

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN PARA
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN SEPARABLE
CON RESTRICCIONES LINEALES**

Para obtener el grado académico de Maestro en
Ciencias en Matemática Aplicada

ELABORADA POR :
VICTOR LOPEZ MEGO

ASESOR LOCAL :
Dr. ELADIO TEÓFILO OCAÑA ANAYA

ASESOR EXTERNO :
Dr. ERNESTO ORÉ ALBORNOZ

LIMA-PERÚ
2019

Dedicatoria

A toda mi familia, en especial a mis padres José y María.

Agradecimientos

Agradezco al Instituto de Matemática y Ciencias Afines-IMCA y a CONCYTEC por la subvención, la cual me ha permitido culminar la maestría con este trabajo de tesis.

Agradezco también a mis asesores, Profesor Eladio Ocaña y Profesor Ernesto Oré por su paciencia, motivación y asesoramiento que me brindaron en el transcurso del desarrollo de la tesis.

Resumen

En esta tesis construiremos un algoritmo de descomposición asociado a un problema de optimización convexa separable con restricciones lineales, en particular lo aplicaremos a problemas de programación lineal. Este algoritmo aprovecha la estructura separable de la función objetivo del problema original considerando en cada iteración subproblemas de optimización para cada componente de la función objetivo, siendo estas de menor tamaño que el problema original e independientes entre si, lo cual permite resolverlos de forma paralela, disminuyendo el costo computacional.

Abstract

In this thesis, we will construct a decomposition algorithm associated with a separable convex optimization problem with linear constraints, particularly applying it to linear programming problems. This algorithm takes advantage of the separable structure of the objective function of the original problem by considering optimization subproblems for each component of the objective function at each iteration. These subproblems are smaller in size than the original problem and are independent of each other, which allows solving them in parallel, decreasing the computational cost.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
Introducción	VIII
1. Conceptos básicos	1
1.1. Nociones de Optimización convexa	1
1.2. Operadores Monótonos	8
1.3. Resolventes y Operadores Cocoercivos	10
1.4. Algoritmos Subgradiente y Punto Proximal	17
1.4.1. Algoritmo Subgradiente	18
1.4.2. Algoritmo Punto Proximal	21
2. Esquemas Splitting	25
2.1. Método splitting Doble Backward	26
2.2. Método splitting Forward-Backward	28
2.3. Método splitting Peaceman Rachford	30
2.4. Método splitting Douglas Rachford	35
2.4.1. El operador splitting	39

3. Métodos splitting en el contexto de Optimización	42
3.1. Condiciones de optimalidad y consideraciones de regularidad .	43
3.2. Cálculos alternativos	46
3.3. Aplicación de los Métodos Splitting	48
3.3.1. Método de optimización Doble Backward	48
3.3.2. Método de optimización Forward-Backward	49
3.3.3. Método de optimización Peaceman-Rachford	50
3.3.4. Método de optimización Douglas-Rachford	53
3.3.5. Algoritmo Dual Douglas-Rachford y AD-PMM	56
4. ADMM para S-Model y Programación Lineal	67
4.1. AD-PMM para S-Model	68
4.2. AD-PMM para Programación Lineal	78
4.3. Ejemplo Numérico	82
Conclusiones	88
Bibliografía	89

Introducción

En la actualidad se están desarrollando muchos tipos de métodos de descomposición, esto debido a la creciente demanda de algoritmos que permitan lidiar con problemas de gran tamaño, lo cual es común en problemas aplicados.

En este trabajo desarrollaremos un tipo de descomposición asociado a los métodos splitting, por ello en el Capítulo 2 desarrollaremos en detalle los esquemas splitting conocidos en la literatura, teniendo estos métodos como objetivo principal encontrar un cero de un operador compuesto por la suma de operadores maximales monótonos, i.e

$$\text{Hallar } x^* \text{ tal que } 0 \in A(x^*) + B(x^*).$$

En el Capítulo 3 haremos un recuento de la aplicación de los métodos splitting al problema de composición

$$\text{Minimizar } f(x) + g(Mx) \tag{P}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones convexas propias, semicontinuas inferior y M una $(m \times n)$ matriz, considerando para ello su formulación variacional de suma de dos operadores monótonos tanto para el problema (P) y para su problema dual asociado. En particular se estudiará el método (ADMM) y su variante propuesto por R. Shefi y M. Teboulle [22]:

Dados Q_1 y Q_2 matrices simétricas

Algoritmo (**AST**)

$$\begin{cases} x^{n+1} = \arg \min_x \left\{ f(x) + \frac{\lambda}{2} \|Mx - z^n + \lambda^{-1}p^n\|^2 + \frac{1}{2} \|x - x^n\|_{Q_1}^2 \right\} \\ z^{n+1} = \arg \min_z \left\{ g(z) + \frac{\lambda}{2} \|Mx^{n+1} - z + \lambda^{-1}p^n\|^2 + \frac{1}{2} \|z - z^n\|_{Q_2}^2 \right\} \\ p^{n+1} = p^n + \lambda(Mx^{n+1} - z^{n+1}) \end{cases}$$

Desde que en el segundo subproblema en este algoritmo, considerando $Q_2 = 0$, se reduce al cálculo del proximal de la función g y por lo tanto no hay la necesidad de considerar Q_2 distinto de cero. Al final de este capítulo probaremos la convergencia de este algoritmo bajo las siguientes condiciones (no restrictivas): $Q_2 = 0$ y Q_1 simétrica tal que

$$Q_1 \text{ es semidefinida positiva y } Q_1 + \lambda M^T M \text{ es definda positiva.} \quad (1)$$

Bajo estas condiciones mostraremos también su velocidad de convergencia.

En el capítulo final analizaremos el problema de optimización separable con restricciones lineales lo cual denominaremos problema S -model

$$\begin{aligned} \min_{x=(x_1, \dots, x_q)} & \sum_{j=1}^q f_j(x_j) \\ \text{s.a.} & Ax = b \end{aligned}$$

donde las funciones $f_j: \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son convexas, semicontinuas inferiores y propias, A una matriz y b un vector, ambos de dimensiones apropiadas. Problemas con esta estructura son muchos, en particular los problemas de programación lineal caen dentro de este contexto.

Reformularemos el problema S -model como un problema de composición (P), y a esta reformulación aplicaremos el algoritmo (AST) considerando una adecuada matriz parámetro Q_1 , que permita tomar ventaja de su estructura

separable. Luego considerando las restricciones (1), garantizaremos la convergencia de nuestro algoritmo propuesto. Finalmente mostraremos resultados numéricos del comportamiento de nuestro algoritmo para el caso de programación lineal.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo se consideran los conceptos básicos que servirán de soporte a los capítulos siguientes. Para un mejor entendimiento se ha dividido en secciones tales como, optimización convexa cuyos conceptos son extraídos de [5] y [21], operadores monótonos y un breve repaso al los algoritmos del subgradiente y punto proximal.

1.1. Nociones de Optimización convexa

En esta sección damos un breve repaso a los conceptos esenciales de optimización convexa.

Un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ se llama convexo si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{C}$ y $t \in (0, 1)$, se tiene que

$$(1 - t)x + ty \in \mathcal{C}.$$

Por ejemplo, el conjunto solución de un sistema de desigualdades

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx \leq p, M \in \mathbb{R}^{mn} \text{ y } p \in \mathbb{R}^m\}.$$

es convexo.

Para una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

1. el dominio de f es $dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$.

2. se dice que f es propia si $\text{Dom}(f) \neq \emptyset$.
3. el epígrafo de f es $\text{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$.
4. se dice que f es convexa si $\text{epi}(f)$ es convexo o de manera equivalente, si

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad (1.1)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Si la desigualdad es estricta, se dice que f es estrictamente convexa.

5. se dice que f es semicontinua inferior (“sci”) si $\text{epi}(f)$ es conjunto cerrado en \mathbb{R}^{n+1} . Puntualmente, f es sci en x_0 si para todo $\lambda < f(x_0)$ existe un abierto V_{x_0} que contiene a x_0 tal que $\lambda < f(x)$ para todo x de V_{x_0} .
6. se dice que f es in-fcompacta si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, el subnivel $S_\lambda(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$ es compacto.

Cualquier función continua es es sci, una función lineal es convexa y sci, si f y g son sci y convexas entonces $f + g$, βg ($\lambda > 0$) son sci y convexas. Si $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de funciones sci y convexas entonces la función $(\sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda)(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$ es sci y convexa.

Si f es estrictamente conexa, definida sobre un convexo y si f alcanza su mínimo, entonces esta la alcanza en un único punto.

Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es fuertemente convexa de coeficiente $\alpha > 0$ si para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x - y\|^2.$$

Una función fuertemente convexa es estrictamente convexa, entonces su conjunto de minimizadores, si lo tuviera, es unitario. Mas aún, si f es sci y fuertemente convexa sobre un conjunto cerrado D de \mathbb{R}^n , entonces es inf-compacta sobre D . No probaremos esta afirmación, pero la importancia de obtener funciones inf-compactas radica en que, para estas, el conjunto de soluciones optimales $S_{opt} = \{x : f(x) = \inf_x f(x)\}$ es compacto y no vacío.

La siguiente proposición es una caracterización de una función semicontinua inferior, la cual es muy útil para probar resultados de convergencia.

Proposición 1.1. *Para $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son equivalentes:*

1. f es semicontinua inferior en $x \in \text{Dom}(f)$.
2. Para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ se tiene

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

Si tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ convergente que minimiza a f (es decir $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \inf(f)$), pongamos $x_n \rightarrow x_0$, en general poco se puede afirmar sobre $f(x_0)$. Pero según la Proposición (1.1) la propiedad de ser sci implica que x_0 es minimizador de f , sin la propiedad de sci esto puede no ser cierto.

Ejemplo 1.1. Consideremos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ x + p, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para cualquier $p > 0$ fijo, f no es sci en $x = 0$, además $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$. Si escogemos una sucesión que minimiza a f , esta debe ser una sucesión de números negativos x_n convergiendo a 0 y $\liminf f(x_n) = 0$, pero $f(0) = p > 0$.

La derivada direccional de una función convexa en x_0 en la dirección h es dada por

$$f'(x_0, h) = \inf_{t > 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

A continuación se menciona dos propiedades de funciones convexas diferenciables.

Proposición 1.2. *Sea $f: C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función diferenciable definida en un conjunto abierto convexo no vacío $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Son equivalentes:*

1. f es convexa.
2. $f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y)$ para todo $x, y \in C$.
3. $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ para todo $x, y \in C$.

Donde $\nabla f(x)$ es el gradiente de f en x . Si en la proposición anterior, para algún x , $\nabla f(x) = 0$, entonces, $f(x) \leq f(y)$ para todo y . Esta condición junto con la convexidad son condiciones suficientes de optimalidad de primer orden que se menciona a continuación.

Proposición 1.3. *Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de clase \mathcal{C}^1 . Si x es un mínimo local de f , entonces $\nabla f(x) = 0$. Si además f es convexa y $\nabla f(x) = 0$ entonces x es el mínimo global para f .*

La condición necesaria de optimalidad se generaliza para el caso de funciones no diferenciables mediante el concepto de subdiferencial. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa y propia. Se dice que $y \in \mathbb{R}^n$ es un **subgradiente de f** en $a \in \text{Dom } f$ si

$$f(a) + \langle y, x - a \rangle \leq f(x), \quad \text{para todo } x \in \text{Dom}(f).$$

El subdiferencial de f en a ($\partial f(a)$) es el conjunto de todos los subgradien-
tes de f en a , es decir

$$\partial f(a) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid f(a) + \langle y, x - a \rangle \leq f(x), \quad \forall x \in \text{Dom}(f)\}.$$

Por convención se define $\partial f(a) = \emptyset$ si $a \notin \text{Dom}(f)$.

Observe que, si $0 \in \partial f(a)$ para algún $a \in \text{Dom}(f)$ entonces $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$. Entonces para efectos de encontrar un punto donde f alcanza su valor óptimo, debemos buscar un punto x tal $0 \in \partial f(x)$.

Si f es convexa y diferenciable entonces el subdiferencial lo conforma únicamente el gradiente, en cada punto de su dominio.

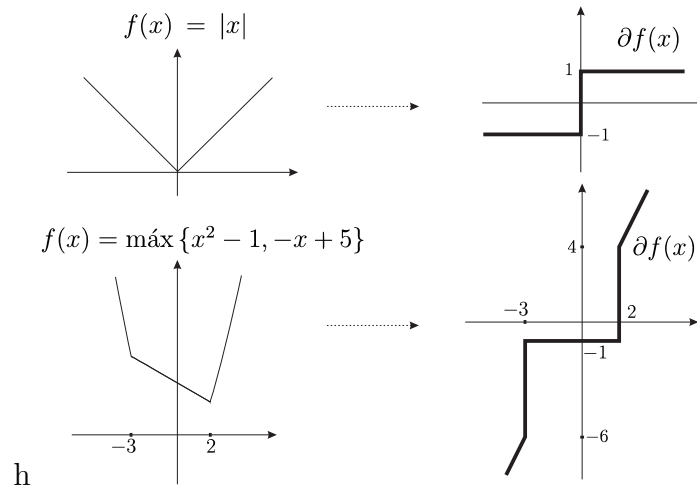


Figura 1.1: Se muestra los gráficos los subdiferenciales de las funciones en el Ejemplo 1.2

Ejemplo 1.2. 1. Consideremos la función valor absoluto $f(x) = |x|$ sobre \mathbb{R} , entonces f es diferenciable en todo punto excepto en $x = 0$. Luego

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{si } x < 0 \\ [-1, 1], & \text{si } x = 0 \\ \{1\}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Sea $f(x) = \max\{x^2 - 1, -x + 5\}$, entonces

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{2x\}, & \text{si } x < -3 \text{ y } x > 2 \\ [-6, -1], & \text{si } x = -3 \\ \{-1\}, & \text{si } -3 < x < 2 \\ [-1, 4], & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Para el caso de 2 en el ejemplo anterior, en general si $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ entonces

$$\partial f(a) = \text{conv} \cap_{i=1}^n \{\partial f_i(a) : f_i(a) = f(a)\}.$$

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. La **función indicatriz de C** es la función $\delta_C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases} \quad (1.2)$$

El **cono normal de C** es $N_C = \partial\delta_C$, es decir

$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in C, \langle y, z - x \rangle \leq 0 \ \forall z \in C\}$$

La función conjugada de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (en el sentido de Fenchel) es la función $f^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle x, x^* \rangle - f(x)].$$

Esta, es convexa y semicontinua inferior pues es el supremo de funciones lineales afines.

El problema

$$\alpha := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1.3)$$

es llamado **problema primal**. Si consideremos la función de perturbación $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que $\varphi(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y la **función marginal** $h: \mathbb{R}^p \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ dada por

$$h(u) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, u),$$

el **problema dual** de (1.3) es dado por

$$\beta = \inf_{u^* \in \mathbb{R}^p} h^*(u^*). \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.3. Consideremos el problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(Mx),$$

donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones convexas semicontinuas inferiores y propias, y $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Se quiere formular su problema dual, para ello consideramos la función de perturbación $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por $\varphi(x, u) = f(x) + g(Mx + u)$ y la función marginal $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por $h(u) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, u)$.

Entonces el problema dual viene dado por $\inf_{p \in \mathbb{R}^m} h^*(p)$. Calculando $h^*(p)$ tenemos

$$\begin{aligned} h^*(p) &= \sup_{u \in \mathbb{R}^m} [\langle u, p \rangle - \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, u)] \\ &= \sup_{(u, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} [\langle p, p^* \rangle - f(x) - g(Mx + u)] \\ &= \sup_{(u, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} [\langle -M^T p, x \rangle - f(x) + \langle Mx + u, p \rangle - g(Mx + u)] \\ &= f^*(-M^T p) + g^*(p). \end{aligned}$$

Luego el problema dual es

$$\min_{p \in \mathbb{R}^m} f^*(-M^T p) + g^*(p).$$

Observación 1.1. Para una función $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, sci y propia, la función conjugada de Fenchel es tal que para $y \in \mathbb{R}^n$

$$h^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle x, y \rangle - h(x)] \geq \langle x, y \rangle - h(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Además, $(a, y) \in \partial h$ equivale a $\langle y, x \rangle - h(x) \leq \langle y, a \rangle - h(a)$, para todo $x \in \text{Dom}(h)$, luego, tomando supremo sobre x en la desigualdad anterior tenemos $h(a) + h^*(y) = \langle y, a \rangle$ y como h es sci, esto equivale a

$$h^*(a) + h(y) = \langle y, a \rangle$$

y esto a su vez es equivalente a $(y, a) \in \partial h^*$. Entonces $\partial h^* = (\partial h)^{-1}$.

1.2. Operadores Monótonos

En esta sección repasamos de manera breve nociones básicas sobre operadores monótonos, para mayores detalles, ver [8].

Una aplicación multivaluada $T: \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una función $T: \mathbb{R}^m \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$.

Si Tx es unitario, diremos que la aplicación T es univaluada o simplemente que T es una función. El gráfico de T es $\text{Graf}(T) = \{(x, y) : y \in Tx\}$. En adelante no se hace diferencia entre $\text{Graf}(T)$ y T . Tomar $(x, y) \in T$ significará tomar $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in Tx$.

Definición 1.2.1. Si $T: \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una aplicación multivaluada

1. El dominio de T es $\text{Dom}(T) = \{x \in \mathbb{R}^m : Tx \neq \emptyset\}$.

La imagen de T es $\text{Im}(T) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m, (x, y) \in T\}$.

2. La aplicación multivaluada inversa de T , se define por $T^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in T\}$.

3. Para todo $c \in \mathbb{R}$ se define la aplicación multivaluada cT por $cT = \{(x, cy) : (x, y) \in T\}$.

4. Dada S una aplicación multivaluada sobre \mathbb{R}^n , se define se define la aplicación multivaluada $S + T$ por $S + T = \{(x, s + t) : (x, s) \in S \text{ y } (x, t) \in T\}$.

Definición 1.2.2. Un operador $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es **monótono** si

$$\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } (x, x^*) \in T \text{ y } (y, y^*) \in T.$$

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual de \mathbb{R}^n . Se dice que T es **monótono maximal** si no está estrictamente contenido en otro operador monótono.

A continuación se dan algunos ejemplos de operadores monótonos.

Ejemplo 1.4.

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real. Entonces, la monotonía de f en el sentido usual es equivalente a la Definición 1.2.2. Pues,

$$f(t_1) \leq f(t_2) \text{ con } t_1 \leq t_2 \Leftrightarrow (f(t_2) - f(t_1)) \cdot (t_2 - t_1) \geq 0.$$

2. Toda aplicación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ semidefinida positiva es monótona, es mas, T es monótona si y solo si T es semidefinida positiva.
3. Para una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y diferenciable se tiene que,

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Es decir, $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador monótono.

4. El subdiferencial de una función f sobre \mathbb{R}^n , no necesariamente diferenciable, es un operador monótono. Pues, si $x^* \in \partial f(x)$ y $y^* \in \partial f(y)$ entonces $f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y)$ y $f(y) + \langle y^*, x - y \rangle \leq f(x)$, sumando estas desigualdades se obtiene $\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0$.

Definición 1.2.3. Sea T un operador monótono sobre \mathbb{R}^n , se define el conjunto de puntos monótono-admisibles de T por

$$T^* = \{(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n: \langle b - y, a - x \rangle \geq 0, \quad \forall (x, y) \in T\}$$

La siguiente proposición es una caracterización de operadores monótonos maximales.

Proposición 1.4. T es un operador monótono maximal si y solo si $T = T^*$

Proposición 1.5. Sea T un operador sobre \mathbb{R}^n .

1. Si r un numero real positivo. Entonces, T es monótono y/o maximal si y solo si rT es monótono y/o maximal.
2. Si $d \in \mathbb{R}^n$. Entonces, T es monótono y/o maximal si y solo si $T + d$ es monótono y/o maximal.
3. T es monótono y/o maximal si y solo si T^{-1} es monótono y/o maximal.

A continuación se dan algunos ejemplos de operadores monótonos maximales.

Ejemplo 1.5. Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa, semicontinua inferior y propia, entonces $\partial f: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es un operador monótono maximal.

Este resultado lo muestra al detalle Rockafellar en [18].

Ejemplo 1.6. El cono normal N_C de un subconjunto $C \neq \emptyset$ convexo y cerrado de \mathbb{R}^n , es un operador monótono maximal. En efecto, si C es no vacío, convexo y cerrado, entonces, δ_C es propia, convexa y sci. Entonces, del ejemplo anterior N_C es monótono maximal.

Ejemplo 1.7. Como consecuencia del ejemplo anterior, el cono normal N_L de un subespacio afín L de \mathbb{R}^n es un operador monótono maximal. Además, si $L = V + d$, donde V es un subespacio vectorial y $d \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$N_{V+d} = (V + d) \times V^\perp.$$

Ejemplo 1.8. Para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$ el operador constante $T = \{(x, a) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ es monótono maximal. En efecto, tomando $V = \{0\}$ en el ejemplo anterior tenemos que

$$N_{\{0\}+a} = N_{V+a} = (V + a) \times V^\perp = (\{0\} + a) \times \mathbb{R}^n = \{(a, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

es monótono maximal. Luego, $T = N_{\{0\}+a}^{-1}$ es monótono maximal.

Una propiedad que nos será muy útil al momento de probar resultados de convergencia de sucesiones de subgradietes como en la Proposición (3.5).

Proposición 1.6. Si $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es un operadores monótono maximal, entonces $\text{Graf}(T)$ es cerrado. Además, Tx es convexo y cerrado para todo $x \in \text{Dom } T$.

1.3. Resolventes y Operadores Cocoercivos

En esta sección se estudian algunos operadores que cumplen ciertas propiedades especiales, tales como, Lipschitz (no expansivo), co-coercividad y monotonía fuerte. También se estudian algunas de sus propiedades, teniendo como referencia base a [8].

Definición 1.3.1. Un operador $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es llamado:

1. **no expansivo** si

$$\|y^* - x^*\| \leq \|y - x\|, \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in T$$

2. **co-coercivo** de módulo $\alpha > 0$ si

$$\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq \alpha \|y^* - x^*\|^2, \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in T.$$

3. **fuertemente monótono** si existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq \alpha \|y - x\|^2$$

, para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in T$

α es llamado *módulo* de monotonicidad fuerte. En adelante los operadores co-coercivos de módulo 1 serán llamados simplemente co-coercivos.

Observación 1.2. Se deducen:

- Un operador fuertemente monótono es monótono.
- Una función convexa f es fuertemente convexa si y solo si ∂f es fuertemente monótono.
- Si T^{-1} es fuertemente monótono entonces el operador T es univaluado.
- Un operador univaluado T es co-coercivo de módulo $\alpha > 0$ si y solo si T^{-1} es fuertemente monótono de constante $\alpha > 0$.
- Todos los operadores no expansivos son funciones uniformemente continuas.
- Todos los operadores co-coercivos son monótonos.
- Todos los operadores co-coercivos son no expansivos.

- Un operador T es co-coercivo si y solo si

$$\|Ty - Tx\|^2 \leq \|y - x\|^2 - \|(y - Ty) - (x - Tx)\|^2,$$

para todo x e y en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.9. Sean T_1 y T_2 dos operadores co-coercivos sobre \mathbb{R}^n , entonces el operador $G = T_1(2T_2 - I) + (I - T_2)$ es co-coercivo. En efecto,

$$\begin{aligned} \|Gx - Gy\|^2 &= \|T_1(2T_2 - I)x - T_1(2T_2 - I)y\|^2 + \|(I - T_2)x - (I - T_2)y\|^2 \\ &\quad + 2\langle T_1(2T_2 - I)x - T_1(2T_2 - I)y, (I - T_2)x - (I - T_2)y \rangle \end{aligned}$$

usando la co-coercividad de T_1 tenemos

$$\begin{aligned} \|Gx - Gy\|^2 &\leq \langle T_1(2T_2 - I)x - T_1(2T_2 - I)y, x - y \rangle + \|(I - T_2)x - (I - T_2)y\|^2 \\ &= \langle Gx - Gy, x - y \rangle - \langle T_2x - T_2y, (I - T_2)x - (I - T_2)y \rangle \end{aligned}$$

y de la co-coercividad de T_2 se obtiene lo afirmado.

Proposición 1.7. [8, pág 44] Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. T es co-coerciva de si y solo si $(2T - I)$ es no expansivo, o de manera equivalente, T es co-coerciva si y solo si $T = \frac{1}{2}(C + I)$ donde C es no expansivo.

Note que en la Proposición 1.7, la condición necesaria es válida para operadores co-coercivos de módulo $\alpha \geq 1$ y la condición suficiente es válida para operadores co-coercivos de módulo $\alpha \leq 1$

Teorema 1.1 (Minty). [2, pág 311] Dado $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador monótono, T es maximal si y solo si $\text{Im}(I + T) = \mathbb{R}^n$.

Definición 1.3.2. Para todo $\lambda > 0$ el operador $J_{\lambda T} = (I + \lambda T)^{-1}$ es llamado **resolvente** del operador T .

Teorema 1.2. [8, pág 47] Un operador T sobre \mathbb{R}^n es monótono maximal si y solo si $J_{\lambda T}$, con $\lambda > 0$, es co-coercivo y $\text{Dom}(J_{\lambda T}) = \mathbb{R}^n$.

En el Teorema (1.2), para que el resolvente $J_{\lambda T}$ sea co-coercivo es necesario y suficiente que T sea monótono.

Ejemplo 1.10. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado y no vacío, entonces $P_C = (I + N_C)^{-1}$ y por lo tanto P_C es co-coercivo. En efecto, de las hipótesis sobre C se sigue que N_C es monótono maximal y $(I + N_C)^{-1}$ es co-coercivo definido en todo \mathbb{R}^n . Por otro lado, para $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} y = (I + N_C)^{-1}x &\Leftrightarrow x \in (I + N_C)y \Leftrightarrow x - y \in N_Cy \\ &\Leftrightarrow y \in C \text{ y } \langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \forall z \in C \\ &\Leftrightarrow y = P_Cx. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P_C = (I + N_C)^{-1}$. Note que si $\lambda > 0$, entonces también se tiene $P_C = (I + \lambda N_C)^{-1}$.

Consecuencias inmediatas del teorema de Minty y el Teorema (1.2).

Proposición 1.8. *Sea T un operador.*

1. *T es co-coercivo si y solo si $T^{-1} - I$ es monótono. Mas aún, T es co-coercivo y $\text{Dom}(T) = \mathbb{R}^n$ si y solo si $T^{-1} - I$ es monótono maximal.*
2. *El resolvente de un operador monótono T es univaluado, y si además T es maximal su resolvente es una función definida en todo \mathbb{R}^n .*

Además de las propiedades que se han mencionado sobre el resolvente de un operador, esta noción también permite reformular un problema muy importante en operadores monótonos y optimización en general, que para un operador T es formulado por:

$$\text{hallar } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in Tx.$$

Se observa que $0 \in Tx \Leftrightarrow x \in x + \lambda Tx \Leftrightarrow x = J_{\lambda T}x$, entonces, el problema puede ser resuelto hallando puntos fijos de $J_{\lambda T}$.

Definición 1.3.3. *Sea $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador monótono maximal y $\lambda > 0$.*

Se define el operador reflector asociado a T por

$$R_{\lambda T} = 2J_{\lambda T} - I \quad (1.5)$$

Note que $R_{\lambda T}$ es una función.

Proposición 1.9. *Sea $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador monótono maximal y $\lambda > 0$. Entonces, $(x, y) \in T$ si y solo si $R_{\lambda T}(x + \lambda y) = x - \lambda y$.*

Demostración.

$$y \in T(x) \Leftrightarrow x + \lambda y \in (I + \lambda T)(x) \Leftrightarrow J_{\lambda T}(x + \lambda y) = x \Leftrightarrow R_{\lambda T}(x + \lambda y) = x - \lambda y.$$

□

Corolario 1.1. *Sean $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador monótono maximal, $\lambda > 0$ y $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $z = x + \lambda y$ y $x = J_{\lambda T}(z)$ si y solo si $(x, y) \in T$.*

Observación 1.3. *Sea T un operador monótono maximal sobre \mathbb{R}^n y $\lambda > 0$. Entonces para cualquier $z \in \mathbb{R}^n$ existe único $(x, y) \in T$ tal que $z = x + \lambda y$, pues de acuerdo con el corolario anterior, x es determinado de manera única por $x = J_{\lambda T}z$.*

Cuando V es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n entonces $N_V = V \times V^\perp$. Por lo tanto, para cualquier $z \in \mathbb{R}^n$ existe un único punto $(x, y) \in N_V$ tal que $z = x + \lambda y$, donde $\lambda > 0$. La observación anterior generaliza este hecho.

Ejemplo 1.11. Consideremos al hiperplano de \mathbb{R}^n

$$L = \{x: \langle x, u \rangle = \alpha\}$$

y al operador $T = N_L$. En este caso, L actúa como eje de simetría para el operador reflector.

En efecto, sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ fijo, entonces existe un único $(x, y) \in N_L$ tal que $a = x + \lambda y$, donde

$$x = J_{\lambda N_L}(a) = P_L[a] = a + \frac{\alpha - \langle a, u \rangle}{\|u\|^2} (u)$$

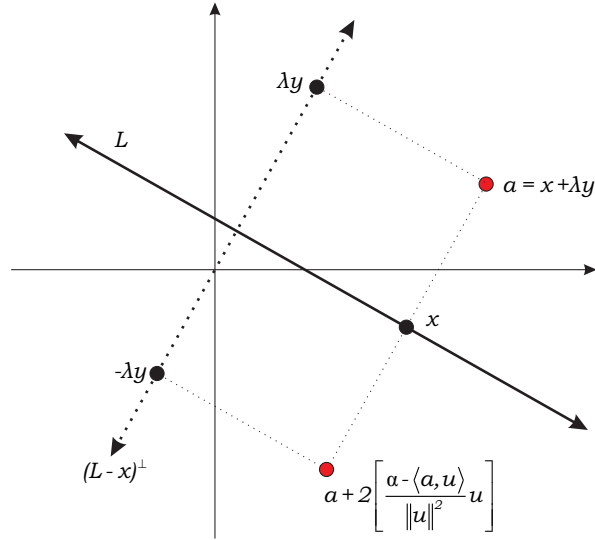


Figura 1.2: Representación en el plano de como el hiperplano L actúa como eje de simetría para el operador N_L

y entonces, $y = -\frac{\alpha - \langle a, u \rangle}{\lambda \|u\|^2} (u)$.

Luego,

$$R_{\lambda N_L}(x + \lambda y) = 2P_L(x + \lambda y) - (x + \lambda y) = 2P_L[a] - a = 2x - a,$$

entonces,

$$R_{\lambda N_L}(x + \lambda y) = a + 2 \left[\frac{\alpha - \langle a, u \rangle}{\|u\|^2} (u) \right],$$

de donde se visualiza claramente que $x \in L$ es punto medio entre a y su reflejado $a + 2 \left[\frac{\alpha - \langle a, u \rangle}{\|u\|^2} (u) \right]$. En la Figura 1.2 se representa en el plano lo descrito en este ejemplo.

Observación 1.4. La proyección sobre un subespacio afín de \mathbb{R}^n es una aplicación lineal afín, entonces el operador reflector también es una aplicación lineal afín, en el ejemplo anterior, sin pérdida de generalidad supongamos que $\|u\| = 1$

$$R_{\lambda N_L}(a) = Aa + 2\alpha u,$$

donde la matriz asociada a la parte lineal es la matriz simétrica $A = [I - 2uu^T]$.

La proyección sobre un subespacio vectorial V de \mathbb{R}^n es un operador lineal y si $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es una base para V entonces

$$P_V x = A(A^T A)^{-1} A^T x$$

donde la matriz A es la matriz cuyas columnas son los vectores v_i . Claramente se observa que la matriz asociada al operador proyección sobre un subespacio vectorial es simétrica. Entonces la proyección sobre un subespacio afín $L = V + d$ paralelo a V es dado por

$$P_L x = d + P_V(x - d).$$

Luego, el operador reflector es $R_{\lambda N_L}$ es dado por

$$R_{\lambda N_L}(a) = (2B - I)a - 2\hat{d},$$

donde $B = A(A^T A)^{-1} A^T$ y $\hat{d} = [I - A(A^T A)^{-1} A^T]d$.

Una desigualdad que satisface el operador reflector que nos servirá mas adelante para mostrar la convergencia del algoritmo Peaceman -Rachford.

Proposición 1.10. *Sea T un operador monótono maximal y $\lambda > 0$, entonces*

$$\|R_{\lambda T} z - R_{\lambda T} z'\|^2 \leq \|z - z'\|^2 - 2 \langle J_{\lambda T} z - J_{\lambda T} z', (I - J_{\lambda T})z - (I - J_{\lambda T})z' \rangle.$$

Para el caso en que $T = N_L$, donde L es como en el Ejemplo (1.11), el operador reflector conserva distancias. En efecto, sean $z, \hat{z} \in \mathbb{R}^n$, entonces existen $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in N_L$ tal que $z = x + \lambda y$ y $\hat{z} = \hat{x} + \lambda \hat{y}$.

Sin pérdida de generalidad asumamos $\|u\| = 1$, luego

$$\begin{aligned} \|R_{\lambda T} z - R_{\lambda T} \hat{z}\|^2 &= \|z + 2[\alpha - \langle z, u \rangle]u - \hat{z} - 2[\alpha - \langle \hat{z}, u \rangle]u\|^2 \\ &= \|(z - \hat{z}) - 2\langle z - \hat{z}, u \rangle u\|^2 \\ &= \|z - \hat{z}\|^2 - 4|\langle z - \hat{z}, u \rangle|^2 + 4|\langle z - \hat{z}, u \rangle|^2 \\ &= \|z - \hat{z}\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto la desigualdad en la Proposición 1.10 se convierte en igualdad, pues $\langle J_{\lambda T}z - J_{\lambda T}\hat{z}, (I - J_{\lambda T})z - (I - J_{\lambda T})\hat{z} \rangle = \lambda \langle x - \hat{x}, y - \hat{y} \rangle = 0$.

Un resultado importante se da en el Teorema a continuación, este prueba que el algoritmo $x^{n+1} = Sx^n$ converge a un punto fijo de S si este los tuviera, donde S es la composición de un número finito de funciones co-coercivas.

Teorema 1.3. [8, pág 56] Sean $T_1, \dots, T_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ operadores co-coercivos (por lo tanto funciones) tal que $S = T_p \circ T_{p-1} \circ \dots \circ T_1$ posee un punto fijo, sea también la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ generada mediante $x^{n+1} = Sx^n$ para algún punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto fijo de S .

Corolario 1.2. [8, pág 60] Sean $C_1, \dots, C_p \subset \mathbb{R}^n$ convexos, cerrados tales que $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_p \neq \emptyset$. Entonces para cualquier $x^0 \in \mathbb{R}^n$, la sucesión que resulta de las iteraciones $x^{n+1} = P_{C_p} \circ \dots \circ P_{C_1}x^n$ converge a un punto de $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_p$.

1.4. Algoritmos Subgradiente y Punto Proximal

Los algoritmos gradiente y punto proximal son métodos iterativos clásicos para la búsqueda de una solución óptima de un problemas de optimización. En esta sección haremos una breve descripción de estos dos métodos.

Considere el problema de optimización

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{P}$$

donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa. De la definición de subgradiente de una función, (P) es equivalente al problema de

$$\text{hallar } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in \partial f(x).$$

Esto quiere decir que nuestro problema (P) puede ser solucionado encontrando un cero del subdiferencial de la función objetivo.

1.4.1. Algoritmo Subgradiente

Una manera fácil (al menos teórica) de minimizar una función finita convexa diferenciable f definida en \mathbb{R}^n es a través del *método del del gradiente* el cual se basa en el hecho que para $x \in \mathbb{R}^n$, la dirección opuesta al gradiente $(-\nabla f(x))$ es la dirección de descenso más intuitiva de elegir para buscar el mínimo de f a partir de x . Este método genera una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que obedece a la regla iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_n \nabla f(x_n) \quad (1.6)$$

donde x_0 es el punto inicial elegido y $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos llamados *tamaños de paso*.

Si por el contrario la función f no es diferenciable, gracias al concepto de subdiferenciabilidad se puede usar el *método del subgradiente* que puede ser visto como una generalización del método del gradiente pues este genera una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de modo que para un punto inicial x_0 elegido obedece a la regla iterativa

$$\begin{aligned} \text{Elegir } y_n &\in \partial f(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n - \gamma_n y_n \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ son los tamaños de paso.

Note que la diferencia superficial con el método del gradiente está en el “cambio” de $\nabla f(x_n)$ por $y_n \in \partial f(x_n)$.

Observación 1.5. Para tener en cuenta.

1. En general, según [11] se dice que $d \in \mathbb{R}^n$ es una dirección de descenso en x si existe $t > 0$ tal que $f(x + td) < f(x)$, y esto es equivalente a pedir que $\langle d, y \rangle < 0$ para todo $y \in \partial f(x)$ o también a $f'(x, d) < 0$ si f es derivable en x . Entonces en la ecuación (1.6) $-\nabla f(x)$ puede ser sustituido por otra dirección de descenso.
2. En el método del subgradiente se debe tener cuidado al momento de elegir $y_n \in \partial f(x_n)$ como lo dice la ecuación (1.7), pues no todos los ele-

mentos de $\partial f(x_n)$ conducen a direcciones de descenso como lo muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.12. Considere la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \text{máx}\{x^2 - y, x + y\}.$$

Observe que $(1, 1) \in \partial f(-3, 6)$ y que $-(1, 1)$ no es una dirección de descenso.

Para una función convexa propia sobre \mathbb{R}^n la derivada direccional de f en x en la dirección d es

$$f'(x, d) = \inf_{t>0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

Entonces, si $f'(x, d) < 0$, d es una dirección de descenso para f en x . Si x no minimiza a f entonces existe una dirección de descenso en x , entonces es natural tomar como dirección de descenso a \bar{d} tal que

$$f'(x, \bar{d}) = \min_{\|d\| \leq 1} f'(x, d) \tag{1.8}$$

Por otro lado, como f es convexa propia en \mathbb{R}^n , entonces $\partial f(x)$ es compacto y

$$f'(x, d) = \text{máx}_{y \in \partial f(x)} \langle y, d \rangle,$$

entonces de (1.8) se sigue

$$\begin{aligned} f'(x, \bar{d}) &= \min_{\|d\| \leq 1} \text{máx}_{y \in \partial f(x)} \langle y, d \rangle \\ &= \text{máx}_{y \in \partial f(x)} \min_{\|d\| \leq 1} \langle y, d \rangle \\ &= \text{máx}_{y \in \partial f(x)} \left\langle y, -\frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= - \min_{y \in \partial f(x)} \|y\| \end{aligned}$$

Luego una dirección de descenso para f en x es $\bar{d} = -\frac{y}{\|y\|}$ donde y es el el

elemento de menor módulo de $\partial f(x)$. Esta podría ser una manera de hallar una dirección de descenso para f en un punto determinado de su dominio lo cual no deja de ser dificultoso.

Observación 1.6. Otro aspecto fundamental en estos métodos es la elección del tamaño de paso ya que gran parte del éxito de los algoritmos pasa por la elección adecuada de estos parámetros. En el método del gradiente generalmente se usa una búsqueda lineal para obtener los tamaños de paso, como por ejemplo para la dirección de descenso d_n , el tamaño de paso (teórico) es:

$$\gamma_n := \arg \min_{\gamma > 0} f(x_n - \gamma d_n). \quad (TP_n)$$

Observe que determinar γ_n podría ser tan complicado como determinar el valor óptimo del problema original (P); de otro lado, (TP_n) es sólo un subproblema en la etapa n y por lo tanto gastar mucho tiempo en la búsqueda del valor óptimo exacto no es relevante. Así, es suficiente encontrar una aproximación “adecuada” de γ_n , que también será denotada por γ_n . Mencionemos dos formas bastante utilizadas:

1. **(Condición de Armijo).** γ_n debe satisfacer

$$f(x_n + \gamma_n d_n) \leq f(x_n) + \alpha \gamma_n d_n^T \nabla f(x_n)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$.

2. **(Condición de Wolfe).** γ_n debe satisfacer la condición de Armijo y

$$d_n^T \nabla f(x_n + \gamma_n d_n) \geq \beta d_n^T \nabla f(x_n)$$

donde $\beta \in (\alpha, 1)$.

Como vemos, estas reglas involucran directamente a la dirección de descenso lo que dificulta usarlas para obtener los tamaños de paso para el método del subgradiente pues como vimos en el ejemplo anterior $y_n \in \partial f(x_n)$ no siempre es una dirección de descenso.

Algunas reglas básicas de tamaño de paso para el método del subgradiente son:

1. Tamaño de paso constante $\gamma_n = \gamma > 0$ o tamaño de paso normalizado $\gamma_n = \frac{\alpha}{\|y_n\|}$ para $\alpha > 0$ y $y_n \in \partial f(x_n)$.
2. Reduciendo el tamaño de paso en cada iteración pero no “demasiado rápido”. $\gamma_n > 0$,

$$\gamma_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty.$$

3. Tamaño de paso no sumable pero de cuadrado sumable. $\gamma_n > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty \quad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty.$$

4. Tamaño de paso propuesto por Polyak el cual supone el conocimiento del valor óptimo f^* del problema (P):

$$\frac{f(x_n) - f^*}{\|y_n\|^2} \epsilon \leq \gamma_n \leq \frac{f(x_n) - f^*}{\|y_n\|^2} (2 - \epsilon).$$

donde $\epsilon \in (0, 1]$ y $y_n \in \partial f(x_n)$.

Algunos resultados de convergencia del método del subgradiente (1.7) pueden ser hallados en [23].

A continuación se estudiará el algoritmo del punto proximal.

1.4.2. Algoritmo Punto Proximal

Este algoritmo, en el contexto de optimización fue introducido por Martinet y generalizado para el contexto de operadores monótonos por Rockafellar. En esta sección se describe el algoritmo del punto proximal en el contexto de optimización basándonos en [16] que se recomienda revisar para los detalles. Consideremos el problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{P}$$

donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa semicontinua inferior y propia.

Antes de introducir el algoritmo consideremos la siguiente definición.

Definición 1.4.1. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, sci y propia y $\lambda > 0$, **el operador proximal** $\mathbf{prox}_{\lambda f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de f es definido por

$$\mathbf{prox}_{\lambda f}(z) = \arg \min_x \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - z\|^2 \right\}.$$

Observación 1.7. Note que el operador $\mathbf{prox}_{\lambda f}$ es una función pues la aplicación $f_{(\lambda, z)}(x) = f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2$ llamada **Regularizada de Moreau-Yosida de f con parámetro** (λ, z) además de heredar las propiedades de f , es fuertemente convexa.

Por otro lado $\mathbf{prox}_{\lambda f} = (I + \lambda \partial f)^{-1}$. En efecto, para cualquier z , si ponemos $\bar{x} = (I + \lambda \partial f)^{-1}(z)$, tenemos,

$$\begin{aligned} \bar{x} = (I + \lambda \partial f)^{-1}(z) &\Leftrightarrow z \in \bar{x} + \lambda \partial f(\bar{x}) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(\bar{x}) + \frac{1}{\lambda}(\bar{x} - z) \\ &\Leftrightarrow \bar{x} = \arg \min_x \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - z\|^2 \right\} \\ &\Leftrightarrow \bar{x} = \mathbf{prox}_{\lambda f}(z) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.13. Sea $f(x) = \langle a, x \rangle + b$, con $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{prox}_{\lambda f}(z) &= \arg \min_x \left\{ \langle a, x \rangle + b + \frac{1}{2\lambda} \|x - z\|^2 \right\} \\ &= \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|x - (z - \lambda a)\|^2 + \langle a, z \rangle + b - \frac{\lambda}{2} \|a\|^2 \right\} \\ &= z - \lambda a \end{aligned}$$

A continuación se define el algoritmo del punto proximal clásico para el problema (P)

Definición 1.4.2 (Algoritmo del punto proximal). *El algoritmo del punto proximal consta de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en \mathbb{R}^n caracterizada por:*

1. Dado un punto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
2. Elegir $\gamma_n > 0$ y resolver

$$x_{n+1} = \mathbf{prox}_{\gamma_n f}(x_n)$$

Los números reales positivos de la sucesión $\{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ son llamados tamaños de paso.

Observación 1.8. De la Observación 1.7, el item 2 del algoritmo del punto proximal también puede ponerse en función del resolvente de ∂f

$$x_{n+1} = (I + \gamma_n \partial f)^{-1}(x_n),$$

lo que es equivalente a

$$-\frac{x_{n+1} - x_n}{\gamma_n} \in \partial f(x_{n+1}).$$

Consideremos x_{n+1} y x_n en la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, entonces

$$-\frac{x_{n+1} - x_n}{\gamma_n} \in \partial f(x_{n+1}) \quad \text{y} \quad -\frac{x_n - x_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \in \partial f(x_n).$$

De la monotonía de ∂f tenemos que

$$\left\langle -\frac{x_{n+1} - x_n}{\gamma_n} + \frac{x_n - x_{n-1}}{\gamma_{n-1}}, x_{n+1} - x_n \right\rangle \geq 0$$

de donde

$$\langle x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n \rangle \geq \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \|x_{n+1} - x_n\|^2 \geq 0,$$

en particular, si $x_n \neq x_{n+1}$ se tiene que $\langle x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n \rangle > 0$. Esto quiere decir que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ “no retrocede” en el sentido de que siempre se mueve en dirección a $S_{opt}(f)$.

En la siguiente proposición se dan algunas propiedades que se desprenden de la definición del algoritmo.

Proposición 1.11. Consideremos $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por el algoritmo del punto proximal.

1. La sucesión $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es no creciente y si $x_{n+1} \neq x_n$ la sucesión es estrictamente decreciente.
2. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_{n+1}) - f(x) \leq \frac{\|x_0 - x\|^2}{2\gamma_n}$$

Además, si $S_{opt} \neq \emptyset$

$$f(x_{n+1}) - f^* \leq \frac{d(x_0, S_{opt})}{2 \sum_{i=1}^n \gamma_i}$$

donde $f^* = \min_x f(x)$.

3. Si $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f^*.$$

4. Si $S_{opt} \neq \emptyset$ entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada.

Proposición 1.12. Sea f una función convexa semicontinua inferior y propia. Entonces cualquier punto de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ generada por el algoritmo del punto proximal está en el conjunto $S_{opt}(f)$.

Proposición 1.13. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por el algoritmo del punto proximal con $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$. Si $S_{opt}(f) \neq \emptyset$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ con $x^* \in S_{opt}(f)$. Si $S_{opt}(f) = \emptyset$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x^* - x_{n_i}\|^2 = \|x^* - \bar{x}\|^2,$$

Capítulo 2

Esquemas Splitting

En el capítulo anterior se describieron los métodos del subgradiente y punto proximal. Lo que permiten estos métodos es, hallar mediante un proceso iterativo, un cero del subdiferencial de la función a minimizar.

Estos métodos se pueden generalizar rápidamente al contexto de operadores monótonos como

1. Un método explícito : $x^{n+1} \in x^n - \lambda_n T x^n$, que llamaremos “Método Forward”.
2. Un método implícito: $x^n \in x^{n+1} + \lambda_n T x^{n+1}$, que llamaremos “Método Backward ” o simplemente método del punto proximal.

que heredan las ventajas y dificultades de los métodos predecesores.

El problema básico del capítulo es: Dado un operador monótono maximal T sobre \mathbb{R}^n ,

$$\text{Hallar } x^* \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in T x^*. \quad (2.1)$$

La idea principal de un esquema splitting es que, escribir $T = A + B$ con A, B operadores monótonos maximales con $I + \lambda_n A$ y $I + \lambda_n B$ relativamente fáciles de invertir, y combinar los métodos Forward y Backward aplicados a A y B por separado para resolver el problema que ahora se escribe así:

$$\text{Hallar } x^* \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in A x^* + B x^* \quad (2.2)$$

Se estudiarán cuatro esquemas basándonos en [8] (donde se encuentran los detalles), a decir:

- Doble Backward: $z^{n+1} = (I + \lambda_n B)^{-1} (I + \lambda_n A)^{-1} z^n$.
- Forward-Backward: $z^{n+1} \in (I + \lambda_n B)^{-1} (I - \lambda_n A) z^n$.
- Peaceman-Rachford: $z^{n+1} \in (I + \lambda_n B)^{-1} (I - \lambda_n A) (I + \lambda_n A)^{-1} (I - \lambda_n B) z^n$.
- Douglas-Rachford: $z^{n+1} = (I + \lambda_n B)^{-1} [(I + \lambda_n A)^{-1} (I - \lambda_n B) + \lambda_n B] z^n$,

los cuales se organizan en secciones donde se describen y se dan algunos resultados de convergencia para luego ser vistos en el contexto de optimización.

El principal esquema en el presente trabajo es el Douglas-Rachford. Nuestra referencia básica es [8], ver también [12].

2.1. Método splitting Doble Backward

Sean A y B dos operadores monótonos maximales sobre \mathbb{R}^n . El método Doble Backward fue introducido por Passty en [14]. Como su nombre lo indica, este método usa dos pasos Backward, uno para cada operador. Mas precisamente, para una sucesión de escalares positivos, llamados tamaños de paso $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, una sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ de \mathbb{R}^n se dice que es generada por el método Doble Backward si obedece a

Algorithm 1 Algoritmo Doble Backward

- 1: Elegir un punto inicial $z^0 \in \mathbb{R}^n$
 - 2: $z^{n+1} = (I + \lambda_n B)^{-1} (I + \lambda_n A)^{-1} z^n$
 - 3: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 2
-

A pesar de que este método es bastante intuitivo y dado que los resolventes de A y B son co-coercivos el Teorema 1.3 nos dice que para $\lambda_n = \lambda > 0 \forall n$, la sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto fijo de $J_{\lambda A} J_{\lambda B}$, uno podría esperar que este punto fijo se relacione de alguna manera con un cero de $A + B$ pero

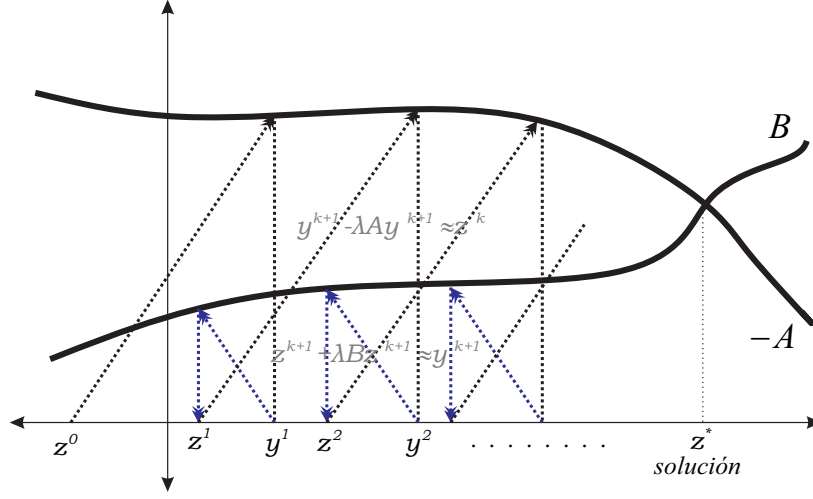


Figura 2.1: Iteración Doble Backward

no es el caso, pues un punto fijo z^* de $J_{\lambda A} J_{\lambda B}$ es caracterizado por

$$z^* = J_{\lambda A} J_{\lambda B} z^* \Leftrightarrow 0 \in y + A(z^* + \lambda y) \text{ para alg\u00fan } y \in Bz^*$$

mientras que un cero z^* de $A + B$ se caracteriza por

$$0 \in (A + B)z^* \Leftrightarrow 0 \in y + Az^* \text{ para alg\u00fan } y \in Bz^*.$$

Se observa que se requiere que $\lambda_n \rightarrow 0$ para que el punto fijo se “aproxime” al cero de $A + B$. Pasty, considera esta condici\u00f3n y una adicional para mostrar la convergencia en el sentido erg\u00f3dico del Algoritmo 1.

Consideremos la sucesi\u00f3n de promedios

$$x^n := \sum_{i=1}^n \lambda_i z^i / \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (2.3)$$

Lema 2.1. [14, Passty] Sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ no sumable, $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ una sucesi\u00f3n en \mathbb{R}^n y $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ la sucesi\u00f3n de promedios. Asuma que existe un subconjunto convexo cerrado y no vac\u00edo F de \mathbb{R}^n tal que

- (i). cualquier punto de adherencia de $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ est\u00e1 en F , y

(ii). para todo $y \in F$, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - y\|$.

Entonces, $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un elemento de F .

Teorema 2.1 (Passty). Sea $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de promedios (2.3), y $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ sucesión de tamaños de paso satisfaciendo $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$, entonces

1. Si $(A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ entonces $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un cero de $A + B$.
2. Si $(A + B)^{-1}(0) = \emptyset$ entonces $\|x^n\| \rightarrow +\infty$.

Demostración. La idea de la demostración es verificar que la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ satisface el Lema 2.1 con $F = (A + B)^{-1}(0)$. \square

Otro resultado de convergencia un tanto mas particular que muestra Pasty es que, $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ no sumable pero de cuadrado sumable y si B es fuertemente monótono, o $\text{Int}(A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ entonces $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un cero de $(A + B)$.

Cabe mencionar también que en [1] tienen analizado la convergencia ergódica del Algoritmo 1 en el que se toman dos sucesiones de tamaños de paso, una para cada resolvente. Muestran que la sucesión de promedios converge siempre que las sucesiones de tamaños de paso sean no sumables pero de cuadrado sumable y la sucesión diferencia de tamaños de paso sea sumable.

2.2. Método splitting Forward-Backward

Sean A y B dos operadores monótonos maximales sobre \mathbb{R}^n . El método Forward-Backward también fue introducido por Passty en [14]. Como su nombre lo indica, este método usa un paso Backward para uno de los operadores y un paso Forward para el otro. Mas precisamente, para una sucesión de escalares positivos, llamados tamaños de paso $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, una sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ de \mathbb{R}^n se dice que es generada por el método Forward-Backward si obedece al Algoritmo 2.

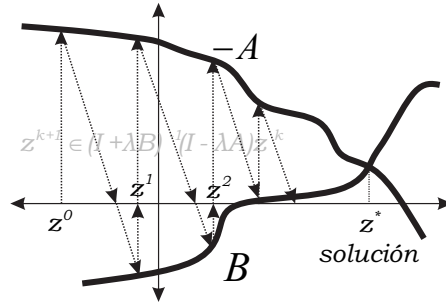


Figura 2.2: Iteración Forward-Backward

Algorithm 2 Algoritmo Forward-Backward

- 1: Elegir un punto inicial $z^0 \in \mathbb{R}^n$
 - 2: Elegir $y^n \in Az^n$
 - 3: Elegir $z^{n+1} = (I + \lambda_n B)^{-1} (z^n - \lambda_n y^n)$
 - 4: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 2
-

Este algoritmo puede ser visto como una generalización del algoritmo del gradiente proyectado introducido por Goldstein, Levitin y Polyak en los años sesenta.

Note que una de las principales dificultades de este método es que A es multivaluado. De hecho el método no siempre converge, pues en el caso B sea el operador nulo sobre \mathbb{R}^n y A el gradiente de alguna función convexa diferenciable, entonces el método Forward-Backward se reduce al método del gradiente que se sabe no siempre es convergente.

A continuación se dan algunos resultados de convergencia cuyas demostraciones son omitidas.

Teorema 2.2 (Passty). *Sea $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ la sucesión de promedios y $\{y^n\}_{n=0}^\infty$ generadas por el Algoritmo 2 con $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ no sumable pero de cuadrado sumable. Asuma que $\{y^n\}_{n=0}^\infty$ es acotada, entonces*

1. Si $(A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ entonces $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ converge a un cero de $A + B$.
2. Si $(A + B)^{-1}(0) = \emptyset$ entonces $\|x^n\| \rightarrow +\infty$.

Demostración. La idea de la demostración es verificar que la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ satisface el Lema 2.1 con $F = (A + B)^{-1}(0)$. \square

Si bien es cierto que el teorema anterior garantiza la convergencia de la sucesión de promedios a un cero de $A + B$, parece ser dificultoso en la práctica conseguir $\{y^n\}_{n=0}^\infty$ acotada y obtener x^n para $n \in \mathbb{N}$ “grande”. Eckstein tiene probado la siguiente versión del Teorema de Tseng que garantiza la convergencia del algoritmo pero se requiere monotonía fuerte.

Teorema 2.3 (Tseng). [8, pág 71] Sean A y B operadores monótonos maximales sobre \mathbb{R}^n tal que $(A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ con A^{-1} fuertemente monótono con constante α , si además los tamaños de paso $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ verifican

$$0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < 2\alpha$$

entonces la sucesión $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ generada por el Algoritmo 2 converge a un cero de $A + B$.

2.3. Método splitting Peaceman Rachford

En este capítulo estudiaremos el método splitting Peacemans-Rachford para resolver una inclusión monótona $0 \in (A + B)x$ donde A y B son operadores monótonos maximales.

Este método tiene su origen en el artículo de Peaceman y Rachford [15]. Ellos no buscaban resolver alguna inclusión monótona, ellos buscaban resolver numéricamente la ecuación de flujo de calor en dos variables

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.4)$$

donde T es la temperatura, t es el tiempo y $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Una descripción intuitiva y no rigurosa de cómo se originó este esquema splitting puede ser la siguiente.

Los procedimientos numéricos para la solución de la ecuación (2.4) se dividen en dos categorías, explícitos e implícitos. En un procedimiento explícito

las segundas derivadas se aproximan mediante ecuaciones en diferencias evaluadas en temperaturas conocidas T^n , mas precisamente, un procedimiento explícito usa la siguiente ecuación

$$\frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2.5)$$

donde i, j y n son los índices en las direcciones x, y y t respectivamente. Por su parte, en un procedimiento implícito las segundas derivadas se aproximan mediante ecuaciones en diferencias evaluadas en temperaturas no conocidas T^{n+1} , es decir usa la ecuación

$$\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2.6)$$

Peaceman y Rachford “combinan” ambos procedimientos y presentan un método implícito de direcciones alternantes, ellos aproximan una de las segundas derivadas por una ecuación en diferencias evaluada en temperatura no conocida $T^{n+\frac{1}{2}}$ y la otra evaluada en temperatura conocida T^n y para un periodo de tiempo siguiente de igual tamaño que el anterior revierten el proceso. Por lo tanto se usan dos ecuaciones, una para el primer paso de tiempo (de longitud $\frac{1}{2}$) y otra para el segundo paso de tiempo de igual longitud, como sigue

$$\frac{T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} = \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2.7)$$

$$\frac{T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Se entiende a $T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ como una temperatura intermedia entre el presente y el tiempo siguiente en el punto (i, j) . Asumiendo que $(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2$ y $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, usando notación matricial (donde las matrices son $-A$ y $-B$) para las

ecuaciones en diferencias se tiene

$$\begin{aligned} -\lambda AT^{n+\frac{1}{2}} - \lambda BT^n &= I(T^{n+\frac{1}{2}} - T^n) \\ -\lambda AT^{n+\frac{1}{2}} - \lambda BT^{n+1} &= I(T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$T^{n+1} = (I + \lambda B)^{-1}(I - \lambda A)(I + \lambda A)^{-1}(I - \lambda B)T^n \quad (2.9)$$

que es la forma como nos la presentan en el contexto de operadores monótonos P. L. Lions y B. Mercier en [13].

En lo que resta de la sección $A, B: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ serán dos operadores monótonos maximales. Una sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ es generada por la iteración Peaceman-Rachford si obedece a

$$x^{n+1} \in (I + \lambda B)^{-1}(I - \lambda A)(I + \lambda A)^{-1}(I - \lambda B)x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots (2.10)$$

donde $\lambda > 0$ es el tamaño de paso.

La sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ puede ser implementada por:

1. Dado $x^0 \in \text{Dom}(B)$.
2. Elegir cualquier $b_1^n \in Bx^n$.
3. Hallar el único $(y^{n+1}, a^{n+1}) \in A$ tal que $y^{n+1} + \lambda a^{n+1} = x^n - \lambda b_1^n$, o de manera equivalente: calcular $y^{n+1} = J_{\lambda A}(x^n - \lambda b_1^n)$ y hacer $a^{n+1} = \frac{1}{\lambda}(x^n - y^{n+1}) - b_1^n$.
4. Elegir cualquier $a_1^{n+1} \in Ay^{n+1}$.
5. Hallar el único $(x^{n+1}, b^{n+1}) \in B$ tal que $x^{n+1} + \lambda b^{n+1} = y^{n+1} - \lambda a_1^{n+1}$, o de manera equivalente: calcular $x^{n+1} = J_{\lambda B}(y^{n+1} - \lambda a_1^{n+1})$ y hacer $b^{n+1} = \frac{1}{\lambda}(y^{n+1} - x^{n+1}) - a_1^{n+1}$.

Recuerde que la unicidad en 3 y 5 es debido a las propiedades de $J_\lambda A$ y $J_\lambda B$. Algo que se observa de manera inmediata en la implementación es que

4 puede ser eliminado, pues podemos tomar $a_1^{n+1} = a^{n+1} \in Ay^{n+1}$ de 3. De la misma forma salvo para $n = 0$, podemos obviar 2, pues para $n \geq 1$ podemos tomar $b_1^n = b^n \in Bx^n$ de 5 en la iteración anterior. De acuerdo con estas observaciones, la implementación se reduce a

1. Dado un punto inicial $(x^0, b^0) \in B$.
2. Hallar el único $(y^{n+1}, a^{n+1}) \in A$ tal que $y^{n+1} + \lambda a^{n+1} = x^n - \lambda b^n$, o de manera equivalente: calcular $y^{n+1} = J_{\lambda A}(x^n - \lambda b^n)$ y hacer $a^{n+1} = \frac{1}{\lambda}(x^n - y^{n+1}) - b^n$.
3. Hallar el único $(x^{n+1}, b^{n+1}) \in B$ tal que $x^{n+1} + \lambda b^{n+1} = y^{n+1} - \lambda a^{n+1}$, o de manera equivalente: calcular $x^{n+1} = J_{\lambda B}(y^{n+1} - \lambda a^{n+1})$ y hacer $b^{n+1} = \frac{1}{\lambda}(y^{n+1} - x^{n+1}) - a^{n+1}$.

otra manera de escribir la damos en el Algoritmo 3

Algorithm 3 Algoritmo Peaceman-Rachford

Require: Tamaño de paso $\lambda > 0$, un punto inicial (x^0, b^0)

- 1: Calcular $y^{n+1} = J_{\lambda A}(x^n - \lambda b^n)$
 - 2: $a^{n+1} = \frac{1}{\lambda}(x^n - y^{n+1}) - b^n$
 - 3: Calcular $x^{n+1} = J_{\lambda B}(y^{n+1} - \lambda a^{n+1})$
 - 4: $b^{n+1} = \frac{1}{\lambda}(y^{n+1} - x^{n+1}) - a^{n+1}$
 - 5: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1
-

Note que, no es indispensable que (x^0, b^0) esté en B , pero a partir de $n = 1$ la sucesión (x^n, b^n) está en B y es determinada de manera única. Por otro lado, en el paso 3 y por la Proposición 1.9, $(x^{n+1}, b^{n+1}) \in B$ debe ser calculado tal que

$$x^{n+1} + \lambda b^{n+1} = (2J_{\lambda A} - I)(y^{n+1} + \lambda a^{n+1}) = (2J_{\lambda A} - I)(2J_{\lambda B} - I)(x^n + \lambda b^n).$$

Entonces, si para $(x^n, b^n) \in B$ ponemos $z^n = x^n + \lambda b^n$, tenemos que

$$z^{n+1} = R_{\lambda A} \circ R_{\lambda B} z^n. \quad (2.11)$$

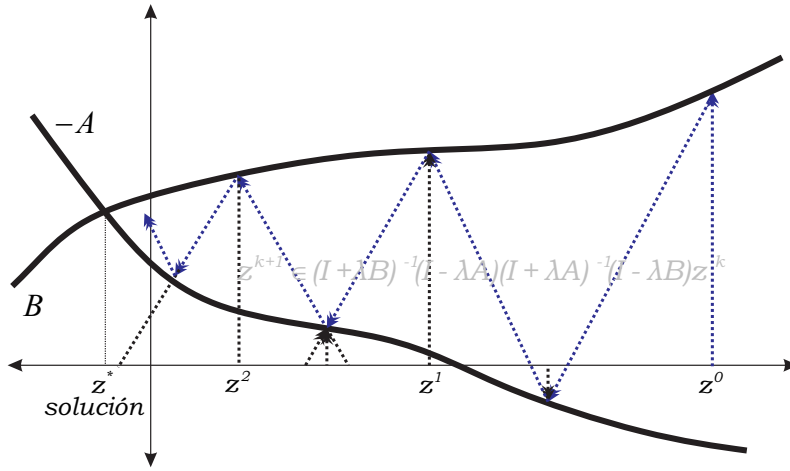


Figura 2.3: Iteración Peaceman-Rachford

Luego la sucesión $(x^n, b^n) \in B$ generada por la iteración Peaceman-Rachford a partir de un punto inicial $(x^0, b^0) \in B$ es tal que

$$z^n = x^n + \lambda b^n, \quad x^n = J_{\lambda B} z^n \quad \text{y} \quad b^n = \frac{1}{\lambda}(z^n - x^n) \quad (2.12)$$

donde la sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ obedece a (2.11) a partir del punto inicial $z^0 = x^0 + \lambda b^0$.

El operador $R_{\lambda A} \circ R_{\lambda B} = (2J_{\lambda A} - I)(2J_{\lambda B} - I)$ será llamado operador Peaceman-Rachford.

La siguiente proposición muestra la relación entre los puntos fijos del operador Peaceman-Rachford y los ceros de $A + B$.

Proposición 2.1. *El conjunto de puntos fijos del operador Peaceman-Rachford esta dado por*

$$Fix = \{(x + \lambda b) : (x, b) \in B, (x, -b) \in A\}. \quad (2.13)$$

Luego, un cero de $A + B$ se obtiene evaluando $J_{\lambda B}$ en un punto fijo del operador Peaceman-Rachford. La recursión Peaceman-Rachford no es convergente en general, Lions y Mercier dan el siguiente resultado particular

de convergencia

Proposición 2.2. Sean A, B dos operadores monótonos maximales, si uno de ellos es univaluado, fuertemente monótono y $(A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ entonces la sucesión dada por (2.11) converge a un punto fijo del operador Peaceman-Rachford.

2.4. Método splitting Douglas Rachford

En esta sección estudiaremos el esquema splitting Douglas-Rachford, catalogado como el de mayor interés en este trabajo, pues a diferencia de los esquemas estudiados en lo que va del capítulo, el método Douglas-Rachford para hallar ceros de la suma de dos operadores monótonos maximales siempre converge, esto es debido a que, resulta ser una aplicación del método del punto proximal a cierto operador.

El origen de este método es similar al estudiado en la sección anterior, para ser exacto, tiene su origen en el artículo de Douglas y Rachford [7], ver también [6]. Se buscaba resolver numéricamente la ecuación del calor en dos y tres variables

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial u}{\partial t}, & (x, y) \in R, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) & (x, y) \in R \\ u(x, y, t) &= g(x, y, t), & (x, y) \in S, \quad 0 \leq t \leq T.\end{aligned}$$

donde R es abierto y conexo, S es el borde de R .

Proceden de manera similar a Peaceman-Rachford, también utilizan un método implícito de direcciones alternantes, la diferencia es que en ambas ecuaciones usan la misma longitud de paso de tiempo como se muestra a

continuación

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_{i-1,j}^{n+1} - 2\bar{u}_{i,j}^{n+1} + \bar{u}_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} &= \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \\ \frac{\bar{u}_{i-1,j}^{n+1} - 2\bar{u}_{i,j}^{n+1} + \bar{u}_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} &= \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned}$$

Aquí, $\bar{u}_{i-1,j}^{n+1}$ puede ser visto como una “pre-temperatura” en la posición (i, j) en el tiempo siguiente. Asumiendo que $(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2$ y $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, usando notación matricial (con matrices $-A$ y $-B$) para las ecuaciones en diferencias y sustrayendo la primera a la segunda, se tiene

$$\begin{aligned} -\lambda A \bar{u}^{n+1} - \lambda B u^n &= I(\bar{u}^{n+1} - u^n) \\ -\lambda B u^{n+1} &= -\lambda B u^n + I(u^{n+1} - \bar{u}^{n+1}) \end{aligned}$$

Al sustituir \bar{u}^{n+1} de la segunda ecuación en la primera y haciendo algunos cálculos matriciales “convenientemente” obtenemos

$$u^{n+1} = (I + \lambda B)^{-1} [(I + \lambda A)^{-1} (I - \lambda B) + \lambda B] u^n$$

que es el método splitting Douglas-Racford de la forma como nos la presentan en el contexto de operadores monótonos P. L. Lions y B. Mercier en [13].

En lo que resta de la sección $A, B: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ son operadores monótonos maximales. La sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ corresponde a la iteración del esquema Douglas-Rachford si

$$x^{n+1} \in (I + \lambda_n B)^{-1} [(I + \lambda_n A)^{-1} (I - \lambda_n B) + \lambda_n B] x^n. \quad (2.14)$$

donde $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de números reales positivos (tamaños de paso).

Note que (2.14) puede ser implementado por: sea $\lambda_n = \lambda > 0$

1. Dado $x^n \in \text{Dom } B$.
2. Elegir cualquier $\tilde{b}^n \in Bx^n$.

3. Hallar el único $(y^{n+1}, a^{n+1}) \in A$ tal que $y^{n+1} + \lambda_n a^{n+1} = x^n - \lambda \tilde{b}^n$.
4. Elegir cualquier $\bar{b}^n \in Bx^n$.
5. Hallar el único $(x^{n+1}, b^{n+1}) \in B$ tal que $x^{n+1} + \lambda b^{n+1} = y^{n+1} + \lambda \bar{b}^n$.

Observe que los pasos 2 y 4 pueden ser eliminados, pues \tilde{b}^n en 2 podría tomarse (salvo en la primera iteración) igual a b^n del paso 5 y de manera similar \bar{b}^n en 4 podría tomarse también igual a b^n de 5.

De esta manera, la implementación se reduce a:

- 1'. Dado un punto inicial $(x^0, b^0) \in B$.
- 2'. Hallar el único $(y^{n+1}, a^{n+1}) \in A$ tal que $y^{n+1} + \lambda a^{n+1} = x^n - \lambda b^n$ o de manera equivalente: calcular $y^{n+1} = J_{\lambda A}(x^n - \lambda b^n)$ y hacer $a^{n+1} = \frac{1}{\lambda}(x^n - y^{n+1}) - b^n$
- 3'. Hallar el único $(x^{n+1}, b^{n+1}) \in B$ tal que $x^{n+1} + \lambda b^{n+1} = y^{n+1} + \lambda b^n$ o de manera equivalente: calcular $x^{n+1} = J_{\lambda B}(y^{n+1} + \lambda a^{n+1})$ y hacer $b^{n+1} = a^{n+1} + \frac{1}{\lambda}(y^{n+1} - x^{n+1})$.

que también podemos escribir como en el Algoritmo 4

Algorithm 4 Algoritmo Douglas-Rachford

Require: Tamaño de paso $\lambda > 0$, un punto inicial (x^0, b^0)

- 1: Calcular $y^{n+1} = J_{\lambda A}(x^n - \lambda b^n)$
 - 2: $a^{n+1} = \frac{1}{\lambda}(x^n - y^{n+1}) - b^n$
 - 3: Calcular $x^{n+1} = J_{\lambda B}(y^{n+1} + \lambda a^{n+1})$
 - 4: $b^{n+1} = a^{n+1} + \frac{1}{\lambda}(y^{n+1} - x^{n+1})$
 - 5: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1
-

Observación 2.1. Note que:

- El punto inicial (x^0, b^0) no es necesario que esté en B , pero la sucesión $\{(x^n, b^n)\}_{n=1}^{\infty}$ está en B .

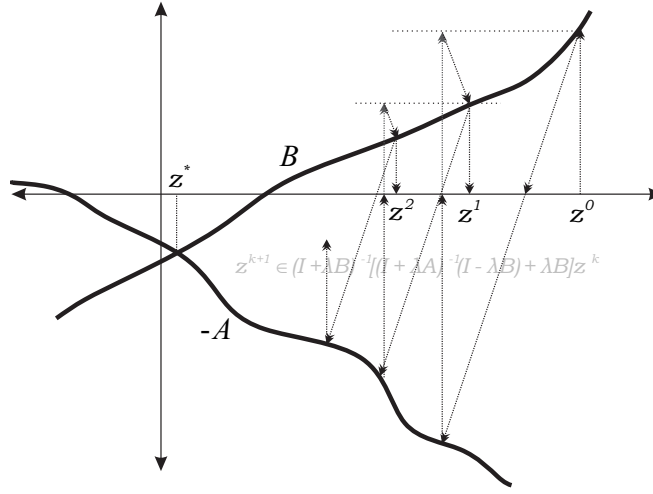


Figura 2.4: Iteración Douglas-Rachford

- La unicidad de de 1 y 2 implica que para un punto inicial $(x^0, b^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y una sucesión de tamaños de paso $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$, la sucesión $\{(x^n, b^n)\}_{n=1}^\infty$ en B es única.

Por otro lado, del Algoritmo 4, para todo $n \geq 1$

$$y^{n+1} + \lambda b^n = J_{\lambda A}(x^n - \lambda b^n) + \lambda b^n = J_{\lambda A}(2J_{\lambda B} - I)(x^n + \lambda b^n) + (I - J_{\lambda B})(x^n + \lambda b^n)$$

Entonces,

$$x^{n+1} + \lambda b^{n+1} = [J_{\lambda A}(2J_{\lambda B} - I) + (I - J_{\lambda B})](x^n + \lambda b^n).$$

Luego, si para cada $(x^n, b^n) \in B$ ponemos $z^n = x^n + \lambda b^n$, entonces

$$z^{n+1} = [J_{\lambda A}(2J_{\lambda B} - I) + (I - J_{\lambda B})]z^n. \quad (2.15)$$

De esta manera, la sucesión $\{(x^n, b^n)\}_{n=1}^\infty$ generada por el Algoritmo 4 a partir de un punto $(x^0, b^0) \in B$ es tal que

$$z^n = x^n + \lambda b^n \quad \text{y} \quad x^n = J_{\lambda B}(z^n) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

donde z^n viene de (2.15).

Definición 2.4.1. Para dos operadores monótonos maximales A y B y $\lambda > 0$ se define el **operador de Douglas-Rachford** por

$$G_{\lambda,A,B} = [J_{\lambda A}(2J_{\lambda B} - I) + (I - J_{\lambda B})]$$

Proposición 2.3. El operador $G_{\lambda,A,B}$ es co-coercivo.

Demostración. Consecuencia de la co-coercividad de $J_{\lambda A}$ y $J_{\lambda B}$ y la Proposición 1.9. \square

A continuación se ve la relación entre los puntos fijos del operador $G_{\lambda,A,B}$ y los ceros de $A + B$.

Proposición 2.4. El conjunto de puntos fijos del operador $G_{\lambda,A,B}$ es

$$\text{Fix}(G_{\lambda,A,B}) = \{x + \lambda b : (x, b) \in B \text{ y } (x, -b) \in A\}.$$

Convergencia del algoritmo Douglas-Rachford.

Teorema 2.4. [8, pág 90] Sean $A, B: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dos operadores monótonos maximales tal que $(A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$, y $\{(x^n, b^n)\}_{n=0}^{\infty}$ en B generada por el Algoritmo 4 con tamaño de paso $\lambda > 0$. Entonces la sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ obtenida de (2.15) converge a un elemento de $\text{Fix}(G_{\lambda,A,B})$ y $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un zero de $A + B$.

2.4.1. El operador splitting

En esta sección estudiaremos al operador splitting introducido por Eckstein en [8], ver también [9]. El operador splitting nos permitirá observar que el método Douglas-Rachford es una aplicación del método del punto proximal.

Proposición 2.5. Sean A y B dos operadores monótonos maximales, entonces el operador

$$S_{\lambda,A,B} = (G_{\lambda,A,B})^{-1} - I$$

es monótono maximal.

Demostración. Dado que A y B son monótonos maximales entonces $J_{\lambda A}$ y $J_{\lambda B}$ son de dominio total (\mathbb{R}^n), por lo tanto $G_{\lambda,A,B}$ también tiene dominio total. Además de la Proposición 2.3 tenemos que $G_{\lambda,A,B}$ es co-coercivo, entonces por la Proposición 1.8 se concluye que $S_{\lambda,A,B}$ es monótono maximal. \square

Definición 2.4.2. Sean $A, B: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dos operadores monótonos maximales y $\lambda > 0$, **el operador splitting de A y B** es

$$S_{\lambda,A,B} = (G_{\lambda,A,B})^{-1} - I.$$

Observación 2.2. Note que

$$(I + S_{\lambda,A,B})^{-1} = [I + (G_{\lambda,A,B})^{-1} - I]^{-1} = G_{\lambda,A,B},$$

entonces

$$G_{\lambda,A,B} = J_{S_{\lambda,A,B}}.$$

Es decir, la itearción $z^{n+1} = G_{\lambda,A,B}(z^n)$ es equivalente a aplicar el algoritmo del punto proximal al operador monótono maximal $S_{\lambda,A,B}$ con tamaño de paso constante 1.

Hallems una expresión explicita para $S_{\lambda,A,B}$ y así poder ver la relación del operador splitting con los ceros de $A + B$.

Sea $z \in \mathbb{R}^n$ entonces existe un único par $(u, b) \in B$ tal que $z = u + \lambda b$ y para $u - \lambda b$ existe un único par $(v, a) \in A$ tal que $u - \lambda b = v + \lambda a$. Entonces

$$\begin{aligned} G_{\lambda,A,B}(z) &= [J_{\lambda A}(2J_{\lambda B} - I) + (I - J_{\lambda B})](u + \lambda b) \\ &= J_{\lambda A}(u - \lambda b) + \lambda b \\ &= v + \lambda b \end{aligned}$$

Luego

$$G_{\lambda,A,B} = \{(u + \lambda b, v + \lambda b) \mid (u, b) \in B; (v, a) \in A; u - \lambda b = v + \lambda a\}$$

Por lo tanto

$$S_{\lambda,A,B} = \{(u + \lambda b, u - v) \mid (u, b) \in B; (v, a) \in A; u - \lambda b = v + \lambda a\} \quad (2.16)$$

Buscar un cero de $A+B$ se puede formular como la búsqueda de $(u, b) \in B$ y $(v, a) \in A$ tal que

$$\begin{cases} u = v \\ a = -b \end{cases}$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} u - v = 0 \\ v + \lambda a = u - \lambda b \end{cases}$$

entonces una forma de encontrar ceros de $A + B$ es hallando ceros de $S_{\lambda,A,B}$, lo cual se confirma en la siguiente proposición.

Proposición 2.6. [8, pág 140] Sean A y B dos operadores monótonos maximales sobre \mathbb{R}^n y $\lambda > 0$. entonces

$$S_{\lambda,A,B}^{-1}(0) = \text{Fix}(G_{\lambda,A,B}) = \{u + \lambda b \mid (u, b) \in B \wedge (u, -b) \in A\},$$

es decir

$$(S_{\lambda,A,B})^{-1}(0) \subseteq \{u + \lambda b \mid (u, b) \in B; u \in (A + B)^{-1}(0)\}.$$

La importancia de que el método Douglas-Rachford sea una aplicación del método del punto proximal principalmente radica en que podemos extender resultados de convergencia para el Algoritmo 4 que son mas factibles para la implementación computacional.

Capítulo 3

Métodos splitting en el contexto de Optimización

En este capítulo repasaremos la aplicación de los esquemas splitting estudiados en el capítulo anterior al problema de optimización convexa (P) que mencionamos a continuación y a su dual (D). Consideramos el problema,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(Mx) \quad (P)$$

donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones convexas semicontinuas inferiores y propias, y M es una matriz $m \times n$. De acuerdo con el Ejemplo 1.3 el problema dual de (P) es

$$\min_{p \in \mathbb{R}^m} f^*(-M^T p) + g^*(p) \quad (D).$$

Se sabe que encontrar el minimizador de una función convexa es equivalente a encontrar ceros de su subdiferencial, entonces el problema (P) equivale a

$$\text{Hallar } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in \partial[f + g \circ M](x)$$

que asumiendo condiciones de regularidad, es equivalente a

$$\text{Hallar } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in (\partial[f] + \partial[g \circ M])(x),$$

entonces estamos en el contexto de hallar ceros de la suma de dos operadores monótonos maximales. Tomaremos $A = \partial[f]$ (para el dual $\partial[f^* \circ (-M^T)]$) y $B = \partial[g \circ M]$ (para el dual $\partial[g^*]$), asumiendo ciertas condiciones de regularidad aplicaremos los esquemas splitting a (P) y su dual (D).

Denotemos por

$$\alpha: = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(Mx) \quad \text{y} \quad \beta: = \min_{p \in \mathbb{R}^m} f^*(-M^T p) + g^*(p)$$

los valores óptimos de (P) y (D) respectivamente.

Se observa que, por definición de función conjugada de Fenchel, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^m$

$$f(x) + f^*(-M^T p) \geq \langle -M^T p, x \rangle \quad \text{y} \quad g(Mx) + g^*(p) \geq \langle p, Mx \rangle, \quad (3.1)$$

entonces,

$$f(x) + f^*(-M^T p) - \langle -M^T p, x \rangle + g(Mx) + g^*(p) - \langle p, Mx \rangle \geq 0 \quad (3.2)$$

y en particular $\alpha + \beta \geq 0$. Denotemos también por S_{opt} como el conjunto de soluciones óptimas de (P) y S_{opt}^* al conjunto de soluciones óptimas de (D).

3.1. Condiciones de optimalidad y consideraciones de regularidad

Como se menciona al inicio del capítulo, pretendemos resolver (P) y (D) tomando $A = \partial[f]$ (para el dual $\partial[f^* \circ (-M^T)]$) y $B = \partial[g \circ M]$ (para el dual $\partial[g^*]$) y aplicar un método splitting a A y B . Desafortunadamente en general no es cierto que

$$\partial[f + g \circ M] = \partial[f] + \partial[g \circ M] \quad \text{y} \quad \partial[f^* \circ (-M^T) + g^*] = \partial[f^* \circ (-M^T)] + \partial[g^*]. \quad (3.3)$$

Rockafellar da una condición suficiente para remediar este inconveniente, que para nuestros problemas es

$$\text{ri}(\text{Dom } f) \cap \text{ri}(\text{Dom}(g \circ M)) \neq \emptyset \quad (3.4)$$

para (P) y

$$\text{ri}(\text{Dom } \partial g^*) \cap \text{ri}(\text{Dom } \partial(f^* \circ (-M^T)) \neq \emptyset$$

para (D). Otras condiciones mas particulares son mencionadas en [8].

En [16] también podemos encontrar una variante de de la condición (3.4), comenzamos con la regla de la cadena.

Proposición 3.1. *Sea g una función convexa propia sobre \mathbb{R}^n y M una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , entonces $M^T \partial g(Mx) \subset \partial(g \circ M)(x)$ para todo x . Si g es continua en algún $p \in \text{Im}(M)$ entonces*

$$M^T \partial g(Mx) = \partial(g \circ M)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.1. Como lo dice la proposición anterior, no es cierto en general que $M^T \partial g(Mx) = \partial(g \circ M)(x)$, por ejemplo consideremos la función $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} -\sqrt{x_2}, & \text{si } x_2 \geq 0 \\ +\infty, & \text{cc} \end{cases}$$

y la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $(g \circ M)(x_1, x_2) = 0$.

Note que cuando $x = [0, 2]^T$, $Mx = [0, 0]^T$ entonces $\partial g(Mx) = \emptyset$. Por otro lado observamos que $\partial(g \circ M)(x) = \{\nabla(g \circ M)(x)\} = \{0\}$. Así $M^T \partial g(Mx) \not\subseteq \partial(g \circ M)(x)$.

Para obtener (3.3), además de la proposición anterior necesitamos del Teorema de Moreau-Rockafellar sobre el subdiferencial de la suma de dos funciones. No se mostrara el teorema, la demostración la podemos encontrar en [16].

Teorema 3.1. Sean $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones propias, convexas y semicontinuas inferiores. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f + g)(x).$$

Si g es continua en algún $y \in \text{Dom}(f)$, entonces

$$\partial f(x) + \partial g(x) = \partial(f + g)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

A partir de la regla de la cadena y el Teorema 3.1 se obtiene una condición suficiente para 3.3.

Corolario 3.1. Sea $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones convexas, propias y semicontinuas inferiores. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\partial f(x) + M^T \partial g(Mx) \subset \partial[f + g \circ M](x).$$

Si existe $x_0 \in \text{Dom}(f)$ tal que g es continua en Mx_0 , entonces

$$\partial f(x) + M^T \partial g(Mx) = \partial[f + g \circ M](x).$$

El siguiente teorema se dan las condiciones para que los problemas (P) y (D) tengan solución. Este se encuentra con mayor detalle en [16].

Teorema 3.2. Sea $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones convexas, propias y semicontinuas inferiores. Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^m$, $-M^T p \in \partial f(x)$ y $p \in \partial g(Mx)$ si y solo si $x \in S_{opt}$, $p \in S_{opt}^*$ y $\alpha + \beta = 0$.

Si $x \in S_{opt}$ y existe $x_0 \in \text{Dom}(f)$ tal que g es continua en Mx_0 , entonces, existe $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $-M^T p \in \partial f(x)$ y $p \in \partial g(Mx)$.

El par (x, p) tal que $(x, -M^T p) \in \partial f$ y $(Mx, p) \in \partial g$ es llamado **par de Kuhn-Tucker para (P)** .

3.2. Cálculos alternativos

Para aplicar los esquemas splitting se deben calcular pasos forward y backward con los operadores $A = \partial f$ y $B = \partial[g \circ M]$, estos cálculos no son triviales. Para esto [8] (revisar para los detalles) recomienda algunos cálculos alternativos que en ocasiones serán de ayuda.

Observación 3.1. Considere el problema convexo (P) .

- (i). Como se presentó en el método del subgradiente el paso forward dado por $z = (I - \lambda \partial f)(x)$ puede ser implementado por:

$$\begin{aligned} \text{Elegir } y &\in \partial f(x) \\ z &= x - \lambda y \end{aligned}$$

- (ii). De acuerdo con la Proposición 3.1 el paso forward dado por $z = (I - \lambda \partial[g \circ M])(x)$ puede ser implementado por:

$$\begin{aligned} \text{Elegir } y &\in \partial g(Mx) \\ z &= x - \lambda M^T y \end{aligned}$$

- (iii). De acuerdo con la Definición 1.4.1 el paso backward dado por $z = (I + \lambda \partial f)^{-1}(\bar{x})$ puede ser implementado por:

$$z = \mathbf{prox}_{\lambda f}(\bar{x}).$$

- (iv). Similar a (iii), $z = (I + \lambda \partial[g \circ M])^{-1}(\bar{x})$ puede ser implementado por:

$$z = \mathbf{prox}_{\lambda[g \circ M]}(\bar{x}).$$

Los cálculos alternativos para los pasos forward y backward con los operadores $A = \partial[f^*(-M^T)]$ y $B = \partial g^*$ se muestran en el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *Considere un problema convexo de la forma (P). Entonces*

1. *Para $\bar{p} \in \text{Dom } \partial g^* = \text{Im } \partial g$ el paso forward $p \in (I - \lambda \partial g^*)\bar{p}$ puede ser calculado con el siguiente proceso:*

- *Tomar cualquier $\theta \in \mathbb{R}^m$*
- *Elegir $\bar{z} \in \arg \min_z \{g(z) - \langle \bar{p}, z - \theta \rangle\}$*
- *$p = \bar{p} - \lambda \bar{z}$.*

2. *Para $\bar{p} \in \text{Dom}(\partial f^* \circ (-M^T))$ es decir $-M^T \bar{p} \in \text{Im } \partial f$, el paso forward $p \in (I - \lambda \partial[f^* \circ (-M^T)])\bar{p}$ puede ser calculado con el siguiente proceso:*

- *Tomar cualquier $\phi \in \mathbb{R}^m$*
- *Elegir $\bar{x} \in \arg \min_x \{f(x) - \langle \bar{p}, Mx - \phi \rangle\}$*
- *$p = \bar{p} + \lambda M \bar{x}$.*

3. *Para $\bar{p} \in \mathbb{R}^m$ el paso backward o también llamado “paso proximal” $p = (I + \lambda \partial g^*)^{-1} \bar{p}$ puede ser calculado por:*

- *Tomar cualesquiera $\theta, \xi \in \mathbb{R}^m$*
- *Elegir $\bar{z} = \arg \min_z \left\{ g(z) - \langle \bar{p} - \lambda \xi, z - \theta \rangle + \frac{\lambda}{2} \|z - \xi\|^2 \right\}$*
- *$p = \bar{p} - \lambda \bar{z}$.*

Además, $\bar{z} \in \partial g^(p)$.*

4. *Asumamos que M es inyectiva, para $\bar{p} \in \mathbb{R}^m$ entonces el paso backward o también llamado “paso proximal” $p = (I + \lambda \partial[f^* \circ (-M^T)])^{-1} \bar{p}$ puede ser calculado por:*

- *Tomar cualesquiera $\eta, \phi \in \mathbb{R}^m$*
- *Elegir $\bar{x} = \arg \min_x \left\{ f(x) + \langle \bar{p} + \lambda \eta, Mx - \phi \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Mx - \eta\|^2 \right\}$*

- $p = \bar{p} + \lambda M\bar{x}$.

Además, $(\bar{x}, -M^T p) \in \partial f$ y $-M\bar{x} \in \partial[f^* \circ (-M^T)](p)$.

Observación 3.2. La hipótesis de M inyectiva solo se emplea para garantizar la existencia de \bar{x} . Si M no es inyectiva pero existe \bar{x} que minimiza a la función $x \mapsto f(x) + \langle \bar{p} + \lambda\eta, Mx - \phi \rangle + \frac{\lambda}{2} \|M\bar{x} - \eta\|^2$ entonces también podemos emplear 4.

Por otro lado las constantes arbitrarias θ, ξ, ϕ y η aparentemente no son necesarias pero serán de conveniente utilidad cuando apliquemos los esquemas splitting.

3.3. Aplicación de los Métodos Splitting

En esta sección se aplican los esquemas splitting a los problemas (P) y (D) de la sección anterior. Para los detalles, revisar [8].

3.3.1. Método de optimización Doble Backward

Este esquema splitting no es mayor interés pues sus aplicaciones son escasas y su convergencia se da en casos especiales.

Para el caso primal $A = \partial f$ y $B = \partial[g \circ M]$. De acuerdo con la Observación 3.1 y el Algoritmo 1 obtenemos el Algoritmo Primal doble backward 5.

Algorithm 5 Algoritmo Doble Backward

Require: Tamaños de paso $\lambda_n > 0$, un punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= \mathbf{prox}_{\lambda_n f}(x^n) \\ x^{n+1} &= \mathbf{prox}_{\lambda_n (g \circ M)}(y^{n+1}) \\ n &\leftarrow n + 1, \text{ Ir al paso 1} \end{aligned}$$

Un caso donde podemos aplicar este algoritmo es cuando por ejemplo, $M = I$, $f = \delta_C$ y $g = \delta_D$ donde C y D son conjuntos convexos cerrados. Para este caso, la convergencia del algoritmo es dada por el Corolario 1.2, siempre que $C \cap D \neq \emptyset$.

3.3.2. Método de optimización Forward-Backward

Este método es de mayor interés puesto que un caso particular de este es el algoritmo del subgradiente proyectado.

Para el problema primal e toman $A = \partial f$ y $B = \partial[g \circ M]$. De acuerdo con la Observación 3.1 y el Algoritmo 2 obtenemos el Algoritmo Primal Forward-Backward 6.

Algorithm 6 Algoritmo Primal Forward-Backward

Require: Tamaños de paso $\lambda_n > 0$, un punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Elegir $y^n \in \partial f(x^n)$

$x^{n+1} = \mathbf{prox}_{\lambda_n(g \circ M)}(x^n - \lambda_n y^n)$

$n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1

Si $M = I$ y $g = \delta_C$ donde C es un convexo cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n entonces el Algoritmo 6 es el algoritmo del subgradiente proyectado y si además f es diferenciable, 6 es el algoritmo del gradiente proyectado.

Podemos aplicar el Teorema de Tseng 2.3 para la convergencia de 6

Proposición 3.3. *Considere al problema (P) que posee un par de KKT, si f es diferenciable con $\nabla(f)$ Lipschitz de constante L y la sucesión de tamaños de paso son tal que $0 < \inf \lambda_n \leq \sup \lambda_n < \frac{2}{L}$, entonces la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ generada por el Algoritmo 6 converge a la solución óptima de (P).*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 2.3 con $A = \nabla(f)$ y $B = \partial[g \circ M]$ pues, $A^{-1} = \nabla(f)^{-1}$ es fuertemente monótono de constante $1/L$ y la existencia del par de KKT hace que $(A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$. \square

Para el problema dual (D) tomamos $A = \partial[f^* \circ (-M^T)]$ y $B = \partial g^*$. De acuerdo con la Proposición 3.2 ítem 2 e ítem 3 con $\phi = 0$ y el Algoritmo 2 cambiando la notación tenemos que

- El paso forward $q^{n+1} = (I - \lambda_n A)p^n$ se puede implementar por:

$$\begin{aligned} \text{Elegir } x^{n+1} &\in \arg \min_x \{f(x) + \langle p^n, Mx \rangle\} \\ q^{n+1} &= p^n + \lambda_n Mx^{n+1} \end{aligned}$$

- Con $\xi = Mx^{n+1}$ y $\theta = 0$ el paso backward $p^{n+1} = (I + \lambda_n B)q^{n+1}$ puede implementarse por:

$$z^{n+1} = \arg \min_z \left\{ g(z) - \langle q^{n+1} - \lambda_n Mx^{n+1}, z \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|Mx^{n+1} - z\|^2 \right\}$$

$$p^{n+1} = q^{n+1} - \lambda_n z^{n+1}$$

Combinando y eliminando q^{n+1} tenemos el Algoritmo Dual Forward-Backward 7.

Algorithm 7 Algoritmo Dual Forward-Backward

Require: Tamaños de paso $\lambda_n > 0$, un punto inicial $p^0 \in \mathbb{R}^m$

Elegir $x^{n+1} \in \arg \min_x \{f(x) + \langle p^n, Mx \rangle\}$

$z^{n+1} = \arg \min_z \{g(z) - \langle q^{n+1} - \lambda_n Mx^{n+1}, z \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|Mx^{n+1} - z\|^2\}$

$p^{n+1} = p^n + \lambda_n (Mx^{n+1} - z^{n+1})$

$n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1

También se puede probar una versión del Teorema de Tseng, se muestra en [8, pág 117] que las sucesiones $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ y $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ generadas por 7 convergen a soluciones de los problemas primal (P) y dual (D) respectivamente, siempre que los problemas tengan solución, f sea fuertemente convexa con módulo $\alpha > 0$, M inyectiva y la sucesión de tamaños de paso es tal que $0 < \inf \lambda_n \leq \sup \lambda_n < \frac{2\alpha}{\rho(M^T M)}$.

3.3.3. Método de optimización Peaceman-Rachford

Del capítulo anterior el método viene catalogado de no ser siempre convergente. De alguna manera se podría pensar que esto quita el interés de trabajar con este método pero no es así ya que existen varios trabajos en la literatura que dan muestra de las cosas positivas del método iterativo Peaceman-Rachford. En este trabajo, no vamos a profundizar en el estudio de este esquema, solo mencionaremos los algoritmos resultantes al aplicar Peaceman-Rachford a P y D y resultados de convergencia basado en la proposición 2.2.

Para el problema (P) tomamos $A = \partial f$ y $B = \partial[g \circ M]$. De acuerdo con la Observación 3.1 y el Algoritmo 3 obtenemos el Algoritmo Primal Peaceman-Rachford 8.

Algorithm 8 Algoritmo Primal Peaceman-Rachford

Require: Tamaños de paso $\lambda_n > 0$, un punto inicial $(x^0, b^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

- 1: $y^{n+1} = \mathbf{prox}_{\lambda_n f}(x^n - \lambda_n b^n)$
 - 2: $x^{n+1} = \mathbf{prox}_{\lambda_n [g \circ M]}(2y^{n+1} - x^n + \lambda_n b^n)$
 - 3: $b^{n+1} = b^n + \frac{1}{\lambda_n}(2y^{n+1} - x^{n+1} - x^n)$
 - 4: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1
-

Proposición 3.4. [8, pág 120] *Suponga que el problema (P) tiene solución. Si $\lambda_n = \lambda > 0 \forall n$ y f, g cumplen con al menos una de las condiciones siguientes*

- (i). f es fuertemente convexa y diferenciable,
- (ii). g es fuertemente convexa y diferenciable en $\text{Im } M$

entonces, la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ generada por el Algoritmo 8 converge a la única solución de (P) .

Demostración. Al ocurrir (i) o (ii) entonces $A = \partial f$ o $B = \partial[g \circ M]$ son funciones fuertemente monótonas respectivamente, entonces estamos en el contexto de la Proposición (2.2), la cual afirma que la sucesión $\{z^n := x^n + \lambda b^n\}_{n=0}^\infty$ converge a un punto fijo z^* del operador Peaceman-Rachford el cual es no vacío pues (P) tiene solución. Por lo tanto, $x^n \rightarrow J_\lambda B(z^*)$. \square

Para el problema dual (D) tomamos $A = \partial[f^* \circ (-M^T)]$ y $B = \partial g^*$. Haciendo cambios de variable $x^n = p^n, y^n = q^n$ y $z^n = b^n$ en el Algoritmo 3 tenemos:

- Los pasos 1 y 2 del Algoritmo 3 pueden ser calculados por: tomando

$\bar{p} = p^n - \lambda_n z^n, \eta = \lambda_n z^n$ y $\phi = 0$ en la Proposición 3.2 item (iv)

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \arg \min_x \left\{ f(x) + \langle p^n, Mx \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|Mx - z^n\|^2 \right\} \\ q^{n+1} &= p^n + \lambda_n (Mx^{n+1} - z^n) \\ a^{n+1} &= -\lambda_n Mx^{n+1} \end{aligned}$$

- Con $\bar{p} = q^{n+1} - \lambda_n a^{n+1} = p^n + \lambda_n (2Mx^{n+1} - z^n)$, $\xi = Mx^{n+1}$ y $\theta = 0$ los pasos 3 y 4 de 3 pueden calcularse mediante:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= \arg \min_z \left\{ g(z) - \langle p^n + \lambda_n (Mx^{n+1} - z^n), z \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|z - Mx^{n+1}\|^2 \right\} \\ p^{n+1} &= p^n - \lambda_n (2Mx^{n+1} - z^n - z^{n+1}) \end{aligned}$$

Sustituyendo q^{n+1} tenemos el Algoritmo Dual Peaceman-Rachford 9.

Algorithm 9 Algoritmo Dual Peaceman-Rachford

Require: Tamaños de paso $\lambda_n > 0$, puntos iniciales $p^0, z^0 \in \mathbb{R}^m$

- 1: $x^{n+1} = \arg \min_x \left\{ f(x) + \langle p^n, Mx \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|Mx - z^n\|^2 \right\}$
 - 2: $q^{n+1} = p^n + \lambda_n (Mx^{n+1} - z^n)$
 - 3: $z^{n+1} = \arg \min_z \left\{ g(z) - \langle q^{n+1}, z \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|z - Mx^{n+1}\|^2 \right\}$
 - 4: $p^{n+1} = p^n - \lambda_n (2Mx^{n+1} - z^n - z^{n+1})$
 - 5: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1
-

Proposición 3.5. [8, pág 123] *Suponga que el problema (P) tiene un par de KKT. Si $\lambda_n = \lambda > 0$, $\forall n$ y las funciones f y g cumplen con al menos una de las condiciones siguientes*

- (i). f es estrictamente convexa con ∂f no expansivo y M invertible,
- (ii). g es estrictamente convexa con ∂g no expansivo y M inyectiva.

entonces, para cualquier par de puntos iniciales $p^0, z^0 \in \mathbb{R}^m$, las sucesiones $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ y $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ generada por el Algoritmo 9 convergen a la solución de (P) y (D) respectivamente.

Note que (i) implica que $A = \partial[f^* \circ (-M^T)]$ es una función fuertemente monótona y (ii) implica que $B = \partial[g^*]$ es fuertemente monótono y univaluado. Entoces ambos casos implican las hipótesis la Proposición (2.2).

3.3.4. Método de optimización Douglas-Rachford

En esta sección, basados en el esquema splitting Douglas-Rachford veremos el método de optimización primal y dual que resulta al aplicarlo al problema (P) y a su dual.

En primer lugar consideremos el caso primal. Aquí $A = \partial f$ y $B = \partial[g \circ M]$. De la Observación 3.1 y de acuerdo con el algoritmo 4 la sucesión $\{a^n\}_{n=1}^\infty$ puede ser omitida, obtenemos el Algoritmo Primal Douglas-Rachford 10.

Algorithm 10 Algoritmo Primal Douglas-Rachford

Require: Tamaños de paso $\lambda_n > 0$, un punto inicial $(x^0, b^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

- 1: $y^{n+1} = \mathbf{prox}_{\lambda_n f}(x^n - \lambda_n b^n)$
 - 2: $x^{n+1} = \mathbf{prox}_{\lambda_n [g \circ M]}(y^{n+1} + \lambda_n b^n)$
 - 3: $b^{n+1} = b^n + \frac{1}{\lambda_n}(y^{n+1} - x^{n+1})$
 - 4: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1
-

Proposición 3.6. [8, pág 128] *Suponga que el problema (P) es soluble y que g es continua en Mx_0 para algún $x_0 \in \text{Dom}(f)$. Considere $\lambda_n = \lambda > 0$ para todo $n \geq 0$ y un punto inicial $(x^0, b^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Entonces la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ generada por el Algoritmo 10 converge a una solución de (P) .*

Para la demostración se aplica el Teorema (2.4).

Un importante caso que nos permitirá adaptar ciertos problemas para la aplicación de esquemas splitting se da cuando $M = I_{m \times n}$ y $g = \delta_C$ donde $C \subset \mathbb{R}^n$ es algún convexo cerrado no vacío. El algoritmo solo sufre un cambio en el paso 2, convirtiéndose en

$$x^{n+1} = P_C(y^{n+1} + \lambda_n b^n) \tag{3.5}$$

donde P_C es la proyección sobre el conjunto C .

Proposición 3.7. Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexo cerrado no vacío y f una función convexa, semicontinua inferior y propia que tiene un mínimo sobre C , además $C \subset \text{ri}(\text{Dom}(f))$. Entonces para cualquier punto inicial $(x^0, b^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ converge a un punto óptimo de f sobre C .

Ejemplo 3.2. Solo para fijar ideas, considere el caso trivial de minimizar $f(x) = |x|$ sobre $C = [-1, 1]$. Reescribiendo el problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}} |x| + \delta_C(x).$$

Tomemos $\lambda = 1$ y el punto inicial $(x^0, b^0) = (2, 2)$.

- Calculamos w^1 :

$$\left| \begin{array}{l} y^1 = \mathbf{prox}_f(x^0 - b^0) = \mathit{argmin}_y \left\{ |y| + \frac{1}{2}|y - 0|^2 \right\} = 0 \\ x^1 = P_C(0 + 2) = 1 \\ b^1 = 2 + (0 - 1) = 1 \end{array} \right.$$

- Calculamos x^2 :

$$\left| \begin{array}{l} y^2 = \mathbf{prox}_f(x^1 - b^1) = \mathit{argmin}_y \left\{ |y| + \frac{1}{2}|y - 0|^2 \right\} = 0 \\ x^2 = P_C(0 + 1) = 1 \\ b^2 = 1 + 0 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

- Calculamos x^3 :

$$\left| \begin{array}{l} y^3 = \mathbf{prox}_f(x^2 - b^2) = \mathit{argmin}_y \left\{ |y| + \frac{1}{2}|y - 1|^2 \right\} = 0 \\ x^3 = P_C(0 + 0) = 0 \\ b^3 = 0 + 0 - 0 = 0 \end{array} \right.$$

Note que $x^n = 0$ para todo $n \geq 3$. Así, tal como lo dice la Proposición

3.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

que es el mínimo de la función $f(x) = |x|$ sobre $[0, 1]$.

Ahora veremos el algoritmo que resulta de aplicar el esquema Douglas-Rachford al problema dual, tomando los operadores $A = \partial[f^* \circ (-M^T)]$ y $B = \partial g^*$.

Cambiamos la notación, $q^n = y^n$, $s^n = a^n$, $p^n = x^n$ y $z^n = b^n$ en el Algoritmo Douglas-Rachford 4. Del ítem 4 la Proposición 3.2 con $\bar{p} = p^n - \lambda_n z^n$, $\eta = z^n$ y $\phi = 0$ y asumiendo que M es inyectiva 1 y 2 en 4 son calculados por:

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \arg \min_x \left\{ f(x) + \langle (p^n - \lambda_n z^n) + \lambda_n z^n, Mx \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|Mx - z^n\|^2 \right\} \\ q^{n+1} &= p^n - \lambda_n z^n + \lambda_n Mx^{n+1} \\ s^{n+1} &= -Mx^{n+1}. \end{aligned}$$

Del ítem 3 de (3.2) con $\bar{p} = q^{n+1} + \lambda_n z^n = p^n + \lambda_n Mx^{n+1}$, $\xi = Mx^{n+1}$ y $\theta = 0$, 3 y 4 se calculan mediante

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= \arg \min_z \left\{ g(z) - \langle p^n + \lambda_n Mx^{n+1} - \lambda_n z^n, z \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|Mx^{n+1} - z\|^2 \right\} \\ p^{n+1} &= p^n + \lambda_n Mx^{n+1} - \lambda_n z^{n+1}. \end{aligned}$$

Note que la sucesiones $\{q^n\}$ y $\{s^n\}$ pueden ser omitidas. Combinando y simplificando los cálculos anteriores obtenemos el Algoritmo Dual Douglas-Rachford 11

Algorithm 11 Algoritmo Dual Douglas-Rachford

Require: Tamaños de paso $\lambda_k > 0$, puntos iniciales $p^0, z^0 \in \mathbb{R}^m$

- 1: $x^{n+1} = \arg \min_x \left\{ f(x) + \langle p^n, Mx \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|Mx - z^n\|^2 \right\}$
 - 2: $z^{n+1} = \arg \min_z \left\{ g(z) - \langle p^n, z \rangle + \frac{\lambda_n}{2} \|Mx^{n+1} - z\|^2 \right\}$
 - 3: $p^{n+1} = p^n + \lambda_n (Mx^{n+1} - z^{n+1})$
 - 4: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1
-

Un resultado de convergencia.

Proposición 3.8. *Considere el problema (P) que tiene un par de KKT. Supongamos que $\lambda_n = \lambda > 0$ y M una matriz inyectiva, entonces para cualquier punto inicial $(p^0, z^0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ las sucesiones obtenidas del Algoritmo 11 $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ y $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ convergen a las soluciones de (P) y (D) respectivamente. Además, la sucesión $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ converge a Mx^* , donde x^* es el límite de $\{x^n\}_{n=0}^\infty$.*

3.3.5. Algoritmo Dual Douglas-Rachford y AD-PMM

El problema (P) puede ser reformulado mediante

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) + g(z) \\ \text{s.a.} \quad & Mx = z \\ & x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

y la función Lagrangiano aumentado asociado es

$$\mathcal{L}_\lambda(x, z, p) = f(x) + g(z) + \langle p, Mx - z \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Mx - z\|^2$$

donde p son los multiplicadores de Lagrange y $\lambda > 0$ es el parámetro de penalidad. Entonces el algoritmo Dual Douglas-Rachford puede ser interpretado como

- 1) es $x^{n+1} = \arg \min_x \mathcal{L}_\lambda(x, z^n, p^n)$ (minimizar \mathcal{L} respecto de x)
- 2) es $z^{n+1} = \arg \min_z \mathcal{L}_\lambda(x^{n+1}, z, p^n)$ (minimizar \mathcal{L} respecto de z)
- 3) es la actualización de los multiplicadores de Lagrange.

A un algoritmo de este tipo es llamado *Método de Direcciones Alternantes de los Multiplicadores* o ADMM por sus siglas en inglés. Entonces, ADMM para el problema (P) resulta ser equivalente a aplicar Douglas-Rachford splitting al problema dual (D).

Nota 3.1. Desde ahora al Algoritmo 11 (Dual Douglas-Rachford) lo llamaremos ADMM.

Uno de los inconvenientes en el ADMM es que resolver los subproblemas 1) y 2) se puede tornar muy complicados, tanto como el problema original, en especial el subproblema 1) ya que involucra a un problema de mínimos cuadrados con la matriz M . Una alternativa a este problema la dan R. Shefi y M. Teboulle en [22]. Ellos suman un término cuadrático a cada subproblema.

Aquí se asume que el subproblema 2) es “fácil” de resolver y solo se le agrega un término cuadrático al subproblema 1), resultando el Algoritmo 12 que adoptará el nombre de *Proximal Método de los Multiplicadores de Dirección Alternante* o AD-PMM por sus siglas en inglés.

Algorithm 12 AD-PMM

Require: Tamaño de paso $\lambda > 0$, puntos iniciales $p^0, z^0 \in \mathbb{R}^m$

- 1: $x^{n+1} = \arg \min_x \left\{ f(x) + \langle p^n, Mx \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Mx - z^n\|^2 + \frac{1}{2} \|x - x^n\|_Q^2 \right\}$
 - 2: $z^{n+1} = \arg \min_z \left\{ g(z) - \langle p^n, z \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Mx^{n+1} - z\|^2 \right\}$
 - 3: $p^{n+1} = p^n + \lambda(Mx^{n+1} - z^{n+1})$
 - 4: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1
-

donde Q es una matriz simétrica semidefinida positiva y $\|\cdot\|_Q$ es la norma inducida por Q , $\|x\|_Q = \sqrt{\langle Qx, x \rangle}$.

Es claro que si $Q = 0$ el algoritmo AD-PMM es igual al ADMM, en este caso la convergencia del algoritmo es garantizada cuando M es inyectiva

como se muestra en la Proposición (3.8). R. Shefi y M. Teboulle prueban la convergencia del Algoritmo 12 asumiendo las hipótesis de $Q = 0$ y M inyectiva o Q definida positiva, Aquí se amplía de manera sutil la hipótesis a matrices Q semidefinidas positivas tales que $Q + \lambda M^T M$ es definida positiva, no exigimos en ningún caso que Q sea definida positiva.

Observación 3.3. Para tener en cuenta: M matriz simétrica definida positiva

1. $2(w - v)^T M(u - v) = \|w - v\|_M^2 - \|w - u\|_M^2 + \|u - v\|_M^2 \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^d$
2. $2\langle \alpha - \beta, \gamma - \delta \rangle = \|\alpha - \delta\|^2 - \|\alpha - \gamma\|^2 + \|\beta - \gamma\|^2 - \|\beta - \delta\|^2 \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^m$

Teorema 3.3. *Suponga que el problema (P) tiene solución y que g es continua en Mx_0 para algún $x_0 \in \text{Dom}(f)$. Entonces si Q es una matriz tal que*

1. Q es semidefinida positiva y
2. $Q + \lambda M^T M$ es definida positiva,

las sucesiones $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ y $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ generadas por el Algoritmo 12 convergen a una solución de (P) y (D) respectivamente.

Demostración. En primer lugar observamos que podemos tomar $Q = 0$ siempre que M es inyectiva, en este caso, el algoritmo se reduce al ADMM y por lo tanto la conclusión se sigue de la Proposición (3.8).

Asumamos que $Q + \lambda M^T M$ es definida positiva. Por conveniencia, para $w = (x, z, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ consideramos la norma

$$\|w\|_G^2 = \|x\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + 2\lambda \|z\|^2 + 2\lambda^{-1} \|p\|^2$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana y $\|\cdot\|_A$ es la norma inducida por A .

Sea (x^*, p^*) un par de KKT. Entonces del Teorema (3.2) tenemos que $-M^T p^* \in \partial f(x^*)$ también $p^* \in \partial g(z^*)$, donde $Mx^* = z^*$. Consideremos las siguientes notaciones $w^n := (x^n, z^n, p^n)$ y $w^* := (x^*, z^*, p^*)$.

De 1 por condición de optimalidad tenemos

$$0 \in \partial f(x^{n+1}) + \lambda M^T (Mx^{n+1} - z^n + \lambda^{-1}p^n) + Q(x^{n+1} - x^n) \quad (3.6)$$

Sea $t_1^{n+1} \in \partial f(x^{n+1})$ y usando las notaciones $x_e^n = x^n - x^*$, $z_e^n = x^n - x^*$ y $p_e^n = x^n - x^*$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= t_1^{n+1} + \lambda M^T (Mx^{n+1} - z^n + \lambda^{-1}p^n) + Q(x^{n+1} - x^n) \\ 0 &= t_1^{n+1} + M^T p^* + \lambda M^T (Mx_e^{n+1} - z_e^n + \lambda^{-1}p_e^n) + Q(x^{n+1} - x^n) \end{aligned}$$

Multiplicando por x_e^{n+1}

$$\begin{aligned} 0 &= \langle t_1^{n+1} + M^T p^*, x_e^{n+1} \rangle + \lambda \langle Mx_e^{n+1} - z_e^n + \lambda^{-1}p_e^n, Mx_e^{n+1} \rangle \\ &\quad + \langle Q(x^{n+1} - x^n), x^{n+1} - x^* \rangle \\ 0 &= \langle t_1^{n+1} + M^T p^*, x_e^{n+1} \rangle + \lambda \langle Mx_e^{n+1} - z_e^n + \lambda^{-1}p_e^n, Mx_e^{n+1} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [\|x_e^{n+1}\|_Q^2 - \|x_e^n\|_Q^2 + \|x^{n+1} - x^n\|_Q^2] \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $\|\cdot\|_Q^2 = \langle Q(\cdot), \cdot \rangle$ (abuso de notación pues, Q es semidefinida positiva). Con la misma notación, en 1, si consideramos en lugar de Q a la matriz semidefinida positiva $\lambda M^T M$, existe $t_2^{n+1} \in \partial f(x^{n+1})$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle t_2^{n+1} + M^T p^*, x_e^{n+1} \rangle + \lambda \langle Mx_e^{n+1} - z_e^n + \lambda^{-1}p_e^n, Mx_e^{n+1} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [\|x_e^{n+1}\|_{\lambda M^T M}^2 - \|x_e^n\|_{\lambda M^T M}^2 + \|x^{n+1} - x^n\|_{\lambda M^T M}^2]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Luego, sumando (3.7) y (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \langle t_1^{n+1} + t_2^{n+1} + 2M^T p^*, x_e^{n+1} \rangle + \lambda \langle Mx_e^{n+1} - z_e^n + \lambda^{-1}p_e^n, Mx_e^{n+1} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} [\|x_e^{n+1}\|_{Q+\lambda M^T M}^2 - \|x_e^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + \|x^{n+1} - x^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De manera similar de 2 la condición de optimalidad es

$$0 \in \partial g(z^{n+1}) - p^{n+1} \quad (3.10)$$

Sea $s^{n+1} \in \partial g(z^{n+1})$, entonces

$$0 = s^{n+1} - p^* - p_e^{n+1}$$

Multiplicando por z_e^{n+1}

$$0 = \langle s^{n+1} - p^*, z_e^{n+1} \rangle - \langle p_e^{n+1}, z_e^{n+1} \rangle. \quad (3.11)$$

De 3, tenemos

$$\begin{aligned} \langle p_e^{n+1}, Mx^{n+1} - z^{n+1} \rangle &= \lambda^{-1} \langle p_e^{n+1}, p^{n+1} - p^n \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2 + \lambda^{-1} \|p_e^{n+1}\|^2 - \lambda^{-1} \|p_e^n\|^2] \end{aligned}$$

consideremos las notaciones

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{4} [\|x_e^{n+1}\|_{Q+\lambda M^T M}^2 - \|x_e^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + \|x^{n+1} - x^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2] + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} [(\|p^{n+1} - p^n\|^2 + \|p_e^{n+1}\|^2 - \|p_e^n\|^2)] \end{aligned}$$

y

$$\delta = \frac{1}{2} \langle t_1^{n+1} + t_2^{n+1} + 2M^T p^*, x_e^{n+1} \rangle + \langle s^{n+1} - p^*, z_e^{n+1} \rangle$$

entonces sumando (3.9),(3.11) y (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta + \delta + \langle \lambda(Mx_e^{n+1} - z_e^n) + p_e^n - p_e^{n+1}, Mx_e^{n+1} \rangle \\ &= \Delta + \delta + \lambda \langle z^{n+1} - z^n, Mx_e^{n+1} \rangle, \end{aligned}$$

pero como $Mx^* = z^*$ entonces

$$\begin{aligned} \langle z^{n+1} - z^n, Mx_e^{n+1} \rangle &= \langle z^{n+1} - z^n, Mx^{n+1} - z^* \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\|z_e^{n+1}\|^2 - \|z^{n+1} - Mx^{n+1}\|^2 + \|z^n - Mx^{n+1}\|^2 - \|z_e^n\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|z_e^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1} - z^n\|^2 + 2\langle z^n - z^{n+1}, z^{n+1} - Mx^{n+1} \rangle - \|z_e^n\|^2]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta + \frac{\lambda}{2} [\|z_e^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1} - z^n\|^2 - \|z_e^n\|^2] = -\delta - \langle p^n - p^{n+1}, z^n - z^{n+1} \rangle \leq 0$$

donde la última desigualdad se da porque ∂f y ∂g son monótonos. En consecuencia,

$$\begin{aligned} & \|x^{n+1} - x^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + 2\lambda \|z^{n+1} - z^n\|^2 + 2\lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2 \leq \|x_e^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + \\ & + 2\lambda^{-1} \|p_e^n\|^2 + 2\lambda \|z_e^n\|^2 - \|x_e^{n+1}\|_{Q+\lambda M^T M}^2 - 2\lambda^{-1} \|p_e^{n+1}\|^2 - 2\lambda \|z_e^{n+1}\|^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

sumando de $n = 0, 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} [\|x^{n+1} - x^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + 2(\lambda \|z^{n+1} - z^n\|^2 + \lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2)] \leq 2\lambda^{-1} \|p_e^0\|^2 \\ & + \|x_e^0\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + 2\lambda \|z_e^0\|^2 - \|x_e^N\|_{Q+\lambda M^T M}^2 - 2\lambda^{-1} \|p_e^N\|^2 - 2\lambda \|z_e^N\|^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\|x^{n+1} - x^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + 2(\lambda \|z^{n+1} - z^n\|^2 + \lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2)] < +\infty \quad (3.15)$$

Como $Q + \lambda M^T M$ es definida positiva, (3.15) implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{n+1} - x^n\|_{Q+\lambda M^T M} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z^{n+1} - z^n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|p^{n+1} - p^n\| = 0 \quad (3.16)$$

De la desigualdad (3.13)

$$\|x_e^{n+1}\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + \frac{2}{\lambda} \|p_e^{n+1}\|^2 + 2\lambda \|z_e^{n+1}\|^2 \leq \|x_e^n\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + \frac{2}{\lambda} \|p_e^n\|^2 + 2\lambda \|z_e^n\|^2$$

entonces

$$\|w^{n+1} - w^*\|_G \leq \|w^n - w^*\|_G \quad (3.17)$$

Al ser $Q + \lambda M^T M$ definida positiva, y por la equivalencia de normas en \mathbb{R}^n ,

de la ecuación (3.17) se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w^n - w^*\| = \gamma < +\infty \quad (3.18)$$

y la sucesión $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada.

Sea $w^\infty = (x^\infty, z^\infty, p^\infty)$ un punto de adherencia de $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces existe una subsucesión $\{w^{n_j} = (x^{n_j}, z^{n_j}, p^{n_j})\}_{j=0}^{\infty}$ tal que $x^{n_j} \rightarrow x^\infty, p^{n_j} \rightarrow z^\infty$ y $p^{n_j} \rightarrow p^\infty$.

De de 3.10 la cerradura de ∂g

$$p^{n_j} \in \partial g(z^{n_j}) \Rightarrow p^\infty \in \partial g(z^\infty) \quad (3.19)$$

De 3.16 tenemos que

$$\|Mx^\infty - z^\infty\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|Mx^{n_j} - z^{n_j}\| = 0 \Rightarrow Mx^\infty = z^\infty \quad (3.20)$$

Por otro lado, de (3.16) y la equivalencia de normas en \mathbb{R}^n , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{n+1} - x^n\| = 0$, entonces la subsucesión $\{x^{n_j+1}\}_{j=0}^{\infty}$ también converge a x^∞ . Luego, de (3.6)

$$0 \in \partial f(x^{n_j+1}) + \lambda M^T (Mx^{n_j+1} - z^{n_j} + \lambda^{-1} p^{n_j}) + Q(x^{n_j+1} - x^{n_j})$$

haciendo $j \rightarrow \infty$

$$-M^T p^\infty \in \partial f(x^\infty) \quad (3.21)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.19), (3.20), (3.21) y el Teorema (3.2) tenemos que (x^∞, p^∞) es solución de (P) y (D) respectivamente, es decir cualquier punto de acumulación de la sucesión $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ es solución de (P) y (D).

Sea $\hat{w} \neq w^\infty$ otro punto de acumulación de $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces $\hat{w} = \lim_{i \rightarrow \infty} w^{n_i}$. De (3.18)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w^n - w^\infty\| = \gamma_1 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|w^n - \hat{w}\| = \gamma_2$$

Por otro lado,

$$\|w^n - w^\infty\|^2 = \|w^n - \hat{w}\|^2 + 2\langle w^n - \hat{w}, \hat{w} - w^\infty \rangle + \|\hat{w} - w^\infty\|^2, \quad (3.22)$$

entonces, haciendo $i, j \rightarrow \infty$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \|\hat{w} - w^\infty\|^2 > 0 \Rightarrow \gamma_1 > \gamma_2 \quad (3.23)$$

Si en (3.22) cambiamos posiciones de \hat{w} y w^∞ obtenemos

$$\gamma_2 > \gamma_1 \quad (3.24)$$

que es contrario a (3.23). Por lo tanto, la sucesión $\{w^n\}_{n=0}^\infty$ es convergente y converge a un punto que nos da una solución de (P) y una solución de (D). \square

R. Shefi y M. Teboulle prueban que para las sucesiones $\{x^n\}_{n=0}^\infty$, $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ y $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ se obtiene una rapidez de convergencia de orden $O(1/\sqrt{n})$ tan solo asumiendo la positividad de Q , de manera análoga, asumiendo positividad sobre $A = Q + \lambda M^T M$ podemos obtener resultados similares para las sucesiones correspondientes del Algoritmo 12.

Proposición 3.9 (Rapidez de convergencia). *Sea $\{w^n := (x^n, z^n, p^n)\}_{n=0}^\infty$ la sucesión generada por (12), (x^*, p^*) un par de KKT y $Q + \lambda M^T M$ definida positiva. Entonces para $n \in \mathbb{N}$*

$$\|x^n - x^{n-1}\|_A \leq \sqrt{\frac{\theta}{n}}, \quad \|z^n - z^{n-1}\| \leq \sqrt{\frac{\theta}{2\lambda n}}, \quad y \quad \|p^n - p^{n-1}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda\theta}{2n}},$$

donde $A = Q + \lambda M^T M$ y $\theta = \|x_e^0\|_A^2 + 2\lambda^{-1}\|p_e^0\|^2 + 2\lambda\|z_e^0\|^2$.

Demostración. De (3.6) por definición de subdiferencial no es difícil obtener

que para todo $(x, z, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} f(x^{n+1}) &\leq f(x) + \lambda \langle Mx^{n+1} - z^n + \lambda^{-1}p^n, M(x - x^{n+1}) \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2}[\|x - x^n\|_Q^2 - \|x - x^{n+1}\|_Q^2 - \|x^{n+1} - x^n\|_Q^2] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} f(x^{n+1}) &\leq f(x) + \lambda \langle Mx^{n+1} - z^n + \lambda^{-1}p^n, M(x - x^{n+1}) \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2}[\|x - x^n\|_{\lambda M^T M}^2 - \|x - x^{n+1}\|_{\lambda M^T M}^2 - \|x^{n+1} - x^n\|_{\lambda M^T M}^2] \end{aligned} \quad (3.26)$$

sumando (3.25) con (3.26)

$$\begin{aligned} f(x^{n+1}) &\leq f(x) + \lambda \langle Mx^{n+1} - z^n + \lambda^{-1}p^n, M(x - x^{n+1}) \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{4}[\|x - x^n\|_A^2 - \|x - x^{n+1}\|_A^2 - \|x^{n+1} - x^n\|_A^2]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

De 3.10 también por definición de subdiferencial

$$g(z^{n+1}) \leq g(z) - \langle p^{n+1}, z - z^{n+1} \rangle \quad (3.28)$$

y del subproblema (4.5)

$$\begin{aligned} \langle p, Mx^{n+1} - z^{n+1} \rangle &= \frac{1}{2}[\lambda^{-1}\|p - p^n\|^2 - \lambda^{-1}\|p - p^{n+1}\|^2 - \lambda^{-1}\|p^{n+1} - p^n\|^2] + \\ &\quad + \langle p^{n+1}, Mx^{n+1} - z^{n+1} \rangle \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sumando (3.27), (3.28) y (3.29) obtenemos para todo $(x, z, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ y para todo $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} f(x^{n+1}) + g(z^{n+1}) &\leq -\langle p - p^{n+1}, Mx^{n+1} - z^{n+1} \rangle + f(x) + g(z) + \\ &\quad + \lambda \langle z^{n+1} - z^n, M(x - x^{n+1}) \rangle + \frac{1}{4}[\|x - x^n\|_A^2 - \|x - x^{n+1}\|_A^2 - \|x^{n+1} - x^n\|_A^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[\lambda^{-1}\|p - p^n\|^2 - \lambda^{-1}\|p - p^{n+1}\|^2 - \lambda^{-1}\|p^{n+1} - p^n\|^2]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Entonces, (3.30) para $n - 1$ es

$$\begin{aligned}
f(x^n) + g(z^n) &\leq -\langle p - p^n, Mx^n - z^n \rangle + f(x) + g(z) + \\
&+ \lambda \langle z^n - z^{n-1}, M(x - x^n) \rangle + \frac{1}{4} [\|x - x^{n-1}\|_A^2 - \|x - x^n\|_A^2 - \|x^n - x^{n-1}\|_A^2] + \\
&\frac{1}{2} [\lambda^{-1} \|p - p^{n-1}\|^2 - \lambda^{-1} \|p - p^n\|^2 - \lambda^{-1} \|p^n - p^{n-1}\|^2]. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Luego, (3.30) evaluada en (x^n, z^n, p^n) sumada con (3.31) evaluada en $(x^{n+1}, z^{n+1}, p^{n+1})$ es

$$\begin{aligned}
0 &\leq -\Lambda - \frac{1}{2} \|x^{n+1} - x^n\|_A^2 - \lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2 + \\
&+ \frac{1}{4} [\|x^{n+1} - x^{n-1}\|_A^2 - \|x^{n+1} - x^n\|_A^2 - \|x^n - x^{n-1}\|_A^2] + \tag{3.32} \\
&+ \frac{1}{2} [\lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^{n-1}\|^2 - \lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2 - \lambda^{-1} \|p^n - p^{n-1}\|^2]
\end{aligned}$$

donde

$$-\Lambda = \lambda \langle z^{n+1} - z^n, M(x^n - x^{n+1}) \rangle + \lambda \langle z^n - z^{n-1}, M(x^{n+1} - x^n) \rangle. \tag{3.33}$$

Como $2 \langle Au, v \rangle = \|u\|_A^2 - \|u - v\|_A^2 + \|v\|_A^2 \leq \|u\|_A^2 + \|v\|_A^2$ entonces

$$\begin{aligned}
\|x^{n+1} - x^{n-1}\|_A^2 - \|x^{n+1} - x^n\|_A^2 &= \|x^n - x^{n-1}\|_A^2 + 2 \langle x^{n+1} - x^n, A(x^n - x^{n-1}) \rangle \\
&\leq \|x^n - x^{n-1}\|_A^2 + \|x^{n+1} - x^n\|_A^2 + \|x^n - x^{n-1}\|_A^2 \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.34) en (3.32)

$$\begin{aligned}
\Lambda &\leq -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \|x^{n+1} - x^n\|_A^2 + \lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2 \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \|x^n - x^{n-1}\|_A^2 + \lambda^{-1} \|p^n - p^{n-1}\|^2 \right] - \tag{3.35} \\
&- \lambda^{-1} \left[\|p^{n+1} - p^n\|^2 + \|p^n - p^{n-1}\|^2 - \frac{1}{2} \|p^{n+1} - p^{n-1}\|^2 \right].
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} \|(v - u) - (w - v)\|^2 = \|u - v\|^2 + \|v - w\|^2 - \frac{1}{2} \|u - w\|^2$ y de (3) se

tiene,

$$\begin{aligned} & \lambda \langle z^n - z^{n+1}, M(x^n - x^{n+1}) \rangle + \lambda \langle z^n - z^{n-1}, M(x^n - x^{n+1}) \rangle + \\ & + \frac{\lambda}{2} \|M(x^n - x^{n+1}) - (z^n - z^{n+1})\|^2 \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \|x^n - x^{n-1}\|_A^2 + \lambda^{-1} \|p^n - p^{n-1}\|^2 \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \|x^{n+1} - x^n\|_A^2 + \lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2 \right] \end{aligned}$$

y como $c \left\{ \frac{1}{2} \|\beta - \delta\|^2 + \langle \delta, \beta \rangle + \langle \alpha, \beta \rangle \right\} \geq \frac{c}{2} \{ \|\delta\|^2 - \|\alpha\|^2 \}$ y haciendo

$$v^{n+1} = \|x^{n+1} - x^n\|_A^2 + 2\lambda \|z^n - z^{n+1}\|^2 + 2\lambda^{-1} \|p^{n+1} - p^n\|^2 \quad (3.36)$$

tenemos

$$v^{n+1} \leq v^n. \quad (3.37)$$

Luego, sumando hasta $k - 1$

$$0 \leq \sum_{n=0}^{k-1} k (v^n - v^{n+1}) = \sum_{n=0}^{k-1} \{ (nv^n - (n+1)v^{n+1}) + v^{n+1} \} = -kv^k + \sum_{n=0}^{k-1} v^{n+1}$$

y sustituyendo n por k la ecuación anterior junto con (3.14) implican

$$\|x^n - x^{n-1}\|_A^2 + 2\lambda \|z^n - z^{n-1}\|^2 + 2\lambda^{-1} \|p^n - p^{n-1}\|^2 \leq \frac{\theta}{k} \quad (3.38)$$

lo que prueba la proposición. \square

Capítulo 4

ADMM para S-Model y Programación Lineal

Se dice que una función convexa, semicontinua inferior y propia $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es \mathcal{P} -separable si existe una partición $\mathcal{P} = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$F(x) = \sum_{j=1}^q f_j(x_j),$$

donde $f_j: \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones convexas, semicontinuas inferiores y propias. $n_j = |c_j|$, x_j es la “ j -ésimo subvector” de x con índices en c_j .

En esta capítulo nos enfocamos en resolver el “problema S-Model”, este es un problema convexo con restricciones lineales, \mathcal{P} -separable. Su forma canónica es

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{j=1}^q f_j(x_j) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^q A_j x_j = b \\ & x_j \in \mathbb{R}^{n_j} \end{aligned} \quad (\text{SMP})$$

donde las funciones $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones convexas, semiconti-

nuas inferiores y propias, $A_j \in \mathbb{R}^{m \times n_j}$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

A través de una reformulación, a partir del problema(SMP) se obtiene un problema de la forma (P) del capítulo anterior que posee el mismo conjunto factible del (SMP), esto hace posible aplicar el Algoritmo 12. El resultado de la aplicación del algoritmo es que, este, converge y nos da soluciones tanto del problema (SMP) como de su dual.

4.1. AD-PMM para S-Model

En esta sección, en primer lugar se reformula (SMP) a un problema de la forma (P), y luego desarrollamos el (AD-PMM) para el problema S-Model, también se darán condiciones para la convergencia del algoritmo.

Consideramos:

- La función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por $f(x) = \sum_{j=1}^q f_j(x_j)$.
- La función $g: \mathbb{R}^{mq} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por $g(z) = \delta_C(z)$ donde

$$C = \left\{ z \in \mathbb{R}^{mq} \mid \sum_{j=1}^q z_j = b \right\}$$

aquí $z = (z_1, z_2, \dots, z_q)^T$ donde $z_j \in \mathbb{R}^m$ para todo $j = 1, 2, \dots, q$, es decir, z_j es la j -ésimo subvector z .

- Consideremos también la matriz M de orden $mq \times n$ dada por

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_q \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ahora consideremos el problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(Mx) \quad (P) \quad (4.2)$$

con las funciones f y g antes mencionadas. A continuación se da la relación que hay entre (SMP) y el problema (P).

Proposición 4.1. $x \in \mathbb{R}^n$ es factible para (SMP) si y solo si $f(x) + g(Mx) < +\infty$.

Demostración. $x \in \mathbb{R}^n$ es factible para (SMP) $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^q A_j x_j = b$ y $\sum_{j=1}^q f_j(x_j) < +\infty$ lo que es equivalente a $\sum_{j=1}^q f_j(x_j) + g(Mx) < +\infty \Leftrightarrow f(x) + g(Mx) < +\infty$, pues en particular

$$g(Mx) = \begin{cases} 0, & \text{si } \sum_{j=1}^q A_j x_j = b \\ +\infty, & \text{si } \quad \quad \quad c.c \end{cases}$$

□

Al problema (P) dado en (4.2) le podemos aplicar (ADMM), pero para la convergencia del algoritmo se requiere la inyectividad de M . A continuación se da una condición para que M sea inyectiva.

Proposición 4.2. Si A_j es inyectiva para todo $j = 1, 2, \dots, q$ entonces M es inyectiva.

Demostración. Mostraremos que $\mathcal{N}(M) = \{0\}$. En efecto, para $x \in \mathbb{R}^n$

$$Mx = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_q \end{bmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 x_1 \\ A_2 x_2 \\ \vdots \\ A_q x_q \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow A_j x_j = 0, \forall j = 1, 2, \dots, q.$$

Como $\mathcal{N}(A_j) = \{0_j\}$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$

$$A_j x_j = 0, \forall j = 1, 2, \dots, q \Leftrightarrow x_j = 0_j, \forall j = 1, 2, \dots, q \Leftrightarrow x = 0,$$

donde 0_j es el vector cero de dimensión n_j . Por lo tanto $\mathcal{N}(M) = \{0\}$. \square

En general el Algoritmo 12 para el problema (P) converge sin la necesidad absoluta de inyectividad sobre M , para ello necesitamos agregar al primer subproblema el término $\frac{1}{2}\|x - x^n\|_Q^2$, donde Q es una matriz semidefinida positiva. La matriz Q que consideramos es una matriz diagonal por bloques $Q = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_q)$, donde $Q_j = \frac{1}{\beta_j}I - \lambda A_j^T A_j$ o $Q_j = 0$ según A_j se inyectiva o no. Eto se detalla a continuación.

El Algoritmo 12 para (P) consta de los siguientes pasos

$$x^{n+1} = \arg \min_x \left\{ f(x) + \langle p^n, Mx \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Mx - z^n\|^2 + \frac{1}{2} \|x - x^n\|_Q^2 \right\} \quad (4.3)$$

$$z^{n+1} = \arg \min_z \left\{ g(z) - \langle p^n, z \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Mx^{n+1} - z\|^2 \right\} \quad (4.4)$$

$$p^{n+1} = p^n + \lambda (Mx^{n+1} - z^{n+1}) \quad (4.5)$$

Para el subproblema (4.3), dada la estructura de f , M y Q (diagonales por bloques), para cada $j = 1, 2, \dots, q$ tenemos

$$x_j^{n+1} = \arg \min_{x_j} \left\{ f_j(x_j) + \langle p_j^n, A_j x_j \rangle + \frac{\lambda}{2} \|A_j x_j - z_j^n\|^2 + \frac{1}{2} \|x_j - x_j^n\|_{Q_j}^2 \right\} \quad (4.6)$$

Se distinguen dos casos:

1. Suponga que A_j es inyectiva, entonces, $Q_j = 0$. De la condición de optimalidad de (4.6), x_j^{n+1} se puede calcular por

$$x_j^{n+1} = (\partial f_j + \lambda A_j^T A_j)^{-1} (\lambda A_j^T z_j^n - A_j^T p_j^n). \quad (4.7)$$

donde la igualdad se da gracias a la inyectividad de A_j hace invertible a $A_j^T A_j$.

2. Si A_j es no inyectiva entonces consideramos la matriz $Q_j = \frac{1}{\beta_j}I - \lambda A_j^T A_j$, con $\beta_j > 0$ la cual es simétrica y definida positiva siempre que $\beta_j \lambda \|A_j\|^2 \leq 1$. En tal caso, en (4.6) hagamos

$$H_j(x_j) = f_j(x_j) + \langle p_j^n, A_j x_j \rangle + \frac{\lambda}{2} \|A_j x_j - z_j^n\|^2 + \frac{1}{2} \|x_j - x_j^n\|_{Q_j}^2,$$

entonces, haciendo cálculos adecuados y despreciando algunos términos constantes (arg min es invariante bajo la suma de constantes)

$$H_j(x_j) \approx f_j(x_j) + \frac{1}{2\beta} \|x_j - [x_j^n - \beta A_j^T (p_j^n + \lambda(A_j x_j^n - z_j^n))]\|^2, \quad (4.8)$$

además, usando (4.5) y considerando $p^{-1} = p^0$,

$$p_j^n + \lambda(A_j x_j^n - z_j^n) = 2p_j^n - p_j^{n-1}.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos la manera de calcular x_j^{n+1} en función del resolvente de ∂f_j , esto es

$$x_j^{n+1} = (I + \beta \partial f_j)^{-1} (x_j^n - \beta A_j^T (2p_j^n - p_j^{n-1})) \quad (4.9)$$

Note que el subproblema (4.4) podemos reescribirlo como

$$z^{n+1} = \arg \min_z \left\{ g(z) + \frac{\lambda}{2} \|Mx^{n+1} - z + \lambda^{-1}p^n\|^2 \right\}$$

o en términos del resolvente de ∂g

$$z^{n+1} = (I + \lambda^{-1} \partial g)^{-1} (Mx^{n+1} + \lambda^{-1}p^n).$$

Dada la forma de g , la Definición 1.2 y el Ejemplo 1.10 tenemos que

$$z^{n+1} = P_C (Mx^{n+1} + \lambda^{-1}p^n) \quad (4.10)$$

Como C es un subespacio afín,

$$P_C(t) = t + \frac{b - \sum_{j=1}^q t_j}{q} (1, 1, \dots, 1),$$

entonces el j -ésimo subvector de $P_C(t)$ está dado por

$$[P_C(t)]_j = t_j + \frac{b - \sum_{j=1}^q t_j}{q}.$$

Entonces para cada $j = 1, 2, \dots, q$

$$\begin{aligned} z_j^{n+1} &= [Mx^{n+1} + \lambda^{-1}p^n]_j + \frac{b - \sum_{j=1}^q [Mx^{n+1} + \lambda^{-1}p^n]_j}{q} \\ &= A_j x_j^{n+1} + \lambda^{-1} p_j^n + \frac{b - \sum_{j=1}^q (A_j x_j^{n+1} + \lambda^{-1} p_j^n)}{q} \end{aligned} \quad (4.11)$$

En el subproblema (4.5), teniendo en cuenta la estructura de M , para todo $j = 1, 2, \dots, q$

$$p_j^{n+1} = p_j^n + \lambda (A_j x_j^{n+1} - z_j^{n+1}). \quad (4.12)$$

Sabemos que la sucesión dada por los p^n en el Algoritmo 12 converge a una solución del problema dual de (P), es natural preguntarnos, si esta también converge a una solución del dual del (SMP). La respuesta es negativa, pues se observa que tanto p^n como z^n están en \mathbb{R}^{mq} y el dual de (SMP) no está definidos en este espacio. Pero gracias a la forma de ∂g^* a continuación se deduce que $p_i^n = p_j^n$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$ y de esta manera se obtendrá una sucesión $\pi^n \in \mathbb{R}^m$ que converge a una solución del dual, esto queda establecido en el Teorema 4.1. También se verá que podemos omitir de nuestro algoritmo a la sucesión dada por los z^n .

De (3.10) se deduce que para todo $n \geq 1$, $(p^n, z^n) \in B = \partial g^* = V^\perp \times C$. Como C es un conjunto afín, entonces por el Ejemplo 1.7 $N_C = C \times V^\perp$, donde V^\perp es el complemento ortogonal de $V = C - \bar{z}$ para algún $\bar{z} \in C$ (subespacio vectorial paralelo a C).

Note que

$$V = \left\{ s \in \mathbb{R}^{mq} \mid \sum_{j=1}^q s_j = 0 \right\},$$

para calcular V^\perp consideremos la matriz $A = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_q]$ donde para todo j , I_j es la matriz identidad de orden m . La matriz A es tal que $V = \mathcal{N}(A)$, entonces

$$V^\perp = \text{Im}(A^T).$$

Por lo tanto

$$V^\perp = \{y \in \mathbb{R}^{mq} \mid y_1 = y_2 = \dots = y_q\}$$

Entonces, por la forma de V^\perp tenemos que para algún $\pi^n \in \mathbb{R}^m$

$$p_j^n = \pi^n, \quad \forall j = 1, 2, \dots, q.$$

Luego, sustituyendo en (4.11) y (4.12)

$$z_j^{n+1} = A_j x_j^{n+1} + \frac{b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^{n+1}}{q} \quad (4.13)$$

y

$$\pi^{n+1} = \pi^n - \frac{\lambda}{q} (b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^{n+1}). \quad (4.14)$$

Note que podemos “eliminar” z_j^n . Entonces Al sustituir z_j^n en (4.7) de ser necesario y $p_j^n = \pi^n$ en (4.7) obtenemos el Algoritmo 13 para el S-model (SMP):

A los pasos (3) y (6) en el Algoritmo 13 podemos reemplazarlos por

$$x_j^{n+1} = \arg \min_{x_j} \left\{ f_j(x_j) + \langle \pi^n, A_j x_j \rangle + \frac{\lambda}{2} \left\| A_j x_j - A_j x_j^n - \frac{b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^n}{q} \right\|^2 \right\} \quad (4.15)$$

y

$$x_j^{n+1} = \arg \min_{x_j} \left\{ f_j(x_j) + \frac{1}{2\beta} \|x_j - [x_j^n - \beta A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1})]\|^2 \right\} \quad (4.16)$$

Algorithm 13 AD-PMM para S-model

Require: Tamaño de paso $\lambda > 0$, puntos iniciales $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\pi^{-1} = \pi^0 \in \mathbb{R}^m$

```
1: for  $j = 1, 2, \dots, q$  do
2:   if  $A_j$  es inyectiva then
3:      $x_j^{n+1} = (\partial f_j + \lambda A_j^T A_j)^{-1} \left[ \lambda A_j^T \left( A_j x_j^n + \frac{b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^n}{q} \right) - A_j^T \pi^n \right]$ 
4:   else
5:     Elegir  $\beta_j > 0$  tal que  $\beta_j \lambda \|A_j\|^2 \leq 1$ 
6:      $x_j^{n+1} = (I + \beta \partial f_j)^{-1} (x_j^n - \beta A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1}))$ 
7:   end if
8: end for
9:  $\pi^{n+1} = \pi^n - \frac{\lambda}{q} \left( b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^{n+1} \right)$ 
10:  $n \leftarrow n + 1$ , Ir al paso 1
```

Antes de dar el resultado de convergencia formulemos el problema dual de (SMP).

$$\min_{\pi} \sum_{j=1}^q f_j^*(-A_j^T \pi) + \langle \pi, b \rangle \quad (DSMP) \quad (4.17)$$

A continuación se da condiciones para la convergencia del Algoritmo 13.

Teorema 4.1. *Consideremos el problema (SMP). Si (SMP) es soluble, entonces para cualquier par de puntos iniciales $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\pi^0 \in \mathbb{R}^m$ las sucesiones $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\pi^n\}_{k=0}^{\infty}$ generadas por el Algoritmo 13 convergen a una solución de (SMP) y (DSMP) respectivamente.*

Demostración. Suponga que A_j para ciertos $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ son no inyecti-

vas, entonces consideremos la matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\beta_j}I - \lambda A_j^T A_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

diagonal por bloques, que algunos son ceros y los correspondientes a los índices j son $Q_j = \frac{1}{\beta_j}I - \lambda A_j^T A_j$.

Por como son elegidos los escalares $\beta_j > 0$ las matrices Q_j son semidefinidas positivas las cuales hacen a Q semidefinida positiva. Entonces el Algoritmo 13 resulta de aplicar el Algoritmo 12 al problema (4.2) con la matriz simétrica y semidefinida positiva Q dada por (4.21). Por otro lado,

$$Q + \lambda M^T M = \begin{bmatrix} \lambda A_1^T A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\beta_j}I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda A_q^T A_q \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

es definida positiva, pues es una matriz diagonal por bloques, los cuales son $\lambda A_i^T A_i$ (cuando A_i es inyectiva) y $\frac{1}{\beta_j}I$ para los índices j los cuales hacen a $Q + \lambda M^T M$ definida positiva. Por lo tanto, el Teorema 3.3 nos dice que la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ converge a una solución x^* de (4.2) y por lo tanto del problema (SMP), y la sucesión $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ converge a una solución p^* del dual de (4.2).

Recordemos que en nuestro caso $p^n = [p_1^n, \dots, p_q^n]^T$ donde $p_j^n = \pi^n$ con $\pi^n \in \mathbb{R}^m$ para todo $j = 1, 2, \dots, q$, entonces $\pi^n \rightarrow \pi^*$ donde $p^* = [\pi^*, \dots, \pi^*]^T$.

Mostremos que π^* es solución del dual de (SMP), en efecto,

No es difícil verificar que, en cualquier caso (3) o (6) tenemos que

$(x_j^*, -A_j^T \pi^*) \in \partial f_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, q$. Luego

$$\begin{aligned}
(x_j^*, -A_j^T \pi^*) \in \partial f_j &\Rightarrow (-A_j^T \pi^*, x_j^*) \in \partial f_j^* \\
&\Rightarrow x_j^* \in f_j^*(-A_j^T \pi^*) \\
&\Rightarrow -A_j x_j^* \in \partial[f_j^* \circ (-A_j^T)]\pi^* \\
&\Rightarrow -\sum_{j=1}^q A_j x_j^* \in \sum_{j=1}^q (\partial[f_j^* \circ (-A_j^T)]\pi^*).
\end{aligned}$$

Como

$$-\sum_{j=1}^q (\partial[f_j^* \circ (A_j^T)]\pi^*) \subseteq \partial \left[\sum_{j=1}^q (f_j^* \circ (-A_j^T)) \right] \pi^*,$$

entonces

$$0 = -\sum_{j=1}^q A_j x_j^* + b \in \partial \left[\sum_{j=1}^q (f_j^* \circ (-A_j^T)) \right] \pi^* + \{b\}$$

esto implica que π^* es solución del problema dual (4.17). En el caso en que A_j sea inyectiva para todo j , entonces M es inyectiva por la Proposición 4.2, entonces el Algoritmo 13 también resulta de aplicar 12 a 4.2. \square

A partir de la Proposición 3.9 también se puede conseguir rapidez de convergencia de orden $O(1/\sqrt{n})$ para las sucesiones $\{x^n\}$ y $\{\pi^n\}$. Esto queda establecido en la siguiente proposición.

Proposición 4.3 (Rapidez de convergencia). *Sea $\{w^n := (x^n, \pi^n)\}_{n=0}^\infty$ la sucesión generada por el Algoritmo 13, (x^*, π^*) un par de KKT. Entonces para $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}
\|x_j^n - x_j^{n-1}\|_{E_j} &\leq \sqrt{\frac{\theta}{\lambda n}} \text{ para } j \in J, \\
\|x_i^n - x_i^{n-1}\| &\leq \sqrt{\frac{\theta \beta_i}{n}} \text{ para } i \notin J, \text{ y} \\
\|\pi^n - \pi^{n-1}\| &\leq \sqrt{\frac{\lambda \theta}{2qn}},
\end{aligned}$$

donde $E_j = A_j^T A_j$, $J \subset \{1, 2, \dots, q\}$ tal que A_j es inyectiva para cada $j \in J$ y $\theta = \|x^* - x^0\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + 2\lambda^{-1}\|\pi^* - \pi^0\|^2$.

Demostración. Dado que la matriz $Q + \lambda M^T M$ es definida positiva y la sucesiones dadas por los x^n y $p^n = \underbrace{(\pi^n, \pi^n, \dots, \pi^n)}_{q\text{-veces}}$ son obtenidas por aplicación del Algoritmo 12 al problema (P) en (13), la Proposición 3.9 dice que $\|x^n - x^{n-1}\|_{Q+\lambda M^T M} \leq \sqrt{\frac{\theta}{n}}$ y $\|p^n - p^{n-1}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda\theta}{2n}}$, donde $\theta = \|x^* - x^0\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + 2\lambda^{-1}\|p^* - p^0\|^2 + 2\lambda\|z^* - z^0\|^2$, entonces: En primer lugar tomemos $z^0 = z^*$, de donde $\theta = \|x^* - x^0\|_{Q+\lambda M^T M}^2 + 2\lambda^{-1}\|\pi^* - \pi^0\|^2$. Luego, sustituyendo $Q + \lambda M^T M$ dada por (4.21) tenemos

$$\lambda \sum_{j \in J} \|x_j^n - x_j^{n-1}\|_{A_j^T A_j}^2 + \sum_{i \notin J} \frac{1}{\beta_i} \|x_i^n - x_i^{n-1}\|^2 \leq \frac{\theta}{n},$$

en particular $\|x_j^n - x_j^{n-1}\|_{E_j} \leq \sqrt{\frac{\theta}{\lambda n}}$ para $j \in J$ y $\|x_i^n - x_i^{n-1}\| \leq \sqrt{\frac{\theta\beta_i}{n}}$ para $i \notin J$. Por último, como $p^n = \underbrace{(\pi^n, \pi^n, \dots, \pi^n)}_{q\text{-veces}}$, entonces

$$\|\pi^n - \pi^{n-1}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda\theta}{2qn}}$$

□

4.2. AD-PMM para Programación Lineal

En esta sección vamos a aplicar el Algoritmo 13 obtenido en la sección anterior a problemas de programación lineal.

Un problema de programación lineal en su forma general es

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \quad (PL) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz de orden $m \times n$ y c, b son vectores de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente.

(PL) se puede reformular como

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{j=1}^q c_j^T x_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^q A_j x_j = b \quad (PL) \\ & x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

donde para todo $j = 1, 2, \dots, q$ los A_j , x_j y c_j son “submatrices” columna de A , sub-vectores de x y sub-vectores de c respectivamente, y b es vector de \mathbb{R}^m .

De ahora en adelante este será nuestro problema de programación lineal (PL) a solucionar.

Note que (PL) es un S-Model, donde el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ es partido en q bloques $\mathcal{P} = \{[1], [2], \dots, [q]\}$, las funciones f_j están dadas por

$$f_j(x_j) = \begin{cases} c_j^T x_j, & \text{si } x_j \geq 0 \\ +\infty, & \text{si } cc \end{cases} \quad (4.20)$$

y las matrices A_j son formadas por las columnas de A . Entonces es natural aplicar el Algoritmo 13 que se desarrolló para el S-Model a (PL).

En primera instancia vamos a suponer que $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$. Recordemos que

para aplicar 13 debemos tener en cuenta que para calcular x_j^{n+1} tenemos dos casos. En primer lugar, si A_j es inyectiva, entonces con las f_j definidas en (4.20)

$$x_j^{n+1} = \arg \min_{x_j \in \mathbb{R}^{n_j}} \left\{ c_j^T x_j + \langle \pi^n, A_j x_j \rangle + \frac{\lambda}{2} \left\| A_j x_j - A_j x_j^n - \frac{b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^n}{q} \right\|^2 \right\}$$

Note que la función

$$x_j \mapsto c_j^T x_j + \langle \pi^n, A_j x_j \rangle + \frac{\lambda}{2} \left\| A_j x_j - A_j x_j^n - \frac{b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^n}{q} \right\|^2$$

es fuertemente convexa y de clase \mathcal{C}^∞ sobre \mathbb{R}^{n_j} , entonces podemos calcular x_j^{n+1} usando las condiciones de optimalidad de primer orden. Esto es, x_j minimiza a

$$c_j^T x_j + \langle \pi^n, A_j x_j \rangle + \frac{\lambda}{2} \left\| A_j x_j - A_j x_j^n - \frac{b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^n}{q} \right\|^2$$

si

$$c_j^T + A_j^T \pi^n + \lambda A_j^T \left(A_j x_j - A_j x_j^n - \frac{b - \sum_{j=0}^q A_j x_j^n}{q} \right) = 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta que $A_j^T A_j$ es invertible

$$x_j = x_j^n + [A_j^T A_j]^{-1} \left[A_j^T \left(\frac{b - \sum_{j=0}^q A_j x_j^n}{q} \right) - \frac{c_j^T + A_j^T \pi^n}{\lambda} \right] \quad (4.21)$$

Si A_j es no inyectiva, entonces de (4.16)

$$x_j^{n+1} = \arg \min_{x_j \in \mathbb{R}^{n_j}} \left\{ c_j^T x_j + \frac{1}{2\beta_j} \|x_j - [x_j^n - \beta_j A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1})]\|^2 \right\}$$

aplicando las condiciones de optimalidad de primer orden tenemos

$$x_j = x_j^n - \beta_j [A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1}) + c_j^T] \quad (4.22)$$

Por otro lado, de (9)

$$\pi^{n+1} = \pi^n - \frac{\lambda}{n} \left(b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^{n+1} \right)$$

puede ser implementado por: para todo $i = 1, 2, \dots, m$

$$\pi_i^{n+1} = \pi_i^n - \frac{\lambda}{q} (b_i - \langle a_i, x^{n+1} \rangle) \quad (4.23)$$

donde a_i representa a la i -ésima fila de A .

Entonces de (4.21), (4.22) y (4.23) obtenemos el Algoritmo 14.

Algorithm 14 AD-PMM para Programación Lineal

Require: Tamaño de paso $\lambda > 0$, puntos iniciales $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\pi^{-1} = \pi^0 \in \mathbb{R}^m$

- 1: **for** $j = 1, 2, \dots, q$ **do**
 - 2: **if** A_j es inyectiva **then**
 - 3:
$$x_j^{n+1} = \left[x_j^n + [A_j^T A_j]^{-1} \left[A_j^T \left(\frac{b - \sum_{j=0}^q A_j x_j^n}{q} \right) - \frac{c_j^T + A_j^T \pi^n}{\lambda} \right] \right]$$
 - 4: **else**
 - 5: Elegir $\beta_j > 0$ tal que $\beta_j \lambda \|A_j\|^2 \leq 1$
 - 6:
$$x_j^{n+1} = \left[x_j^n - \beta_j [A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1}) + c_j^T] \right]$$
 - 7: **end if**
 - 8: **end for**
 - 9: **for** $i = 1, 2, \dots, m$ **do**
 - 10:
$$\pi_i^{n+1} = \pi_i^n - \frac{\lambda}{q} (b_i - \langle a_i, x^{n+1} \rangle)$$
 - 11: **end for**
 - 12: $n \leftarrow n + 1$, Ir al paso 1
-

A continuación se da el condiciones de convergencia.

Proposición 4.4. *Considere el problema (PL). Si (PL) tiene solución entonces para cualquier par de puntos iniciales $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\pi^0 \in \mathbb{R}^m$ las sucesiones $\{x^n\}_{n=0}^\infty$, $\{\pi^n\}_{n=0}^\infty$ que produce el Algoritmo 14 convergen a una solución x^* de (PL) y π^* de su dual respectivamente.*

Demostración. La convergencia de $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ y $\{\pi^n\}_{n=0}^\infty$ es consecuencia directa del Teorema 4.1, pues el Algoritmo 14 es el resultado de aplicar 13 al problema (PL) con la nomenclatura descrita al inicio de la sección. \square

Note que, si consideramos (PL) con las restricciones de no negatividad ($x_j \geq 0$), cuando A_j es inyectiva, x_j^{n+1} se calcula mediante

$$x_j^{n+1} = \arg \min_{x_j \geq 0} \left\{ c_j^T x_j + \langle \pi^n, A_j x_j \rangle + \frac{\lambda}{2} \left\| A_j x_j - A_j x_j^n - \frac{b - \sum_{j=1}^q A_j x_j^n}{q} \right\|^2 \right\}, \quad (4.24)$$

x_j^{n+1} coincide con la expresión explícita (4.21) siempre que el vector resultante no tenga componentes negativas. Si el vector resultante de (4.21) tiene componte negativas, en algunos casos como por ejemplo cuando A_j es un vector, x_j^{n+1} es dado por

$$x_j^{n+1} = P_{\{x_j \geq 0\}} \left[x_j^n + [A_j^T A_j]^{-1} \left[A_j^T \left(\frac{b - \sum_{j=0}^q A_j x_j^n}{q} \right) - \frac{c_j^T + A_j^T \pi^n}{\lambda} \right] \right] \quad (4.25)$$

pero en general, cuando A_j tiene más de una columna (4.25) no resuelve (4.24). Para remediar este problema podemos considerar en (4.6) $Q_j = \frac{1}{\beta_j} I - \lambda A_j^T A_j$, con $\beta_j \lambda \|A_j\|^2 \leq 1$ aun cuando A_j sea inyectiva.

En cambio, si A_j no es inyectiva

$$x_j^{n+1} = \arg \min_{x_j \geq 0} \left\{ c_j^T x_j + \frac{1}{2\beta_j} \|x_j - [x_j^n - \beta_j A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1})]\|^2 \right\},$$

entonces

$$x_j^{n+1} = P_{\{x_j \geq 0\}} [x_j^n - \beta_j [A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1}) + c_j^T]].$$

Entonces el Algoritmo 14 puede ser usado para resolver el problema

estándar de programación lineal (PL) considerando:

- Descomponer de forma trivial a la matriz A y al vector c , es decir A_j y c_j son los vectores columna y componente de A y c respectivamente. En este caso en los pasos 3 y 6 en el Algoritmo 14 tomamos

$$x_j^{n+1} = P_{\{x_j \geq 0\}} \left[x_j^n + [A_j^T A_j]^{-1} \left[A_j^T \left(\frac{b - \sum_{j=0}^q A_j x_j^n}{q} \right) - \frac{c_j^T + A_j^T \pi^n}{\lambda} \right] \right]$$

y

$$x_j^{n+1} = P_{\{x_j \geq 0\}} [x_j^n - \beta_j [A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1}) + c_j^T]]$$

- Si fuera posible identificar los bloques no inyectivos de A , podríamos descomponer A en bloques no inyectivos y vectores columna, en tal caso, x_j^{n+1} es como en el item anterior.
- Considerar Q_j no nula y conveniente aún cuando A_j no sea inyectiva, por ejemplo $Q_j = \frac{1}{\beta_j} I - \lambda A_j^T A_j$, con $\beta_j \lambda \|A_j\|^2 \leq 1$, e este caso los pasos 3 y 6 en el Algoritmo 14 se convierten en uno solo como

$$x_j^{n+1} = P_{\{x_j \geq 0\}} [x_j^n - \beta_j [A_j^T (2\pi^n - \pi^{n-1}) + c_j^T]]$$

4.3. Ejemplo Numérico

En esta sección se dan dos resultados numéricos del Algoritmo 14 implementado en la plataforma de OCTAVE. Nuestro problema es

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $A = [B, I_{20}]$. La matriz B es de orden 20×40 y c, b son vectores de \mathbb{R}^{60} y \mathbb{R}^{20} respectivamente, estos son tomados directamente de OCTAVE de manera aleatoria.

λ	n	r	t
0.001	560.00	6.24	4.64
0.002	615.00	3.32	5.84
0.003	690.00	2.28	5.72
0.004	766.00	1.74	11.17
0.005	1080.00	1.40	8.68
0.006	1175.00	1.14	8.17
0.007	1168.00	0.97	8.04
0.008	981.00	0.86	7.00
0.009	1136.00	0.76	8.01
0.010	1270.00	0.68	9.63
0.020	1134.00	0.89	8.46
0.030	1185.00	0.70	9.62
0.040	1089.00	0.71	7.62
0.050	1063.00	0.74	7.14
0.060	1058.00	0.59	7.44
0.070	975.00	0.75	6.73
0.080	732.00	1.11	6.45
0.090	734.00	1.00	5.31
0.100	1013.00	0.57	7.80

λ	n	r	t
0.200	733	0.60	6.77
0.300	610	0.63	5.37
0.400	751	0.61	5.72
0.500	822	0.43	6.58
0.600	851	0.64	6.00
0.700	911	0.72	7.49
0.800	911	0.81	6.16
0.900	809	1.08	5.25
1.000	1018	0.67	5.98
1.100	1021	0.71	5.89
1.200	859	1.15	5.75
1.300	859	1.22	5.24
1.400	859	1.22	5.29
1.500	859	1.20	5.11
1.600	859	1.20	5.68
1.700	859	1.20	5.35
1.800	858	1.18	5.76
1.900	858	1.16	5.41
2.000	857	1.11	5.74

Cuadro 4.1: Se compara los resultados para 40 bloques (columnas de A)

En primer lugar comparamos los resultados, cuando hacemos variar el tamaño de paso $\lambda > 0$, los escalares $\beta_j > 0$ están fijados y para este caso los bloques son las columnas de A. El error relativo es de 10^{-3} .

Se obtienen los datos del Cuadro 4.1, donde n es el número de iteraciones, $r = \|b - Ax^k\|$ y t es el tiempo en segundos.

El gráfico de los errores relativos primal y dual se muestra en la Figura 4.1, este gráfico corresponde a $\lambda = 0,5$.

Consideremos ahora una descomposición en 5 bloques de tamaños 1, 1, 1, 22 y 35. Se quiere ver si se obtiene alguna mejora al separar de manera no trivial a A , la separación se hizo de tal manera que los tres primeros bloques vectores columna, y las otras dos son matrices no inyectivas. El error relativo

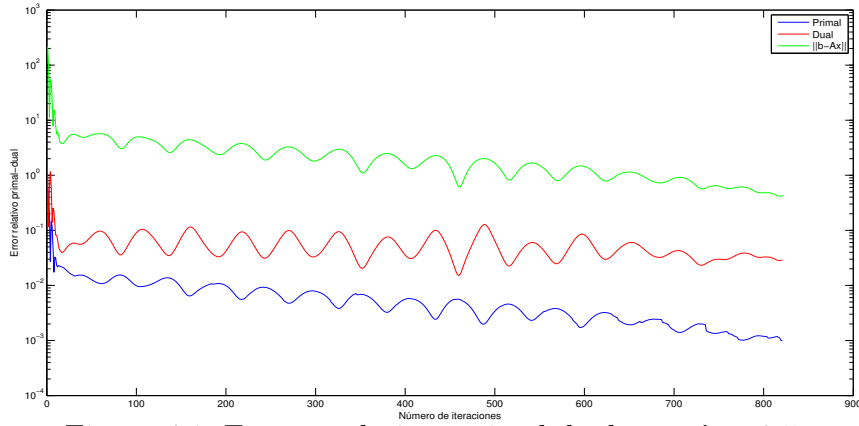


Figura 4.1: Errores relativos primal-dual para $\lambda = 0,5$

de 10^{-3} . Se obtienen los datos en el Cuadro 4.2, de donde se observa que, al variar la elección de los bloques en algunos casos se obtiene una mejora sobretodo en el tiempo de ejecución por ejemplo para $\lambda = 0,004$, $\lambda = 0,04$, $\lambda = 0,4$, etc .

El gráfico de los errores relativos primal y dual se muestra en la Figura 4.2, este gráfico corresponde a $\lambda = 0,04$.

Ahora consideremos el mismo problema sin la restricciones de no negatividad. Tomemos 15 bloques de tamaños 4, 7, 1, 3, 8, 5, 2, 3, 1, 6, 10, 2, 3, 1 y 4. Para este caso no hace falta tener cuidado en cuales de los bloques son inyectivos o cuales son no inyectivos ya que el Algoritmo 14 resuelve problemas de este tipo. Los β_j están fijados.

Los resultados para un error de 10^{-3} se muestran en la Tabla 4.3 Se observa que al quitar las restricciones de no negatividad, el error relativo es alcanzado en una cantidad de iteraciones y tiempo mucho menores al de los casos anteriores. La Figura 4.3 muestra el gráfico de los errores relativos primal y dual. Este gráfico corresponde a $\lambda = 1$.

λ	n	r	t
0.001	1285.00	0.93	4.48
0.002	1011.00	1.02	3.56
0.003	797.00	1.31	2.48
0.004	793.00	1.12	2.60
0.005	1062.00	0.79	3.32
0.006	1114.00	0.67	4.69
0.007	853.00	0.90	2.62
0.008	938.00	0.85	3.57
0.009	938.00	0.77	3.07
0.010	983.00	0.61	3.80
0.020	883.00	0.61	3.44
0.030	876.00	0.58	3.18
0.040	994.00	0.51	3.07
0.050	1166.00	0.52	3.62
0.060	1240.00	0.73	3.87
0.070	1159.00	1.10	3.59
0.080	1158.00	1.30	3.69
0.090	1163.00	1.41	3.78
0.100	1821.00	0.52	5.82

λ	n	r	t
0.200	1840.00	0.82	6.12
0.300	1366.00	1.27	4.24
0.400	1361.00	1.27	4.26
0.500	1897.00	0.75	5.97
0.600	1889.00	0.74	7.04
0.700	1885.00	0.77	6.73
0.800	1886.00	0.79	6.56
0.900	1885.00	0.80	6.05
1.000	1883.00	0.79	5.69
1.100	1354.00	1.31	4.28
1.200	1352.00	1.30	4.64
1.300	1351.00	1.29	4.42
1.400	1350.00	1.29	7.37
1.500	1350.00	1.29	9.14
1.600	1349.00	1.28	5.52
1.700	1349.00	1.27	5.62
1.800	1349.00	1.27	5.15
1.900	1349.00	1.27	4.53
2.000	1348.00	1.26	4.44

Cuadro 4.2: Se compara los resultados para 5 bloques de tamaños 1, 1, 1, 22, 35

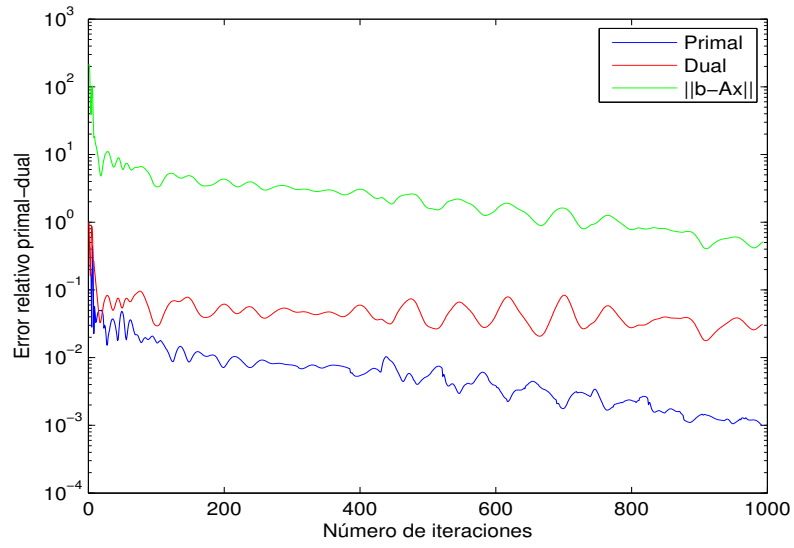


Figura 4.2: Errores relativos primal-dual para $\lambda = 0,04$

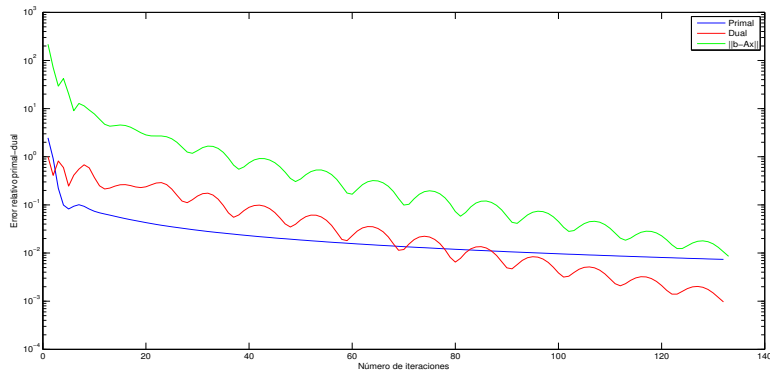


Figura 4.3: Errores relativos primal-dual para $\lambda = 1$

λ	n	r	t
0.001	94.00	9.31	0.31
0.002	94.00	4.66	0.31
0.003	94.00	3.12	0.30
0.004	94.00	2.34	0.29
0.005	94.00	1.88	0.31
0.006	94.00	1.57	0.31
0.007	94.00	1.35	0.30
0.008	94.00	1.18	0.30
0.009	94.00	1.05	0.33
0.010	94.00	0.95	0.30
0.020	88.00	0.44	0.30
0.030	88.00	0.30	0.30
0.040	88.00	0.22	0.30
0.050	88.00	0.18	0.34
0.060	88.00	0.16	0.34
0.070	88.00	0.14	0.36
0.080	88.00	0.13	0.31
0.090	89.00	0.10	0.30
0.100	89.00	0.09	0.33

λ	n	r	t
0.200	100.00	0.05	0.45
0.300	110.00	0.03	0.37
0.400	111.00	0.03	0.35
0.500	121.00	0.02	0.35
0.600	122.00	0.01	0.39
0.700	122.00	0.01	0.42
0.800	131.00	0.01	0.50
0.900	132.00	0.01	0.43
1.000	132.00	0.01	0.36
1.100	133.00	0.01	0.37
1.200	142.00	0.01	0.43
1.300	142.00	0.01	0.41
1.400	142.00	0.01	0.38
1.500	143.00	0.01	0.44
1.600	143.00	0.01	0.40
1.700	143.00	0.01	0.41
1.800	143.00	0.01	0.39
1.900	152.00	0.01	0.39
2.000	152.00	0.01	0.44

Cuadro 4.3: Se compara los resultados para 15 bloques de tamaños 4, 7, 1, 3, 8, 5, 2, 3, 1, 6, 10, 2, 3, 1 y 4

Conclusiones

A partir de los métodos Douglas-Rachford y el algoritmo ADMM se ha logrado obtener un algoritmo para programación lineal, este es más general al que desarrolla [8]. El algoritmo se obtuvo de una variante del algoritmo ADMM desarrollado por R. Shefi y M. Teboulle en [22] cuya convergencia se ha logrado probar con una sutil generalización en las hipótesis.

De los resultados numéricos obtenidos podemos concluir que:

- El algoritmo es muy sensible al tamaño de paso λ .
- El algoritmo es muy sensible a la separación en bloques de la matriz de restricciones.
- La principal ventaja del algoritmo es que este puede “disminuir” la dificultad de tamaño del problema, en problemas pequeños este algoritmo puede no ser tan efectivo y lento.
- En teoría el algoritmo converge para cualquier tamaño de paso $\lambda > 0$ y para cualquier separación en bloques de la matriz de restricciones pero en la práctica algunas elecciones de estos pueden no ser favorables ya que la convergencia puede ser demasiado lenta, lo que nos lleva a plantearnos si es posible encontrar una manera óptima de elegir estos parámetros, esto puede desarrollarse en un trabajo futuro.

Bibliografía

- [1] Altwaijry, N., Chebbi, S., and Xu, H. Ergodic convergence of the double backward method for monotone operators. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 16 (Jan. 2015), 1195–1204.
- [2] Bauschke, H. H., and Combettes, P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. *CMS Books in Mathematics*. Springer, New York, NY, 2011.
- [3] Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B., and Eckstein, J. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Foundations and Trends in Machine learning* 3, 1 (2011), 1–122. Publisher: Now Publishers, Inc.
- [4] Chambolle, A., and Pock, T. A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40, 1 (May 2011), 120–145.
- [5] Crouzeix, J.-P., Anaya, E. T. O., and Sosa-Sandoval, W. Análisis convexo. *Pontificia Universidad Católica del Perú*, 2003.
- [6] Douglas, J. Alternating direction methods for three space variables. *Numerische Mathematik* 4, 1 (Dec. 1962), 41–63.
- [7] Douglas, J., and Rachford, H. H. On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables. *Transactions of the American Mathematical Society* 82, 2 (1956), 421–439. Publisher: American Mathematical Society.

- [8] Eckstein, J. Splitting methods for monotone operators with applications to parallel optimization. *PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology*, 1989.
- [9] Eckstein, J., and Bertsekas, D. P. On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators. *Mathematical Programming* 55, 1-3 (Apr. 1992), 293–318.
- [10] Eckstein, J., and Yao, W. Relative-error approximate versions of Douglas-Rachford splitting and special cases of the ADMM. *Mathematical Programming* 170, 2 (Aug. 2018), 417–444.
- [11] Hiriart-Urruty, J.-B., and Lemaréchal, C. Convex Analysis and Minimization Algorithms I, vol. 305 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [12] Lenoir, A., and Mahey, P. A survey on operator splitting and decomposition of convex programs. *RAIRO - Operations Research* 51, 1 (Jan. 2017), 17–41.
- [13] Lions, P. L., and Mercier, B. Splitting Algorithms for the Sum of Two Nonlinear Operators. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 16, 6 (Dec. 1979), 964–979. Publisher: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [14] Passty, G. B. Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 72, 2 (Dec. 1979), 383–390.
- [15] Peaceman, D. W., and Rachford, H. H. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 3, 1 (1955), 28–41. Publisher: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [16] Peypouquet, J. Convex Optimization in Normed Spaces: Theory, Methods and Examples. *SpringerBriefs in Optimization*. Springer International Publishing, Cham, 2015.

- [17] Rockafellar, R. Characterization of the subdifferentials of convex functions. *Pacific Journal of Mathematics* 17, 3 (June 1966), 497–510.
- [18] Rockafellar, R. T. Convex functions, monotone operators and variational inequalities. In *Theory and applications of monotone operators* (1969), Citeseer, pp. 35–65.
- [19] Rockafellar, R. T. On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. *Transactions of the American Mathematical Society* 149, 1 (1970), 75–88.
- [20] Rockafellar, R. T. Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization* 14, 5 (Aug. 1976), 877–898.
- [21] Rockafellar, R. T. Convex analysis, vol. 11. *Princeton university press*, 1997.
- [22] Shefi, R., and Teboulle, M. Rate of Convergence Analysis of Decomposition Methods Based on the Proximal Method of Multipliers for Convex Minimization. *SIAM Journal on Optimization* 24, 1 (Jan. 2014), 269–297.
- [23] Shor, N. Z. Minimization Methods for Non-Differentiable Functions, vol. 3 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.