), existen en el mercado analizadores de tamaño de partícula que trabajan en forma on-line como los *PSM* de *Autometrics*, *PSI* de *Outokumpu*. Otras compañías como *Malvern Instruments* utilizan técnicas de *difracción laser* para realizar análisis granulométricos.

Para las partículas gruesas (como la trituración), compañías como *Wipware* y *Split Engineering* han utilizado técnicas de *procesamiento digital de imágenes* para obtener análisis granulométricos, aunque este tipo de método data desde inicios de los 80's [3].

Este sensor es de vital importancia ya que determina la calidad del producto de la planta de trituración. Actualmente *Southern Perú Copper Corporation* (SPCC) en la unidad de Toquepala, tiene implementado este sistema (Visio Rock de Metso Minerals Cisa).

## 1.2. Lógica difusa

La lógica difusa puede ser planteada como un caso general de la lógica booleana (de ceros y unos). Esto se podría explicar con un simple ejemplo:

*“Si la persona X tiene hambre, entonces comerá todo el plato de comida”.*

Esto nos hace pensar que *si dicha persona X no tiene hambre, entonces no comerá* (lógica booleana).

Pero la realidad consiste también de estados intermedios (no contemplada en la lógica booleana), lo cual puede mostrarse como: *la persona X no tiene mucha hambre*. Si éste es el hecho, entonces ¿cuál debe ser la acción de dicha persona X?

Si se utiliza la lógica difusa, la acción de dicha persona sería *comer solo un poco*.

Hasta este punto se ha explicado solo con *palabras* pero los controladores, PC's, etc. trabajan con *números* básicamente. Para lograr esto se debe realizar

una especie de conversión. Dicha conversión resultaría tan natural como en el diálogo siguiente:

esposa de  $X$ : En la escala del uno al diez, ¿cuánta hambre tienes?

$X$ : Seis más o menos.

Si la esposa de  $X$  utiliza la lógica difusa, ella le serviría aproximadamente el 60 % de los que le sirve normalmente cuando la persona  $X$  tiene hambre.

Si se analiza el ejemplo, se desea controlar el hambre de la persona  $X$  (el cual debe ser cero, o simplemente que la persona  $X$  no tenga hambre). El controlador (la esposa de  $X$ ) recibe información la cual es normalizada ( $6/10 = 60\%$ ) y esta representa el grado de disparo de la regla establecida. La acción que toma el controlador es clara, servir aproximadamente el 60 % de lo que la persona  $X$  normalmente come. El término *aproximadamente* en este caso, es debido a que el valor de entrada (seis) no es exacto ( $X$  responde con un *más o menos*), en un sentido estricto, la expresión *Seis más o menos* será un número seis difuso *no-singleton*.

En el caso de la planta de trituración en cuestión, la granulometría se podría controlar con reglas como: *si el producto es grueso, entonces cierra la abertura de descarga y disminuye el flujo de alimentación*. ¿Qué ventajas representa esto?, simplemente un operador puede comprender (y/o modificar) las reglas de control sin mucha dificultad, e incluso serían ellos los que brinden el *conocimiento* para elaborar dichas reglas.

Por supuesto que el diseño de un controlador por lógica difusa no resulta tan simple, ya que una mala elaboración de la *base de reglas*, definición de los *conjuntos difusos*, elección de *operadores difusos*, etc. podría ocasionar un mal control (en el mejor de los casos), deterioro de equipos, etc.

### 1.2.1. Razón de uso de un Controlador por Lógica Difusa

En la actualidad Southern Perú Copper Corporation (unidad de Toquepala) tiene implementado un *sistema de control optimizante* (Optimizing Control Systems - OCS -, de Metso Minerals Cisa). Este sistema está basado en un Sistema Experto Difuso en el cual se podría implementar el sistema de control diseñado en la presente tesis.

Adicionalmente la Lógica Difusa permite controlar sistemas de múltiples entradas y salidas (i.e. MIMO) como es la planta en cuestión.

### 1.3. Objetivos de la presente tesis

El objetivo general de la presente tesis es:

- Diseñar un sistema para controlar la granulometría del producto (calidad) de la planta de trituración secundaria y terciaria de SPCC (unidad de Toquepala) y procesar el máximo tonelaje posible (cantidad).

Los objetivos específicos planteados son:

- Modelar matemáticamente la planta de trituración secundaria y terciaria de SPCC (Toquepala).
- Diseñar el sistema de control basado en lógica difusa (tipo Mamdani y tipo Takagi-Sugeno) el cual debe de cumplir lo siguiente:
  1. Controlar la granulometría del producto (i.e. % + 1/2") a diferentes Set Points.
  2. Maximizar el tonelaje.
  3. Controlar los niveles de taza de las trituradoras (i.e. 70%).
  4. Controlar el amperaje de las trituradoras en un rango de operación.

## Capítulo 2

# Descripción de la planta

Southern Perú Copper Corporation (SPCC) inicia sus operaciones en Perú en el año 1956 y en la actualidad se encuentra entre los diez principales productoras privadas de cobre a nivel mundial. Como subproductos se tienen: molibdeno (concentrado), plata (lingotes), oro (lingotes), selenio comercial y ácido sulfúrico.

La mina de Toquepala inicia sus operaciones en 1960 y está situada en el departamento de Tacna, provincia de Jorge Basadre, distrito de Ilabaya. Aquí, funciona una mina (explotación a tajo abierto), una planta concentradora y la planta SX/EW.

Según la Memoria Anual 2004 [34]:

La unidad de Toquepala cuenta con 597,8 millones de toneladas de reservas minerales (sulfuros) y 1732,2 millones de toneladas de reservas lixiviables, con una ley de cobre promedio de 0,73 % para los sulfuros y 0,18 % para el material lixiviable. El concentrado producido tiene una ley aproximada de 26,8 % de cobre.

En esta unidad en el año 2004, se procesaron 21,807 millones de toneladas de mineral, produciéndose 354,6 millones de libras de cobre (160 mil toneladas aproximadamente).

### 2.1. Sección de trituración secundaria y terciaria

El producto de la trituradora primaria giratoria Traylor (600HP) es acumulado en una pila de mineral o Stockpile el cual sirve de alimentación a la planta de trituración secundaria y terciaria.

Del Stockpile salen tres fajas transportadoras, las cuales son los alimentos a las líneas *A*, *B* y *C*.

Las líneas *A*, *B* (líneas antiguas) son similares, en ambas la faja que transporta el mineral del Stockpile alimenta a una zaranda vibratoria de un piso. El material grueso sirve de alimento a una trituradora cónica estándar Nordberg MP800 en el cual se realiza la trituración secundaria. El producto de la trituradora secun-

daria y el material fino de la zaranda se unen y es derivado a un distribuidor de carga el cual alimenta a dos sub-líneas en la cual cada una dispone inicialmente de una zaranda vibratoria. El producto grueso de esta zaranda alimenta a una trituradora cónica de cabeza corta Nordberg *HP700* en la cual se realiza la trituración terciaria. El producto fino de esta zaranda (de la sub-línea) y el producto de la trituración terciaria se destinan a la sección de molienda.

La línea *C* difiere de las líneas *A* y *B* en las trituradoras terciarias, las cuales son Nordberg *HP800* y en las zarandas vibratorias, las cuales son de dos pisos. En la zaranda de la trituración secundaria, el producto más grueso alimenta a la trituradora, el producto intermedio se une con el producto de la trituradora secundaria para alimentar a los equipos de trituración terciaria y el producto fino de dicha zaranda va directamente a la sección molienda. En el caso de las zarandas de la trituración terciaria, el producto grueso y el intermedio alimentan a las trituradoras terciarias y el producto fino va a la sección molienda.

El diagrama de flujo de la planta de trituración secundaria y terciaria se muestra en la Figura 2.1 y la Tabla 2.1 presenta la descripción respectiva.

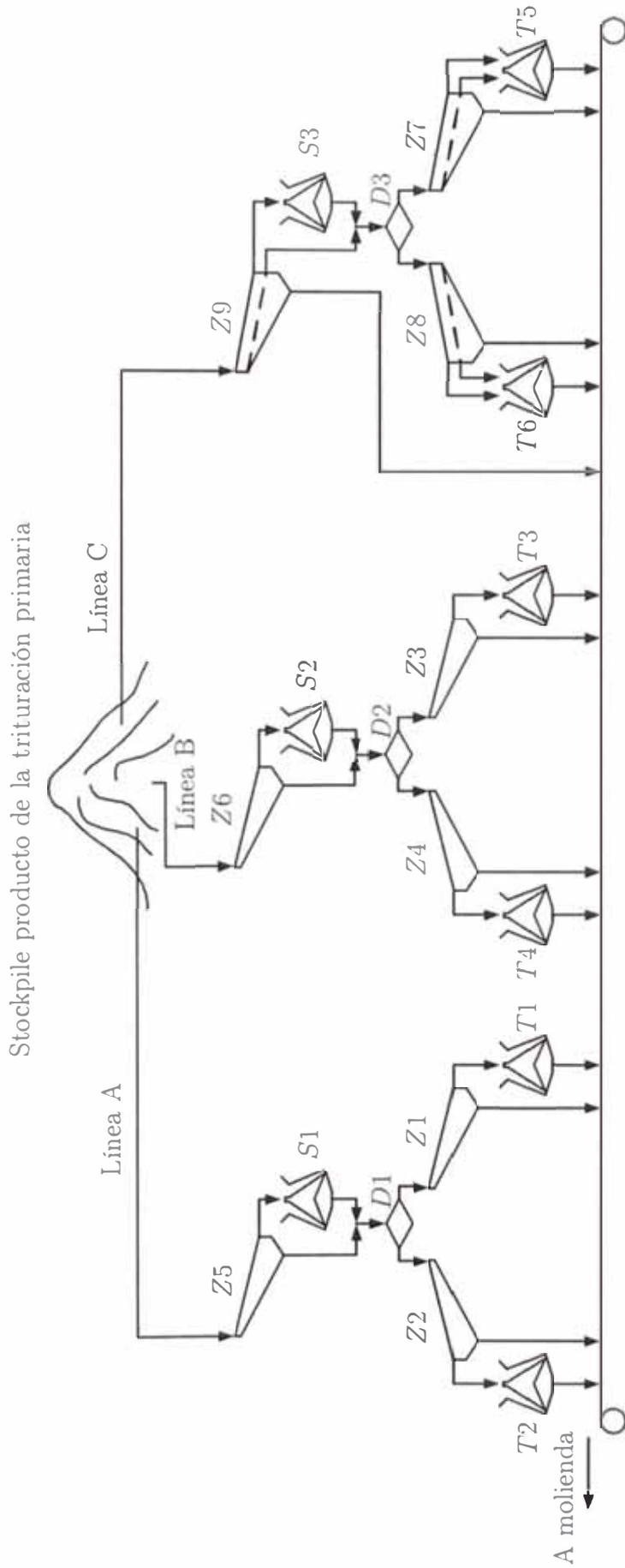


Figura 2.1: Diagrama de flujo de la Planta de Triturración Secundaria y Terciaria de Toquepala de SPCC.

Tabla 2.1: Notación de los equipos de la planta de trituración secundaria y terciaria según la Figura 2.1.

Equipo	Descripción	Modelo	Código	Línea	Características	Zarandas		Trituradoras	
						Abertura (mm)			CSS (mm)
						1 <sup>er</sup> piso	2 <sup>do</sup> Piso		
Z1	Zaranda Vibratoria		Z - 1	A	Un piso	14.0	-		
Z2	Zaranda Vibratoria		Z - 2	A	Un piso	13.2	-		
Z3	Zaranda Vibratoria		Z - 3	B	Un piso	14.0	-		
Z4	Zaranda Vibratoria		Z - 4	B	Un piso	14.5	-		
Z5	Zaranda Vibratoria		Z - 5	A	Un piso	75.0	-		
Z6	Zaranda Vibratoria		Z - 6	B	Un piso	75.0	-		
Z7	Zaranda Vibratoria		Z - 7	C	Dos pisos	33.0	15.0		
Z8	Zaranda Vibratoria		Z - 8	C	Dos pisos	33.0	15.0		
Z9	Zaranda Vibratoria		Z - 9	C	Dos pisos	51.0	15.0		
S1	Trituradora Secundaria	MP800	MP1	A	Cónica Estándar			32	
S2	Trituradora Secundaria	MP800	MP2	B	Cónica Estándar			38	
S3	Trituradora Secundaria	MP800	MP3	C	Cónica Estándar			38	
T1	Trituradora Terciaria	HP700	HP1	A	Cónica de Cabeza Corta			11	
T2	Trituradora Terciaria	HP700	HP2	A	Cónica de Cabeza Corta			11	
T3	Trituradora Terciaria	HP700	HP3	B	Cónica de Cabeza Corta			11	
T4	Trituradora Terciaria	HP700	HP4	B	Cónica de Cabeza Corta			11	
T5	Trituradora Terciaria	HP800	HP5	C	Cónica de Cabeza Corta			11	
T6	Trituradora Terciaria	HP800	HP6	C	Cónica de Cabeza Corta			11	
D1	Distribuidor de Carga		DCA	A					
D2	Distribuidor de Carga		DCB	B					
D3	Distribuidor de Carga		DCC	C					

## 2.2. Data utilizada

Para el cálculo de parámetros de los modelos presentados en el Capítulo 3 se utilizó la data de las Tablas 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7. En la Tabla 2.2 se presentan las mallas utilizadas para los análisis granulométricos con su correspondiente número del intervalo de tamaños.

Tabla 2.2: Mallas utilizadas y su correspondiente intervalo de tamaños.

I.T.	Mallas	Tamaños ( <i>mm</i> )		
		Máximo	Mínimo	Promedio
1	-8" - 6"	203.20	152.40	175.98
2	-6" - 4"	152.40	101.60	124.43
3	-4" - 3"	101.60	76.20	87.99
4	-3" - 2"	76.20	50.80	62.22
5	-2" + 1 1/2"	50.80	38.10	43.99
6	-1 1/2" + 1"	38.10	25.40	31.11
7	-1" + 3/4"	25.40	19.05	22.00
8	-3/4" + 1/2"	19.05	12.70	15.55
9	-1/2" + 3/8"	12.70	9.53	11.00
10	-3/8" + m4	9.53	4.75	6.73
11	-m4 + m6	4.75	3.35	3.99
12	-m6 + m8	3.35	2.36	2.81
13	-m8 + m10	2.36	1.70	2.00
14	-m10 + m14	1.70	1.18	1.42
15	-m14	1.18	0.00	0.59

Tabla 2.3: Porcentajes en peso de los alimento y productos de las trituradoras secundarias con su respectivo CSS y tonelaje tratado. A: Alimento, P: Producto, TMH: Toneladas métricas por hora, CSS: Closed Side Set de la trituradora en *mm*.

I.T.	MP1		MP2		MP3	
	A.	P.	A.	P.	A.	P.
1	12.74	0.00	9.22	0.00	8.64	0.00
2	8.03	0.00	15.16	0.00	13.81	0.00
3	5.21	0.00	8.47	0.00	14.00	0.00
4	8.88	7.11	12.26	8.35	19.48	9.51
5	8.12	18.41	11.82	12.45	16.50	30.68
6	10.71	27.11	7.67	18.97	14.03	30.81
7	6.84	11.60	4.78	6.71	6.16	9.07
8	9.23	11.51	6.26	7.97	4.61	7.22
9	4.68	2.71	3.58	5.78	0.86	2.37
10	8.14	4.29	6.83	10.73	1.32	3.70
11	2.33	1.94	1.97	3.69	0.00	1.12
12	2.14	1.71	1.89	3.12	0.00	0.94
13	1.79	1.32	1.56	2.73	0.00	0.73
14	1.77	1.27	1.67	2.93	0.00	0.64
15	9.39	11.02	6.86	16.57	0.59	3.21
	TMH	989	TMH	792	TMH	488
	CSS	32	CSS	38	CSS	38

Tabla 2.4: Porcentajes en peso de los alimento y productos de las trituradoras terciarias con su respectivo CSS y tonelaje tratado.  
A: Alimento, P: Producto, TMH: Toneladas métricas por hora, CSS: Closed Side Set de la trituradora en mm.

I.T.	HP1		HP2		HP3		HP4		HP5		HP6	
	A.	P.										
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	12.92	0.00	4.11	0.00	12.6	0.00	18.64	0.00	3.92	0.00	8.01	0.00
5	25.75	0.00	20.10	0.00	26.55	0.00	18.27	0.00	28.11	0.00	37.77	0.00
6	32.03	0.00	37.83	0.00	37.45	0.00	36.14	0.00	40.94	0.05	33.14	0.05
7	15.76	0.50	17.90	0.73	14.07	1.63	15.68	0.00	15.87	0.74	15.68	0.00
8	11.33	4.79	15.45	13.31	8.10	21.58	10.11	5.43	10.20	19.52	4.72	3.95
9	1.01	7.70	2.38	17.28	0.69	17.35	0.71	12.99	0.44	16.12	0.16	11.15
10	0.31	27.53	1.11	25.63	0.16	22.62	0.15	30.29	0.13	25.95	0.05	30.83
11	0.02	7.85	0.05	7.25	0.00	7.06	0.00	9.7	0.03	7.67	0.00	7.79
12	0.01	6.88	0.01	6.02	0.00	5.60	0.00	7.62	0.01	5.58	0.00	7.30
13	0.00	5.19	0.00	4.48	0.00	4.29	0.00	5.97	0.00	4.17	0.00	5.86
14	0.00	4.83	0.00	4.02	0.00	3.70	0.00	5.2	0.00	3.56	0.00	5.49
15	0.86	34.73	1.06	21.28	0.38	16.17	0.30	22.8	0.35	16.64	0.47	27.58
	TMH	449	TMH	316	TMH	271	TMH	275	TMH	307	TMH	334
	CSS	11										

Tabla 2.5: Porcentajes en peso del alimento, oversize y undersize de las zarandas vibratorias 1, 2 y 3. A: Alimento, O: Oversize, U: Undersize, TMH: Toneladas métricas por hora, Ancho: Ancho de la zaranda en  $m$ , Largo: Largo de la zaranda en  $m$ , Abertura: Abertura de la malla en  $mm$ .

I.T.	Z - 1			Z - 2			Z - 3		
	A.	O.	U.	A.	O.	U.	A.	O.	U.
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	6.30	12.92	0.00	6.30	4.11	0.00	8.23	12.60	0.02
5	16.70	25.75	0.00	16.70	20.10	0.00	11.74	26.55	0.02
6	25.25	32.03	0.00	25.25	37.83	0.00	19.41	37.45	0.02
7	12.22	15.76	0.27	12.22	17.90	0.00	8.13	14.07	0.28
8	11.03	11.33	5.33	11.03	15.45	4.73	9.30	8.10	8.29
9	3.20	1.01	7.42	3.20	2.38	7.08	5.79	0.69	11.29
10	5.49	0.31	18.84	5.49	1.11	17.56	10.56	0.16	21.54
11	2.11	0.02	7.44	2.11	0.05	7.69	3.62	0.00	7.02
12	2.01	0.01	7.20	2.01	0.01	7.37	3.01	0.00	6.07
13	1.66	0.00	5.90	1.66	0.00	6.15	2.58	0.00	5.35
14	1.68	0.00	5.91	1.68	0.00	6.26	2.70	0.00	6.12
15	12.35	0.86	41.69	12.35	1.06	43.15	14.93	0.38	33.98
	TMH		596	TMH		596	TMH		519
	Ancho		2.13	Ancho		2.13	Ancho		2.13
	Largo		4.27	Largo		4.27	Largo		4.27
	Abertura		14.0	Abertura		13.2	Abertura		14.0

Tabla 2.6: Porcentajes en peso del alimento, oversize y undersize de las zarandas vibratorias 4, 5 y 6. A: Alimento, O: Oversize, U: Undersize, TMH: Toneladas métricas por hora, Ancho: Ancho de la zaranda en  $m$ , Largo: Largo de la zaranda en  $m$ , Abertura: Abertura de la malla en  $mm$ .

I.T.	Z - 4			Z - 5			Z - 6		
	A.	O.	U.	A.	O.	U.	A.	O.	U.
1	0.00	0.00	0.00	10.56	12.74	0.00	7.04	9.22	0.00
2	0.00	0.00	0.00	6.66	8.03	0.00	11.58	15.17	0.00
3	0.00	0.00	0.00	4.32	5.21	0.00	6.47	8.47	0.00
4	8.23	18.64	0.00	8.02	8.88	3.87	11.22	12.27	7.83
5	11.74	18.27	0.01	7.86	8.12	6.60	11.26	11.83	9.44
6	19.41	36.14	0.01	11.67	10.71	16.32	10.79	7.67	20.88
7	8.13	15.68	0.47	7.63	6.84	11.45	6.66	4.78	12.73
8	9.30	10.11	10.33	9.80	9.23	12.57	8.00	6.26	13.60
9	5.79	0.71	11.63	4.93	4.68	6.15	4.11	3.58	5.82
10	10.56	0.15	22.87	8.87	8.14	12.42	7.59	6.83	10.04
11	3.62	0.00	8.29	2.59	2.33	3.87	2.31	1.97	3.38
12	3.01	0.00	6.69	2.37	2.14	3.49	2.08	1.89	2.68
13	2.58	0.00	5.58	1.94	1.79	2.65	1.68	1.56	2.08
14	2.70	0.00	5.35	1.91	1.77	2.61	1.71	1.64	1.94
15	14.93	0.30	28.77	10.87	9.39	18.00	7.50	6.86	9.58
	TMH		519	TMH		1192	TMH		1037
	Ancho		2.13	Ancho		2.13	Ancho		2.13
	Largo		4.27	Largo		4.27	Largo		4.27
	Abertura		14.5	Abertura		75.0	Abertura		75.0

Tabla 2.7: Porcentajes en peso del alimento, oversize y undersize de las zarandas vibratorias 7, 8 y 9. A: Alimento, O: Oversize, U: Undersize, TMH: Toneladas métricas por hora, Ancho: Ancho de la zaranda en  $m$ , Largo: Largo de la zaranda en  $m$ , Abertura: Abertura de la malla en  $mm$ .

I.T.	Z - 7			Z - 8			Z - 9			
	A.	O.	U.	A.	O.	U.	A.	O1.	O2.	U.
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.53	8.64	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	7.24	13.81	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	7.33	14.00	0.00	0.00
4	6.53	3.92	0.00	6.53	8.01	0.00	10.20	19.48	0.00	0.00
5	28.88	28.11	0.00	28.88	37.77	0.00	14.58	16.50	24.91	0.00
6	33.71	40.94	0.65	33.71	33.14	0.00	16.91	14.03	40.06	0.02
7	11.76	15.87	1.70	11.76	15.68	2.10	7.44	6.16	17.66	0.01
8	9.18	10.20	20.78	9.18	4.72	39.84	8.65	4.61	13.49	12.68
9	2.17	0.44	13.11	2.17	0.16	16.00	3.82	0.86	1.74	12.44
10	2.80	0.13	21.45	2.80	0.05	20.40	6.25	1.32	0.81	22.57
11	0.77	0.03	6.31	0.77	0.00	4.06	1.72	0.00	0.01	7.21
12	0.65	0.01	5.91	0.65	0.00	3.53	1.36	0.00	0.00	5.72
13	0.50	0.00	4.91	0.50	0.00	2.36	1.09	0.00	0.00	4.61
14	0.44	0.00	4.33	0.44	0.00	1.86	0.99	0.00	0.00	4.16
15	2.61	0.35	20.85	2.61	0.47	9.85	7.89	0.59	1.32	30.58
	TMH		355	TMH		355	TMH			933
	Ancho		2.44	Ancho		2.44	Ancho			2.44
	Largo		4.88	Largo		4.88	Largo			4.27
	Abertura		15.0	Abertura		15.0	Abertura	1 <sup>er</sup> Piso		51.0
								2 <sup>do</sup> Piso		15.0

## 2.3. Materiales que conforman el producto de la planta de trituración

En la Figura 2.2 se muestra la gráfica de las fracciones en peso acumuladas pasantes de los materiales que van a la sección molienda y que representan el producto de la planta de trituración secundaria y terciaria.

Estos materiales son:

- Productos de trituradoras terciarias (i.e. *HP1*, *HP2*, *HP3*, *HP4*, *HP5* y *HP6*).
- Undersize de zarandas vibratorias de las trituración terciaria (i.e. *Z - 1*, *Z - 2*, *Z - 3*, *Z - 4*, *Z - 7* y *Z - 8*).
- Undersize de zaranda vibratoria de la trituración secundaria de la Línea *C* (i.e. *Z - 9*).

Todos estos materiales se unen para formar el “*Producto Global*” de la planta de trituración. El principal objetivo de esta planta en particular debe de mantener la fracción  $+1/2''$  en un valor de 15 % o menos (ver el Apéndice A para una mejor comprensión de los análisis granulométricos). En la Figura 2.2, la Tabla 2.8 y la Tabla 2.9, se observa que los productos no son uniformes, algunos están por encima y otros debajo del valor objetivo, aunque sólo se exige que la granulometría del producto global cumpla dicho requerimiento.

Tabla 2.8: Parámetros estadísticos de los productos de las trituradoras terciarias.  $+1/2''$ : Material de tamaño mayor a  $1/2''$  expresado en porcentaje en peso, TMH: Toneladas métricas por hora.

	HP1	HP2	HP3	HP4	HP5	HP6
Media ( <i>mm</i> )	4.44	6.59	7.82	5.24	7.43	4.80
Varianza ( $mm^2$ )	18.31	26.83	32.07	17.68	29.32	16.66
Desv. Est. ( <i>mm</i> )	4.28	5.18	5.66	4.20	5.41	4.08
C. V. (%)	96.41	78.63	72.43	80.23	72.89	84.96
$+1/2''$ (%)	5.29	14.04	23.21	5.43	20.31	4.00
TMH	449	316	271	275	307	334

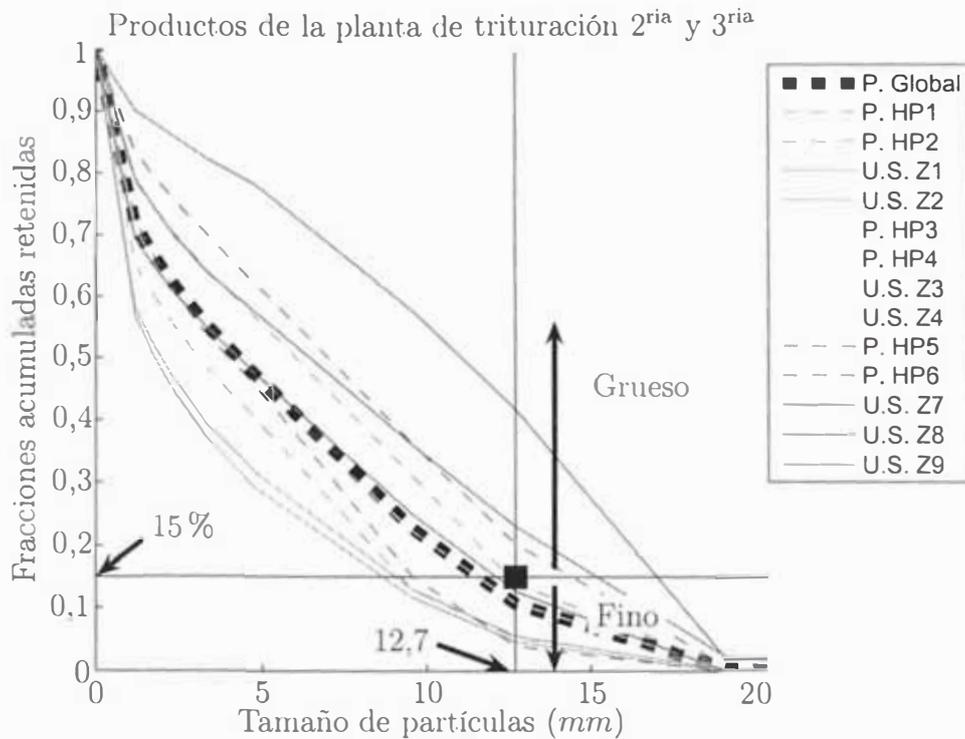


Figura 2.2: Productos de la planta de trituración secundaria y terciaria: La coordenada objetivo se encuentra en (12,7;0,15), las curvas debajo de ese punto, significan productos más finos y viceversa.

Tabla 2.9: Parámetros estadísticos de los Undersize de las Zarandas. +1/2": Material de tamaño mayor a 1/2" expresado en porcentaje en peso, TMH: Toneladas métricas por hora.

	Z - 1	Z - 2	Z - 3	Z - 4	Z - 7	Z - 8	Z - 9
Media (mm)	3.92	3.68	4.91	5.41	7.39	10.18	5.65
Varianza (mm <sup>2</sup> )	18.60	16.77	24.08	24.98	37.52	32.52	26.27
Desv. Est. (mm)	4.31	4.10	4.91	5.00	6.13	5.70	5.13
C. V. (%)	110.04	111.39	99.84	92.34	82.84	55.99	90.74
+1/2" (%)	5.60	4.73	8.63	10.82	23.13	41.94	12.71
TMH	147	280	248	243	48	21	222

## 2.4. Discusión

En el caso de las trituradoras, se puede obtener un producto más fino o más grueso variando principalmente la abertura de la trituradora (en el siguiente capítulo se denominará *Closed Side Set* ó *CSS*). Por cuestiones operativas, esta abertura aumenta debido principalmente al desgaste del cono y por ende se deberá de regularlo en cada guardia. Esta regulación se hace actualmente con la trituradora apagada lo que ocasiona una disminución en la capacidad de la planta. Por ese motivo se propone un método de control de dicha abertura (entre otros factores) en forma on-line.

En el caso de las zarandas, si se desea tener un producto más fino o más grueso se deberá de cambiar las mallas por unas de menor o mayor abertura respectivamente y este trabajo no puede ser realizado cuando las zarandas están operando.

Por lo tanto para poder lograr el control de la granulometría en una planta de trituración secundaria y terciaria se debe de realizar previamente una buena selección de las mallas de las zarandas en la que involucren tanto la abertura como la resistencia mecánica ya que una rotura en plena operación ocasionaría una mala calidad en el producto (más grueso).

## Capítulo 3

# Modelos Matemáticos

### 3.1. Trituradora cónica: Granulometría del producto

La trituración es la primera etapa en el proceso de conminución en la cual el principal objetivo es la liberación de los minerales valiosos de la ganga [40].

Las trituradoras cónicas fueron inventadas por Edgar B. Symons a mediados de 1920. Se diferencia de las trituradoras giratorias en que la parte inferior del cono, recorre más distancia y se mueve más rápido. Esta larga carrera (throw) combinada con un ángulo del cono más plano, origina que las partículas sigan un camino de zig-zag a través del triturador. Las rocas entran por la parte superior, caen sobre el cono y son elevadas y trituradas contra el revestimiento de la taza. Como el cono se retira (o retrocede) en un giro más rápidamente que el efecto de gravedad en las partículas trituradas, la roca triturada cae verticalmente alejándose del cono para encontrarse en el próximo giro y nuevamente ser triturada contra el revestimiento de la taza.

Sobrecargar el triturador no incrementa la producción y es contraproducente porque acorta la vida de los componentes mecánicos. Operar con el triturador a un cierre demasiado estrecho reduce la capacidad y crea un excesivo desgaste. Una abertura demasiado ancha, en proporción al tamaño máximo de alimentación, puede estorbar a la trituración en la zona superior y provocar un consumo excesivo de potencia. [28].

#### 3.1.1. Descripción del modelo

El modelo presentado corresponde al propuesto por Whiten (1972) [30], [29], [17] y aunque es el más utilizado para predecir la granulometría del producto, no proporciona una respuesta dinámica. Existe un modelo dinámico propuesto por Oblad [30] pero que no será contemplado en este trabajo.

En [17] se describe al mecanismo de trituración como una combinación de clasificación y fractura de las partículas minerales. Este mecanismo es oscilante, el cual consiste en abrir (opening) y cerrar (nipping) la zona de descarga.

**Opening** En esta operación, el material se dirige hacia abajo (zona de descarga) y parte del material es retenido y la otra parte sale de la trituradora como producto (mecanismo de Clasificación).

**Nipping** En esta operación, el material es comprimido y fragmentado (mecanismo de Fractura).

Estos mecanismos son similares en trituradoras de quijada, giratorias y cónicas (Standard o de Cabeza Corta -Short Head-).

### 3.1.2. Nomenclatura

- $N$  : Número de intervalos de tamaños
- $i$  : Subíndice para designar un intervalo de tamaños  $i = 1, 2, \dots, N$   
 $i = 1$  Corresponde al intervalo de partículas más gruesas  
 $i = N$  Corresponde al intervalo de partículas más finas
- $p_i^F$  : Fracción en peso del Alimento en el intervalo de tamaños  $i$
- $p_i$  : Fracción en peso del Producto en el intervalo de tamaños  $i$
- $M$  : Masa retenida en el triturador
- $b_{i,j}$  : Función Fractura o fracción de partículas que aparecen en el intervalo de tamaños  $i$  proveniente de la reducción de material del intervalo de tamaños  $j$
- $m_i$  : Fracción en peso del material en la trituradora correspondiente al intervalo de tamaños  $i$
- $c_i$  :  $c(d_i)$   
Fracción en peso de material en el intervalo de tamaños  $i$  que es retenido para fracturarse en el siguiente ciclo.
- $W$  : Masa total del alimento que es aceptado en un ciclo.  
Masa del producto descargado

### 3.1.3. Balance de masa

#### Balance de masa en la trituradora

Si efectuamos el balance de masa en la trituradora (ver la Figura 3.1 y la Tabla 3.1), veremos que la cantidad de masa en el intervalo de tamaños  $i$  presente en la trituradora es la suma del material fresco que ingresa a la trituradora y al material que ha sido fracturado, clasificado y retenido, por lo tanto, podremos establecer que:

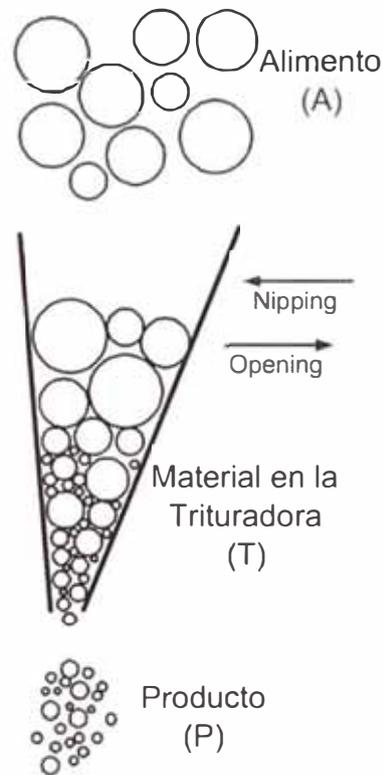


Figura 3.1: Esquema de la fragmentación en una Trituradora

Tabla 3.1: Descripción de balance de masa en la trituradora

	Muestra	Masa total	Para el intervalo de tamaños $i$	
			Masa	Fracción en peso
A	Alimento	$W$	$W p_i^F$	$p_i^F$
T	En la trituradora	$M$	$M m_i$	$m_i$
P	Producto	$W$	$W p_i^i$	$p_i$

$Wp_i^F$  Es el material fresco perteneciente al intervalo de tamaños  $i$  que ingresa a la trituradora.

$c_j Mm_j b_{i,j}$  Es la fracción del material de intervalo de tamaño inicial  $j$  que ha sido clasificado y fracturado al intervalo de tamaños  $i$  el cual permanece en la trituradora.

$$Mm_i = Wp_i^F + c_1 Mm_1 b_{i,1} + c_2 Mm_2 b_{i,2} + \dots + c_i Mm_i b_{i,i}$$

La expresión anterior puede expresarse como:

$$\frac{M}{W} m_i = \frac{1}{1 - c_i b_{i,i}} \left( p_i^F + \sum_{j=1}^{i-1} c_j \frac{M}{W} m_j b_{i,j} \right) \quad (3.1)$$

### Balance de masa en el producto

El producto de la trituradora correspondiente al intervalo de tamaños  $i$  responderá al material que ha sido fracturado, clasificado y pasado por la trituradora, por lo tanto, puede establecerse que:

$(1 - c_i) Mm_i$  Es la fracción del material de intervalo de tamaño  $i$  que ha sido clasificado y descargado de la trituradora. Es decir:

$$Wp_i = (1 - c_i) Mm_i$$

La expresión anterior puede expresarse como:

$$p_i = (1 - c_i) \frac{M}{W} m_i \quad (3.2)$$

### 3.1.4. Modelo matemático

El modelo corresponde a (3.1) y (3.2). Para tener un modelo más fácil de manejar y que represente a todos los intervalos de tamaño se convertirán en expresiones matriciales (ver Figura 3.2), por lo tanto definimos:

#### Matrices del modelo

Los análisis granulométricos son expresados como vectores columna de tamaño  $N$ , la suma de los componentes de cada vector debe de sumar uno (100%).

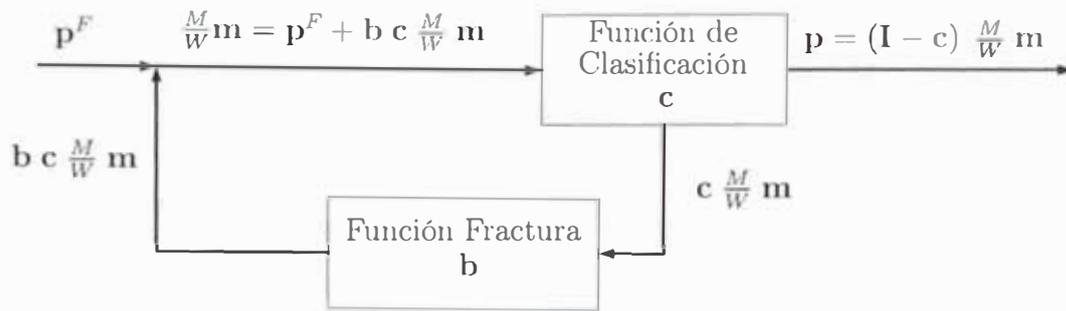


Figura 3.2: Diagrama de bloques del modelo de la trituradora

**Análisis granulométrico del alimento** Vector columna correspondiente al análisis granulométrico del alimento fresco a la trituradora.

$$\mathbf{p}_{(N \times 1)}^F = \begin{bmatrix} p_1^F \\ p_2^F \\ p_3^F \\ p_4^F \\ \vdots \\ p_{N-1}^F \\ p_N^F \end{bmatrix} \quad \sum_{i=1}^N p_i^F = 1$$

**Análisis granulométrico del material en la trituradora** Vector columna correspondiente al análisis granulométrico del material en la trituradora.

$$\mathbf{m}_{(N \times 1)} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_{N-1} \\ m_N \end{bmatrix} \quad \sum_{i=1}^N m_i = 1$$

**Análisis granulométrico del producto** Vector columna correspondiente al análisis granulométrico del producto de la trituradora.

$$P_{(N \times 1)} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ \vdots \\ p_{N-1} \\ p_N \end{bmatrix} \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1$$

**Matriz de Clasificación** Los valores  $c_i$  de la Matriz de Clasificación están entre el rango de 0 (pasa todo por la trituradora) y 1 (retiene todo en la trituradora)

$$C_{(N \times N)} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_N \end{bmatrix}$$

**Matriz de la Función Fractura** Los valores de  $b_{i,j}$  están en el rango de 0 a 1 y deben de cumplir que la suma de los componentes en cada columna sea uno (100%).

$$b_{(N \times N)} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{N-1,1} & b_{N-1,2} & b_{N-1,3} & b_{N-1,4} & \dots & b_{N-1,N-1} & 0 \\ b_{N,1} & b_{N,2} & b_{N,3} & b_{N,4} & \dots & b_{N,N-1} & b_{N,N} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^N b_{i,j} = 1 \quad ; \quad \forall j$$

### 3.1.5. Modelo matricial

El modelo matricial es derivada de (3.1) y (3.2) (modelo en Régimen Permanente - Steady State -) y se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{M}{W} \mathbf{m} = \mathbf{p}^F + \mathbf{b} \mathbf{c} \frac{M}{W} \mathbf{m}$$

$$\frac{M}{W} \mathbf{m} = (\mathbf{I} - \mathbf{b} \mathbf{c})^{-1} \mathbf{p}^F \quad (3.3)$$

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{c}) \frac{M}{W} \mathbf{m} \quad (3.4)$$

Si reemplazamos (3.3) en (3.4) obtenemos el modelo matricial de la trituradora:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{c}) (\mathbf{I} - \mathbf{b} \mathbf{c})^{-1} \mathbf{p}^F \quad (3.5)$$

Donde  $\mathbf{I}$  es la matriz Identidad de tamaño  $(N \times N)$

### Formas útiles de la Función de Clasificación y la Función Fractura

**Función de Clasificación** La función de Clasificación puede ser simplificada mediante:

$$c_i = \begin{cases} 1 - \left( \frac{d_2 - dp_i}{d_2 - d_1} \right)^n & \text{Si } d_1 < dp_i < d_2 \\ 0 & \text{Si } dp_i \leq d_1 \\ 1 & \text{Si } dp_i \geq d_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

**Parámetro de Control** El control de la granulometría del producto de las trituradoras cónicas (Standard y de Cabeza Corta) se hace variando la abertura de la trituradora (Closed Side Set - CSS). Para esto se tiene las siguientes relaciones:

$$d_1 = \alpha_1 \text{ CSS} \quad (3.7)$$

$$d_2 = \alpha_2 \text{ CSS} + d^* \quad (3.8)$$

Donde los rangos son [17]:

$$0,5 \lesssim \alpha_1 \lesssim 0,95$$

$$1,7 \lesssim \alpha_2 \lesssim 3,5$$

$$1 \lesssim n \lesssim 3$$

$$d^* \sim 0$$

**Open Side Set (OSS)** Abertura máxima de la descarga de la trituradora (ver Figura 3.3)

**Closed Side Set (CSS)** Abertura mínima de la descarga de la trituradora

**Throw** Es la distancia definida como:  $\text{Throw} = OSS - CSS$

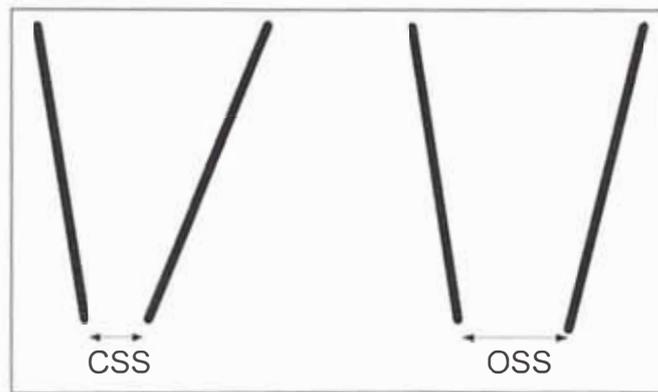


Figura 3.3: Esquema: Open Side Set (OSS) (Abertura máxima de descarga) y Closed Side Set (CSS) (Abertura mínima de descarga)

**Función Fractura** La función Acumulativa de Fractura  $B$  se puede representar mediante:

$$B(x, y) = \begin{cases} K \left(\frac{x}{y}\right)^{n_1} + (1 - K) \left(\frac{x}{y}\right)^{n_2} & \text{Para } x < y \\ 1 & \text{Para } x \geq y \end{cases} \quad (3.9)$$

Donde:

- $x$  : Tamaño Mínimo de partículas del intervalo  $i$
- $y$  : Tamaño Promedio de partículas del intervalo  $j$
- $K, n_1, n_2$  : Parámetros a estimar

Donde los rangos son [17]:

$$0 \leq K \leq 1$$

$$n_1 = 0,5 \quad \text{Para trituradoras Standard y de Cabeza Corta}$$

$$n_2 = \begin{cases} 2,5 & \text{Para trituradoras de Cabeza Corta} \\ 4,5 & \text{Para trituradoras Standard} \end{cases}$$

Los elementos de la matriz  $\mathbf{b}$  se calcularán mediante:

$$b_{i,j} = B(D_{i-1}, dp_j) - B(D_i, dp_j) \quad (3.10)$$

$$b_{j,j} = 1 - B(D_j, dp_j) \quad (3.11)$$

Se cumple también:

$$B_{i,j} = 1 - \sum_{k=1}^i b_{k,j} \quad ; \quad \forall j$$

Para evitar el cálculo tedioso de los parámetros de la matriz  $\mathbf{b}$ , es posible determinarlo mediante una expresión matricial (ver [24] pág 2-56, 2-57), para esto definimos:

**Matriz de la Función Fractura Acumulada** Esta matriz se obtiene a partir de (3.9)

$$\mathbf{B}_{(N \times N)} = \begin{bmatrix} B_{1,1} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ B_{4,1} & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{N-1,1} & B_{N-1,2} & B_{N-1,3} & B_{N-1,4} & \dots & B_{N-1,N-1} & 1 \\ B_{N,1} & B_{N,2} & B_{N,3} & B_{N,4} & \dots & B_{N,N-1} & B_{N,N} \end{bmatrix}$$

**Matriz de Transformación  $\mathbf{R}$**  Esta matriz, es una matriz triangular inferior de valores 1.

$$\mathbf{R}_{(N \times N)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matriz de Transformación Ones** Esta es una matriz cuyos elementos son 1.

$$\mathbf{Ones}_{(N \times N)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La relación se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Ones} - \mathbf{R} \mathbf{b}$$

Por lo tanto, la matriz de Fractura  $\mathbf{b}$  se calculará por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Ones} - \mathbf{B}) \quad (3.12)$$

**Matriz  $\mathbf{R}^{-1}$**  La matriz  $\mathbf{R}^{-1}$  queda resuelta como:

$$\mathbf{R}_{(N \times N)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.1.6. Cálculo de los parámetros del modelo

#### Datos requeridos

Para poder calcular los parámetros del Modelo, se deberá de disponer de:

1. Análisis Granulométrico del Alimento
2. Closed Side Set (*CSS*)
3. Análisis Granulométrico del Producto referido al *CSS*.

#### Cantidad de parámetros a calcular

Los parámetros que debemos de calcular son los referidos a las matrices de Clasificación (c) y de Fractura (b).

$$\begin{array}{l} \text{Matriz de Clasificación} : N \\ \text{Matriz de Fractura} : \frac{N(N+1)}{2} \end{array}$$

---

$$\text{Cantidad total de parámetros} : N + \frac{N(N+1)}{2}$$

#### Cálculo utilizando Regresión No Lineal

Debido a la gran cantidad de parámetros, es posible reducirlos si es que se utilizan las ecuaciones (3.6) y (3.9). Es decir, en lugar de calcular  $N + \frac{N(N+1)}{2}$  se calcularán solo siete parámetros, cuatro para la ecuación de Clasificación ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $d^*$  y  $n$ ) y tres para la función Fractura ( $K$ ,  $n_1$  y  $n_2$ ).

**Función a minimizar** La Regresión No Lineal consiste básicamente en minimizar la siguiente función:

$$C(\Theta) = \sum_{i=1}^N \left( p_i^{\text{Experimental}} - p_i^{\text{Modelo}} \right)^2 \quad (3.13)$$

#### Vector de parámetros

$$\Theta = \left[ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad d^* \quad n \quad K \quad n_1 \quad n_2 \right]$$

Los resultados se muestran en la Tabla 3.2

Tabla 3.2: Parámetros del modelo obtenidos para cada trituradora

Linea	A	B	C	A	B	C	A	B	C
Modelo	MP800	MP800	MP800	HP700	HP700	HP700	HP700	HP700	HP800
Trituradora	MP1	MP2	MP3	HP1	HP2	HP3	HP4	HP5	HP6
$\alpha_1$	0.7623	0.8166	1.2378	0.6030	0.8807	1.0609	0.4645	0.6893	0.6571
$\alpha_2$	2.7461	2.5091	2.0672	2.1498	2.2836	2.2368	1.7462	2.1524	2.0313
$d^*$	-0.3194	-0.1785	-0.7938	-0.8458	-0.7068	-0.3839	-1.3321	-1.0048	-1.3188
$n$	3.0987	2.2228	2.3431	2.8911	2.8572	2.0880	1.7067	1.6322	3.1000
$K$	0.5561	0.4223	0.0480	0.6062	0.5170	0.5491	0.3456	0.3950	0.3973
$n_1$	6.5074	0.3341	0.1497	0.4158	0.5117	0.5981	0.5740	0.5929	0.4798
$n_2$	6.5291	3.4999	1.6162	3.4883	3.1759	3.2721	5.9907	4.2534	4.5583

## 3.2. Trituradora cónica: Potencia consumida

La eficiencia de la potencia consumida por las trituradoras se encuentra en el rango de 70 % a 80 %, esto ha sido estimado para trituradoras cónicas convencionales en una variedad de plantas de procesamiento de minerales [29].

El modelo de la potencia consumida es representado por (3.14) el cual asume que solo se consume energía en la reducción de partículas y en mover las partes de las chancadoras.

$$P_{Consumida} = P_{Trituración} + P_{Sin Carga} \quad (3.14)$$

Adicionalmente se ha considerado que la potencia consumida aumenta abruptamente si el CSS es menor a cierto valor límite (ver (3.15)). Esta consideración es netamente empírica y se ha considerado un valor de  $9mm$  para las trituradoras secundarias y un valor de  $8mm$  para las trituradoras terciarias.

$$P_{Consumida} = \begin{cases} P_{Trituración} + P_{Sin Carga} & ; CSS \geq \text{valor límite} \\ (P_{Trituración} + P_{Sin Carga}) \cdot \frac{\text{valor límite}}{CSS} & ; \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.2.1. Potencia consumida para la trituración

La potencia consumida para la trituración ( $P_{Trituración}$ ) puede ser predecida por medio de la ecuación de Bond que se expresa como sigue:

$$W = 10Wi \left( \frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) \quad (3.16)$$

Donde:

$W$  Energía consumida para la fractura de partículas expresada en  $\frac{kW-hr}{ton}$ .

$Wi$  *Work Index* Trabajo realizado para reducir un material de un tamaño infinito hasta un tamaño  $X_{80}$  igual a 100 micrómetros, expresado en  $\frac{kW-hr}{ton}$ .

$F_{80}$  Abertura de la malla por el que pasaría el 80 % del Alimento, expresado en micrómetros.

$P_{80}$  Abertura de la malla por el que pasaría el 80 % del Producto, expresado en micrómetros.

En la Figura 3.4 se muestra cómo se calcula el tamaño  $X_{80}$ :

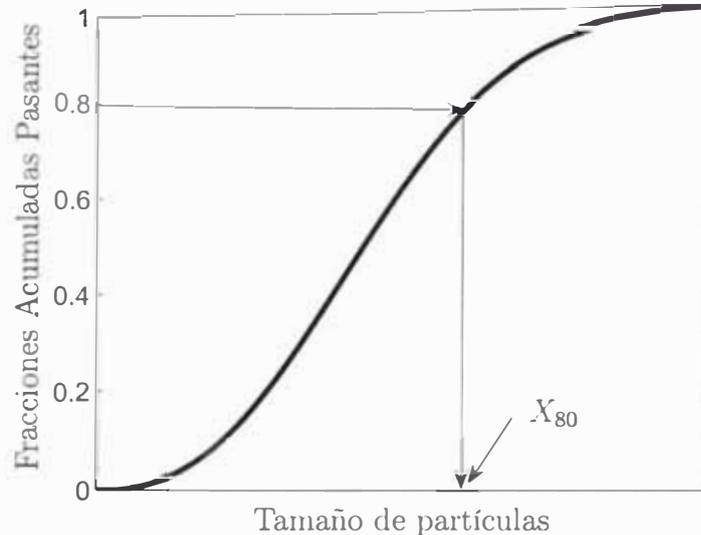


Figura 3.4: Esquema del cálculo del parámetro  $X_{80}$

La potencia consumida para la reducción de tamaños se obtendrá mediante el producto de (3.16) y el flujo ( $Q$ ) procesado en la trituradora (i.e.  $ton/h$ )

$$P_{Trituración} = 10Wi \left( \frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) \cdot Q \quad (3.17)$$

El Work Index es una medida indirecta de la dureza del mineral, es decir, si el Work Index aumenta significa que se requiere más energía para obtener un producto de una granulometría (ó tamaño) determinada, por lo tanto se dice que el mineral es más duro. Esto último ocasiona una disminución en la capacidad de la planta y un desgaste más rápido de los componentes de los equipos.

Este factor ( $Wi$ ) es variable, pero se tomará como base un valor de  $13,5 \frac{kW-h}{ton}$  (según datos de planta).

### 3.2.2. Potencia consumida sin carga

La potencia consumida cuando la trituradora trabaja sin carga se obtendrá a partir de los amperajes de las trituradoras trabajando en vacío según:

$$P_{Sin Carga} (kW) = \sqrt{3} \frac{V I_{Sin Carga} \cos \phi}{1000} \quad (3.18)$$

Los datos según planta son:

- El voltaje varía entre 4160 y 4190. Se tomará el promedio (i.e. 4175V)
- El factor de potencia se asumirá como  $\cos \phi = 0,8$

Los amperajes de las trituradoras trabajando sin carga se presentan en la Tabla 3.3

Tabla 3.3: Amperajes de las trituradoras cuando operan sin carga (mineral).

Linea	Modelo	Trituradora	$I_{Sin\ Carga}$
A	MP800	MP1	38 A
B	MP800	MP2	38 A
C	MP800	MP3	41 A
A	HP700	HP1	33 A
A	HP700	HP2	35 A
B	HP700	HP3	33 A
B	HP700	HP4	33 A
C	HP800	HP5	43 A
C	HP800	HP6	43 A

### 3.3. Trituradora cónica: Nivel de taza

Las trituradoras cónicas poseen una taza en la parte superior la cual sirve de sostén para el mineral a ser alimentado. Según los operadores de la planta, estas tazas deben de trabajar llenas para obtener un producto más fino y con un menor consumo energético, debido a esta consideración el nivel de taza debe de ser considerado como un parámetro de control adicionalmente a la granulometría y al flujo de mineral alimentado.

El presente modelo dinámico se ha extraído de [30] y explica el nivel de taza según el flujo alimentado tomando en consideración otros parámetros como la densidad aparente, volumen total de la taza y flujos en condiciones ideales.

$$\rho_B \frac{dV_B}{dt} = F_0 - F^{Min} - \frac{F^{Max} - F^{Min}}{V_B^{Max}} V_B \quad (3.19)$$

Donde:

$V_B$  Volumen aparente ocupado por el mineral en la taza de alimentación.

$V_B^{Max}$  Volumen total de la taza de alimentación.

$\rho_B$  Densidad aparente del mineral

$F_0$  Flujo alimentado a la trituradora.

$F^{Max}$  Flujo que sale de la taza (hacia la cámara de fractura) cuando esta está al máximo de su capacidad (taza llena).

$F^{Min}$  Flujo que sale de la taza (hacia la cámara de fractura) cuando esta está sin mineral (taza vacía).

La densidad aparente del mineral de Southern Perú Copper Corporation es de  $\rho_B = 1,762t/m^3$ .

El volumen de la taza se estimó asumiendo que esta tiene forma cilíndrica, cuyos diámetros y alturas son:

Tabla 3.4: Dimensiones de la taza

	MP800	HP700	HP800
Diámetro (m)	2.210	1.753	1.863
Altura (m)	1.102	0.953	0.953
Volúmen (m <sup>3</sup> )	4.227	2.300	2.598

Estas dimensiones fueron extraídas de los catálogos de *Metso Minerals* para las Series *HP* ([26]) y *MP* ([27]) de trituradoras cónicas.

Asimismo, los flujos máximos se muestran en las Tabla 3.5

Tabla 3.5: Capacidades de las trituradora *MP800*, *HP500* y *HP800*

<i>CSS</i> (mm)	Flujo máximo (t/h)		<i>CSS</i> (mm)	Flujo máximo (t/h)	
	MP800			HP500	HP800
13	495-585		10	175-220	260-335
19	580-690		13	230-290	325-425
25	735-980		16	280-350	385-500
38	1100-1285		19	320-400	435-545
50	1460-1935		22	345-430	470-600
			25	365-455	495-730
			32	405-535	545-800
			38	445-605	600-950
			45	510-700	690-1050
			51	580-790	785-1200

Los flujos máximos se interpolarán linealmente según el valor del *CSS* y se tomará el promedio del rango. En el caso de las *HP700* se interpolará los valores de las *HP500* y *HP800*.

No se dispone de información acerca de los flujos mínimos pero se asumirán que son la décima parte de los flujos máximos, es decir, estos también estarán en función del valor del *CSS*.

### 3.4. Zaranda vibratoria

Las zarandas vibratorias son equipos usados para separar el mineral según el tamaño de las partículas. Esta separación (llamado también cribado o tamizado) generalmente se lleva a cabo sobre material relativamente grueso (i.e. más de  $250\mu m$  en tamaño), ya que la eficiencia de esta operación disminuye rápidamente con la finura.

La separación utilizando zarandas vibratorias se realiza utilizando mallas perforadas de una abertura determinada. En el caso más simple se obtienen dos productos (zarandas de un solo piso), uno grueso denominado Oversize y uno fino denominado Undersize. El Oversize retorna a las etapas de conminución (i.e. trituración) hasta obtener el tamaño deseado, esta operación conjunta de trituración-cribado se da especialmente en los circuitos de trituración terciaria.

Los principales objetivos del cribado en la industria minera pueden ser[40]:

- Evitar el ingreso de finos (partículas pequeñas) a las máquinas de trituración, aumentando así su capacidad y eficiencia.
- Evitar que el material grueso pase a la siguiente etapa en los circuitos de trituración fina y en las operaciones de molienda.
- Preparar una alimentación estrechamente clasificada para ciertos procesos de concentración por gravedad.
- Producir un producto final estrechamente clasificado. Esto es importante en las pedreras, canteras donde el tamaño del producto final es una parte importante de la especificación.

Se define en las zarandas los siguientes términos:

**Oversize** es el material que queda retenido sobre la malla (material grueso).

**Undersize** es el material que ha pasado por la malla (material fino).

En la Figura 3.5 se muestran tres tipos de tamaños de partículas (en forma ideal) y su comportamiento en la zaranda. Donde:

- a *Partículas de tamaño mayor a la abertura de la malla.* Estas partículas van a aparecer en su totalidad en el Oversize de la Zaranda.
- b *Partículas de tamaño menor a a y mayor a c.* Estas partículas tienen mayor probabilidad de presentarse en el Oversize mientras mayor sea su tamaño.
- c *Partículas de tamaño menores a b.* Por motivos de arrastre (adhesión de partículas c (ultrafinas) en partículas gruesas a) la probabilidad de presentarse en el Oversize es mayor mientras menor sea el tamaño de partículas.

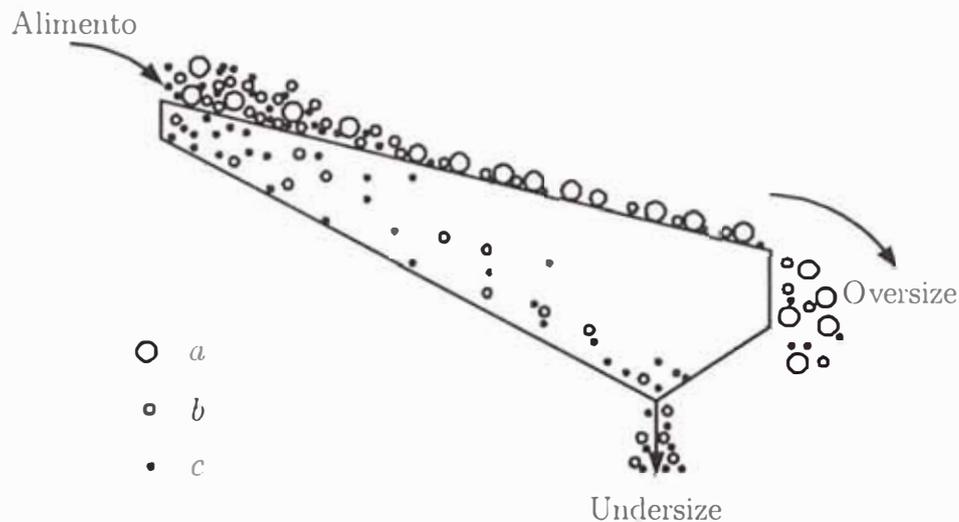


Figura 3.5: Esquema de separación por una zaranda vibratoria de un piso.

**Curva de partición** Se denomina también: Curva Tromp, Curva de eficiencia, Curva de selectividad.

Es una forma común de representar la eficiencia del clasificador según el tamaño de las partículas. Esta curva relaciona la cantidad que se reporta en el Oversize y la cantidad que se alimenta para todos los Intervalos de Tamaño (I.T.). Se puede expresar como sigue:

$$E_i = \frac{\text{Fracción en peso del Oversize en el I.T. } i}{\text{Fracción en peso del Alimento en el I.T. } i} \quad (3.20)$$

Una Curva de Partición típica para una zaranda vibratoria se presenta en la Figura 3.6 mostrándose tres regiones definidas como:

Región A Partículas de tamaño  $a$ .

Región B Partículas de tamaño  $b$ .

Región C Partículas de tamaño  $c$ .

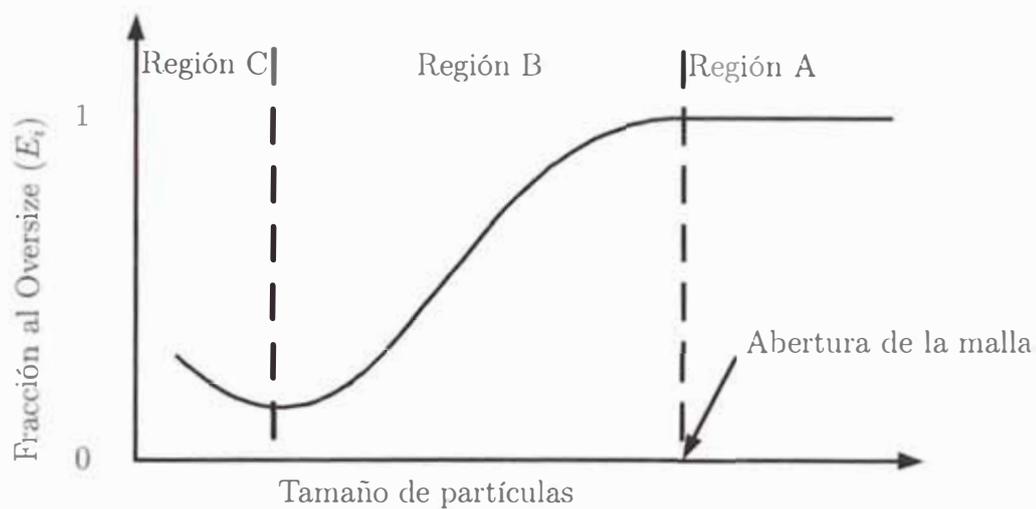


Figura 3.6: Curva de partición típica para una zaranda vibratoria.

### 3.4.1. Descripción del modelo

La tasa de transmisión de partículas a través de la malla varía según la carga en la malla y el tamaño de partículas relativo a la abertura de la malla.

En la zona cercana a la alimentación se presenta una carga pesada de tal forma que se forma una “multicapa” de partículas en la superficie de la zaranda. Conforme las partículas se desplazan por la zaranda, las partículas más pequeñas pasan a través de la malla y la carga en la superficie disminuye hasta que solo se presenta una capa de partículas.

Ferrara *et al.* consideraron estas dos condiciones como *Régimen Denso* (Crowded region) y *Régimen Disperso* (Separated region)

En el Régimen Denso el material fino debe de pasar a través de las capas superiores de material grueso antes de que tenga contacto con la malla. Por lo tanto, la tasa de transmisión del material está en función del análisis granulométrico de la capa de partículas que está sobre la malla.

En el Régimen Disperso, se asume que la tasa de transmisión de las partículas es proporcional al flujo de material sobre la zaranda.

### 3.4.2. Modelo matemático

En la Figura 3.7 se muestra el esquema de la zaranda vibratoria con la delimitación respectiva del Régimen Denso y Régimen Disperso.

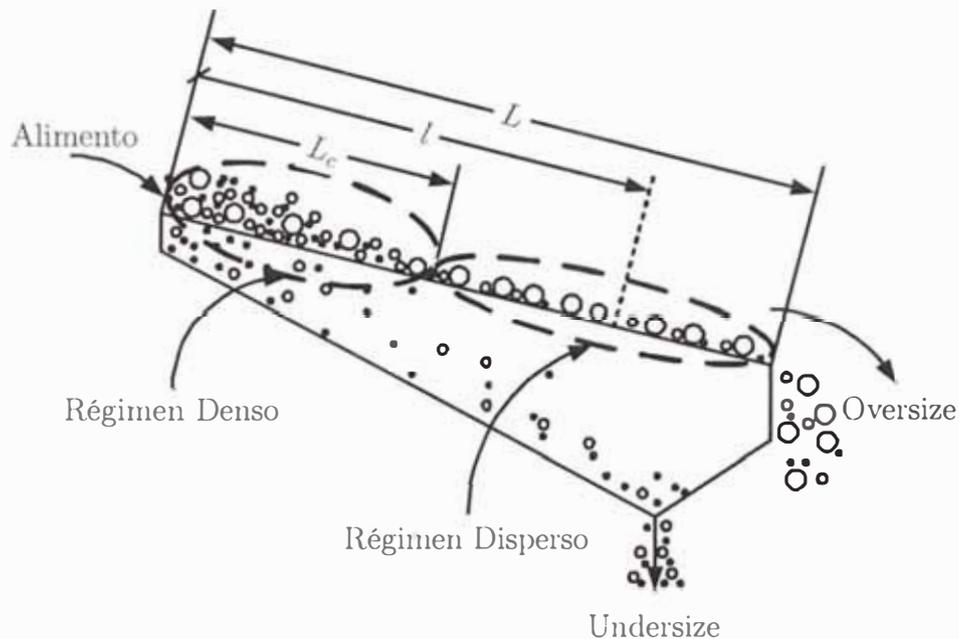


Figura 3.7: Esquema del modelo de Ferrara-Pretti-Schena para zarandas vibratorias de un piso. Donde:  $L$  es la longitud de la malla,  $l$  es la distancia en la malla desde el punto de alimentación,  $L_c$  es la distancia en la cual se produce la transición del Régimen Denso al Régimen Disperso

Ferrara *et. al.* propusieron el siguiente modelo para los dos regímenes ([17], [30]):

$$\frac{dF(l)y_i(l)}{dl} = \begin{cases} -K_i y_i(l) & l \in [0; L_c] \quad \text{Régimen denso.} \\ -S_i F(l)y_i(l) & l \in [L_c; L] \quad \text{Régimen disperso} \end{cases} \quad (3.21)$$

Donde:

$K_i, S_i, L_c$  Parámetros a estimar.

$F(l)$  Flujo de material (e.g.  $t/h$ ) a una distancia  $l$  del punto de alimentación.

$y_i(l)$  Fracción en peso del intervalo de tamaños  $i$  a la distancia  $l$  (material sobre la zaranda u Overflow).

$L$  Longitud de la malla

$L_c$  Distancia en la cual se produce la transición del Régimen Denso al Régimen Disperso.

### Solución analítica del modelo matemático

**Régimen denso** La ecuación a resolver es:

$$\frac{dF(l)y_i(l)}{dl} = -K_i y_i(l) \quad (3.22)$$

El análisis granulométrico del material sobre la zaranda a una distancia  $l$  se establece como:

$$y_i(l) = \frac{F(l)y_i(l)}{\sum_{i=1}^N F(l)y_i(l)} \quad (3.23)$$

Donde  $N$  es el número total de intervalos de tamaño.

**Curva de partición** Queda definida mediante los flujos y fracciones en peso como:

$$E_i(l) = \frac{\text{Fracción en peso del Oversize en el I.T. } i}{\text{Fracción en peso del Alimento en el I.T. } i} = \frac{F(l)y_i(l)}{F(0)y_i(0)} \quad (3.24)$$

Reordenando obtenemos:

$$F(l)y_i(l) = F(0)y_i(0)E_i(l) \quad (3.25)$$

Si se deriva (3.25) respecto a  $l$  y se reemplaza en (3.22) se obtiene:

$$F(0)y_i(0)\frac{dE_i(l)}{dl} = \frac{dF(l)y_i(l)}{dl} = -K_i y_i(l)$$

Reemplazando (3.25) se obtiene:

$$F(0)y_i(0)\frac{dE_i(l)}{dl} = -K_i\frac{F(0)y_i(0)E_i(l)}{F(l)}$$

$$\frac{dE_i(l)}{dl} = -K_i\frac{E_i(l)}{F(l)} \quad (3.26)$$

Si se integra desde 0 hasta  $l$  se obtiene:

$$\int_{E_i(0)}^{E_i(l)} \frac{1}{E_i(l)} dE_i(l) = -K_i \int_0^l \frac{1}{F(l)} dl$$

Se debe tener en cuenta que la eficiencia a la distancia cero (i.e.  $l = 0$ ) es uno (100 %) (ver (3.25)), con lo cual se obtiene.

$$\ln(E_i(l)) = -K_i \int_0^l \frac{1}{F(l)} dl \quad (3.27)$$

**Primera consideración** Si utilizamos otro intervalo de tamaños  $j$  i.e.

$$\ln(E_j(l)) = -K_j \int_0^l \frac{1}{F(l)} dl \quad (3.28)$$

y se divide (3.27) entre (3.28) se obtiene:

$$\frac{\ln(E_i(l))}{\ln(E_j(l))} = \frac{K_i}{K_j} = R_{i,j}$$

Lo cual equivale a:

$$E_j(l) = E_i(l)^{1/R_{i,j}} \quad (3.29)$$

**Segunda consideración** Si tenemos partículas mayores a la abertura de la zaranda la eficiencia será de uno (100 %). Si  $m$  es el intervalo de tamaño cuyo tamaño mínimo es igual a la abertura de la zaranda, entonces se puede establecer lo siguiente (utilizando (3.25)):

$$F(l) = \sum_{j=1}^N F(l)y_j(l) = \sum_{j=1}^N F(0)y_j(0)E_j(l)$$

$$= \sum_{j=1}^m F(0)y_j(0) + \sum_{j=m+1}^N F(0)y_j(0)E_j(l)$$

$$= F(0) \left( \sum_{j=1}^m y_j(0) + \sum_{j=m+1}^N y_j(0)E_j(l) \right)$$

Pero  $\sum_{j=1}^m y_j(0)$  es la fracción acumulada retenida en el alimento respecto a la abertura de la malla a lo cual denominamos como  $G_m$ , es decir:

$$G_m = \sum_{j=1}^m y_j(0)$$

Por lo tanto, el flujo a una distancia  $l$  se establece como:

$$F(l) = F(0) \left( G_m + \sum_{j=m+1}^N y_j(0) E_j(l) \right) \quad (3.30)$$

Reemplazando en (3.26)

$$\frac{dE_i(l)}{dl} = -K_i \frac{E_i(l)}{F(0) \left( G_m + \sum_{j=m+1}^N y_j(0) E_j(l) \right)}$$

Reordenando se obtiene:

$$\frac{G_m + \sum_{j=m+1}^N y_j(0) E_j(l)}{E_i(l)} dE_i(l) = -\frac{K_i}{F(0)} dl$$

Si se reemplaza  $E_j$  de (3.29)

$$\frac{G_m + \sum_{j=m+1}^N y_j(0) E_i(l)^{1/R_{i,j}}}{E_i(l)} dE_i(l) = -\frac{K_i}{F(0)} dl$$

Separando cada término:

$$G_m \int_1^{E_i(l)} \frac{dE_i(l)}{E_i(l)} + \sum_{j=m+1}^N y_j(0) \int_1^{E_i(l)} E_i(l)^{1/R_{i,j}-1} = -\frac{K_i}{F(0)} \int_0^l dl$$

Integrando se obtiene la solución para el Régimen denso:

$$G_m \ln(E_i(l)) + \sum_{j=m+1}^N y_j(0) R_{i,j} E_i(l)^{1/R_{i,j}} = -\frac{K_i l}{F(0)} \quad (3.31)$$

El valor de  $E_i(l)$  puede de obtenerse iterativamente y el factor  $F(l)y_i(l)$  se obtiene mediante (3.25).

**Régimen disperso** La ecuación a resolver es:

$$\frac{dF(l)y_i(l)}{dl} = -S_i F(l)y_i(l) \quad (3.32)$$

La solución consta de una simple integración como se muestra a continuación:

$$\int_{F(L_c)y_i(L_c)}^{F(l)y_i(l)} \frac{dF(l)y_i(l)}{F(l)y_i(l)} = -S_i \int_{L_c}^l dl$$

$$\ln \left( \frac{F(l)y_i(l)}{F(L_c)y_i(L_c)} \right) = -S_i (l - L_c)$$

Finalmente la solución de (3.32) resulta entonces:

$$F(l)y_i(l) = F(L_c)y_i(L_c) \exp(-S_i (l - L_c)) \quad (3.33)$$

El término  $F(L_c)y_i(L_c)$  se obtiene de la solución del modelo para el Régimen denso y evaluándolo cuando  $l = L_c$ .

El análisis granulométrico del oversize de la zaranda se obtendrá mediante (3.23):

### Solución numérica del modelo matemático

Debido a la complejidad de resolver el modelo del Régimen denso, también es posible obtener buenos resultados mediante la integración numérica. Por ejemplo, utilizando el método de Euler sería:

$$\frac{dF(l)y_i(l)}{dl} = \frac{F(l + \Delta l)y_i(l + \Delta l) - F(l)y_i(l)}{\Delta l} = -K_i y_i(l)$$

Reordenando:

$$F(l + \Delta l)y_i(l + \Delta l) = F(l)y_i(l) - K_i y_i(l) \Delta l \quad (3.34)$$

$y_i(l)$  se obtiene mediante (3.23).

### Caso de una zaranda de dos pisos

En el caso de la Zaranda 9 que es una zaranda de dos pisos, se ha tenido las siguientes consideraciones:

- Oversize del primer piso (malla más gruesa) es denominado como Oversize 1.
- El Undersize del primer piso es el alimento a la malla del segundo piso, y se asume que es alimentado a la distancia  $l = 0$  (para simplificar el modelo).
- El Oversize del segundo piso es denominado Oversize 2.

- El Undersize del segundo piso es el Undersize de la zaranda.

El esquema se muestra en la Figura 3.8

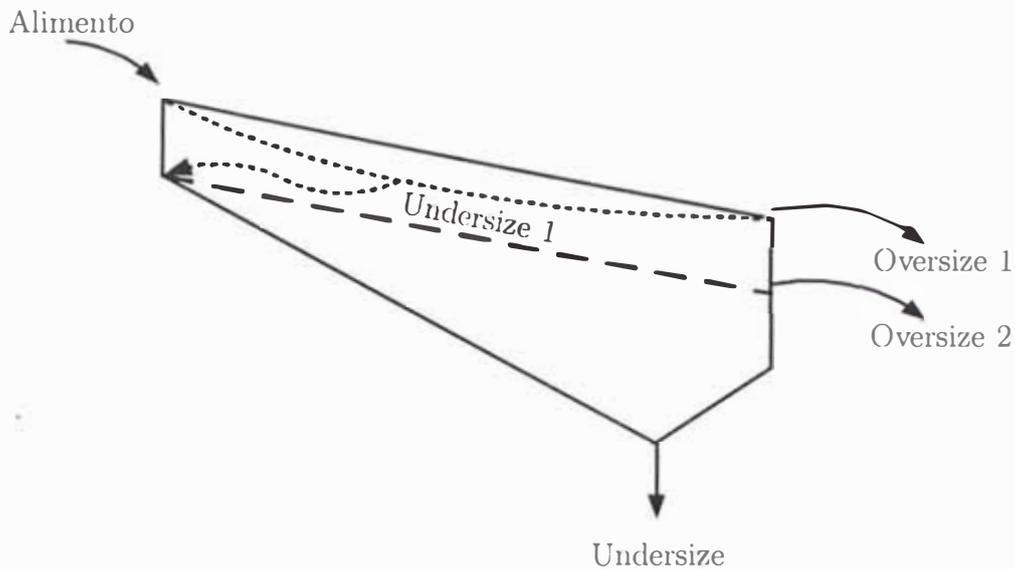


Figura 3.8: Esquema de una zaranda de dos pisos. Para el modelo matemático se asume que el Undersize del primer piso se alimenta al inicio de la malla del segundo piso.

### 3.4.3. Cálculo de los parámetros del modelo

#### Datos requeridos

Para poder calcular los parámetros del Modelo, se deberá de disponer de:

1. Análisis Granulométricos del Alimento, Oversize y Undersize
2. Abertura de la malla.
3. Longitud de la zaranda.
4. Flujo alimentado (e.g. toneladas métricas por hora (TMH) alimentadas)

#### Corrección de Análisis Granulométricos utilizando Multiplicadores de Lagrange

Debido a errores (e.g. muestreo, realización del análisis, . . . ), los análisis granulométricos no son matemáticamente consistentes, por lo que previamente se deben de corregir. El método utilizado está basado en los Multiplicadores de Lagrange incluyendo Factores de Ponderación el cual se presenta en el Apéndice D.

## Cantidad de parámetros a calcular

Los parámetros que debemos de calcular son los referidos a las constantes  $K_i$  y  $S_i$  y  $L_c$ . Es decir, si existen  $N$  intervalos de tamaño (I.T.) del análisis granulométrico, se deberá calcular  $2N + 1$  parámetros.

## Cálculo utilizando Algoritmos Genéticos

Debido a la cantidad de parámetros (31) se empleó los Algoritmos Genéticos para poder estimarlos. En el Apéndice E se muestra una breve explicación acerca de este método.

Las condiciones de operación son:

**Función de Adaptación** Se representa como sigue:

$$f(\cdot) = \frac{1}{SSE \cdot \max(\Delta fU) \cdot \max(\Delta fO) \cdot \max(\Delta Eo)} \quad (3.35)$$

$$SSE = \sum_{i=1}^N \left[ \left( fU_i^{(Data)} - fU_i^{(Modelo)} \right)^2 + \left( fO_i^{(Data)} - fO_i^{(Modelo)} \right)^2 \right] \quad (3.36)$$

$$\Delta fU = |fU_i^{(Data)} - fU_i^{(Modelo)}| \quad \forall i \quad (3.37)$$

$$\Delta fO = |fO_i^{(Data)} - fO_i^{(Modelo)}| \quad \forall i \quad (3.38)$$

$$\Delta E = |E_i^{(Data)} - E_i^{(Modelo)}| \quad \forall i \quad (3.39)$$

Donde:

$f(\cdot)$  Función de Adaptación

$SSE$  Suma de cuadrados debido al error.

$fU_i$  Fracción en peso del análisis granulométrico del Undersize correspondiente al intervalo de tamaños  $i$ .

$fO_i$  Fracción en peso del análisis granulométrico del Oversize correspondiente al intervalo de tamaños  $i$ .

$E_i$  Valor de la Curva Tromp en el intervalo de tamaños  $i$ .

**Codificación** Los valores de  $L_c$ ,  $K_i$  y  $S_i$  se codifican en un cromosoma como sigue:

$$\left[ L_c \quad K_1 \quad \dots \quad K_N \quad S_1 \quad \dots \quad S_N \right]$$

El tipo de codificación es de *Valores Reales* (Value Encoding), en este caso todos los valores deben de ser positivos.

**Selección** El método empleado es Tournament Selection. La probabilidad de seleccionar el individuo de mayor valor de adaptación es del 80 %

**Crossover y Mutación** Se producirá el crossover en dos puntos, con una probabilidad de ocurrencia del 80 %.

La mutación para la codificación empleada consistirá en variar el valor hasta un 100 % con una probabilidad de ocurrencia del 50 %.

Se emplea también el método *Deterministic Crowding* para mantener la diversidad de los individuos en la población.

Los resultados se muestran en la Tabla 3.6 y la Tabla 3.7. En estas tablas, cada columna representa al “individuo” óptimo encontrado para cada zaranda. Para el caso de las zarandas  $Z - 7$  y  $Z - 8$  se asume como si fueran zarandas de un solo piso, ya que el producto grueso e intermedio se unen y dicha mezcla representa en alimento a las trituradoras terciarias en la línea  $C$ .

### 3.5. Alimentadores de línea

Se asume que existe una relación entre el tonelaje alimentado y el valor mostrado en las PC's, los cuales se encuentran en el rango de 0 a 50.

La relación asumida es:

$$TMH = Flujo_{50} \cdot \frac{1}{1 + \exp(-a(x - c))} \quad (3.40)$$

Donde:

Tabla 3.6: Parámetros del modelo obtenidos para las zarandas del  $Z - 1$  al  $Z - 5$

	Zaranda				
	$Z - 1$	$Z - 2$	$Z - 3$	$Z - 4$	$Z - 5$
$L_c$	0.4138	2.3646	3.7652	2.1774	4.2258
$K_1$	0.7392	0.0030	0.3619	0.0005	0.0055
$K_2$	5.2551	0.5498	0.3646	0.2697	0.2499
$K_3$	0.9697	6.4774	1.1964	0.4007	0.0579
$K_4$	8.7235	0.5213	2.1140	0.6112	31.3311
$K_5$	0.4638	0.0055	0.0243	0.0483	0.1660
$K_6$	0.5826	0.0041	0.0112	0.1630	0.0216
$K_7$	6.5803	0.1495	1.7065	1.1637	2.6811
$K_8$	0.2352	2.3543	0.3434	1.2716	0.0580
$K_9$	0.0113	174.6835	0.7826	0.0295	0.0128
$K_{10}$	1.7821	2.8884	1.8132	0.3492	4.8290
$K_{11}$	1.1974	0.0000	0.3759	4.8453	1.5363
$K_{12}$	0.1002	0.0003	16.1590	0.0965	0.3115
$K_{13}$	6.0439	0.4225	0.5295	0.2333	4.4117
$K_{14}$	22.1077	0.0009	0.3305	0.2091	101.0273
$K_{15}$	0.0001	0.0037	0.0078	0.0003	0.0206
$S_1$	0.0044	0.0025	0.0513	0.0090	0.0351
$S_2$	0.0001	0.0001	0.0814	0.0004	0.0007
$S_3$	0.0033	0.0047	0.0852	0.0046	0.0002
$S_4$	0.0000	0.0002	0.0202	0.0000	0.0858
$S_5$	0.0000	0.0007	0.0039	0.0076	3.8488
$S_6$	0.0001	0.0003	0.0080	0.0000	6.9708
$S_7$	0.0002	0.0004	0.0205	0.0190	7.3649
$S_8$	0.0497	0.0468	1.2369	0.2996	6.2883
$S_9$	0.3973	0.0143	4.4614	1.3874	6.0410
$S_{10}$	1.1328	1.0693	8.4143	30.9758	6.6062
$S_{11}$	36.7818	2.2428	20.7517	3.9726	7.1612
$S_{12}$	5.0607	49.3395	5.8470	9.5576	7.3245
$S_{13}$	12.6707	21.4019	15.7400	3.0571	6.3905
$S_{14}$	66.8831	52.0196	9.3019	6.4938	0.0051
$S_{15}$	12.5778	1.4141	21.4446	1.7528	8.4022

Tabla 3.7: Parámetros del modelo obtenidos para las zarandas del  $Z - 6$  al  $Z - 9$

	Zaranda				
	$Z - 6$	$Z - 7$	$Z - 8$	$Z - 9$	
				1er Piso	2do Piso
$L_c$	4.1846	4.1646	4.2167	4.0490	3.6967
$K_1$	0.0253	0.0030	0.0935	0.1801	0.0635
$K_2$	0.0077	1.1978	0.3711	0.1441	0.0479
$K_3$	0.0499	1.3961	0.1354	0.3259	0.0830
$K_4$	2.6816	0.0049	0.3328	0.0178	0.5068
$K_5$	0.0505	0.1239	0.0000	0.0089	0.6609
$K_6$	2.1781	0.2446	0.0107	3.9955	0.0043
$K_7$	0.3862	0.0032	0.0000	0.0006	0.0101
$K_8$	0.0030	7.1387	0.0926	0.0344	4.4181
$K_9$	10.9735	0.0000	0.0661	1.9842	0.0005
$K_{10}$	2.4808	0.0173	0.2417	0.0652	11.4387
$K_{11}$	0.0048	18.6412	0.0729	1.6456	37.6347
$K_{12}$	0.1166	563.7289	0.0384	2.2912	0.0150
$K_{13}$	0.0020	0.4988	0.3254	0.0120	0.0053
$K_{14}$	0.1802	0.0108	6.6335	0.7853	13.2974
$K_{15}$	3.9080	14.1572	0.6105	6.1156	0.0004
$S_1$	0.0120	0.0324	0.1277	0.0041	0.0024
$S_2$	0.0003	0.0003	0.0635	0.0036	0.0110
$S_3$	0.0008	0.0927	0.1501	0.0069	0.0011
$S_4$	2.0463	0.0008	0.0083	0.0003	0.0013
$S_5$	2.6327	0.0000	0.0000	2.4025	0.0015
$S_6$	7.2086	0.0015	0.0008	3.7440	0.0021
$S_7$	7.1578	0.0082	0.0289	3.8654	0.0055
$S_8$	6.0905	0.1500	1.4465	5.7848	1.1163
$S_9$	4.4164	1.9162	20.7570	9.6232	3.6953
$S_{10}$	4.3618	5.2559	26.7044	10.1721	5.6779
$S_{11}$	5.1770	33.0118	5.3591	60.9458	12.3499
$S_{12}$	4.4316	0.0001	4.4742	28.2417	27.1351
$S_{13}$	4.1192	67.2867	23.0530	64.3129	18.0530
$S_{14}$	3.6849	18.7377	4.6094	53.4019	8.4599
$S_{15}$	4.1312	2.2460	2.0756	15.1707	5.5662

$$\begin{aligned}
 \text{Flujo}_{50} &= 1000 \quad (\text{Flujo máximo en TMH - asumido -}) \\
 x &= \frac{\text{Valor del alimentador en PC}}{50} \\
 a &= 10 \quad (- \text{ asumido -}) \\
 c &= 0,5 \quad (- \text{ asumido -})
 \end{aligned}$$

En MATLAB está implementada (3.40), exceptuando el factor  $\text{Flujo}_{50}$ , como la instrucción `sigmf(x, [a, c])` (ver Apéndice C).

En la Figura 3.9 se muestra representada la relación entre el Valor del alimentador en PC y las toneladas métricas por hora alimentadas.

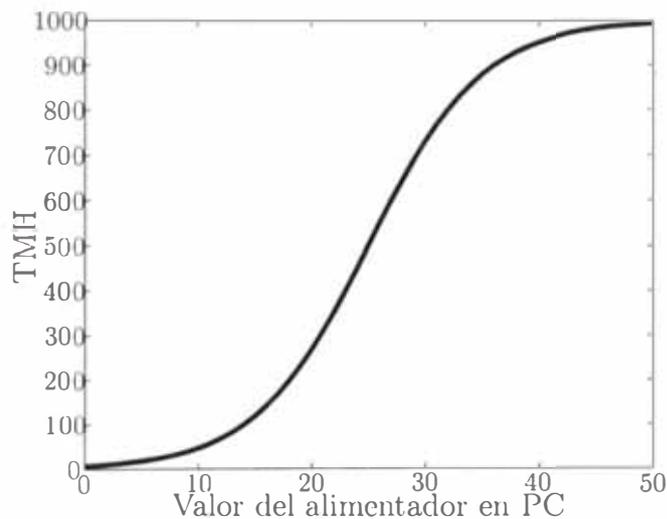


Figura 3.9: Alimentadores de línea: relación asumida entre el valor en PC del alimentador y los TMH alimentadas.

### 3.6. Distribuidores de carga

Los distribuidores de carga son utilizados básicamente para regular el nivel de las tazas de las trituradoras terciarias.

Se ha asumido una correspondencia lineal entre la posición del distribuidor de carga (su rango varía entre valores de 0 y 100) y la fracción que se deriva a cada chancadora.

Por ejemplo en la Figura 3.10, si el valor del distribuidor de carga es 25 significa que el distribuidor de carga se encuentra al 25 % en (1), es decir, el 25 % de lo alimentado se deriva al triturador (1) y el 75 % al triturador (2).

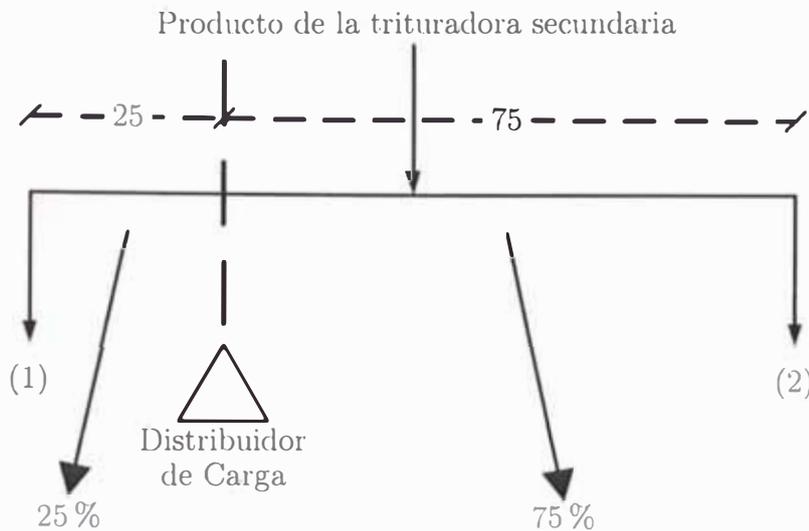


Figura 3.10: Esquema del distribuidor de Carga. (1) y (2) representan cada uno, una zaranda y una trituradora terciaria.

### 3.7. Granulometría del alimento

La granulometría del alimento no es constante, este es afectado por el método de voladura (en la mina), el tipo de mineral, el cual varía según la zona de explotación, ...

Para poder modelar la granulometría del alimento, primero debemos de definir qué función de distribución lo representa, para esto se han aplicado las funciones/distribuciones que se muestran en el Apéndice B.

Según los resultados que se presentan en las Tablas B.7, B.8 y B.9, se puede utilizar a la *Distribución Gamma* para representar a las muestras de la alimentación, esto debido al alto valor del Coeficiente de Correlación  $r^2$  (mayor a 0,99 en las tres muestras), su semejanza con los parámetros estadísticos (i.e. media y coeficiente de variación básicamente) y por ser relativamente simple ya que contempla sólo dos parámetros de ajuste (i.e.  $\alpha$  y  $X_0$ ).

Por lo tanto, la granulometría del alimento en las tres líneas A, B, y C estarán definidas por los valores de las Medias ( $\mu$ ) y los Coeficientes de Variación (C.V.)

de una Distribución Gamma. Estos coeficientes en el instante  $k$ , variarán en una pequeña fracción respecto al instante anterior  $k - 1$  según:

$$\mu_{(k)}^{(L)} = (1 + \mu Var \cdot (2 \cdot rand_{\mu} - 1)) \cdot \mu_{(k-1)}^{(L)} \quad (3.41)$$

$$C.V._{(k)}^{(L)} = (1 + C.V.Var \cdot (2 \cdot rand_{C.V.} - 1)) \cdot C.V._{(k-1)}^{(L)} \quad (3.42)$$

Donde:

( $L$ ) Designa a las Líneas  $A$ ,  $B$ , o  $C$ .

$rand_{\mu}$  y  $rand_{C.V.}$  Números aleatorios entre 0 y 1.

$\mu Var$  Variación máxima de la media respecto al instante anterior (para las simulaciones se ha asumido el valor de 0,05 - 5 %).

$C.V.Var$  Variación máxima del Coeficiente de Variación respecto al instante anterior (para las simulaciones se ha asumido el valor de 0,05 - 5 %).

### 3.8. Work Index

El Work Index variará aleatoriamente y el modelo planteado es similar al adoptado con la distribución granulométrica del alimento. Este factor es relevante para la simulación, ya que va a restringir la capacidad de tratamiento de la planta, en la cual si el Work Index aumenta (i.e. mineral más duro) disminuirá la producción de la planta. El modelo adoptado es:

$$W.I._{(k)} = (1 + W.I.Var \cdot (2 \cdot rand_{W.I.} - 1)) \cdot W.I._{(k-1)} \quad (3.43)$$

En este modelo limitaron los valores del Work Index entre  $10kW - h/tc$  y  $25kW - h/tc$ .

$W.I.$  Work Index.

$rand_{W.I.}$  Números aleatorios entre 0 y 1.

$W.I.Var$  Variación máxima del Work Index respecto al instante anterior (para las simulaciones se ha asumido el valor de 0,05 - 5 %).

### 3.9. Discusión

En este capítulo se han mostrado los modelos matemáticos de los equipos para poder simular la planta y el sistema de control.

Los modelos están basados en balances de masa que pueden ser por intervalos de tamaño (i.e. granulometría del producto de las trituradoras y zarandas), o flujos globales como en el modelo del nivel de la taza de las trituradoras. También se han aplicado relaciones empíricas como para el modelado de los alimentadores y los distribuidores de carga.

Aunque no se tienen datos exactos de como es la variación de la granulometría de la alimentación a la planta y del work index, se sabe que estos no son constantes y se ha modelado como un proceso estocástico. En el caso de la granulometría de la alimentación, se determinó que la Distribución Gamma era la que mejor representaba aparte que resulta simple su aplicación.

En el caso de la potencia consumida, sólo se ha tomado en cuenta la energía que se utiliza para reducir de tamaño (i.e. ecuación de Bond) y la energía que se utiliza para operar la trituradora sin carga. Para los otros equipos como las zarandas y distribuidores de carga se ha omitido el modelado de la potencia al no considerarse relevante para el control.

## Capítulo 4

# Control por Lógica Difusa

### 4.1. Objetivo del control

En las plantas de trituración se podrían tener los siguientes objetivos[21]:

1. La granulometría del producto debe ser mantenida constante a una producción también constante.
2. La granulometría del producto debe ser lo más fina posible con el máximo de producción.
3. La granulometría del producto debe ser mantenida constante a una máxima producción.

En el caso de SPCC el objetivo es pasar el máximo flujo (o producción) posible con producto de granulometría de 15% en peso mayor a un tamaño de media pulgada ( $\% + 1/2'' = 15$ ).

### 4.2. Tipos de perturbaciones

Las principales alteraciones que afectan a la producción y al tamaño del producto en la planta son:

1. Cambio en la dureza del mineral (relacionado directamente con el Work Index).
2. Cambio en la granulometría del mineral que entra en el circuito. Esto afecta significativamente en las distintas etapas de trituración ya que el flujo de material clasificado en las zarandas (i.e. Oversize y Undersize) varía.
3. Desgaste de los conos de las trituradoras y mallas de las zarandas.

Para las simulaciones solo se han considerado las dos primeras.

## 4.3. Variables de entrada y salida del sistema de control

### 4.3.1. Entradas - Variables controladas

Se han establecido como entradas a los siguientes factores:

- I.1. Granulometría del producto de la planta (i.e. % + 1/2") (una variable).
- I.2. Amperaje de las trituradoras secundarias (tres variables) y terciarias (seis variables).
- I.3. Niveles de taza de las trituradoras secundarias (tres variables) y terciarias (seis variables).

Obsérvese que no se está tomando al flujo como una variable controlada ya que se requiere que este sea el máximo pero manteniendo las variables controladas en un Set Point (i.e. Granulometría del producto) y/o rango de operación determinado (i.e. Amperajes y niveles de taza de las trituradoras). La condición de maximizar el flujo estará dado básicamente por las reglas difusas.

Por otro lado se desea que los amperajes de las trituradoras operen en un rango óptimo o que al menos no sobrepase cierto límite (por cuidado de las trituradoras), así mismo se requiere trabajar con niveles altos de mineral en la taza de la trituradora.

Los amperajes están en función de la distribución granulométrica del alimento, de la dureza del mineral, de la abertura (CSS) con la cual se esta operando y del flujo (toneladas por hora) que procesa.

Asimismo, la presión hidráulica puede ser usado para medir indirectamente el amperaje o potencia de la trituradora[21], aunque no será tomado en cuenta para el control en el presente trabajo.

### 4.3.2. Salidas - Variables manipuladas

- O.1. Set de las trituradoras secundarias (Tres variables).
- O.2. Set de las trituradoras terciarias (Seis variables).
- O.3. Velocidad de los alimentadores (Seis variables).

#### O.4. Posición del distribuidor de carga (Tres variables).

Los parámetros referidos a los sets de las trituradoras (i.e. O.1. y O.2.) son los que más dificultad tendrían en implementarse. La mayoría de operadores negaba que fuera posible regular el set en forma on-line aduciendo que se presentarían problemas operativos (según los catálogos de Nordberg de los equipos *MP*[27] y *HP*[26] si es posible realizar esto).

### 4.4. Efectos de las variables operativas

El rendimiento de una trituradora cónica depende principalmente de los siguientes factores[21]:

- Potencia consumida
  - Aumenta proporcionalmente con el flujo alimentado.
  - El consumo más alto por tonelada de material procesado produce un material más fino (para un mismo CSS).
  - ... «Si el objetivo del trabajo de una planta de trituración es el de producir un producto fino con alto rendimiento, entonces los circuitos de control deberían ser instrumentalizados para mantener el más alto y seguro consumo de potencia posible».
- Regulación del Closed Side Set (CSS)
  - Al aumentar el CSS la potencia consumida decrece considerablemente y el producto es más grueso (para un mismo flujo de alimentación)
  - Puede ser utilizado para evitar un consumo excesivo de potencia.
  - Mantener un tamaño fijo del producto (cuando varía el tonelaje).
  - Variar el tamaño del producto.
- distribución granulométrica de la alimentación y
- la dureza del mineral.

El rendimiento de las zarandas vibratorias disminuye a medida que se aumenta su carga (o flujo alimentado). Un exceso de carga podría acarrear el material fino (Undersize) hacia el material grueso (Oversize) e incrementar la carga circulante sin un correspondiente incremento en la producción de la planta.

## 4.5. Sistemas de control en plantas de trituración

Según los siguientes párrafos (extraídos de [21]):

... «Para una abertura específica del tamiz, el medio más efectivo de incrementar la producción es mantener el más alto consumo posible de potencia en el triturador».

... «cuando se alcanza el máximo incremento de producción de esta forma. el producto es también más fino».

Debido a esto, se buscará maximizar el flujo alimentado a la planta mediante un alto amperaje (o consumo de potencia).

Este control puede realizarse de dos maneras: En una consiste en mantener el set de las trituradoras y el otro consiste en variar el set en plena carga. En este último método se requiere de trituradoras cuyo árbol esté suspendido hidráulicamente.

### 4.5.1. Sistema de control basado en un CSS fijo de la trituradora

El consumo de potencia puede mantenerse variando la alimentación a la trituradora. En este caso, los cambios de la dureza del mineral o la distribución granulométrica se compensan mediante un cambio en la velocidad del alimentador.

### 4.5.2. Sistema de control basado en un CSS regulado de la trituradora

En este sistema se selecciona una regulación del CSS para el trabajo. En caso de presentarse una sobrecarga registrada por un alto consumo de potencia y/o por la presión hidráulica, esto se compensa mediante un incremento de la abertura

del CSS. Por otro lado, para mantener la presión hidráulica y el consumo de potencia, se debe de mantener el nivel de la taza de alimentación llena.

## 4.6. Lógica Difusa

En la lógica booleana (o bi-valuada) se establece que una proposición es verdadera o falsa, uno o cero, blanco o negro, pero puede ser no ambas. La lógica difusa (o multi-valuada) fue propuesta por Lotfi Zadeh (1960's) y en esta se contemplan grados intermedios, esto significa que se puede contemplar proposiciones que tengan un grado de verdad y un grado de falsedad, puede tener un valor entre cero y uno, o que exista un nivel de gris.

Una proposición en un controlador difuso podría ser: *El producto de la trituradora es grueso*. Aunque se deberá de definirse previamente un *conjunto difuso* denominado *grueso*, el cual variará según el punto de operación (i.e. una partícula de un tamaño de una pulgada y media puede ser *adecuado* como producto de una trituradora secundaria pero puede ser *gruesa* si es el producto de una trituradora terciaria).

### 4.6.1. Conjuntos difusos

Un conjunto es cualquier colección de objetos los cuales pueden ser tratados como un todo. Cantor (1845-1918) fue el que los propuso y describía un conjunto por sus miembros. Básicamente un elemento puede pertenecer o no a un conjunto clásico, pero en un conjunto difuso dicha pertenencia puede ser parcial (e.g. una persona de 1,50m de estatura puede pertenecer parcialmente al conjunto de personas de estatura normal y parcialmente al conjunto de personas altas).

Un conjunto difuso  $A$  es una colección de pares ordenados tales como [15]:

$$A = \{(x, \mu(x))\}$$

El item  $x$  pertenece al universo en discurso y  $\mu(x)$  es el grado de pertenencia al conjunto  $A$  ( $\mu(x) \in [0, 1]$ ).

Para las funciones de pertenencia generalmente se utilizan funciones de tipo trapezoidal, singleton, triangular,  $S$ , exponencial y de tipo  $\pi$  [6]. Algunas de estas se presentan en el Apéndice C el cual muestra las diferentes funciones de

pertenencia implementadas en MATLAB.

#### 4.6.2. Variables lingüísticas, variables difusas y base de las variables

A diferencia de una variable algebraica, el cual toma números como valores, las variables lingüísticas toman palabras o sentencias como valores. Las variables difusas son los valores del *Conjunto de términos* y la base de las variables define el universo para todas las variables difusas. Por ejemplo, para el tamaño de partículas definimos:

**Variable lingüística** Tamaño (de partículas)

**Variables difusas** (los cuales son *conjuntos difusos*) muy fino, fino, adecuado, grueso, muy grueso

**Conjunto de términos** (*Term Set*)

$$T = \{\text{muy fino, fino, adecuado, grueso, muy grueso}\}$$

**Base de la variable** De cero a ocho pulgadas ( $< 0; 8''$ )

Obsérvese que la jerarquía es: Variable lingüística  $\rightarrow$  Variable Difusa  $\rightarrow$  Base de la variable[15].

#### Variables lingüísticas utilizadas para el control

Las variables lingüísticas, que serán las entradas y salidas del controlador, se establecen básicamente como las diferencias entre la data enviada a la PC y el Set Point.

#### Entradas al controlador

1. Para el **producto** se establece el porcentaje mayor a media pulgada ( $\% + 1/2''$ ) y la variable lingüística es el *Error del producto* (Producto.Error). La data enviada a la PC y el Set Point se define como: (Producto.Data) y (Producto.SP) respectivamente. En forma simple, se puede expresar como:

$$\text{Producto.Error} = \text{Producto.Data} - \text{Producto.SP} \quad (4.1)$$

La ventaja de hacer la diferencia de la Data y el Set Point en ese orden es que la relación del producto es directa con el error. Es decir: mientras más positivo sea el error, indica que el producto es más grueso y viceversa.

2. Para los **amperajes** de las trituradoras se ha aplicado el mismo criterio pero a diferencia del producto, se establece un rango de operación óptimo (con un máximo y un mínimo) y no un punto o Set Point. Es decir, para la trituradora  $i$  el error está definido como:

$$i.\text{Amp.Error} = \begin{cases} \text{AmpNeg} & i.\text{Amp.Data} < i.\text{Amp.SP.Min} \\ \text{AmpPos} & i.\text{Amp.Data} > i.\text{Amp.SP.Max} \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases} \quad (4.2)$$

En donde:

$$\text{AmpNeg} = i.\text{Amp.Data} - i.\text{Amp.SP.Min}$$

$$\text{AmpPos} = i.\text{Amp.Data} - i.\text{Amp.SP.Max}$$

$i.\text{Amp.SP.Min}$  : Amperaje mínimo para la operación deseada.

$i.\text{Amp.SP.Max}$  : Amperaje máximo para la operación deseada.

En (4.2) *Caso contrario* significaría:

$$i.\text{Amp.SP.Min} < i.\text{Amp.Data} < i.\text{Amp.SP.Max}$$

3. Para poder igualar los Niveles de Taza de las trituradoras terciarias en una línea definimos el siguiente criterio:

$$\text{Linea.NTaza.Error} = i.\text{NTaza.Data} - ii.\text{NTaza.Data} \quad (4.3)$$

Donde:

`Linea.NTaza.Error` Valor para el error del nivel de taza en una línea (i.e.  $A, B$  o  $C$ ).

`i.NTaza.Data` Nivel de taza de la trituradora terciaria  $i$  (valores entre cero y cien por ciento).

`ii.NTaza.Data` Nivel de taza de la trituradora terciaria  $ii$  (valores entre cero y cien por ciento).

Si el valor de `Linea.NTaza.Error` es positivo entonces el distribuidor de carga deberá desplazarse de modo que permita disminuir el flujo a  $i$  y aumentar el flujo a  $ii$ , esto para que disminuya el nivel de la taza de  $i$  y aumente en  $ii$ .

4. Para poder regular los Niveles de Taza en las trituradoras (secundarias y terciarias) se establece la siguiente relación:

$$t.NTaza.Error = t.NTaza.Data - t.NTaza.SP \quad (4.4)$$

Donde `t.NTaza.Data` es el nivel de taza de la trituradora  $t$  y `t.NTaza.SP` es el set point respectivo.

### Salidas del controlador

1. Set de las trituradoras.
2. Posición de los distribuidores de carga.
3. Velocidad de los alimentadores.

En la Tabla 4.1 se muestran las variables lingüísticas, variables difusas y base de las variables utilizadas para el control de la planta de trituración.

En las Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 se muestran los conjuntos difusos utilizados, que están basados en formas triangulares en los centros y trapecoidales en los extremos. Existen procedimientos de optimización para determinar las funciones de pertenencia, aunque estos pueden ser elegidos arbitrariamente según la experiencia del usuario[25].

En el caso de las bases de las variables, estas se han definido lo más amplio posible. Por ejemplo, se sabe que el producto puede ir de un valor de cero hasta

cien por ciento ( $\% + 1/2''$ ) y los casos extremos se dan cuando la data es cien y el set point es cero ( $+100\%$ ) y viceversa ( $-100\%$ ).

### 4.6.3. Algunos otros términos

Adicionalmente se utilizan los siguientes términos[25]:

**Soporte** Conjunto crisp de un conjunto difuso  $\mathbf{F}$  de tal forma que  $\mu_{\mathbf{F}}(x) > 0$  donde  $x \in U$  y  $U$  es el universo en discurso.

**Punto de cruce** Es el valor de  $x$  en el cual se cumple  $\mu_{\mathbf{F}}(x) = 0,5$

**Fuzzy Singleton** Es un conjunto difuso cuyo soporte es un único punto  $x$  en  $U$  y en la cual  $\mu_{\mathbf{F}}(x) = 1$

Tabla 4.1: Variables lingüísticas, variables difusas y base de las variables empleadas para el control

Variables lingüísticas	Conjuntos difusos				Base de las variables		Unidades
	MuyFino	Fino	Adecuado	Grueso	MuyGrueso	variables	
Producto.Error	MuyFino	Fino	Adecuado	Grueso	MuyGrueso	[-100 ; 100]	%
i.Amp.Error 800HP	MuyBajo	Bajo	Adecuado	Alto	MuyAlto	[-110 ; 110]	A
700HP	MuyBajo	Bajo	Adecuado	Alto	MuyAlto	[-95 ; 95]	A
Linea.NTaza.Error	MuyNegativo	Negativo	Cero	Positivo	MuyPositivo	[-100 ; 100]	%
t.NTaza.Error	MuyBajo	Bajo	Adecuado	Alto	MuyAlto	[-100 ; 100]	%
Set de las trituradoras	RapCerrar	Cerrar	Mantener	Abrir	RapAbrir	[-9 ; 9]	
Distribuidores de carga	Disminuir	Izquierda	Mantener	Derecha		[-4 ; 4]	
Velocidad de los alimentadores		DismLenta	Mantener	AumLenta	Aumentar	[-6 ; 6]	

#### 4.6.4. Operadores Lógicos

Sean  $p$  y  $q$  proposiciones, entonces se establece los conectivos lógicos como ([2], [5], [25]):

**Negación: NO  $p$**

$$\bar{p} = 1 - p \quad \text{Complemento difuso} \quad (4.5)$$

**Conjunción (t-norma):  $p$  Y  $q$**

$$p \wedge q = \text{mín}(p, q) \quad (4.6)$$

$$= p \cdot q \quad \text{Producto algebraico} \quad (4.7)$$

$$= \text{máx}(0, p + q - 1) \quad \text{Producto restringido} \quad (4.8)$$

**Disjunción (t-conorma):  $p$  O  $q$**

$$p \vee q = \text{máx}(p, q) \quad (4.9)$$

$$= p + q - p \cdot q \quad \text{Suma algebraica} \quad (4.10)$$

$$= \text{mín}(1, p + q) \quad \text{Suma restringida} \quad (4.11)$$

**Implicación: SI  $p$  ENTONCES  $q$**

**S-implicador**

$$p \rightarrow q = 1 - \text{mín}(p, 1 - q) \quad (4.12)$$

$$= \text{máx}(1 - p, q) \quad (4.13)$$

$$= 1 - p \cdot (1 - q) \quad (4.14)$$

$$= \text{mín}(1, 1 - p + q) \quad (4.15)$$

**Implicador Residual**

$$p \rightarrow q = \begin{cases} 1 & p \leq q \\ q & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$= \begin{cases} 1 & p \leq q \\ \frac{q}{p} & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (4.17)$$

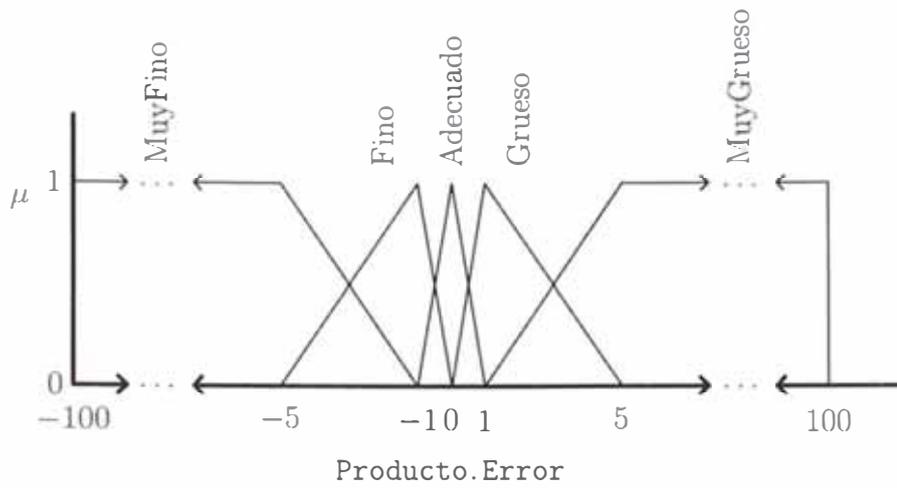


Figura 4.1: Conjuntos difusos para Producto.Error.

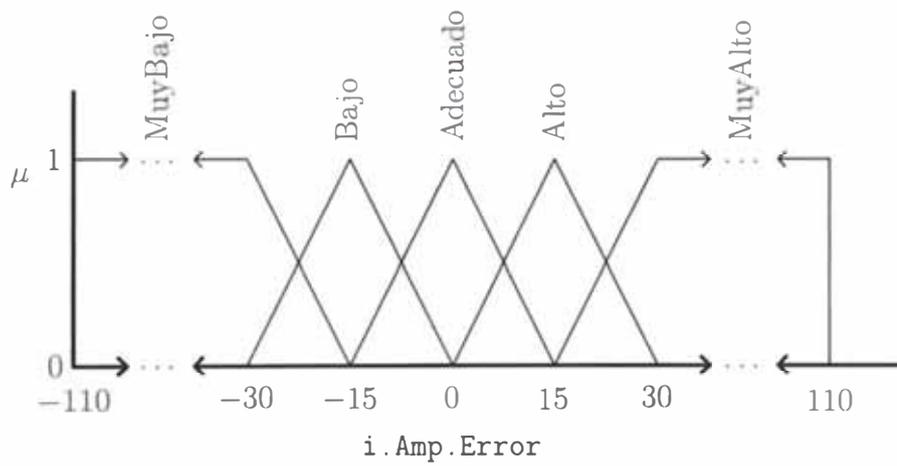


Figura 4.2: Conjuntos difusos para i.Amp.Error en MP800 y HP800.

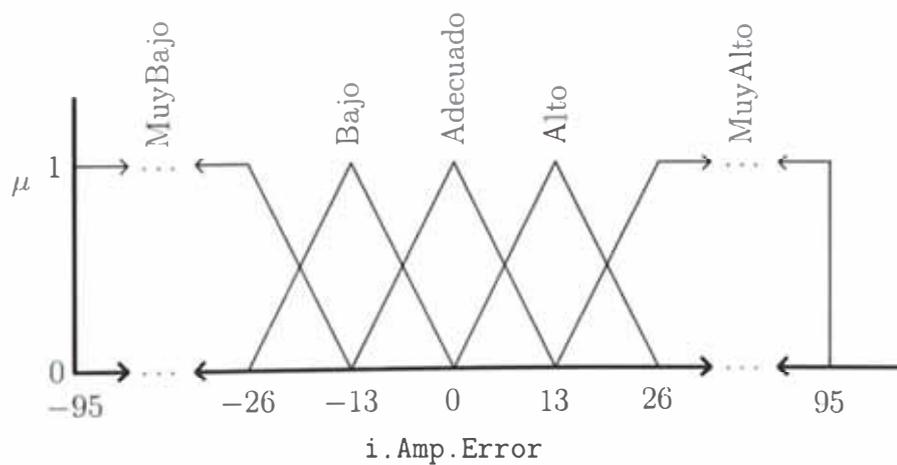


Figura 4.3: Conjuntos difusos para i.Amp.Error en HP700.

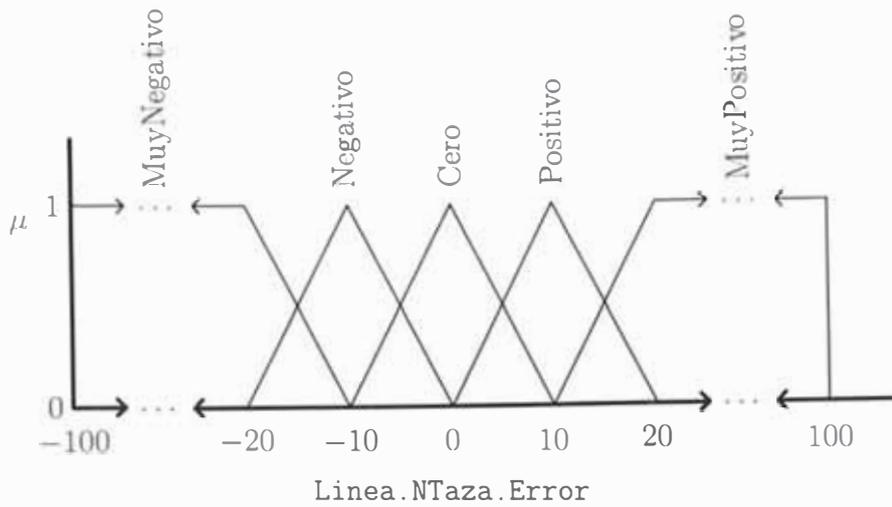


Figura 4.4: Conjuntos difusos para Linea.NTaza.Error

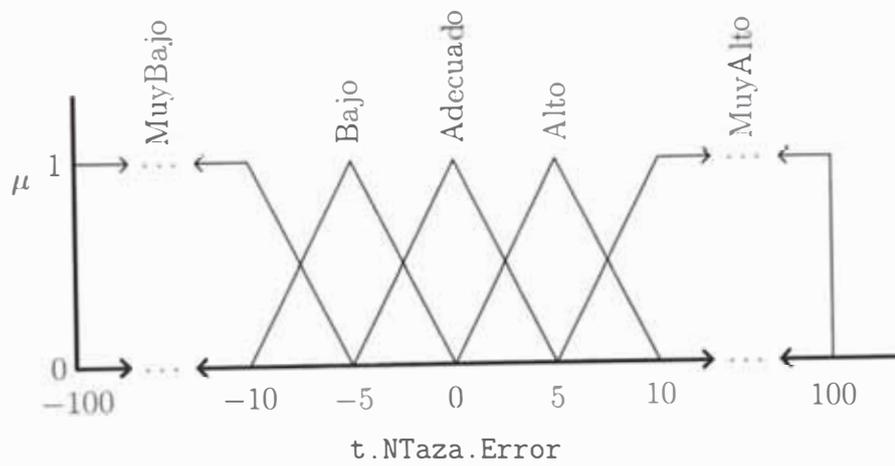


Figura 4.5: Conjuntos difusos para t.NTaza.Error

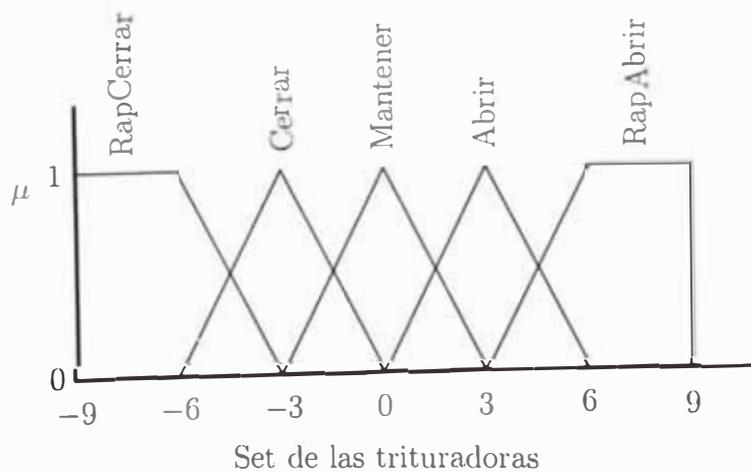


Figura 4.6: Conjuntos difusos para el Set de las trituradoras

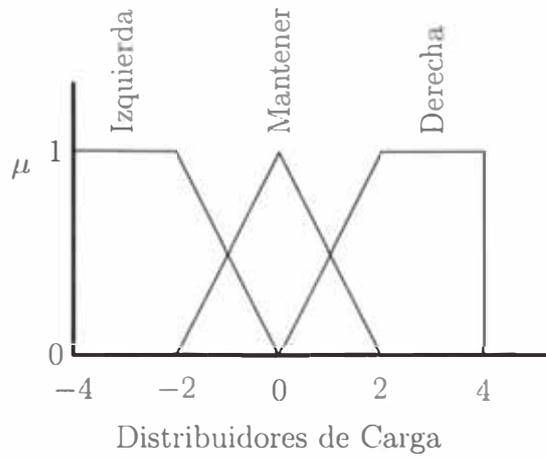


Figura 4.7: Conjuntos difusos para los *Distribuidores de carga*

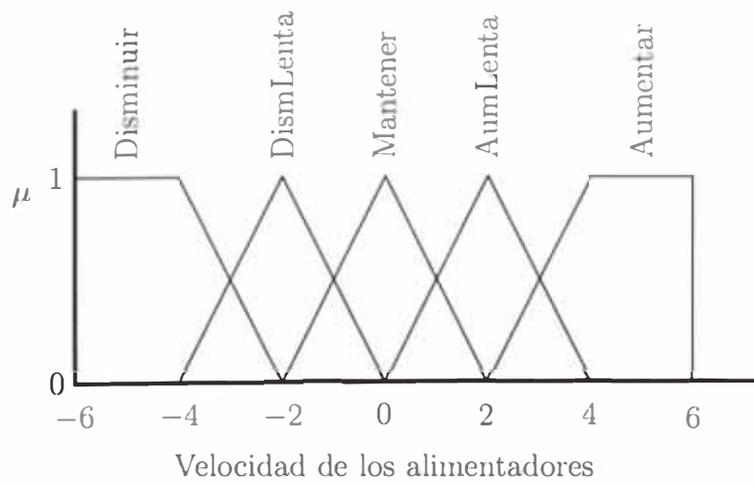


Figura 4.8: Conjuntos difusos para la *Velocidad de los alimentadores*

Las expresiones (4.12) y (4.14) provienen de la tautología  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim [p \wedge (\sim q)]$ , en la cual se ha aplicado como conjunción la regla del mínimo y la regla del producto respectivamente.

La expresión (4.13) proviene de la tautología:  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p) \vee q$ , Cuyo resultado es idéntico al obtenido en (4.12).

**Equivalencia:  $p$  SI Y SOLO SI  $q$**

$$p \leftrightarrow q = 1 - |p - q| \quad (4.18)$$

Los operadores  $t$ -*conorma* para la union fuzzy también son conocidos como  $s$ -*norma* y denotados por  $\oplus$ , y operadores  $t$ -*norma* para la intersección fuzzy son denotados por  $\star$ .

Los operadores lógicos (o conectivas) de conjunción y disyunción se definen siempre en pares[14], los cuales son: Mínimo (4.6) y Máximo (4.9), Producto algebraico (4.7) y Suma algebraica o probabilística (llamado también *Or probabilístico* o *Probor*) (4.10). Estos pares deben de cumplir con las leyes de Morgan[25]:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} &= \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}} & 1 - (p \wedge q) &= (1 - p) \vee (1 - q) \\ \overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} &= \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}} & 1 - (p \vee q) &= (1 - p) \wedge (1 - q) \end{aligned}$$

## Tablas de verdad

Una tabla de verdad se presenta comúnmente como la Tabla 4.2, pero puede presentarse también como una tabla Cayley tal como muestra en la Tabla 4.3. Esta última forma de presentación resulta más adecuada para mostrarlas en gráficos.

Tabla 4.2: Lógica booleana: Tabla de verdad

$p$	$q$	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- La regla se disparará cuando las proposiciones  $p$  y  $q$  sean verdaderas.

Tabla 4.3: Lógica booleana: Tabla Cayley

		q	
		0	1
p	∧	0	0
	∨	0	1

### Tablas de verdad en la Lógica Difusa

Para las tablas de verdad en la Lógica Difusa se ha preferido mostrarlas de manera similar a las tablas Cayley. Por ejemplo, la Tabla 4.4 muestra la tabla de verdad para la conjunción utilizando la *regla del mínimo*. Se puede observar que en la lógica difusa se trata de interpolar los datos intermedios entre cero y uno que no abarca la lógica booleana.

Tabla 4.4: Lógica difusa: Tabla de Verdad (Regla del mínimo)

		q					
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
p	∧	0	0	0	0	0	0
	∨	0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
	0.2	0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
	0.4	0	0.2	0.4	0.4	0.4	0.4
	0.6	0	0.2	0.4	0.6	0.6	0.6
	0.8	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.8
	1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1

- Dicha regla tiene grados de “disparo” según el grado de verdad de las proposiciones.

En las Figuras 4.9, 4.10 4.11 y 4.12 se presentan las gráficas de la tabla Cayley en donde se comparan a los operadores lógicos booleanos y difusos.

#### 4.6.5. Razonamiento aproximado

Tiene las siguientes características[2]:

- Utiliza Conjuntos Difusos y Lógica Difusa para modelar el razonamiento humano.
- Disminuye la precisión en el razonamiento exacto (lógica clásica).
- Es más efectivo para sistemas complejos o no muy bien definidos.

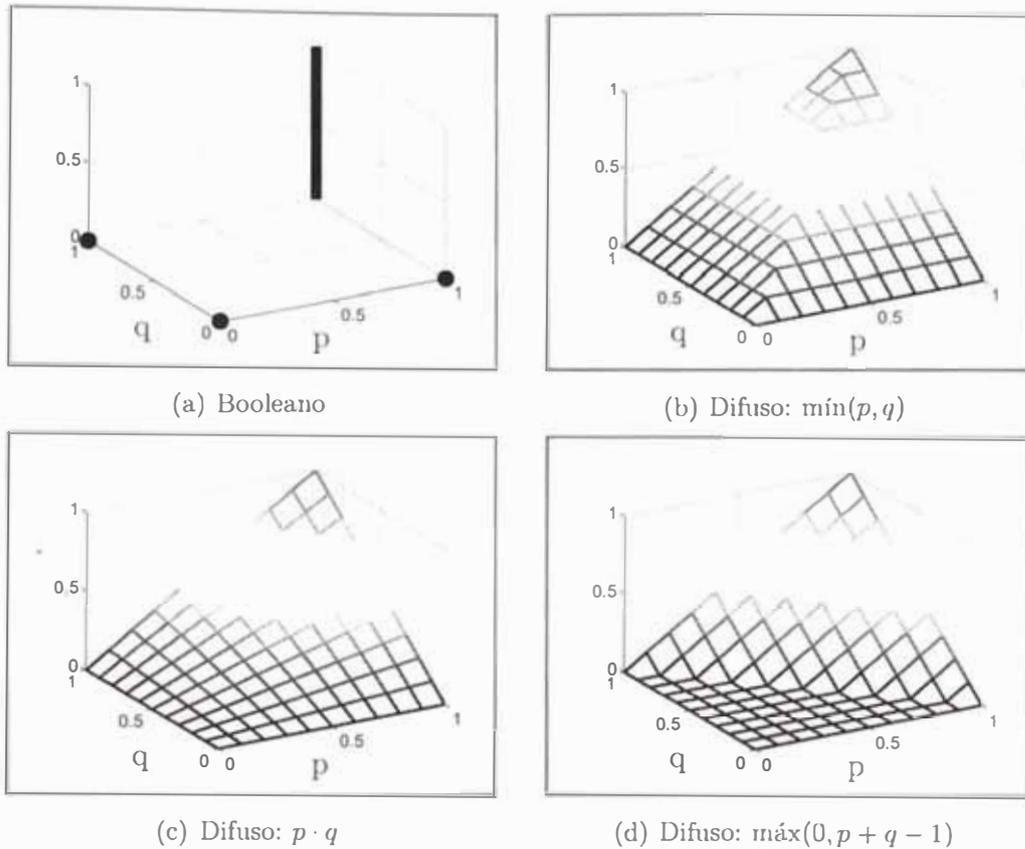


Figura 4.9: Operador lógico de Conjunción: **Y** (AND,  $\wedge$ )

### Modus Ponens Clásico

La expresión del Modus Ponens Clásico (4.19) es una proposición compuesta principalmente por el operador lógico *implicación*. Cabe resaltar que dicha expresión es una *tautología*.

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \quad (4.19)$$

El Modus Ponens Clásico puede expresarse como:

Premisa 1	$p$	x es A	(4.20)
-----------	-----	--------	--------

Premisa 2	$p \rightarrow q$	Si x es A entonces y es B	(4.21)
-----------	-------------------	---------------------------	--------

---

Conclusión	$q$	y es B	(4.22)
------------	-----	--------	--------

No se debe de confundir el término *implicación* con *inferencia*. *Implicación* es expresado por (4.21) y la *inferencia* es el proceso de concluir (la expresión (4.22)) en base a premisas (el hecho (4.20) y la regla (4.21)).

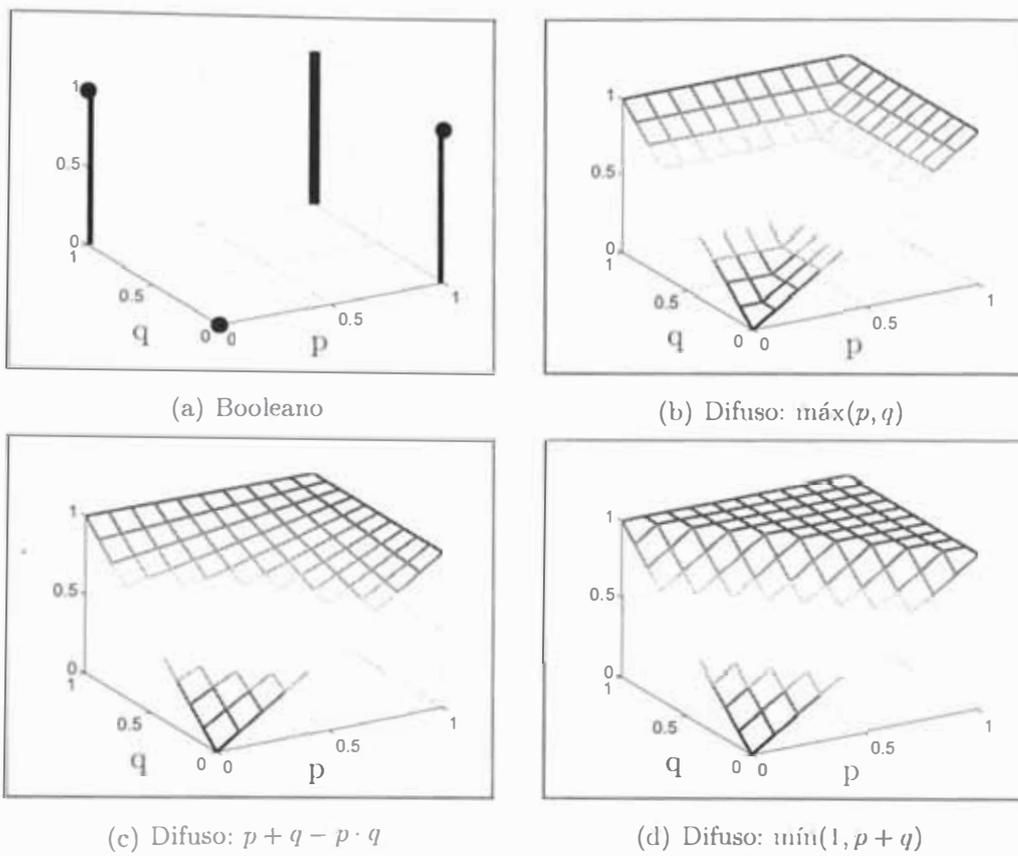


Figura 4.10: Operador lógico de Disyunción: O (OR,  $\vee$ )

### Modus Ponens Generalizado

La expresión de Modus Ponens Generalizado es representado por:

$$(p' \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q' \quad (4.23)$$

También puede ser representado por:

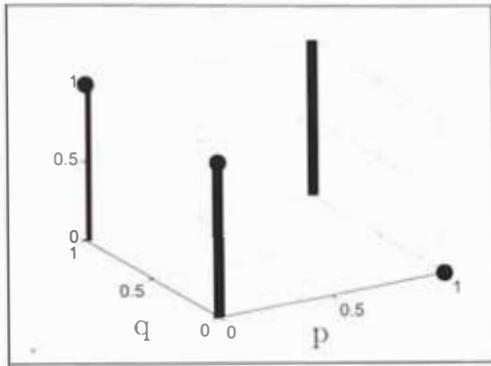
Premisa 1	$p'$	$x$ es $A'$	(4.24)
-----------	------	-------------	--------

Premisa 2	$p \rightarrow q$	Si $x$ es $A$ entonces $y$ es $B$	(4.25)
-----------	-------------------	-----------------------------------	--------

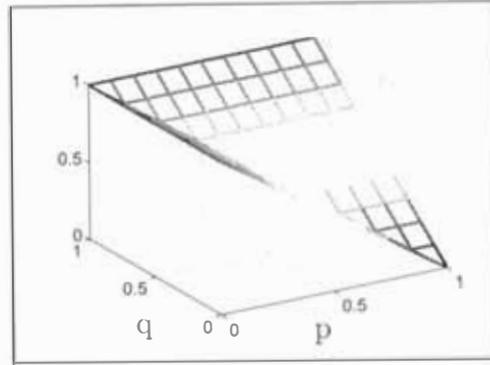
Conclusión	$q'$	$y$ es $B'$	(4.26)
------------	------	-------------	--------

En donde:

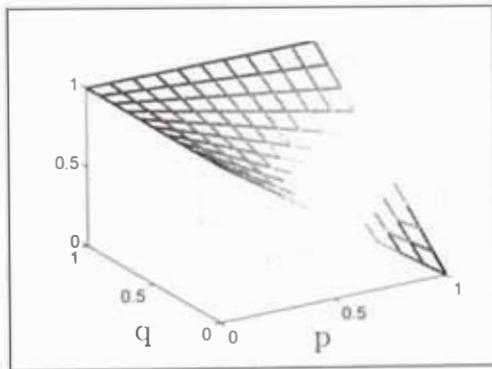
- $A$  y  $A'$  son parecidos pero no iguales.
- $B$  y  $B'$  son parecidos pero no iguales.



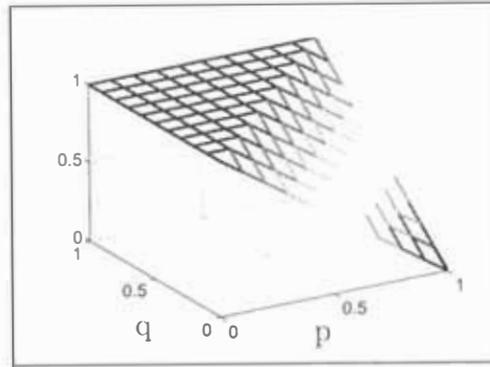
(a) Booleano



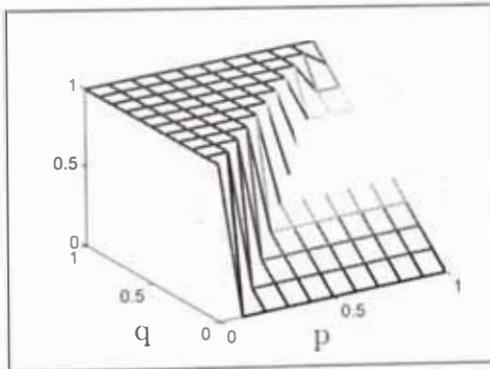
(b) Difuso:  $1 - \min(p, 1 - q) = \max(1 - p, q)$



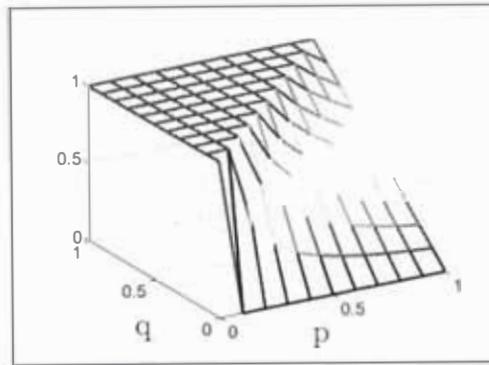
(c) Difuso:  $1 - p \cdot (1 - q)$



(d) Difuso:  $\min(1, 1 - p + q)$



(e) Difuso: (ver (4.16))



(f) Difuso: (ver (4.17))

Figura 4.11: Operador lógico de Implicación: SI ...ENTONCES ... (IF ...THEN ...,  $\rightarrow$ )

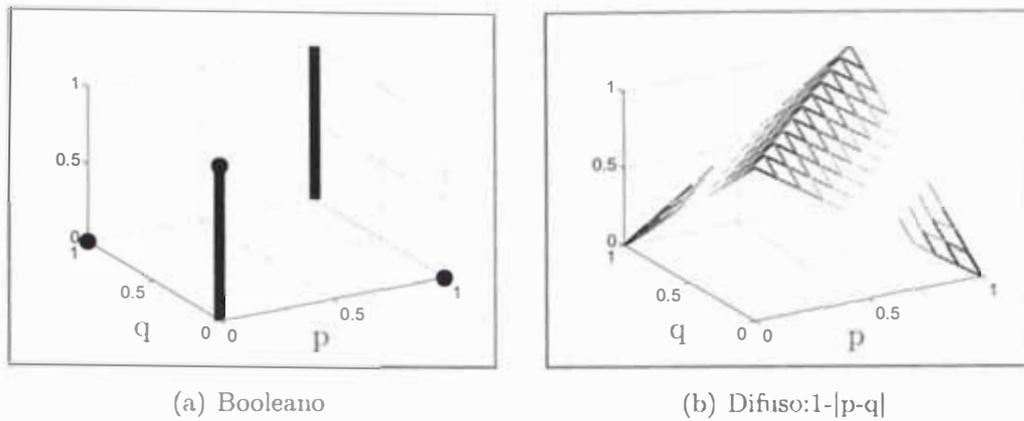


Figura 4.12: Operador lógico de Equivalencia: **SI Y SOLO SI (IF AND ONLY IF, →)**

### Regla de inferencia composicional

Es la base para la inferencia del *Modus Ponens Generalizado*.

Sean los Conjuntos Difusos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= (x, \mu_{\mathbf{A}}(x)), & x \in \mathbf{A} \subset U_1 \\
 \mathbf{A}' &= (x, \mu'_{\mathbf{A}}(x)), & x \in \mathbf{A}' \subset U_1 \\
 \mathbf{B} &= (y, \mu_{\mathbf{B}}(y)), & y \in \mathbf{B} \subset U_2 \\
 \mathbf{B}' &= (y, \mu'_{\mathbf{B}}(y)), & y \in \mathbf{B}' \subset U_2
 \end{aligned}$$

$\mathbf{B}'$  es definido por la *Regla de inferencia composicional* y representa a (4.23):

$$\mathbf{B}' = \mathbf{A}' \circ R(x, y) \tag{4.27}$$

En donde:

- $R(x, y)$ : Relación difusa
- $\circ$ : Composición sup –star

**Relación difusa** La relación difusa  $R(x, y)$  entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  (el cual representa a  $p \rightarrow q$  de (4.23) o (4.25)) puede obtenerse de diversas formas, las cuales pueden ser mediante reglas basadas en la *implicación* o en la *conjunción*. La función de

pertenencia  $\mu_R(x, y)$  es una función de dos variables e indica el grado en el cual  $x$  está en relación a  $y$ [2].

1. Regla basada en la implicación

Para la relación  $R_i$ :

$$R_i(x, y) = \{(x, y), \mu_{R_i}(x, y) | (x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \subset U_1 \times U_2\} \quad (4.28)$$

La función de pertenencia utilizando la regla basada en la implicación es denotado por:

$$\mu_{R_i}(x, y) = \min(1, 1 - \mu_{\mathbf{A}}(x) + \mu_{\mathbf{B}}(y)), \quad (x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (4.29)$$

Cabe señalar que esta expresión no cumple con el *Modus Ponens Clásico*.

2. Regla basada en la conjunción

Para la relación  $R_c$ :

$$R_c(x, y) = \{(x, y), \mu_{R_c}(x, y) | (x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \subset U_1 \times U_2\} \quad (4.30)$$

La función de pertenencia utilizando la regla basada en la conjunción (mín) es denotado por:

$$\mu_{R_c}(x, y) = \mu_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}(x, y) = \min(\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(y)), \quad (x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (4.31)$$

Esta expresión (denominada también *Implicación de Mamdani*[15]) satisface el *Modus Ponens Clásico* cuando el conjunto  $\mathbf{A}$  es normalizado (valor máximo igual a uno)[2].

También es posible utilizar otros operadores de conjunción como el producto (propuesto por Larsen), con lo cual, la función de pertenencia resulta:

$$\mu_{R_c}(x, y) = \mu_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}(x, y) = \mu_{\mathbf{A}}(x) \cdot \mu_{\mathbf{B}}(y), \quad (x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (4.32)$$

Estos tipos de inferencia son los de mayor aplicación en la lógica difusa y aparentemente han sido utilizados por su simplicidad en el cálculo en vez de basarse en el concepto de *causa y efecto*. Lamentablemente las inferencias utilizando el mínimo o el producto no guardan relación con la lógica proposicional tradicional, aunque se mantiene el concepto de causa y efecto ya que la regla se dispara cuando el antecedente y el consecuente son verdad. Mendel propone que dichas implicaciones sean denominadas como *implicaciones de ingeniería* (engineering implications)[25].

### 3. Otras reglas.

Las funciones de pertenencia de las relaciones también pueden ser expresados como[6]:

a) Regla máx – mín.

$$\mu_{R_{Mm}}(x, y) = \max(\min(\mu_A(x), \mu_B(y)), 1 - \mu_A(x)) \quad (4.33)$$

b) Regla booleana.

$$\mu_{R_b}(x, y) = \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (4.34)$$

c) Regla de Goguen.

$$\mu_{R_G}(x, y) = \begin{cases} 1 & \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y)/\mu_A(x) & \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases} \quad (4.35)$$

Por ejemplo, el antecedente **A** y el consecuente **B** los representamos como:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mu_A(x_1) \\ \mu_A(x_2) \\ \vdots \\ \mu_A(x_a) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu_B(y_1) & \mu_B(y_2) & \cdots & \mu_B(y_b) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la relación difusa  $R(x, y)$  será un arreglo (similar a una matriz) de tamaño  $(a, b)$ .

$$R(x, y) = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_b) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_R(x_a, y_1) & \mu_R(x_a, y_2) & \cdots & \mu_R(x_a, y_b) \end{bmatrix}$$

En donde  $\mu_R(x, y)$  puede ser obtenido mediante (4.29), (4.31), (4.32), (4.33), (4.34) ó (4.35). Aunque para la mayoría de controladores difusos, la implicación está basada en las reglas de conjunción ya sea la regla del mínimo o la del producto ((4.31) y (4.32) respectivamente)[15].

**La Composición sup –star** Combina relaciones difusas con diferentes variables. Sea  $(x, y)$  y  $(y, z)$ ;  $x \in \mathbf{A}$ ,  $y \in \mathbf{B}$ ,  $z \in \mathbf{C}$  donde las relaciones difusas son:

$$R_1(x, y) = \{((x, y), \mu_{R_1}) | (x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \mu_{R_1}(x, y) \in [0, 1]\}$$

$$R_2(y, z) = \{((y, z), \mu_{R_2}) | (y, z) \in \mathbf{B} \times \mathbf{C}, \mu_{R_2}(y, z) \in [0, 1]\}$$

La operación sup se refiere al máximo y la operación star se refiere a una  $t$  – norma, en la cual, si es el mínimo la composición se denomina máx – mín y si es el producto es una composición máx – producto

La Composición sup –star denotado por  $R_1 \circ R_2$  con función de pertenencia  $\mu_{R_1 \circ R_2}$  es definido como:

$$R_1 \circ R_2 = \{((x, z), \mu_{R_1 \circ R_2}(x, z)) | (x, z) \in \mathbf{A} \times \mathbf{C}, y \in \mathbf{B}\} \quad (4.36)$$

Si el tipo de composición es máx – mín, la función de pertenencia de dicha relación es expresada mediante:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_y(\min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z))) \quad (4.37)$$

Si el tipo de composición es máx – producto, la función de pertenencia será:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_y(\mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(y, z)) \quad (4.38)$$

		$y_1$	$y_2$	...	$y_{Ny}$
$R_1(x, y) \triangleq$	$x_1$	$\mu_{R_1}(1, 1)$	$\mu_{R_1}(1, 2)$	...	$\mu_{R_1}(1, Ny)$
	$x_2$	$\mu_{R_1}(2, 1)$	$\mu_{R_1}(2, 2)$	...	$\mu_{R_1}(2, Ny)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$x_{Nx}$	$\mu_{R_1}(Nx, 1)$	$\mu_{R_1}(Nx, 2)$	...	$\mu_{R_1}(Nx, Ny)$

$$R_2(x, y) \triangleq \begin{array}{c|cccc} & z_1 & z_2 & \dots & z_{Nz} \\ \hline y_1 & \mu_{R_2}(1, 1) & \mu_{R_2}(1, 2) & \dots & \mu_{R_2}(1, Nz) \\ y_2 & \mu_{R_2}(2, 1) & \mu_{R_2}(2, 2) & \dots & \mu_{R_2}(2, Nz) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{Ny} & \mu_{R_2}(Nx, 1) & \mu_{R_2}(Nx, 2) & \dots & \mu_{R_2}(Nx, Nz) \end{array}$$

El símbolo  $\triangleq$  significa: *es definido como*.

Si se aplica la composición sup –star (i.e.  $R_1$  o  $R_2$ ) se obtendrá un arreglo de tamaño  $(Nx, Nz)$  ( $Nx$ ,  $Ny$  y  $Nz$  es el número de puntos en las que se ha dividido los universos de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ).

Las composiciones sup –star son similares a un producto matricial en el que la suma se sustituye por el operador máximo y el producto puede dejarse como tal (en el caso de máx –producto) o puede ser reemplazado por el operador mínimo (en el caso de máx – mín)[31].

En el caso de realizar la inferencia difusa a utilizando (4.27) se obtiene:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{A}' \circ R(x, y)$$

$$\begin{bmatrix} \mu'_{\mathbf{B}}(y_1) & \mu'_{\mathbf{B}}(y_2) & \dots & \mu'_{\mathbf{B}}(y_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu'_{\mathbf{A}}(x_1) & \mu'_{\mathbf{A}}(x_2) & \dots & \mu'_{\mathbf{A}}(x_a) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \dots & \mu_R(x_1, y_b) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \dots & \mu_R(x_2, y_b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_R(x_a, y_1) & \mu_R(x_a, y_2) & \dots & \mu_R(x_a, y_b) \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{bmatrix} \mu'_{\mathbf{A}}(x_1) & \mu'_{\mathbf{A}}(x_2) & \dots & \mu'_{\mathbf{A}}(x_a) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}' &= \begin{bmatrix} \mu'_{\mathbf{B}}(y_1) & \mu'_{\mathbf{B}}(y_2) & \dots & \mu'_{\mathbf{B}}(y_b) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si se aplica (4.37) o (4.38) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu'_{\mathbf{B}}(y_i) &= \text{máx} (\mu'_{\mathbf{A}}(x_1) \wedge \mu_R(x_1, y_i), \mu'_{\mathbf{A}}(x_2) \wedge \mu_R(x_2, y_i), \dots \\ &\quad \dots, \mu'_{\mathbf{A}}(x_a) \wedge \mu_R(x_a, y_i)) \end{aligned} \quad (4.39)$$

En donde  $\wedge$  representa el operador de conjunción (i.e. mínimo o producto).

## Reglas con múltiples antecedentes

Es posible reducir el número de antecedentes a uno solo aplicando un operador difuso. Dicho operador variará según el tipo de regla, los cuales pueden ser basados en:

- Conjunción (Y):

$$\text{Si } x_1 \text{ es } \mathbf{A}_1 \text{ Y } x_2 \text{ es } \mathbf{A}_2 \text{ Y } \dots \text{ Y } x_n \text{ es } \mathbf{A}_n \text{ entonces } y \text{ es } \mathbf{B} \quad (4.40)$$

En este caso, el operador difuso puede ser la *regla del mínimo* (4.6) o la *regla del producto* (4.7)[31].

Por ejemplo, si se utiliza la regla del mínimo, la función de pertenencia obtenida es:

$$\mu_{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \dots \times \mathbf{A}_n} = \min(\mu_{\mathbf{A}_1}, \mu_{\mathbf{A}_2}, \dots, \mu_{\mathbf{A}_n}) \quad (4.41)$$

- Disyunción (O):

$$\text{Si } x_1 \text{ es } \mathbf{A}_1 \text{ O } x_2 \text{ es } \mathbf{A}_2 \text{ O } \dots \text{ O } x_n \text{ es } \mathbf{A}_n \text{ entonces } y \text{ es } \mathbf{B} \quad (4.42)$$

En este caso, el operador difuso puede ser la *regla del máximo* (4.9) o la *suma algebraica o probabilística* (4.10).

## Varias reglas

Cuando se tiene varias reglas, es decir, una base de reglas, se requiere establecer un método de combinación. Para esto se asume una disyunción (O) entre las reglas, es decir, se leerá como: “Si la regla 1 o la regla 2 o ... entonces ...”

En el caso de establecerse las relaciones difusas mediante  $R_1, R_2, \dots, R_N$ , se establecerá una relación difusa resultante  $R$  en la cual puede aplicarse la inferencia. Es decir:

$$R = R_1 \vee R_2 \vee \dots \vee R_N \quad (4.43)$$

Si utilizamos el *máximo* como disyunción, la función de pertenencia resulta:

$$\mu_R(x, y) = \max(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y), \dots, \mu_{R_N}(x, y)) \quad (4.44)$$

## 4.7. Sistemas de control por lógica difusa

El presente trabajo está basado en control directo (ver Figura 4.13). En dicho esquema se muestra un bloque controlador que está definido por la Figura 4.14. Un controlador difuso está conformado básicamente por cuatro elementos los cuales se muestran en la Figura 4.14(b), adicionalmente se tienen dos bloques denominados *pre-procesamiento* y *post-procesamiento* (ver Figura 4.14(a)) los cuales consisten en:

**Pre-procesamiento** Acondiciona las mediciones antes de entrar al controlador.

Para este trabajo en particular, el pre-procesamiento consiste en emplear (4.1), (4.2), (4.3), (4.4). Cabe recalcar que dichas ecuaciones se establecieron debido a la conveniencia de utilizar los *errores* en lugar de los valores directos del proceso. En el caso del amperaje, permite además trabajar en un rango (que lo podría variar el usuario final) sin tener que modificar los conjuntos difusos.

**Post-procesamiento** Consiste en escalar la salida a unidades físicas (e.g. voltios, toneladas por hora, metros, ...). El bloque de post-procesamiento frecuentemente contiene una ganancia que puede ser sintonizada, y a veces puede contener también un integrador[14].

### 4.7.1. Fuzzyficación

Consiste en mapear un punto crisp  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_a]^T \in U$  a un conjunto o número difuso  $X$  en  $U$ [25]. Se dispone de los siguientes métodos:

#### Fuzzyficador singleton

Es el más ampliamente usado debido a que simplifica la composición sup-star haciendo que la operación *supremo* (supremum) desaparezca (ver (4.50)). Se expresa como:

$$\mu_X(\mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}' = \mathbf{x} \\ 0 & \mathbf{x}' \neq \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.45)$$

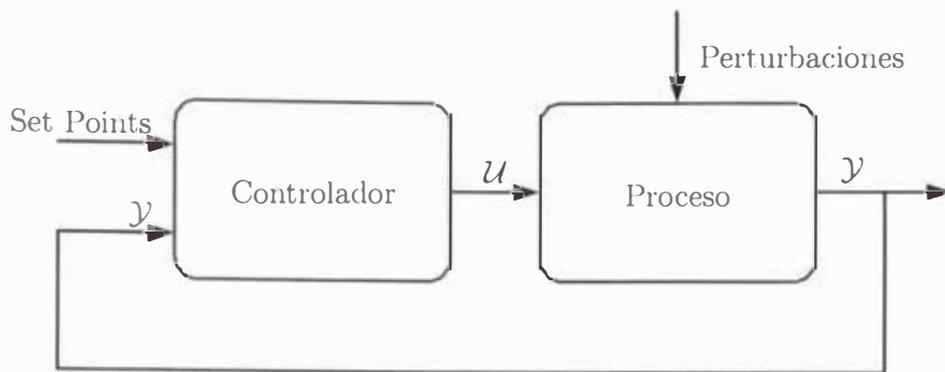
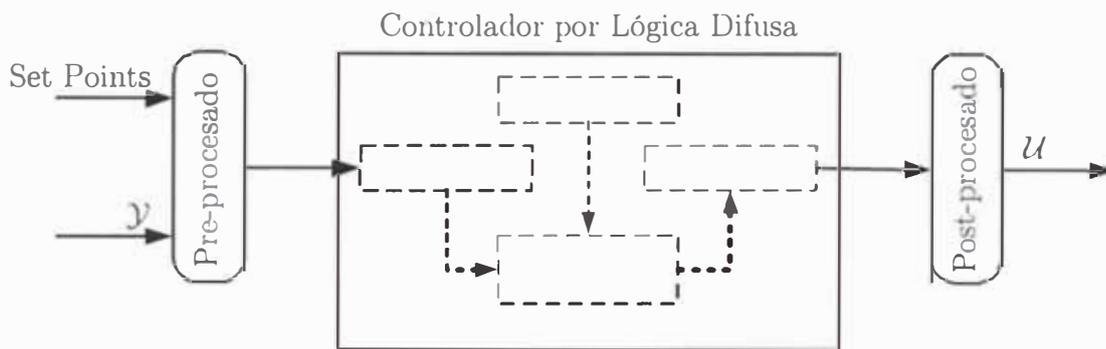
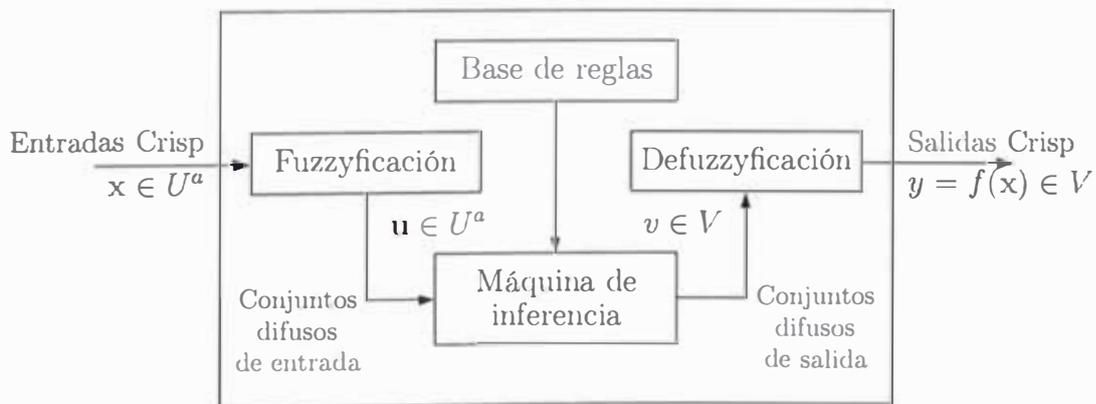


Figura 4.13: Control directo de un proceso.



(a) Esquema de un controlador difuso



(b) Controlador por Lógica Difusa

Figura 4.14: Estructura de un controlador difuso.

### Fuzzyficador no-singleton

Son aquellos en los cuales  $\mu_X(x') = 1$  y  $\mu_X(x)$  disminuye a medida que  $x$  se aleja de  $x'$ . Estos fuzzyficadores mapean a  $x'$  en un número difuso y se pueden utilizar funciones de pertenencia como la Gaussiana y la triangular[25]. La función Gaussiana puede expresarse como:

$$\mu_X(x') = \exp \left[ -\frac{(x - x')^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.46)$$

Cabe señalar que un número difuso con un máximo (o con un *flat* - e.g. un número trapezoidal difuso) es un conjunto difuso convexo normalizado[2].

La fuzzyficación no-singleton se emplea cuando existe ruido que distorsionaría la data de entrada. Por ejemplo, en una distribución granulométrica, el tamaño  $X_{80}$  difiere cuando se repite el análisis (para una misma muestra). Por otro lado, el nivel de mineral en una tolva depende de donde se tome dicho valor.

La Figura 4.15 muestra el esquema de la Fuzzyficación Singleton y la Fuzzyficación No-Singleton.

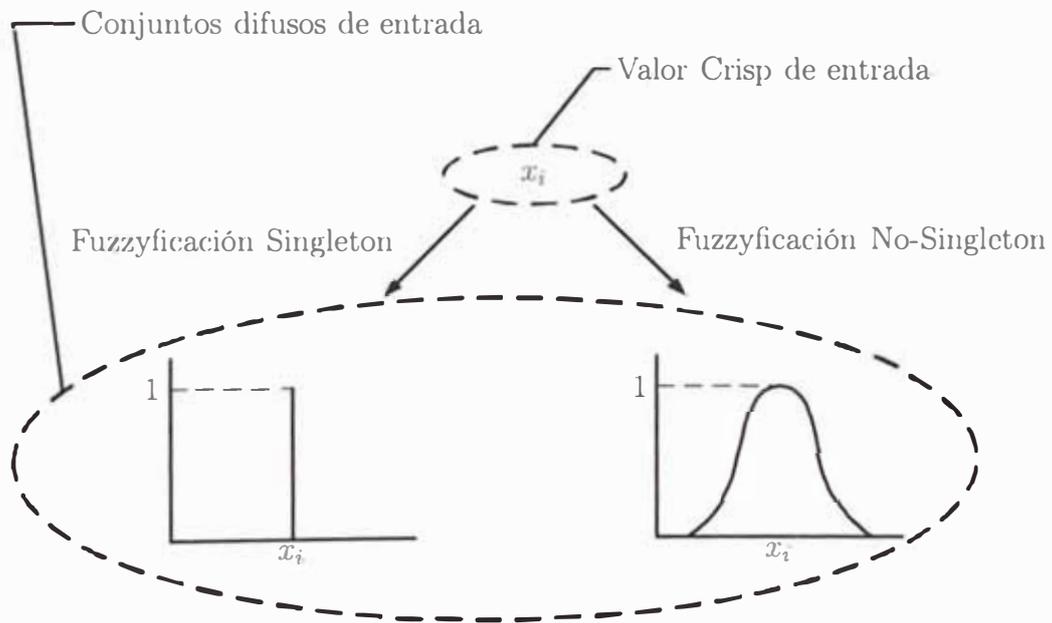


Figura 4.15: Fuzzyficación Singleton y No-Singleton

### 4.7.2. Base de reglas

Consiste en la colección de reglas del tipo **SI ... ENTONCES ...**, los cuales pueden ser expresados como:

#### Tipo Mamdani

La salida es un conjunto difuso  $B^l$ .

$$R^{(l)} : \text{SI } x_1 \text{ es } A_1^l \text{ Y } x_2 \text{ es } A_2^l \text{ Y } \dots \text{ Y } x_a \text{ es } A_a^l, \text{ ENTONCES } y \text{ es } B^l \quad (4.47)$$

Donde:

$l$  Denota el número de la regla ( $l = 1, 2, \dots, M$ ).

$A_i^l$  Conjuntos difusos en  $U_i \subset \mathbb{R}$ .

$B^l$  Conjunto difuso en  $V \subset \mathbb{R}$ .

$\mathbb{R}$  Conjunto de los números reales.

$x$  y  $y$  Variables lingüísticas.

Existe un tipo de reglas denominado *regla mixta* en la que el operador difuso es una disyunción o una mezcla de conjunciones y disyunciones. Estas reglas pueden obtenerse en forma empírica o por “sentido común” aunque existen dos formas para extraer las reglas de data numérica[25]:

1. hacer que la data establezca los conjuntos difusos que aparecen en los antecedentes y los consecuentes de las reglas, o
2. especificar previamente los conjuntos difusos para los antecedentes y los consecuentes, y entonces asociar la data con esos conjuntos difusos.

#### Tipo Takagi-Sugeno

La salida es un valor escalar  $y$  que resulta de una combinación lineal de las entradas crisp (i.e.  $x_1, x_2, \dots, x_a$ ).

$$R^l : \text{SI } x_1 \text{ es } A_1^l \text{ Y } x_2 \text{ es } A_2^l \text{ Y } \dots \text{ Y } x_a \text{ es } A_a^l, \text{ ENTONCES } y^l = f^l(\mathbf{x}) \quad (4.48)$$

Donde:

$x$  Variables lingüísticas.

$f^l(\mathbf{x})$  Combinación lineal de las variables de entradas crisp.

$y^l$  Salida crisp del sistema difuso (y/o controlador) en la regla  $l$ .

### 4.7.3. Máquina de inferencia difusa (tip● Mamdani)

En este punto se aplican los principios de lógica difusa para combinar las reglas (de la base de reglas) y realizar el mapeo de los conjuntos difusos de de entrada  $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_a$  en conjuntos difusos de salida en  $V$ .

La función de pertenencia del conjunto difuso de salida  $B^l$  se puede obtener mediante la siguiente expresión (la demostración se detalla en [25]).

$$\mu_{B^l}(y) = \mu_{B^l}(y) \wedge \mu_{G^l}(\mathbf{x}) \quad (4.49)$$

En donde  $\mu_{G^l}(\mathbf{x})$  representa el grado de disparo de la regla  $l$  el cual está dado por:

$$\mu_{G^l}(\mathbf{x}) = \sup \left[ \left( \mu_{X_1}(x_1) \wedge \mu_{A_1^l}(x_1) \right) \wedge \dots \wedge \left( \mu_{X_a}(x_a) \wedge \mu_{A_a^l}(x_a) \right) \right] \quad (4.50)$$

Además, debido a la propiedad de monotonicidad de una  $t$ -norma, el supremo de (4.50) sería equivalente a estimar el supremo de cada término dentro de los corchetes, es decir, el grado de disparo podría expresarse como:

$$\mu_{G^l}(\mathbf{x}) = \sup \left( \mu_{X_1}(x_1) \wedge \mu_{A_1^l}(x_1) \right) \wedge \dots \wedge \sup \left( \mu_{X_a}(x_a) \wedge \mu_{A_a^l}(x_a) \right) \quad (4.51)$$

en donde la operación sup es equivalente a la operación máximo (máx) en este caso.

Cabe señalar que la operación  $\sup (\mu_{X_i}(x_i) \wedge \mu_{A_i^l}(x_i))$  representa el grado de pertenencia del número difuso  $\mu_{X_i}(x_i)$  (obtenido por la fuzzyficación del valor crisp  $x_i$ ) en el conjunto difuso  $\mu_{A_i^l}(x_i)$  el cual es equivalente a:

$$\sup (\mu_{X_i}(x_i) \wedge \mu_{A_i^l}(x_i)) = \mu_{X_i}(x_{i,m\acute{a}x}) \wedge \mu_{A_i^l}(x_{i,m\acute{a}x})$$

donde el término  $x_{i,m\acute{a}x}$  es el valor crisp de  $x_i$  en el cual el conjunto resultante de la conjunción de  $\mu_{X_i}(x_i)$  y  $\mu_{A_i^l}(x_i)$  (i.e.  $\mu_{Q_i^l}$ ) es máximo. La Figura 4.16 se muestra el esquema de esta operación.

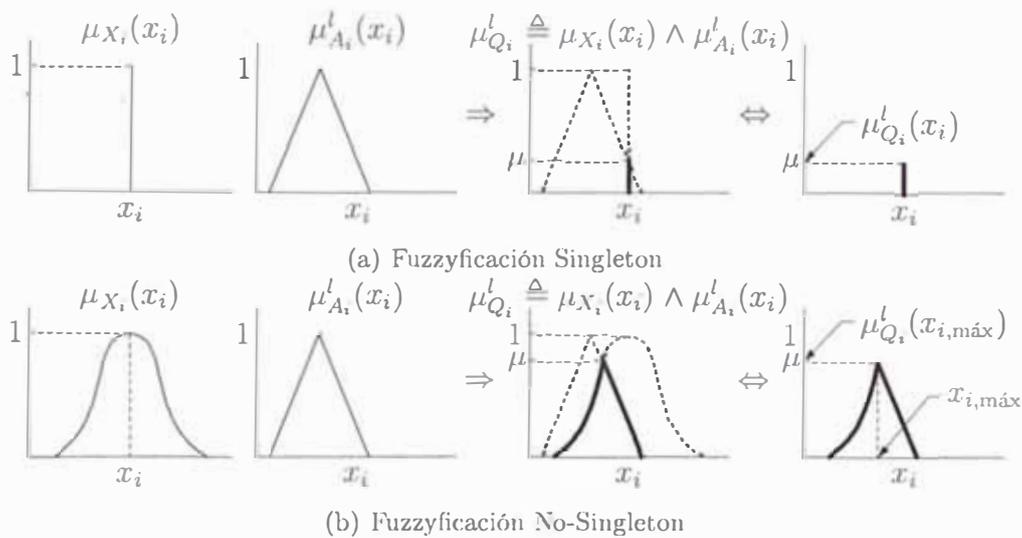


Figura 4.16: Operación star al conjunto difuso de entrada  $\mu_{X_i}(x_i)$  y el conjunto difuso del antecedente  $\mu_{A_i^l}(x_i)$ . En el caso de la Fuzzyficación Singleton, se obtiene el mismo conjunto difuso al aplicar la regla del mínimo o la regla del producto. En la Fuzzyficación No-Singleton se ha utilizado la regla del producto como conjunción. En ambos casos el valor a aplicarse para la inferencia difusa es el máximo del conjunto difuso  $Q_i^l$ .

Obsérvese que cuando se utiliza la Fuzzyficación Singleton, el operador sup no tiene efecto alguno en (4.51), por lo tanto puede expresarse como:

$$\mu_{G^l}(\mathbf{x}) = (\mu_{X_1}(x_1) \wedge \mu_{A_1^l}(x_1)) \wedge \dots \wedge (\mu_{X_a}(x_a) \wedge \mu_{A_a^l}(x_a))$$

### Ejemplo numérico

Se puede comprobar mediante un ejemplo sencillo que emplear (4.49) y (4.51) es equivalente a utilizar (4.27). Para esto definimos un solo antecedente  $A$ , una

sola regla  $A \rightarrow B$  (basada en la conjunción -regla del mínimo-) y un conjunto difuso de salida  $B$ , en donde.

$$\mu_B = [ 1 \quad 1 \quad 0,5 \quad 0 \quad 0 ]$$

$$\mu_A = [ 0 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 0,5 ]$$

$$\mu_{A \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Fuzzyficación Singleton** Sea el conjunto difuso de entrada  $\mu_X$

$$\mu_X = [ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 ]$$

El conjunto difuso de salida (utilizando la regla del mínimo como conjunción) será:

1. Utilizando (4.27).

$$\mu_{B'} = \begin{bmatrix} \text{máx}(\text{mín}(0, 0), \text{mín}(0, 0), \text{mín}(1, 0,5), \text{mín}(0, 1), \text{mín}(0, 0,5)) \\ \text{máx}(\text{mín}(0, 0), \text{mín}(0, 0), \text{mín}(1, 0,5), \text{mín}(0, 1), \text{mín}(0, 0,5)) \\ \text{máx}(\text{mín}(0, 0), \text{mín}(0, 0), \text{mín}(1, 0,5), \text{mín}(0, 0,5), \text{mín}(0, 0,5)) \\ \text{máx}(\text{mín}(0, 0), \text{mín}(0, 0), \text{mín}(1, 0), \text{mín}(0, 0), \text{mín}(0, 0)) \\ \text{máx}(\text{mín}(0, 0), \text{mín}(0, 0), \text{mín}(1, 0), \text{mín}(0, 0), \text{mín}(0, 0)) \end{bmatrix}^T$$

$$\mu_{B'} = \begin{bmatrix} \text{máx}(0, 0, 0,5, 0, 0) \\ \text{máx}(0, 0, 0,5, 0, 0) \\ \text{máx}(0, 0, 0,5, 0, 0) \\ \text{máx}(0, 0, 0, 0, 0) \\ \text{máx}(0, 0, 0, 0, 0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

2. Utilizando (4.49) y (4.51)

$$\begin{aligned} \mu_X &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \\ \mu_A &= [0 \ 0 \ 0,5 \ 1 \ 0,5] \\ \hline \mu_Q = \mu_X \wedge \mu_A &= [0 \ 0 \ 0,5 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{B'} &= \min(\mu_B, \max \mu_Q) \\ &= \min([1 \ 1 \ 0,5 \ 0 \ 0], 0,5) \\ &= [0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

Fuzzyficación No-Singleton Se aplicó el conjunto difuso en la  $\mu_X$

$$\mu_X = [0 \ 0,75 \ 1 \ 0,75 \ 0]$$

El conjunto difuso se define (utilizando la regla de composición) se define:

1. Utilizando (4.2).

$$\mu_{B'} = \begin{bmatrix} \max(\min(0), \min(0,75)), \min(0,5), \min(0,75), \min(0,5) \\ \max(\min(0), \min(0,75)), \min(0,5), \min(0,75), \min(0,5) \\ \max(\min(0), \min(0,75)), \min(0,5), \min(0,75,0,5), \min(0,5) \\ \max(\min(0), \min(0,75)), \min(0), \min(0,75), \min(0) \\ \max(\min(0), \min(0,75)), \min(0), \min(0,75), \min(0) \end{bmatrix}^T$$

$$\mu_{B'} = \begin{bmatrix} \max(0, 0,5, 0,75, 0) \\ \max(0, 0,5, 0,75, 0) \\ \max(0, 0,5, 0,5, 0) \\ \max(0, 0, 0, 0) \\ \max(0, 0, 0, 0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,75 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

2. Utilizando (4.49) y (4.51)

$$\begin{aligned} \mu_X &= [0 \ 0,75 \ 1 \ 0,75 \ 0] \\ \mu_A &= [0 \ 0 \ 0,5 \ 1 \ 0,5] \\ \hline \mu_Q = \mu_X \wedge \mu_A &= [0 \ 0 \ 0,5 \ 0,75 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{B'} &= \min(\mu_B, \max \mu_Q) \\ &= \min\left([1 \ 1 \ 0,5 \ 0 \ 0], 0,75\right) \\ &= [0,75 \ 0,75 \ 0,5 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

Se puede observar que utilizar (4.49) y (4.51) es más simple que emplear (4.27) para realizar la inferencia, así sea fuzzyficación Singleton o No-Singleton.

#### 4.7.4. Defuzzyficación (tipo Mamdani)

Consiste en producir una salida crisp de un conjunto difuso, el cual es producto de la inferencia. Para esto se han propuesto varios métodos de defuzzyficación, aunque para las mayoría de aplicaciones se prefiere un método computacionalmente simple. Algunos de estos métodos son:

1. *Centroide* ([25], [14], [2], [6], [19], [31]): Determina el centro de gravedad del conjunto difuso de salida **B**.

$$y_{Centroide} = \frac{\int_S y \cdot \mu_B(y) dy}{\int_S \mu_B(y) dy} \quad (4.52)$$

Si se discretiza, el centroide puede ser aproximado por:

$$y_{Centroide} = \frac{\sum_{i=1}^l y_i \cdot \mu_B(y_i)}{\sum_{i=1}^l \mu_B(y_i)}$$

2. *Height Defuzzyfier* ([25], en [6] lo definen como *media de centros*): Este método requiere determinar previamente el centroide  $y_{Centroide}^l$  del conjunto difuso de salida **B<sup>l</sup>** para cada regla  $R^l$  en donde la salida del sistema se obtendrá utilizando la siguiente expresión:

$$y_{Height} = \frac{\sum_{l=1}^M y_{Centroide}^l \cdot \mu_{\mathbf{B}}^l(y_{Centroide}^l)}{\sum_{l=1}^M \mu_{\mathbf{B}}^l(y_{Centroide}^l)} \quad (4.53)$$

3. *Modified Height Defuzzyfier* ([25]): Este método se diferencia del *Height Defuzzyfier* en que utiliza un factor  $\delta^l$  el cual es una medida de la *dispersion* de la regla  $R^l$ . En los conjuntos triangulares y trapezoidales  $\delta^l$  puede ser el soporte de dichos conjuntos y en el caso de funciones Gaussianas puede ser la desviación estándar.

$$y_{ModHeight} = \frac{\sum_{l=1}^M y_{Centroide}^l \cdot \mu_{\mathbf{B}}^l(y_{Centroide}^l) / \delta^{l^2}}{\sum_{l=1}^M \mu_{\mathbf{B}}^l(y_{Centroide}^l) / \delta^{l^2}} \quad (4.54)$$

4. *Bisector* ([14]) Método del bisector del área. Consiste en determinar el valor  $y_{Bisector}$  en el cual si se traza una recta vertical, este dividiría al conjunto difuso de salida  $\mathbf{B}$  en secciones de áreas iguales.

$$y_{Bisector} = \left\{ y \mid \int_{\min(S)}^y \mu(y) dy = \int_y^{\max(S)} \mu(y) dy \right\} \quad (4.55)$$

5. *som* ([14]): Método del menor del rango máximo (smallest of maximum method).
6. *lom* ([25],[14],[6],[19]): Método del mayor del rango máximo (largest of maximum method)
7. *mom* ([25],[14],[2]): Método de la media del rango máximo (mean of maximum method). Este método resulta el promedio de *som* y *lom*

$S$  denota el soporte del conjunto difuso  $\mathbf{B}$ .

En la Figura 4.17 se muestra el proceso de inferencia difusa. Este proceso ha sido resumido en cinco pasos principales (i.e. Fuzzyficación, aplicación del operador difuso, inferencia difusa, agregación y defuzzyficación). Se observa asimismo los cuatro bloques de la Figura 4.14(b) en donde la Fuzzyficación corresponde al paso 1, la Base de reglas es representado por todas las reglas (i.e. 1, 2, ...,  $n$  en las franjas horizontales), el Mecanismo de Inferencia corresponden a los pasos 2, 3 y 4, es decir, la aplicación del operador difuso en la cual se reduce a un solo antecedente, la inferencia en el paso 3 utilizando el Modus Ponens Generalizado y la Agregación en el paso 4 que es la unión de los conjuntos resultantes de las reglas. Finalmente la defuzzyficación es representado en el paso 5.

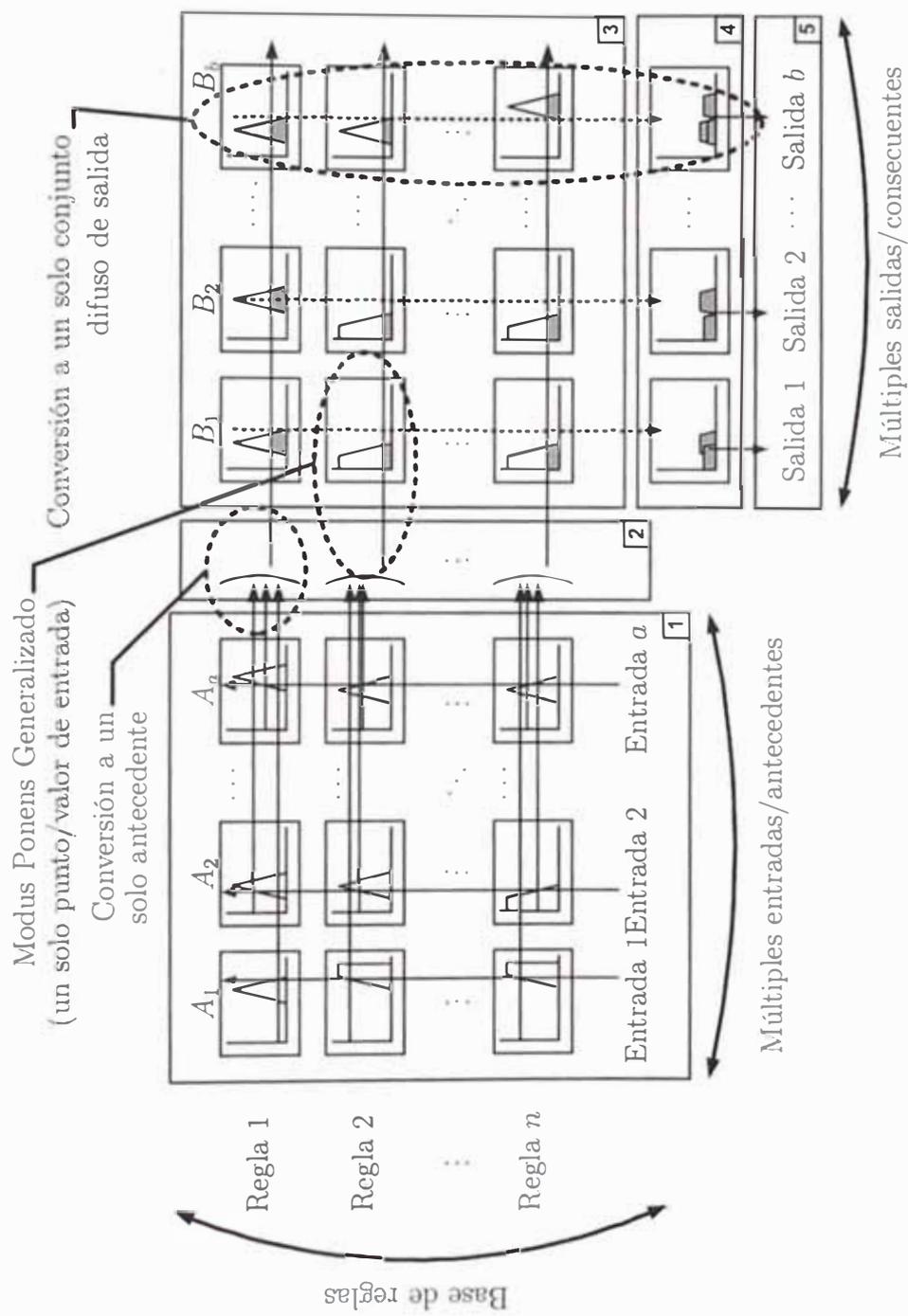


Figura 4.17: Diagrama de inferencia difusa (Mamdani): (1) Fuzzyficación de las variables de entrada. (2) Aplicación del operador difuso a los antecedentes. (3) Implicación del antecedente al consecuente. (4) Agregación de los consecuentes de las reglas. (5) Defuzzyficación.

#### 4.7.5. Defuzzyficación (tipo Takagi-Sugeno)

Los sistemas Takagi-Sugeno[37] consisten en obtener valores escalares para cada regla los cuales son combinaciones lineales de las entradas crisp (ver (4.57)). Al igual que en un sistema del tipo Mamdani, cada una de estas reglas tiene un grado de disparo  $\mu_{G^l}(\mathbf{x})$  (ver (4.51)) el cual actúa como factor de ponderación para estimar la salida final del controlador el cual puede expresarse como sigue([6], [38]):

$$y = \frac{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x})\mu_{G^l}(\mathbf{x})}{\sum_{l=1}^M \mu_{G^l}(\mathbf{x})} \quad (4.56)$$

En donde:

$$f^l(\mathbf{x}) = m_0^l + m_1^l x_1 + m_2^l x_2 + \dots + m_a^l x_a \quad (4.57)$$

$m_i^l$  Constantes relacionados a la entrada crisp  $x_i$  en la regla  $l$ . Si  $m_i^l = 0, \forall i \geq 1$ , entonces el sistema se denomina de orden cero, en caso contrario se denomina de primer orden.

$M$  Número total de reglas.

Los sistemas tipo Takagi-Sugeno son utilizado para sistemas neuro-difusos[14]. En [1] y [23] se les hace referencia como ANFIS (Adaptive Neuro Fuzzy Inference System) el cual es representado con una arquitectura de cinco capas. Esta arquitectura se muestra en la Figura 4.18, en donde:

**Capa 1** Todos los nodos son adaptivos (conjuntos difusos) cuyas salidas representan el grado de pertenencia de la entrada crisp  $x_i$  a los conjuntos difusos  $A_{i,j}$ .

$A_{i,j}$  representa la fuzzyficación de las entradas crisp) y  $Nx_i$  representa a la cantidad de conjuntos difusos correspondientes a la entrada  $x_i$ .

**Capa 2** Los nodos son fijos (i.e. no adaptivos) los cuales son equivalentes a aplicar el operador difuso AND (i.e. regla del mínimo o del producto) para generar un solo antecedente a la regla. El valor resultante  $\mu_{G^{i,j}}$  representa el grado de disparo de la regla.

**Capa 3** Los nodos también son fijos y la letra  $\mathcal{N}$  representa la normalización del grado de disparo de la capa anterior. La salida de esta capa está representado por:

$$\bar{\mu}_{G^{i,j}} = \frac{\mu_{G^{i,j}}}{\sum \mu_{G^{i,j}}} \quad (4.58)$$

**Capa 4** En esta capa todos los nodos son adaptivos. La salida de cada nodo es el producto del grado de disparo normalizado (capa anterior) y un polinomio de primer grado en función de las entradas crisp. Esta salida está representado por:

$$\bar{\mu}_{G^{i,j}} f^l(\mathbf{x}) = \bar{\mu}_{G^{i,j}} (m_0^l + m_1^l x_1 + \dots + m_a^l x_a)$$

**Capa 5** Representa la salida del sistema ANFIS. En esta capa se produce la suma de las salidas de la capa anterior resultando una expresión equivalente a (4.56).

Una limitación de este tipo de sistema es que sólo se cuenta con una salida[23]. Debido a esto, si el sistema a modelar tiene  $N$  salidas, se deberá de emplear  $N$  ANFIS o aplicar una configuración en la cual existan  $N$  capas paralelas de las capas 4 y 5.

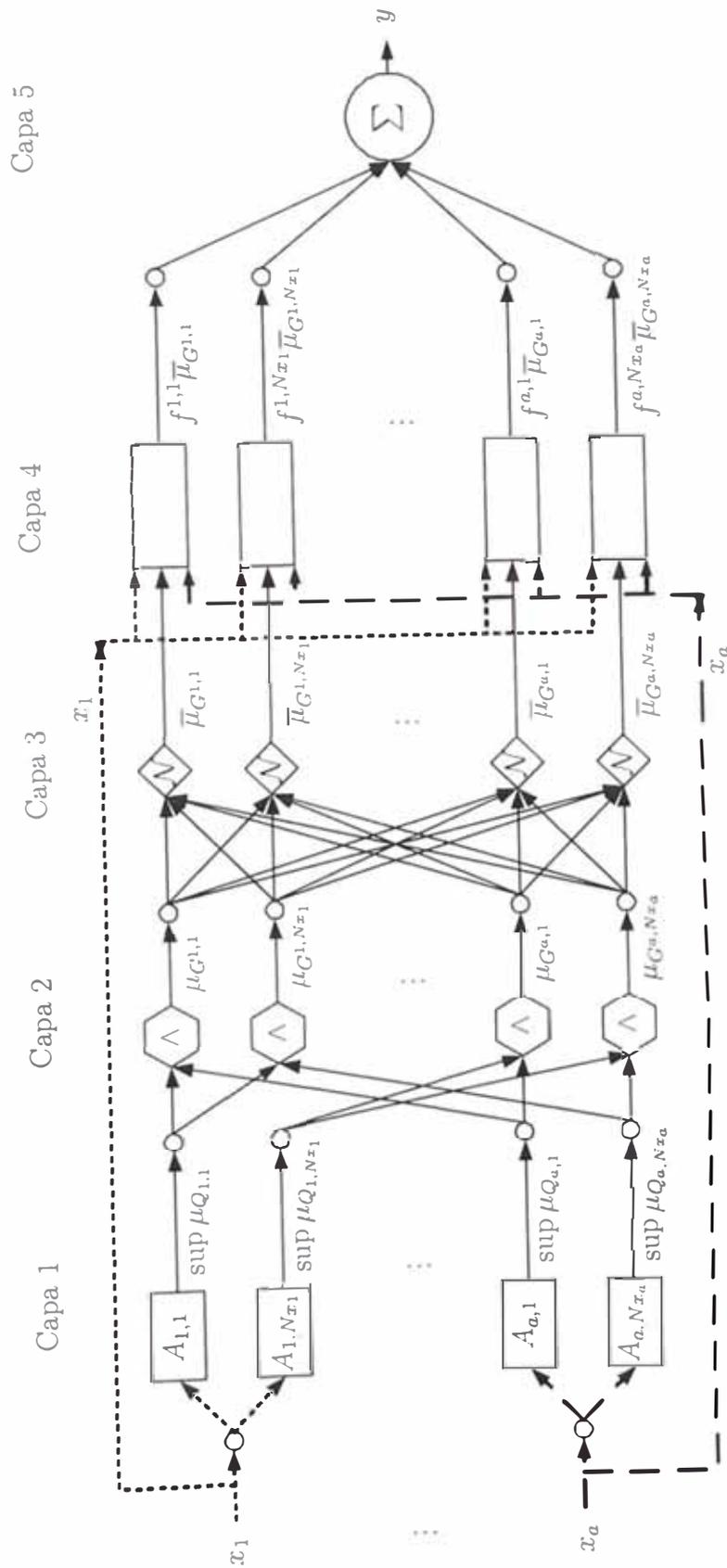


Figura 4.18: Esquema del sistema Takagi-Sugeno como ANFIS.

Una forma de entrenar este tipo de sistemas es por el método de *Mínimos Cuadrados Recursivos* (Recursive Least Square (RLS)) ([38], [20]) para obtener los parámetros del sistema (consecuentes) de primer orden. Para esto se requerirá datos de entrada y salida para poder “entrenar” el sistema.

El entrenamiento consistirá en obtener los parámetros (ver (4.57) ó la *Capa* 4 de la Figura 4.18) y para este trabajo los datos de entrada y salida que se han utilizado han sido obtenidos mediante el controlador del tipo Mamdani. Para esto se simuló un control del tipo Mamdani con fuzzyficación gaussiana en el producto y niveles de taza ( $\sigma = 1$  y  $\sigma = 6$  respectivamente), se utilizó la regla del mínimo como operador difuso e implicador y el método del centroide para la defuzzyficación. Los parámetros de entrada y salida para el entrenamiento han sido las entradas y salidas crisp del controlador respectivamente (i.e. después del pre-procesado y antes del pre-procesado, ver la Figura 4.14).

#### 4.7.6. Mínimos cuadrados recursivos (RLS)

El sistema Takagi-Sugeno ((4.56) y (4.57)) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$y = \frac{\sum_{l=1}^M m_0^l \mu_{G^l}(\mathbf{x})}{\sum_{l=1}^M \mu_{G^l}(\mathbf{x})} + \frac{\sum_{l=1}^M m_1^l \mu_{G^l}(\mathbf{x})}{\sum_{l=1}^M \mu_{G^l}(\mathbf{x})} + \frac{\sum_{l=1}^M m_2^l \mu_{G^l}(\mathbf{x})}{\sum_{l=1}^M \mu_{G^l}(\mathbf{x})} + \dots + \frac{\sum_{l=1}^M m_a^l \mu_{G^l}(\mathbf{x})}{\sum_{l=1}^M \mu_{G^l}(\mathbf{x})} \quad (4.59)$$

En forma matricial se puede expresar como:

$$y_{(z,1)} = \theta^T \xi \quad (4.60)$$

$$\theta_{(M(n+1),z)} = \begin{bmatrix} m_{1,0}^{(1)} & m_{1,0}^{(2)} & \dots & m_{1,0}^{(z)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M,0}^{(1)} & m_{M,0}^{(2)} & \dots & m_{M,0}^{(z)} \\ m_{1,1}^{(1)} & m_{1,1}^{(2)} & \dots & m_{1,1}^{(z)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M,1}^{(1)} & m_{M,1}^{(2)} & \dots & m_{M,1}^{(z)} \\ m_{1,2}^{(1)} & m_{1,2}^{(2)} & \dots & m_{1,2}^{(z)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M,2}^{(1)} & m_{M,2}^{(2)} & \dots & m_{M,2}^{(z)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n}^{(1)} & m_{1,n}^{(2)} & \dots & m_{1,n}^{(z)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M,n}^{(1)} & m_{M,n}^{(2)} & \dots & m_{M,n}^{(z)} \end{bmatrix} \quad \xi_{(M(n+1),1)} = \begin{bmatrix} \xi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \xi_M(\mathbf{x}) \\ x_1 \xi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_1 \xi_M(\mathbf{x}) \\ x_2 \xi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_2 \xi_M(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_a \xi_a(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_a \xi_M(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\xi_l(\mathbf{x}) = \frac{\mu_{G^l}(\mathbf{x})}{\sum_{l=1}^M \mu_{G^l}(\mathbf{x})}$$

donde:

$z$  Vector columna de las salidas del controlador de tamaño  $(z, 1)$ .

$\mu_{G^l}^i$  Grado de disparo de la regla  $l$  (ver (4.51)).

$\xi_l(\mathbf{x})$  Grado de disparo normalizado de la regla  $l$  (salida de la *Capa 3* de la Figura 4.18 y equivalente a (4.58)).

$z$  Número de salidas del controlador.

$n$  Número de entradas al controlador.

$M$  Número de reglas del controlador.

El método de *Mínimos Cuadrados Recursivos* (RLS) permite actualizar la matriz de parámetros  $\theta$  en forma recursiva (a diferencia del Batch Least Squares (BLS) el cual es aplicable para pequeña cantidad de data)[38].

La actualización o "entrenamiento" de la matriz  $\theta$  se realiza mediante:

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left( \mathbb{I} - P(k-1)\xi^k (\lambda + (\xi^k)^T P(k-1)\xi^k)^{-1} (\xi^k)^T \right) P(k-1) \quad (4.61)$$

$$\theta(k) = \theta(k-1) + P(k)\xi^k (y^k - (\xi^k)^T \theta(k-1)) \quad (4.62)$$

donde:

$k$  es el índice de tiempo ( $0 \leq k \leq N$ ).

$N$  número total de iteraciones (se utilizaron 201).

$P(k)$  Matriz cuadrada de tamaño  $(M(n+1), M(n+1))$ .

$\mathbb{I}$  Matriz identidad de tamaño  $(M(n+1), M(n+1))$ .

**Parámetros iniciales:**

$$\theta(0) = \mathbf{0}$$

$$P(k) = a\mathbb{I}$$

$$a = 10000 \quad \text{Valor grande positivo}$$

$$\lambda = 1 \quad \text{Factor de olvido}$$

## 4.8. Discusión

En este capítulo se ha expuesto los tipos de controlador a utilizar (i.e. Mamdani y Takagi-Sugeno) conjuntamente con esquemas que tratan de explicar en forma simple los mecanismos de inferencia respectivos (ver Figuras 4.17 y 4.18). Así mismo se trata de hacer una comparación entre los operadores difusos (incluido el Booleano) mediante gráficas.

Sobre el mecanismo de inferencia (para el sistema tipo Mamdani) se ha preferido utilizar las expresiones (4.49) y (4.51) en vez de crear arreglos para las relaciones difusas ( $R(x, y)$  en (4.27)) debido a su simplicidad en la implementación.

Se muestra también los procesos de fuzzyficación y diferentes métodos de defuzzyficación de variables crisp.

Se plantea las variables de entrada (22) y salida (18) del controlador con sus respectivos conjuntos difusos (cinco para cada variable lingüística exceptuando para los distribuidores de carga que se determinaron solamente tres). Estos

conjuntos difusos se han obtenido empíricamente y se basaron en conjuntos triangulares y trapezoidales. Aunque se han utilizado nombres con “Muy” esto no significa que se hayan aplicado *modificadores* que implicarían elevar a un exponente (mayor a uno), si no que simplemente se definieron conjuntos difusos en forma independiente.

## Capítulo 5

# Simulación del control

### 5.1. Condiciones iniciales

Set de trituradoras terciarias 11mm (las seis trituradoras).

Set de trituradoras secundarias

$MP1 \rightarrow 32mm$

$MP2 \& MP3 \rightarrow 38mm.$

Velocidad de alimentadores Fueron los siguientes:

Pan Feeder 2A	25	Pan Feeder 2B	23	FEB003	19
Pan Feeder 2B	25	Pan Feeder 3B	23	FEB004	19

Distribuidores de carga Fueron los siguientes:

Línea A	20	Línea B	70	Línea C	60
---------	----	---------	----	---------	----

Niveles de taza Tazas vacías (0%).

**Work Index** Valor inicial es de  $13,5kW - h/tc$  pero variable en un 5% respecto al valor en el instante anterior.

**Granulometría del alimento** Sigue una distribución Gamma con Medias y Coeficientes de Variación variables en un 5% respecto a los valores en el instante anterior, donde los valores iniciales están dados por los parámetros calculados estadísticamente (i.e. Columna *E* de las Tablas B.7, B.8 y B.9.

**Conversión de milímetros de abertura del CSS por diente** Se utilizó un factor de  $0,1460mm/diente$ , el cual está basado en un CSS igual a media pulgada al abrir 87 dientes (dato tomado en planta para trituradoras terciarias). Este factor se ha asumido también para las trituradoras secundarias.

## 5.2. Set Points

**Set Point del producto** Se ha tomado una función cuadrada según (Tomando al  $\% + 1/2$ " como factor de control):

$$S.P. = \begin{cases} 15 & ; 0 \leq t < 50 \\ 20 & ; 50 \leq t < 100 \\ 15 & ; 100 \leq t < 150 \\ 20 & ; 150 \leq t < 200 \end{cases} \quad (5.1)$$

**Rango de amperaje deseado de trabajo** Para las trituradoras de 700 *HP* (i.e. *HP1*, *HP2*, *HP3* y *HP4*) el rango fue de 75A – 85A y para las trituradoras de 800*HP* (i.e. *MP1*, *MP2*, *MP3*, *HP5* y *HP6*) el rango fue de 85A – 95A.

**Nivel de tazas de las trituradoras** Se estableció como set point un valor del 70 %.

## 5.3. Reglas utilizadas (tipo Mamdani)

Las reglas utilizadas han sido obtenidas empíricamente o por "sentido común". Para simplificar las reglas se ha tomado un solo antecedente, es decir, se ha obviado la elaboración de reglas complejas multi-antecedentes. Estas reglas pueden ser representadas también como *Memorias Asociativas Difusas* (Fuzzy Associative Memory - FAM) que simplemente realiza el mapeo de conjuntos difusos a otros conjuntos difusos[19].

La Tabla 5.1 muestra la representación de los conjuntos difusos (para entradas y salidas) mediante números arábigos con el fin de simplificar la notación de las reglas de la Tabla 5.2.

La notación de las columnas de la Tabla 5.2 está dado por:

*a* Producto.Error

*b* i.Amp.Error Amperajes de las trituradoras secundarias.

*c* i.Amp.Error Amperajes de las trituradoras terciarias (*HP1*, *HP3* y *HP5*).

*d* ii.Amp.Error Amperajes de las trituradoras terciarias (*HP2*, *HP4* y *HP6*).

Tabla 5.1: Representación de los conjuntos difusos para las FAM mediante números. *i*: Producto.Error, *ii*: i.Amp.Error, *iii*: Linea.NTaza.Error, *iv*: i.NTaza.Error, *v*: Set de las trituradoras, *vi*: Distribuidores de carga, *vii*: Velocidad de los alimentadores.

	1	2	3	4	5
<i>i</i>	MuyFino	Fino	Adecuado	Grueso	MuyGrueso
<i>ii</i>	MuyBajo	Bajo	Adecuado	Alto	MuyAlto
<i>iii</i>	MuyNegativo	Negativo	Cero	Positivo	MuyPositivo
<i>iv</i>	MuyBajo	Bajo	Adecuado	Alto	MuyAlto
<i>v</i>	RapCerrar	Cerrar	Mantener	Abrir	RapAbrir
<i>vi</i>	Izquierda	Mantener	Derecha	—	—
<i>vii</i>	Disminuir	DismLenta	Mantener	AumLenta	Aumentar

*e* Linea.NTaza.Error para cada línea.

*f* i.NTaza.Error Niveles de taza de las trituradoras secundarias.

*g* i.NTaza.Error Niveles de taza de las trituradoras terciarias (*HP1*, *HP3* y *HP5*).

*h* ii.NTaza.Error Niveles de taza de las trituradoras terciarias (*HP2*, *HP4* y *HP6*).

*A* Sets de las trituradoras secundarias.

*B* Sets de las trituradoras terciarias (*HP1*, *HP3* y *HP5*).

*C* Sets de las trituradoras terciarias (*HP2*, *HP4* y *HP6*).

*D* Distribuidores de carga para cada línea.

*E* Velocidad de alimentadores.

Por ejemplo, la *Regla1* indica lo siguiente:

Si el producto es **Muy Fino** entonces **Abrir Rápido** el **CSS** de la trituradora **secundaria** y de las dos **terciarias**.

Tabla 5.2: Reglas generales (tipo Mamdani).

Regla	Entradas								Salidas				
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
1	1	0	0	0	0	0	0	0	5	5	5	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0	4	5	5	0	0
3	3	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
4	4	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	0	0
5	5	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5
7	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	4
8	0	3	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	3
9	0	4	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	2
10	0	5	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	1
11	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
12	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
13	0	0	3	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0
14	0	0	4	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0
15	0	0	5	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0
16	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0
17	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0
18	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	3	0	0
19	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	4	0	0
20	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	4	0	0
21	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0
22	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	3	0
23	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	2	0
24	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	1	0
25	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	1	0
26	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
27	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4
28	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	3
29	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	2
30	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	1
31	0	0	0	0	0	0	1	0	5	0	0	0	5
32	0	0	0	0	0	0	2	0	4	0	0	0	4
33	0	0	0	0	0	0	3	0	3	0	0	0	3
34	0	0	0	0	0	0	4	0	2	0	0	0	2
35	0	0	0	0	0	0	5	0	1	0	0	0	1
36	0	0	0	0	0	0	0	1	5	0	0	0	5
37	0	0	0	0	0	0	0	2	4	0	0	0	4
38	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	3
39	0	0	0	0	0	0	0	4	2	0	0	0	2
40	0	0	0	0	0	0	0	5	1	0	0	0	1

## 5.4. Fuzzyficación Singleton

Se simulará el control asumiendo que no existen perturbaciones, es decir, la granulometría de la alimentación y el Work Index permanecen constantes.

### 5.4.1. Condiciones para la simulación

Sistema de Control Tipo Mamdani

Fuzzyficación Singleton.

Operador difuso Regla del mínimo.

Implicación Regla del mínimo.

Defuzzyficación Centroide

### 5.4.2. Resultados

Se observa que se logra el control en el tamaño del producto y niveles de taza, aunque con una amplia dispersión sobre los Set Point (ver Figuras 5.1 y 5.7). Con respecto a los amperajes, estas se mantienen debajo del límite máximo establecido aunque no se logra operar en el rango deseado (ver Figuras 5.8(a), 5.8(b) y 5.8(c)). Respecto a los CSS de las trituradoras, se observa claramente su variación al variar el set point en el producto (ver Figura 5.4). Se observa en la Figura 5.5 que los distribuidores de carga se mantienen en un valor promedio de 50, aunque esto es debido al modelo matemático utilizado (ver la sección 3.6). En la Figura 5.6 se observa la tendencia a aumentar el flujo cuando el set point del producto es mayor, es decir, un producto más grueso y una mayor abertura del CSS.

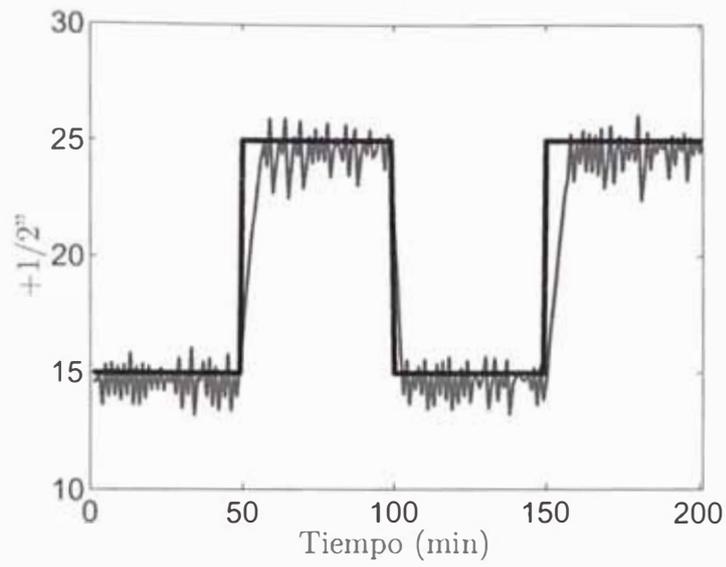


Figura 5.1: Fuzzyficación singleton: Granulometría del producto (+1/2").

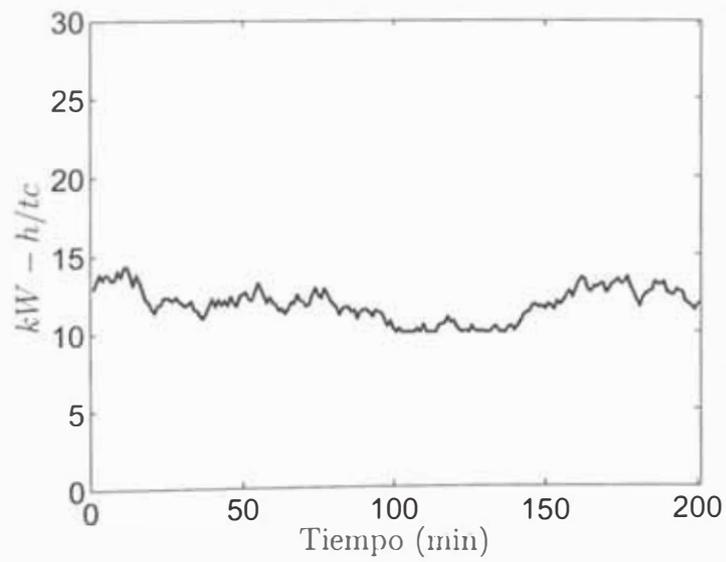


Figura 5.2: Fuzzyficación singleton: Work Index.

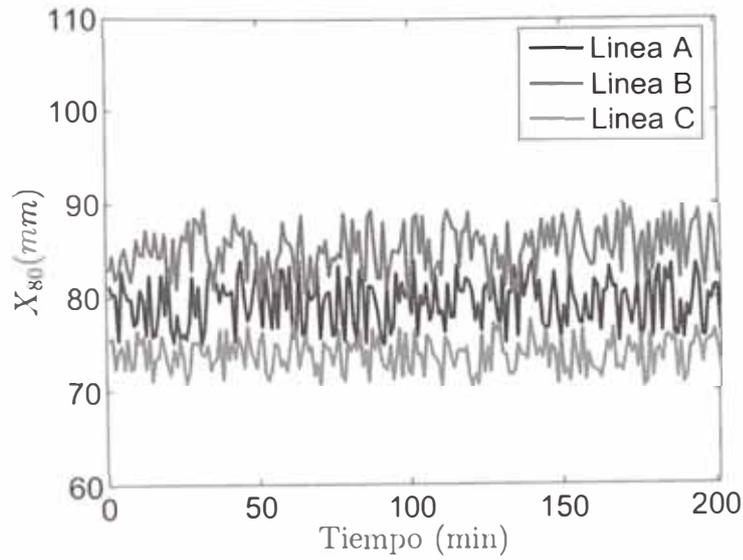


Figura 5.3: Fuzzyfización singleton: Tamaños  $X_{80}$  del alimento a la planta (por cada línea).

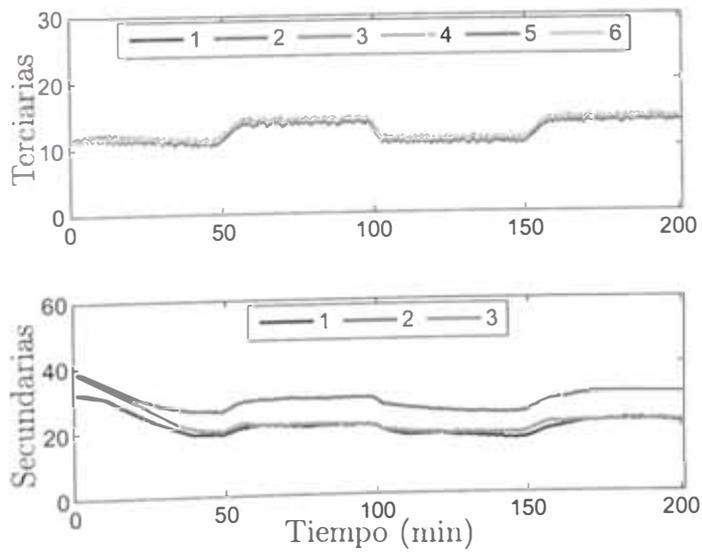


Figura 5.4: Fuzzyfización singleton: Variación del Closed Side Set (CSS).

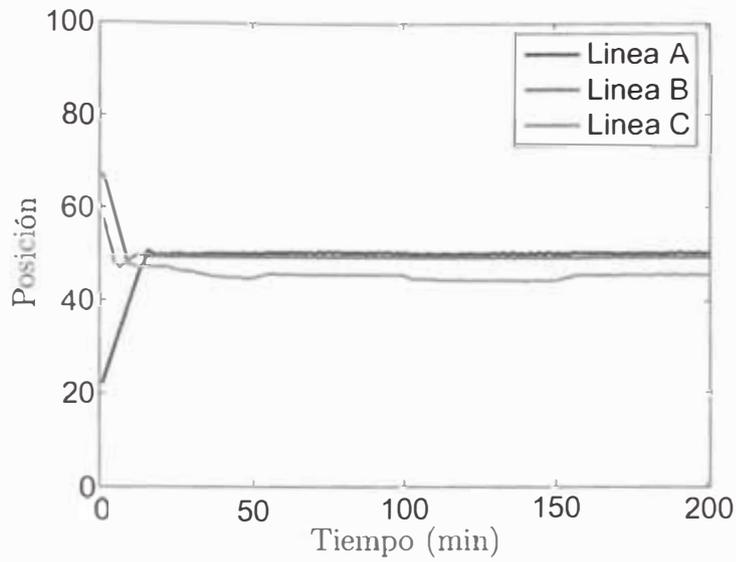


Figura 5.5: Fuzzyficación singleton: Posición del distribuidor de carga.

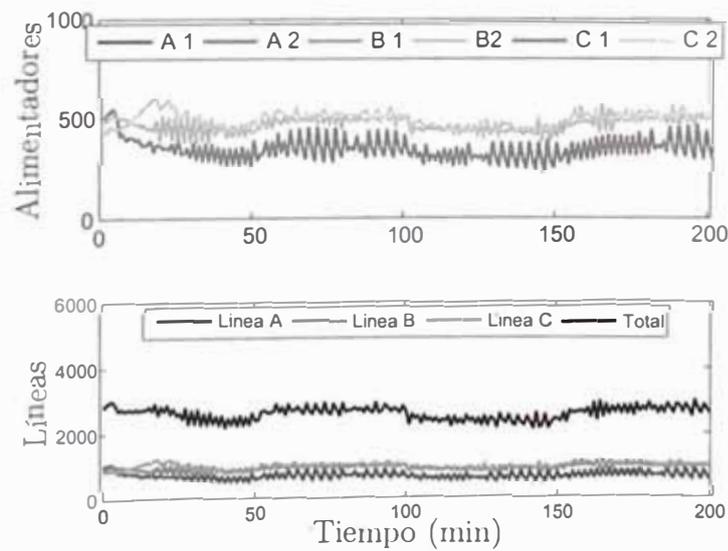


Figura 5.6: Fuzzyficación singleton: TMH alimentadas por cada alimentador y por líneas.

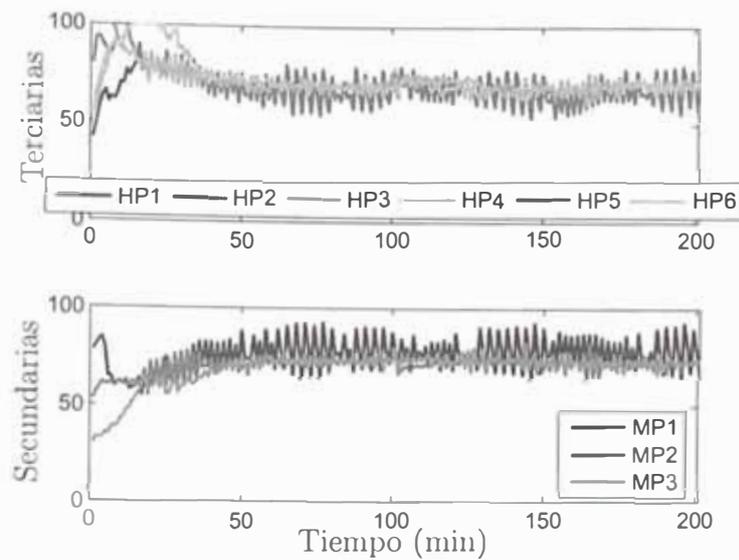


Figura 5.7: Fuzzyficación singleton: Niveles de taza de las trituradoras.

## 5.5. Fuzzyficación No Singleton del tamaño del producto

### 5.5.1. Condiciones para la simulación

Sistema de Control Tipo Mamdani

Fuzzyficación No-Singleton (Gaussiana).

Producto  $\sigma = 0,5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\sigma = 3$  y  $\sigma = 4$ .

Operador difuso Regla del mínimo.

Implicación Regla del mínimo.

Defuzzyficación Centroide

### 5.5.2. Resultados

Puede observarse en la Figura 5.9 que aplicar una fuzzyficación no singleton (i.e. Fuzzyficación Gaussiana) ayuda a atenuar la dispersión en el control, lo que significa una mejora en la calidad del producto obtenido (i.e. más uniforme, ver

Figura 5.9(c)). Por otro lado, si se aumenta el valor de  $\sigma$  en forma excesiva (i.e.  $\sigma > 2$ ) el sistema no logra a controlar el tamaño del producto.

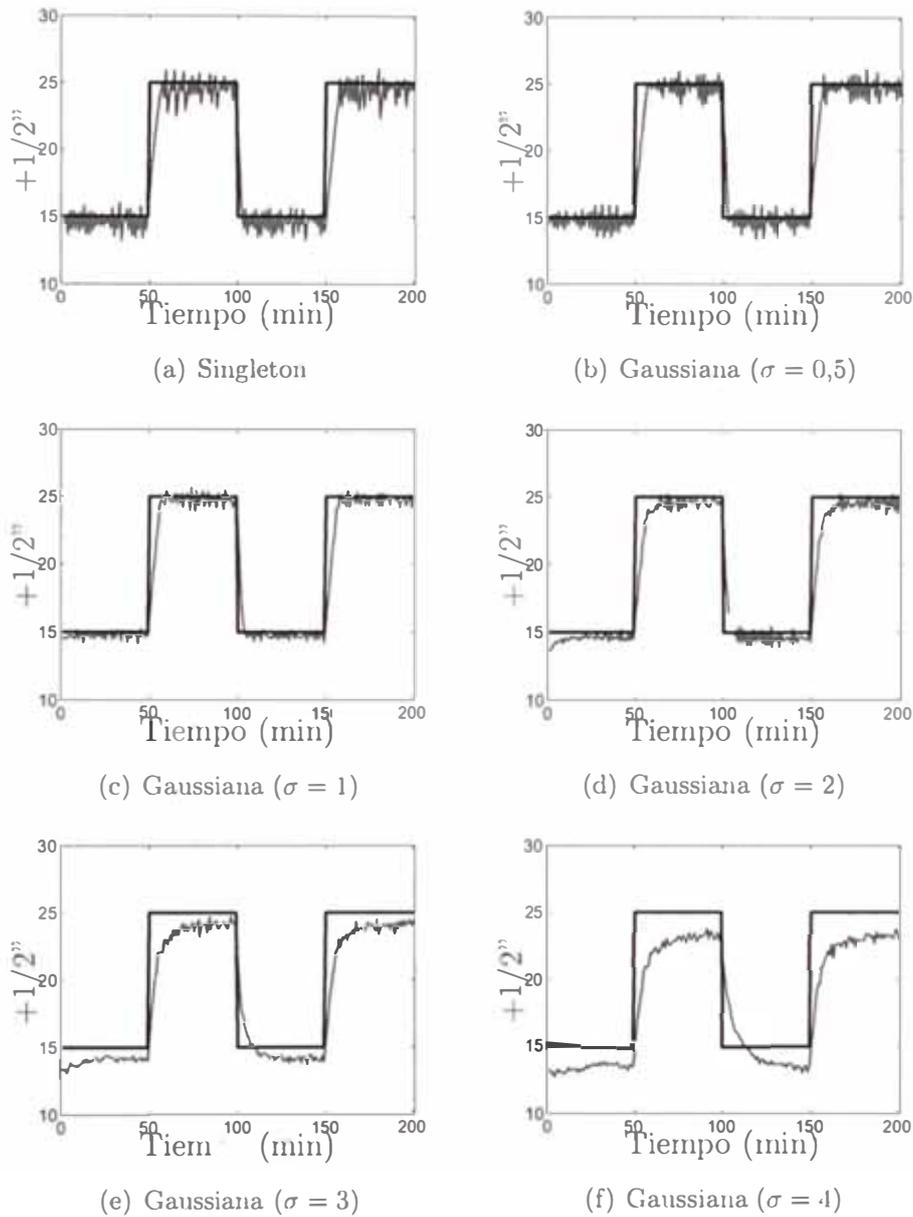


Figura 5.9: Comparación entre la Fuzzyficación Singleton y No-Singleton (Gaussiana) para el tamaño del producto.

## 5.6. Fuzzyficación No Singleton a los niveles de taza

### 5.6.1. Condiciones para la simulación

Sistema de Control Tipo Mamdani

Fuzzyficación No-Singleton (Gaussiana).

Producto  $\sigma = 1$

Niveles de taza  $\sigma = 3, \sigma = 6, \sigma = 12, \sigma = 24$  y  $\sigma = 48$ .

Operador difuso Regla del mínimo.

Implicación Regla del mínimo.

Defuzzyficación Centroide

### 5.6.2. Resultados

Al igual que en la fuzzyficación No-Singleton del tamaño del producto, si se aplica a los niveles de taza, estos disminuirán su dispersión (baja variación) pero si se excede en el valor  $\sigma$  (i.e.  $\sigma > 12$ ) no se logrará el control (ver la Figura 5.10).

## 5.7. Variando la forma de implicación

### 5.7.1. Condiciones para la simulación

Sistema de Control Tipo Mamdani

Fuzzyficación No-Singleton (Gaussiana).

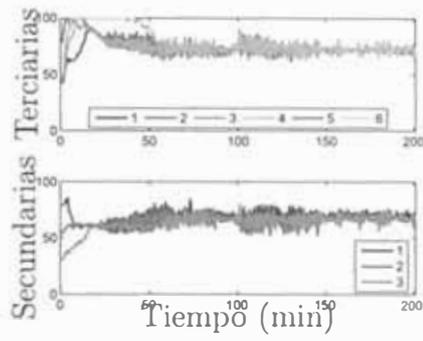
Producto  $\sigma = 1$

Niveles de taza  $\sigma = 6$

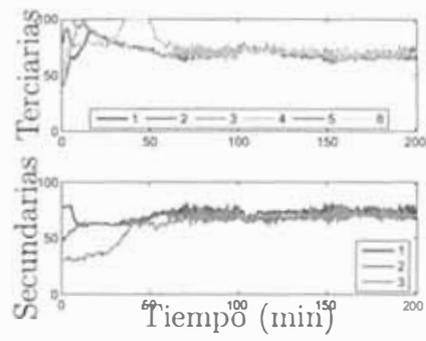
Operador difuso Regla del mínimo

Implicación Se utilizaron los siguientes métodos:

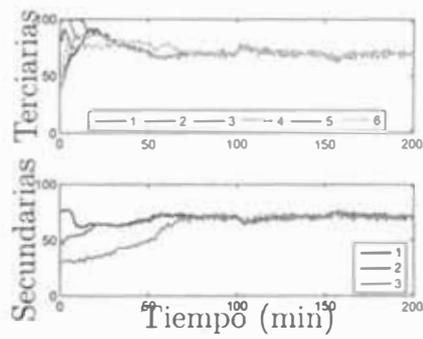
- Regla del mínimo



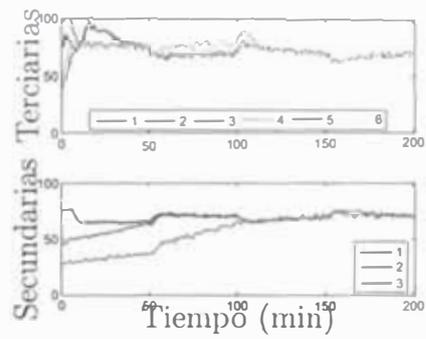
(a) Singleton



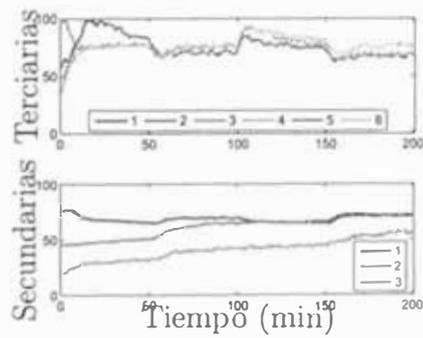
(b) Gaussiana ( $\sigma = 3$ )



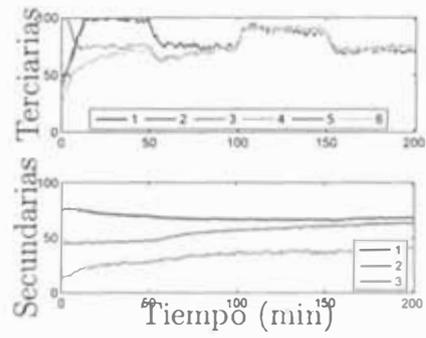
(c) Gaussiana ( $\sigma = 6$ )



(d) Gaussiana ( $\sigma = 12$ )

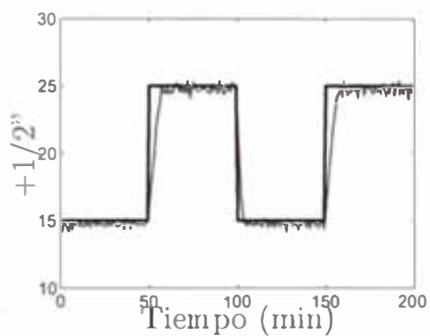


(e) Gaussiana ( $\sigma = 24$ )

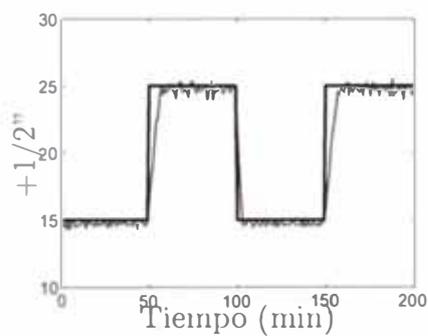


(f) Gaussiana ( $\sigma = 48$ )

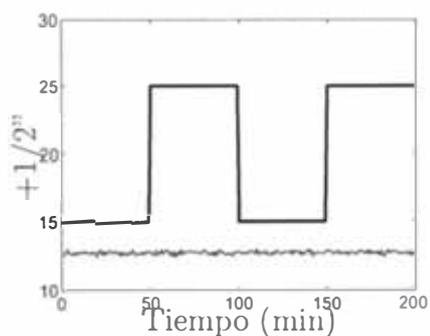
Figura 5.10: Comparación entre la Fuzzyficación Singleton y No-Singleton (Gaussiana) para los niveles de taza.



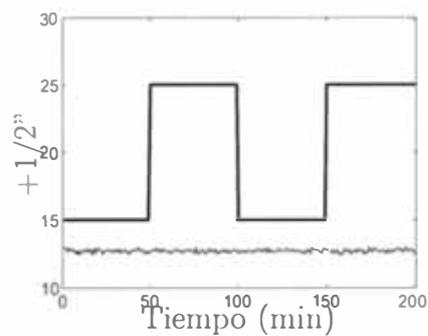
(a) Regla del Minimo



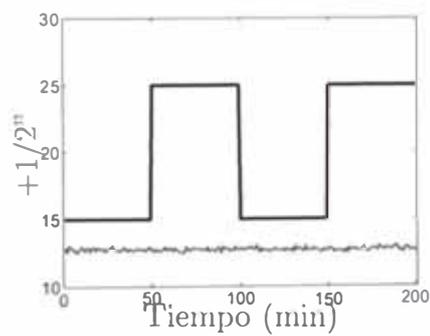
(b) Regla del Producto



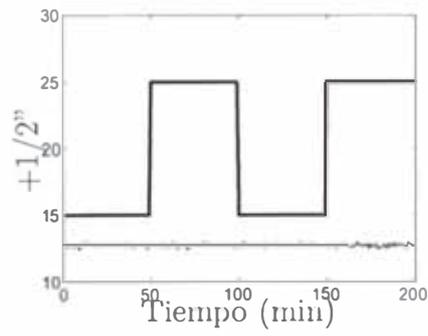
(c) Regla basada en la Implicacion



(d) Regla Max-Min



(e) Regla Booleana

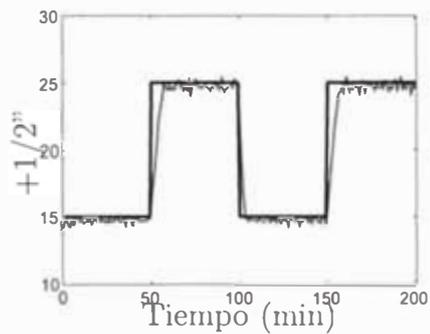


(f) Regla de Goguen

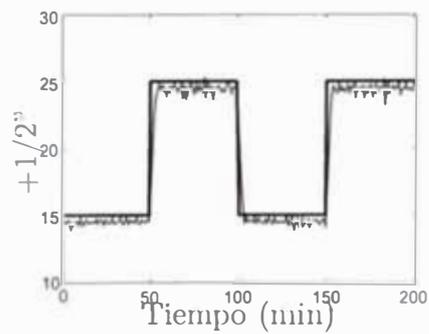
Figura 5.11: Comparación de las formas de realizar la implicación.

## 5.8.2. Resultados

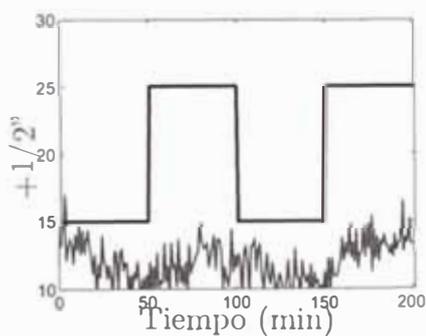
Se observa en la Figura 5.12 que sólo el método del centroide y el del bisector logran el control del producto (no se evaluaron *Height Defuzzyfier* ni *Modified Height Defuzzyfier*), aunque para este caso, el método del centroide resulta más cercano a los Set Points establecidos.



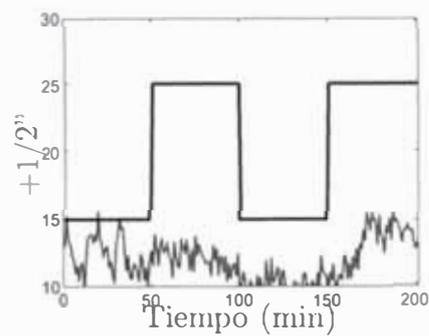
(a) Centroide



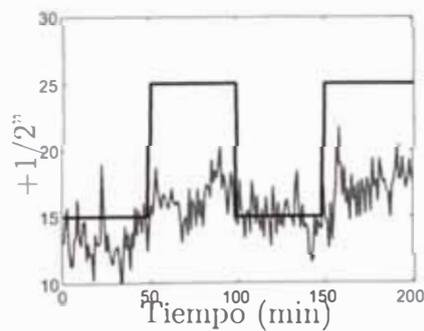
(b) Bisector



(c) Media del rango máximo (mom)



(d) Menor del rango máximo (som)



(e) Mayor del rango máximo (lom)

Figura 5.12: Comparación de los métodos de defuzzyficación

## 5.9. Sistema tipo Takagi-Sugeno. Uso de mam2sug

### 5.9.1. Condiciones para la simulación

Sistema de Control Tipo Takagi-Sugeno

Conversión De tipo Mamdani a Takagi-Sugeno mediante la instrucción `mam2sug` (MATLAB 7,0).

Fuzzyficación No-Singleton (Gaussiana).

Producto  $\sigma = 1$

Niveles de taza  $\sigma = 6$

Operador difuso Regla del mínimo

Tiempo total de simulación  $2000min$

Set Point del producto Se utilizó la siguiente expresión:

$$S.P. = \begin{cases} 15 & ; 0 \leq t < 500 \\ 20 & ; 500 \leq t < 1000 \\ 15 & ; 1000 \leq t < 1500 \\ 20 & ; 1500 \leq t < 2000 \end{cases}$$

### 5.9.2. Resultados

La aplicación de la instrucción `mam2sug` produjo un sistema de orden zero cuyas constantes se presentan en las Tablas 5.3, 5.4 y 5.5. En la Figura 5.13 se observa que se logra el control con una mayor dispersión que en el sistema tipo Mamdani, además de requerirse tiempos más largos (el tiempo total de simulación fué de  $2000(min)$ , es decir, diez veces más que en el sistema tipo Mamdani).

## 5.10. Sistema tipo Takagi-Sugeno. Uso de RLS

### 5.10.1. Condiciones para la simulación

Sistema de Control Tipo Takagi-Sugeno

Tabla 5.3: Constantes para los CSS de las trituradoras en el sistema Takagi-Sugeno.

Conjunto Difuso	Constante ( $m_0^T$ )
RapCerrar	= -6,7128
Cerrar	= -3,0012
Mantener	= 0,0000
Abrir	= 3,0012
RapAbrir	= 6,7128

Tabla 5.4: Constantes para los Distribuidores de Carga en el sistema Takagi-Sugeno.

Conjunto Difuso	Constante ( $m_0^T$ )
Izquierda	= -2,4653
Mantener	= 0,0000
Derecha	= 2,4653

Tabla 5.5: Constantes para la Velocidad de Alimentación en el sistema Takagi-Sugeno.

Conjunto Difuso	Constante ( $m_0^T$ )
Disminuir	= -4.4752
DismLenta	= -2.0008
Mantener	= 0.0000
AumLenta	= 2.0008
Aumentar	= 4.4752

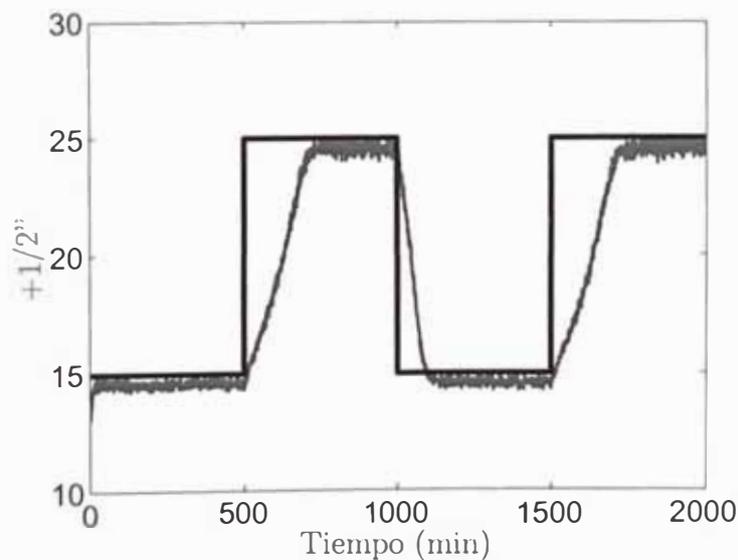


Figura 5.13: Sistema Takagi-Sugeno (mam2sug): Granulometría del producto (+1/2'').

**Conversión** De tipo Mamdani a Takagi-Sugeno mediante el *método de mínimos cuadrados recursivos*.

**Fuzzyficación** No-Singleton (Gaussiana).

**Producto**  $\sigma = 1$

**Niveles de taza**  $\sigma = 6$

**Operador difuso** Regla del mínimo

**Tiempo total de simulación** 200min

**Set Point del producto** Se utilizó la siguiente expresión:

$$S.P. = \begin{cases} 15 & ; 0 \leq t < 50 \\ 20 & ; 50 \leq t < 100 \\ 15 & ; 100 \leq t < 150 \\ 20 & ; 150 \leq t < 200 \end{cases}$$

### 5.10.2. Resultados

Para obtener los consecuentes mediante la instrucción `mam2sug` (MATLAB 7,0) o por Mínimos Cuadrados Recursivos (RLS) se requiere haber definido el controlador tipo Mamdani. La ventaja que representa utilizar RLS es la reducción del tiempo requerido para controlar (en simulación).

El método RLS arroja un sistema de primer orden, mientras que la instrucción `mam2sug` arroja un sistema de orden zero. Una inconveniencia del RLS puede ser la cantidad grande de parámetros a estimar (en este caso la matriz de parámetros  $\theta$  tiene un tamaño (2760, 18) es decir, se deberá de estimar 49680 parámetros).

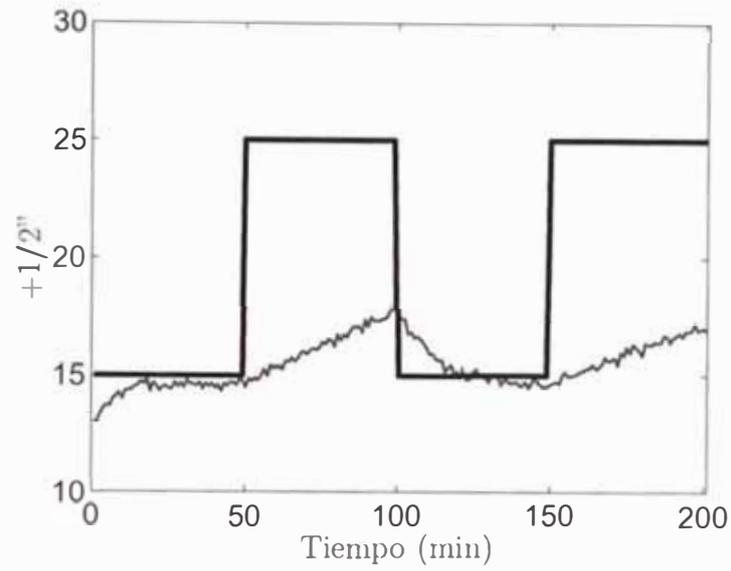
Así mismo, se observa que se logra controlar los niveles de taza y mantener los amperajes debajo del límite máximo.

## 5.11. Manteniendo el Set Point en $\% + 1/2 = 15$

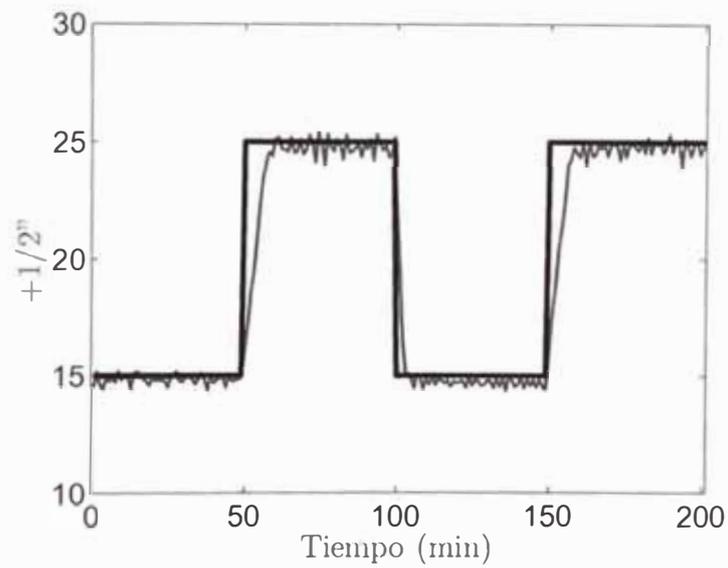
### 5.11.1. Condiciones para la simulación

**Sistema de Control** Tipo Mamdani

**Fuzzyficación** No-Singleton (Gaussiana).



(a) mam2sug



(b) RLS

Figura 5.14: Sistema Takagi-Sugeno: Comparación de la granulometría del producto ( $+1/2''$ ) utilizando mam2sug y RLS para iguales set points (tiempo de simulación = 200min).

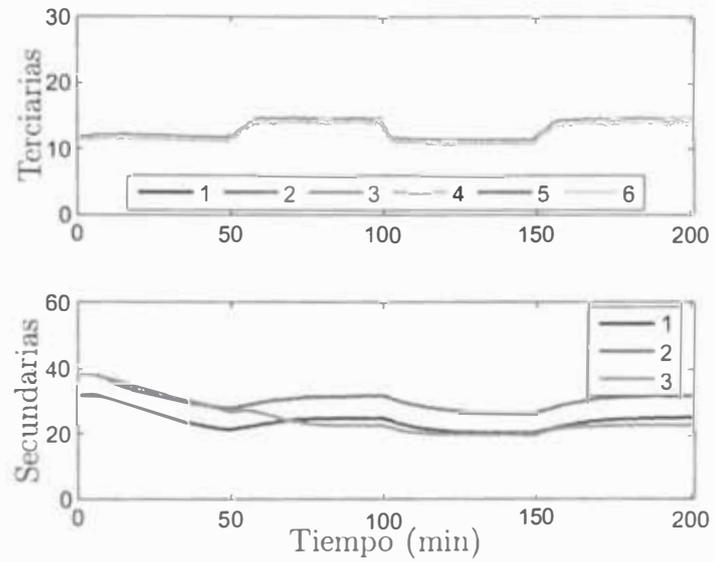


Figura 5.15: Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Variación del Closed Side Set (CSS).

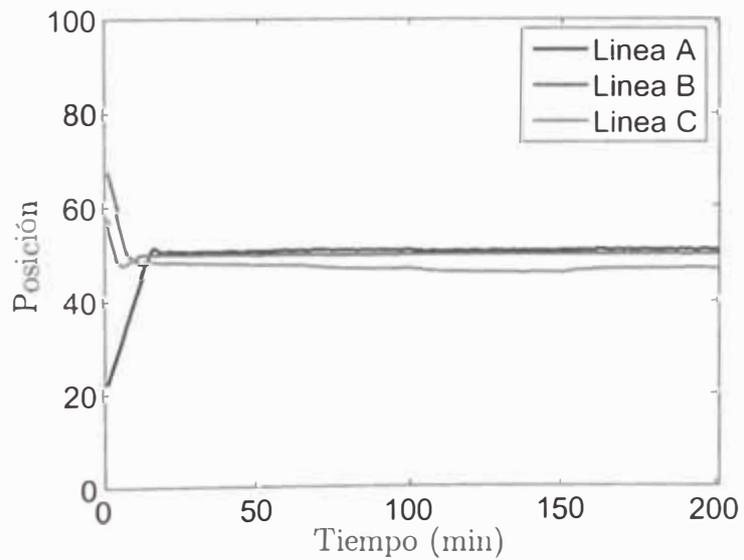


Figura 5.16: Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Posición del distribuidor de carga.

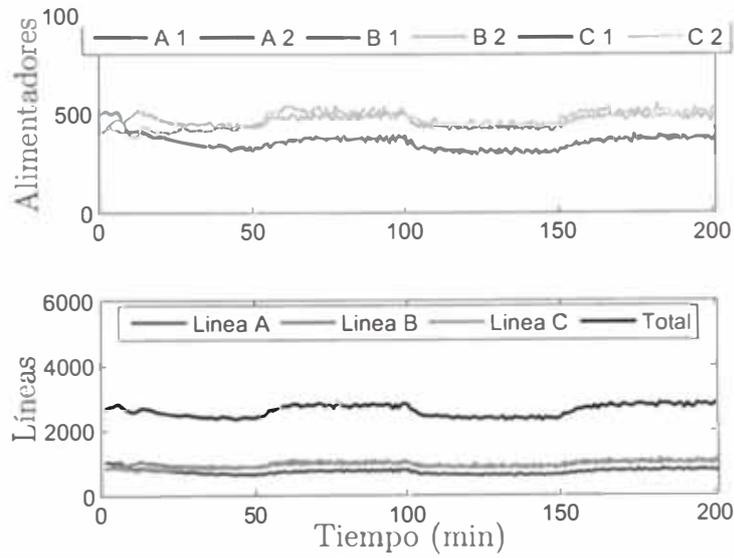


Figura 5.17: Sistema Takagi-Sugeno (RLS): TMH alimentadas por cada alimentador y por líneas.

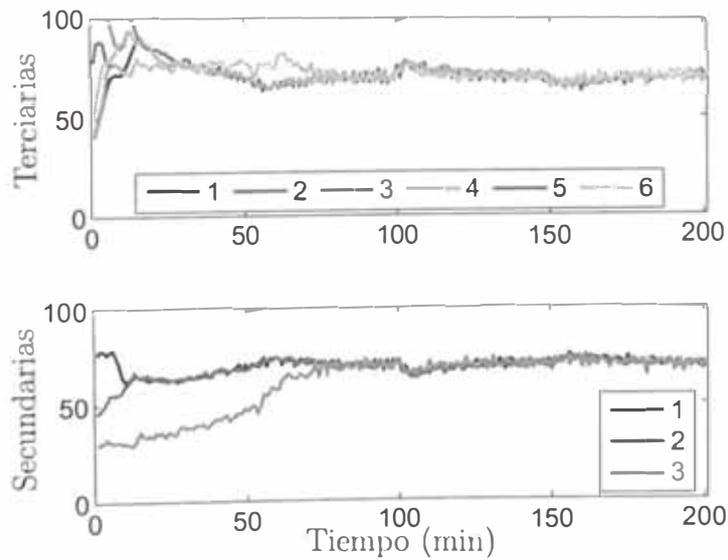
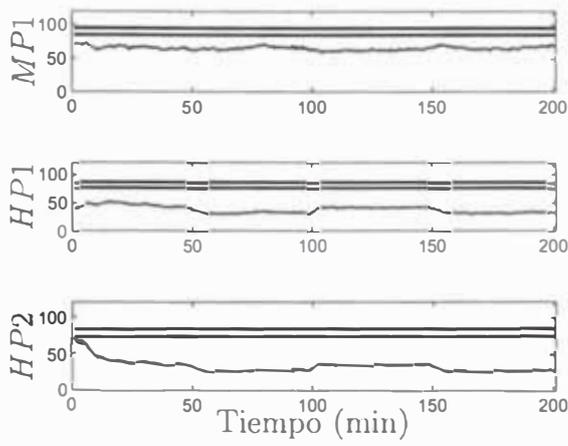
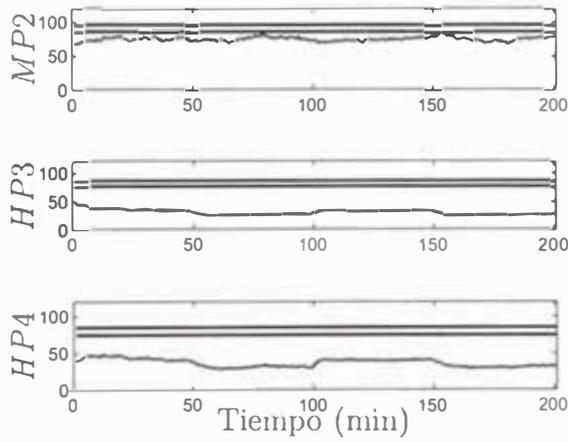


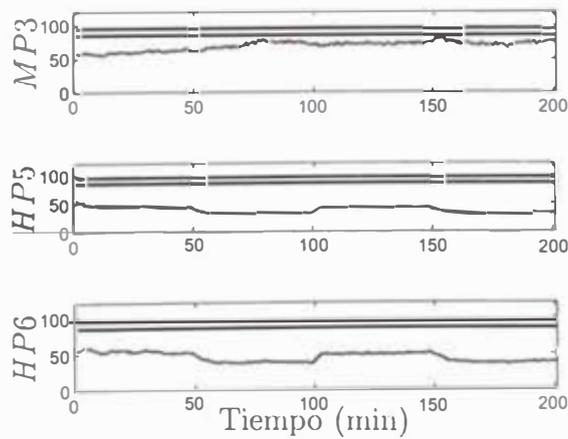
Figura 5.18: Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Niveles de taza de las trituradoras.



(a) Línea A



(b) Línea B



(c) Línea C

Figura 5.19: Sistema Takagi-Sugeno (RLS): Amperajes en las tres líneas

Producto  $\sigma = 1$

Niveles de taza  $\sigma = 6$

Operador difuso Regla del mínimo

Tiempo total de simulación 200min

Set Point del producto Fijo en  $\% + 1/2 = 15$  (granulometría deseada en la unidad de Toquepala de Southern Perú Copper Corporation).

### 5.11.2. Resultados

En esta simulación se trata de ejecutar el control para el Set Point fijado en la unidad de Toquepala de SPCC (i.e.  $\% + 1/2 = 15$ ). Se observa que se logra el control sin sobrecargar la trituradora. Así mismo se observa que las aberturas de las trituradoras (CSS) se mantienen constantes al estabilizar la planta, dichos valores se presentan en las Tablas 5.6 y 5.7.

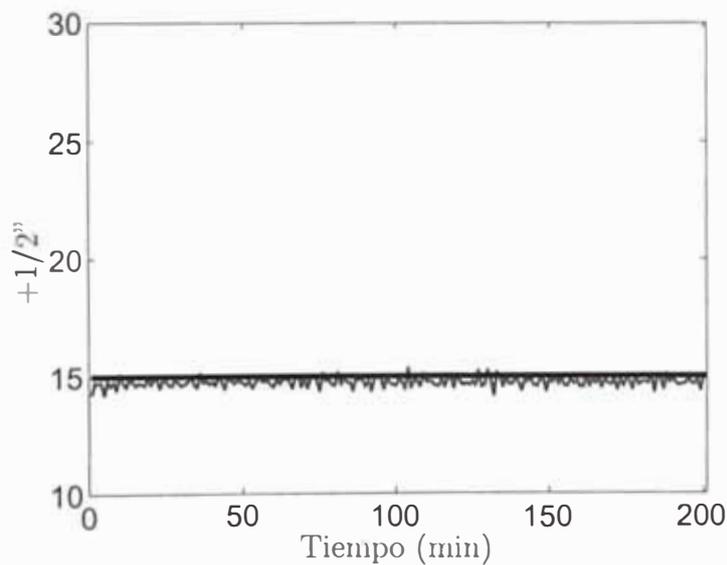


Figura 5.20: Set Point de la granulometría  $\% + 1/2 = 15$ : Granulometría del producto ( $+1/2''$ ).

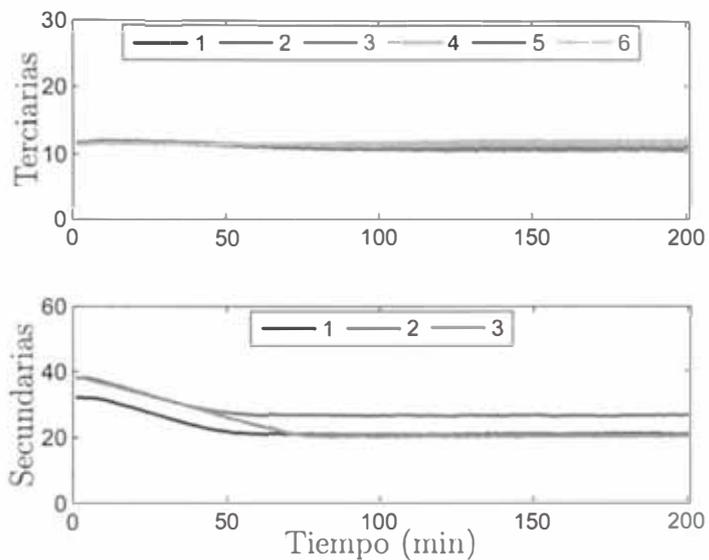


Figura 5.21: Set Point de la granulometria  $\% + 1/2 = 15$ : Variación del Closed Side Set (CSS).

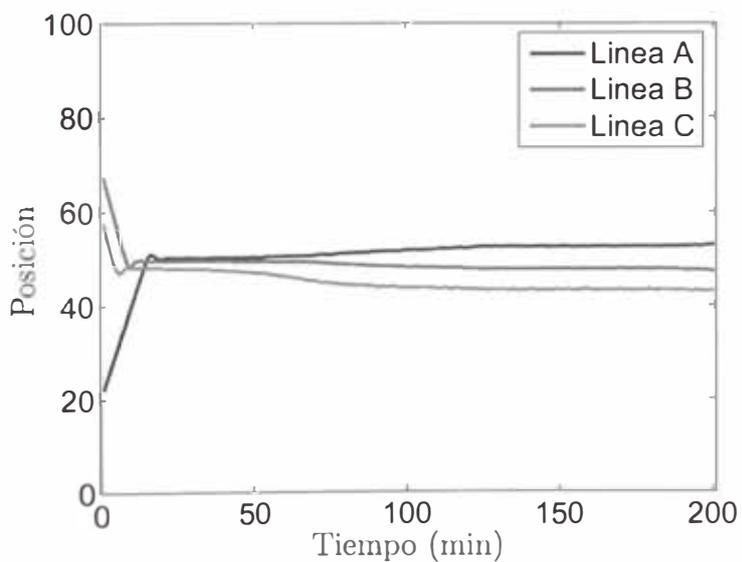


Figura 5.22: Set Point de la granulometria  $\% + 1/2 = 15$ : Posición del distribuidor de carga.

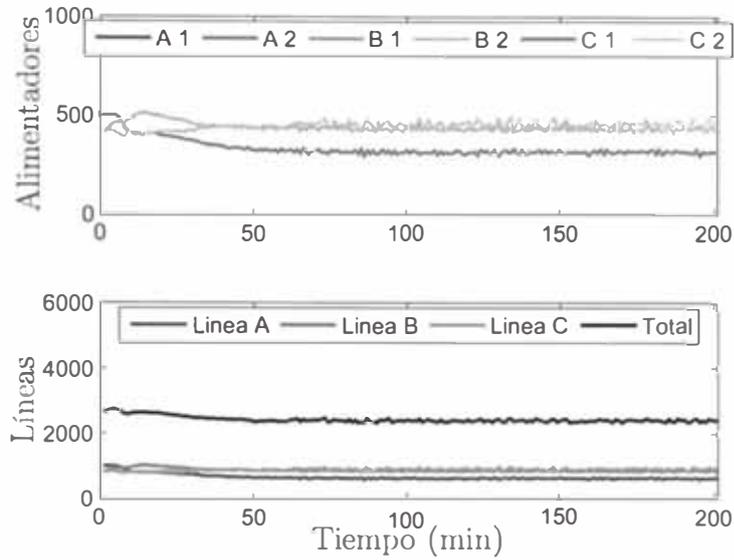


Figura 5.23: Set Point de la granulometría  $\% + 1/2 = 15$ : TMH alimentadas por cada alimentador y por líneas.

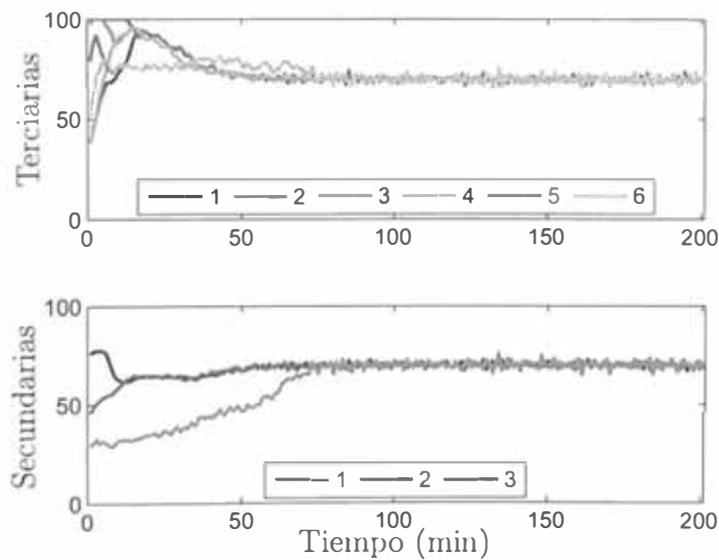
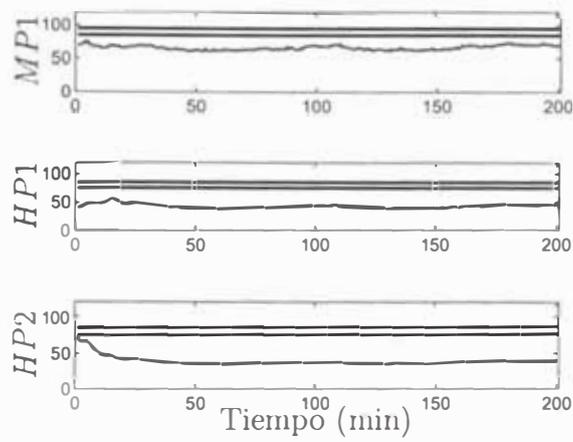
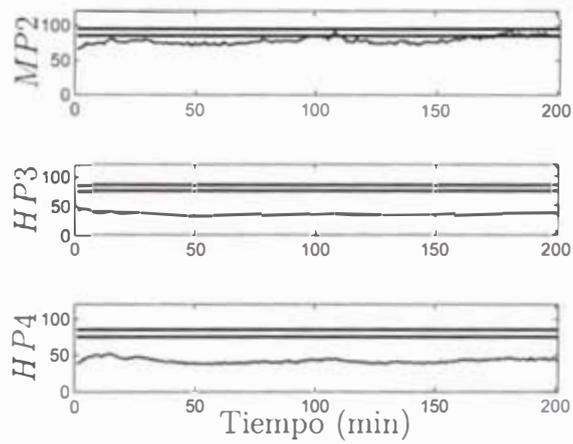


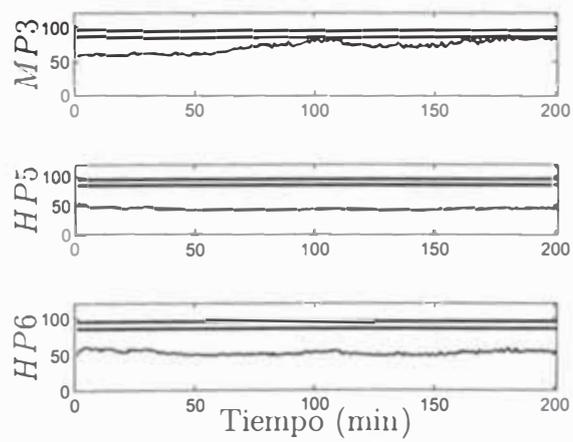
Figura 5.24: Set Point de la granulometría  $\% + 1/2 = 15$ : Niveles de taza de las trituradoras.



(a) Línea A



(b) Línea B



(c) Línea C

Figura 5.25: Set Point de la granulometría  $\% + 1/2 = 15$ : Amperajes en las tres líneas

Tabla 5.6: Promedio del CSS de las trituradoras secundarias para un Set Point del producto constante (i.e.  $\% + 1/2 = 15$ ). Se tomaron los 100 últimos puntos de la simulación.

	MP1	MP2	MP3
Por simulación (mm)	20.37	26.23	19.75
Por simulación (pulg)	0.80	1.03	0.78
Operación normal (mm)	32.00	38.00	38.00

Tabla 5.7: Promedio del CSS de las trituradoras terciarias para un Set Point del producto constante (i.e.  $\% + 1/2 = 15$ ). Se tomaron los 100 últimos puntos de la simulación.

	HP1	HP2	HP3	HP4	HP5	HP6
Por simulación (mm)	11.04	11.33	10.96	10.98	10.96	11.04
Por simulación (pulg)	0.43	0.45	0.43	0.43	0.43	0.43
Operación normal (mm)	11.00	11.00	11.00	11.00	11.00	11.00

## 5.12. Discusión

En este capítulo se han realizado simulaciones para poder controlar la granulometría del producto y el nivel de taza de las trituradoras (i.e. secundarias y terciarias). Sobre los amperajes de las trituradoras, si bien no se logró controlar en el rango deseado, estos se han mantenido debajo del límite máximo propuesto (para el cuidado del equipo).

Las reglas utilizadas han sido obtenidas de forma empírica basadas en un sistema de tipo Mamdani, en donde se idearon reglas generales (para las tres líneas) basadas en un solo antecedente pero múltiples consecuentes.

Se observó que la fuzzyficación No-Singleton de las entradas crisp permite regular la dispersión de la variable a controlar con respecto a los set points. Por otro lado, si el número difuso obtenido es muy ancho (i.e. alto valor de  $\sigma$  en las Gaussianas o el soporte es muy amplio en las triangulares) no se logra a controlar las variables en cuestión. Por esos motivos se ha establecido fuzzyficaciones No-Singleton (i.e. Gaussianas) con un valor de  $\sigma = 1$  para el producto y con valores de  $\sigma = 6$  para los niveles de taza.

En los métodos utilizados para realizar la inferencia, se observó que solamente la regla del mínimo y regla del producto (i.e. reglas basadas en la conjunción) lograron realizar el control, una razón puede ser que estas reglas satisfacen el *Modus Ponens Clásico* (la regla basada en la implicación no lo cumple, ver 4.6.5).

Sobre los métodos de defuzzyficación, se observó que solo el método del centroide y el del bisector logran el control, aunque este último presenta una mayor diferencia con respecto al set point (del producto).

Al convertir el sistema tipo Mamdani al tipo Takagi-Sugeno mediante la instrucción `mam2sug` (en MATLAB 7,0) se observa que resulta un sistema de orden zero y que si bien se logra el control, se requirió un tiempo mayor (diez veces más) para la simulación. Por otro lado, al utilizar el método RLS se obtienen respuestas similares a las de Mamdani, es decir, se logra el control en un menor tiempo comparado cuando se utiliza `mam2sug`.

Al simular el sistema para un Set Point establecido por la operación en planta de la unidad de Toquepala de SPCC, se observa que se logra el control y las aberturas de las trituradoras permanecen constantes cuando estabiliza la planta. Estas aberturas son similares en el caso de las trituradoras terciarias, comparados con los parámetros de operación. En el caso de las trituradoras secundarias, las aberturas se verían reducidas en más de  $1\text{cm}$  (i.e.  $> 10\text{mm}$ ), lo que significaría una mayor importancia de estas máquinas en el proceso de reducción de tamaño, con una consecuente descarga de trabajo en las trituradoras terciarias. Cabe resaltar que para poder implementar el sistema de control con esta última consideración (configuración manual de la abertura) se deberá adicionar sensores de niveles de taza en las trituradoras secundarias (en la actualidad no se dispone de estas en la operación).

## Capítulo 6

# Optimización del FLC

## 6.1. Sistema del tipo Mamdani

### 6.1.1. Metodología

Se utilizó una modificación de los Algoritmos Genéticos. Debido a que el tiempo de evaluación para cada corrida (o generación) tomaba varios minutos ( $\sim 13min$ ), se decidió aplicar los AG pero con las siguientes características:

- Se aplicaron solamente los siguientes operadores y/o mecanismos:
  - Mutación (no selección ni crossover).
  - Elitismo.
- Se utilizó solamente tres individuos.
- 100 generaciones.
- 420 reglas (140 por cada línea).
- Se añadió una variable lingüística denominada `Linea.Flujo.Error` cuyos conjuntos difusos están definidos por la Figura 6.1 y la Base de las variables es de  $[-200; 200]$ . Estos conjuntos difusos reemplazarían a `t.NTaza.Error` ya que estos últimos consideran el nivel de taza de las trituradoras secundarias y en la práctica no existen dichos sensores.

El valor de `Linea.Flujo.Error` está dado por (6.1).

$$\begin{aligned} \text{Linea.Flujo.Error} &= (i.NTaza.Data - i.NTaza.SP) \\ &+ (ii.NTaza.Data - ii.NTaza.SP) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Donde:

Linea.Flujo.Error Valor para el factor Data del Flujo.

i.NTaza.Data Valor del nivel de taza de la trituradora terciaria  $i$  (lo que reporta el sensor).

ii.NTaza.Data Valor del nivel de taza de la trituradora terciaria  $ii$  (lo que reporta el sensor).

i.NTaza.SP Set Point del nivel de taza de la trituradora terciaria  $i$ .

ii.NTaza.SP Set Point del nivel de taza de la trituradora terciaria  $ii$ .

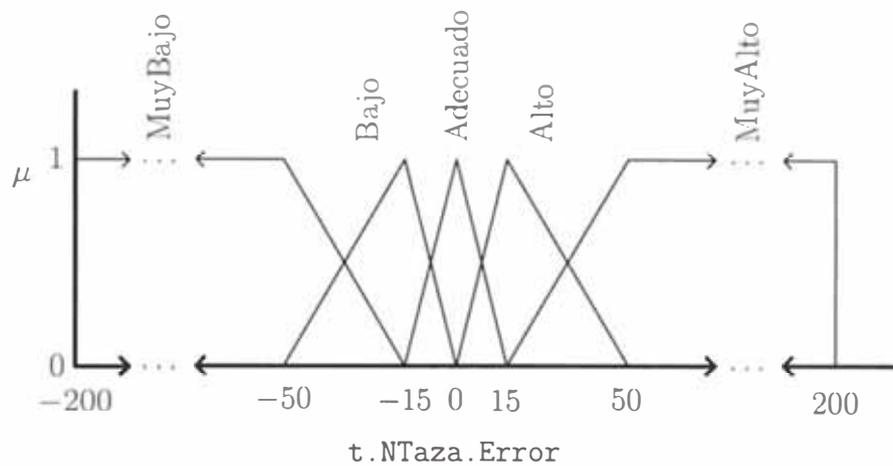


Figura 6.1: Conjuntos difusos para Linea.Flujo.Error

### 6.1.2. Reglas - FAM

Las reglas se establecieron mediante las FAM y se muestran en las Tablas 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 y 6.9. En la Tabla 6.1 se muestra la notación de los conjuntos difusos. Cabe señalar que no se está tomando en cuenta los conjuntos difusos

### 6.1.3. Operadores genéticos

#### Mutación

En los dos primeros individuos se aplica la mutación con la característica de que ambos mutan en el mismo gen pero en “dirección” opuesta. Esto quiere decir

Tabla 6.1: Representación de los conjuntos difusos para las FAM mediante números. A: Producto.Error, B: i.Amp.Error, C: Linea.NTaza.error, D: Linea.Flujo.Error, E: Set de las trituradoras, F: Distribuidores de carga, G: Velocidad de los alimentadores.

	1	2	3	4	5
A	MuyFino	Fino	Adecuado	Grueso	MuyGrueso
B	MuyBajo	Bajo	Adecuado	Alto	MuyAlto
C	MuyNegativo	Negativo	Cero	Positivo	MuyPositivo
D	MuyBajo	Bajo	Adecuado	Alto	MuyAlto
E	RapCerrar	Cerrar	Mantener	Abrir	RapAbrir
F	Izquierda	Mantener	Derecha	—	—
G	Disminuir	DismLenta	Mantener	AumLenta	Aumentar

Tabla 6.2: FAM: Variación del CSS en las trituradoras terciarias en función del tamaño del producto y del amperaje de las trituradoras terciarias.

CSS (Terciarias)		i.Amp.Error ( $3^{rias}$ )				
		1	2	3	4	5
		Producto.Error	1	5	5	4
	2	5	4	4	4	5
	3	3	3	3	3	3
	4	1	2	2	2	1
	5	1	1	2	2	2

Tabla 6.3: FAM: Variación de la Velocidad de Alimentadores en función del tamaño del producto y del amperaje de las trituradoras terciarias.

Vel. Alim.		i.Amp.Error ( $3^{rias}$ )				
		1	2	3	4	5
		Producto.Error	1	5	5	5
	2	5	5	4	2	1
	3	5	5	4	2	1
	4	4	4	3	2	1
	5	4	4	3	1	1

Tabla 6.4: FAM: Variación del CSS en las trituradoras secundarias en función del flujo en la línea.

CSS (Secundarias)	Linea.Flujo.Error				
	1	2	3	4	5
	5	4	3	2	1

Tabla 6.5: FAM: Variación de la Velocidad de Alimentadores en función del flujo en la línea.

Vel. Alim.	Linea.Flujo.Error				
	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5

Tabla 6.6: FAM: Variación de la Velocidad de Alimentadores en función del amperaje de las trituradoras terciarias de la misma línea.

Vel. Alim.	i.Amp.Error				
	1	2	3	4	5
	5	4	3	2	1

Tabla 6.7: FAM: Variación del Distribuidor de Carga en función de los niveles de taza de las trituradoras terciarias de la misma línea.

Dist. Carga	Linea.NTaza.Error				
	1	2	3	4	5
	3	3	2	1	1

Tabla 6.8: FAM: Variación del CSS en las trituradoras secundarias en función de los amperajes de las trituradoras secundarias y terciarias de la misma línea.

CSS (Secundarias)		i.Amp.Error ( $2^{rias}$ )				
		1	2	3	4	5
i.Amp.Error ( $3^{rias}$ )	1	3	3	4	5	5
	2	3	3	4	4	5
	3	2	2	3	4	4
	4	1	2	2	3	4
	5	1	1	2	2	3

Tabla 6.9: FAM: Variación del Distribuidor de Carga según los amperajes de las trituradoras terciarias de la misma línea.

Dist. Carga		ii.Amp.Error ( $2^{rias}$ )				
		1	2	3	4	5
i.Amp.Error ( $3^{rias}$ )	1	2	2	3	3	3
	2	2	2	3	3	3
	3	1	2	2	2	3
	4	1	1	1	2	2
	5	1	1	1	2	2

que si un gen tiene el valor de 3 y muta, entonces un individuo variará al valor de 4 y el otro al valor de 2, nótese que los valores de mutación son los más cercanos al valor de mutación en cuestión.

Por ejemplo, en caso de que mute el gen correspondiente al set de una trituradora: En lugar de MANTENER el set ( $gen = 3$ ) un individuo tendrá que ABRIR ( $gen = 4$ ) y el otro individuo tendrá que CERRAR ( $gen = 2$ ) el set, ya que uno puede empeorar pero en la otra dirección puede mejorar el valor de la función de adaptación (fitness); también es posible que el  $gen$  en cuestión sea de un valor óptimo (con lo cual la mutación disminuiría el valor de la adaptación) pero para lidiar con esto se aplica el operador de *Elitismo*.

Adicionalmente se ha considerado solo los factores aledaños (conjuntos difusos próximos) debido a que se quiere una pequeña variación en la operación, es decir, no es lo mismo cambiar de MANTENER a ABRIR que MANTENER a RAPABRIR (Abrir rápido).

**Esquema de la mutación empleada** La mutación se aplicó solo a los consecuentes de las reglas (no a los antecedentes) según el Algoritmo 6.1:

### Elitismo

El otro individuo sirve simplemente como memoria y guarda el código genético del individuo de mayor fitness logrado en todas las corridas anteriores.

#### 6.1.4. Función de adaptación (fitness function)

consiste en maximizar el tonelaje, disminuir el error del tamaño del producto y el Set Point y contiene además funciones restrictivas para mantener los amperajes de las trituradoras y los niveles de taza por debajo del límite máximo y/o Set Point respectivamente.

La función de adaptación empleada fue:

$$\text{Fitness function} = W_0 + W_1 \frac{\max Flow T}{\min Prod} + W_2 \text{penal Amp} + W_3 \text{penal NTaza} \quad (6.2)$$

---

**Algoritmo 6.1:** Esquema de la mutación

---

entradas: Dos individuos de la misma generación

salidas : Dos individuos con algún(algunos) gen(es) mutado(s)

```
1 forall genes (ambos individuos) do
2   generar dos números aleatorios  $randmut$  y  $xMut$  entre cero y uno;
3   if  $randmut < probabilidad\ de\ mutación$  then
4     if  $gen = 0$  then
5        $Individuo1(gen)$  muta a 1, 2, ..., o  $N$  (con igual probabilidad);
6        $Individuo2(gen) = N + 1 - Individuo1(gen)$ ;
7       ( $N$ : Número total de conjuntos difusos para una Variable
8       Lingüística determinada);
9     else if  $(Individuo1)gen = 1$  then
10      switch valor de  $xMut$  do
11        case  $xMut < 1/2$ 
12           $Individuo1(gen) = 0$ ;
13           $Individuo2(gen) = 0$ ;
14        case  $xMut \geq 1/2$ 
15           $Individuo1(gen) = 2$ ;
16           $Individuo2(gen) = 2$ ;
17      else
18        (i.e.  $gen = i$  donde  $i = \{2, \dots, N - 1\}$ );
19        switch valor de  $xMut$  do
20          case  $xMut < 1/3$ 
21             $Individuo1(gen) = 0$ ;
22             $Individuo2(gen) = 0$ ;
23          case  $1/3 \leq xMut \leq 2/3$ 
24             $Individuo1(gen) = i - 1$ ;
25             $Individuo2(gen) = i + 1$ ;
26          case  $xMut \geq 2/3$ 
27             $Individuo1(gen) = i + 1$ ;
28             $Individuo2(gen) = i - 1$ ;
```

---

en donde:

$$\begin{aligned} W_0 &= 10^2 \\ W_1 &= 1 \\ W_2 &= -10^{-1} \\ W_3 &= -10^{-1} \end{aligned}$$

$$\minProd = \frac{1}{Nk} \cdot \sum_{i=1}^{Nk} (\text{Producto} - \text{Set Point})^2 \quad (6.3)$$

La función para el Set Point del Producto fue:

$$S.P. = \begin{cases} 15 & ; 0 \leq t < 50 \\ 20 & ; 50 \leq t < 100 \\ 15 & ; 100 \leq t < 150 \\ 20 & ; 150 \leq t < 200 \end{cases}$$

$$\maxFlowT = \frac{1}{Nk} \cdot \sum_{i=1}^{Nk} (\text{t/h total alimentada a la planta.}) \quad (6.4)$$

$Nk$  es el número total de iteraciones en cada corrida de AG.

$$\text{penalAmp} = \frac{1}{Nk} \cdot \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^{Nk} eAmp \quad (6.5)$$

$$eAmp = \begin{cases} 0 & i.\text{Amp.Data} < i.\text{Amp.SP.Max} \\ i.\text{Amp.Data} - i.\text{Amp.SP.Max} & \text{Caso Contrario} \end{cases}$$

$T$  es el número total de trituradoras.  $i.\text{Amp.Data}$  es el amperaje de la trituradora  $i$ .  $i.\text{Amp.SP.Max}$  es el amperaje máximo para la operación de la trituradora  $i$ .

$$\text{penalNTaza} = \frac{1}{Nk} \cdot \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^{Nk} eNTaza \quad (6.6)$$

$$eNTaza = \begin{cases} 0 & i.\text{NTaza.Data} < i.\text{NTaza.SP} \\ i.\text{NTaza.Data} - i.\text{NTaza.SP} & \text{Caso Contrario} \end{cases}$$

### 6.1.5. Resultados

Cada generación tuvo en promedio un tiempo de  $12,72min$  y el tiempo total fue de 21,20 horas (Se utilizó una PC Pentium 4 de  $2,80GHz$  y  $512MB$  de RAM).

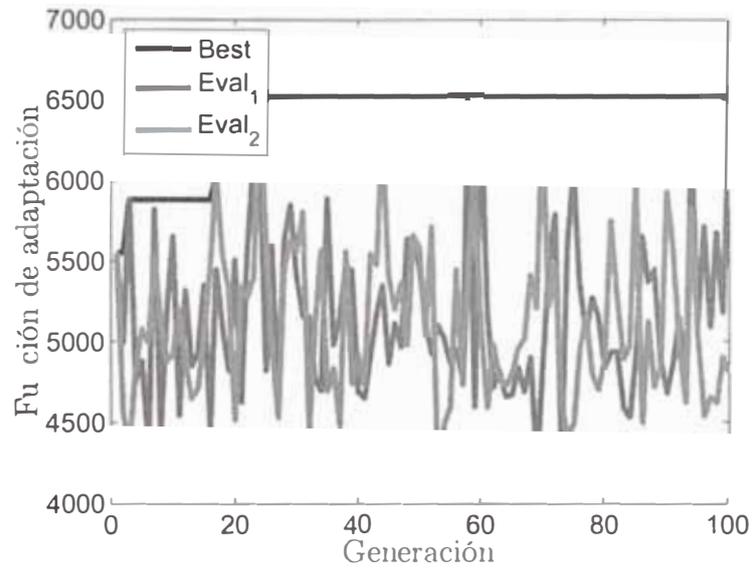


Figura 6.2: Optimizado con Algoritmos Genéticos: Variación de la función de adaptación vs. la generación.

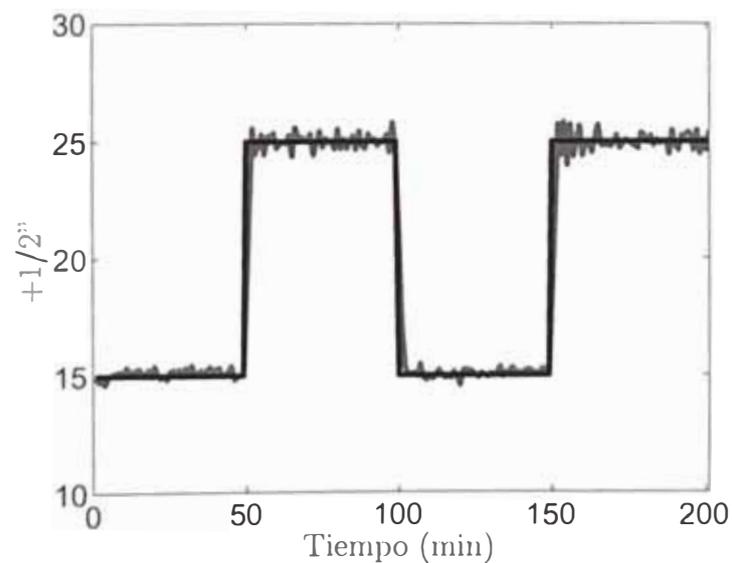


Figura 6.3: Optimizado con Algoritmos Genéticos: Granulometría del producto (+1/2'').

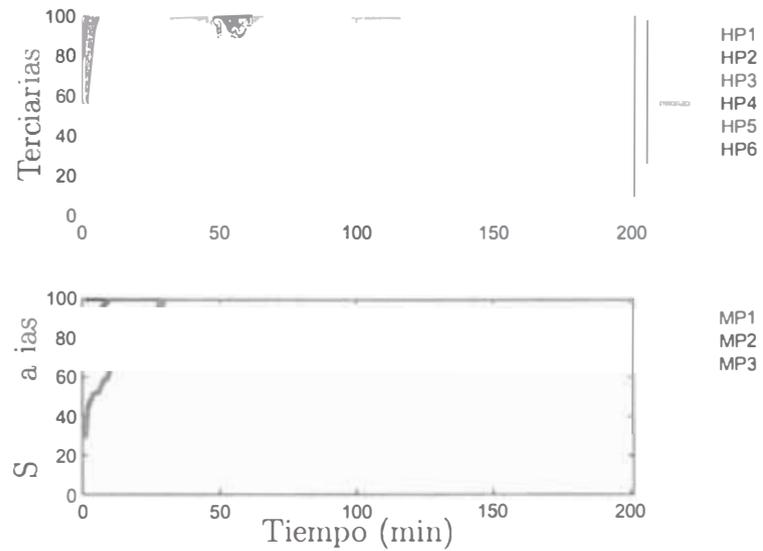


Figura 6.8: Optimizado con Algoritmos Genéticos: Niveles de taza de las trituradoras.

## 6.2. Discusión

En este capítulo se ha tratado de optimizar la base de reglas utilizando Algoritmos Genéticos. Este método se ha aplicado solamente a los consecuentes de las reglas y a cada uno de estas por separado (i.e. los consecuentes de una misma regla podría diferir según la línea en que se encuentre.)

Se observa que al no disponer de sensores niveles de taza en las trituradoras secundarias (con sus correspondientes reglas para el control), podrían obtenerse deficiencias en el sistema de control. En estas simulaciones se observó que los niveles de taza, tanto en secundarias y terciarias estaban al 100 % lo que en la práctica puede indicar un rebalse de mineral de la taza de la trituradora (el Set Point estaba fijado en 70 %). Adicionalmente se observa que los amperajes de las trituradoras secundarias superaban el límite máximo de operación, lo que significa la sobrecarga de dichos equipos.

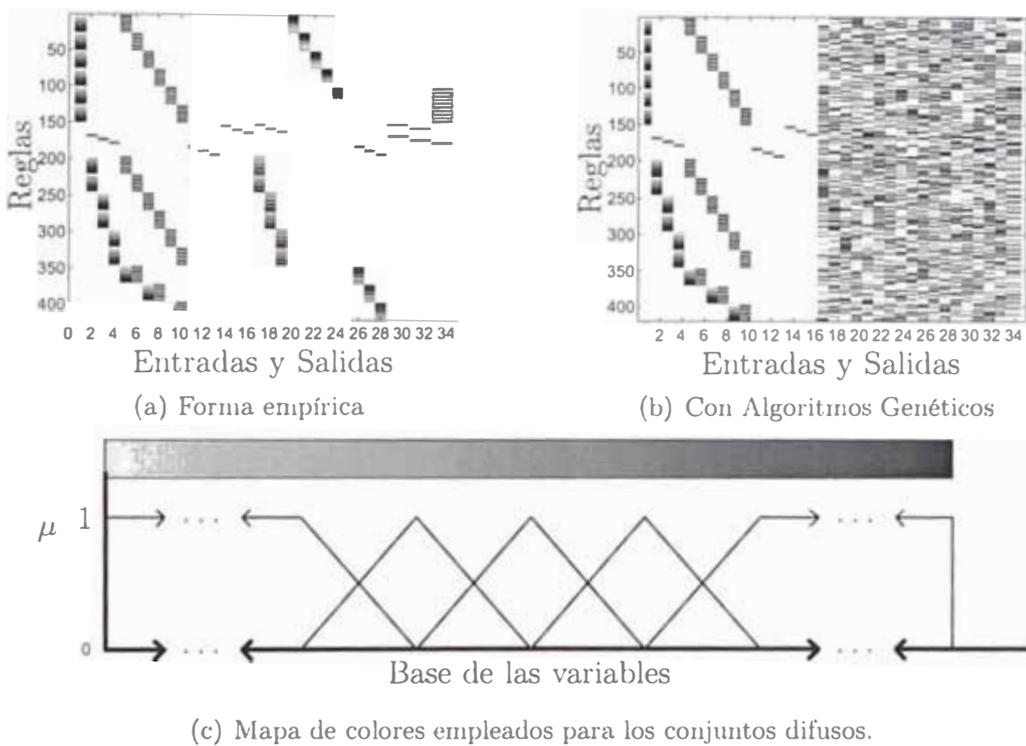


Figura 6.10: Esquema de las reglas estimadas en forma empírica y optimizada por Algoritmos Genéticos: El color blanco indica el valor de cero (conjunto difuso que no se toma en cuenta en la regla) y conforme es más oscuro indica que el conjunto difuso está más hacia la derecha. Los antecedentes están representados por las columnas del 1 al 16 y los consecuentes están representados por las columnas del 17 al 34 en el eje de las abscisas. En el eje de ordenadas están representadas las reglas.

## Capítulo 7

# Conclusiones

### 7.1. Resumen de los resultados

En la presente tesis se diseñó los controladores difusos tipo Mamdani y Sugeno, aunque este último fue “entrenado” de los resultados óptimos del controlador tipo Mamdani.

Los conjuntos difusos y las reglas fueron obtenidos empíricamente bajo criterio o “sentido común” del autor. Se utilizaron cinco conjuntos difusos para cada variable lingüística exceptuando en los distribuidores de carga, los cuales fueron solamente tres. Las reglas utilizadas se idearon de un antecedente y múltiples consecuentes debido a su simplicidad para la formulación de estas. Las reglas planteadas, son reglas generales (en total 40) para una sola línea de operación, lo que significa que para la implementación del sistema de control se deberá de introducir 120 reglas (i.e. 40 para cada línea de operación -  $A$ ,  $B$  y  $C$  -).

Se evaluó así mismo los diferentes modos de fuzzyficar, operadores difusos, formas de inferir y métodos de defuzzyficar. Según los resultados de las simulaciones se recomienda utilizar:

**Fuzzyficación** No-Singleton (Gaussiana).

- Para el tamaño del producto se debe utilizar un  $\sigma = 1$ .
- Para los niveles de taza se debe utilizar un  $\sigma = 6$ .

**Operadores difusos** Aunque no son aplicados para reglas de un solo antecedente, se utiliza generalmente la regla del mínimo o la regla del producto para la conjunción.

**Método de implicación** Reglas basadas en la conjunción (regla del mínimo o regla del producto)

**Defuzzyficación** Método del Centroide

**Tipo de sistema** Mamdani. Este tipo de sistema sería más fácil de implementar y modificar en el sistema de control (i.e. OCS) de Southern Perú Copper Corporation (unidad de Toquepala).

Con las condiciones expuestas, se logra controlar (en simulación) la granulometría del producto (i.e.  $\% + 1/2''$ ), el cual el set point fue una función cuadrada de valores 15 y 20 (En planta se desea trabajar a  $\% + 1/2'' = 15$ ). Se logra también maximizar el tonelaje (TMH), esto se ve reflejado en las figuras correspondientes en donde aumenta el tonelaje cuando el set point de la granulometría del producto aumenta y viceversa.

Así mismo, se logró controlar los niveles de taza a un valor de 70 % y aunque no se consiguió mantener el amperaje en un rango de operación estos se mantuvieron debajo del límite máximo deseado. Dicho límite se estableció para el cuidado del equipo, en otras palabras, para no sobrecargar la trituradora. Por otro lado, el no haber conseguido dicho objetivo resultaría beneficioso para la empresa debido a que se habría reducido la energía consumida para obtener un producto de granulometría uniforme y con un máximo de tonelaje alimentado.

Cabe resaltar que el control se logró bajo perturbaciones como la granulometría del mineral, el cual depende directamente de la trituradora primaria y bajo la variación de la dureza del mineral (representado por el Work Index).

Se debe enfatizar que los modelos matemáticos utilizados son estáticos (exceptuando el modelo del nivel de mineral en la taza), por lo tanto se asume que estos se estabilizan en forma inmediata. Esta suposición conlleva lógicamente a un error en las respuestas del sistema, pero se estima que la estabilización de la planta de trituración estará limitado más por el transporte de mineral (i.e. fajas transportadoras) antes que el tiempo de retención en los equipos (i.e. trituradoras y zarandas principalmente).

Se observó también que la fuzzyficación No-Singleton ayuda a eliminar la dispersión en las variables a controlar (básicamente en la granulometría del producto y los niveles de taza), pero se debe tener cuidado en la elección del factor  $\sigma$  ya que al pasar cierto límite, el sistema deja de controlar la variable en cuestión.

Finalmente, al tratar de optimizar el sistema de control por medio de Algoritmos Genéticos y variando la base de reglas (se incluían reglas de dos antecedentes y el número se incrementó de 40 a 140) se observó que los resultados fueron más

pobres (i.e. se dejó de controlar los niveles de taza y se sobrecargaba las trituradoras).

Cabe recalcar que sólo se utilizó la mutación y el elitismo como operadores, ya que la inclusión de los operadores de selección y crossover implicarían añadir más individuos a la población y por ende el tiempo de ejecución para una sola generación se multiplicaría por el número de individuos añadidos.

## 7.2. Trabajos futuros

Para una simulación más precisa, se sugiere modelar la planta con modelos dinámicos e incluir el modelado de las fajas transportadoras (i.e. simplemente como un retardo), además se podría obtener un mejor modelo de los distribuidores de carga, alimentadores de mineral, variación de la granulometría de alimentación y work index con una mayor data que puede obtenerse de los registros de la PC.

Posteriormente podría optimizarse la base de reglas y conjuntos difusos para maximizar el tonelaje tratado de mineral, esto sin perjudicar la granulometría del producto ni sobrecargar los equipos. La optimización de la base de reglas podría lograrse utilizando reglas de varios antecedentes, los cuales permitiría la interrelación entre, por ejemplo, la granulometría del producto y el amperaje de las trituradoras.

Las líneas de operación, si bien son similares, estas no operan de la misma manera (no producen la misma granulometría del producto ni tampoco procesan tonelajes iguales). Por este motivo, podría utilizarse conjuntos difusos no necesariamente iguales para cada línea (e.g. el conjunto difuso *Cerrar* en las trituradoras terciarias puede ser diferente para cada línea en particular), incluso el número de conjuntos difusos para una variable lingüística no tienen por que ser iguales en todas las líneas.

Para optimizar este sistema de control mediante Algoritmos Genéticos podría consistir en variar los factores de ponderación en la función de adaptación, ya que estos son los que determinarán qué factores tendrán prioridad en la optimización. La optimización puede consistir también en modificar los conjuntos difusos y la forma de mutar, esto podría hacerse utilizando conjuntos difusos con funciones de pertenencia Gaussianas y la mutación consistiría en variar los factores  $\mu$  y  $\sigma$  (i.e. posición y amplitud), al hacer esto, se tendría que modificar incluso la forma

de codificación, el cual deberá ser de valores reales (value encoding).

Queda en espera, la implementación del sistema de control diseñado en la unidad de Toquepala de Southern Perú Copper Corporation, el cual puede no requerir la regulación automática de la abertura de las trituradoras (CSS) debido a que la granulometría requerida para la sección de molienda es fija, aunque debería de implementarse sensores de nivel en las tazas de las trituradoras secundarias. En este caso, el sistema de control se simplificaría en regular solamente la velocidad de alimentadores y los distribuidores de carga. Los CSS deberán de ajustarse en forma manual a los valores que se obtendrían en la simulación para una granulometría de  $\% + 1/2'' = 15$ .

# Bibliografía

- [1] Ajith Abraham. Neuro fuzzy systems: State-of-the-art modeling techniques. <http://arxiv.org/ftp/cs/papers/0405/0405011.pdf>, Última visita: 28 de Octubre del 2005.
- [2] George Bojadziev and Maria Bojadziev. *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications*. World Scientific Publishing Co., 1995.
- [3] O. Carlsson and L.Nyberg. A method for estimation of fragment size distribution with automatic image processing. In *First International Symposium on Rock Fragmentation by Blasting*, University of Luleå, Sweden, August 1983.
- [4] Fernando Cartes and Jorge Rosas. Control experto de la molienda semiautógena. In *VI Simposium sobre Molienda*, pages pag 195–210, Viña del Mar, Chile, Noviembre 1990. ARMCO Chile Procesamiento de Minerales S.A.
- [5] Martine De Cock, Chris Cornelis, and Etienne E. Kerre. Elicitation of fuzzy association rules from positive and negative examples. *Fuzzy sets and systems*, 149:73–85, January 2005. <http://www.sciencedirect.com/>. Última visita: 23 de Noviembre del 2005.
- [6] Bonifacio Martín del Brío and Alfredo Sanz Molina. *Redes Neuronales y Sistemas Difusos*. Alfaomega Grupo Editor S.A., RA-MA Editorial, second edition, 2002.
- [7] R. Fernández, E. Viennet, E. Goles, R. Barrientos, and M. Telias. On-line coarse ore granulometric analyzer using neural networks. In *ICANN*, Industrial session, Paris, 1995.

- [8] A.M. Gaudin. *Principles of Mineral Dressing*. McGraw-Hill, Massachusetts Institute of Technology, first edition, 1939.
- [9] Mitsuo Gen and Runwei Cheng. *Genetic Algorithms and Engineering Optimization*. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, INC., Ashikaga Institute of Technology, 2000.
- [10] David E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. The University of Alabama, Addison-Wesley Publishing Company, INC., 1989.
- [11] J.A. Herbst. Innovaciones en la tecnología de fragmentación. In *IV Simposium sobre Molienda*, Viña del Mar, Chile, Noviembre 1984. ARMCO Chile Procesamiento de Minerales S.A.
- [12] F. Herrera, M. Lozano, and A. M. Sánchez. Hybrid crossover operators for real-coded genetic algorithms: An experimental study. <http://sci2s.ugr.es/keel/publicaciones/ug/articulos/scj-final-r.pdf>, Última visita: 16 de Agosto del 2005.
- [13] D.G. Hulbert. Simulation, control and modelling of mineral processes. In *XXII International Mineral Processing Congress*, Cape Town, South Africa, September 2003. South African Institute of Mining and Metallurgy.
- [14] Jan Jantzen. Design of fuzzy controllers. Technical Report 98-E 864, Technical University of Denmark, Department of Automation, Bldf 326. DK-2800 Lyngby, Denmark, August 1998. <http://fuzzy.iau.dtu.dk/download/design.pdf>. Última visita: 23 de Noviembre del 2005.
- [15] Jan Jantzen. Tutorial on fuzzy logic. Technical Report 98-E 868, Technical University of Denmark, Department of Automation, Bldf 326, DK-2800 Lyngby, Denmark, August 1998. <http://fuzzy.iau.dtu.dk/download/logic.pdf>. Última visita: 23 de Noviembre del 2005.
- [16] Errol G. Kelly and David J. Spottiswood. *Introducción al Procesamiento de Minerales*. John Wiley & Sons - Editorial Limusa, S.A., first edition, 1990.
- [17] Ronald Peter King. *Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems*. Butterworth-Heinemann, University of Utah, first edition, 2001.

- [18] Juan A. Kobashicawa. *Eficiencia del clasificador Stokes*. Facultad de Ingeniería Geológica, Minera y Metalúrgica, Universidad Nacional de Ingeniería, Junio 2003. Tesis para optar el Título de Ing. Metalurgista.
- [19] Bart Kosko. *Neural Networks and Fuzzy Systems - A dynamical systems approach to machine intelligence*. Prentice Hall, 1992.
- [20] Raimundas Liutkevičius and Saulius Dainys. Hybrid fuzzy model of non-linear plant. *Information Technology and Control*, 34(1):51–56, 2005. <http://itc.ktu.lt/itc341/Liutke34.pdf>. Última visita: 21 de Noviembre del 2005.
- [21] Alban J. Lynch. *Circuitos de Trituración y Molienda de Minerales*. Elsevier Scientific Publishing Company - Editorial Rocas y Minerales, first edition, 1980.
- [22] Samir W. Mahfoud. *Niching Methods for Genetic Algorithms*. PhD dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, May 1995. Report No. 95001.
- [23] James Malone, Ken Mc Garry, and Chris Bowerman. Using an adaptive fuzzy logic system to optimise knowledge discovery in proteomics. <http://www.his.sunderland.ac.uk/ps/RASC04.pdf>, Última visita: 17 de Noviembre del 2005.
- [24] Jorge Menacho, Javier Jofré, and Yadranka Zivkovic. *Tópicos Especiales de Conminución de Minerales*. CYTED. Subprograma de Tecnología Mineral, Red de Fragmentación XIII-A. Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo, 1995.
- [25] Jerry M. Mendel. Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial. *Proceedings of the IEEE*, 83(3):345–377, March 1995. [http://sipi.usc.edu/~mendel/publications/FLS\\_Engr\\_Tutorial\\_Errata.pdf](http://sipi.usc.edu/~mendel/publications/FLS_Engr_Tutorial_Errata.pdf). Última visita: 23 de Noviembre del 2005.
- [26] Metso Minerals. *Nordberg HP Series Cone Crushers*, Última visita: 15 de Agosto del 2005. <http://www.metsominerals.com/>.

- [27] Metso Minerals. *Nordberg MP Series Cone Crushers*, Última visita: 15 de Agosto del 2005. <http://www.metsominerals.com/>.
- [28] Andrew L. Mular and Roshan B. Bhappu, editors. *Diseño de Plantas de Proceso de Minerales*. Society of Mining Engineers (AIME) - Editorial Rocas y Minerales, second edition, 1982.
- [29] T. J. Napier-Munn, S. Morrell, R. D. Morrison, and T. Kojovic. *Mineral Comminution Circuits - Their Operation and Optimisation*. Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, The University of Queensland. first edition, 1999.
- [30] Arthur Edward Oblad. Los modelos matemáticos de las operaciones de cominución. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú, Noviembre 1994. Curso Breve.
- [31] Francisco Escolano Ruiz, Miguel Ángel Cazorla Quevedo, Ma Isabel Alfonso Galapienso, Otto Colomina Pardo, and Miguel Ángel Lozano Ortega. *Inteligencia Artificial - Modelos Técnicas y Áreas de Aplicación*. Thomson, 2003.
- [32] Stuart Russell and Peter Norvig. *Inteligencia Artificial - Un enfoque moderno*. Pearson Educación, S.A., second edition, 2004.
- [33] James D. Shotton. Diseño e implementación de un sistema de control de procesos e información integrados de costo mínimo. In *V Symposium sobre Molienda*, Viña del Mar, Chile, Noviembre 1987. ARMCO Chile Procesamiento de Minerales S.A.
- [34] Southern Peru Copper Corporation. *Memoria Anual*, 2004. <http://www.southernperu.com/pdf/m2004esp.pdf>.
- [35] Symons, Trituradoras de Cono. *Trituradoras de Cono - Manual de Instrucciones*. Catalog NO 514 SP.
- [36] Arthur F. Taggart. *Handbook of Mineral Dressing - Ores and Industrial Minerals*. John Wiley & Sons, School of Mines - Columbia University, 1954.

- [37] Tomohiro Takagi and Michio Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15(1):116–132, January/February 1985. <http://www.hi.cs.meiji.ac.jp/takagi/index.en.html>. Última visita: 23 de Noviembre del 2005.
- [38] Hanli Wang, Sam Kwong, Yaochu Jin, Wei Wei, and K. F. Man. Multi-objective hierarchical genetic algorithm for interpretable fuzzy rule-based knowledge extraction. *Fuzzy sets and systems*, 149:149–186, January 2005. <http://www.sciencedirect.com/>.
- [39] Norman L. Weiss, editor. *SME Mineral Processing Handbook*. Society of Mining Engineers, American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, Inc., 1985.
- [40] Barry Alan Wills. *Mineral Processing Technology*, volume 29 of *International Series on Materials Science and Technology*. Pergamon Press, Camborne School of Mines, Cornwall, England, third edition, 1985.