

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**



**TESIS**

**“Deducción de las ecuaciones de movimiento y condiciones de contorno de una placa delgada sometida a vibraciones libres mediante el método variacional”**

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN FÍSICA**

**ELABORADO POR:**

**Valeria Sofia Pachas Yeren**

**: [0000-0002-0593-4430](https://orcid.org/0000-0002-0593-4430)**

**ASESOR:**

**Dr. Alejandro Daniel Paredes Cabrel**

**: [0000-0003-0120-5211](https://orcid.org/0000-0003-0120-5211)**

**LIMA - PERÚ**

**2023**

Cita/How to cite	Pachas Yeren [1]
Referencia/Reference	[1] V. Pachas Yeren, "Deducción de las ecuaciones de movimiento y condiciones de contorno de una placa delgada sometida a vibraciones libres mediante el método variacional"[Trabajo de tesis]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2023.
Estilo/Style: IEEE (2020)	

Cita/How to cite	(Pachas, 2023))
Referencia/Reference	Pachas, V. (2023), "Deducción de las ecuaciones de movimiento y condiciones de contorno de una placa delgada sometida a vibraciones libres mediante el método variacional"[Trabajo de tesis]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería.
Estilo/Style: APA (7ma ed.)	

***Dedicatoria***

*Para mamá quien me ha apoyado incondicionalmente en cada paso de mi desarrollo personal y profesional.*

## **Agradecimientos**

Agradezco a mi asesor, Dr. Daniel Paredes, por su apoyo, confianza y paciencia durante todo el proceso de este trabajo.

Al Dr. Joseph Beltran por su apoyo, sus valiosos aportes y estar presente en cada etapa del desarrollo de este proyecto.

## Resumen

El objetivo de este trabajo es obtener la ecuación de movimiento y las condiciones de contorno para una placa delgada de bordes libres que sufre pequeñas deflexiones. Debido a que no es posible deducir matemáticamente las condiciones de contorno mediante las leyes de Newton, se estudia el sistema desde el punto de vista de la energía para luego aplicar el método variacional. De esta manera, se necesita estudiar cantidades que puedan caracterizar a las fuerzas que actúan sobre el sistema así como las deformaciones que sufre y la relación entre ellas, tales cantidades resultan ser magnitudes tensoriales de segundo orden, denominadas tensores de deformación y de tensión. El tensor de deformación se obtiene mediante un análisis del cuerpo deformado, mientras que el tensor de tensiones se obtiene de analizar las implicaciones que tienen las fuerzas externas al interior del cuerpo. Asimismo se debe hacer una revisión de la teoría de placas basada en las hipótesis de Kirchhoff. Estos conceptos permitirán obtener expresiones para la energía cinética, la energía potencial, y sus variaciones necesarias para aplicar el principio de Hamilton.

Así, se muestra que es posible deducir las condiciones de contorno y la ecuación de movimiento para placas delgadas de bordes libres usando el método variacional.

Palabras clave – Tensión, deformación, placas delgadas Principio de Hamilton.

## **Abstract**

The objective of this work is to obtain the equation of motion and boundary conditions for a thin free-edge plate undergoing small deflections. Since it is not possible to mathematically derive the boundary conditions by laws of Newton, the system is studied from the energy point of view and then the variational method is applied. In this way, it is necessary to study quantities that can characterize the forces acting on the system as well as the deformations it undergoes and the relationship between them, such quantities are called strain and stress tensors. The strain tensor is obtained by analyzing the deformed body, while the stress tensor is obtained by analyzing the implications of external forces inside the body. A review of the plate theory based on Kirchhoff's hypotheses should also be made. These concepts will allow obtaining expressions for kinetic energy, potential energy and their variations necessary to apply principle of Hamilton.

Thus, it is shown that it is possible to derive the boundary conditions and the equation of motion for thin plates with free edges using the variational method.

Keywords – Stress; strain; thin plate; Hamilton Principle.

## Tabla de contenido

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>Capítulo I: Parte introductoria del trabajo</b>	<b>1</b>
1.1 Pregunta de investigación, hipótesis de trabajo y objetivo de la tesis . . . . .	3
<b>Capítulo II: Conceptos generales</b>	<b>5</b>
2.1 Dinámica de los medios continuos . . . . .	5
2.1.1 Fuerzas corporales y de superficie . . . . .	5
2.1.2 Matriz de deformaciones unitarias en coordenadas cartesianas . . . . .	6
2.1.3 Matriz de deformaciones unitarias en coordenadas polares . . . . .	13
2.1.4 La matriz de tensiones en coordenadas cartesianas . . . . .	15
2.2 Ley generalizada de Hooke . . . . .	21
2.3 Formalismo de Hamilton . . . . .	22
2.3.1 Desplazamiento y trabajo virtual . . . . .	22
2.3.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	24
2.4 Teoría clásica de placas . . . . .	26
2.4.1 Hipótesis de Kirchhoff . . . . .	26
<b>Capítulo III: Ecuaciones de movimiento y condiciones de contorno</b>	<b>28</b>
3.1 Densidad de energía de deformación . . . . .	28
3.2 El principio de Hamilton aplicado a un cuerpo en coordenadas cartesianas .	32
3.3 Deflecciones pequeñas en placas rectangulares . . . . .	34
3.4 Deflecciones pequeñas en placas delgadas circulares . . . . .	40
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Recomendaciones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>50</b>

## Lista de figuras

Figura N° 1.1	Los patrones formados por la vibración de una placa delgada fueron dibujados manualmente por Chladni en su tratado sobre la acústica, en la figura se muestran los patrones recreados en <i>Treatise on Acoustics The First Comprehensive English Translation of E.F.F. Chladni's Traité d'Acoustique</i> . . . . .	2
Figura N° 2.1	Viga sometida a su propio peso, esta fuerza es proporcional a la masa del cuerpo y se distribuye en su volumen. . . . .	6
Figura N° 2.2	Una viga es sometida a dos fuerzas externas que generan fuerzas al interior del cuerpo. Para estudiar las fuerzas superficiales, se secciona axialmente como se muestra en la figura inferior. . . . .	6
Figura N° 2.3	Deformación de la región continua. . . . .	7
Figura N° 2.4	Una varilla delgada sufre deformación, de manera que la distancia entre dos puntos de ella varía de $r$ a $r'$ . . . . .	8
Figura N° 2.5	Variación en la distancia de dos puntos de un sólido que sufre deformación. . . . .	9
Figura N° 2.6	Interpretación física de las componentes de la matriz de deformación. . . . .	12
Figura N° 2.7	En el sólido seccionado se observa la fuerza al interior del cuerpo como consecuencia de las cargas externas: concentradas ( $P$ ) y distribuidas ( $P_1$ y $P_2$ ). . . . .	15
Figura N° 2.8	Vector estrés de un área elemental en la dirección $x$ . . . . .	16
Figura N° 2.9	Vectores tracción en un plano arbitrario. . . . .	17
Figura N° 2.10	Normales transversales y superficie media antes y después de la deformación en una placa delgada. . . . .	27
Figura N° 3.1	Placa delgada de volumen $V = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [-h/2, h/2]$ , de espesor $h$ y con superficie media en $z = 0$ . . . . .	35

## Introducción

Este trabajo surgió por la iniciativa del Dr. Daniel Paredes para estudiar las vibraciones de la placa de Chladni y poder predecir las figuras que se formarían como consecuencia de tales vibraciones. Inmediatamente surgió la pregunta sobre cuál es la ecuación de movimiento y cuáles son las condiciones de contorno de la placa. Al hacer la revisión bibliográfica junto al Dr. Joseph Beltrán afrontamos la primera dificultad: en la literatura es relativamente sencillo encontrar la deducción de la ecuación de movimiento obtenida por el método de Newton, sin embargo, no sucede lo mismo con la deducción de las condiciones de contorno, que usualmente se encuentran señaladas de manera directa o intuitiva [1]. Dado este problema, la hipótesis planteada por el Dr. Beltrán fue que las condiciones de contorno pueden ser obtenidas con ayuda del principio de Hamilton, esto fue reforzado al hacer una revisión más exhaustiva de la literatura [2], [3].

Una vez planteada la hipótesis, se hizo un desarrollo detallado de la aplicación del método variacional que nos permitió obtener simultáneamente las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno.

Este trabajo tiene una publicación en la revista *Enseño de Física*

(DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0387>) y en todo el proceso el aporte de ambos profesores ha sido equitativo. A continuación, se presenta la estructura de la tesis como una guía que facilite su lectura:

- El primer capítulo tiene la finalidad de familiarizar al lector con el tema y explicar brevemente la motivación inicial de Chladni para el estudio de las vibraciones en la placa que está fuertemente ligado al campo de la acústica. En esta revisión histórica se conocen también otros físicos y matemáticos como Sophie Germain quien hizo importantes aportes a la acústica y al entendimiento de las vibraciones en placas delgadas. Igualmente, se presenta la pregunta de investigación, la hipótesis y el objetivo del trabajo.
- El segundo capítulo presenta la revisión de conceptos necesarios para conseguir el objetivo. El estudio de la dinámica de los medios continuos incluye dos cantidades matemáticas importantes para el trabajo: el tensor de deformación y el tensor de tensión; la importancia de estas cantidades radica en la caracterización matemática de

las fuerzas y deformaciones sobre un cuerpo, lo que posteriormente permitirá obtener expresiones para la aplicación del principio de Hamilton, asimismo, dado que este principio es medular para alcanzar el objetivo también se hace un revisión de él. Finalmente, acotando el estudio a las placas delgadas, se repasa la teoría de Kirchhoff, cuyas consecuencias son relevantes para alcanzar las expresiones de las energías cinética y potencial en el sistema que nos concierne.

- El tercer capítulo presenta la aplicación del principio de Hamilton a placas delgadas rectangulares y circulares de bordes libres tomando en cuenta las hipótesis de Kirchhoff. Así se obtiene de manera simultánea las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno.

## Capítulo I: Parte introductoria del trabajo

La mecánica de los sistemas continuos es una de las ramas de la física con más aplicaciones en el diseño de estructuras y herramientas estables bajo tensión y deformación. Además, la dificultad de resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de estos sistemas continuos es bien conocida en la literatura [4, 5].

Un ejemplo de estos sistemas es una placa delgada sometida a vibraciones que dan lugar a ciertos patrones (ver figura 1.1, [6]). Estos patrones fueron descubiertos por E.F.F Chladni en 1787 y estudiados en su tratado *Die Akustik*, publicado en 1802, el cual posteriormente se tradujo al francés en *Traité d'Acoustique*, un trabajo dedicado a Napoleón. Este tratado estuvo enfocado principalmente en la acústica y enfatiza su estudio en las vibraciones.

En 1800 los medios disponibles para el estudio del sonido eran principalmente instrumentos musicales, por esta razón Chladni usaba la música como base para su estudio de la acústica. Así, cuando se trataba de cuerdas vibrantes se refería a instrumentos de cuerda, mientras que las membranas se relacionaban con los tambores. Chladni conocía la vibración de cuerdas, la localización de puntos nodales en una onda estacionaria y los trabajos teóricos de Lagrange. Sin embargo, a pesar de tales bases aún no existía una teoría de placas vibratorias, por ello el aporte de Chladni incluía la producción de sonido de placas vibratorias así como la técnica experimental de identificación de vibraciones, para esto se inspiró en los experimentos de Lichtenberg, quien hizo visible el estado eléctrico de una superficie esparciendo polvo electrificado sobre ella. Chladni mantuvo fijos uno o varios puntos en una placa y acariciaba el lado de la placa con el arco de un violín, para hacer visible el efecto de las vibraciones, colocó un poco de arena sobre la placa. La arena fue desplazada por el temblor de las partes vibrantes de la placa y se acumuló en las líneas nodales formando patrones, posteriormente llamados “figuras de Chladni”. Estos patrones llamaron la atención de los científicos de la época, sin embargo, la comprensión del fenómeno tomaría más de un siglo [6].

Luego de que los patrones causaron fascinación en la comunidad científica, Napoleón ofreció la *prix extraordinaire* una medalla valuada en tres mil francos a quien pudiera dar una explicación, esta fue entregada a la física y matemática Sophie Germain, quien

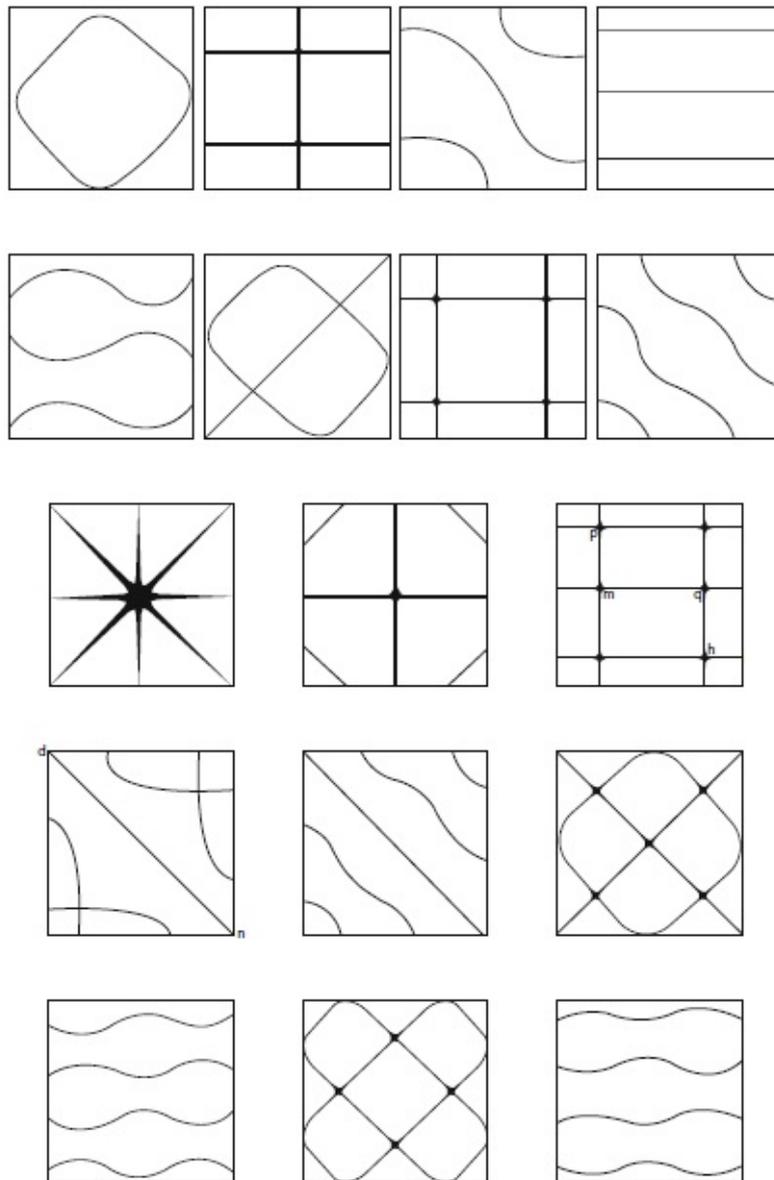


FIGURA N° 1.1: Los patrones formados por la vibración de una placa delgada fueron dibujados manualmente por Chladni en su tratado sobre la acústica, en la figura se muestran los patrones recreados en *Treatise on Acoustics The First Comprehensive English Translation of E.F.F. Chladni's Traité d'Acoustique*.

entre 1811 y 1815, desarrolló el primer modelo matemático en una serie de artículos no publicados dando el primer paso hacia la comprensión de la deformación de una placa elástica y, en general, al desarrollo de la teoría de la elasticidad [4].

Más tarde, en 1945, Rayleigh forma las ecuaciones de equilibrio y movimiento según el método de Green y concluye que obedecen al problema de valores propios del operador biarmónico  $\nabla^4$  (véase [7] para más detalles). En el mismo documento se muestra que

el problema de la placa delgada oscilante tiene una expresión analítica que involucra las frecuencias de las vibraciones, sólo en el caso de una placa circular. Esto significa que las frecuencias de vibración sólo pueden ser calculadas por medios numéricos. Las frecuencias de vibración están relacionadas con los ceros de las funciones de Bessel que se calculan de forma aproximada, es decir, las funciones propias no se calculan. Para más detalles históricos, se sugieren las referencias [4, 8].

Los trabajos actuales sobre las figuras de Chladni se centran en encontrar soluciones numéricas más precisas y eficientes. Existen, por ejemplo, soluciones mediante los algoritmos Q-R y Lanczos [4], el uso del método Ritz-Galerkin [5], la aplicación del método de cuadratura finita [9, 10]. También son habituales los estudios sobre diferentes geometrías y el estudio de sus condiciones de contorno [9–12].

El objetivo de este trabajo es presentar una versión moderna de la deducción de las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno de las vibraciones libres de un sistema continuo a través del principio variacional. Desde esta perspectiva, el presente trabajo se organiza como sigue: En el capítulo II, se presenta un resumen de las propiedades e interpretaciones de las tensiones y deformaciones unitarias en coordenadas cartesianas y polares, así como la deducción de la energía asociada al sistema. En el capítulo III, se realiza la deducción de las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno. Esta técnica se aplica para placas rectangulares y circulares.

### **1.1 Pregunta de investigación, hipótesis de trabajo y objetivo de la tesis**

Las ecuaciones de movimiento de un continuo, en particular de una placa delgada, pueden deducirse mediante las leyes de Newton, esto requiere realizar el diagrama de cuerpo libre de un elemento de volumen de la estructura. Este enfoque, denominado vectorial, proporciona una manera directa de deducir las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, con este enfoque, el tipo de condiciones de contorno que se debe utilizar usualmente son obtenidos de manera intuitiva. Así, en la literatura es muy poco frecuente encontrar una deducción de tales condiciones. Esta insuficiencia nos permite plantear lo siguiente:

- **Pregunta de investigación:** ¿Cómo encontrar las condiciones de contorno para placas delgadas de geometría rectangular y circular que sufren pequeñas deflexiones?

- **Hipótesis de trabajo:** Se asume que se pueden encontrar las condiciones de contorno desde un punto de vista energético, es decir, caracterizando el sistema por dos funciones de energía: la energía cinética  $k$  y la energía potencial  $U$ . De esta manera, es posible aplicar el principio de Hamilton que permite obtener tanto ecuaciones de movimiento, como las condiciones de contorno y la forma de las variables que intervienen en la especificación de tales condiciones.
- **Objetivo de la tesis:** Encontrar las condiciones de contorno para placas delgadas de bordes libres sometidas a deflexiones pequeñas usando el método variacional.

Si al aplicar el método variacional a placas delgadas de bordes libres sometidas a deflexiones pequeñas, se deducen simultáneamente las condiciones de contorno y las ecuaciones de movimiento, se podrá afirmar que este método tiene una gran ventaja sobre el método vectorial.

## Capítulo II: Conceptos generales

### 2.1 Dinámica de los medios continuos

En este apartado se analizan las deformaciones que sufre un cuerpo elástico. Dichas deformaciones, caracterizadas por una entidad matemática conocida como tensor de deformación específica son consecuencia de las fuerzas externas que se tratarán con el llamado tensor de elasticidad.

#### 2.1.1 Fuerzas corporales y de superficie

Cuando una estructura está sometida a cargas externas aplicadas, se inducen fuerzas internas que se distribuyen de manera continua al interior del sólido. Para estudiar estas fuerzas, es conveniente clasificarlas en dos grandes grupos principales, denominados fuerzas corporales y fuerzas superficiales.

Las fuerzas corporales son proporcionales a la masa del cuerpo y reaccionan con un agente externo al mismo. Ejemplos de ellas son las fuerzas gravitacionales, las fuerzas magnéticas y las fuerzas de inercia. La figura 2.1 muestra un ejemplo de fuerza corporal del peso propio de un objeto. Utilizando los principios de la mecánica del continuo, se puede obtener una densidad de la fuerza del cuerpo, es decir, la fuerza por unidad de volumen  $\mathbf{F}(x)$ , esta puede definirse mediante la relación:

$$\mathbf{F}_R = \iiint_V \mathbf{F}(x) dV,$$

de manera que  $\mathbf{F}_R$  es la fuerza total resultante del cuerpo.

En cuanto a las fuerzas superficiales, estas actúan siempre sobre la superficie y generalmente son el resultado del contacto físico con otro cuerpo. La Fig. 2.2 muestra las fuerzas superficiales existentes en una sección de viga que se ha creado seccionando el cuerpo en dos partes. Para este caso particular, la superficie  $S$  es virtual en el sentido de que fue creada artificialmente para investigar la naturaleza de las fuerzas internas en este lugar del cuerpo. La fuerza superficial resultante sobre toda la superficie  $S$  puede expresarse

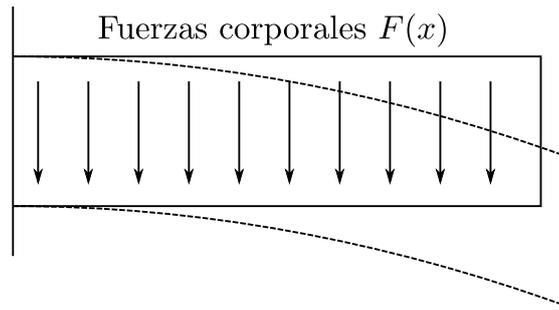


FIGURA N° 2.1: Viga sometida a su propio peso, esta fuerza es proporcional a la masa del cuerpo y se distribuye en su volumen.

como la integral de una función de densidad de fuerza superficial  $\mathbf{T}^n(x)$

$$\mathbf{F}_S = \iint_S \mathbf{T}^n(x) dS,$$

donde  $\mathbf{T}^n(x)$  es conocido como vector tracción y será estudiado con mayor profundidad en la sección 2.1.4.

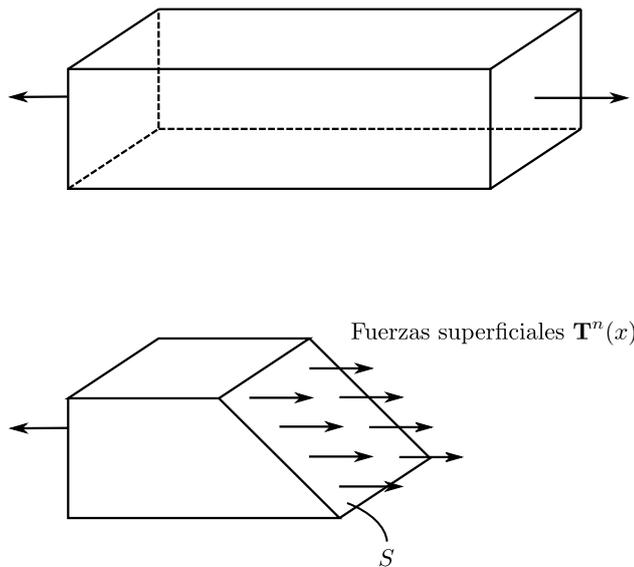


FIGURA N° 2.2: Una viga es sometida a dos fuerzas externas que generan fuerzas al interior del cuerpo. Para estudiar las fuerzas superficiales, se secciona axialmente como se muestra en la figura inferior.

### 2.1.2 Matriz de deformaciones unitarias en coordenadas cartesianas

En esta sección se busca obtener y explicar una cantidad tensorial que caracterice la deformación de un cuerpo, esta cantidad es conocida como tensor deformación o matriz de deformaciones unitarias. Para esto se analiza el cambio en la configuración de un cuerpo al sufrir deformación y un elemento infinitesimal de él.

Sea una región continua  $V_0$  y un punto genérico  $P_0(\mathbf{x})$ , en dicha región. Después de la deformación, la nueva configuración del cuerpo se denota por  $V$  y la posición del punto genérico se denota por  $P(\mathbf{X})$  (ver figura 2.3).

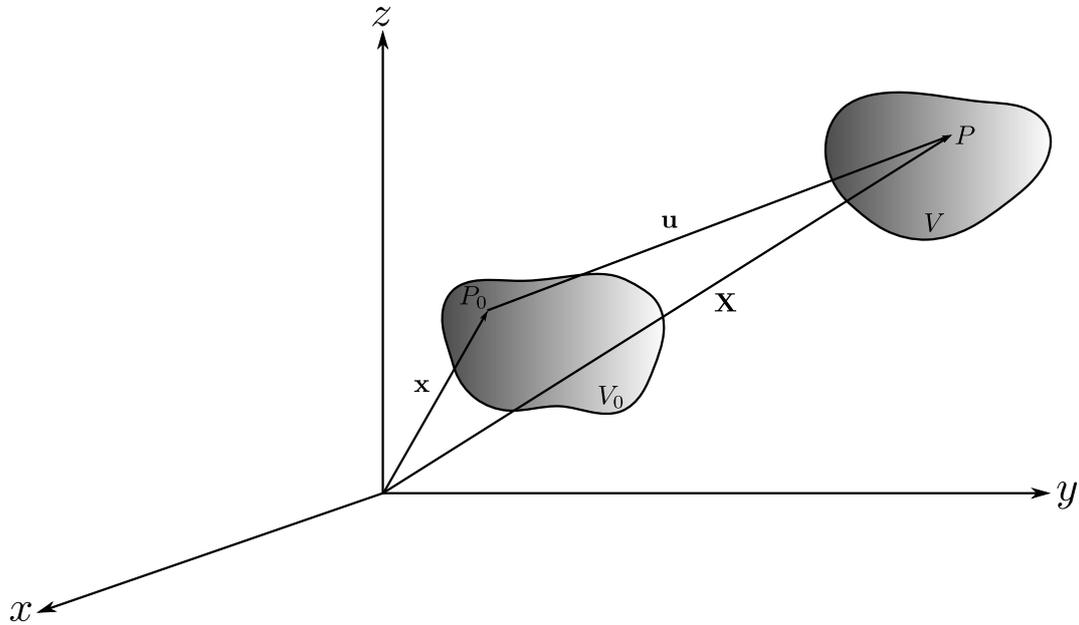


FIGURA N° 2.3: Deformación de la región continua.

La posición desplazada de  $P_0$  está relacionada con el vector desplazamiento  $\mathbf{u}$  mediante

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{u}. \quad (2.1)$$

En el sistema de coordenadas cartesianas, los vectores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{u}$  son expresados por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x \ y \ z]^T, \\ \mathbf{X} &= [X \ Y \ Z]^T, \\ \mathbf{u} &= [u \ v \ w]^T, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $[ \ ]^T$  se refiere a la traspuesta.

## Deformaciones generales

En la figura 2.4 se muestra una varilla delgada el eje  $x$ , en esta varilla se escogen dos puntos  $x_{01}$  y  $x_{02}$  distanciados por  $r$ . Al sufrir deformación, el punto, inicialmente ubicado en  $x_{01}$ , se desplaza una distancia  $u_1$  hasta llegar a  $x_1$ , mientras que el punto en  $x_{02}$  se desplaza una distancia  $u_2$  hasta llegar a  $x_2$ , tal que la distancia final entre los puntos es  $r'$ .

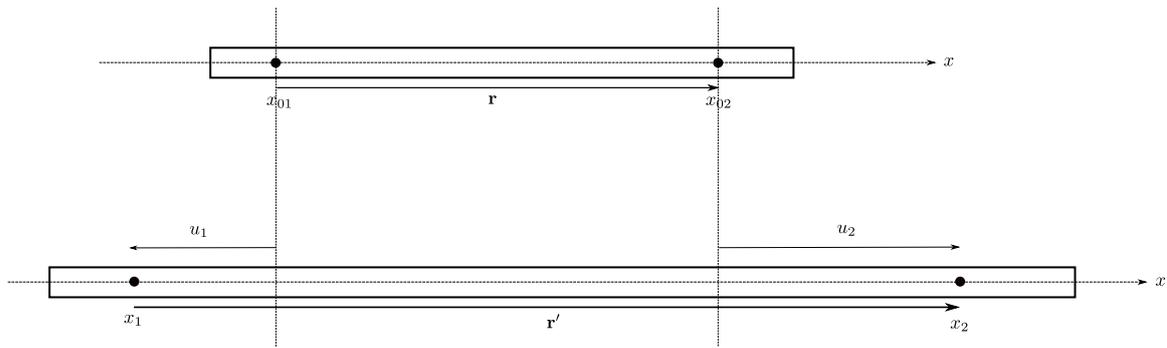


FIGURA N° 2.4: Una varilla delgada sufre deformación, de manera que la distancia entre dos puntos de ella varía de  $r$  a  $r'$

De la figura, se obtiene que la variación de las distancias es igual a la diferencia entre los desplazamientos de los puntos:

$$\Delta r = \Delta u. \quad (2.3)$$

Por otro lado, la variación relativa de la distancia entre los puntos es  $\frac{u_2 - u_1}{r}$  y dado que  $r = x_{02} - x_{01}$ , se tiene

$$\frac{u_2 - u_1}{r} = \frac{u_2 - u_1}{x_{02} - x_{01}}. \quad (2.4)$$

Al tomar el límite  $\lim_{x_{02} \rightarrow x_{01}}$ , resulta

$$u_2 = u_1 + r \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Ahora, se estudiarán estas deformaciones en un sólido de volumen  $V$ . En la figura 2.5, se muestra un esquema de un sólido que sufre una deformación. Cuando el sólido se encuentra libre, se escogen dos puntos en él, ubicados en las posiciones  $P_0$  y  $P$  de manera que la distancia entre ellos está dada por el vector  $\mathbf{r}$ , estos puntos son mapeados durante la deformación y se observa un cambio en la posición de ambos, tal que la distancia entre ellos varía a  $\mathbf{r}'$ .

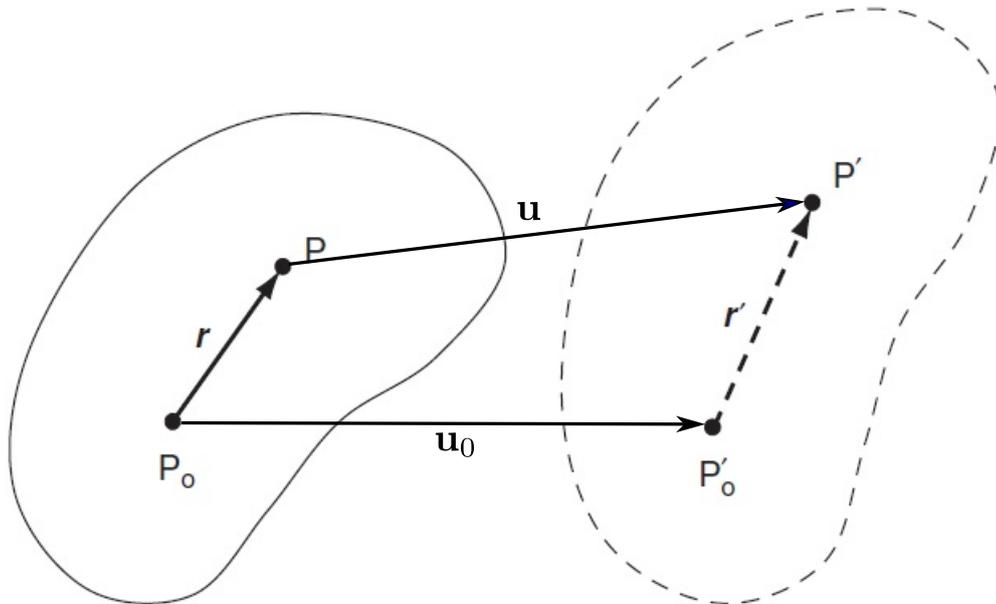


FIGURA N° 2.5: Variación en la distancia de dos puntos de un sólido que sufre deformación.

De manera análoga al caso unidimensional, las componentes de la variación  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \nabla u \cdot \mathbf{r}, \\ v &= v_0 + \nabla v \cdot \mathbf{r}, \\ w &= w_0 + \nabla w \cdot \mathbf{r}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

es decir, cada componente de la variación  $\Delta \mathbf{u}$  es igual a tasa de cambio de la componente correspondiente de  $u$  a lo largo del vector  $\mathbf{r}$ . Expandiendo los términos, se obtiene

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z, \\ v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z, \\ w &= w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde  $u_0$ ,  $v_0$  y  $w_0$  son las componentes del vector desplazamiento  $\mathbf{u}_0$ .

En la figura 2.5 se puede ver que el cambio en la distancia de las dos partículas es

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ . Luego, de las ecuaciones (2.7), se tiene que las componentes de  $\Delta \mathbf{r}$  son

$$\Delta r_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} r_j; \quad i, j = x, y, z, \quad (2.8)$$

expresando esta ecuación en su forma matricial, se tiene:

$$\begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

donde  $\partial u_i / \partial x_j$ , denotado por  $F$ , es el tensor de gradientes de desplazamiento:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Esta matriz puede ser representada como la suma de una matriz antisimétrica  $\omega$  y una matriz simétrica  $\epsilon$ , es decir,  $F = \omega + \epsilon$ , donde

$$\omega = \frac{1}{2} [F - F^T] = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{pmatrix} = -\omega^T, \quad (2.11)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} [F + F^T] = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \epsilon^T.$$

La matriz antimétrica  $\omega$  es conocida como matriz rotación, el significado de esta matriz se profundiza en el anexo 1. Sin embargo, ya que en este estudio se considera que el elemento infinitesimal analizado no sufre rotación, sino solo deformación, solo se expresará

explícitamente la matriz simétrica conocida como matriz deformación:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Los elementos en la diagonal de la matriz (2.12) son llamados *normales* o *componentes de deformación extensionales* y representan el cambio en la longitud relativo. Esto se puede entender mejor con ayuda de la figura 2.6, aquí se observa un elemento rectangular bidimensional que sufre una deformación, inicialmente la longitud de uno de los lados es  $A_0B_0$ , luego de la deformación esta longitud varía a  $AB$ , por lo tanto la componente de deformación extensional a lo largo del eje  $x$  es

$$\epsilon_{xx} = \frac{AB - A_0B_0}{A_0B_0}, \quad (2.13)$$

donde  $A_0B_0 = dx$ , luego

$$\epsilon_{xx} = \frac{AB}{dx} - 1. \quad (2.14)$$

Mientras que los elementos fuera de la diagonal son llamados *componentes de deformación de corte* y son asociados con el cambio en el ángulo entre dos direcciones originalmente ortogonales del elemento infinitesimal analizado en el material continuo. Por ejemplo, en la figura 2.6 el elemento bidimensional ha sufrido una deformación en el ángulo igual a  $\pi/2$  formado por los lados  $A_0B_0$  y  $A_0D_0$  paralelos a los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente, luego de la deformación varía al ángulo igual  $\beta$ . Así, el cambio en el ángulo está dado por

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta \quad (2.15)$$

Como convención de signos, la deformación de corte puede considerarse positiva si el ángulo recto entre las direcciones positivas de los dos ejes disminuye. Por lo tanto, el signo de la deformación de corte está vinculado a la orientación de los ejes de coordenadas de referencia. En la figura 2.6 se observa también que la deformación de corte del elemento rectangular se puede escribir como

$$\gamma_{xy} = \alpha - \xi \quad (2.16)$$

La deformación cortante definida en (2.15) se conoce como deformación de ingeniería y está relacionada con la deformación cortante matemática  $\epsilon_{xy}$  mediante:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\alpha - \xi) \quad (2.17)$$

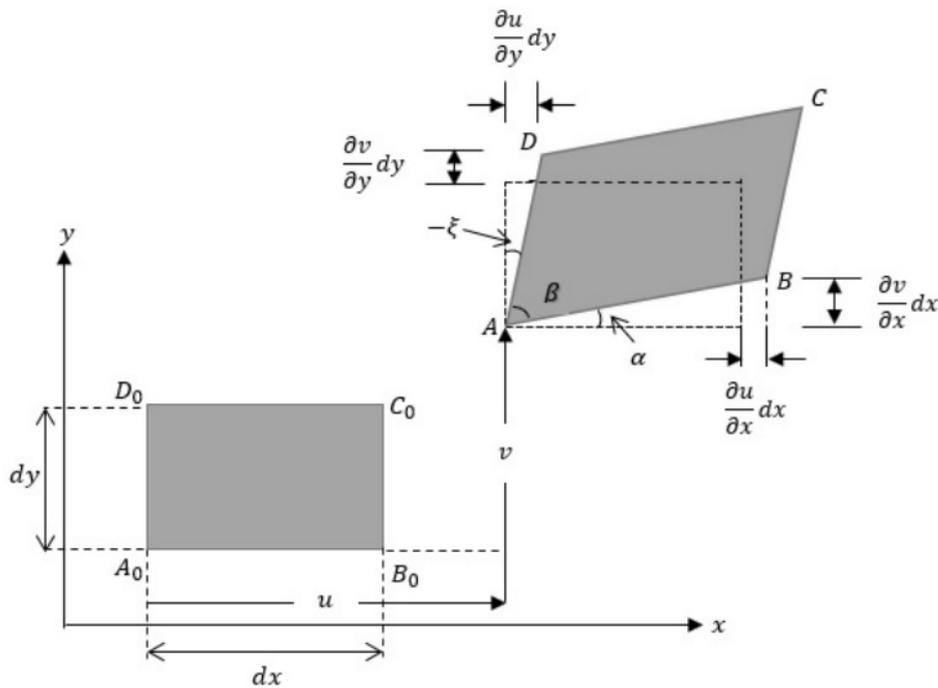


FIGURA N° 2.6: Interpretación física de las componentes de la matriz de deformación.

Ya que se ha revisado la interpretación física de las componentes de deformación extensionales y las componentes de deformación de corte, se van a obtener la forma de los elementos de la matriz de deformación.

De la geometría en la figura 2.6, se tiene

$$(AB)^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2, \quad (2.18)$$

y, teniendo en cuenta la ecuación (2.14), se obtiene

$$(AB)^2 = (1 + \epsilon_{xx})^2(dx)^2. \quad (2.19)$$

Igualando las expresiones (2.18) y (2.19), resulta

$$\epsilon_{xx}^2 + 2\epsilon_{xx} + 1 = 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2. \quad (2.20)$$

Debido a que la atención se está restringiendo solo a pequeñas deformaciones, en (2.20), se pueden despreciar los términos superiores al primer orden. Así,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Por otro lado, considerando la geometría de la configuración deformada en la figura 2.6

$$\tan \alpha = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx}{\left[dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]}, \quad \tan(-\xi) = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy}{\left[dy + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]}. \quad (2.22)$$

Ya que se están considerando pequeñas deformaciones, entonces  $\partial u_1/\partial x_1 \ll 1$  y  $\partial u_2/\partial x_2 \ll 1$  y las ecuaciones (2.22) pueden ser escritas de la siguiente manera

$$\tan \alpha \sim \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \tan(-\xi) \sim -\xi = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.23)$$

Así, los elementos fuera de la diagonal son

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \epsilon_{yx}, \quad (2.24)$$

donde, en la última igualdad se ha considerado la definición de la matriz deformación como una matriz simétrica. Además, se ha visto que  $\epsilon_{xy}$  representa la mitad de la variación angular de dos líneas que se cortan en un sólido.

### 2.1.3 Matriz de deformaciones unitarias en coordenadas polares

El objetivo de esta sección es obtener la matriz deformación (2.12) en coordenadas polares. Para ello es necesario usar la matriz de transformación entre coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  y coordenadas polares  $(r, \theta, z)$ .

Las relaciones entre las coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  y las coordenadas po-

lares  $(r, \theta, x_3)$  son

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z. \quad (2.25)$$

Y las relaciones entre las derivadas en coordenadas cartesianas y polares se obtienen usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde en la segunda igualdad de cada ecuación se han usado las ecuaciones (2.25).

La matriz transformación será denotada por  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

con esta ecuación, se pueden obtener las deformaciones de la placa en coordenadas cartesianas en términos de las deformaciones en coordenadas polares. Así, el desplazamiento  $\mathbf{u}$  en (2.1) tiene la siguiente relación de transformación

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ v_\theta \\ w \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Y la matriz de deformación en coordenadas polares, denotada por  $\epsilon_P$ , es obtenida desarrollando la siguiente expresión

$$\epsilon_P = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta z} \\ \epsilon_{zr} & \epsilon_{z\theta} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Desarrollando la ecuación (2.29) (ver anexo 5), se obtiene que la matriz  $\epsilon_P$  toma la

siguiente forma

$$\epsilon_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) & \frac{u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

#### 2.1.4 La matriz de tensiones en coordenadas cartesianas

En la sección previa se estudió la cinemática de la deformación sin tener en cuenta las fuerzas que actuaban sobre el cuerpo, en esta sección se estudiarán tales fuerzas y su transmisión a través del sólido. Por ello, se busca un tensor que permita caracterizar las tensiones internas en un cuerpo causadas por fuerzas externas y demostrar la simetría del tensor.

La aplicación de fuerzas externas sobre una región continua y deformable resulta en el desarrollo de tensiones al interior. La medición de la tensión fue postulada por Augustin Louis Cauchy. Cauchy afirmaba que las tensiones internas desarrolladas en un medio deformable son similares, en carácter, a la tensión que puede ser aplicada externamente para crear el estado interno de tensión [13].

Con el objetivo de caracterizar la naturaleza de la distribución interna de fuerzas al interior de un sólido continuo, se considera un cuerpo sujeto a cargas externas arbitrarias, concentradas y distribuidas, como se muestra en la figura 2.7.

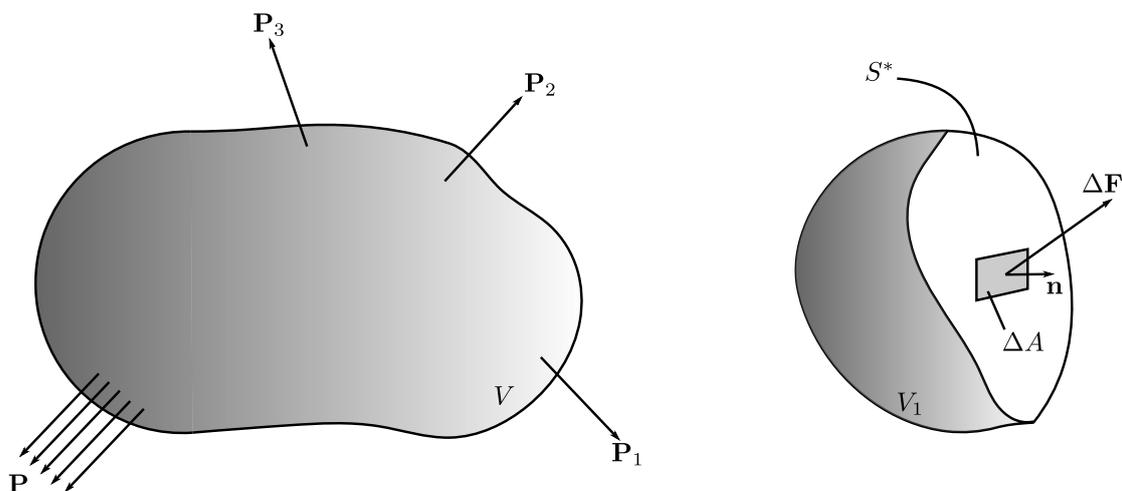


FIGURA N° 2.7: En el sólido seccionado se observa la fuerza al interior del cuerpo como consecuencia de las cargas externas: concentradas (\$P\$) y distribuidas (\$P\_1\$ y \$P\_2\$).

Para investigar las fuerzas externas, se hace un corte a través del cuerpo como se muestra en la Fig. 2.7. Sobre la sección  $S^*$ , que divide a la región  $V$  en dos regiones separadas, se considera una pequeña área  $\Delta A$  con un vector unitario normal y saliente  $\mathbf{n}$ . La fuerza resultante que actúa sobre la superficie  $\Delta A$  es definida por  $\Delta \mathbf{F}$ , luego el vector tracción es definido por

$$\mathbf{T}^n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \right). \quad (2.31)$$

En la ecuación (2.31),  $\Delta A$  es el área actual del elemento en consideración. Por lo tanto,  $\mathbf{T}^n$  depende del punto  $P$  y la orientación de  $\Delta A$ . El vector normal saliente de la superficie en  $P$  se denota por  $\mathbf{n}$ . Cauchy mostró que se puede determinar  $\mathbf{T}^n$  a partir de

$$\mathbf{T}^n = \sigma^T \mathbf{n}, \quad (2.32)$$

donde  $\sigma$  es la notación de la matriz tensión y

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}^T. \quad (2.33)$$

Como ejemplo se considera el caso particular en el que la orientación de la superficie interna  $S^*$  del cuerpo  $V$  es tal que la normal unitaria al elemento de área coincide con la dirección  $x_1$  del sistema de coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, x_3$  (ver figura 2.8).

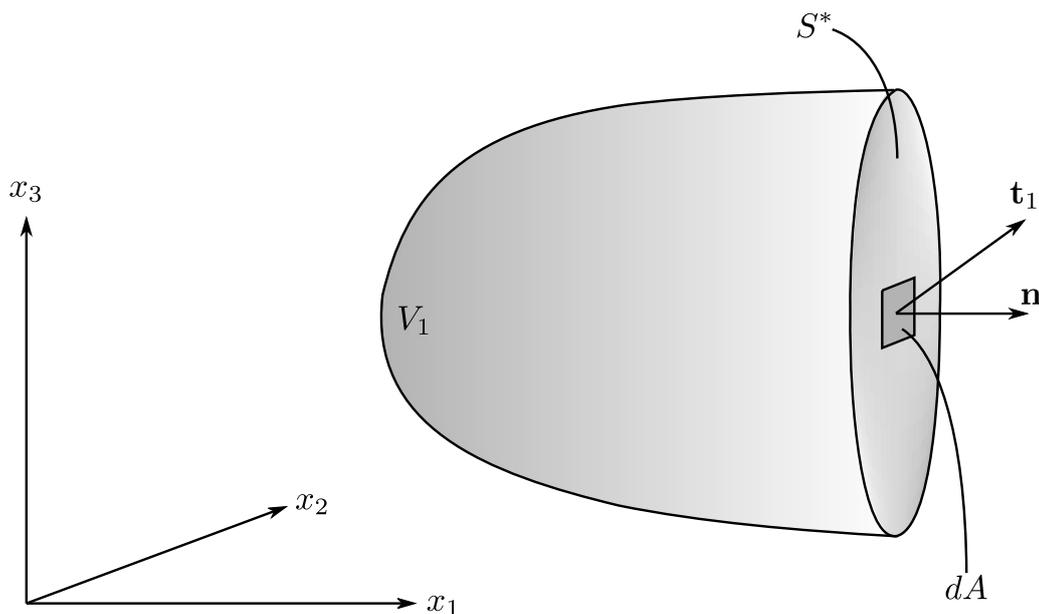


FIGURA N° 2.8: Vector estrés de un área elemental en la dirección  $x$ .

Se denota al *vector tensión* que actúa sobre el área elemental por  $\mathbf{t}_1$ . Las componentes de este vector en las direcciones  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  y  $\sigma_{13}$ , respectivamente, tal que

$$\mathbf{t}_1 = \sigma_{11}\mathbf{i} + \sigma_{12}\mathbf{j} + \sigma_{13}\mathbf{k}. \quad (2.34)$$

De una manera similar, se puede seleccionar superficies internas en el medio tal que la normal a los elementos de superficie ubicada sobre ellos están orientadas en la dirección de los ejes cartesianos  $y$  y  $z$ . Las expresiones equivalentes para los vectores tensión de estos elementos son dados, respectivamente, por

$$\mathbf{t}_2 = \sigma_{21}\mathbf{i} + \sigma_{22}\mathbf{j} + \sigma_{23}\mathbf{k} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{t}_3 = \sigma_{31}\mathbf{i} + \sigma_{32}\mathbf{j} + \sigma_{33}\mathbf{k}. \quad (2.36)$$

Las definiciones de los vectores tracción  $\mathbf{t}_i$  pueden ser usadas para evaluar las resultantes de estrés en un plano arbitrario y para mostrar que las relaciones entre los estados de estrés  $\sigma$  en un punto y las tracciones en el plano arbitrario a través de este punto es independiente de cualquier fuerza de cuerpo, fuerza debido a la dinámica u otros efectos. La relación también se vuelve útil cuando se examinan condiciones de contorno que relacionan tracciones aplicadas externamente al estado de estrés interno en el cuerpo.

Considere un punto  $P$  en la superficie de un cuerpo el cual está sujeto a tracciones externas

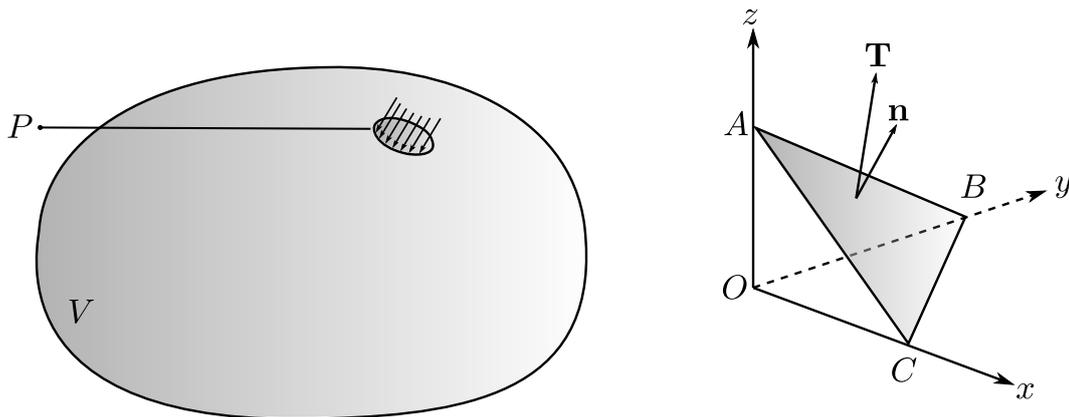


FIGURA N° 2.9: Vectores tracción en un plano arbitrario.

$T$ . La normal unitaria saliente al plano euclideo  $P$  está dado por

$$\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k} \quad (2.37)$$

La figura 2.9 muestra un elemento tetraédrico donde el plano  $ABC$  es el plano euclideo en  $P$  donde las tracciones  $\mathbf{T}^n$  son aplicadas. Los planos  $OAB, OAC$  y  $OBC$  están ubicados en el cuerpo y los vectores tracción que actúan sobre los planos son  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  y  $\mathbf{t}_3$ .

Como generalización del análisis, se asume que las fuerzas de cuerpo actúan sobre el elemento; estas fuerzas de cuerpo podrían ser debido a la gravedad, efectos de fluidos, etc. Si la fuerza de cuerpo tiene intensidades  $f_1^b, f_2^b$  y  $f_3^b$  (medidas como fuerza por unidad de volumen) luego el vector fuerza debido a los efectos de fuerza de cuerpo  $F^b$  está dado por

$$F^b = f^b \Delta V \quad (2.38)$$

donde  $\Delta V$  es el volumen del elemento tetraédrico. Similarmente, si las aceleraciones en las tres direcciones coordenadas son  $\partial^2 u / \partial t^2$ , la dinámica de fuerzas en el elemento son

$$F^b = (\rho \Delta V) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.39)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa del medio. Considerando el elemento tetraédrico, si el área  $ABC$  es  $\Delta S$ , las áreas de  $AOB, AOC$  y  $BOC$  son dadas respectivamente por

$$\Delta S_i = n_i(\Delta S), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.40)$$

Los vectores fuerza que actúan sobre las superficies del elemento tetraédrico,  $ABC, AOB, AOC$  y  $BOC$  son dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \Delta S, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{F}_1 = -n_1(\Delta S) \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{F}_2 = -n_2(\Delta S) \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{F}_3 = -n_3(\Delta S) \mathbf{t}_3.$$

Se observa que las normales unitarias salientes a las superficies  $AOB, AOC$  y  $BOC$  están orientadas a lo largo de las direcciones negativas de los ejes coordenados. Aplicando la segunda ley de Newton al elemento tetraédrico, se tiene

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{f}^b \Delta V = (\rho \Delta V) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.42)$$

Sustituyendo (2.39) y (2.41) en (2.42) se tiene

$$\mathbf{T} = n_1 \mathbf{t}_1 + n_2 \mathbf{t}_2 + n_3 \mathbf{t}_3 + \frac{\Delta V}{\Delta S} \left( \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{f}^b \right). \quad (2.43)$$

Ahora fijamos el punto  $P$  pero reducimos las dimensiones del elemento tetraédrico a cero ( $\frac{\Delta V}{\Delta S} \rightarrow 0$ ). Como resultado, se tiene

$$\mathbf{T} = n_1 \mathbf{t}_1 + n_2 \mathbf{t}_2 + n_3 \mathbf{t}_3, \quad (2.44)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} T_1 &= n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}, \\ T_2 &= n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32}, \\ T_3 &= n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Estas tres ecuaciones pueden ser expresadas como

$$T_i = \sigma_{ik} n^k. \quad (2.46)$$

De aquí, se define la matriz de tensiones en el sistema de coordenadas cartesianas como

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Ahora, se examinarán las implicaciones, sobre la matriz estrés, consecuentes de asumir que el cuerpo está en equilibrio cuando está sujeto a tracciones externas  $\mathbf{t}$  sobre la superficie  $S$  y las fuerzas por unidad de volumen en  $V$  denotadas por  $\mathbf{f}_i$ . De la conservación del momento, se tiene

$$\oint_S T_i dS + \int_V f_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{u}_i dV, \quad (2.48)$$

donde  $\rho$  es la constante que representa la densidad volumétrica del cuerpo. Haciendo uso del teorema de la divergencia, se puede transformar la integral de superficie a una integral

de volumen para conseguir el primer término de la parte izquierda

$$\oint_S \sigma_{ik} dS^k = \int_V \partial^k \sigma_{ik}. \quad (2.49)$$

Considerando que la densidad  $\rho$  no cambia en el tiempo, en la ecuación (2.48) se tiene

$$\int_V (\rho \ddot{u}_i - \partial^k \sigma_{ik} - f_i) dV = 0 \quad (2.50)$$

y esto implica que

$$\rho \ddot{u}_i = \partial^k \sigma_{ik} + f_i. \quad (2.51)$$

Por otro lado, a partir de esta ecuación, se puede expresar el equilibrio de momentos respecto al origen  $O$

$$\int_V \rho (\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{u}}) dV = \oint_S \mathbf{x} \times \mathbf{T} dS + \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV \quad (2.52)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector en  $dV$  o  $dS$ . Ahora, se expresa el producto cruz en términos del símbolo de permutación, Levi Civita:

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon^{ijk} x_j \dot{u}_k dV = \oint_S \epsilon^{ijk} x_j t_k dS + \int_V \epsilon^{ijk} x_j f_k dV. \quad (2.53)$$

Nuevamente, usando el teorema de divergencia en el primer término del lado derecho y expresando  $t_k$  como  $\sigma_{jk} n^k$ , resulta

$$\begin{aligned} \oint_S \epsilon^{ijk} x_j \sigma_{jk} dS^k &= \int_V \epsilon^{ijk} \partial_j (x_j \sigma_{jk}) dV, \\ &= \int_V \epsilon^{ijk} \sigma_{jk} dV. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Recordando las ecuaciones de equilibrio, resulta

$$\int_V \epsilon^{ijk} \sigma_{jk} dV = 0, \quad (2.55)$$

y ya que  $\epsilon^{ijk}$  es antisimétrico en  $jk$ , se obtiene que  $\sigma_{jk}$  debe ser simétrico:

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}. \quad (2.56)$$

## 2.2 Ley generalizada de Hooke

Las relaciones cinemáticas, los principios mecánicos y termodinámicos son aplicables a cualquier continuo independientemente de su constitución física. En esta sección, se consideran las ecuaciones constitutivas las cuales caracterizan el material y su reacción a cargas aplicadas. La formulación de las ecuaciones constitutivas para un material dado está guiada por axiomas constitutivos. En este trabajo revisaremos las relaciones constitutivas lineales para sólidos que sufren pequeñas deformaciones.

Se dice que un cuerpo material es homogéneo si las propiedades del material son las mismas en todo el cuerpo, por el contrario, un cuerpo es heterogéneo si las propiedades del material dependen de la posición. Por otra parte, un cuerpo anisotrópico es aquel en el que las propiedades del material dependen de la dirección mientras que un cuerpo isotrópico es aquel para el que todas las propiedades materiales en todas las direcciones en un punto son iguales. Un material isótropo o anisótropo puede ser no homogéneo u homogéneo [2].

Se dice que un cuerpo material es idealmente elástico cuando el cuerpo recupera completamente su forma original luego de retirar las fuerzas que causan la deformación. En las ecuaciones constitutivas descritas aquí se asume que los coeficientes del material que especifican la relación constitutiva entre los componentes de tensión y deformación son constantes durante la deformación. Además, se revisan las ecuaciones constitutivas básicas de elasticidad lineal (es decir, la ley de Hooke generalizada) para pequeños desplazamientos.

La forma más general de la relación constitutiva elástica lineal supone que cada componente de la matriz de deformaciones  $\epsilon$  se puede expresar como una combinación lineal de los componentes de la matriz de tensiones  $\sigma$ , y viceversa. La relación lineal resultante

se puede escribir como se muestra a continuación

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

donde  $C_{ij}$  son coeficientes de elasticidad. En general, las 36 constantes elásticas son necesarias para caracterizar al material elástico lineal. El comportamiento constitutivo lineal no invoca suposiciones sobre las relaciones que pueden existir entre los componentes de  $C$  como resultado de requisitos termodinámicos o de simetría.

En el anexo 2 se muestra que, dado que la función de energía de deformación  $U$  de un cuerpo es continuamente diferenciable, la matriz elasticidad es simétrica. Además, como se indica en el anexo 5, al considerar un material isotrópico y homogéneo, la matriz elasticidad se reduce a una matriz de 21 componentes y a partir de ella se obtiene una relación importante entre el tensor de tensiones, el tensor de deformaciones y dos constantes  $\lambda$  y  $\mu$  denominadas constantes de Lamé, tal relación será útil en la consecución de la energía de deformación  $U$  en términos de los tensores de deformación y tensiones.

## 2.3 Formalismo de Hamilton

### 2.3.1 Desplazamiento y trabajo virtual

Un sistema mecánico puede tomar muchas configuraciones siempre que sean consistentes con las restricciones geométricas sobre el sistema, estas son denominadas configuraciones admisibles. De todas las configuraciones permitidas solo una satisface la segunda ley de Newton, i.e, corresponde a la configuración de equilibrio del sistema bajo las fuerzas que actúan sobre él. El desplazamiento virtual de un sistema es el cambio de configuración de este debido a una variación arbitraria de las coordenadas  $\delta r_i$ , tal variación debe ser compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas al sistema en un instante  $t$ , la diferen-

cia entre un desplazamiento virtual y un desplazamiento real es que este último se da en un *intervalo* de tiempo  $dt$  durante el cual pueden variar las fuerzas y las ligaduras [2, 14]. Los desplazamientos virtuales en los contornos en los que hay condiciones de contorno son nulos.

El trabajo hecho por fuerzas reales a través de desplazamientos virtuales es llamado trabajo virtual. Si en un instante  $t$ , actúa una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre un cuerpo  $\Omega$  que sufre un desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}$ , el trabajo virtual<sup>1</sup> está dado por

$$\delta W = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{u} dv, \quad (2.58)$$

donde  $dv$  es el elemento de volumen y  $\Omega$  es el volumen del cuerpo.

El trabajo virtual hecho por fuerzas externas se denota por  $\delta W_E$ . Asumiendo que sobre el cuerpo actúan *fuerzas de cuerpo*  $f$  por unidad de volumen y *tracciones superficiales*  $\mathbf{T}$  por unidad de área, el trabajo virtual externo está dado por

$$\delta W_E = - \left( \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dv + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u} ds \right), \quad (2.59)$$

donde  $ds$  es una superficie elemental y  $\Gamma_{\sigma}$  es la superficie del cuerpo. El signo negativo en (2.59) indica que el trabajo se hace sobre el cuerpo.

Con referencia al trabajo virtual hecho por fuerzas internas, este se denota por  $\delta W_I$ . En general, el trabajo interno está compuesto por varios tipos, mecánico, térmico, químico, etc [2]. En este trabajo solo se consideran el trabajo interno debido a las tensiones por fuerzas mecánicas<sup>2</sup>, conocido como energía de deformación,  $U$ . Las fuerzas asociadas al campo de tensiones internas desplazan las partículas del material, por lo tanto, se realiza trabajo. Hay que notar que el trabajo realizado al interior del cuerpo por las fuerzas externas es el responsable del trabajo interno.

---

<sup>1</sup>El trabajo virtual también está definido como el trabajo hecho por fuerzas virtuales mediante desplazamientos reales:

$$\delta W^* = \int_{\Omega} \delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dv.$$

<sup>2</sup>Estas tensiones internas se dan en cuerpos elásticos, en cuerpos rígidos, donde no hay cambios geométricos, no hay fuerzas internas y el trabajo interno es nulo,  $\delta W_I = 0$ .

### 2.3.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Antes de obtener las ecuaciones de Euler Lagrange, debemos recordar qué es una funcional. Sabemos que el cálculo diferencial se ocupa del cambio de una función cuando uno se mueve de un punto a otro y que la derivada de la función en un punto indica la tasa de cambio o pendiente, en ese punto. En el cálculo de variaciones se estudian "funciones de funciones", formalmente llamadas funcionales. En concreto, una funcional es una integral definida cuyo integrando contiene una función que está por determinar. Se dice que  $I[u(x)]$  es una funcional siempre que tome un único valor escalar para cada función  $u(x)$ . El objetivo principal en el cálculo variacional es obtener funciones estacionarias (o extremos) de funcionales.

A continuación, se plantea el problema de encontrar el extremo de la funcional

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx, \quad u(a) = u_a, u(b) = u_b. \quad (2.60)$$

La condición necesaria para que la funcional tenga un extremo es que la primera variación sea cero,

$$\delta I(u) = 0, \quad (2.61)$$

es decir,

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right) dx = 0, \quad (2.62)$$

donde  $\delta u' = \delta \left( \frac{du}{dx} \right) = d \left( \frac{\delta u}{dx} \right)$ . Luego,

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \frac{d\delta u}{dx} \right) dx = 0 \quad (2.63)$$

y ya que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right) = \frac{\partial F}{\partial u'} \frac{d\delta u}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u, \quad (2.64)$$

se puede reescribir (2.63):

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx + \left[ \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_a^b = 0 \quad (2.65)$$

En la ecuación (2.65), se observa que el término

$$\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \quad (2.66)$$

está conformado por el producto del desplazamiento virtual  $\delta u$  y la fuerza generalizada  $\frac{\partial F}{\partial u'}$ , así la expresión (2.66) representa el trabajo virtual. Todas las variaciones admisibles deben satisfacer la forma homogénea de las condiciones de contorno geométricas:

$$\delta u(a) = 0, \quad \delta u(b) = 0. \quad (2.67)$$

En otro punto,  $a < x < b$ ,  $\delta u$  es arbitrario.

De las condiciones geométricas (2.67), se observa que la ecuación (2.65) se reduce a

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx = 0, \quad (2.68)$$

esto se cumple para cualquier variación  $\delta u$  en  $(a, b)$ . Del Lema fundamental del cálculo de variaciones<sup>3</sup>, se deduce que

$$G \equiv \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0, \quad \text{en } a < x < b. \quad (2.69)$$

Así, la condición necesaria para que la funcional  $I(u)$  sea un extremo en  $u = u(x)$  es que  $u(x)$  sea solución de la ecuación (2.69), conocida como la ecuación de Euler-Lagrange asociada con la funcional  $I(u)$ , es decir,  $\delta I = 0$  es equivalente a (2.69).

Si  $u(a) = u_a$  y  $u(b)$  es arbitrario, entonces  $\delta u(a) = 0$ . De la ecuación (2.65) se tiene

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx + \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right)_{x=b} \delta u(b). \quad (2.70)$$

---

<sup>3</sup>El Lema fundamental del cálculo de variaciones establece que: *Para cualquier función integrable  $G$ , si se cumple que*

$$\int_a^b G \cdot \eta dx = 0$$

se cumple para cualquier función continua arbitraria  $\eta(x)$ , para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces se deduce que  $G = 0$  en  $(a, b)$ .

Ya que  $\delta u$  es arbitrario en  $(a, b)$  y  $\delta u(b)$  es arbitrario, la ecuación (2.70) implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) &= 0, & a < x < b \\ \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) &= 0, & x = b \end{aligned} \quad (2.71)$$

Las ecuaciones (2.71) se denominan ecuaciones de Euler-Lagrange. Nótese que las condiciones de contorno que forman parte de las ecuaciones de Euler-Lagrange siempre pertenecen a la clase de condiciones de contorno naturales.

## 2.4 Teoría clásica de placas

Una placa es un elemento estructural con dimensiones grandes en comparación con su espesor y que está sometido a cargas que provocan una deformación por flexión además de un estiramiento. Debido a la pequeñez del espesor, a menudo no es necesario modelarlos mediante ecuaciones de elasticidad en tres dimensiones. Se pueden desarrollar teorías simples de placas en dos dimensiones para estudiar la deformación y tensiones en las estructuras de placas.

### 2.4.1 Hipótesis de Kirchhoff

La forma específica del campo de desplazamientos de la teoría de placas está basada en la hipótesis de Kirchhoff que consiste en tres partes (ver figura 2.10) [2]

1. Las líneas rectas perpendiculares a la superficie media, llamadas normales transversales, permanecen rectas luego de la deformación.
2. Las normales transversales no sufren elongación, es decir, son inextensibles.
3. Las normales transversales rotan tal que permanecen perpendiculares a la superficie media luego de la deformación.

Con la finalidad de examinar las consecuencias de la hipótesis de Kirchhoff, se considera una placa de espesor uniforme  $h$ , y se escogerá el sistema de coordenadas de manera que el plano  $xy$  coincide con el plano medio de la placa y la coordenada  $z$  es tomada positiva hacia arriba. Si se denotan los desplazamientos de un punto, a lo largo de las coordenadas  $(x, y, z)$ , por  $(u, v, w)$ , entonces un punto material que ocupa la posición  $(x, y, z)$  en la placa

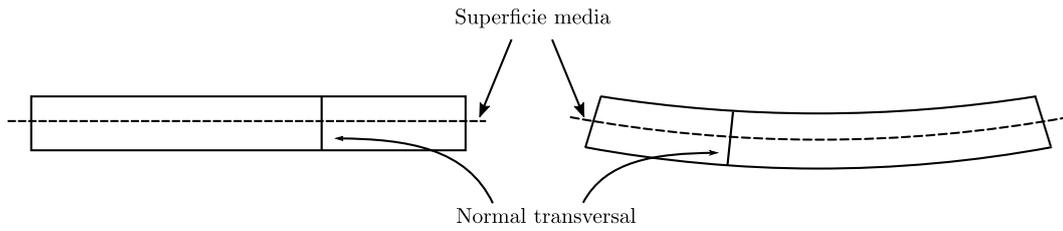


FIGURA N° 2.10: Normales transversales y superficie media antes y después de la deformación en una placa delgada.

no deformada se desplaza a la posición  $(x + u, y + v, z + w)$  en la placa deformada. La inextensibilidad de la normal transversal implica que la deformación normal del espesor es nula:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.72)$$

lo que implica que  $w$  es independiente de  $z$ .

La tercera suposición de la hipótesis de Kirchhoff implica que las deformaciones de corte transversales son nulas

$$\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.73)$$

Estas consecuencias de la hipótesis son medulares para obtener una expresión de la energía de deformación  $U$  en función a la deflexión de la placa en el siguiente capítulo.

## Capítulo III: Ecuaciones de movimiento y condiciones de contorno

Las ecuaciones de movimiento de un continuo pueden ser obtenidas usando las leyes de Newton, para esto se requiere un diagrama de cuerpo libre de un elemento de volumen de la estructura. Esta aproximación vectorial da una manera directa para deducir las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, no siempre es claro qué tipo de condiciones de contorno usar.

Otra manera de conseguir ecuaciones de movimiento es a través del principio de Hamilton, esta forma se conoce como aproximación energética. De esta aproximación, se toma en cuenta que el sistema dinámico es caracterizado por dos funciones de energía: energía cinética y energía potencial [2].

### 3.1 Densidad de energía de deformación

Un cuerpo de volumen  $V$  con área de superficie  $S$  es considerado en un equilibrio estático bajo la acción de la tracción  $\mathbf{T}$  que actúa en una superficie y fuerzas de cuerpo  $\mathbf{f}$  que actúan sobre el volumen. El estado de estrés resultante en el cuerpo es dado por  $\sigma$ , y los desplazamientos virtuales en la vecindad de un punto genérico son denotados por  $\delta\mathbf{u}$ .

Se asumirá que la energía de deformación  $U$  es igual al trabajo,  $W$ , hecho por las tracciones aplicadas  $\mathbf{T}$  y por las fuerzas de cuerpo  $\mathbf{f}$  durante la transformación de una configuración no deformada a una configuración deformada. El trabajo para un desplazamiento virtual es dado por

$$\int_V \delta\bar{W}dV = \int_V f_i\delta u_i dV + \oint_S T_i\delta u_i dS, \quad (3.1)$$

donde la barra denota cantidades por unidad de volumen y los subíndices indican las componentes de los vectores.

Tomando en cuenta que el desplazamiento es virtual, se tiene que  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ , entonces de la ecuación (2.51) se obtiene que  $f_i = -\partial_k\sigma_{ik}$ . En la segunda integral de la ecuación (3.1) las componentes de la tracción  $T_i$  pueden ser reemplazadas de (2.46) y vía el teorema

de divergencia, el trabajo para el desplazamiento virtual es

$$\begin{aligned}\int_V \delta \bar{W} dV &= \int_V [\partial_k (\sigma_{ik} \delta u_i) - \partial_k \sigma_{ik} \delta u_i] dV \\ &= \int_V \sigma_{ik} \delta (\partial_k u_i) dV.\end{aligned}\quad (3.2)$$

En (3.2), la expresión  $\partial_k u_i$  será escrita como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico <sup>1</sup>. Por lo tanto, debido a  $\sigma_{ij}$  es simétrico, solo la parte simétrica  $\partial_k u_i$  se mantiene. Además, la parte simétrica representa a los elemento de la matriz deformación escrita en (2.12). Así, el resultado (3.2) es reescrito como

$$\int_V \delta \bar{W} dV = \int_V \sigma_{ik} \delta \epsilon_{ik} dV. \quad (3.3)$$

El trabajo hecho en el cuerpo corresponde al cambio en la energía potencial  $U$  del sistema, de manera que  $\delta \bar{W} = \delta \bar{U}$ . Así, la densidad de energía potencial de deformación es definida por

$$\delta \bar{U} = \sigma_{ik} \delta \epsilon_{ik}. \quad (3.4)$$

La relación anterior se transforma en una diferencial exacta asumiendo que la energía potencial  $U$  es realmente una función del tensor deformación  $\epsilon_{ik}$ ; en ese caso

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ik}}. \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) es la relación fundamental entre la tensión y la deformación. Y ya que la función  $\bar{U}$  depende de los términos  $\epsilon_{ij}$ , el diferencial de  $\bar{U}$  es

$$d\bar{U} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{11}} d\epsilon_{11} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{22}} d\epsilon_{22} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{33}} d\epsilon_{33} + 2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{12}} d\epsilon_{12} + 2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{13}} d\epsilon_{13} + 2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{23}} d\epsilon_{23}, \quad (3.6)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de  $\epsilon_{ij}$ .

---

<sup>1</sup>El término  $\partial_k u_i$  es escrito como

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Por otro lado, es posible obtener la relación entre  $\sigma$  y  $\epsilon$  para un material lineal, isotrópico y homogéneo en su forma indicial (ver anexo 2):

$$\sigma_{ik} = \lambda \epsilon_{jj} \delta_{ik} + 2\mu \epsilon_{ik} \quad (3.7)$$

donde  $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$  y  $\lambda, \mu$  son conocidas como constantes de Lamé <sup>2</sup>.

De las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) es posible obtener  $d\bar{U}$  en función a las componentes de  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} d\bar{U} &= (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{11} + 2\mu \epsilon_{11}) d\epsilon_{11} + (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{22} + 2\mu \epsilon_{22}) d\epsilon_{22} + (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{33} + 2\mu \epsilon_{33}) d\epsilon_{33} \\ &\quad + (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{12} + 2\mu \epsilon_{12}) d\epsilon_{12} + (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{13} + 2\mu \epsilon_{13}) d\epsilon_{13} + (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{23} + 2\mu \epsilon_{23}) d\epsilon_{23} \\ &\quad + (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{21} + 2\mu \epsilon_{21}) d\epsilon_{21} + (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{31} + 2\mu \epsilon_{31}) d\epsilon_{31} + (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{32} + 2\mu \epsilon_{32}) d\epsilon_{32}, \\ &= \lambda \epsilon_{kk} d\epsilon_{11} + \lambda \epsilon_{kk} d\epsilon_{22} + \lambda \epsilon_{kk} d\epsilon_{33} + 2\mu \epsilon_{ij} d\epsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Al integrar esta expresión, se tiene

$$\bar{U} = \lambda \int \epsilon_{kk} d\epsilon_{ii} + 2\mu \int \epsilon_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (3.9)$$

de aquí, es posible obtener<sup>3</sup> la forma explícita de  $\bar{U}$  como función de las componentes de  $\epsilon$

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{jj} \epsilon_{ii} + \mu \epsilon_{ik} \epsilon_{ik}. \quad (3.11)$$

Ahora, multiplicando (3.5) por  $\epsilon_{ik}$  y sustituyendo (3.7), el resultado es como sigue

$$\epsilon_{ik} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ik}} = \lambda \epsilon_{jj} \epsilon_{ii} + 2\mu \epsilon_{ik} \epsilon_{ik}, \quad (3.12)$$

<sup>2</sup>En elasticidad lineal, los parámetros de Lamé son dos constantes elásticas que caracterizan completamente el comportamiento lineal de un sólido isotrópico en pequeñas deformaciones, estos dos parámetros son designados como:  $\lambda$ , conocida como el primer parámetro de Lamé y  $\mu$ , conocida como el módulo transversal de elasticidad

<sup>3</sup>La primera integral de la ecuación (3.9) puede ser hallada a partir de la siguiente relación

$$\begin{aligned} \int d(\epsilon_{kk} \epsilon_{ii}) &= \int \epsilon_{kk} d\epsilon_{ii} + \epsilon_{ii} d\epsilon_{kk} \\ \epsilon_{kk} \epsilon_{ii} &= 2 \int \epsilon_{kk} d\epsilon_{ii} \\ \int \epsilon_{kk} d\epsilon_{ii} &= \frac{1}{2} \epsilon_{kk} \epsilon_{ii} \end{aligned} \quad (3.10)$$

comparando la parte derecha de (3.12) con (3.11) se obtiene la siguiente relación

$$\epsilon_{ik} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ik}} = 2\bar{U}. \quad (3.13)$$

Finalmente, con ayuda de las ecuaciones (3.5) y (3.13), es sencillo obtener la densidad de la energía potencial debido a la tensión

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \epsilon_{ik}. \quad (3.14)$$

Podemos mostrar la consistencia entre la ecuación (3.14) y (3.5) partiendo de tomar la derivada de (3.14) respecto a  $\epsilon_{mn}$ :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{mn}} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{mn} + \epsilon_{ik} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \epsilon_{mn}} \right] \quad (3.15)$$

Escribiendo  $\frac{\partial}{\partial \epsilon_{mn}} = \delta_{im} \delta_{kn} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ik}}$ , tenemos:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{mn}} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{mn} + \epsilon_{ik} \left( \delta_{im} \delta_{kn} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \epsilon_{ik}} \right) \right], \quad (3.16)$$

de la relación entre  $\sigma$  y  $\epsilon$  mostrada en la ecuación (3.7), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{mn}} &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_{mn} + \epsilon_{ik} \delta_{im} \delta_{kn} \left( \lambda \frac{\partial (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})}{\partial \epsilon_{ik}} \delta_{ik} + 2\mu \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_{mn} + \epsilon_{ik} \delta_{im} \delta_{kn} (\lambda (\delta_{i1} \delta_{k1} + \delta_{i2} \delta_{k2} + \delta_{i3} \delta_{k3}) \delta_{ik} + 2\mu) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_{mn} + (\lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \delta_{mn} + 2\mu) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_{mn} + \underbrace{(\lambda \text{tr}(\epsilon) \delta_{mn})}_{\sigma_{mn}} + 2\mu \right] \\ &= \sigma_{mn} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Respecto a las constantes de Lamé, es necesario su relación con el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  mediante las siguientes ecuaciones (ver anexo 2)

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (3.18)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (3.19)$$

### 3.2 El principio de Hamilton aplicado a un cuerpo en coordenadas cartesianas

El principio de Hamilton establece que de todos los posibles caminos que una partícula podría recorrer desde su posición en el instante  $t_0$  a su posición en el instante  $t_1$ , el camino real, denotado por  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ , será aquel en el que la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (K - U + W_e) dt \quad (3.20)$$

es un extremo [2, 15]. Así, el principio de Hamilton es

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - U + W_e) dt = 0, \quad (3.21)$$

donde  $K$  es la energía cinética del sistema,  $U$  es la energía potencial y  $W_e$  es el trabajo hecho por las fuerzas externas sobre el sistema. El símbolo  $\delta$  es entendido en el sentido de cálculo de variaciones. Además, en esta aproximación, se asume que la variación del camino,  $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ , difiere del camino real,  $\mathbf{u}$  en cada instante excepto en  $t_0$  and  $t_1$ . De esta manera, una variación admisible  $\delta\mathbf{u}$  satisface la condición

$$\delta\mathbf{u}(x, t_0) = \delta\mathbf{u}(x, t_1) = 0, \quad \forall x. \quad (3.22)$$

Ahora, las variaciones de  $K$ ,  $U$  y  $W_e$  serán calculadas por separado con la finalidad de obtener una expresión para (3.21). Al considerar que el cuerpo tiene una densidad constante, se encuentra que la densidad de energía cinética  $\bar{K}$  es

$$\bar{K} = \frac{\rho}{2} \dot{u}_i \dot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.23)$$

donde el subíndice  $i$  denota una componente del vector  $\vec{u}$ . Por lo tanto, la variación de esta cantidad es

$$\delta\bar{K} = \rho \dot{u}_i \delta\dot{u}_i. \quad (3.24)$$

Luego, con la finalidad de obtener la componente cinética de la ecuación (3.21),  $\delta\bar{K}$  debe ser integrado entre los instantes  $[t_0, t_1]$  y en el volumen. Esto significa que se debe

encontrar la siguiente integral

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} K dt = \delta \int_V \int_{t_0}^{t_1} \bar{K} dt dV = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dt dV. \quad (3.25)$$

La integración por partes en el tiempo da

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} K dt = - \int_V \int_{t_0}^{t_1} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dt dV, \quad (3.26)$$

donde se han usado las condiciones (3.22).

Para la energía potencial, se encontró la variación  $\delta \bar{U}$  en (3.4), y usando (2.12) para el factor  $\delta \epsilon_{ij}$ , la siguiente integral es obtenida

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \bar{U} dV dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}} (\delta \partial_j u_i + \delta \partial_i u_j) dV dt, \quad (3.27)$$

La última expresión será integrada por partes en el volumen, estableciendo  $a = \partial \bar{U} / \partial \epsilon_{ij}$  y  $db = (\delta \partial_j u_i + \delta \partial_i u_j) dV$ . Para  $b$ , el teorema de Gauss da

$$b = \oint_{\Omega} (\delta u_i n_j + \delta u_j n_i) d\Omega,$$

donde  $\Omega$  es la superficie. Por lo tanto, la ecuación (3.27) se vuelve

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \bar{U} dV dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \oint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}} \delta u_i n_j + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}} \delta u_j n_i \right) d\Omega - \int_V \left[ \partial_j \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \delta u_i + \partial_i \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \delta u_j \right] dV \right\} dt. \quad (3.28)$$

Con el fin de reducir (3.28), en los segundos términos de las integrales de superficie y volumen, se intercambian los índices  $i$  y  $j$  aprovechando la naturaleza simétrica de  $\sigma_{ij}$ . Luego, con ayuda de (3.5) se obtiene

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \bar{U} dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \oint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_i n_j d\Omega - \int_V \partial_j \sigma_{ij} \delta u_i dV \right) dt. \quad (3.29)$$

La última variación a calcular es el trabajo externo. Esto es hecho considerando la

ecuación (3.1)

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \delta \bar{W}_e dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V f_i \delta u_i dV + \oint_{\Omega} t_i \delta u_i d\Omega dt. \quad (3.30)$$

Finalmente, reemplazando (3.26), (3.29) y (3.30) en el principio de Hamilton dado en la ecuación (3.21), se obtiene la siguiente relación

$$\left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_V [-\rho \ddot{u}_i + f_i + \partial_j \sigma_{ij}] dV dt - \int_{t_0}^{t_1} \oint_{\Omega} [\sigma_{ij} n_j - t_i] d\Omega dt \right\} \delta u_i = 0, \quad (3.31)$$

donde se puede observar que

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \partial_j \sigma_{ij}, \quad (3.32)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i. \quad (3.33)$$

La ecuación (3.32), proveniente de la integral en volumen es la ecuación de movimiento del cuerpo y la ecuación (3.33), proveniente de la integral de superficie representa las condiciones de contorno. Es decir, el método variacional permite determinar simultáneamente las ecuaciones necesarias para analizar la dinámica de un cuerpo sólido.

### 3.3 Deflecciones pequeñas en placas rectangulares

Como un ejemplo de la sección previa, se va a determinar la dinámica que consiste en vibraciones flexurales, sin movimiento en el plano, de una placa rectangular. Considere una placa que ocupa una porción del espacio  $V$ , compuesta de una superficie rectangular  $S$  con espesor  $h$ , es decir  $V = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [-h/2, h/2]$ , donde  $h \ll L_x$ ,  $h \ll L_y$ , y una superficie neutral en  $z = 0$ .

Debido a que la deflexión es  $w$ , la energía cinética es expresada fácilmente como

$$K = \frac{\rho h}{2} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\dot{w})^2 dx dy. \quad (3.34)$$

Por lo tanto, se deduce que  $\delta K \sim \delta \dot{w}$ . Esta expresión debe ser integrada en el tiempo con la finalidad de sustituirla en (3.21). La integración por partes de la última integral deja

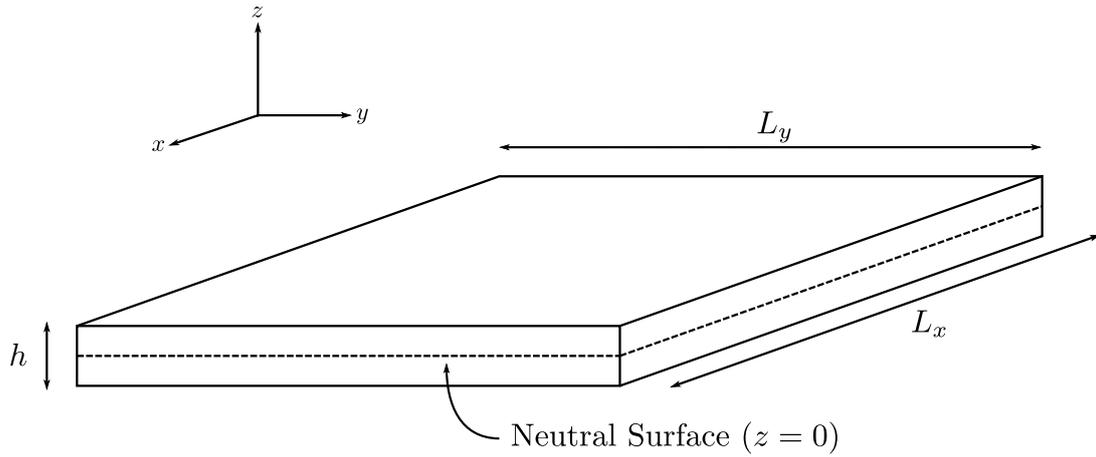


FIGURA N° 3.1: Placa delgada de volumen  $V = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [-h/2, h/2]$ , de espesor  $h$  y con superficie media en  $z = 0$

fuera la derivada temporal de  $\dot{w}$  dando el siguiente resultado

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = -\rho h \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt dx dy. \quad (3.35)$$

Similar a la energía cinética, es necesario expresar  $\bar{U}$  como una función de  $w(x, y)$ . Para alcanzar tal objetivo se debe tener en cuenta las hipótesis de la teoría de placas de Kirchhoff y sus consecuencias [2]

$$\epsilon_{zz} = 0, \quad \epsilon_{xz} = 0, \quad \epsilon_{yz} = 0. \quad (3.36)$$

Sin embargo, de acuerdo a la *formulación bidimensional de la tensión plana* [2, 3, 13], veremos más adelante que  $\epsilon_{zz}$  no necesariamente se anula para todo el plano  $xy$ .

De (2.12) y (3.36) es posible obtener

$$\begin{aligned} \epsilon_{zx} = 0 &= \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}), \\ \epsilon_{zy} = 0 &= \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde  $u_{,z} = \partial u / \partial z$ .

Resolviendo las ecuaciones (3.37), se obtienen las relaciones  $u = -zw_{,x}$  y  $v = -zw_{,y}$ .

Nuevamente, de (2.12) se puede obtener  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{xy}$

$$\epsilon_{xx} = -zw_{,xx}; \quad \epsilon_{yy} = -zw_{,yy}; \quad \epsilon_{xy} = -zw_{,xy}. \quad (3.38)$$

Otras relaciones necesarias para el desarrollo de esta sección son las relaciones tensión-deformación, tales relaciones están dadas por:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll} \delta_{ik} \right), \quad (3.39)$$

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ik} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ik}], \quad (3.40)$$

donde  $\epsilon_{ll} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ ,  $\sigma_{ll} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ,  $\nu$  es la constante de Poisson y  $E$  es el módulo de Young [2].

La deflexión vertical  $w$  es función de las dos coordenadas espaciales  $x$  e  $y$ , por lo tanto  $w \equiv w(x, y)$ . La placa es delgada y la amplitud de las ondas de flexión que se desarrollan en la superficie es pequeña en comparación con el espesor. Por tanto, se aplican fuerzas relativamente pequeñas a la superficie de la placa para doblarla. Estas fuerzas tienen una magnitud considerablemente menor que las tensiones que se desarrollan en la placa, por lo que pueden despreciarse en el término límite de la ecuación (2.46) [15]. Por lo tanto:

$$\sigma_{ik}n_k = 0. \quad (3.41)$$

La placa está sólo ligeramente doblada, por lo tanto  $n_k = n_z$  en toda la superficie, en consecuencia

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0. \quad (3.42)$$

Mientras que las otras componentes de la tensión son funciones de  $x$  e  $y$ :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y), \quad (3.43)$$

Esta aproximación es hecha basada en la *formulación bidimensional de la tensión plana* [2, 3, 13].

La componente de deformación  $\epsilon_{zz}$  es deducida fácilmente de igualar a cero la ecua-

ción de  $\sigma_{zz}$  en (3.39), y usando las componentes de deformación (3.38). Por lo tanto

$$\epsilon_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} z(w_{,xx} + w_{,yy}). \quad (3.44)$$

Ya que, de acuerdo a esta formulación, hay tensión en el plano  $xy$ , en general la deformación  $\epsilon_{zz}$  no se anula [3, 13, 15].

Además, para la energía potencial  $U$ , la sumatoria (3.14) tiene términos nulos debido a la teoría de placas de Kirchhoff. En consecuencia

$$\bar{U} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{xy}\epsilon_{xy} + \sigma_{yx}\epsilon_{yx}). \quad (3.45)$$

Luego, usamos la ecuación (3.39) y se consigue

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \left[ \left( \epsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll} \right) \epsilon_{xx} + \left( \epsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll} \right) \epsilon_{yy} + 2\epsilon_{xy}^2 \right]. \quad (3.46)$$

Al reordenar los términos y teniendo en cuenta que  $\epsilon_{ll} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ , resulta:

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \left\{ \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + 2\epsilon_{xy}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[ \frac{(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})}{(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 + \epsilon_{zz}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})} \right] \right\}, \quad (3.47)$$

luego, de (3.38), (3.42) y (3.44), se tiene

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} z^2 \left\{ w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2w_{,xy}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[ \frac{(w_{,xx} + w_{,yy})^2}{(\Delta w)^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{(w_{,xx} + w_{,yy})^2}{(\Delta w)^2} \right] \right\}, \quad (3.48)$$

al interior de los corchetes se suma y resta el término  $2w_{,xx}w_{,yy}$  para obtener

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} z^2 \left\{ (\Delta w)^2 + 2w_{,xy}^2 - 2w_{,xx}w_{,yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\Delta w)^2 \right\}, \quad (3.49)$$

y finalmente,

$$\bar{U} = \frac{E}{1+\nu} z^2 \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} (\Delta w)^2 + w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} \right\}. \quad (3.50)$$

donde  $\Delta$  es el operador Laplaciano en dos dimensiones.

De la densidad de energía potencial,  $\bar{U}$ , obtenida en (3.50), se puede obtener la energía potencial integrando en el elemento de volumen  $dV = dx dy dz$ . Definiendo la constante

de rigidez  $D \equiv Eh^3/12(1-\nu^2)$ , resulta

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \{(\Delta w)^2 + 2(1-\nu) [(w_{,xy})^2 - w_{,xx}w_{,yy}]\} dx dy. \quad (3.51)$$

Con la finalidad de reemplazar la expresión obtenida en (3.51) en (3.21), se debe calcular la variación de  $U$ :

$$\delta U = D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \{(\Delta w)\delta(\Delta w) + (1-\nu) [2w_{,xy}\delta w_{,xy} - w_{,xx}\delta w_{,yy} - w_{,yy}\delta w_{,xx}]\} dx dy, \quad (3.52)$$

luego, se debe expandir esta integral.

Tomando en cuenta que  $\Delta w = w_{,xx} + w_{,yy}$ , el primer término en (3.52) se expresa como sigue:

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\Delta w)\delta(\Delta w) = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (w_{,xx}\delta w_{,xx} + w_{,yy}\delta w_{,yy} + w_{,xx}\delta w_{,yy} + w_{,yy}\delta w_{,xx}) dx dy \quad (3.53)$$

reemplazando (3.53) en (3.52), se obtiene

$$\delta U = D \left[ \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xx}\delta w_{,xx} dx dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yy}\delta w_{,yy} dx dy + \nu \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xx}\delta w_{,yy} dx dy + \nu \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yy}\delta w_{,xx} dx dy + 2(1-\nu) \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xy}\delta w_{,xy} dx dy \right]. \quad (3.54)$$

En la variacional (3.54), todas las integrales son  $\sim \delta w_{,xx}$ . Con el objetivo de obtener la ecuación de movimiento y las condiciones de contorno, se debe obtener  $\delta U$  proporcional a  $\delta w$ ,  $\delta w_{,x}$  y  $\delta w_{,y}$ . Esto es posible via integración por partes (ver anexo 6) obteniendo la siguiente expresión:

$$\delta U = D \left\{ \int_0^{L_y} [(w_{,xx} + \nu w_{,yy})\delta w_{,x}]_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} [(w_{,xxx} + (2-\nu)w_{,xyy})\delta w]_0^{L_x} dy + \int_0^{L_x} [(w_{,yy} + \nu w_{,xx})\delta w_{,y}]_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} [(w_{,yyy} + (2-\nu)w_{,xxy})\delta w]_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \Delta^2 w \delta w dx dy + 2(1-\nu) w_{,xy}\delta w|_{\text{esquinas}} \right\}, \quad (3.55)$$

donde  $\Delta^2 w = w_{,xxxx} + w_{,yyyy} + 2w_{,xxyy}$ , y el operador diferencial  $\Delta^2$  es conocido como ope-

rador biarmónico.

Finalmente, sustituyendo (3.35) y (3.55) en (3.21) evitando fuerzas externas, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (D\Delta\Delta w - \rho h \ddot{w}) \delta w dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{L_x} [(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,y}]_0^{L_y} dx \right. \\
& - \int_0^{L_x} [(w_{,yyy} + (2-\nu)w_{,xxy}) \delta w]_0^{L_y} dx + \int_0^{L_y} [(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,x}]_0^{L_x} dy \\
& \left. - \int_0^{L_y} [(w_{,xxx} + (2-\nu)w_{,xyy}) \delta w]_0^{L_x} dy + 2(1-\nu) w_{,xy} \delta w|_{\text{esquinas}} \right\} dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Aquí, del principio de Hamilton se deduce que la integral se divide entre una integral de superficie y las integrales de frontera; es decir, parte de la energía potencial contribuye a las fuerzas de inercia que aparecen en la ecuación de movimiento, y la otra parte tiene que ser compensada por las condiciones de frontera, por lo que desaparece a lo largo del contorno [15]. Además, debido a que las evaluaciones hechas en las integrales (3.56) son a lo largo de solo una variable, no se puede afirmar que las variaciones  $\delta w$ ,  $\delta w_{,x}$  y  $\delta w_{,y}$  sean nulas para tales evaluaciones, permaneciendo arbitrarias. Por lo tanto, los términos restantes en esas integrales deben ser nulos. Así, los resultados se pueden resumir de la siguiente manera

- Ecuación de movimiento

$$\rho h \ddot{w} = -D\Delta\Delta w \tag{3.57}$$

- Condiciones de contorno

$$w_{,nnn} + (2-\nu)w_{,ntt} = 0, \tag{3.58}$$

$$w_{,nn} + \nu w_{,tt} = 0, \tag{3.59}$$

$$w_{,nt} = 0, \tag{3.60}$$

donde  $\{n, t\} = \{x, y\}$ . Las ecuaciones (3.58) y (3.59) son válidos para los lados de la placa rectangular y la última ecuación (3.58) es válida para las esquinas.

### 3.4 Deflecciones pequeñas en placas delgadas circulares

Como segundo ejemplo, la técnica será usada para desarrollar la ecuación de movimiento y la consición de contorno para una placa circular. El primer paso es determinar la energía cinética y sus variaciones en coordenadas polares. Esto es sencillo mediante transformaciones de coordenadas de (3.35).

La variacional de la energía cinética es

$$\delta K = \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R \dot{w} \delta \dot{w} r dr d\theta \quad (3.61)$$

integrando en el tiempo, resulta

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \int_{t_1}^{t_2} \dot{w} \delta \dot{w} dt \right) r dr d\theta \quad (3.62)$$

para la integración por partes, se escoge:

$$\begin{aligned} a = \dot{w} &\quad \rightarrow \quad da = \ddot{w} dt \\ db = \delta \dot{w} dt &\quad \rightarrow \quad b = \delta w \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \underbrace{\dot{w} \delta w}_{0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt \right) r dr d\theta \quad (3.63)$$

reordenando los términos y simplificando resulta

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = -\rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt r dr d\theta, \quad (3.64)$$

donde  $w = w(r, \theta)$  y el vector deformación es denotado por  $u = (u_r, u_\theta, w)$ .

Para el cálculo de la variación de la energía potencial, la expresión (3.14) será generalizada para cualquier geometría

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma \cdot \epsilon), \quad (3.65)$$

donde las matrices de tensión y de deformación se denotan en coordenadas polares como sigue

$$\sigma \cdot \epsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta z} \\ \epsilon_{zr} & \epsilon_{z\theta} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

De la teoría de placas de Kirchhoff, revisada en la sección 2.4 y de las relaciones tensión-deformación, (3.39) y (3.40), se obtiene que [3]

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0. \quad (3.67)$$

Como en el caso del caso rectangular, también tendremos en cuenta que debido a la *formulación bidimensional de la tensión plana* [2, 3, 13], en general  $\sigma_{zz}$  no se anula.

Por lo tanto, reemplazando (3.67) en (3.65), la densidad de energía de deformación se obtiene en términos de las componentes de las matrices de deformación y de tensión

$$\bar{U} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr}\epsilon_{rr} + 2\sigma_{r\theta}\epsilon_{\theta r} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta}). \quad (3.68)$$

Las relaciones tensión-deformación dadas en las ecuaciones (3.39) y (3.40), se usarán nuevamente en esta sección. Así, los términos  $\epsilon_{zr}, \epsilon_{z\theta}$ , se obtendrán de (3.40):

$$\epsilon_{zr} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{zr}] = 0, \quad (3.69)$$

$$\epsilon_{z\theta} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{z\theta}] = 0. \quad (3.70)$$

Ahora el siguiente paso es obtener los elementos de la matriz de tensiones en términos de la deformación vertical  $w(r, \theta)$ . El término  $u_r$  se obtendrá de la forma general de  $\sigma_{zr}$  en (2.30), por supuesto tomando en cuenta la condición (3.69). De manera similar, la componente de deformación  $u_\theta$  se obtendrá reemplazando la condición (3.70) en la forma general de  $\sigma_{z\theta}$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial x_3} &= -\frac{\partial u_3}{\partial r} \\ u_r &= -z \frac{\partial w}{\partial r}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \\ u_\theta &= -\frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

Con (3.71) y (3.72) es posible obtener todos los elementos de la matriz de deformaciones con excepción de  $\epsilon_{zz}$ . Con la finalidad de obtener  $\epsilon_{zz}$ , la condición  $\sigma_{zz} = 0$  se reemplaza en (3.39). En consecuencia

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right).\tag{3.73}$$

Con las ecuaciones (3.71)-(3.73), es posible calcular todos los elementos que se necesitan para reemplazarlos en la ecuación de la densidad de energía potencial, (3.68), con ayuda de la relación tensión-deformación. Luego, integrando en el volumen de la placa, la energía potencial tiene la siguiente forma:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta} - \frac{1}{r} w_{,r\theta} \right)^2 - w_{,rr} \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) \right] \right\} r dr d\theta,\tag{3.74}$$

donde  $\Delta w$  está dado en coordenadas polares como

$$\Delta w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}.\tag{3.75}$$

La variación  $\delta U$  puede ser determinada de (3.4), a partir de aquí debe ser reducida con la finalidad de obtener una expresión proporcional a  $\delta w$ ,  $\delta w_{,r}$ , y  $\delta w_{,\theta}$ . Esto último se desarrolla por integración por partes (ver anexo 7). Así, el resultado final tiene la siguiente

forma

$$\delta U =$$

$$\begin{aligned}
& 2(1-\nu) \left( -\frac{1}{r^2} w_{,\theta} \delta w + \frac{1}{r} w_{,r\theta} \delta w \right) \Big|_0^R \Big|_0^{2\pi} \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{\left( w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta\theta\theta} + \frac{2}{r^2} w_{,rr\theta\theta} + \frac{4}{r^4} w_{,\theta\theta} - \frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta r} \right)}_{\Delta^2 w} \\
& \times \delta w r dr d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \left[ \left( (r w_{,rr} + \nu w_{,r} + \frac{\nu}{r} w_{,\theta\theta}) \delta w_{,r} \right) \Big|_0^R \right. \\
& \quad \left. + \left( (-r w_{,rrr} - w_{,rr} + \frac{3-\nu}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{\nu-2}{r} w_{,r\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r}) \delta w \right) \Big|_0^R \right] d\theta \\
& + \int_0^R \left[ \left( \left( \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} + \frac{\nu}{r} w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) \delta w_{,\theta} \right) \Big|_0^{2\pi} \right. \\
& \quad \left. + \left( \left( -\frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta\theta} + \frac{2(1-\nu)}{r} w_{,rr\theta} + \frac{1-2\nu}{r^2} w_{,r\theta} + \frac{2\nu-2}{r^3} w_{,\theta} \right) \delta w \right) \Big|_0^{2\pi} \right] dr.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Finalmente, las dos variaciones, (3.64) y (3.185), deben ser reemplazadas en (3.21) obteniendo así:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^R (D\Delta^2 w + \rho h \ddot{w}) \delta w r dr d\theta \right. \\
& + D \int_0^{2\pi} \left[ \left( (r w_{,rr} + \nu w_{,r} + \frac{\nu}{r} w_{,\theta\theta}) \delta w_{,r} \right) \Big|_0^R \right. \\
& \quad \left. + \left( (-r w_{,rrr} - w_{,rr} + \frac{3-\nu}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{\nu-2}{r} w_{,r\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r}) \delta w \right) \Big|_0^R \right] d\theta \\
& + D \int_0^R \left[ \left( \left( \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) \delta w_{,\theta} \right) \Big|_0^{2\pi} \right. \\
& \quad \left. + \left( \left( -\frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta\theta} + \frac{2(1-\nu)}{r} w_{,rr\theta} + \frac{1-2\nu}{r^2} w_{,r\theta} + \frac{2\nu-2}{r^3} w_{,\theta} \right) \delta w \right) \Big|_0^{2\pi} \right] dr \\
& \left. 2D(1-\nu) \left( -\frac{1}{r^2} w_{,\theta} \delta w + \frac{1}{r} w_{,r\theta} \delta w \right) \Big|_0^{R,2\pi} \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

En la ecuación (3.77), la ecuación de movimiento es obtenida de la integral de superficie:

$$\rho h \ddot{w} = -D\Delta^2 w \tag{3.78}$$

Mientras que las condiciones de contorno son obtenidas de las integrales de línea en  $\theta$  cuyos integrandos son evaluados en el borde de la placa circular, es decir, cuando  $r = R$ .

$$-D \left( w_{,rrr} + \frac{\nu}{r} w_{,rr} + \frac{\nu}{r^2} w_{,\theta\theta} \right)_R = 0 \quad (3.79)$$

$$-D \left( w_{,rrr} + \frac{1}{r} w_{,rr} + \frac{3-\nu}{r^3} w_{,\theta\theta} + \frac{\nu-2}{r^2} w_{,r\theta\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,r} \right)_R = 0 \quad (3.80)$$

Por otro lado, respecto a las segunda y tercera línea de la ecuación (3.77), podemos afirmar que cuando los integrandos se evalúan en  $r = 0$ , debido a la singularidad los términos  $w_{,\theta\theta}(r = 0, \theta)$ ,  $w_{,r\theta\theta}(r = 0, \theta)$ ,  $w_{,r}(r = 0, \theta)$  se anulan, así como el término  $r w_{,rrr}$ , de manera que todos los términos al interior de los paréntesis evaluados en  $r = 0$  se anulan. Finalmente, en las tres últimas líneas de la ecuación (3.77) vemos que los términos evaluados en 0 y  $2\pi$  se anulan ya que la función está siendo evaluada en el mismo punto.

## Conclusiones

En este trabajo se han revisado las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno para pequeñas oscilaciones en un sólido elástico mediante el cálculo variacional. En particular, se ha aplicado a los casos de las oscilaciones transversales en placas delgadas con geometría rectangular y circular con un cálculo detallado y esclarecido que rara vez se encuentra en la literatura actual.

En el capítulo II, se ha hecho una revisión de los elementos de dinámica continua, como la tensión y la deformación. Para el caso de un elemento infinitesimal que sólo sufre deformación, pero no rotaciones, se encontró que dicha deformación puede ser caracterizada por una matriz de deformación simétrica. Asimismo, para cuantificar la distribución de las fuerzas internas se definió el vector de tracción, el cual está relacionado, mediante la fórmula de Cauchy, con una matriz simétrica denominada matriz de tensiones. La fórmula de Cauchy indica que cada componente de la tracción puede ser expresada como una combinación lineal de componentes de tensión particulares. Además de los elementos de la dinámica continua, se hizo una pequeña revisión del formalismo de Hamilton y las ecuaciones de Euler–Lagrange, así se pudo evidenciar que este método permite obtener las condiciones de contorno de acuerdo a las ecuaciones (2.71). Por último, se estudió la teoría clásica de placas basada en la hipótesis de Kirchhoff cuyas implicaciones han sido importantes para analizar las placas delgadas concernientes a este trabajo.

La revisión también se centró en la interpretación de las magnitudes de tensión y deformación y sus propiedades matemáticas. Este esfuerzo fue útil para obtener la energía potencial del sólido, así como para el cálculo del trabajo virtual. A efectos de las aplicaciones, se obtuvieron explícitamente sus expresiones en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

En la sección 3.2 se obtuvo el mecanismo para obtener, simultáneamente, las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno para cualquier sólido tridimensional. El algoritmo consiste en determinar la energía potencial a través del trabajo virtual debido a los desplazamientos infinitesimales. Luego, el principio de Hamilton permite obtener las

ecuaciones de movimiento a través del teorema de Gauss para obtener las integrales proporcionales a  $\delta u_i$ . Cabe señalar que las ecuaciones (3.32) y (3.33), están acopladas con respecto a los desplazamientos de deformación a través de las relaciones tensión-deformación.

Finalmente, en las secciones 3.3 y 3.4 se muestra la aplicación del algoritmo al problema bidimensional de placas delgadas rectangulares y circulares, respectivamente. En estos casos particulares, la dificultad se encuentra en obtener la variacional de la energía potencial, cuyo cálculo se simplifica con ayuda de la teoría de placas desarrollada por Kirchhoff. En ambos casos, las variaciones de las energías se reducen hasta factores proporcionales a  $w_i$  y  $w_{,i}$ . Es interesante observar que en ambos casos, el desplazamiento vertical  $w$  puede considerarse como un campo en el espacio bidimensional de coordenadas  $x$  e  $y$ . Estas últimas puede servir de guía para obtener estas ecuaciones a partir de el caso general tridimensional representado en (3.32) y (3.33). Finalmente, luego de aplicar el método variacional, se obtienen simultáneamente las ecuaciones de movimiento (3.57) y (3.78), y las condiciones de contorno (3.58), (3.59), (3.60), (3.79) y (3.80) para las placas delgadas rectangular y circular. Las condiciones de contorno para el caso de la placa rectangular son las condiciones obtenidas en [15].

## Recomendaciones

Se observa que luego de obtener las ecuaciones para un sólido tridimensional, se ha aplicado nuevamente el proceso para el caso bidimensional, de aquí aparece una nueva cuestión ¿cómo desarrollar el paso al límite de un sólido tridimensional a uno bidimensional?

Por otra parte, las condiciones de contorno y la ecuación de movimiento estudiadas corresponden a una placa, ya sea rectangular o circular, de bordes libres. Así, surge la pregunta ¿cómo serían las ecuaciones y las condiciones de frontera para una placa con soporte simple, sujeta u otro tipo de condición en los bordes? para responder a esta pregunta se sugiere introducir multiplicadores de Lagrange.

## Referencias Bibliográficas

- [1] Karl F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, DOVER PUBLICATIONS, INC, New York, (1975).
- [2] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, CRC Press, (2006).
- [3] Martin. H. Saad, *Elasticity: Theory, Aplications and Numerics*, Academic Press, (2021).
- [4] M. J. Gander, F. Kwok, *Chladni Figures and the Tacoma Bridge: Motivating PDE Eigenvalue Problems via Vibrating Plates*. SIAM Review 54(3), (2012).
- [5] M. J. Gander, G. Wanner, *From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing*, SIAM Review 54(4), (2012).
- [6] Robert t. Beyer, *Treatise on Acoustics: The First Comprehensive English Translation of E.F.F Chladni's Traité d'Acoustique*, ASA Press Springer, (2008).
- [7] J. W. Strutt, *The Theory of Sound*, Macmillan, (1945).
- [8] R. S. dos Santos, P. S. Filho, Z. F. Rocha, *Descobertas sobre a teoria do som: a história dos padrões de Chladni e sua contribuição para o campo da acústica*, Rev. Bras. Ensino Fís. 40(2), (2018).
- [9] H. Z. Gu, X. W. Wang, *ON THE FREE VIBRATION ANALYSIS OF CIRCULAR PLATES WITH STEPPED THICKNESS OVER A CONCENTRIC REGION BY THE DIFFERENTIAL QUADRATURE ELEMENT METHOD*, Journal of Sound and Vibration 202(3), (1997).
- [10] T. Y. Wu, Y. Y. Wang, G. R. Liu, *Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule*, Elsevier 291(46), (2002).
- [11] H. T. Saliba, *Free Vibration Analysis of Rectangular Cantilever Plates with Symmetrically Distributed Point Supports Along the Edges*, Elsevier 94(3), (1984).
- [12] H. S. Yalcin, A. Arikoglu, I. Ozkol, *Free vibration analysis of circular plates by differential transformation method*, Elsevier 212(2), (2009).

- [13] A.P.S.Selvadurai, *Partial Differential Equations in Mechanics 2. The Biharmonic Equation. Poisson's Equation*, Springer, (2000).
- [14] H. Golstein, *Mecánica Clásica*, Editorial Reverté S.A, (1994).
- [15] Michele Ducceschi, *Nonlinear Vibrations of Thin Rectangular Plates. A Numerical Investigation with Application to Wave Turbulence and Sound Synthesis*, ENSTA Paris-Tech, (2014).

## ANEXOS

Anexo 1: Matriz Rotación . . . . .	1
Anexo 2: Simetría de la matriz elasticidad y constantes de Lamé . . . . .	3
Anexo 3: Transformación del tensor de deformaciones . . . . .	6
Anexo 4: Transformación del tensor de tensiones . . . . .	8
Anexo 5: Cálculo de los elementos de la matriz de deformaciones . . . . .	9
Anexo 6: Variacional de la energía potencial en coordenadas cartesianas . . . . .	17
Anexo 7: Variacional de la energía potencial en coordenadas polares . . . . .	21

## Anexo 1: Matriz Rotación

La matriz simétrica expresada explícitamente es

$$\omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Para entender el significado de esta matriz, se debe recordar definir un vector dual<sup>4</sup> del tensor (3.81):

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{jk}, \quad (3.82)$$

usando esta definición se encuentra

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} (\epsilon_{123} \omega_{23} + \epsilon_{132} \omega_{32}) = -\epsilon_{132} \omega_{32}, \quad (3.83)$$

al intercambiar los índices 2 y 3 de  $\epsilon$  en la última igualdad, se obtiene

$$\omega_1 = \omega_{32} \quad (3.84)$$

de la misma manera se pueden obtener los vectores duales  $\omega_2$  y  $\omega_3$

$$\omega_2 = \omega_{13} \quad (3.85)$$

$$\omega_3 = \omega_{21} \quad (3.86)$$

De (3.81), (3.84), (3.85) y (3.86) se obtiene

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.87)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.88)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.89)$$

<sup>4</sup>Se define al vector dual  $a_i$  de un tensor de segundo orden  $a_{ij}$  como:

$$a_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} a_{jk}$$

De estas tres ecuaciones se puede reconocer que  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  y  $2\omega_3$  son componentes del rotacional del vector desplazamiento  $\mathbf{u}$ , es decir

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.90)$$

Los elementos del tensor antisimétrico representan la rotación de cuerpo rígido de los elementos del material.

## Anexo 2: Simetría de la matriz elasticidad y constantes de Lamé

Las restricciones que se impondrán a la matriz de elasticidad  $C$  definida por (2.57) se definen en virtud de la energía de deformación almacenada en un material elástico lineal.

Expandiendo la ecuación (3.5) y usando la relación (2.57), se tiene

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{xx}} = c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} + c_{13}\epsilon_{zz} + c_{14}\epsilon_{xy} + \dots + c_{16}\epsilon_{xz} \\
 \sigma_{yy} &= \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{yy}} = c_{21}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} + c_{23}\epsilon_{zz} + c_{24}\epsilon_{xy} + \dots + c_{26}\epsilon_{xz} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \sigma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{xz}} = c_{61}\epsilon_{xx} + c_{62}\epsilon_{yy} + c_{63}\epsilon_{zz} + c_{64}\epsilon_{xy} + \dots + c_{66}\epsilon_{xz}
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Ya que  $U$  es una función continuamente diferenciable, se puede tomar el diferencial de (3.91) para obtener

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{yy} \partial \epsilon_{xx}} &= c_{12}; & \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{xx} \partial \epsilon_{yy}} &= c_{21} \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{zz} \partial \epsilon_{xx}} &= c_{13}; & \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{xx} \partial \epsilon_{zz}} &= c_{31} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{xz} \partial \epsilon_{yy}} &= c_{26}; & \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{yy} \partial \epsilon_{xz}} &= c_{62}
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Y debido a que las diferenciaciones en (3.92) conmutan, se puede afirmar que la matriz de elasticidad  $C$  es simétrica

$$C = C^T \quad \text{o equivalentemente} \quad c_{ij} = c_{ji}. \tag{3.93}$$

Esto reduce el número de constantes elásticas independientes de 36 a 21. Esta matriz caracteriza al material elástico anisotrópico [13].

Para un material isotrópico y homogéneo, la forma de la matriz elasticidad debe ser independiente de la orientación del sistema coordenado de referencia. Así, la matriz se reduce a

$$C = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé. Para materiales linealmente elásticos  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes en todos los puntos en el medio [2, 3]. Sustituyendo (3.94) en (2.57), se observa que para  $\sigma_{11}$  se obtiene

$$\sigma_{11} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\mu\epsilon_{11}. \quad (3.95)$$

Para las otras componentes de  $\sigma$  se puede encontrar relaciones similares a (3.95) y se pueden escribir como

$$\sigma = \lambda \nabla \cdot u I + 2\mu \epsilon, \quad (3.96)$$

donde

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \text{traza } \epsilon. \quad (3.97)$$

Podemos escribir la ecuación (3.96) en su forma indicial

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\epsilon_{ij})\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (3.98)$$

De aquí

$$\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda \text{tr}(\epsilon_{ij})\delta_{ij}}{2\mu} \quad (3.99)$$

Tomando la traza en la ecuación (3.98):

$$\text{tr}(\epsilon_{ij}) = \frac{\text{tr}(\sigma_{ij})}{(3\lambda + 2\mu)} \quad (3.100)$$

Sustituyendo (3.100) en (3.99):

$$\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \text{tr}(\sigma_{ij}) \quad (3.101)$$

Además, limitándonos al caso en el que el cuerpo está sujeto a una tensión en una sola dirección (tensión simple), tendremos que el estado de tensión está dado por [2, 3, 13]

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

Sustituyendo (3.102) en (3.101), tenemos

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \begin{pmatrix} 2(\lambda+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

Para el caso de tensión simple, usando la ecuación (3.98) y (3.102), se obtiene [3, 13]:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

Comparando (3.104) con (3.104):

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (3.105)$$

### Anexo 3: Transformación del tensor de deformaciones

Dado que las  $\epsilon_{ij}$  son componentes de un tensor de segundo orden, se puede aplicar la teoría de la transformación

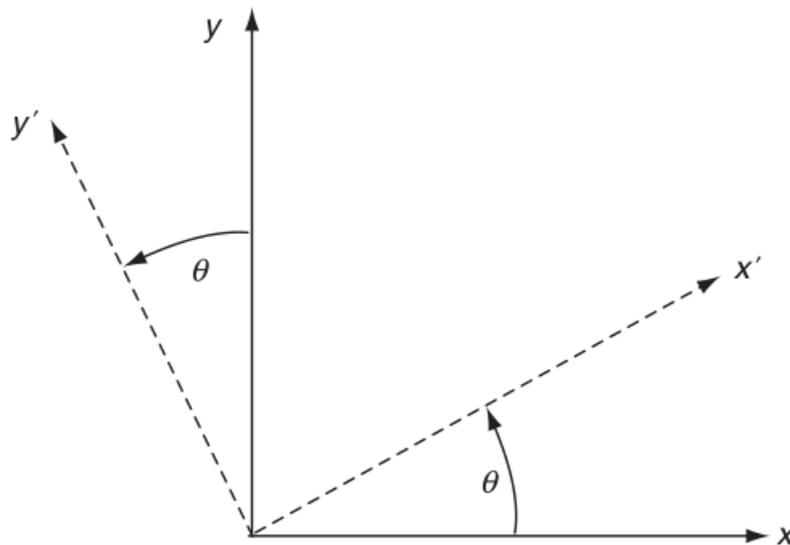
$$\epsilon'_{ij} = Q_{ip}Q_{jq}\epsilon_{pq} \quad (3.106)$$

Así, dada la deformación en un sistema coordinado, se pueden determinar las nuevas componentes en cualquier otro sistema rotado. Para el caso tridimensional, la matriz rotación se define por

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

Para el caso bidimensional, mostrado en la figura 3.2, la matriz de transformación se puede expresar como

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.108)$$



Transformación rotacional bidimensional.

Bajo esta transformación, las componentes de deformación en el plano se transforman según

$$\begin{aligned}e'_x &= e_x \cos^2 \theta + e_y \sin^2 \theta + 2e_{xy} \sin \theta \cos \theta \\e'_y &= e_x \sin^2 \theta + e_y \cos^2 \theta - 2e_{xy} \sin \theta \cos \theta \\e'_{xy} &= -e_x \sin \theta \cos \theta + e_y \sin \theta \cos \theta + e_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\tag{3.109}$$

Esto se reescribe en términos de un ángulo doble

$$\begin{aligned}e'_x &= \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{e_x - e_y}{2} \cos 2\theta + e_{xy} \sin 2\theta \\e'_y &= \frac{e_x + e_y}{2} - \frac{e_x - e_y}{2} \cos 2\theta - e_{xy} \sin 2\theta \\e'_{xy} &= \frac{e_y - e_x}{2} \sin 2\theta + e_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\tag{3.110}$$

#### Anexo 4: Transformación del tensor de tensiones

Dado que  $\sigma_{ij}$  son componentes de un tensor de segundo orden, se puede aplicar la teoría de la transformación

$$\sigma'_{ij} = Q_{ip}Q_{jq}\sigma_{pq} \quad (3.111)$$

Así, dado la tensión en un sistema coordenado, se pueden determinar las nuevas componentes en cualquier otro sistema rotado. Para el caso tridimensional, la matriz rotación se define por

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

Para el caso bidimensional, la matriz de transformación se puede expresar como

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

Bajo esta transformación, las componentes *strain* en el plano se transforman según

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma'_y &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau'_{xy} &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (3.114)$$

Esto se reescribe en términos de un ángulo doble

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma'_y &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \tau'_{xy} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.115)$$

## Anexo 5: Cálculo de los elementos de la matriz de deformaciones

Antes de obtener los elementos de la matriz (2.29), es necesario obtener los elementos de la matriz (2.29), (2.12) en función a las coordenadas polares, usando las relaciones (2.26) y (2.28)

$$\begin{aligned}
 \bullet \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta u_r - \sin \theta u_\theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta u_r - \sin \theta u_\theta) \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \left( -\sin \theta u_r + \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. - \cos \theta u_\theta - \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \tag{3.116} \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r} u_r - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
 &\quad + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} u_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta u_r - \sin \theta u_\theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta u_r - \sin \theta u_\theta) \\
 &= \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \sin^2 \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \left( -\sin \theta u_r + \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. - \cos \theta u_\theta - \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \tag{3.117} \\
 &= \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \sin^2 \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} u_r + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
 &\quad - \frac{\cos^2 \theta}{r} u_\theta - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta u_r + \cos \theta u_\theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_r + \cos \theta u_\theta) \\
&= \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos^2 \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \left( \cos \theta u_r + \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \sin \theta u_\theta + \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \tag{3.118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos^2 \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} u_r - \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
&\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} u_\theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3} (\cos \theta u_r - \sin \theta u_\theta) \\
&= \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} \tag{3.119}
\end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta u_r + \cos \theta u_\theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_r + \cos \theta u_\theta) \\
&= \sin^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \left( \cos \theta u_r + \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \sin \theta u_\theta + \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \tag{3.121}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} u_r + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
&\quad - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} u_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} \tag{3.122}$$

$$\bullet \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \tag{3.123}$$

$$\bullet \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{3.124}$$

De (2.29), se obtiene el elemento  $\epsilon_{rr}$  de la matriz estrés

$$\epsilon_{rr} = \cos \theta (\cos \theta \epsilon_{11} + \sin \theta \epsilon_{21}) + \sin \theta (\cos \theta \epsilon_{12} + \sin \theta \epsilon_{22}). \tag{3.125}$$

Al sustituir los elementos de la matriz estrés en coordenadas cartesianas, mostrados en la ecuación (2.12), resulta

$$\begin{aligned}
\epsilon_{rr} &= \cos \theta \left[ \cos \theta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\sin \theta}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] + \sin \theta \left[ \frac{\cos \theta}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \sin \theta \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \\
&= \cos^2 \theta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sin^2 \theta \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \tag{3.126}
\end{aligned}$$

reemplazando las ecuaciones (3.116), (3.117), (3.118) y (3.121) en (3.126), se obtiene que el elemento  $\epsilon_{rr}$  es

$$\begin{aligned}
\epsilon_{rr} &= \cos^2 \left( \cos^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r} u_r - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} u_\theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \sin^2 \theta \left( \sin^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} u_r + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} u_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \sin \theta \cos \theta \left[ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} u_r + \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r} u_\theta - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \\
&= (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r} u_r \\
&\quad - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) u_\theta \\
&\quad + \frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\
&\quad - \frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r} u_r + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
&\quad - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) u_\theta - \frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
&= \underbrace{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}_{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2} \frac{\partial u_r}{\partial r}
\end{aligned} \tag{3.127}$$

finalmente, el resultado para  $\epsilon_{rr}$  es

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \tag{3.128}$$

De (2.29), se puede obtener el elemento  $\epsilon_{r\theta}$

$$\epsilon_{r\theta} = -\sin \theta (\cos \theta \epsilon_{11} + \sin \theta \epsilon_{21}) + \cos \theta (\cos \theta \epsilon_{12} + \sin \theta \epsilon_{22}), \tag{3.129}$$

sustituyendo los elementos de la matriz deformación en coordenadas cartesianas mostrados en la ecuación (2.12), se tiene

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{r\theta} &= -\sin\theta \left[ \cos\theta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\sin\theta}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\
 &\quad + \cos\theta \left[ \frac{\cos\theta}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \sin\theta \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \\
 &= \sin\theta \cos\theta \left( -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \left( \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

reemplazando (3.116), (3.121), (3.117) y (3.118) en (3.130), el elemento  $\epsilon_{r\theta}$  es

$$\begin{aligned}
\epsilon_{r\theta} &= \sin\theta\cos\theta\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\
&= \sin\theta\cos\theta\left(-\cos^2\theta\frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\sin^2\theta}{r}u_r + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right. \\
&\quad - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}u_\theta - \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \sin^2\theta\frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r}u_r \\
&\quad \left. + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}u_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2}\right)\left[2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u_r}{\partial r} + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right. \\
&\quad - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}u_r + \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r}u_\theta \\
&\quad \left. - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right] \\
&= \sin\theta\cos\theta\left(-(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r}u_r\right. \\
&\quad \left. + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}u_\theta + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2}\right)\left[2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u_r}{\partial r} + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right. \\
&\quad - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}u_r + \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r}u_\theta \\
&\quad \left. - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right] \\
&= -\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \sin\theta\cos\theta \\
&\quad \times \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r}u_r + \frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{r}u_\theta \\
&\quad + \sin\theta\cos\theta\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial u_r}{\partial\theta} \\
&\quad + \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)u_r \\
&\quad + \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{2r}u_\theta \\
&\quad - \sin\theta\cos\theta\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \\
&= 2\sin^2\theta\cos^2\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{r}u_\theta \\
&\quad + \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{2r}u_\theta
\end{aligned} \tag{3.131}$$

teniendo en cuenta que  $(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \cos 2\theta$  y  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{r\theta} = & \frac{\sin^2 2\theta}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\sin^2 2\theta}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\sin^2 2\theta}{2r} u_\theta \\ & + \frac{\cos^2 2\theta}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\cos^2 2\theta}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\cos^2 2\theta}{2r} u_\theta \end{aligned} \quad (3.132)$$

finalmente, el elemento  $\epsilon_{r\theta}$  es

$$\boxed{\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)}. \quad (3.133)$$

De (2.29), el elemento  $\epsilon_{rz}$  es

$$\epsilon_{rz} = \cos \theta \epsilon_{13} + \sin \theta \epsilon_{23} \quad (3.134)$$

sustituyendo los elementos de la matriz deformación en coordenadas cartesianas mostrada en la ecuación (2.12), resulta

$$\epsilon_{rz} = \frac{\cos \theta}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\sin \theta}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (3.135)$$

reemplazando las ecuaciones (3.119), (3.120), (3.122) y (3.123) en (3.135), el elemento  $\epsilon_{rz}$  es

$$\begin{aligned} \epsilon_{rz} = & \frac{\cos \theta}{2} \left( \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} + \cos \theta \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\sin \theta}{2} \left( \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} + \sin \theta \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.136)$$

finalmente, el elemento  $\epsilon_{rz}$  es

$$\boxed{\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right)}. \quad (3.137)$$

De (2.29), se obtiene el elemento  $\epsilon_{\theta\theta}$

$$\epsilon_{\theta\theta} = -\sin \theta (-\sin \theta \epsilon_{11} + \cos \theta \epsilon_{21}) + \cos \theta (-\sin \theta \epsilon_{12} + \cos \theta \epsilon_{22}) \quad (3.138)$$

sustituyendo los elementos de la matriz deformación en coordenadas cartesianas en la ecuación (2.12), resulta

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\theta\theta} &= -\sin\theta \left[ -\sin\theta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\cos\theta}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\
&\quad + \cos\theta \left[ -\frac{\sin\theta}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \cos\theta \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \\
&= \sin^2\theta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cos^2\theta \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \sin\theta \cos\theta \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)
\end{aligned} \tag{3.139}$$

reemplazando las ecuaciones (3.116), (3.116), (3.118) y (3.121) en (3.139), el elemento  $\epsilon_{\theta\theta}$  es

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\theta\theta} &= \sin^2\theta \left( \cos^2\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \cos\theta \sin\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r} u_r - \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} u_\theta + \frac{\sin^2\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \cos^2\theta \left( \sin^2\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin\theta \cos\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos^2\theta}{r} u_r + \frac{\cos\theta \sin\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\cos\theta \sin\theta}{r} u_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
&\quad - \sin\theta \cos\theta \left( \sin\theta \cos\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \sin^2\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\cos\theta \sin\theta}{r} u_r + \frac{\cos^2\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos^2\theta}{r} u_\theta - \frac{\cos\theta \sin\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \cos\theta \sin\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos^2\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} u_r \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin^2\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r} u_\theta - \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
&= 2\sin^2\theta \cos^2\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin\theta \cos\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{r} u_r \\
&\quad + \frac{\cos\theta \sin\theta}{r} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\cos\theta \sin\theta}{r} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) u_\theta \\
&\quad + \frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2\sin^2\theta \cos^2\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \sin\theta \cos\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\
&\quad + \frac{2\sin^2\theta \cos^2\theta}{r} u_r - \sin\theta \cos\theta \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \sin\theta \cos\theta \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r} u_\theta \\
&\quad + \frac{2\sin^2\theta \cos^2\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
&= \frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta \cos^2\theta}{r} u_r + \frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta \cos^2\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{3.140}$$

finalmente el elemento  $\epsilon_{\theta\theta}$  es

$$\boxed{\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}} \tag{3.141}$$

De (2.29), se obtiene el elemento  $\epsilon_{\theta z}$

$$\epsilon_{\theta z} = -\sin\theta\epsilon_{13} + \cos\theta\epsilon_{23} \quad (3.142)$$

sustituyendo los elementos de la matriz (2.12), resulta

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[ -\sin\theta \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \cos\theta \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right] \quad (3.143)$$

reemplazando las ecuaciones (3.119), (3.124), (3.122) y (3.123) en (3.139), el elemento  $\epsilon_{\theta\theta}$  es

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left[ -\sin\theta \left( \cos\theta \frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \sin\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos\theta \left( \sin\theta \frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \cos\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} + \sin\theta \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( -\cos\theta \sin\theta \frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \sin^2\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} - \sin\theta \cos\theta \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \sin\theta \cos\theta \frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \cos^2\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} + \sin\theta \cos\theta \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.144)$$

finalmente, el elemento  $\epsilon_{\theta 3}$  es

$$\epsilon_{\theta 3} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right). \quad (3.145)$$

De (2.29), el elemento  $\epsilon_{\theta z}$  es

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (3.146)$$

## Anexo 6: Variacional de la energía potencial en coordenadas cartesianas

La variacional de la energía potencial, mostrada en la ecuación (3.54), puede ser obtenida en términos de  $\delta w$ ,  $\delta w_{,x}$  y  $\delta w_{,y}$  mediante integración por partes en cada integral.

- En la primera integral

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xx} \delta w_{,xx} dx dy,$$

se eligen las siguientes variables

$$\mathcal{A} = w_{,xx} \quad \rightarrow \quad d\mathcal{A} = w_{,xxx} dx$$

$$d\mathbf{a} = \delta w_{,xx} dx \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = \delta w_{,x}$$

entonces, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xx} \delta w_{,xx} dx dy &= \int_0^{L_y} w_{,xx} \delta w_{,x} \Big|_0^{L_x} dy \\ &\quad - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xxx} \delta w_{,x} dx dy \end{aligned} \quad (3.147)$$

en esta última integral, se escoge lo siguiente

$$\mathcal{B} = w_{,xxx} \quad \rightarrow \quad d\mathcal{B} = w_{,xxxx} dx$$

$$d\mathbf{b} = \delta w_{,x} dx \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} = \delta w$$

así, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xx} \delta w_{,xx} dx dy &= \int_0^{L_y} w_{,xx} \delta w_{,x} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} w_{,xxx} \delta w \Big|_0^{L_x} dy \\ &\quad + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xxxx} \delta w dx dy \end{aligned} \quad (3.148)$$

- En la segunda integral,

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yy} \delta w_{,yy} dy dx,$$

se eligen las siguientes variables

$$\mathcal{C} = w_{,yy} \quad \rightarrow \quad d\mathcal{C} = w_{,yyy} dy$$

$$d\mathbf{c} = \delta w_{,yy} dy \quad \rightarrow \quad \mathbf{c} = \delta w_{,y}$$

entonces, resulta

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yy} \delta w_{,yy} dx dy = \int_0^{L_x} w_{,yy} \delta w_{,y} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yyy} \delta w_{,y} dx dy \quad (3.149)$$

en esta última integral se escogen lo siguiente

$$\mathcal{D} = w_{,yyy} \rightarrow d\mathcal{D} = w_{,yyyy} dy$$

$$d\mathfrak{d} = \delta w_{,y} dy \rightarrow \mathfrak{d} = \delta w$$

así, se obtiene

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yy} \delta w_{,yy} dx dy = \int_0^{L_y} w_{,yy} \delta w_{,y} \Big|_0^{L_x} dx - \int_0^{L_y} w_{,yyy} \delta w \Big|_0^{L_x} dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yyyy} \delta w dx dy. \quad (3.150)$$

- En la tercera integral

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w_{,xx} \delta w_{,yy} dy dx,$$

se escogen las siguientes variables

$$\mathcal{E} = w_{,xx} \rightarrow d\mathcal{E} = w_{,xxy} dy$$

$$d\mathfrak{e} = \delta w_{,yy} dy \rightarrow \mathfrak{e} = \delta w_{,y}$$

entonces, resulta

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xx} \delta w_{,yy} dx dy = \int_0^{L_x} w_{,xx} \delta w_{,y} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xxy} \delta w_{,y} dx dy \quad (3.151)$$

en esta última integral, se escoge lo siguiente

$$\mathcal{F} = w_{,xxy} \rightarrow d\mathcal{F} = w_{,xxyy} dy$$

$$d\mathfrak{f} = \delta w_{,y} dy \rightarrow \mathfrak{f} = \delta w$$

así, se obtiene

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xx} \delta w_{,yy} dx dy = \int_0^{L_y} w_{,xx} \delta w_{,y} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} w_{,xxy} \delta w \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xxyy} \delta w dx dy. \quad (3.152)$$

- En la cuarta integral,

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w_{,yy} \delta w_{,xx} dy dx,$$

se escogen la siguientes variables

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = w_{,yy} &\rightarrow d\mathcal{G} = w_{,yyx} dx \\ d\mathfrak{g} = \delta w_{,xx} dx &\rightarrow \mathfrak{g} = \delta w_{,x} \end{aligned}$$

entonces, resulta

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yy} \delta w_{,xx} dx dy = \int_0^{L_x} w_{,yy} \delta w_{,x} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yyx} \delta w_{,x} dx dy \quad (3.153)$$

en esta última integral, se escoge lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = w_{,yyx} &\rightarrow d\mathcal{H} = w_{,yyxx} dx \\ d\mathfrak{h} = \delta w_{,x} dx &\rightarrow \mathfrak{h} = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yy} \delta w_{,xx} dx dy = \int_0^{L_y} w_{,yy} \delta w_{,x} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} w_{,yyx} \delta w \Big|_0^{L_x} dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,yyxx} \delta w dx dy. \quad (3.154)$$

- En la quinta integral,

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w_{,xy} \delta w_{,xy} dy dx,$$

los términos son las derivadas mixtas de  $w$  por lo que el desarrollo es ligeramente más

extenso. Se escogen las siguientes variables

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = w_{,xy} &\rightarrow d\mathcal{J} = w_{,xxy}dx \\ d\mathfrak{i} = \delta w_{,xy}dx &\rightarrow \mathfrak{i} = \delta w_{,y} \end{aligned}$$

entonces, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xy} \delta w_{,xy} dx dy &= \int_0^{L_y} w_{,xy} \delta w_{,y} \Big|_0^{L_x} dy \\ &\quad - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xxy} \delta w_{,y} dx dy \end{aligned} \quad (3.155)$$

en esta última integral, se escoge lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = w_{,xy} &\rightarrow d\mathcal{J} = w_{,xyy}dy \\ dj = \delta w_{,y}dy &\rightarrow \mathfrak{j} = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xy} \delta w_{,xy} dx dy &= w_{,xy} \delta w \Big|_0^{L_x} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} w_{,xyy} \delta w \Big|_0^{L_x} dy \\ &\quad - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xxy} \delta w_{,y} dx dy. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Nuevamente, en la última integral se escoge lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = w_{,xxy} &\rightarrow d\mathcal{M} = w_{,xxyy}dy \\ d\mathfrak{m} = \delta w_{,y}dy &\rightarrow \mathfrak{m} = \delta w \end{aligned} \quad (3.157)$$

de aquí, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_{,xy} \delta w_{,xy} dx dy &= w_{,xy} \delta w \Big|_0^{L_x} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} w_{,xyy} \delta w \Big|_0^{L_x} dy \\ &\quad - \int_0^{L_x} w_{,xxy} \delta w \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w_{,xxyy} \delta w dy dx. \end{aligned} \quad (3.158)$$

## Anexo 7: Variacional de la energía potencial en coordenadas polares

La variacional de la energía potencial, mostrada en la ecuación , puede ser obtenida en términos de  $\delta w$ ,  $\delta w_{,r}$  y  $\delta w_{,\theta}$  mediante integración por partes

$$\delta U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ 2(\Delta w)\delta(\Delta w) + 2(1-\nu) \left[ 2 \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta} - \frac{1}{r} w_{,r\theta} \right) \delta \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta} - \frac{1}{r} w_{,r\theta} \right) - w_{,rr} \delta \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) - \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) \delta w_{,rr} \right] \right\} r dr d\theta \quad (3.159)$$

Escribiendo el término  $\Delta w$  explícitamente ( $\Delta w = w_{,rr} + (1/r)w_{,r} + (1/r^2)w_{,\theta\theta}$ ), el primer término dentro de la integral es

$$\begin{aligned} (\Delta w)\delta(\Delta w) &= \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \left( \delta w_{,rr} + \frac{1}{r} \delta w_{,r} + \frac{1}{r^2} \delta w_{,\theta\theta} \right) \\ &= w_{,rr} \delta w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,rr} \delta w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,rr} \delta w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r} \delta w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r} \delta w_{,r} \\ &\quad + \frac{1}{r^3} w_{,r} \delta w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} + \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta} \delta w_{,\theta\theta} \end{aligned} \quad (3.160)$$

reemplazando (3.160) en (3.159) resulta

$$\begin{aligned} \delta U &= D \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ w_{,rr} \delta w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,rr} \delta w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,rr} \delta w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r} \delta w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r} \delta w_{,r} \right. \\ &\quad + \frac{1}{r^3} w_{,r} \delta w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} + \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta} \delta w_{,\theta\theta} \\ &\quad - (1-\nu) \frac{1}{r^2} w_{,rr} \delta w_{,\theta\theta} - (1-\nu) \frac{1}{r} w_{,rr} \delta w_{,r} - (1-\nu) \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w_{,rr} \\ &\quad - (1-\nu) \frac{1}{r} w_{,r} \delta w_{,rr} + 2(1-\nu) \left( \frac{1}{r^4} w_{,\theta} \delta w_{,\theta} - \frac{1}{r^3} w_{,\theta} \delta w_{,r\theta} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r^3} w_{,r\theta} \delta w_{,\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,r\theta} \delta w_{,r\theta} \right) \right] r dr d\theta \\ &= D \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ w_{,rr} \delta w_{,rr} + \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta} \delta w_{,\theta\theta} + \nu \left( \frac{1}{r} w_{,rr} \delta w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,rr} \delta w_{,\theta\theta} \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{r} w_{,r} \delta w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w_{,rr} \left. \right) + \frac{1}{r^2} w_{,r} \delta w_{,r} + \frac{1}{r^3} w_{,r} \delta w_{,\theta\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} + 2(1-\nu) \left( \frac{1}{r^4} w_{,\theta} \delta w_{,\theta} - \frac{1}{r^3} w_{,\theta} \delta w_{,r\theta} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r^3} w_{,r\theta} \delta w_{,\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,r\theta} \delta w_{,r\theta} \right) \right] r dr d\theta. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Ahora esto se resolverá término a término como sigue:

- En la primera integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R w_{,rr} \delta w_{,rr} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} A = w_{,rr}r &\quad \rightarrow \quad dA = (w_{,rrr}r + w_{,rr})dr \\ d\alpha = \delta w_{,rr}dr &\quad \rightarrow \quad \alpha = \delta w_{,r} \end{aligned}$$

luego, resulta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R w_{,rr} \delta w_{,rr} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ (rw_{,rr} \delta w_{,r})_0^R - \int_0^R (w_{,rrr}r + w_{,rr}) \delta w_{,r} dr \right] d\theta \quad (3.162)$$

en la integral al interior de los corchetes, se escogen:

$$\begin{aligned} \Gamma = w_{,rrr}r + w_{,rr} &\quad \rightarrow \quad d\Gamma = (w_{,rrrr}r + 2w_{,rrr})dr \\ d\gamma = \delta w_{,r}dr &\quad \rightarrow \quad \gamma = \delta w \end{aligned}$$

asi, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R w_{,rr} \delta w_{,rr} r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left\{ (rw_{,rr} \delta w_{,r})_0^R - [(w_{,rrr}r + w_{,rr})_0^R \delta w - \int_0^R (w_{,rrrr}r + 2w_{,rrr}) \delta w dr] \right\} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [rw_{,rr} \delta w_{,r} - rw_{,rrr} \delta w - w_{,rr} \delta w]_0^R d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^R (w_{,rrrr}r + 2w_{,rrr}) \delta w dr d\theta \end{aligned} \quad (3.163)$$

- En la segunda integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta} \delta w_{,\theta\theta} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} Z = w_{,\theta\theta} \frac{1}{r^3} &\quad \rightarrow \quad dZ = w_{,\theta\theta} \frac{1}{r^3} d\theta \\ d\zeta = \delta w_{,\theta\theta} d\theta &\quad \rightarrow \quad \zeta = \delta w_{,\theta} \end{aligned}$$

luego, resulta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} \delta w_{,\theta\theta} dr d\theta = \int_0^R \left[ \left( w_{,\theta\theta} \frac{1}{r^3} \delta w_{,\theta} \right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} w_{,\theta\theta\theta} \frac{1}{r^3} \delta w_{,\theta} d\theta \right] dr \quad (3.164)$$

en la integral al interior de los corchetes, se escoge

$$\begin{aligned} H = w_{,\theta\theta\theta} \frac{1}{r^3} &\quad \rightarrow \quad dH = w_{,\theta\theta\theta\theta} \frac{1}{r^3} d\theta \\ d\eta = \delta w_{,\theta} d\theta &\quad \rightarrow \quad \eta = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} \delta w_{,\theta\theta} dr d\theta = \int_0^R \left[ \left( w_{,\theta\theta} \frac{1}{r^3} \delta w_{,\theta} - \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta\theta} \delta w \right)_0^{2\pi} \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} w_{,\theta\theta\theta\theta} \frac{1}{r^3} \delta w d\theta \right] dr \end{aligned} \quad (3.165)$$

- En la tercera integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} w_{,rr} \delta w_{,r} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} K = w_{,rr} &\quad \rightarrow \quad dK = w_{,rrr} dr \\ d\kappa = \delta w_{,r} dr &\quad \rightarrow \quad \kappa = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R w_{,rr} \delta w_{,r} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ (w_{,rr} \delta w)_0^R - \int_0^R w_{,rrr} \delta w dr \right] d\theta \quad (3.166)$$

- En la cuarta integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,rr} \delta w_{,\theta\theta} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} N = \frac{1}{r} w_{,rr} &\quad \rightarrow \quad dN = \frac{1}{r} w_{,rr\theta} d\theta \\ dv = \delta w_{,\theta\theta} d\theta &\quad \rightarrow \quad v = \delta w_{,\theta} \end{aligned}$$

luego, resulta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} w_{,rr} \delta w_{,\theta\theta} dr d\theta = \int_0^R \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,rr} \delta w_{,\theta} \right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} w_{,rr\theta} \delta w_{,\theta} d\theta \right] dr \quad (3.167)$$

en esta integral, se escoge

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{1}{r} w_{,rr\theta} & \rightarrow & \quad d\Xi = \frac{1}{r} w_{,rr\theta\theta} d\theta \\ d\xi &= \delta w_{,\theta} d\theta & \rightarrow & \quad \xi = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R w_{,rr} \delta w_{,r} dr d\theta = \int_0^R \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,rr} \delta w_{,\theta} - \frac{1}{r} w_{,rr\theta} \delta w \right)_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} w_{,rr\theta\theta} \delta w d\theta \right] dr \quad (3.168)$$

- En la quinta integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} w_{,r} \delta w_{,rr} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} P &= w_{,r} & \rightarrow & \quad dP = w_{,rr} dr \\ d\rho &= \delta w_{,rr} dr & \rightarrow & \quad \rho = \delta w_{,r} \end{aligned}$$

luego, resulta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R w_{,r} \delta w_{,rr} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ (w_{,r} \delta w_{,r})_0^R - \int_0^R w_{,rr} \delta w_{,r} dr \right] d\theta \quad (3.169)$$

en esta integral, se escoge

$$\begin{aligned} \Sigma &= w_{,rr} & \rightarrow & \quad d\Sigma = w_{,rrr} dr \\ d\varsigma &= \delta w_{,r} dr & \rightarrow & \quad \varsigma = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R w_{,r} \delta w_{,rr} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ (w_{,r} \delta w_{,r} - w_{,rr} \delta w)_0^R + \int_0^R w_{,rrr} \delta w dr \right] d\theta \quad (3.170)$$

- En la sexta integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w_{,rr} r dr d\theta,$$

se escoge

$$T = \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \quad \rightarrow \quad dT = \left( -\frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta r} \right) dr$$

$$d\tau = \delta w_{,rr} \quad \rightarrow \quad \tau = \delta w_{,r}$$

luego, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w_{,rr} r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} \right)_0^R \right. \\ &\quad \left. - \int_0^R \left( -\frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta r} \right) \delta w_{,r} dr \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.171)$$

en esta integral, se escoge

$$\Phi = -\frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta r} \quad \rightarrow \quad d\Phi = \left( \frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} - \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta rr} \right) dr$$

$$d\phi = \delta w_{,r} \quad \rightarrow \quad \phi = \delta w$$

así, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \delta w_{,rr} r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w - \frac{1}{r} w_{,\theta\theta r} \delta w \right)_0^R \right. \\ &\quad \left. + \int_0^R \left( \frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} - \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta rr} \right) \delta w dr \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.172)$$

- En la séptima integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,r} \delta w_{,r} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} X = \frac{1}{r}w_{,r} &\quad \rightarrow \quad dX = \left(-\frac{1}{r^2}w_{,r} + \frac{1}{r}w_{,rr}\right) dr \\ d\chi = \delta w_{,r} &\quad \rightarrow \quad \chi = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r}w_{,r}\delta w_{,r}drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{1}{r}w_{,r}\delta w\right)_0^R - \int_0^R \left(-\frac{1}{r^2}w_{,r} + \frac{1}{r}w_{,rr}\right)\delta wdr \right] d\theta \quad (3.173)$$

- En la octava integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^3}w_{,r}\delta w_{,\theta\theta}rdrd\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} \Psi = w_{,r} &\quad \rightarrow \quad d\Psi = w_{,r\theta}d\theta \\ d\psi = \frac{1}{r^2}\delta w_{,\theta\theta}d\theta &\quad \rightarrow \quad \psi = \frac{1}{r^2}\delta w_{,\theta} \end{aligned}$$

entonces, resulta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2}w_{,r}\delta w_{,\theta\theta}drd\theta = \int_0^R \left[ \left(w_{,r}\frac{1}{r^2}\delta w_{,\theta}\right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}w_{,r\theta}\delta w_{,\theta}d\theta \right] dr \quad (3.174)$$

en esta integral, se escoge

$$\begin{aligned} \Omega = w_{,r\theta} &\quad \rightarrow \quad d\Omega = w_{,r\theta\theta}d\theta \\ d\omega = \frac{1}{r^2}\delta w_{,\theta}d\theta &\quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{r^2}\delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2}w_{,r}\delta w_{,\theta\theta}drd\theta = \int_0^R \left[ \left(w_{,r}\frac{1}{r^2}\delta w_{,\theta} - \frac{1}{r^2}w_{,r\theta}\delta w\right)_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}w_{,r\theta\theta}\delta wd\theta \right] dr \quad (3.175)$$

- En la novena integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} = \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} &\quad \rightarrow \quad d\mathfrak{F} = \left( -\frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} \right) dr \\ d\varphi = \delta w_{,r} dr &\quad \rightarrow \quad \varphi = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w \right)_0^R \right. \\ &\quad \left. - \int_0^R \left( -\frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} \right) \delta w dr \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.176)$$

- En la décima integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^4} w_{,\theta} \delta w_{,\theta} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{r^3} w_{,\theta} &\quad \rightarrow \quad d\Pi = \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} d\theta \\ d\varpi = \delta w_{,\theta} d\theta &\quad \rightarrow \quad \varpi = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^3} w_{,\theta} \delta w_{,\theta} r dr d\theta = \int_0^R \left[ \left( \frac{1}{r^3} w_{,\theta} \delta w \right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} \delta w d\theta \right] dr \quad (3.177)$$

- En la décimo primera integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^3} w_{,\theta} \delta w_{,r\theta} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{r^2} w_{,\theta} &\quad \rightarrow \quad d\Theta = \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} d\theta \\ d\vartheta = \delta w_{,r\theta} d\theta &\quad \rightarrow \quad \vartheta = \delta w_{,r} \end{aligned}$$

entonces, resulta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,\theta} \delta w_{,r\theta} dr d\theta = \int_0^R \left[ \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta} \delta w_{,r} \right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} d\theta \right] dr \quad (3.178)$$

en esta integral se escoge

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{r^2} w_{,\theta} \quad \rightarrow \quad d\mathfrak{G} = \left( -\frac{2}{r^3} w_{,\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta r} \right) dr$$

$$d\mathfrak{g} = \delta w_{,r} dr \quad \rightarrow \quad \mathfrak{g} = \delta w$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \quad \rightarrow \quad d\mathfrak{C} = \left( -\frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} \right) dr$$

$$d\mathfrak{c} = \delta w_{,r} dr \quad \rightarrow \quad \mathfrak{c} = \delta w$$

así, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,\theta} \delta w_{,r\theta} dr d\theta &= \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta} \delta w \right)_0^R \Big|_0^{2\pi} - \int_0^R \left( -\frac{2}{r^3} w_{,\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta r} \right) \delta w \Big|_0^{2\pi} dr \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w \right)_0^R - \int_0^R \left( -\frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} \right) \delta w dr \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.179)$$

- En la décimo segunda integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^3} w_{,r\theta} \delta w_{,\theta} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{r^2} w_{,r\theta} \quad \rightarrow \quad d\mathfrak{D} = \frac{1}{r^2} w_{,r\theta\theta} d\theta$$

$$d\mathfrak{d} = \delta w_{,\theta} d\theta \quad \rightarrow \quad \mathfrak{d} = \delta w$$

así, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,r\theta} \delta w_{,\theta} dr d\theta = \int_0^R \left[ \left( \frac{1}{r^2} w_{,r\theta} \delta w \right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} w_{,r\theta\theta} \delta w d\theta \right] dr \quad (3.180)$$

- En la décimo tercera integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} w_{,r\theta} \delta w_{,r\theta} r dr d\theta,$$

se escoge

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{r} w_{,r\theta} & \rightarrow & \quad d\mathfrak{E} = \frac{1}{r} w_{,r\theta\theta} d\theta \\ d\mathfrak{e} &= \delta w_{,r\theta} d\theta & \rightarrow & \quad \mathfrak{e} = \delta w_{,r} \end{aligned}$$

entonces, resulta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} w_{,r\theta} \delta w_{,r\theta} r dr d\theta = \int_0^R \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,r\theta} \delta w_{,r} \right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} w_{,r\theta\theta} \delta w_{,r} d\theta \right] dr \quad (3.181)$$

en esta integral, se escoge

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{1}{r} w_{,r\theta} & \rightarrow & \quad d\mathfrak{M} = \left( -\frac{1}{r^2} w_{,r\theta} + \frac{1}{r} w_{,rr\theta} \right) dr \\ d\mathfrak{m} &= \delta w_{,r} dr & \rightarrow & \quad \mathfrak{m} = \delta w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{1}{r} w_{,r\theta\theta} & \rightarrow & \quad d\mathfrak{F} = \left( -\frac{1}{r^2} w_{,r\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,rr\theta\theta} \right) dr \\ d\mathfrak{f} &= \delta w_{,r} dr & \rightarrow & \quad \mathfrak{f} = \delta w \end{aligned}$$

así, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} w_{,r\theta} \delta w_{,r\theta} r dr d\theta &= \left( \frac{1}{r} w_{,r\theta} \delta w \right)_0^R \Big|_0^{2\pi} - \int_0^R \left( -\frac{1}{r^2} w_{,r\theta} + \frac{1}{r} w_{,rr\theta} \right) \delta w \Big|_0^{2\pi} dr \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,r\theta\theta} \delta w \right)_0^R - \int_0^R \left( -\frac{1}{r^2} w_{,r\theta\theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r} w_{,rr\theta\theta} \right) \delta w dr \right] d\theta \end{aligned}$$

(3.182)

Los resultados obtenidos en (3.163)-(3.182) deben ser reemplazados en (3.185)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta U}{D} = & \int_0^{2\pi} (rw_{,rr}\delta w_{,r} - rw_{,rrr}\delta w - w_{,rr}\delta w)_0^R d\theta + \int_0^R \int_0^{2\pi} (rw_{,rrrr} + 2w_{,rrr})\delta w dr d\theta \\
& + \int_0^R \left( \frac{1}{r^3}w_{,\theta\theta}\delta w_{,\theta} - \frac{1}{r^3}w_{,\theta\theta\theta}\delta w \right)_0^{2\pi} dr + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}w_{,\theta\theta\theta}\delta w d\theta dr \\
& + \nu \int_0^{2\pi} (w_{,rr}\delta w)_0^R d\theta - \nu \int_0^R \int_0^{2\pi} w_{,rrr}\delta w dr d\theta \\
& + \nu \int_0^R \left( \frac{1}{r}w_{,rr}\delta w_{,\theta} - \frac{1}{r}w_{,rr\theta}\delta w \right)_0^{2\pi} dr + \nu \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}w_{,rr\theta\theta}\delta w d\theta dr \\
& + \nu \int_0^{2\pi} (w_{,r}\delta w_{,r} - w_{,rr}\delta w)_0^R d\theta + \nu \int_0^R \int_0^{2\pi} w_{,rrr}\delta w dr d\theta \\
& + \nu \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r}w_{,\theta\theta}\delta w_{,r} + \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta}\delta w - \frac{1}{r}w_{,\theta\theta r}\delta w \right)_0^R d\theta \\
& + \nu \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \frac{2}{r^3}w_{,\theta\theta} - \frac{2}{r^2}w_{,\theta\theta r} + \frac{1}{r}w_{,\theta\theta rr} \right) \delta w dr d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r}w_{,r}\delta w \right)_0^R d\theta - \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{r^2}w_{,r} + \frac{1}{r}w_{,rr} \right) \delta w dr d\theta \\
& + \int_0^R \left( w_{,r}\frac{1}{r^2}\delta w_{,\theta} - \frac{1}{r^2}w_{,r\theta}\delta w \right)_0^{2\pi} dr + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}w_{,r\theta\theta}\delta w d\theta dr \\
& + \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta}\delta w \right)_0^R d\theta - \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( -\frac{2}{r^3}w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta r} \right) \delta w dr d\theta \\
& + 2(1-\nu) \int_0^R \left( \frac{1}{r^3}w_{,\theta}\delta w \right)_0^{2\pi} - 2(1-\nu) \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}w_{,\theta\theta}\delta w d\theta dr \\
& - 2(1-\nu) \left( \frac{1}{r^2}w_{,\theta}\delta w \right)_0^R \Big|_0^{2\pi} + 2(1-\nu) \int_0^R \left( -\frac{2}{r^3}w_{,\theta} + \frac{1}{r^2}w_{,\theta r} \right)_0^{2\pi} \delta w dr \\
& + 2(1-\nu) \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta}\delta w \right)_0^R d\theta - 2(1-\nu) \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( -\frac{2}{r^3}w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta r} \right) \delta w dr d\theta \\
& - 2(1-\nu) \int_0^R \left( \frac{1}{r^2}w_{,r\theta}\delta w \right)_0^{2\pi} dr + 2(1-\nu) \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}w_{,r\theta\theta}\delta w d\theta dr \\
& + 2(1-\nu) \left( \frac{1}{r}w_{,r\theta}\delta w \right)_0^R \Big|_0^{2\pi} - 2(1-\nu) \int_0^R \left( -\frac{1}{r^2}w_{,r\theta} + \frac{1}{r}w_{,rr\theta} \right)_0^{2\pi} \delta w dr \\
& - 2(1-\nu) \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r}w_{,r\theta\theta}\delta w \right)_0^R d\theta + 2(1-\nu) \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{r^2}w_{,r\theta\theta} + \frac{1}{r}w_{,rr\theta\theta} \right) \delta w dr d\theta
\end{aligned} \tag{3.183}$$

Agrupando las integrales en  $r$  y  $\theta$ , resulta

$$\begin{aligned}
\delta U = & 2(1-\nu) \left( -\frac{1}{r^2} w_{,\theta} \delta w + \frac{1}{r} w_{,r\theta} \delta w \right) \Big|_0^R \int_0^{2\pi} \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ w_{,rrrr} r + 2w_{,rrr} + \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta\theta} - \nu w_{,rrr} + \frac{\nu}{r} w_{,rr\theta} + \nu w_{,rrr} \right. \\
& + \frac{2\nu}{r^3} w_{,\theta\theta} - \frac{2\nu}{r^2} w_{,\theta\theta r} + \frac{\nu}{r} w_{,\theta\theta rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r} - \frac{1}{r} w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r\theta\theta} + \frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta} \\
& - \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta r} - \frac{2(1-\nu)}{r^3} w_{,\theta\theta} + \frac{4(1-\nu)}{r^3} w_{,\theta\theta} - \frac{2(1-\nu)}{r^2} w_{,\theta\theta r} \\
& \left. + \frac{2(1-\nu)}{r^2} w_{,r\theta\theta} - \frac{2(1-\nu)}{r^2} w_{,r\theta\theta} + \frac{2(1-\nu)}{r} w_{,rr\theta\theta} \right] \delta w dr d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \left[ r w_{,rr} \delta w_{,r} - r w_{,rrr} \delta w - w_{,rr} \delta w + \nu w_{,rr} \delta w + \nu w_{,r} \delta w_{,r} - \nu w_{,rr} \delta w \right. \\
& + \frac{\nu}{r} w_{,\theta\theta} \delta w_{,r} + \frac{\nu}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w - \frac{\nu}{r} w_{,\theta\theta r} \delta w + \frac{1}{r} w_{,r} \delta w + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w \\
& \left. + \frac{2(1-\nu)}{r^2} w_{,\theta\theta} \delta w + \frac{2(1-\nu)}{r} w_{,r\theta\theta} \delta w \right]_0^R d\theta \\
& + \int_0^R \left[ \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} \delta w_{,\theta} - \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta\theta} \delta w + \frac{1}{r^2} w_{,r} \delta w_{,\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,r\theta} \delta w + \frac{2(1-\nu)}{r^3} w_{,\theta} \delta w \right. \\
& + \frac{2(1-\nu)}{r^2} w_{,\theta r} \delta w - \frac{2(1-\nu)}{r^2} w_{,r\theta} \delta w - \frac{4(1-\nu)}{r^3} w_{,\theta} \delta w \\
& \left. + \frac{2(1-\nu)}{r^2} w_{,r\theta} \delta w + \frac{2(1-\nu)}{r} w_{,rr\theta} \delta w \right]_0^{2\pi} dr
\end{aligned} \tag{3.184}$$

simplicando los términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta U = & 2(1-\nu) \left( -\frac{1}{r^2} w_{,\theta} \delta w + \frac{1}{r} w_{,r\theta} \delta w \right) \Big|_0^R \int_0^{2\pi} \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{\left( w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta\theta} + \frac{2}{r^2} w_{,rr\theta} + \frac{4}{r^4} w_{,\theta\theta} - \frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta r} \right)}_{\Delta^2 w} \\
& \times \delta w dr d\theta + \int_0^{2\pi} \left[ \left( r w_{,rr} + \nu w_{,r} + \frac{\nu}{r} w_{,\theta\theta} \right)_0^R \delta w_{,r} \right. \\
& + \left( -r w_{,rrr} - w_{,rr} + \frac{3-\nu}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{\nu-2}{r} w_{,r\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r} \right)_0^R \delta w \Big] d\theta \\
& + \int_0^R \left[ \left( \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta} + \frac{\nu}{r} w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r} \right)_0^{2\pi} \delta w_{,\theta} \right. \\
& \left. + \left( -\frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta\theta} + \frac{2(1-\nu)}{r} w_{,rr\theta} + \frac{1-2\nu}{r^2} w_{,r\theta} + \frac{2\nu-2}{r^3} w_{,\theta} \right)_0^{2\pi} \delta w \right] dr.
\end{aligned} \tag{3.185}$$