

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA



**CONTROL ACTIVO DE VIBRACIONES EN
ESTRUCTURAS FLEXIBLES**

TESIS

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO MECÁNICO**

RONALD RICHARD HUAMÁN ORTIZ

PROMOCIÓN 2011-II

LIMA-PERÚ

2015

DEDICATÓRIA

A mis padres, Luis Huamán y Vilma Socorro Ortiz, a mis hermanos y a toda mi familia por su amor, comprensión y apoyo incondicional.

Porque de tal manera amó Dios al mundo, que ha dado a su Hijo unigénito, para que todo aquel que en él cree, no se pierda, mas tenga vida eterna.

Dios sea alabado!

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS	iii
PRÓLOGO	1
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	3
1.1 Motivación	3
1.2 Términos Generales Usados en el Área de Control de Vibraciones	9
1.3 Objetivos	10
1.4 Estructura del Trabajo	11
CAPÍTULO II	
SÍNTESIS DE CONTROLADORES H_∞	12
2.1 Introducción	12
2.2 Norma H_∞	13
2.3 Problema de control H_∞	14
CAPÍTULO III	
FUNCIONES DE PONDERACIÓN	20
3.1 Introducción	20
3.2 Selección de las Funciones de Ponderación	21
3.3 Problema de Control H_∞ Usando Funciones de Ponderación	23
CAPÍTULO IV	
MÉTODO PROPUESTO	28

4.1	Método de las Funciones de Ponderación	28
4.1.1	Características de las funciones de ponderación W_p y W_u	29
4.1.2	Determinación de las funciones de ponderación	29
4.1.3	Síntesis del controlador modal	32
CAPÍTULO V		
RESULTADOS		33
5.1	Descripción del problema	33
5.2	Síntesis del Controlador Modal para el Segundo Modo de la Viga	39
5.2.1	Selección de las funciones de ponderación	39
5.2.2	Síntesis del controlador modal	41
5.2.3	Análisis de la fuerza de Control	45
5.3	Síntesis del Controlador Modal para el Tercer Modo de la Viga	47
5.3.1	Selección de las funciones de ponderación	47
5.3.2	Análisis de la fuerza de Control	51
5.4	Síntesis del Controlador Modal para el Cuarto Modo de la Viga	52
5.4.1	Selección de las funciones de ponderación	52
5.4.2	Análisis de la fuerza de Control	56
5.5	Análisis de los Resultados	57
5.5.1	Análisis del desempeño de los controladores modales	57
5.5.2	Análisis de las fuerzas de control de los controladores modales	58
CAPÍTULO VI		
CONCLUSIONES		61
REFERENCIAS		64

APÉNDICES	67
A Reducción del modelo - La función <i>modreal</i>	67
A.1 Reducción del modelo usando truncamiento modal	67
B Síntesis de controladores H_∞ - La función <i>hinfsyn</i>	70
B.1 Solución del problema H_∞ vía Riccati	71

PRÓLOGO

Cierto tipo de estructuras o sistemas mecánicos están expuestos a agentes externos como por ejemplo fuerzas o momentos que pueden alterar su dinámica. Por ejemplo en sistemas mecánicos compuestos por estructuras flexibles generalmente se producen vibraciones indeseadas que afectan el desempeño del sistema o pueden causar daños en la estructura física del sistema mecánico. Por este motivo surge la necesidad de implementar sistemas de control de vibraciones para evitar los efectos indeseados que estas puedan ocasionar.

En algunos casos se requiere controlar un cierto modo de vibrar del sistema mecánico debido a que éste (sistema mecánico) puede ser afectado por un disturbio externo que lo excita en un rango de frecuencia que comprende una de las frecuencias naturales del sistema, generando así la necesidad de implementar sistemas de control modal de vibraciones para atenuar la vibración del sistema en un determinado rango de frecuencia.

En este trabajo se propone implementar un método de control activo de vibraciones en estructuras flexibles. Este método está basado en la teoría de control H-infinito utilizando una configuración de control por realimentación de salida. Para atenuar la vibración del sistema en un determinado rango de frecuencia se utilizan funciones de ponderación las cuales son introducidas en el problema de control H-infinito para definir las características de controlador de manera que este atenúe la vibración del sistema en la

región de frecuencia correspondiente al modo de vibrar que se desea controlar (modo de interés).

Este método de control de vibraciones es verificado utilizando el modelo de una viga flexible engastada en uno de sus extremos y que es modelada utilizando el método de los elementos finitos. Finalmente los resultados son analizados y se discuten las ventajas y desventajas de este método.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

El diseño contemporáneo de estructuras mecánicas complejas, comúnmente utilizadas en la industria aeronáutica o aeroespacial, requieren que estas sean cada vez más leves. Por ejemplo, en estructuras aeroespaciales, como antena de satélites, es deseado reducir al máximo el peso estructural con el propósito de reducir el consumo de energía que se utiliza durante el funcionamiento del sistema (He y Fu, 2001). Por lo tanto, con el objetivo de satisfacer estas necesidades, estructuras flexibles son ampliamente utilizadas en aplicaciones aeroespaciales (Lichter *et al.*, 2006). El problema de las estructuras flexibles es que, al ser expuestas a perturbaciones, estas pueden presentar vibraciones indeseadas que pueden resultar en daños estructurales o afectar el desempeño del sistema (Hu y Ng, 2005). Esto, por ejemplo, ocurre en sistemas robóticos que utilizan manipuladores flexibles cuya precisión (desempeño) puede ser afectada por la vibración del manipulador ocasionada por un disturbio (Karkoub *et al.*, 2000). Surge así la necesidad de implementar sistemas de control de vibraciones que garanticen la estabilidad y el buen desempeño de sistemas vibratorios.

Los primeros intentos para el control de vibraciones comenzó con los métodos de control pasivo, pero estos métodos solamente pueden atenuar la vibración de un sistema hasta cierto límite impuesto por la disipación de energía que se necesita para atenuar vibraciones de alta intensidad. Recientemente, la posibilidad de utilizar métodos de control activo ha sido explorada. A diferencia de los sistemas pasivos, los sistemas de control activo tienen la ventaja de proporcionar energía para atenuar la vibración rápidamente. Los métodos de control activo se han convertido cada vez más populares con los últimos avances tecnológicos, especialmente en el área de procesamiento de señales digitales (DSP) y el desarrollo de estructuras inteligentes. Con computadoras de procesamiento de datos más rápidos, materiales inteligentes, uso de actuadores y sensores, el control de vibraciones en tiempo real se tornó más práctico (Wang y Huang, 2002).

Una de las metodologías de control activo utilizadas para evitar el problema de vibraciones es el método de control H-infinito (H_∞). Este método de control tiene por objetivo minimizar a norma H_∞ de una matriz de transferencia estable en el dominio de la frecuencia (You *et al.*, 2007), lo que para el caso de rechazo de perturbaciones, significa minimizar los efectos causados por las perturbaciones en la salida de desempeño de un sistema dinámico (Canahuire Cabello, 2009). El método formula el problema de control como un problema de optimización cuya solución permite obtener un controlador (síntesis del controlador) que garantiza la estabilidad y el desempeño del sistema dinámico (Zhou *et al.*, 1996).

En las últimas décadas, el problema de control H_∞ para sistemas lineales invariantes en el tiempo ha sido ampliamente estudiado. Cuando el problema de control H_∞ es

resuelto a través del método de las ecuaciones de Riccati (ARE) o utilizando inecuaciones matriciales lineales (LMI), el orden del controlador sintetizado es igual al orden del sistema a controlar (Zhai *et al.*, 2003); esto indica que cuanto más grande sea el orden del modelo de la planta a controlar, más grande será el orden del controlador sintetizado. Dentro de la formulación del problema de control H_∞ se utiliza una planta P que representa el modelo matemático del sistema a analizar. Este modelo puede ser obtenido a través del método de los elementos finitos, como se presenta en (Petyt, 1990; Kwon y Bang, 1996). En el caso de estructuras flexibles el orden de la planta P es generalmente grande (debido a la cantidad de grados de libertad que se utilizan para modelar este tipo de estructuras), lo que resulta en la síntesis de controladores de orden elevada demandando un gran esfuerzo computacional en los sistemas de control, generando así un problema de costo computacional (Sarracini Jr., 2006). Este hecho sugiere la búsqueda de nuevos métodos de control de vibraciones.

Uno de los métodos comúnmente utilizados en control de estructuras es el método de control modal. El control modal puede ser definido como el control que modifica o altera los modos (autovalores de la matriz de un sistema) para conseguir los objetivos de control deseados (Simont y Mitter, 1968). Este método se convirtió en una poderosa herramienta al comienzo de la década de 1980 al ser aplicado en sistemas espaciales de gran longitud. Sin embargo, estos métodos perdieron relevancia ya que problemas de *spillover* eran inevitables en estructuras altamente flexibles. El *spillover* es un efecto indeseado que puede causar inestabilidad e reducción del desempeño del sistema. Este efecto es causado por los modos residuales que no son considerados en el proyecto de control (Kim y Inman, 2001). Recientemente, no en tanto, los métodos de control modal han sido aplicados en estructuras inteligentes, puesto que con ayuda de sensores y actuadores se evita el efecto

spillover (Inman, 2001).

Según Porter y Crossley (1972), el control modal puede ser basado en una ley de control por realimentación lineal del vector de estado de un sistema que define los nuevos autovalores asociados a los modos dinámicos del sistema controlado. Por ejemplo, considere un sistema dinámico simple en tiempo continuo, gobernado por la ecuación de estado de primer orden

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad (1.1)$$

donde a y b son constantes. Cuando en el sistema no hay fuerza de control (o sea $u(t) = 0$), la respuesta del sistema para cualquier tiempo t es dada por

$$x(t) = x(0)e^{at},$$

y si a es positivo, la respuesta del sistema será inestable. Caso a sea negativo, el sistema es asintóticamente estable, pero la caída de $x(0) \rightarrow 0$ puede no ser suficientemente rápida. No en tanto, si una realimentación de estado de acuerdo con la ley de control

$$u(t) = -kx(t)$$

es introducida (ver Figura 1.1), el sistema controlado será de la siguiente forma (sistema en lazo cerrado)

$$\dot{x}(t) = (a - bk)x(t), \quad (1.2)$$

donde k es una constante real arbitraria. La respuesta para este nuevo sistema es dada por

$$x(t) = x(0)e^{\rho t},$$

donde

$$\rho = a - bk,$$

se nota que dependiendo del valor de k se obtiene un nuevo valor ρ que modifica la dinámica del sistema original.

El mismo análisis puede ser aplicado en sistemas con varios modos dinámicos. En este caso, el método de control de espacio modal independiente (IMSC), desarrollado en la década de 1980, permite modificar los valores de frecuencia y el factor de amortiguamiento de los modos controlables de un sistema, usando matrices de control diagonales (Serra *et al.*, 2013). El hecho de poder modificar los valores de frecuencia y factor de amortiguamiento de los modos de un sistema hace que, el método de control modal, sea uno de los más usados en el control de vibraciones, especialmente en estructuras flexibles cuyo factor de amortiguamiento es usualmente pequeño.

Este trabajo tiene por objetivo realizar un control modal de estructuras flexibles (sistema dinámico) basado en la atenuación de la vibración en un determinado rango de frecuencia, correspondiente a un modo de vibrar específico del sistema dinámico. La motivación para controlar únicamente un modo de vibrar surge de la necesidad de atenuar una determinada forma de vibrar del sistema dinámico que puede afectar su desempeño. Este modo de vibrar puede ser excitado por una perturbación de baja, media o alta frecuen-

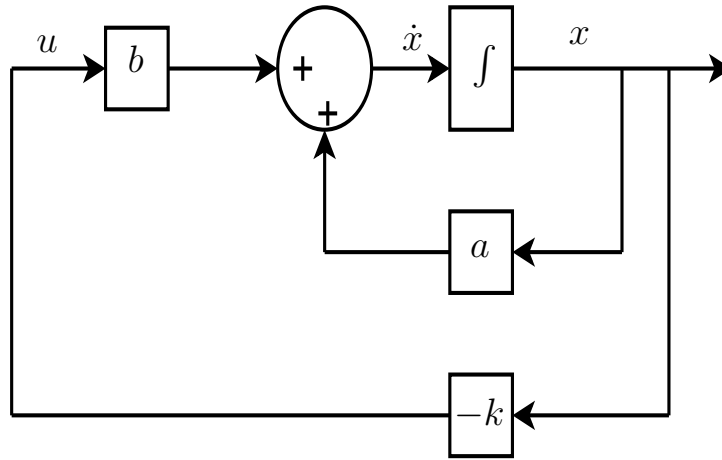


Figura. 1.1: Sistema simple con realimentación de estado

cia, lo que demandaría de un control que se concentre en la atenuación de aquel modo (sintetizar un controlador modal). También, se considera el caso en que a pesar de que la perturbación excite varios modos de vibrar del sistema, se mantiene el objetivo de controlar preferentemente un único modo (modo de interés), como por ejemplo, en el caso de un problema de polución sonora cuando un modo es la fuente principal de un ruido sonoro indeseado (Li, 1997).

En este trabajo se propone un método de control alternativo para sintetizar un controlador modal. Este método está basado en una configuración de control por realimentación de salida y utiliza la teoría de control \mathbf{H}_∞ . El método es implementado utilizando funciones de ponderación las cuales son introducidas en el problema de control \mathbf{H}_∞ para definir las características del controlador, esperando sintetizar un controlador modal que atenúe el modo de interés.

1.2 Términos Generales Usados en el Área de Control de Vibraciones

Esta sección presenta una visión general de algunos términos comunes que son considerados relevantes en el contexto de control modal de vibraciones.

- **Modo de vibrar o modo flexible:** Modo de vibrar se refiere a un movimiento periódico que es físicamente posible en la ausencia de cualquier influencia externa y en que el desplazamiento elástico $w(p, t)$ en la posición p y en el tiempo t están en movimiento uniforme (Hughes, 1987).
- **Modo rígido:** Los modos rígidos no representan un movimiento vibratorio, sin embargo describen un desplazamiento en una dirección sin deformación flexible. Consecuentemente, a frecuencia natural correspondiente es cero. En este trabajo no son considerados este tipo de modos.
- **Forma modal:** Una forma modal puede ser un modo flexible o rígido.
- **Estructura flexible:** Una estructura flexible es un sistema que no presenta modos rígidos o estos no son considerados relevantes para propósitos de control. En este trabajo se considera a una estructura flexible como aquella que solamente presenta modos flexibles (modos vibratorios).
- **Estructuras inteligentes:** Este término se refiere a estructuras donde se aplica alguna técnica de control (utilizando sensores y actuadores) para conseguir un desempeño deseado.

- **Control activo de vibraciones:** Técnica de control destinada a controlar los modos flexibles de un sistema. Modos rígidos no son considerados en control activo. Por tanto, el termino “control de vibración estructural” también es utilizado. Control de vibración pasiva tiene el mismo objetivo que el control de vibración activo, pero el objetivo es hecho básicamente a través de la modificación de la estructura, por ejemplo, el aislamiento de vibraciones o adicionando muelles, masa e amortiguadores localizados en vez de utilizar actuadores e sensores (Schneiders *et al.*, 2003).

1.3 Objetivos

Este trabajo tiene por objetivo sintetizar controladores que se centran en la atenuación de un modo de vibrar específico de un sistema mecánico (estructura flexible). También, presentar un método para sintetizar un controlador modal utilizando funciones de ponderación para finalmente analizar sus ventajas y desventajas.

A continuación, se indican los objetivos específicos de este trabajo:

- Analizar el desempeño del controlador modal sintetizado utilizando funciones de ponderación.
- Analizar las fuerzas de control que aplica el controlador modal sintetizado.

- Discutir sobre las características del sistema controlado, analizando la respuesta temporal y respuesta en frecuencia del sistema en análisis.

1.4 Estructura del Trabajo

El trabajo desarrollado es presentado en el siguiente orden:

- En el Capítulo 1 el problema de vibraciones en estructuras flexibles es presentado. Algunos conceptos básicos son presentados y los objetivos de trabajo son definidos.
- En el Capítulo 2 se presenta la formulación matemática envuelta en el método de control H_{∞} .
- En el Capítulo 3, el problema de control H_{∞} usando funciones de ponderación es formulado.
- En el Capítulo 4 se presenta el método desarrollado para sintetizar controladores modales.
- En el Capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el método de síntesis del controlador modal utilizando como ejemplo una viga flexible.
- Finalmente en el Capítulo 6 son presentadas las conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO II

SÍNTESIS DE CONTROLADORES H_∞

2.1 Introducción

La síntesis de controladores H_∞ está basada en la técnica de control que fue introducida por George Zames en los inicios de los años 1980. Esta técnica, conocida por el nombre de método de control H_∞ , formula el problema de control como un problema de optimización basado en la minimización de la norma H_∞ de la función de transferencia de un sistema en lazo cerrado, sujeto a restricciones de estabilidad e desempeño, cuya solución permite obtener un controlador deseado (Zhou *et al.*, 1996).

El método de control H_∞ es utilizado en diferentes tipos de problemas de control y es aplicado en sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas. El método H_∞ también es utilizado para resolver problemas de robustez cuando existen incertidumbres dentro del modelo del sistema que se desea controlar (You *et al.*, 2010). En esta sección se define algunos conceptos básicos para el entendimiento de la metodología de control H_∞ , para después presentar la formulación matemática que define el problema de control H_∞ .

2.2 Norma H_∞

El método de control H_∞ se basa en la reducción de la norma H_∞ de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado que se desea controlar; tal función de transferencia es definida por la relación entre las salidas de desempeño y las entradas de disturbio del sistema. La norma H_∞ representa el máximo valor de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia del sistema en análisis. Por lo tanto, para un sistema lineal invariante y continuo en el tiempo representado por la función de transferencia $\mathbf{G}(s)$ (s es la variable de Laplace, $s = j\omega$, ω es la frecuencia de análisis y j denota la parte imaginaria), la norma H_∞ es definida como (Gawronski, 2004):

- Para sistemas de única entrada y única salida

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \max_\omega |\mathbf{G}(j\omega)|$$

- Para sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega))$$

donde $\sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega))$ es el máximo valor singular de $\mathbf{G}(s)$, y sup denota el supremo.

2.3 Problema de control H_∞

Considérese la planta P conectada con un controlador K en una configuración por realimentación de salida, como se muestra en la Figura 2.1. La representación en espacio de estados de la planta P es dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \quad (2.3)$$

La representación en espacio de estados del controlador es dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y} \quad (2.5)$$

La conexión entre P y K caracteriza la forma patrón del problema de control H_∞ , donde se definen las siguientes especificaciones:

- \mathbf{z} representa la señal de salida de desempeño del sistema.
- \mathbf{w} representa la señal de perturbación.
- \mathbf{y} representa la señal de realimentación o entrada al controlador.

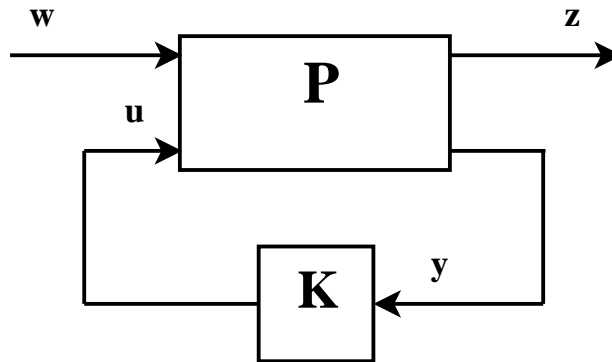


Figura. 2.1: Planta P conectada con el controlador K por realimentación de salida.

- u representa la fuerza de control.

La interconexión entre P y K conforma el sistema en lazo cerrado T_{zw} que representa la función de transferencia de la salida de desempeño z en relación a la entrada de perturbación w , como se muestra en la Figura 2.2. El comportamiento dinámico del sistema T_{zw} depende tanto de la dinámica de la planta P como de la dinámica del controlador K . Esto es evidenciado al calcular la representación en espacio de estados de T_{zw} .

Substituyendo (2.3) en (2.5), se obtiene

$$u = C_c x_c + D_c (C_2 x + D_{21} w + D_{22} u)$$

$$(I - D_c D_{22}) u = C_c x_c + D_c C_2 x + D_c D_{21} w$$

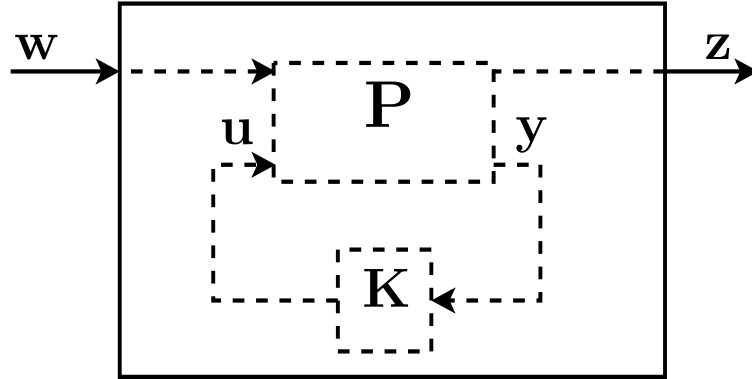


Figura. 2.2: Sistema en lazo cerrado T_{zw} .

y separando u se obtiene

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1}$.

Substituyendo (2.6) en (2.1) y (2.2), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 (\mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}(NC_c x_c + ND_c C_2x + ND_c D_{21}w) \\
&= (C_1 + D_{12}ND_c C_2)x + D_{12}NC_c x_c + (D_{11} + D_{12}ND_c D_{21})w \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Substituyendo las ecuaciones (2.3) y (2.6) en (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c(C_2x + D_{21}w + D_{22}u) \\
&= A_c x_c + B_c C_2x + B_c D_{21}w + B_c D_{22}(NC_c x_c + ND_c C_2x + ND_c D_{21}w) \\
&= (B_c C_2 + B_c D_{22}ND_c C_2)x + (A_c + B_c D_{22}NC_c)x_c + (B_c D_{21} + B_c D_{22}ND_c D_{21})w
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9) pueden ser ordenadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_2ND_c C_2 & B_2NC_c \\ B_c C_2 + B_c D_{22}ND_c C_2 & A_c + B_c D_{22}NC_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2ND_c D_{21} \\ B_c D_{21} + B_c D_{22}ND_c D_{21} \end{bmatrix} w \\
z &= [C_1 + D_{12}ND_c C_2 \quad D_{12}NC_c] \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + [D_{11} + D_{12}ND_c D_{21}]w
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Ahora, definiendo

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{C}} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{C}_c] \\
\tilde{\mathbf{D}} &= [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

es posible reescribir (2.10) como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{w} \\
\mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{w}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Finalmente la función de transferencia del sistema en lazo cerrado \mathbf{T}_{zw} basada en (2.12) es definida por

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}} \tag{2.13}$$

La formulación del problema de control H_∞ esta basado en la minimización de $\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_\infty$. El objetivo es encontrar un controlador optimo que minimice la magnitud del máximo valor de la respuesta en frecuencia del sistema en lazo cerrado \mathbf{T}_{zw} .

En este contexto, el problema de optimización puede ser descrito como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \gamma \\ \text{Sujeto a} & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma \\ & \gamma > 0 \end{array} \quad (2.14)$$

El problema (2.14) puede ser resuelto usando algunas formulaciones, por ejemplo ecuaciones de Riccati, desigualdades matriciales lineales o minimización directa, obteniéndose así el controlador.

CAPÍTULO III

FUNCIONES DE PONDERACIÓN

3.1 Introducción

Uno de los objetivos de los sistemas de control es conseguir un desempeño deseado para el sistema controlado. El desempeño puede ser ajustado utilizando funciones de ponderación apropiadas en el control de sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (Zhou *et al.*, 1996). En el proyecto de sistemas de control, las funciones de ponderación, también conocidas como filtros de ponderación, imponen pesos en las señales de salida de desempeño como en la señal de control, con el propósito de caracterizar su comportamiento dinámico (conseguir el desempeño deseado).

El uso de las funciones de ponderación, en el proyecto de controladores H_∞ , busca dos características principales en la dinámica del sistema controlado. La primera es la estabilidad del sistema que puede ser alterada debido a incertidumbres dinámicas que surgen de la excitación de modos que no fueron considerados en el modelo del sistema. La segunda es garantizar la minimización del efecto de las entradas de perturbación sobre la señal de desempeño del sistema. Finalmente, se resalta que las funciones de ponderación

no son implementadas físicamente en el proyecto de los controladores \mathbf{H}_∞ , pues son únicamente consideradas en el proceso de síntesis del controlador como pesos en el problema de optimización.

3.2 Selección de las Funciones de Ponderación

La selección de las funciones de ponderación se basa en las características de desempeño deseadas para el sistema en lazo cerrado, en un problema de control específico. El proceso de selección de estas funciones es usualmente hecho por ajustes, donde a cada tentativa los parámetros que definen las funciones de ponderación son alterados hasta obtener parámetros más apropiados. Las funciones de transferencia de las funciones de ponderación frecuentemente usadas en el proyecto de sistemas de control son las siguientes (Zhou y Doyle, 1998):

- Función del tipo paso-bajo \mathbf{W}_p

$$\mathbf{W}_p(s) = \left(\frac{s/\sqrt[k]{M_p} + w_c}{s + w_c\sqrt[k]{\epsilon_p}} \right)^k \quad (3.1)$$

- Función del tipo paso-alto \mathbf{W}_u

$$\mathbf{W}_u(s) = \left(\frac{s + w_c/\sqrt[k]{M_u}}{\sqrt[k]{\epsilon_u}s + w_c} \right)^k \quad (3.2)$$

donde los parámetros M_p e M_u son ganancias en la región de paso, ϵ_p y ϵ_u son las ganancias en la región de rechazo de las funciones \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_u , respectivamente. El parámetro k representa el orden de las funciones de ponderación y w_c la frecuencia de cruzamiento para una ganancia unitaria. La Figura 3.1 muestra la función respuesta en frecuencia de una función del tipo paso-alto donde se indican algunos de sus parámetros.

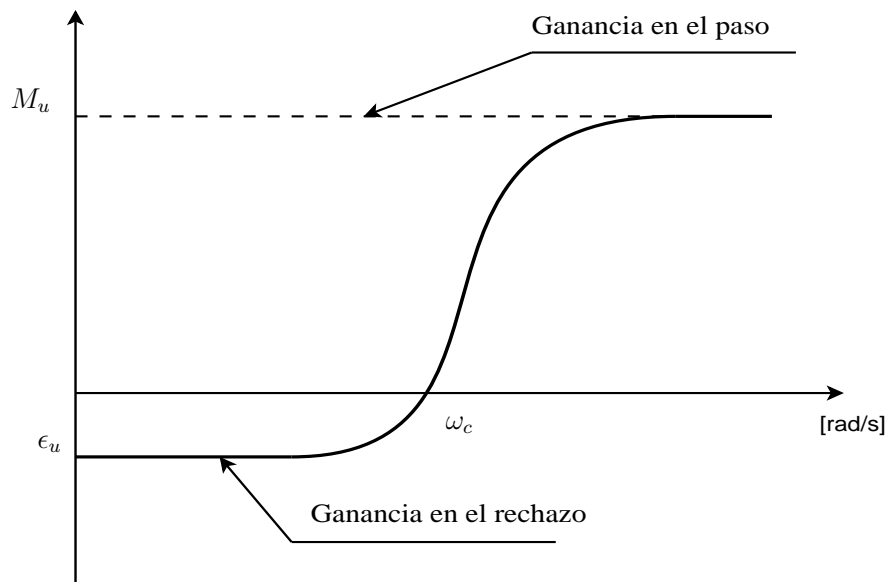


Figura. 3.1: Respuesta en frecuencia da función de transferencia del tipo paso-alta \mathbf{W}_u .

Generalmente, durante la fase de síntesis de controladores \mathbf{H}_∞ las funciones de ponderación son conectadas al modelo de la planta a controlar. La función del tipo paso-bajo \mathbf{W}_p impone un peso grande en la región de baja frecuencia y la función del tipo paso-alto \mathbf{W}_u impone un peso grande en la región de alta frecuencia. En la Figura 3.2 se muestra la respuesta en frecuencia típica de las funciones \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_u juntamente con una curva típica de respuesta en frecuencia de la planta a ser controlada.

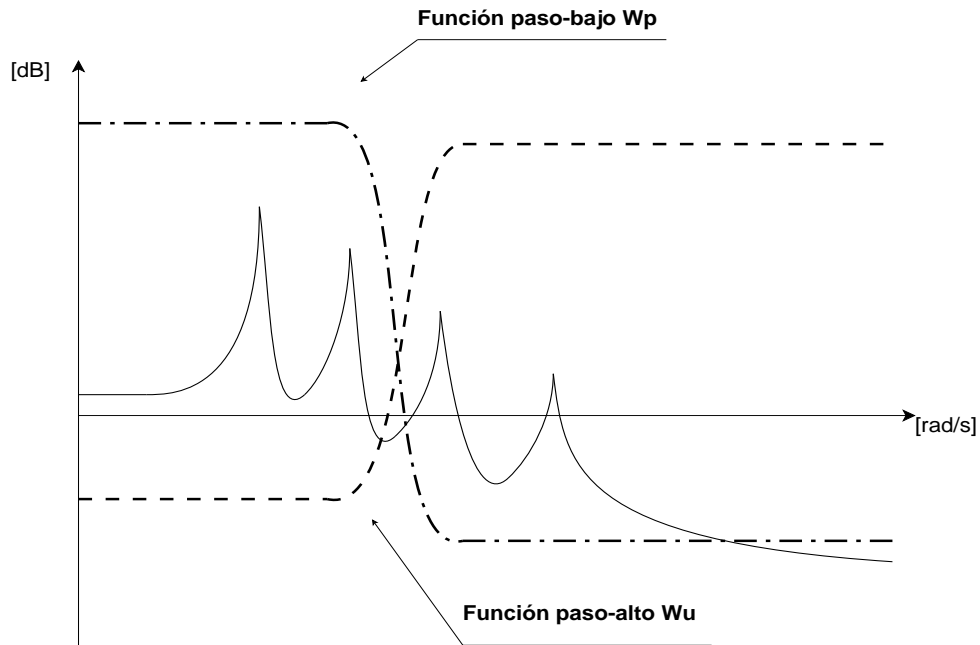


Figura. 3.2: Respuesta en frecuencia de las funciones paso-bajo W_p y paso-alto W_u .

3.3 Problema de Control H_∞ Usando Funciones de Ponderación

Quando las funciones de ponderación son introducidas en el problema de control H_∞ , generalmente, dos salidas son consideradas en el sistema a controlar. La primera corresponde a la señal de desempeño del sistema y la otra corresponde a la fuerza de control del sistema. El hecho de considerar a la fuerza de control como salida del sistema permite (utilizando funciones de ponderación) limitar o restringir la acción del controlador, mejorando así las características de estabilidad del sistema controlado (se evita el efecto *spillover*). A seguir se muestra como son utilizadas las funciones de ponderación en el problema de control H_∞ .

Considérese el sistema dinámico presentado en la Figura 2.1 y dos funciones de ponderación, una del tipo paso-bajo W_p y otra del tipo paso-alto W_u . Estas funciones de ponderación son conectadas con la planta P . La función de ponderación W_p es colocada en la salida de la señal de desempeño z imponiendo un peso alto, por ejemplo, en la región de baja frecuencia del sistema. Esto significa, en el contexto del problema de control H_∞ , priorizar la atenuación de la vibración de modos de baja frecuencia del sistema. La función de ponderación W_u es colocada en la salida de la fuerza de control u , imponiendo un peso alto, por ejemplo, en la región de alta frecuencia lo que implica minimizar la fuerza de control en esta región. Esto induce al controlador a actuar principalmente en un rango de frecuencia deseado. La conexión entre la planta P con las funciones de ponderación W_p y W_u genera una planta aumentada Pa cuya configuración es mostrada en la Figura 3.3.

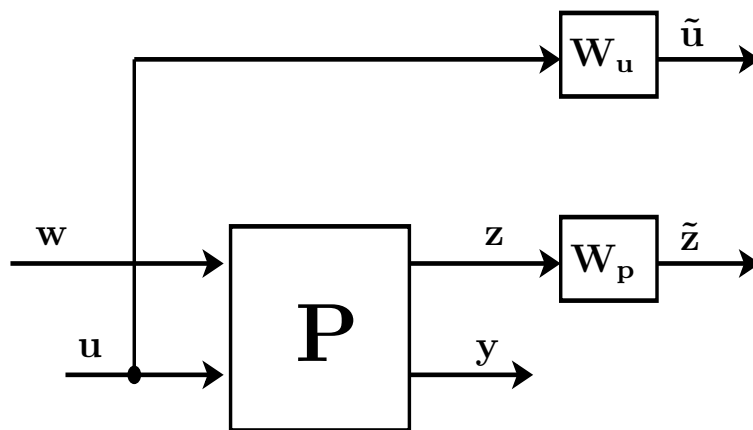


Figura. 3.3: Configuración de la planta aumentada Pa . Conexión de la planta P con las funciones de ponderación W_p y W_u .

La representación en espacio de estados de las funciones de ponderación W_p y W_u

es,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{z} \\ \tilde{\mathbf{z}} &= \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{D}_p \mathbf{z}\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{D}_u \mathbf{u}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Usando las ecuaciones (3.3) y (3.4) junto con la representación en espacio de estados de la planta \mathbf{P} , presentada en las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3), la representación en espacio de estados de la planta aumentada \mathbf{P}_a es obtenida, y puede ser descrita de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_u \\ \dot{\mathbf{x}}_p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_p \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_a} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_p \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{a1}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_p \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{a2}} \mathbf{u}\quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{a1}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a11}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a12}} \mathbf{u}\quad (3.6)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{a2}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a21}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a22}} \mathbf{u}\quad (3.7)$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (3.5), (3.6) e (3.7) y considerando $\mathbf{x}_a = [\mathbf{x} \quad \mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_p]^T$, y $\mathbf{z}_a = [\tilde{\mathbf{z}} \quad \tilde{\mathbf{u}}]^T$ se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_a &= \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_{a1} \mathbf{w} + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{u} \\ \mathbf{z}_a &= \mathbf{C}_{a1} \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_{a11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{a12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{a2} \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_{a21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{a22} \mathbf{u}\end{aligned}\tag{3.8}$$

Luego, usando (3.8) y la representación en espacio de estados del controlador \mathbf{K} presentado en las ecuaciones (2.4) y (2.5), y considerando $\mathbf{D}_{a22} = \mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ (puesto que \mathbf{u} no afecta y directamente), se obtiene la representación en espacio de estados del sistema en lazo cerrado de la planta aumentada $\mathbf{T}_{a_{zw}}$ descrita como

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{a2} & \mathbf{B}_{a2} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_{a2} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a1} + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{a21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z}_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a1} + \mathbf{D}_{a21} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{a1} & \mathbf{D}_{a12} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{a11} + \mathbf{D}_{a12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} \mathbf{w}\end{aligned}\tag{3.9}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_{a2}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_{a2} & \mathbf{B}_{a2}\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_{a2} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a1} + \mathbf{B}_{a2}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{a21} \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a1} + \mathbf{D}_{a21}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_{a1} & \mathbf{D}_{a12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{a11} + \mathbf{D}_{a12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

la función de transferencia de $\mathbf{T}_{a_{zw}}$, que incluye las funciones de ponderación, es dada por

$$\mathbf{T}_{a_{zw}}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}} \tag{3.11}$$

Utilizando la salida de desempeño modificada \tilde{z} y la fuerza de control modificada \tilde{u} , se puede sintetizar un controlador \mathbf{K} dado por las matrices $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c)$ que busque el desempeño deseado para el sistema en lazo cerrado $\mathbf{T}_{a_{zw}}$, como fue mostrado en (2.13).

Recordemos que $\mathbf{T}_{a_{zw}}$ es utilizada unicamente para sintetizar el controlador \mathbf{K} cuyo desempeño será evaluado al ser conectado con la planta \mathbf{P} (sin el empleo de las funciones de ponderación, que fueron usadas apenas para el proyecto del controlador)

CAPÍTULO IV

MÉTODO PROPUESTO

El propósito de este capítulo es mostrar el método empleado en este trabajo para sintetizar un controlador modal. Este método utiliza dos nuevas funciones de ponderación que permiten sintetizar un controlador que se centre en la atenuación de la vibración del sistema en análisis en una determinada región en frecuencia, correspondiente a un modo de vibrar.

4.1 Método de las Funciones de Ponderación

El método de las funciones de ponderación se basa en la teoría presentada en el Capítulo 3, donde se muestra las aplicaciones de las funciones de ponderación para caracterizar el comportamiento del controlador y el mismo tiempo, conseguir objetivos específicos de desempeño y estabilidad del sistema controlado. Este método utiliza la planta aumentada \mathbf{P}_a para sintetizar un controlador modal. La planta \mathbf{P}_a es obtenida conectando la planta \mathbf{P} , que representa el sistema original que se desea controlar, con dos funciones de ponderación \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_u . Estas funciones, \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_u , tienen por objetivo hacer que el controlador modal atenúe un cierto modo de vibrar de la planta \mathbf{P} (el modo de interés).

4.1.1 Características de las funciones de ponderación W_p y W_u

La primera función de ponderación W_p es del tipo paso-banda. Esta función impone un peso grande en los alrededores de la frecuencia de resonancia del modo que se desea controlar, lo que significa (dentro del contexto del problema de control H_∞) priorizar la reducción de la vibración de aquel modo. La segunda función de ponderación W_u es del tipo rechaza-banda. Esta función impone un peso grande fuera de la región en frecuencia del modo de interés, haciendo con que la fuerza de control sea mínima en esta región, evitando la excitación de estos modos. Esto hace que el controlador modal solamente busque atenuar el modo de interés. Como ejemplo, la Figura 4.1 muestra la respuesta en frecuencia de las funciones de ponderación W_p y W_u juntamente con una curva de respuesta en frecuencia de la planta. En este caso, estas funciones están focalizadas en el segundo pico de la función respuesta en frecuencia de la planta, correspondientemente al segundo modo de vibrar.

4.1.2 Determinación de las funciones de ponderación

Para calcular las funciones de ponderación W_p y W_u es posible usar una modificación de la formulación propuesta por en las ecuaciones (3.1) y (3.2). Esta modificación es realizada puesto que las funciones de ponderación utilizadas para sintetizar un controlador modal son del tipo paso-banda y rechazo-banda, como se explicó anteriormente, y la formulación propuesta en Zhou y Doyle (1998) es utilizada para calcular funciones de

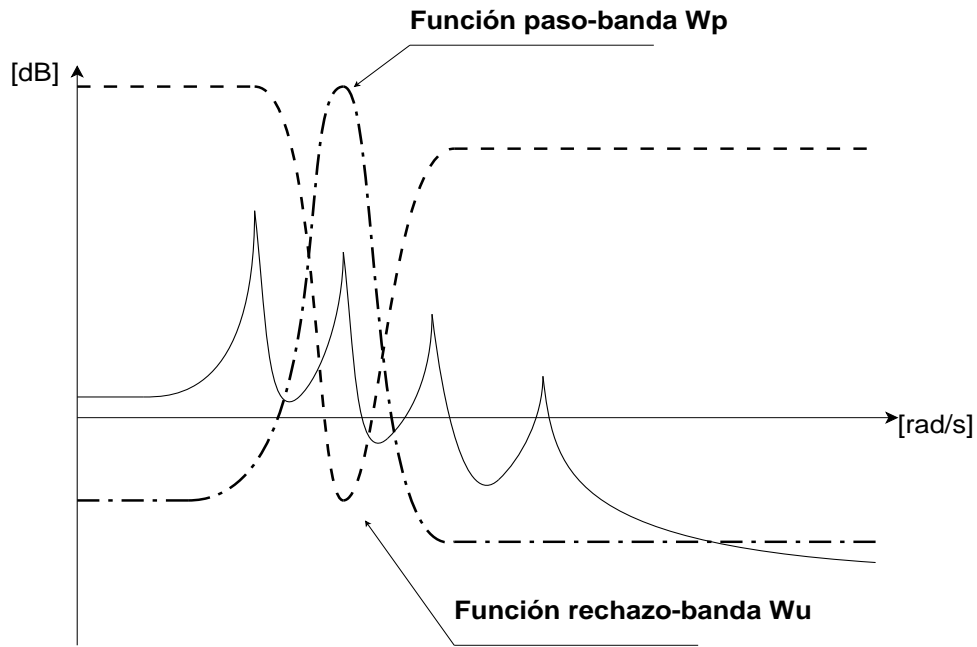


Figura. 4.1: Respuesta en frecuencia de las funciones de ponderación W_p y W_u para la atenuación del segundo pico.

ponderación del tipo paso-bajo y paso-alto, como se explicó en el Capítulo 3. Esta modificación consiste básicamente en hacer una composición de dos tipos básicos de funciones de ponderación, una del tipo paso-bajo y otra función del tipo paso-alto, para generar una función compuesta del tipo paso-banda o rechazo-banda. Por ejemplo, una función del tipo paso-banda se obtiene a través de la multiplicación de una función paso-bajo con una función paso-alto. La selección de los parámetros para cada función básica debe ser adecuada, siendo que estos parámetros definen la banda de paso de la función compuesta. Para generar una función del tipo rechazo-banda la inversa de la fórmula de la función paso-banda es usada.

La expresión matemática para calcular las funciones \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_u , en el dominio de Laplace es dada por:

- Función del tipo paso-banda \mathbf{W}_p

$$\mathbf{W}_p(s) = \left(\frac{s + w_{c1}/\sqrt[k]{M_p}}{\sqrt[k]{\epsilon_p}s + w_{c1}} \right)^k \times \left(\frac{s/\sqrt[k]{M_u} + w_{c2}}{s + w_{c2}\sqrt[k]{\epsilon_u}} \right)^k \quad (4.1)$$

- Función del tipo rechazo-banda \mathbf{W}_u

$$\mathbf{W}_u(s) = \left(\frac{\sqrt[k]{\epsilon_p}s + w_{c1}}{s + w_{c1}/\sqrt[k]{M_p}} \right)^k \times \left(\frac{s + w_{c2}\sqrt[k]{\epsilon_u}}{s/\sqrt[k]{M_u} + w_{c2}} \right)^k \quad (4.2)$$

Los parámetros M_p y M_u son ganancias en la región de paso, ϵ_p y ϵ_u son las ganancias en la región de rechazo de las funciones \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_u , respectivamente; w_{c1} y w_{c2} representan las frecuencias de corte para cada función do tipo paso-banda o rechazo-banda. Estos dos últimos parámetros son los que definen la banda de paso o rechazo de la función compuesta, y por tanto la selección de estos parámetros determina la región en frecuencia en que se desea controlar la vibración, pudiendo estar relacionada a un modo específico. El valor $2k$ determina el orden de las funciones de ponderación compuesta.

4.1.3 Síntesis del controlador modal

Considerando que se desea controlar un modo específico de la planta P , el controlador modal será sintetizado utilizando una planta aumentada P_a , que se obtiene de la conexión de la planta P con las dos funciones de ponderación W_p y W_u , conforme se indica en la Sección 3.3. Los pasos para sintetizar un controlador modal son los siguientes:

- Paso 1: Definir el modo de la planta P que se desea controlar.
- Paso 2: Definir los parámetros que definen las funciones W_p y W_u .
- Paso 3: Obtener la planta aumentada P_a .
- Paso 4: Sintetizar el controlador modal utilizando la planta P_a .
- Paso 5: Conectar la planta P con el controlador modal sintetizado para obtener el sistema controlado.
- Paso 6: Verificar la estabilidad y el desempeño del sistema controlado.

La estabilidad y el desempeño del sistema controlado dependen de las características de las funciones W_p y W_u . Esto indica que se puede manipular parámetros de estas funciones de ponderación para obtener un controlador modal que busque satisfacer los requisitos de desempeño y estabilidad deseados.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

En este Capítulo es presentado un ejemplo donde es aplicado el método de control modal desarrollado en el capítulo anterior. Para este propósito, se utiliza el modelo matemático de una viga flexible engastada en uno de sus extremos y libre en el otro. El modelo de la viga es obtenido a través del método de elementos finitos y representa el sistema de análisis o planta P . Esta planta P es utilizada para sintetizar controladores modales para atenuar un modo de vibrar específico de la viga cuando esta sea excitada por una fuerza externa. Finalmente un análisis de los resultados obtenidos es realizado.

5.1 Descripción del problema

Considérese una viga que esta engastada en una de sus extremidades y libre en la otra. Un sensor y dos actuadores son colocados en el cuerpo de la viga; el sensor es colocado en el extremo libre de la viga y los actuadores a lo largo de la misma, tal como se muestra en la Figura 5.1. El sensor es utilizado para medir la aceleración del extremo libre de la viga, uno de los actuadores aplica una fuerza de perturbación y el otro aplica una fuerza de control en la viga. El conjunto compuesto por la viga, sensor y actuadores

conforman el sistema de análisis P.

Las características de la viga son las siguientes :

- Longitud: $L = 1m$;
- Altura: $h = 0,003m$;
- Base: $b = 0,032m$;
- Módulo de Elasticidad: $E = 69 \times 10^9 Pa$;
- Densidad: $\rho = 2,88 \times 10^3 kg/m^3$.

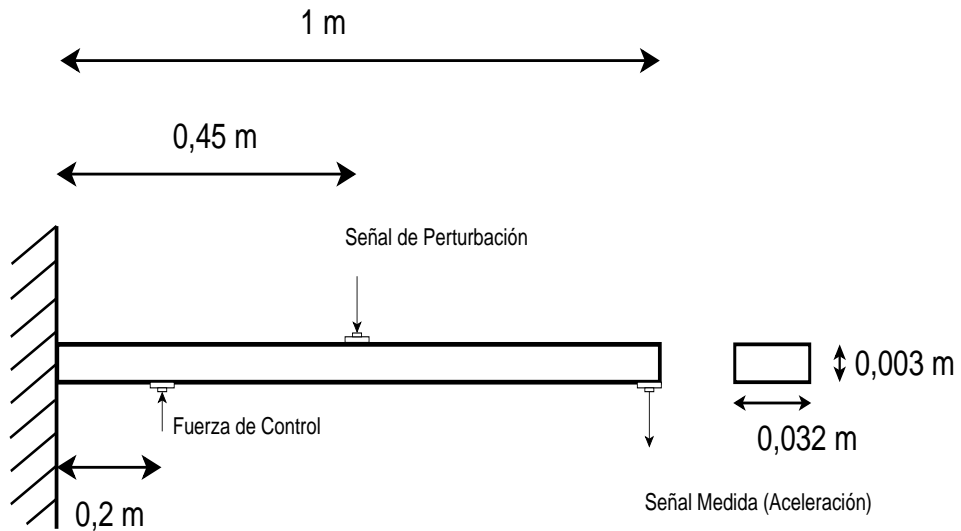


Figura. 5.1: Sistema o planta de análisis.

El modelo de elementos finitos de la viga utilizado considera 20 elementos finitos de igual tamaño, 21 nodos y 42 grados de libertad. Cada elemento de la viga posee dos nodos y para cada nodo es atribuido dos grados de libertad. Un elemento en general de la viga posee los nodos $(i, i + 1)$; el nodo i posee el par de grados de libertad (q_{2i-1}, q_{2i}) . Los grados de libertad que poseen subíndice impar, q_{2i-1} , representan el desplazamiento vertical del nodo i de la viga, y aquellos con subíndice par, q_{2i} , representación un rotación angular del mismo nodo. La Figura 5.2 muestra la forma general de un elemento finito de la viga la notación usada para los grados de libertad.

El modelo matemático de la viga fue obtenido según el método de los elementos finitos (Chandrupatla y Belegundu, 2011) utilizando la ecuación de Euler-Bernoulli para una viga en flexión y considerando amortiguamiento proporcional definido por $\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$, donde $\alpha = 2.5 \times 10^{-6}$ y $\beta = 5.0 \times 10^{-3}$, \mathbf{M} es la matriz de masa y \mathbf{K} es la matriz de rigidez. Este modelo describe el comportamiento dinámico del cuerpo de la viga cuando es excitado por fuerzas externas.

A seguir son definidas algunas características para la representación en espacio de estados del modelo de la viga:

- El vector de estado \mathbf{x} está compuesto por el vector de grados de libertad y su derivada. El primer nodo de la viga es fijo, entonces no posee grados de libertad.
- La perturbación \mathbf{w} es una fuerza aplicada en el nodo 10 (ver Figura 5.3).
- La fuerza de control \mathbf{u} es aplicada en el nodo 5 (ver Figura 5.3).

- o La señal de salida z es la aceleración del extremo libre de la viga (nodo 21). Esta señal es enviada al controlador, representando también la señal medida y .

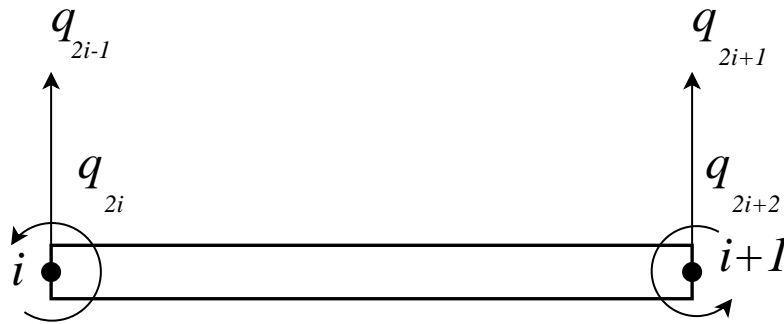


Figura. 5.2: Elemento finito de la viga engastada

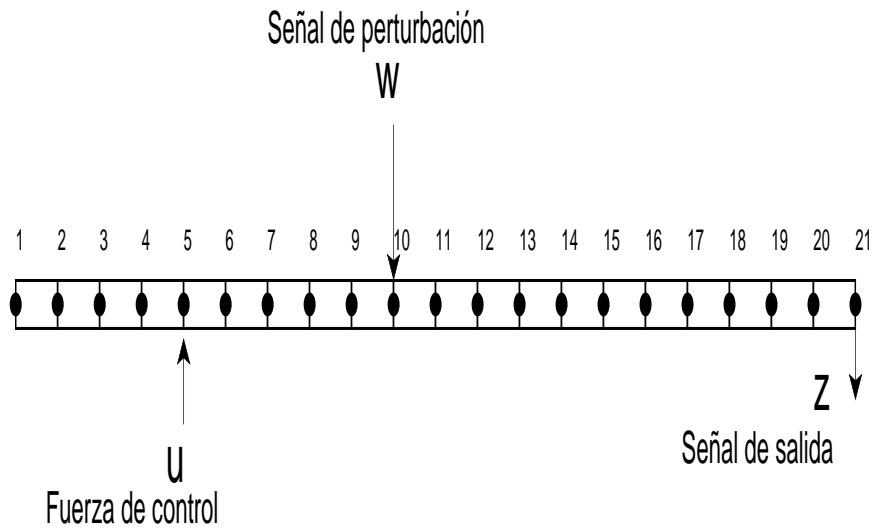


Figura. 5.3: Malla de elementos finitos de la viga flexible indicando los respectivos números de los nodos.

El modelo de la viga, cuando se considera 20 elementos finitos, genera una planta P de orden 40. Esta planta representa un modelo que contiene 20 modos de vibrar de la

viga. Una reducción del modelo es hecho utilizando la función *modreal* (ver Apéndice A) del paquete Robust Control Toolbox del Matlab, considerando los 7 primeros modos de vibrar de la viga. Este modelo reducido es llamado de planta nominal \mathbf{P}_n y corresponde al rango de frecuencia de análisis (rango de frecuencia de interés) que comprende de 0 hasta 2000 *rad/s*. La Figura 5.4 muestra la función respuesta en frecuencia de las función de transferencia de la planta \mathbf{P} y de la planta nominal \mathbf{P}_n .

La función de transferencia de \mathbf{P} corresponde a la salida de desempeño z (aceleración del extremo libre de la viga) en relación a la entrada de perturbación w (fuerza vertical). En la Figura 5.4, se observa que los siete primeros modos que conforman la planta nominal \mathbf{P}_n son los más representativos presentado picos de mayor magnitud. Así, la planta nominal \mathbf{P}_n es usada para sintetizar los controladores modales.

Las frecuencias de resonancia de \mathbf{P}_n son presentadas en la Tabla 5.1.

Tabla. 5.1: Frecuencias de resonancia de la planta nominal \mathbf{P}_n .

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Freq. (<i>rad/s</i>)	14,9	93,4	262	513	847	1270	1770

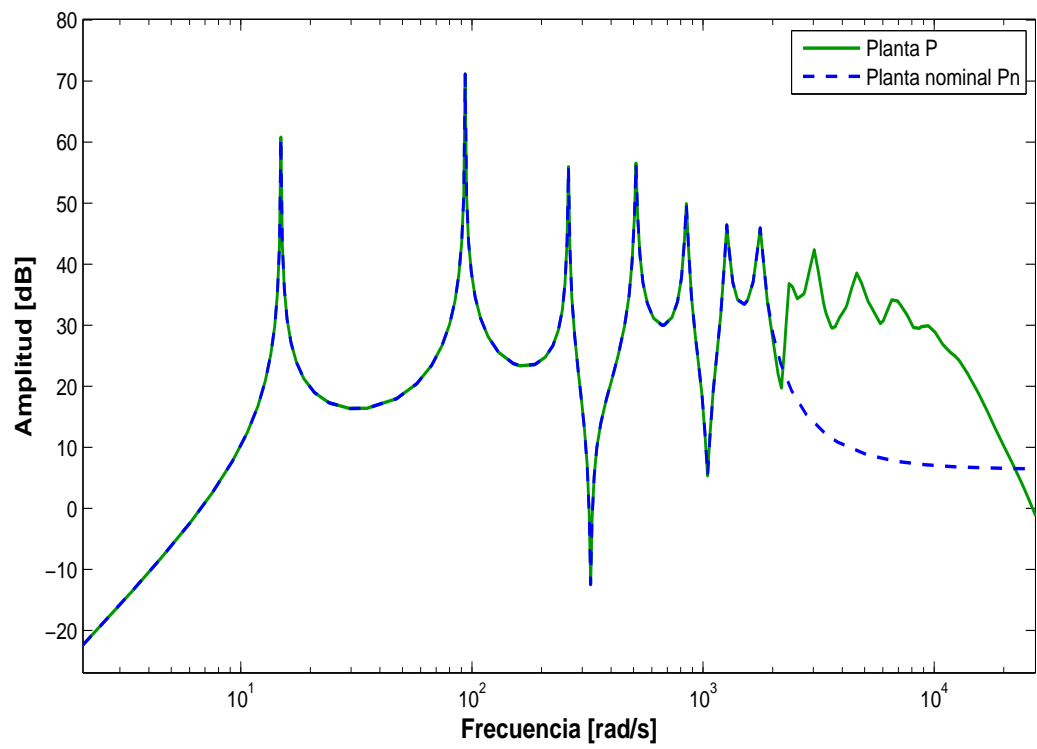


Figura. 5.4: Respuesta en frecuencia de la planta P y la planta nominal P_n .

5.2 Síntesis del Controlador Modal para el Segundo Modo de la Viga

5.2.1 Selección de las funciones de ponderación

Como se explicó en el capítulo anterior, en la Sección 4.2, la selección de las funciones de ponderación va a depender del modo de vibrar que se quiere controlar. Así, para controlar diferentes modos de vibrar serán usadas diferentes funciones de ponderación. Para controlar el segundo modo de vibrar de la viga, las siguientes funciones de ponderación fueron seleccionadas:

- Función del tipo paso-banda W_{p2} :

$$W_{p2}(s) = \frac{1 \times 10^{-4}s^6 + 4,5s^5 + 6,7 \times 10^4s^4 + 3,3 \times 10^8s^3 + 7,5 \times 10^8s^2 + 5,6 \times 10^8s + 1,4 \times 10^8}{s^6 + 675s^5 + 1,8 \times 10^5s^4 + 2,6 \times 10^7s^3 + 2,1 \times 10^9s^2 + 8,5 \times 10^{10}s + 1,4 \times 10^{12}}$$

- Función del tipo rechazo-banda W_{u2} :

$$W_{u2}(s) = \frac{1 \times 10^7s^6 + 5,2 \times 10^9s^5 + 1,1 \times 10^{12}s^4 + 1,3 \times 10^{14}s^3 + 8,6 \times 10^{15}s^2 + 2,9 \times 10^{17}s + 4,2 \times 10^{18}}{s^6 + 6474s^5 + 1,3 \times 10^7s^4 + 1,01 \times 10^{10}s^3 + 1,1 \times 10^{11}s^2 + 3,6 \times 10^{11}s + 4,21 \times 10^{11}}$$

Las funciones de ponderación W_{p2} y W_{u2} fueron calculadas usando las ecuaciones (4.1) y (4.2) respectivamente. La Figura 5.5 muestra la respuesta en frecuencia de ambas funciones donde se puede observar que estas se enfocan en el segundo modo de la planta P_n .

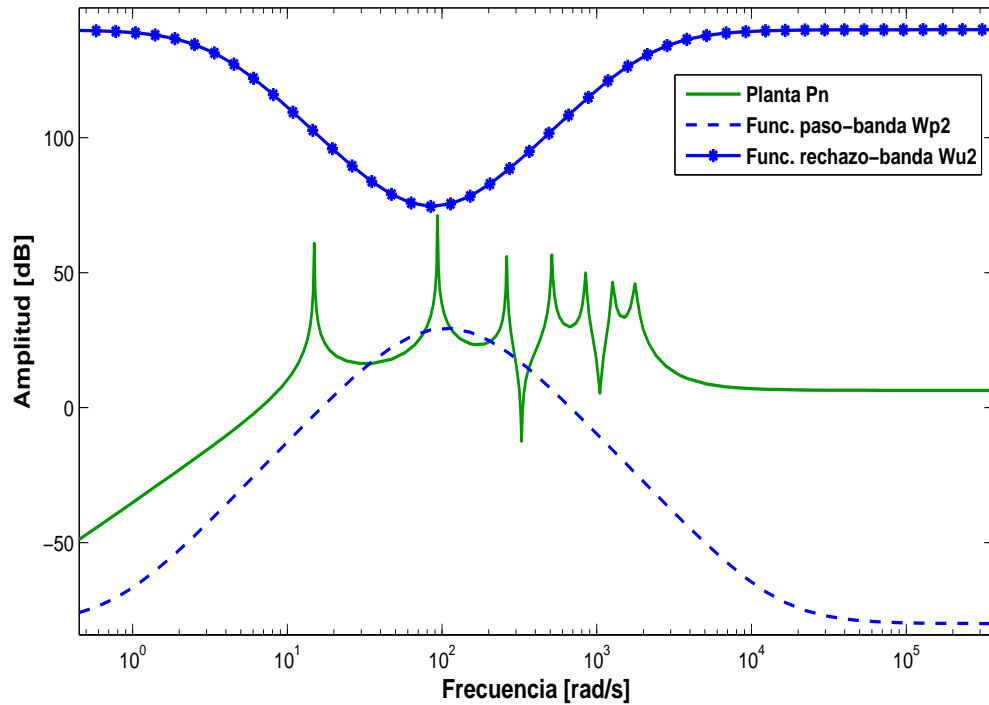


Figura. 5.5: Respuesta en frecuencia de las funciones de ponderación para el segundo modo de la planta **Pn**.

Los parámetros de W_{p2} y W_{u2} son mostrados en la Tabla 5.2. Estos parámetros fueron seleccionados para priorizar la atenuación del segundo modo de vibrar de la viga flexible. Así, como la frecuencia de resonancia del segundo modo es $93,4 \text{ rad/s}$ (ver Tabla 5.1), entonces las frecuencias de corte para cada función de ponderación, w_{c1} y w_{c2} , son próximas a esta.

Los parámetros $(M_p, M_u, \epsilon_p, \epsilon_u)$ influyen directamente en el desempeño del controlador modal y la estabilidad del sistema en lazo cerrado, sin embargo existe un compromiso entre estas características. Estos parámetros deben ser seleccionados adecuada-

mente para determinar las funciones de ponderación que permiten sintetizar controladores modales de buen desempeño sin desestabilizar el sistema controlado. Generalmente, la selección de estos parámetros se realiza por tentativas, donde se verifica la forma de las funciones de transferencia de las funciones de ponderación y los resultados obtenidos para el sistema controlado.

El valor $2k$ define el orden de las funciones de ponderación. En este trabajo, todas las funciones de ponderación son determinadas con un valor de $k = 3$, lo que determina funciones de ponderación de orden seis.

Tabla. 5.2: Parámetros de cálculo de las funciones de ponderación para el segundo modo de la planta \mathbf{P}_n .

Parámetros	\mathbf{W}_{p2}	\mathbf{W}_{u2}
k	3	3
w_{c1}	75	75
w_{c2}	150	100
M_p	10^6	10^4
M_u	10^6	10^4
ϵ_p	1	1
ϵ_u	1	1

5.2.2 Síntesis del controlador modal

La síntesis del controlador modal se realiza utilizando una planta aumentada \mathbf{P}_a y resolviendo el problema de optimización presentado en la Ecuación (2.13), como se explica en la Sección 4.1 del capítulo anterior. La función *hinfsyn* del paquete Robust Control Toolbox de Matlab es usada para este propósito (ver Apéndice **B**).

El resultado de este proceso es la síntesis de un controlador modal de alto orden. El controlador obtenido es de orden 26, correspondiente al orden de la planta aumentada P_a , y se consigue una reducción de 36,4 dB de la amplitud del segundo modo. La Figura 5.6 muestra la respuesta en frecuencia de la planta P_n y el sistema en lazo cerrado que presenta a la planta P_n conectada con el controlador modal.

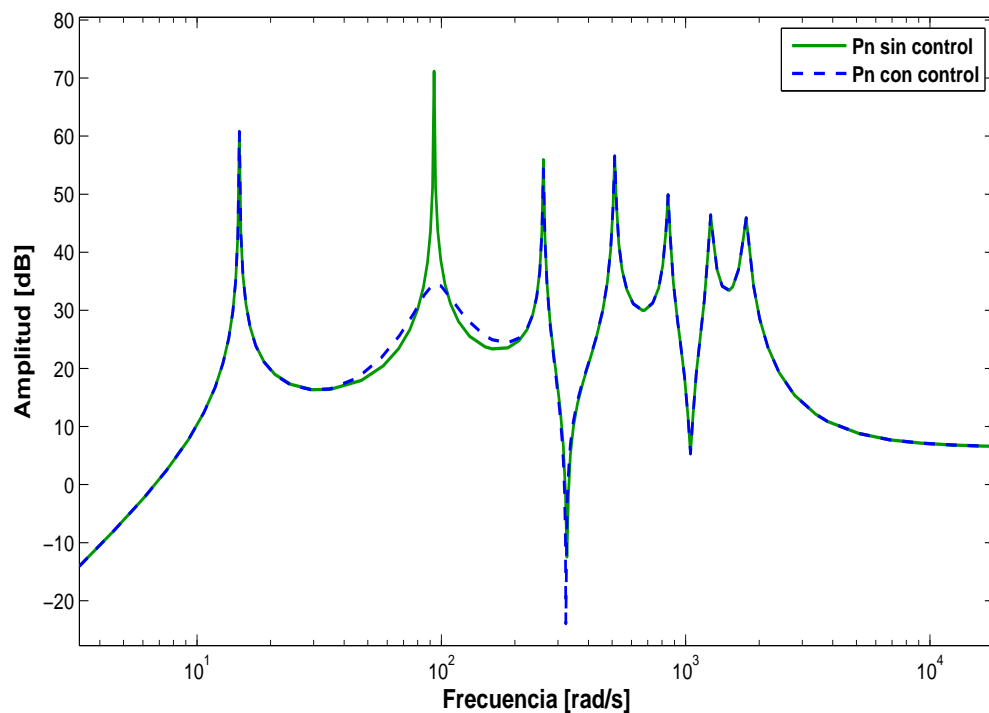


Figura. 5.6: Respuesta en frecuencia de la planta P_n con y sin control. Control del segundo modo.

En la Figura 5.6 se nota que la reducción de amplitud ocurre principalmente en el segundo modo (reducción de la magnitud del segundo pico de la respuesta en frecuencia de la planta P_n), lo cual fue predeterminado por las funciones de ponderación W_{p2} y W_{u2} . Así, el objetivo fue alcanzado siendo que el controlador consiguió atenuar el modo seleccionado (modo de interés).

Analizando el sistema, controlado y no controlado, en el dominio del tiempo se nota también como el controlador modal consiguió reducir el modo de interés. Para obtener la respuesta temporal de la planta P_n fue usado una señal de excitación (señal de perturbación w) del tipo sinusoidal de 0,1 de amplitud y un barrido en frecuencia de 1 a 300 Hz durante 100 segundos con 10000001 puntos. Esta señal de excitación es utilizada para analizar la respuesta temporal del sistema controlado de todos los casos que son estudiados en este trabajo.

La Figura 5.7 muestra la respuesta en el tiempo de la planta P_n con y sin control. Se nota que también los modos próximos al segundo modo son atenuados ligeramente por el controlador. Este comportamiento está directamente relacionado con las bandas de paso y rechazo y las funciones de ponderación.

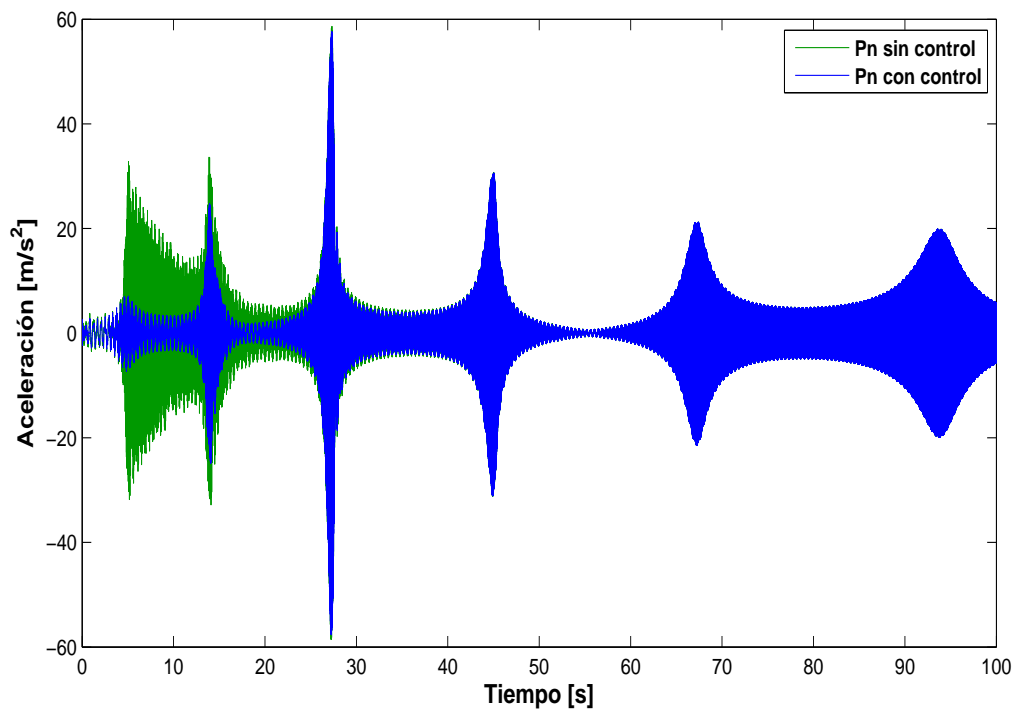


Figura. 5.7: Respuesta en el tiempo de la planta Pn con y sin control. Control del segundo modo.

5.2.3 Análisis de la fuerza de Control

El propósito de esta sección es analizar la fuerza de control aplicada por cada controlador modal durante el control de la planta P_n . El interés es conocer la magnitud de las fuerzas aplicadas por los controladores modales sintetizados. Para este propósito son analizados los gráficos la fuerza de control en el dominio del tiempo. Estos gráficos son obtenidos registrando la señal de salida del controlador (dentro del sistema controlado) cuando la planta es excitada por una señal de perturbación (la misma señal de perturbación utilizada para obtener la respuesta temporal de la planta P_n), como se explicó en la Sección 5.2.2.

La Figura 5.8 presenta el gráfico la fuerza de control utilizada para atenuar la vibración del segundo modo de la planta P_n . Esta figura muestra que la magnitud de la fuerza de control, en este caso, alcanza un valor máximo de $0,23 N$. La reducción de la vibración del modo de interés, obtenida con esta fuerza de control es de $36,4 dB$, como se muestra en la Sección 5.2.2.

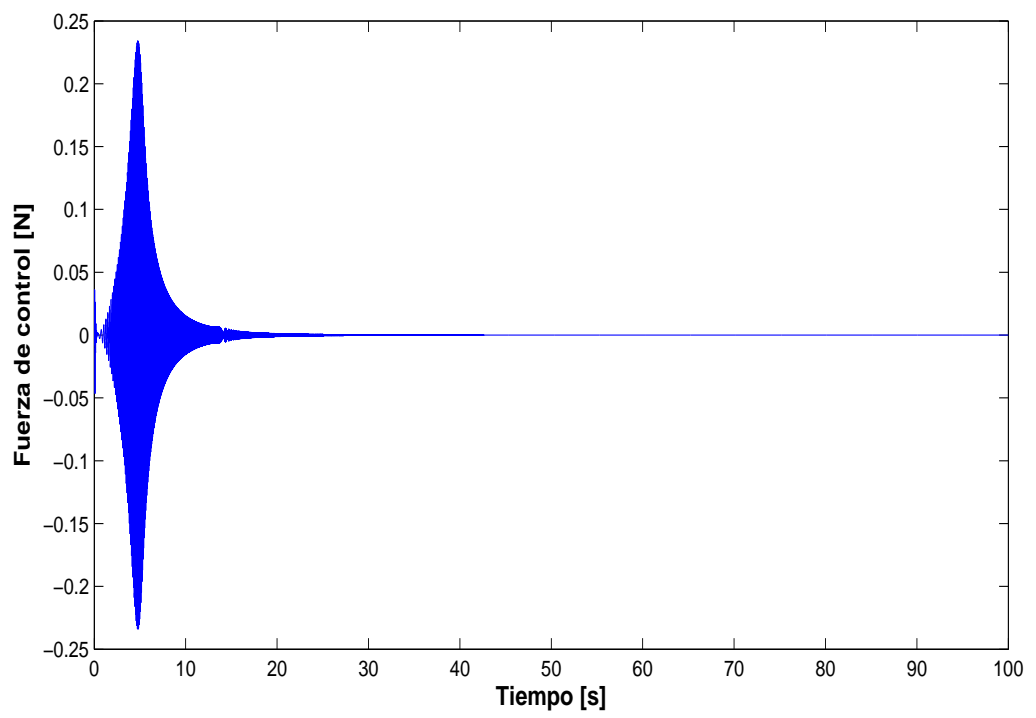


Figura. 5.8: Fuerza de control aplicada por el controlador modal sintetizado utilizando funciones de ponderación. Control del segundo modo de la planta P_n .

Anteriormente se realizo el control del segundo modo de vibrar, ahora son mostrados algunos resultados donde se usa la misma técnica de control modal, pero aplicado a otros modos de vibrar. Para atenuar otros modos de vibrar, es preciso determinar las nuevas funciones de ponderación de manera que el controlador sea focalizado en la atenuación del modo de interés. A continuación se muestra algunos resultados para el control de otros modos.

5.3 Síntesis del Controlador Modal para el Tercer Modo de la Viga

5.3.1 Selección de las funciones de ponderación

Para controlar el tercer modo de vibrar de la viga, las siguientes funciones de ponderación fueron seleccionadas:

- Función del tipo paso-banda W_{p3} :

$$W_{p3}(s) = \frac{3,5 \times 10^{-3}s^6 + 136,5s^5 + 1,7 \times 10^6s^4 + 7,7 \times 10^9s^3 + 1,4 \times 10^{11}s^2 + 8,4 \times 10^{11}s + 1,7 \times 10^{12}}{s^6 + 1680s^5 + 1,2 \times 10^6s^4 + 4,4 \times 10^8s^3 + 9,2 \times 10^{10}s^2 + 1 \times 10^{13}s + 4,8 \times 10^{14}}$$

- Función del tipo rechazo-banda W_{u3} :

$$W_{u3}(s) = \frac{1 \times 10^7s^6 + 2,2 \times 10^8s^5 + 1,8 \times 10^{11}s^4 + 7,4 \times 10^{13}s^3 + 1,4 \times 10^{16}s^2 + 1,3 \times 10^{18}s + 4,8 \times 10^{19}}{s^6 + 8484s^5 + 2,4 \times 10^7s^4 + 2,4 \times 10^{10}s^3 + 1,8 \times 10^{12}s^2 + 5,2 \times 10^{13}s + 4,28 \times 10^{14}}$$

La Figura 5.9 muestra la respuesta en frecuencia de las funciones de ponderación W_{p3} y W_{u3} , utilizadas para sintetizar un controlador modal para atenuar la vibración del tercer modo de la viga. Estas funciones están focalizadas en el tercer modo de vibrar de la planta P_n .

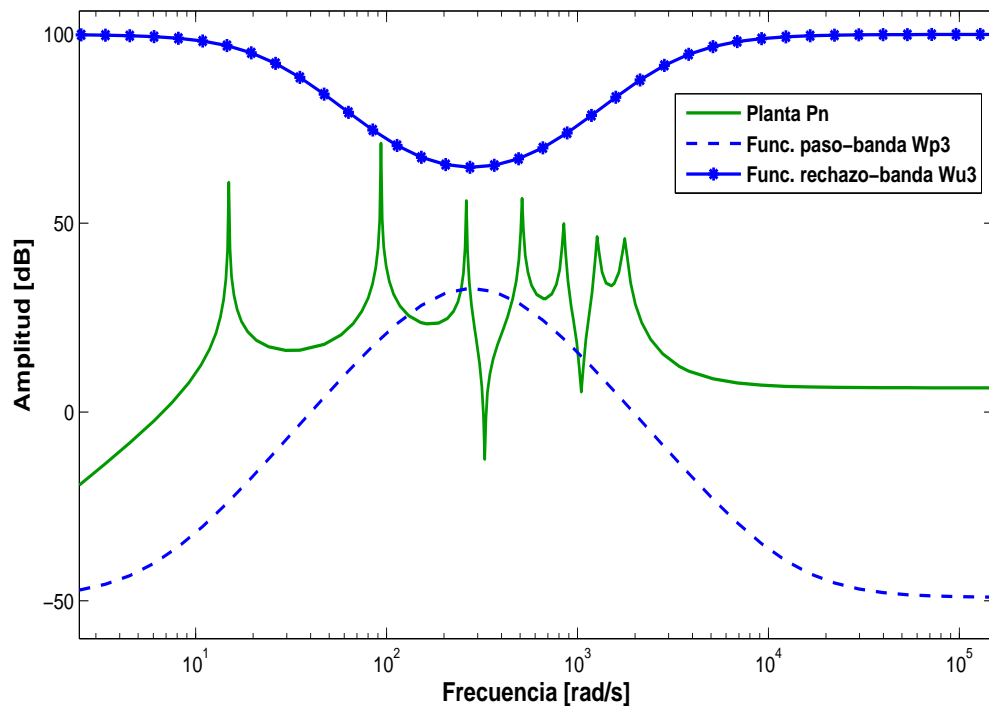


Figura. 5.9: Respuesta en frecuencia de las funciones de ponderación para el tercer modo de vibrar de la planta P_n .

Estas funciones de ponderación son calculadas utilizando nuevos parámetros en las ecuaciones (4.1) y (4.2). Estos parámetros son mostrados en la Tabla 5.3.

La respuesta en frecuencia y en el tiempo de la planta P_n , con y sin control, son presentadas en las Figuras 5.10 y 5.11 respectivamente. En este caso, el controlador modal

Tabla. 5.3: Parámetros de calculo de las funciones de ponderación para el tercer modo de la planta Pn.

Parámetros	W_{p3}	W_{u3}
k	3	3
w_{c1}	280	280
w_{c2}	280	280
M_p	10^5	10^3
M_u	10^5	10^3
ϵ_p	1	0,1
ϵ_u	1	0,1

consiguió reducir 28,0 dB de la amplitud del tercer modo.

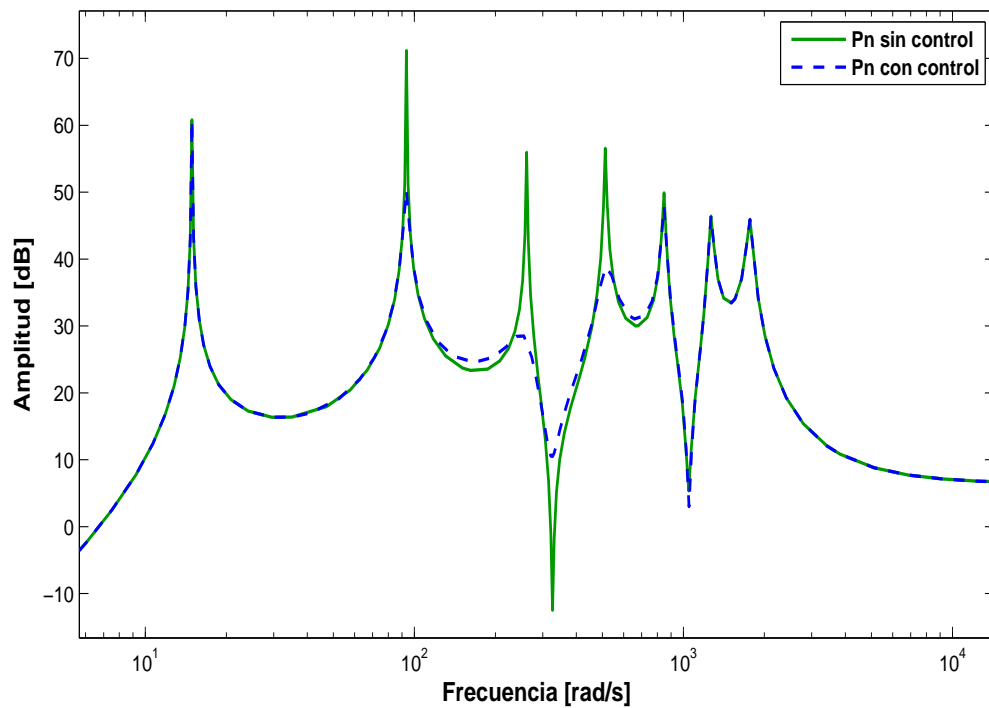


Figura. 5.10: Respuesta en frecuencia de la planta Pn con y sin control. Control del tercer modo.

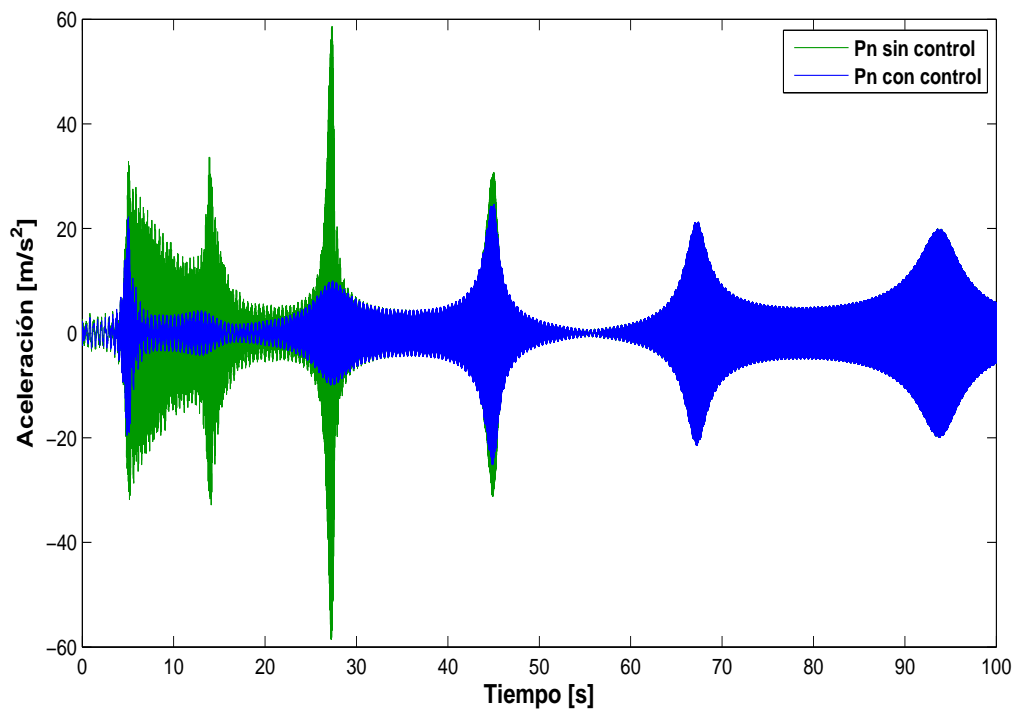


Figura. 5.11: Respuesta en el tiempo de la planta Pn con y sin control. Control del tercer modo.

5.3.2 Análisis de la fuerza de Control

En este caso, la fuerza de control máximo que aplica el controlador modal para atenuar el tercer modo de vibrar de la planta P_n es de $0,14 \text{ N}$. La reducción de la vibración del tercer modo, obtenida con esta fuerza de control es de $28,0 \text{ dB}$, como se muestra en la anterior sección. La La Figura 5.12 presenta el gráfico de fuerza de control utilizado para atenuar la vibración del tercer modo de la planta P_n .

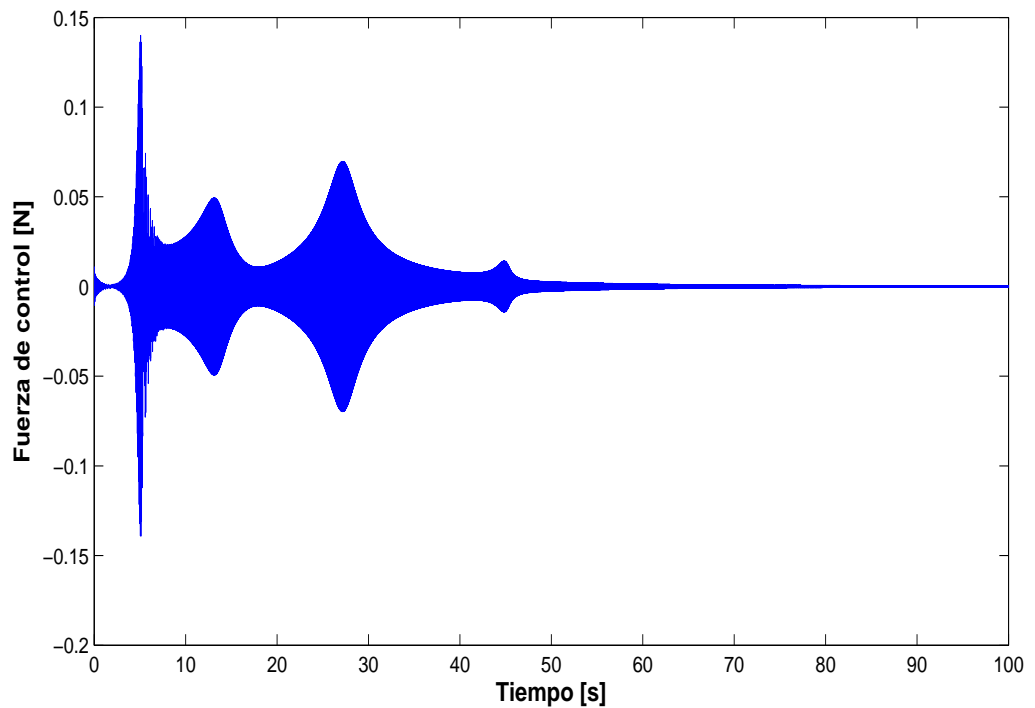


Figura. 5.12: Fuerza de control aplicada por el controlador modal sintetizado utilizando funciones de ponderación. Control del tercer modo de la planta P_n .

5.4 Síntesis del Controlador Modal para el Cuarto Modo de la Viga

5.4.1 Selección de las funciones de ponderación

Para controlar el cuarto modo de vibrar de la viga, las siguientes funciones de ponderación fueron seleccionadas:

- Función del tipo paso-banda W_{p4} :

$$W_{p4}(s) = \frac{1 \times 10^{-3}s^6 + 165s^5 + 9,1 \times 10^4s^4 + 1,6 \times 10^3s^3 + 2,5 \times 10^{12}s^2 + 1,2 \times 10^{13}s + 2,1 \times 10^{13}}{s^6 + 3150s^5 + 4,1 \times 10^6s^4 + 2,9 \times 10^9s^3 + 1,1 \times 10^{12}s^2 + 2,4 \times 10^{14}s + 2,1 \times 10^{16}}$$

- Función del tipo rechazo-banda W_{u4} :

$$W_{u4}(s) = \frac{1 \times 10^7s^6 + 3,3 \times 10^{10}s^5 + 4,5 \times 10^{13}s^4 + 3,3 \times 10^{16}s^3 + 1,3 \times 10^{19}s^2 + 2,9 \times 10^{21}s + 2,7 \times 10^{23}}{s^6 + 3,8 \times 10^4s^5 + 5 \times 10^8s^4 + 2,2 \times 10^{12}s^3 + 1,5 \times 10^{14}s^2 + 3,5 \times 10^{15}s + 2,7 \times 10^{16}}$$

La Figura 5.13 muestra la respuesta en frecuencia de las funciones de ponderación W_{p4} y W_{u4} , utilizadas para sintetizar un controlador modal para atenuar la vibración del cuarto modo de la viga. Estas funciones están tienen sus banda de paso alrededor del cuarto modo de vibrar de la planta P_n .

Los parámetros para las funciones de ponderación W_{p4} y W_{u4} son mostrados en la Tabla 5.4.

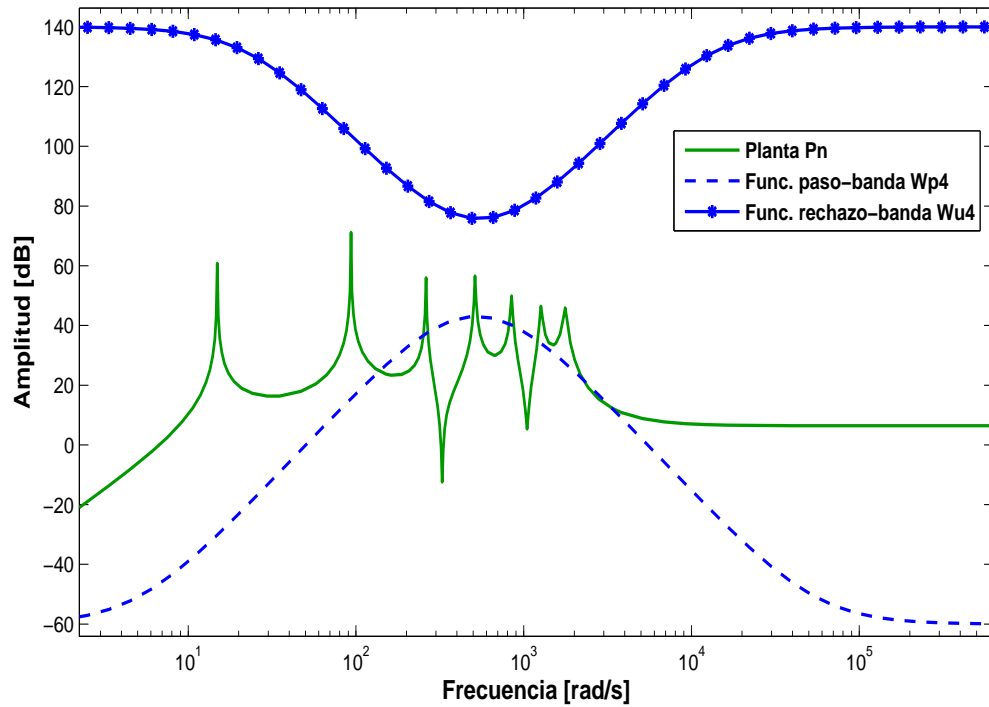


Figura. 5.13: Respuesta en frecuencia de las funciones de ponderación para el cuarto modo de vibrar de la planta **Pn**.

Tabla. 5.4: Parámetros de calculo de las funciones de ponderación para el cuarto modo de la planta **Pn**.

Parámetros	W_{p4}	W_{u4}
k	3	3
w_{c1}	500	500
w_{c2}	550	600
M_p	10^6	10^4
M_u	10^6	10^4
ϵ_p	1	0,1
ϵ_u	1	0,1

La respuesta en frecuencia y en el tiempo de la planta **Pn**, con y sin control, son presentadas en las Figuras 5.14 y 5.15 respectivamente. En este caso, el controlador modal

consiguió reducir 21,4 dB de la amplitud del cuarto modo. Además, se puede observar que los modos próximos al cuarto modo (tercer y quinto modo) también son atenuados, pero principalmente se atenuó el cuarto modo de la planta P_n .

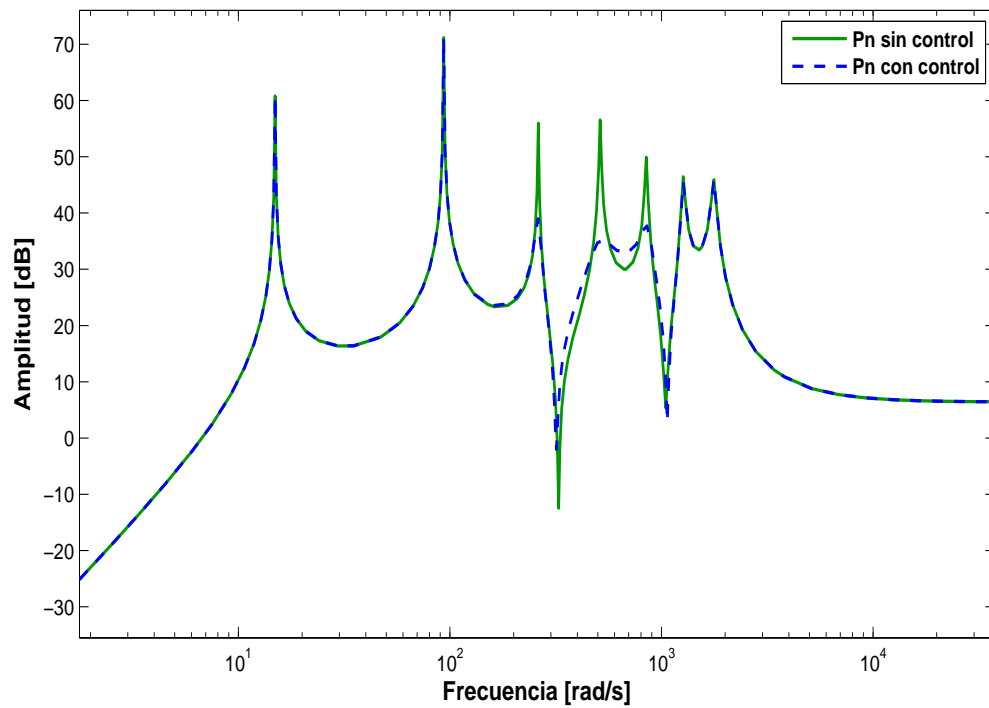


Figura. 5.14: Respuesta en frecuencia de la planta P_n con y sin control. Control del cuarto modo.

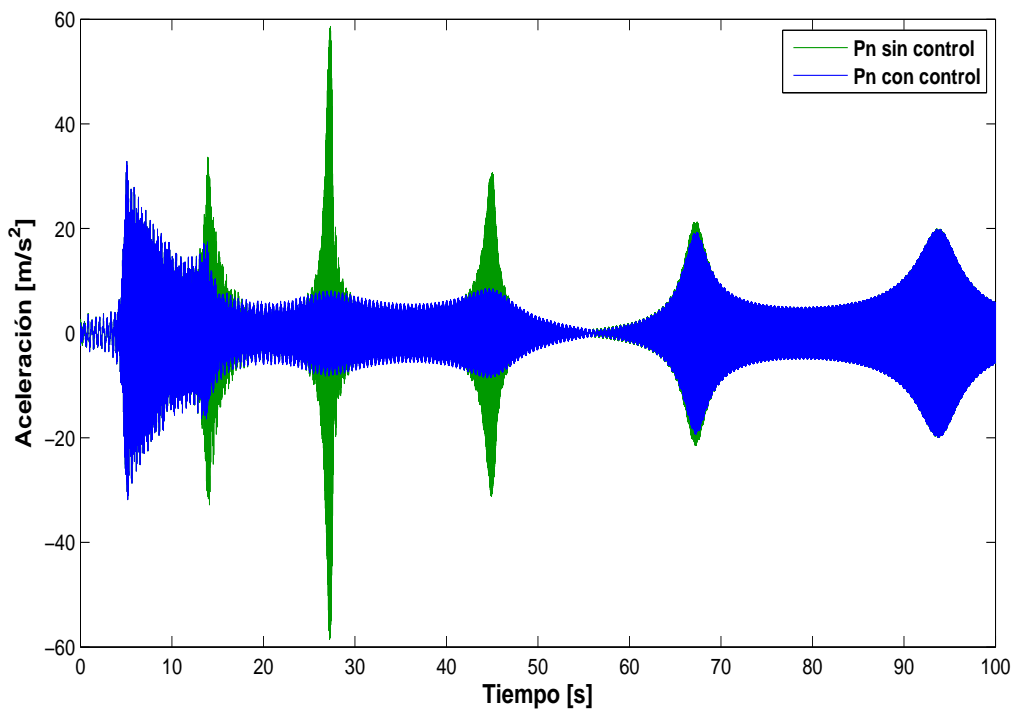


Figura. 5.15: Respuesta en el tiempo de la planta P_n con y sin control. Control del cuarto modo.

5.4.2 Análisis de la fuerza de Control

En este caso, la fuerza de control máxima que aplica el control modal para atenuar el cuarto modo de vibrar de la planta P_n es de $0,073 \text{ N}$. La reducción de la vibración del tercer modo, obtenida con esta fuerza de control es de $21,4 \text{ dB}$, como se muestra en la anterior sección. La La Figura 5.16 muestra el gráfico de fuerza de control utilizada para atenuar la vibración del cuarto modo de la planta P_n .

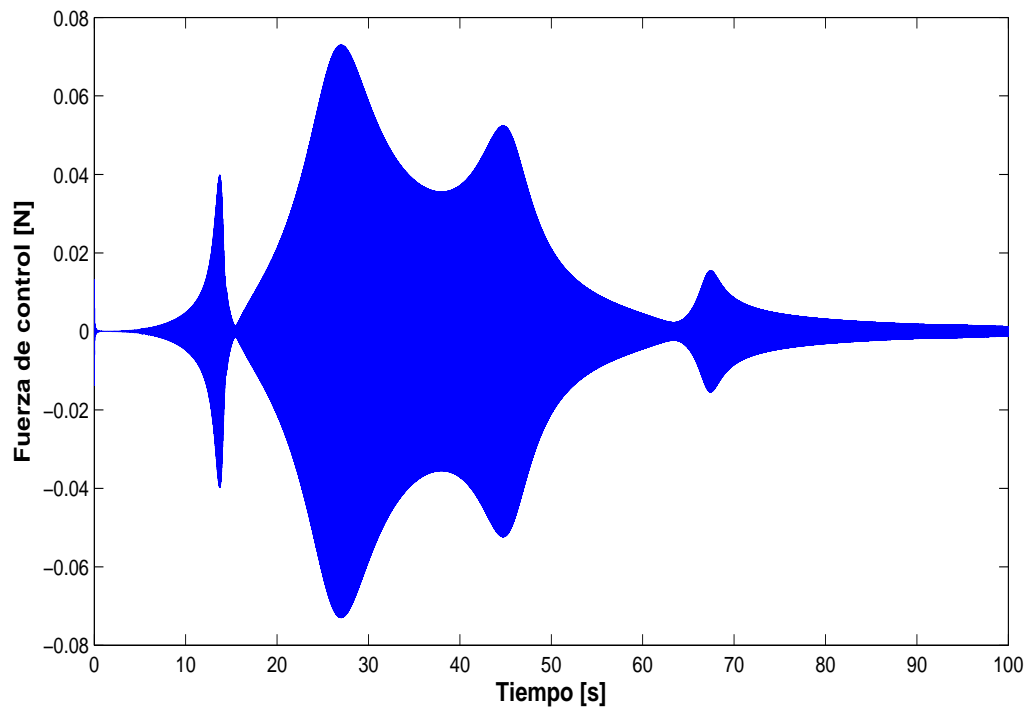


Figura. 5.16: Fuerza de control aplicada por el controlador modal sintetizado utilizando funciones de ponderación. Control del cuarto modo de la planta P_n .

5.5 Análisis de los Resultados

En esta sección son discutidos los resultados obtenidos en el proceso de control de vibraciones de una viga flexible utilizando controladores modales sintetizados usando funciones de ponderación. Este análisis es basado en el desempeño cada uno de los controladores modales sintetizados, que esta relacionado a su capacidad de atenuar la vibración de la viga flexible dentro de una determinado rango de frecuencia, correspondiente a un modo de vibrar específico. Además, se hace un análisis de la fuerza de control aplicada por los controladores modales durante el proceso de control de la viga.

5.5.1 Análisis del desempeño de los controladores modales

El desempeño de los controladores modales sintetizados utilizando funciones de ponderación muestra los siguientes resultados:

- Para el caso del segundo, tercero y cuarto modo se consiguió reducir su magnitud en 36,4, 28,0 y 21,4 *dB* respectivamente.
- En cada caso, además de atenuar el modo de interés, también se atenuó los modos próximos a este, pero en menor proporción.
- Las funciones de ponderación, utilizadas para sintetizar los controladores modales, son diferentes en cada caso. Principalmente se diferencian en sus frecuencias de

corte, que son próximas a la frecuencia de resonancia del modo que se desea atenuar.

Por otro lado la síntesis de un controlador modal usando funciones de ponderación es de orden relativamente elevada (orden 26), como se explica en la Sección 5,2,2. Lo que puede demandar de un mayor esfuerzo computacional en los sistemas de control. Esto implica utilizar procesadores computacionales de mayor capacidad en los sistemas de control.

La Tabla 5.5 muestra los valores de reducción de magnitud de los modos segundo, tercero y cuarto, obtenido por los controladores modales sintetizados usando funciones de ponderación.

5.5.2 Análisis de las fuerzas de control de los controladores modales

La fuerza de control máxima aplicada por cada control modal durante el control del segundo, tercero y cuarto modo son las siguientes:

- 0,23 N para reducir en 36,4 dB la magnitud del segundo modo de la viga.
- 0,14 N para reducir en 28,0 dB la magnitud del tercer modo de la viga.
- 0,073 N para reducir en 21,4 dB la magnitud del cuarto modo de la viga.

Podemos notar que los niveles de magnitud de las fuerzas aplicadas por cada controlador modal son compatibles con los niveles de reducción de vibración. Para mayor fuerza de control existe una mayor reducción de vibración del modo de la viga. Estos resultados se muestran de forma ordenada en la Tabla 5.6.

Tabla. 5.5: Reducción de la magnitud de los modos de la planta **Pn**.

Modo	Frecuencia de resonancia (<i>rad/s</i>)	Reducción (<i>dB</i>)
Modo 2	93,4	36,4
Modo 3	262	28,0
Modo 4	513	21,4

Tabla. 5.6: Fuerza de control y reducción de magnitud de los modos da la planta **Pn**.

Modo	Fuerza máxima (<i>N</i>)	Reducción (<i>dB</i>)
Modo 2	0,23	36,4
Modo 3	0,14	28,0
Modo 4	0,23	21,4

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

En este trabajo fue abordado el problema de control modal de vibraciones en estructuras flexibles, basado en la atenuación de la vibración de un sistema dinámico dentro de un determinado rango de frecuencia, correspondiente a un modo de vibrar específico del sistema dinámico. El problema fue abordado utilizando un método que utiliza funciones de ponderación las cuales son introducidas en el problema de control H_∞ para focalizar al controlador en la atenuación del modo de interés. El método fue probado utilizando una viga flexible engastada en uno de sus extremos y cuyo modelo matemático fue obtenido utilizando el método de los elementos finitos.

Para sintetizar los controladores modales se utilizó dos funciones de ponderación, una del tipo paso-banda y otra del tipo rechazo-banda, ambas de orden 6. El controlador modal fue sintetizado utilizando una planta que considera los 7 primeros modos de vibrar de la viga, así el orden de la planta es 14. Para sintetizar los controladores modales, diferentes pares de funciones de ponderación fueron usadas para cada modo. La selección de cada par de funciones fue realizada por tentativas escogiendo sus parámetros. Estos parámetros son escogidos de manera que las funciones de ponderación permitan sintetizar controladores modales que garanticen el desempeño deseado y la estabilidad del sistema

controlado.

Los controladores modales sintetizados usando funciones de ponderación fueron de orden 26, correspondiente a la orden de la planta aumentada. Para el caso del control de los modos segundo, tercero y cuarto, la reducción su magnitud fue de 36,4, 28,0 y 21,4 dB respectivamente.

Se concluye que fue posible sintetizar controladores modales para atenuar la vibración de la viga en una determinado rango de frecuencia. El desempeño de estos controladores es relativamente alto ya que en cada caso se consiguió reducir la magnitud de cada modo en mas de 20 dB . El orden de estos controladores es relativamente debido al uso de las funciones de ponderación que aumentan el orden de la planta aumentada.

Del análisis de las fuerzas de control podemos concluir que la fuerza de control, aplicada por cada controlador modal durante el control de la viga, aumenta para mayores niveles de reducción de magnitud del modo de interés. Lo que indica que para conseguir mayor reducción de la vibración de la viga es necesario aplicar una fuerza de control mayor.

Por otro lado, en esta tesis no se trabaja con modos de torsión de la viga debido a que el modelo matemático de la vida es bidimensional (en dos dimensiones). Por otro lado, los modos de torsión solamente aparecen en altas frecuencias y presentan picos de resonancia de menor magnitud en comparación con los modos de baja y media frecuencia.

Generalmente los modos de torsión son adecuados con métodos pasivos.

REFERENCIAS

CANAHUIRE CABELLO, Ruth V. **Controle H-infinito de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle**. 2009. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Engenharia Mecânica.

CHANDRUPATLA, T.R. and BELEGUNDU, A.D. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. Pearson, 2011.

DOYLE, J.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. and FRANCIS, B. State-space solutions to standard h2 and h-infinity control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control: Vol. 34, N. 8, pp. 831-849, February, 1989.**

GAWRONSKI, W.K. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. Springer-Verlag New York, Inc., 2004.

GAWRONSKY, W. Model reduction for flexible structures: Test data approach. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 14, No. 3, pp. 692-694,, 1991.**

GLOVER, K. and DOYLE, J.C. State-space formulate for all stabilizing controllers that

satisfy an h-infinity norm bound and relations to relations to risk sensitivity. **Systems & Control Letters: Vol. 11, N. 3, pp. 167-172, May, 1988.**

GU, G. All optimal hankel-norm approximations and their error bounds in discrete-time. **International Journal of Control; Vol. 78, N. 6, pp. 408-423, August, 2005.**

HE, J. and FU, Z.F. **Modal Analysis.** Butterworth-Heinemann, 2001.

HU, Y.R. and NG, A. Active robust vibration control of flexible structures. **Journal of Sound and Vibration: Vol. 288, N. 1, pp. 43-56, November, 2005.**

HUGHES, P.C. Space structure vibration modes: How many exist? which ones are important? **Control Systems Magazine, IEEE: Vol. 7, N. 1, pp. 22-28, February, 1987.**

HYLAND, D. and BERNSTEIN, D. The optimal projection equations for model reduction and the relationships among the methods of wilson, skelton, and moore. **IEEE Transactions on Automatic Control: Vol. 30, N. 12, pp. 1201-1211, January, 1985.**

INMAN, D.J. Active modal control for smart structures. **The Royal Society: Vol. 359, N. 1778, pp. 205-219, March, 2001.**

JONCKHEERE, E. Principal component analysis of flexible systems—open-loop case. **IEEE Transactions on Automatic Control: Vol. 29, N. 12, pp. 494-512, December, 1984.**

KARKOUB, M.; BALAS, G.; TAMMA, K. and DONATH, M. Robust control of flexible manipulators via u-synthesis. **Control Engineering Practice: Vol. 8, N. 7, pp. 725-734, July, 2000.**

KIM, M.H. and INMAN, D.J. Reduction of observation spillover in vibration suppression using a sliding mode observer. **Journal of Vibration and Control: Vol. 7, N. 7, pp. 1087-1105, October, 2001.**

KWON, Y.W. and BANG, H. **The Finite Element Method Using Matlab.** Crc Mechanical Engineering Series, 1996.

LI, Zhonglin. **Design of Active Structural Acoustic Control Systems Using Eigenassignment Approaches.** 1997. Tese (Doutorado). Virginia Polytechnic Institute and State University.

LICHTER, M.D.; UENO, H. and DUBOWSKY, S. Vibration estimation of flexible space structures using range imaging sensors. **The International Journal of Robotics Research: Vol. 25, N. 10, pp. 1001-1012, October, 2006.**

MOORE, B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. **IEEE Transactions on Automatic Control: Vol. 26, N. 1, pp. 17-32, February, 1981.**

PETYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis.** Cambridge University Press, 1990.

PORTER, B. and CROSSLEY, R. **Modal Control, Theory and Applications**. Taylor & Francis Ltd., 1972.

SARRACINI JR., Fernando. **Síntese de Controladores H-infinito de Ordem Reduzida com Aplicação no Controle Ativo de Estruturas Flexíveis**. 2006. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Engenharia Mecânica.

SCHNEIDERS, M.; VAN DE MOLENGRAFT, M. and STEINBUCH, M. Introduction to an integrated design for motion systems using over-actuation. In **Proceedings of the European Control Conference: 1-4 September**. 2003.

SERRA, M.; RESTA, F. and RIPAMONTI, F. Dependent modal space control. **Smart Materials and Structures: Vol. 22, N.10, 105004, October**, 2013.

SIMONT, J.D. and MITTER, S.K. A theory of modal control. **Information and Control: Vol. 13, N. 4, pp. 316-353, October**, 1968.

WANG, D.A. and HUANG, Y.M. Modal space vibration control of a beam by using the feedforward and feedback control loops. **International Journal of Mechanical Sciences: Vol. 44, N.1, pp. 1-19, January**, 2002.

WILSON, D.A. Model reduction for multivariable systems. **International Journal of Control: Vol. 20, N. 1, pp. 57-64, October**, 1974.

YOU, W.Q.; CHEN, H.H. and HE, X.D. Norms and their applications in vibration control

systems. **Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics: Vol. 3**, 2007.

YOU, W.Q.; CHEN, H.H. and HE, X.D. Tracking control research of high-order flexible structures on the h-infinity control method. In **Advanced Computer Control (ICACC), 2010 2nd International Conference on (Volume:5)** . 2010.

ZHAI, G.; MURAO, S.; KOYAMA, N. and YOSHIDA, M. Low order h-infinity control design: An lmi approach. In **European Control Conference**. 2003.

ZHOU, K. and DOYLE, J.C. **Essentials of Robust Control**. Prentice Hall, 1998.

ZHOU, K.; DOYLE, J.C. and GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Prentice Hal, 1996.

A Reducción del modelo - La función *modreal*

Generalmente, un modelo que posee un gran número de grados de libertad, puede presentar mayor dificultad durante el análisis dinámico de un sistema (Gawronski, 2004). En el proyecto de sistemas de control para estructuras, por ejemplo, la complejidad y el desempeño del controlador dependen del orden del modelo de la estructura. Así, una reducción del modelo es parte importante dentro del análisis dinámico de un sistema. El uso de un modelo reducido puede evitar dificultades al solucionar un problema desde que mantenga las propiedades esenciales del modelo completo del sistema.

Varias técnicas de reducción han sido desarrolladas. Algunas de ellas, como las presentadas en (Hyland y Bernstein, 1985) y (Wilson, 1974), muestran óptimos resultados, pero son complejas y computacionalmente caras. Otros métodos, relativamente simples, muestran buenos resultados, por ejemplo, el método del truncamiento balanceado o truncamiento modal, expuestos en (Moore, 1981; Jonckheere, 1984) y (Gawronsky, 1991). En este Apéndice será introducido el método de reducción por truncamiento modal que es implementado en la función *modreal* de Matlab.

A.1 Reducción del modelo usando truncamiento modal

Considera la representación en espacio de estados modal del sistema dinámico \mathbf{P} , dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}_m \mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_m \mathbf{x} + \mathbf{D}_m \mathbf{w}\end{aligned}\tag{A.1}$$

En la representación modal de \mathbf{P} el vector de estados \mathbf{x} es ordenado de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{Bmatrix},\tag{A.2}$$

donde un modo i de \mathbf{P} puede ser asociado a dos estados independientes (Gawronski, 2004), o sea,

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i1} \\ \mathbf{x}_{i2} \end{Bmatrix}.\tag{A.3}$$

Se define $\|G_i\|$ como la norma \mathbf{H}_2 , \mathbf{H}_∞ o la norma Hankel (Gu, 2005) do modo i . Es posible ordenar los estados del vector \mathbf{x} de forma decreciente en relación al valor de la norma de cada modo i . Así, los estados del vector \mathbf{x} con mayor valor de norma están en la parte superior del vector \mathbf{x} y los de menor valor de norma están localizados na parte inferior del vector \mathbf{x} .

El modelo reducido de la planta \mathbf{P} es obtenida removiendo los estados correspondientes a los modos cuyo valor de norma $\|G_i\|$ es menor. Estos modos pueden ser consider-

ados menos importantes. Desde que los modos que poseen norma menor están localizados en la parte inferior del vector \mathbf{x} , el modelo reducido puede ser obtenido removiendo los últimos estados del vector \mathbf{x} , como se indica a seguir.

Es posible dividir el vector \mathbf{x} de la siguiente manera

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_t \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

donde \mathbf{x}_r es el vector de estados mantenidos y \mathbf{x}_t es el vector de estados truncados. Si el número de estados mantenidos es $k < n$, el vector \mathbf{x}_r contiene $2k$ estados, y \mathbf{x}_t contiene $2(n - k)$ estados. Ahora, las matrices (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}) de la planta \mathbf{P} pueden ser expresadas en forma devenida, así:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_r \\ \mathbf{B}_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{C}_t \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Finalmente, el modelo reducido se obtiene eliminando las últimas $2(n - k)$ filas de \mathbf{A} , \mathbf{B} , y las últimas $2(n - k)$ columnas de \mathbf{A} , \mathbf{C} . Formalmente, esta operación puede ser realizada de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{LAL}^T, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{LB}, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{CL}^T, \quad (\text{A.6})$$

donde $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2k} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Aquí, \mathbf{I}_{2k} es la matriz identidad de orden $2k$. La reducción implementada en la función *modreal* esta basada en la norma Hankel.

B Síntesis de controladores H_∞ - La función *hinfsyn*

Los controladores H_∞ son sintetizados solucionando un problema de optimización cuya solución puede ser obtenida a través de diferentes métodos, como por ejemplo, o método Riccati donde el controlador es sintetizado solucionando dos ecuaciones de Riccati e incluyendo algunas restricciones que garantizan la solución del problema (Glover y Doyle, 1988).

En este Apéndice es elaborado brevemente un algoritmo de solución del problema H_∞ a través de las ecuaciones de Riccati cuya implementación se muestra en la función *hinfsyn* de Matlab.

B.1 Solución del problema H_∞ vía Riccati

Sea la representación en espacio de estados de una planta P dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{B.1}$$

Por simplicidad en la formulación se considera $\mathbf{D}_{11} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$, luego la representación compacta de P es

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right]\tag{B.2}$$

Para este sistema se considera lo siguiente: $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ es controlable y $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$ es observable. Esto garantiza que P sea controlable (Doyle *et al.*, 1989).

El problema de optimización H_∞ puede ser definido como el proyecto del controlador K , que minimiza la norma H_∞ del sistema en lazo cerrado T_{zw} que representa la función de transferencia de la salida de desempeño z en relación a la entrada de perturbación w (ver Sección 2.3). Entonces, el problema H_∞ sub-óptimo es descrito como:

Hallar un controlador \mathbf{K} tal que $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$.

La solución del problema H_∞ sub-óptimo envuelve el uso de dos matrices Hamiltonianas:

$$H_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix},$$

$$J_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \gamma^{-2}\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}.$$

Según Doyle *et al.* (1989), existe un controlador admisible \mathbf{K} tal que $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$ se las siguientes condiciones son verdaderas:

- $H_\infty \in \mathbf{dom}(Ric)$ y $\mathbf{X}_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$. Entonces \mathbf{X}_∞ satisface la siguiente ecuación de Riccati $\mathbf{A}^T\mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty\mathbf{A} + \mathbf{X}_\infty(\gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^T)\mathbf{X}_\infty + \mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 = 0$
- $J_\infty \in \mathbf{dom}(Ric)$ y $\mathbf{Y}_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$. Entonces \mathbf{Y}_∞ satisface la siguiente ecuación de Riccati $\mathbf{A}^T\mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty\mathbf{A} + \mathbf{Y}_\infty(\gamma^{-2}\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2)\mathbf{Y}_\infty + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T = 0$

donde $Ric(\cdot)$ denota la función de Riccati y $\mathbf{dom}(\cdot)$ su dominio (Doyle *et al.*, 1989).

En este caso, el controlador \mathbf{K} es dado por

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_{\infty} & -\mathbf{Z}_{\infty}\mathbf{L}_{\infty} \\ \hline \mathbf{F}_{\infty} & \mathbf{0} \end{array} \right], \quad (\text{B.3})$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}}_{\infty} = \mathbf{A} + \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_{\infty} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_{\infty} + \mathbf{Z}_{\infty}\mathbf{L}_{\infty}\mathbf{C}_2 \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{F}_{\infty} = -\mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_{\infty}, \quad \mathbf{L}_{\infty} = -\mathbf{Y}_{\infty}\mathbf{C}_2^T, \quad \mathbf{Z}_{\infty} = (\mathbf{I} - \gamma^{-2}\mathbf{X}_{\infty}\mathbf{Y}_{\infty})^{-1} \quad (\text{B.5})$$

Un algoritmo que puede ser usado para determinar el controlador \mathbf{K} a través del método Riccati es descrito a seguir:

- Paso 1: Para $k = 0$, se define γ_0 (valor de partida grande).
- Paso 2: Resolver las ecuaciones de Riccati.
- Paso 3: Determinar el controlador.
- Paso 4: Conectar la planta \mathbf{P} con el controlador \mathbf{K} .
- Paso 5: Verificar la estabilidad del sistema controlado.
- Paso 6: Diminuir γ , $\gamma_{k+1} = \gamma_k - \Delta$; $\Delta > 0$
- Paso 7: Volver al para o paso 2.

Las iteraciones son terminadas cuando no es posible obtener la solución para las

ecuaciones de Riccati, o el sistema controlado sea inestable.