UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ciencias

Sección de Posgrado y Segunda Especialización Profesional

Tesis para Optar el Grado Académico de Maestro en Ciencias
con mención en

Matemática Aplicada

Sucesiones Espectrales, Homología de Complejos Filtrados y Derivación de Funtores Compuestos

Presentado Por:

Felipe Clímaco Ccolque Taipe

Lima - Perú

2009

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar expreso agradecimiento póstumo a mis padres quienes en vida invirtieron decididamente en mi educación, y a todos mis hermanos y hermanas que me brindan su apoyo moral.

Agradezco a todos los profesores de las universidades: San Agustín de Arequipa, Federal del Rio de Janeiro-Brasil y Universidad Nacional de Ingeniería, quienes aportaron sus enseñanzas a mi formación académica; por haberme asesorado la Tesis y orientado a la obtención de Grado Académico de Maestro con mención en Matemática Aplicada al Doctor Christian Valqui Haase, a los miembros del jurado Doctor Julio Álcantara Bode y Doctor Percy Fernández Sánchez por revisar la Tesis y por alcanzarme las correcciones pertinentes; y a la propia IMCA como institución líder por los beneficios que he recibido en infraestructura, atención y conocimientos.

También agradezco a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno por otorgarme la Licencia por Estudios para graduación y a los profesores Roberto Ticona, Rubén Ticona y Américo Bolivar de esa Universidad por colaborar conmigo asumiendo mi carga académica durante el proceso de graduación.

Y finalmente agradezco a Lucio Elías Flores Bustinza por ayudarme en el procesamiento del texto y gráficos de la tesis; a colegas de trabajo por animarme a concluir la tesis y a mis alumnos por compartir sus inquietudes acerca del trabajo.

Índice de Contenidos

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Sección de Posgrado y Segunda Especialización Profesional
Maestría en Ciencias

con Mención en Matemática Aplicada

Nombre del Tesista	:	Felipe Clímaco Ccolque Taipe
Código	:	20016272J
Título de la Tesis	:	Sucesiones Espectrales, Homología de Complejos Filtrados y Derivación de Funtores Compuestos

RESUMEN

En la actualidad el Álgebra Homológica es una materia de investigación en las Matemáticas, una parte importante de él se llama Sucesiones Espectrales. En la Tesis se estudiará dichas sucesiones para ver isomorfismos entre homologías de complejos de cadena filtrados; funtores derivados de un funtor compuesto con sucesiones espectrales de Grothendieck.

En el presente trabajo se demuestra el resultado:
Si un morfismo entre dos complejos de cadena filtrados induce un isomorfismo entre los límites de las sucesiones espectrales asociadas y las filtraciones son homológicamente finitas, entonces las homologías de los complejos de cadena filtrados son isomorfas.

Además se describe los funtores derivados derechos de un funtor compuesto de funtores covariantes aditivos entre Categorías Abelianas a través de la sucesión espectral de Grothendieck.

El desarrollo utiliza nociones y resultados de homología de complejos de cadena filtrados, filtración homológicamente finita, lema de serpiente, lema de herradura,funtores derivados, sucesiones espectrales y su convergencia finita en categorías abelianas.

Lima, 30 de marzo del 2009

Dr. Christian Valqui Haase	Lic. Felipe Clímaco Ccolque Taipe
Asesor de Tesis	Autor de Tesis

Introducción

En el presente trabajo se estudia un problema de existencia y de convergencia finita de sucesiones espectrales asociadas a complejos filtrados, el problema ha sido planteado por Doctor Christian Valqui, quién tiene como campo de investigación el área de Álgebra. En mi tesis de Licenciatura he desarrollado Teoría de Galois generalizado, esta experiencia en álgebra me indujo a asumir como un reto la curiosidad de conocer las sucesiones espectrales (inventada en los años 1940 independientemente por R.C. Lyndon y J. Leray) y se da la motivación de la investigación por su utilidad debido a que estas sucesiones tienen aplicaciones importantes en topología algebraica, geometría algebraica, álgebra, K-teoría algebraica y teoría de números.
En la literatura se encuentra informaciones acerca de la sucesión espectral:

- Lyndon inventó para calcular los grupos de cohomología de grupos abelianos finitos.
- Habiendo inventado Serre calculó grupos de homotopía. También usó para calcular los grupos de cohomología de los espacios en una fibración.
- Para calcular cohomología de haces, Jean Leray introduce en [11] una técnica de cálculo conocido como la sucesión espectral de Leray.
- En geometría algebraica se utiliza la sucesión espectral de Leray, donde se usa para analizar ciertos isomorfismos birracionales entre superficies.
- La sucesión espectral de Quillen sirve para calcular la homotopía de un grupo simplicial.

Las sucesiones espectrales dan información sobre los grupos de homología y homotopía, pero ellas no son algoritmos excepto en algunos casos particulares. Sin embargo, existe el método de homología efectiva que proporciona algoritmos para el cálculo de grupos de homología de espacios complicados ([5]).

Específicamente se desarrollará los siguientes:

Objetivos

1. Dar condiciones bajo las cuales un isomorfismo entre los términos E_∞ y E'_∞ de dos sucesiones espectrales asociadas a complejos filtrados C y C' induce un isomorfismo entre $H(C)$ y $H(C')$, para probar formalmente este resultado.
2. Describir los funtores derivados de un funtor compuesto a través de la sucesión espectral de Grothendieck.

Se trata en la tesis esencialmente un problema de sucesiones espectrales de existencia y convergencia finita. Un ejemplo que se mostrará de tales sucesiones es la sucesión espectral de Grothendieck, estas sucesiones convergen finitamente, por eso es posible tratar el límite de dichas sucesiones, y se establecerá que dicho límite involucra funtores derivados de un funtor compuesto de dos funtores aditivos entre categorías abelianas. Esto indica que se requiere nociones de funtores derivados, éstos se hallan mediante resoluciones inyectivas de un objeto. De hecho, estas resoluciones son complejos de cocadena sobre una categoría abeliana. Además, por definición, el término siguiente de la sucesión espectral se obtiene del término tomando la homología; en consecuencia, queda localizado el contexto de la sucesión espectral en una categoría abeliana o en una categoría donde tenga sentido hablar de núcleo y conúcleo de morfismos, de modo que el concepto de homología esté definido.

A continuación, se presenta la descripción del contenido por capítulos:
Se comienza el capítulo 1 con una introducción de módulos y categorías para facilitar la comprensión revisando nociones necesarias de la teoría de módulos; y con respecto a categorías para familiarizar con la teoría y simbologías. Las restantes seis secciones sirven para introducir nociones y resultados sobre el concepto principal de categorías abelianas. En la sección 2 se define el principio de dualidad, el cual es una herramienta para trasladar resultados de una categoría a su opuesta y es de utilidad para establecer resultados duales. En tanto que, en la sección 4 se conseguirá a partir de un morfismo de complejos de cadena un morfismo entre homologías de dichos complejos de cadena, y esto permite entender cómo es un isomorfismo entre homologías de complejos de cadena. En la sección 6 se definen y se dan ejemplos de funtores aditivos que son de gran importancia para el estudio de funtores derivados y además se proporcionan ejemplos de categorías abelianas.

El capítulo 2 está dedicado al estudio de funtores derivados de funtores aditivos entre categorías abelianas. En la sección 1 se introducen los conceptos de objetos proyectivos, objetos inyectivos y homologías de complejos de cadena sobre categorías abelianas. En la sección 2 se construyen sucesiones exactas largas de homologías y en la sección 3 se estudian homotopías entre aplicaciones de cadena, llegando a establecer cuándo dos complejos de cadena son del mismo tipo de homotopía. La sección 4 trata resoluciones proyectivas, resoluciones inyectivas que son herramientas para definir funtores derivados izquierdos y funtores derivados derechos, respectivamente.

El capítulo 3 expone el desarrollo de los dos objetivos de la tesis. Introduciendo conceptos de objetos diferenciales, sucesiones espectrales, pares exactos, objetos diferenciales filtrados, complejos de cadena filtrados y filtraciones homológicamente finitas; estableciendo el resultado principal (Teorema 3.3.9) se realizará para dos complejos de cadena filtrados la transferencia del isomorfismo entre los límites de dos sucesiones espectrales asociadas a un isomorfismo entre las homologías correspondientes.
Para lograr el segundo objetivo, se propone describir funtores derivados derechos de

un funtor compuesto de dos funtores covariantes aditivos entre categorías abelianas a través de la sucesión espectral de Grothendieck, de modo que la sección 4 estudia complejos de cocadena filtrados; mientras que la sección 5 está destinada a la construcción de la sucesión espectral de Grothendieck, la idea central para tal construcción será obtener un complejo doble de cocadena positivo de objetos inyectivos, usando resultados obtenidos en los capítulos anteriores, resultados de complejos dobles de cocadena (con cohomología nula en sus columnas) y el lema de herradura.

Se finaliza este trabajo estableciendo Teorema 3.5.21 de Lyndon-Hochschild-Serre, este resultado permite calcular el grupo de cohomología utilizando sucesiones espectrales. De hecho con esto se ha mostrado una de las utilidades de sucesiones espectrales.

Capítulo 1

Categorías Abelianas

1.1. Introducción de Módulos y Categorías

En esta sección se incluye definiciones, notaciones y resultados básicos de módulos y categorías que se usarán en el presente trabajo.

1.1.1. Módulos

Uno de los objetivos de la tesis es inducir o trasladar el isomorfismo, luego es necesario introducir el concepto de isomorfismo comenzando por ejemplo con el isomorfismos entre módulos. Para tratar esta estructura algebraica de módulos es conveniente recordar las nociones y propiedades de grupos abelianos aditivos y anillos. Exponiendo gradualmente la teoría en esta parte, se introduce el concepto de isomorfismo entre módulos y se enuncian algunos resultados que serán utilizados.

Grupo Abeliano (Objeto de $\mathfrak{Ab}$).- Un grupo es un conjunto G con una operación binaria $\circ$ que satisface los tres axiomas siguientes:
G_1 : La operación $\circ$ es asociativa en G.
G_2 : Existe (identidad) $e \in G$ tal que $e \circ g = g \circ e = g$, $\forall g \in G$.
G_3 : Para cada $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$.
Si además se cumple $a \circ b = b \circ a$, $\forall a, b \in G$, se dice que G es un grupo abeliano. Más adelante se verá que la colección de grupos abelianos denotada con $\mathfrak{Ab}$ tiene estructura algebraica llamada categoría.

Anillo .- Un anillo es un conjunto R con dos operaciones binarias suma $(+)$ y multiplicación $(*)$ que cumple los tres axiomas siguientes:
R_1 : R es un grupo abeliano bajo $+$
R_2 : La multiplicación es asociativa.
R_3 : Se cumplen las leyes distributivas
$r * (s + t) = r * s + r * t,$
$(r + s) * t = r * t + s * t;\ r, s, t \in R$

Si además existe $1 \neq 0$ en R, tal que $1 * r = r * 1 = r$, $\forall r \in R$, se dice que R es un anillo unitario. Este tipo de anillo se denotará con Λ.

- Se escribirá en lo que sigue $r * s = rs$.
- Una aplicación $f : R \to S$ de un anillo R en otro S es un homomorfismo de

anillos si preserva la suma, multiplicación y elemento identidad multiplicativa; esto es, $\forall r_1, r_2 \in R$ se cumplen a la vez:

$$\begin{aligned} f(r_1 + r_2) &= f(r_1 + r_2) \\ f(r_1 r_2) &= f(r_1) f(r_2) \\ f(1_R) &= 1_S \quad \text{siempre que } 1_S \neq 0 \text{ es la identidad multiplicativa de } S. \end{aligned}$$

Anillo de endomorfismos de un grupo abeliano aditivo .- Sean M un grupo abeliano aditivo y $End(M) = \{f : M \to M \ / \ f \text{ es un homomorfismo}\}$. Si se definen las dos operaciones binarias por $f + g$ y fg en $End(M)$ mediante
$(f + g)(n) = f(m) + g(m)$ y $(fg)(m) = f(g(m))$ para todo $m \in M$, se prueba que $End(M)$ es un anillo unitario.

Definición 1.1.1 (Λ-módulo izquierdo) *(Objeto de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$).- Un Λ-módulo izquierdo es un grupo abeliano M (bajo la suma) provisto de un homomorfismo $\rho : \Lambda \to End(M)$ de anillos, definido por $\rho(r)(m) = rm$; $\forall r \in \Lambda$, $\forall m \in M$.*

La parte del homomorfismo de anillos significa que se cumplen las cuatro siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)a &= r_1 a + r_2 a \\ (r_1 r_2)a &= r_1(r_2 a) \\ 1a &= a \\ r(a_1 + a_2) &= ra_1 + ra_2 \quad \text{para todo } r, r_1, r_2 \in \Lambda; \text{ y todo } a, a_1, a_2 \in M. \end{aligned}$$

Se denota por Λ^{op} al anillo opuesto del anillo Λ. Los elementos $\lambda^{op} \in \Lambda^{op}$ son $\lambda^{op} = \lambda$ de Λ, así $(\Lambda^{op}, +)$ y $(\Lambda, +)$ son isomorfos como grupos abelianos. La multiplicación en Λ^{op} en base a la de Λ es dado por $\lambda_1^{op} \lambda_2^{op} = (\lambda_2 \lambda_1)^{op}$. Naturalmente son lo mismo los conjuntos subyacentes de los anillos Λ y Λ^{op} .

Λ-módulo Derecho (Objeto de $\mathfrak{M}^r_\Lambda$).- Un Λ-módulo derecho M es un Λ^{op}-módulo izquierdo.
Esto es, M es un grupo abeliano provisto de un homomorfismo de anillos
$\rho' : \Lambda^{op} \longrightarrow End(M)$ definido por $\rho'(r^{op})(m) = r^{op} m$; $\forall r^{op} \in \Lambda^{op}$, $\forall m \in M$.

- Un subconjunto A' de un Λ-módulo A es un submódulo de A si A' tiene estructura de un Λ-módulo heredada de A.

- Si A' es un submódulo de un Λ-módulo A, entonces el grupo cociente $A'' = A/A'$, cuyos elementos son $a + A'$ con $a \in A$, admite una estructura de Λ-módulo definiendo el homomorfismo de anillos $\rho : \Lambda \to End(A/A')$ por $\rho(r)(a + A') = ra + A'$.
  El Λ-módulo A/A' se llama módulo cociente de A por A'.

- Si A y B son Λ-módulos izquierdos, un homomorfismo de $\Lambda -$ módulos $\phi : A \to B$ es un homomorfismo de sus grupos abelianos subyacentes tal que $\phi(ra) = r\phi(a), \forall a \in A, \forall r \in \Lambda$. El conjunto $Hom_{\Lambda}(A, B) = \{f : A \to B \ / \ f$ es un homomorfismo de Λ-módulos$\}$ es un grupo abeliano bajo la suma.

Definición 1.1.2 *Se dice que un homomorfismo $f : A \to B$ de Λ-módulos es:*

i) *monomorfismo si f es inyectiva (como función).*

ii) *epimorfismo si f es sobreyectiva (como función).*

iii) *isomorfismo si f es un monomorfismo y epimorfismo.*

- Si $f \in Hom_{\Lambda}(A, B)$ es un isomorfismo, entonces se dice que A y B son Λ-módulos (o simplemente módulos) isomorfos y se denota por
  $f : A \cong B, \ A \overset{f}{\cong} B$ o $A \cong B$.

- Es importante mencionar el siguiente resultado de Λ-módulos:
  Si B y C son submódulos de un Λ-módulo A tales que $C \subseteq B$, entonces $A/B \cong (A/C) \, / \, (B/C)$.

Definición 1.1.3 *Dado $\phi : A \to B$ un homomorfismo de Λ-módulos se definen:*

i) *el núcleo de ϕ como $Ker(\phi) = \{a \in \ A \ / \ f(a) = 0\}$.*

ii) *la imagen de ϕ como $Im(\phi) = \{b \in \ B \ / \ b = f(a),$ para algún $a \in A\}$.*

iii) *el conúcleo de ϕ como $Coker(\phi) = B/Im(\phi) = \dfrac{B}{Im(\phi)}$.*

Son conocidos de la teoría de módulos los siguientes resultados:

- $Ker(\phi)$ es un submódulo de A.

- $Im(\phi)$ es un submódulo de B.

- $A/Ker(\phi) \cong Im(\phi)$.

1.1.2. Categorías

El problema mencionado de trasladar un isomorfismo para las homologías se localiza en la estructura algebraica llamada CATEGORÍA por ser una identificación de objetos mediante un morfismo especial como lo ilustra el isomorfismo de módulos. La localización del problema, indica que es necesaria la familiarización con la teoría y simbologías de categorías; entonces se introduce la noción de categoría como una abstracción general de conjuntos, grupos abelianos, $\Lambda -$ módulos , etc. En esta parte se va a establecer un lenguaje matemático apropiado para la descripción de sistemas matemáticos y aplicaciones de sistemas; en lo que respecta al lenguaje, es aplicable a **Álgebra Homológica**. Los conceptos de categoría y funtor primeramente han sido introducidos por Eilenberg y Maclane.

Definición 1.1.4 *Una categoría* $\mathfrak{C}$ *consiste de una colección de objetos denotada por* $|\mathfrak{C}|$*; donde para dos objetos* $A, B \in |\mathfrak{C}|$ *se tiene un conjunto* $\mathfrak{C}(A, B)$ *llamado conjunto de morfismos de* A *en* B*; y para tres objetos* $A, B, C \in |\mathfrak{C}|$ *se tiene una ley de composición* $\mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) \longrightarrow \mathfrak{C}(A, C)$*, que satisface los siguientes tres axiomas :*

CAT 1. *Los conjuntos* $\mathfrak{C}(A_1, B_1)$ *y* $\mathfrak{C}(A_2, B_2)$ *son disjuntos, a menos que* $A_1 = A_2$ *y* $B_1 = B_2$.

CAT 2. *Dados* $f \in \mathfrak{C}(A, B)$, $g \in \mathfrak{C}(B, C)$ *y* $h \in \mathfrak{C}(C, D)$ *se cumple* $h(gf) = (hg)f$ *(asociatividad de la ley de composición) para todo* A, B, C *y* $D \in |\mathfrak{C}|$.

CAT 3. *Para cada objeto* $A \in |\mathfrak{C}|$ *existe un morfismo identidad de* A *denotado por* $1_A : A \to A$ *tal que para cualesquier* $f : A \to B$, $g : C \to A$ *se tiene* $f\, 1_A = f$, $1_A\, g = g$*(existencia de identidad)*

Dada una categoría $\mathfrak{C}$:

i) Un elemento $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ se escribe también como $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.

ii) $\mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) = \{(f, g) \ / \ f : A \to B \text{ y } g : B \to C\}$.

iii) Sean $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{C}(B, C)$.
Si $\circ : \mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) \to \mathfrak{C}(A, C)$ es la ley de composición, entonces la composición de f y g es $\circ\,(f, g) = g \circ f$ ó simplemente gf.

iv) El axioma CAT1. enfatiza que se distingue dos morfismos a menos que sus dominios y rangos coincidan.
También se nota que la composición gf está solamente definida si el rango de f coincide con el dominio de g.

Definición 1.1.5 *Se dice que un morfismo* $f : A \to B$ *es un isomorfismo* (o *invertible) si existe un morfismo* $g : B \to A$ *tal que* $gf = 1_A$, $fg = 1_B$.

Claramente el mismo g es invertible y está determinado únicamente por f, se escribe $g = f^{-1}$ de modo que $(f^{-1})^{-1} = f$. También la composición de morfismos invertibles es invertible.

Para dar ejemplos de categorías se tiene que especificar los objetos, los morfismos e indicar como está definido el producto (o la composición) de morfismos:

Ejemplo 1.1.6 $\mathfrak{S}$ *es una categoría, cuyos objetos son conjuntos, sus morfismos son funciones (de un conjunto en otro). El producto de morfismos se define como la composición de funciones.*

Se cumplen los tres axiomas de categoría para $\mathfrak{S}$:

CAT 1. Sea $f \in \mathfrak{S}(A_1, B_1) \cap \mathfrak{S}(A_2, B_2)$, entonces se debe tener $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$. En efecto:
$f \in \mathfrak{S}(A_1, B_1)$ implica que $Dom(f) = A_1$ y $Ran(f) = B_1$;
$f \in \mathfrak{S}(A_2, B_2)$ implica que $Dom(f) = A_2$ y $Ran(f) = B_2$.
Por lo tanto $A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2$.

CAT 2. Dados $f \in \mathfrak{S}(A, B)$, $g \in \mathfrak{S}(B, C)$ y $h \in \mathfrak{S}(C, D)$ se cumple $h(gf) = (hg)f$ para todo A, B, C y $D \in |\mathfrak{S}|$.
En efecto, sea $a \in A$ (arbitrario), usando la definición de composición de funciones:

$$\begin{aligned} [h(gf)](a) &= h\{[gf](a)\} \\ &= h\{g[f(a)]\} \\ &= [hg]f(a) \\ &= [(hg)f](a). \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(gf) = (hg)f$.

CAT 3. Para cada $A \in |\mathfrak{S}|$ existe $1_A : A \to A$ definida por $1_A(a) = a$ para todo $a \in A$ tal que si $f : A \to B$, $g : C \to A$ se cumplen $f1_A = f$ y $1_A\, g = g$.
En efecto:

$$\begin{aligned} (f1_A)(a) &= f(1_A(a)) = f(a) && \text{para todo } a \in A. \\ (1_A\, g)(c) &= 1_A(g(c)) = g(c) && \text{para todo } c \in C \ \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.7 $\mathfrak{G}$ *es una categoría, cuyos objetos son grupos, sus morfismos son homomorfismos de grupos y el producto de dichos morfismos es la composición de los homomorfismos de grupos.*

Ejemplo 1.1.8 $\mathfrak{Ab}$ *es una categoría, cuyos objetos son grupos abelianos, morfismos son homomorfismos de grupos y el producto de morfismos es la composición de homomorfismos.*

Se verifican los tres axiomas de categoría para $\mathfrak{Ab}$:

CAT 1: Los conjuntos $\mathfrak{Ab}(A, B)$ y $\mathfrak{Ab}(C, D)$ son disjuntos a menos que $A = C$ y $B = D$.
Sea $f \in \mathfrak{Ab}(A, B) \cap \mathfrak{Ab}(C, D)$, de manera que $f : A \to B$ y $f : C \to D$ son homomorfismos de grupos, como todo grupo es un conjunto, en particular $f \in \mathfrak{S}(A, B) \cap \mathfrak{S}(C, D)$, recordando que $\mathfrak{S}$ una categoría (de conjuntos), se tiene que $A = C$ y $B = D$ como conjuntos.
Por ser $f : A \to B$ un homomorfismo de grupos, éste tiene como dominio el grupo A y como imagen el grupo B, luego se deduce que $A = C$ y $B = D$ como grupos.

CAT 2: Si $f \in \mathfrak{Ab}(A, B)$, $g \in \mathfrak{Ab}(B, C)$ y $h \in \mathfrak{Ab}(C, D)$, entonces $h(gf) = (hg)f$.
En vista de que los grupos son conjuntos, $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos en la categoría de conjunto $\mathfrak{S}$, por consiguiente $h(gf) = (hg)f$.

CAT 3: Para cada objeto $A \in |\mathfrak{Ab}|$ existe 1_A tal que para cualesquier $f : A \to B$, $g : C \to A$ morfismos en $\mathfrak{Ab}$ se tienen $f = f \circ 1_A, 1_A \circ g = g$.
Como los grupos son conjuntos, $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son morfismos en la categoría $\mathfrak{S}$, luego existe 1_A tal que $f = f \circ 1_A, 1_A \circ g = g$. Además 1_A preserva la operación de A porque $1_A(xy) = 1_A(x)1_A(y), \forall x \in A$. Por consiguiente existe 1_A morfismo identidad de A en $\mathfrak{Ab}$ ■

Ejemplo 1.1.9 $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ *es una categoría, cuyos objetos son* $\Lambda -$ *módulos izquierdos, morfismos son homomorfismos de dichos módulos y el producto de estos morfismos es la composición de los homomorfismos de* $\Lambda -$ *módulos izquierdos.*

Se satisfacen los tres axiomas de categoría para $\mathfrak{M}^l_\Lambda$:

CAT 1: Los conjuntos de morfismos $\mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A, B)$ y $\mathfrak{M}^l_\Lambda\ (C, D)$ son disjuntos a menos que $A = C$ y $B = D$.
Sea $f \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A, B) \cap \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (C, D)$, entonces $f : A \to B$ y $f : C \to D$ son homomorfismos de $\Lambda -$ módulos , luego son vistos como morfismos de $\mathfrak{S}$. De donde $f \in \mathfrak{S}(A, B) \cap \mathfrak{S}(C, D)$, como $\mathfrak{S}$ es una categoría (de conjuntos), se sigue que $A = C$ y $B = D$ como conjuntos.
Por ser $f : A \to B$ un homomorfismo de Λ-módulos, el dominio de f es el Λ-módulo A y la imagen de f es el Λ-módulo B, luego se deduce que $A = C$ y $B = D$ como Λ-módulos.

CAT 2: Si $f \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A, B)$, $g \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (B, C)$ y $h \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (C, D)$, entonces $h(gf) = (hg)f$.
Como $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos en la categoría de conjuntos $\mathfrak{S}$ por ser los $\Lambda -$ módulos conjuntos , se deduce que $h(gf) = (hg)f$.

CAT 3: Para cada objeto $A \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda\ |$ existe 1_A tal que para cualesquier $f : A \to B$, $g : C \to A$ morfismos en $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ se cumplen las igualdades $f = f \circ 1_A, 1_A \circ g = g$.

Como los $\Lambda -$ módulos son conjuntos, $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son morfismos en la categoría $\mathfrak{S}$, luego existe 1_A tal que $f = f \circ 1_A, 1_A \circ g = g$. Además 1_A preserva las operaciones de $\Lambda -$ módulo A ya que $1_A(x + y) = 1_A(x) + 1_A(y), \forall x, y \in A$; $1_A(rx) = r1_A(x), \forall x \in A\ \forall r \in \Lambda$. Por consiguiente existe 1_A morfismo identidad de A en $\mathfrak{M}_\Lambda^l$ ■

Ejemplo 1.1.10 $\mathfrak{M}_\Lambda^r$ *es una categoría, cuyos objetos son Λ-módulos derechos, sus morfismos son homomorfismos de Λ-módulos derechos y el producto de dichos morfismos es la composición de los homomorfismos entre Λ-módulos derechos.*

Dada una categoría $\mathfrak{C}$, se puede construir la categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$ cuyos objetos son los objetos de $\mathfrak{C}$, morfismos son los morfismos (o flechas) invertidos de $\mathfrak{C}$ y la composición de morfismos es dado por la composición de morfismos en $\mathfrak{C}$ invertida.

Proposición 1.1.11 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría, entonces $\mathfrak{C}^{op}$ es una categoría.*

Prueba .- Se verifican los tres axiomas de categoría para $\mathfrak{C}^{op}$:

CAT 1: Los conjuntos de morfismos $\mathfrak{C}^{op}(A, B)$ y $\mathfrak{C}^{op}(C, D)$ son disjuntos a menos que $A = C$ y $B = D$.
Sea $f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(A, B) \cap \mathfrak{C}^{op}(C, D)$, luego $f \in \mathfrak{C}(B, A) \cap \mathfrak{C}(D, C)$. Como $\mathfrak{C}$ es una categoría, se sigue que $A = C$ y $B = D$.

CAT 2: Si $f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(A, B)$, $g^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(B, C)$ y $h^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(C, D)$, entonces $h^{op}(g^{op}f^{op}) = (h^{op}g^{op})f^{op}$.
En efecto, usando la definición de composición de morfismos en $\mathfrak{C}^{op}$ y la asociatividad de la composición de morfismos en $\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned} h^{op}(g^{op}f^{op}) &= h^{op}\,(fg)^{op} \\ &= [(fg)h]^{op} \\ &= [f(gh)]^{op} \\ &= (gh)^{op}f^{op} \\ &= (h^{op}g^{op})f^{op}. \end{aligned}$$

CAT 3: Para cada objeto $A \in |\mathfrak{C}^{op}|$ existe 1_A^{op} tal que para cualesquier $f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}\,(A, B)$, $g^{op} \in \mathfrak{C}^{op}\,(C, A)$ se tiene $f^{op}1_A^{op} = f^{op}$ y $1_A^{op}g^{op} = g^{op}$.
En efecto, como $\mathfrak{C}$ es una categoría, $A \in |\mathfrak{C}^{op}| = |\mathfrak{C}|$, $f \in \mathfrak{C}\,(B, A)$ y $g \in \mathfrak{C}\,(A, C)$; se sabe que existe $1_A \in \mathfrak{C}\,(A, A)$ tal que $1_Af = f$ y $g1_A = g$, pasando a la opuesta $(1_Af)^{op} = f^{op}$ y $(g1_A)^{op} = g^{op}$. Ahora, usando la composición de morfismos en $\mathfrak{C}^{op}$ se obtiene que $f^{op}1_A^{op} = f^{op}$ y $1_A^{op}g^{op} = g^{op}$, donde 1_A^{op} es el morfismo de $\mathfrak{C}^{op}$ correspondiente a 1_A ■

Definición 1.1.12 *Un objeto I de una categoría $\mathfrak{C}$ es inicial si $\mathfrak{C}(I, X)$ es un conjunto unitario para todo $X \in |\mathfrak{C}|$. Un objeto T de una categoría $\mathfrak{C}$ es final (o coinicial) si $\mathfrak{C}(X, T)$ es un conjunto unitario. Un objeto $Z \in |\mathfrak{C}|$ es cero si es inicial y co-inicial.*

Se denotará con 0 al objeto cero de una categoría $\mathfrak{C}$ si lo tiene.
En la categoría de grupos abelianos $\mathfrak{Ab}$, un grupo con un solo elemento $0 = \{e\}$ es un objeto cero.

El morfismo $X \to 0 \to Y$ en una categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero se llama morfismo cero y se escribe 0_{XY}. Para cualquier $f : W \to X, \quad g : Y \to Z$ en $\mathfrak{C}$ se tiene $0_{XY}\, f = 0_{WY}, \quad g\, 0_{XY} = 0_{XZ}$. En adelante el morfismo 0_{XY} se denotará con 0. Si $\mathfrak{C}$ posee el objeto cero se llama categoría con objeto cero.

1.2. Funtores

Naturalmente se desea describir relaciones entre diferentes categorías, se formula la noción de transformación de una categoría en otra, tal una transformación se llama funtor.

Definición 1.2.1 *Un funtor covariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ de una categoría $\mathfrak{C}$ en otra $\mathfrak{D}$ es una regla que asocia a cada objeto X de $\mathfrak{C}$ un objeto FX de $\mathfrak{D}$, a cada morfismo $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ un morfismo $Ff \in \mathfrak{D}(FX, FY)$ tal que satisface los dos axiomas siguientes:*

FUN 1. $F(1_A) = 1_{FA}$ *para todo* $A \in |\mathfrak{C}|$.

FUN 2. $F(gf) = (Fg)(Ff)$ *para todo* $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ *y* $g \in \mathfrak{C}(B, C)$.

Ejemplo 1.2.2 *Sea $A \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda|$, entonces $Hom_\Lambda(A, -) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante.*

Para verificar la afirmación de Ejemplo 1.2.2 es importante observar cómo actúa $Hom_\Lambda(A, -)$ sobre los objetos y morfismos de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$:
Dado $B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda|$, se obtiene el grupo abeliano $Hom_\Lambda(A, -)(B) = Hom_\Lambda(A, B) \in |\mathfrak{Ab}|$; dado un morfismo $f \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(B, C)$, se obtiene un morfismo $Hom_\Lambda(A, f) \in \mathfrak{Ab}(Hom_\Lambda(A, B), Hom_\Lambda(A, C))$ definido por

$$Hom_\Lambda(A, f)h = fh \text{ para todo } h \in Hom_\Lambda(A, B) \tag{1.1}$$

Se verifica que $Hom_\Lambda(A, -) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ satisface los dos axiomas de funtor covariante:

FUN1. $Hom_\Lambda(A, 1_B) = 1_{Hom_\Lambda(A,B)}$ para todo $B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda|$.
En efecto : para un $B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda|$ dado, se sabe que existe morfismo identidad $1_B \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(B, B)$; haciendo $C = B$, $f = 1_B$ en (1.1), se nota que $Hom_\Lambda(A, 1_B) = 1_{Hom_\Lambda(A,B)} : Hom_\Lambda(A, B) \to Hom_\Lambda(A, B)$, pues

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda(A, 1_B)h = 1_B h &= h \\ &= 1_{Hom_\Lambda(A,B)}h \quad \text{para todo } h \in Hom_\Lambda(A, B). \end{aligned}$$

FUN 2. $Hom_\Lambda(A, gf) = Hom_\Lambda(A, g)Hom_\Lambda(A, f)$ para todo $f \in \mathfrak{m}^l_\Lambda(B, C)$ y $g \in \mathfrak{m}^l_\Lambda(C, D)$.

En efecto, para $f \in \mathfrak{m}^l_\Lambda(B, C)$ y $g \in \mathfrak{m}^l_\Lambda(C, D)$ se tiene que $gf \in \mathfrak{m}^l_\Lambda(B, D)$, luego usando (1.1) se obtiene que $Hom_\Lambda(A, gf) = Hom_\Lambda(A, g)Hom_\Lambda(A, f)$, puesto que para $Hom_\Lambda(A, gf) : Hom_\Lambda(A, B) \to Hom_\Lambda(A, D)$ y cualquier $h \in Hom_\Lambda(A, B)$ se cumple:

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda(A, gf)h = (gf)h &= g(fh) \\ &= Hom_\Lambda(A, g)(fh) \\ &= Hom_\Lambda(A, g)Hom_\Lambda(A, f)h \end{aligned}$$

En consecuencia, $Hom_\Lambda(A, -)$ es un funtor covariante ■

Ejemplo 1.2.3 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $A \in |\mathfrak{C}|$ (fijo). Si se define $M_A : \mathfrak{C} \to \mathfrak{S}$ sobre objetos por $M_A(X) = \mathfrak{C}(A, X)$ para cada $X \in |\mathfrak{C}|$ y sobre morfismos $M_A(\varphi) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{C}(A, X), \mathfrak{C}(A, X'))$ para cada morfismo $\varphi \in \mathfrak{C}(X, X')$ por $M_A(\varphi)(g) = \varphi g$ para todo $g \in \mathfrak{C}(A, X)$, entonces M_A es un funtor covariante (de la categoría $\mathfrak{C}$ en la categoría de conjuntos $\mathfrak{S}$).*

Se verifican los axiomas de funtor covariante para M_A.

FUN 1. Para cada $X \in |\mathfrak{C}|$ se tiene $M_A(1_X) = 1_{M_A(X)}$.

Usando la definición dada de M_A sobre objetos y morfismos para la función $M_A(1_X) : \mathfrak{C}(A, X) \longrightarrow \mathfrak{C}(A, X)$ se tiene:

$$\begin{aligned} M_A(1_X)(g) = 1_X g &= g \\ &= 1_{\mathfrak{C}(A,X)}(g) \\ &= 1_{M_A(X)}(g) \text{ para todo } g \in \mathfrak{C}(A, X), \end{aligned}$$

luego $M_A(1_X) = 1_{M_A(X)}$.

FUN 2. Para todo $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ y $g \in \mathfrak{C}(Y, Z)$ se tiene $M_A(gf) = M_A(g)M_A(f)$.

Como $\mathfrak{C}$ es una categoría, $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ y $g \in \mathfrak{C}(Y, Z)$, se deduce que $gf \in \mathfrak{C}(X, Z)$. Por definición de M_A se obtiene la función $M_A(gf) : \mathfrak{C}(A, X) \longrightarrow \mathfrak{C}(A, Z)$, para la cual se cumplen:

$$\begin{aligned} M_A(gf)(h) &= (gf)h \\ &= g(fh) \\ &= M_A(g)(fh) \\ &= M_A(g)[M_A(f)h] \\ &= [M_A(g)M_A(f)](h) \text{ para todo } h \in \mathfrak{C}(A, X). \end{aligned}$$

Por transitividad se sigue que $M_A(gf) = M_A(g)M_A(f)$.

Así, M_A es un funtor covariante por verificarse FUN 1. y FUN 2. para M_A ■

Ejemplo 1.2.4 *Sean A un Λ-módulo derecho y B un Λ-módulo izquierdo, entonces:*

i) $(-) \otimes_\Lambda B : \mathfrak{M}^r_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ *es un funtor covariante.*

ii) $A \otimes_\Lambda (-) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ *es un funtor covariante.*

Prueba :

i) Dado un objeto A en $\mathfrak{M}^r_\Lambda$, se obtiene un grupo abeliano
$[(-) \otimes_\Lambda B](A) = A \otimes_\Lambda B$, luego $A \otimes_\Lambda B \in |\mathfrak{Ab}|$,
Dado $\alpha : A \to A'$ en $\mathfrak{M}^r_\Lambda$, se obtiene un morfismo $\alpha_* : A \otimes B \to A' \otimes B$ en $\mathfrak{Ab}$, donde $\alpha_* = \alpha \otimes id_B, \qquad id_B = 1_B$

$$[(-) \otimes_\Lambda B][\alpha] = \alpha \otimes 1_B \ldots (1)$$

$(-) \otimes_\Lambda B : \mathfrak{M}^r_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ satisface los dos siguientes axiomas de funtores :

FUN 1. $1_A \otimes B = 1_{A\otimes B}$ para todo $A \in |\mathfrak{M}^r_\Lambda|$.
De (1):$[(-) \otimes_\Lambda B](1_A) = 1_A \otimes 1_B$, de modo que

$$\begin{aligned}(1_A \otimes B)(a \otimes b) &= (1_A \otimes 1_B)(a \otimes b)\\ &= 1_A a \otimes 1_B b\\ &= a \otimes b\\ &= 1_{A\otimes B}(a \otimes b)\end{aligned}$$

Luego $1_A \otimes B = 1_{A\otimes B}$.

FUN 2. $(gf) \otimes_\Lambda B = (g \otimes_\Lambda B)(f \otimes_\Lambda B)$ para todo los morfismos $f : A \to A'$ y $g : A' \to A''$ en $\mathfrak{M}^r_\Lambda$.
Como $gf : A \to A''$, $(gf) \otimes B = (gf) \otimes 1_B$.
Sea $a \otimes b \in A \otimes B$, entonces

$$\begin{aligned}(gf) \otimes B(a \otimes b) &= ((gf) \otimes 1_B)(a \otimes b)\\ &= (gf(a)) \otimes 1_B b\\ &= g(f(a)) \otimes 1_B(1_B b)\\ &= (g \otimes 1_B)(f(a) \otimes 1_B b)\\ &= (g \otimes 1_B)(f \otimes 1_B)(a \otimes b)\\ &= (g \otimes B)(f \otimes B)(a \otimes b)\end{aligned}$$

Luego $(gf) \otimes B = (g \otimes B)(f \otimes B)$.

ii) La prueba se realiza de manera análoga a la de *i)* ■

Definición 1.2.5 *Dadas las categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, un funtor contravariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una regla que asocia a cada objeto X de $\mathfrak{C}$ un objeto FX de $\mathfrak{D}$, a cada morfismo $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ un morfismo $Ff \in \mathfrak{D}(FY, FX)$ tal que satisface los dos axiomas siguientes:*

FUN 1. *$F(1_A) = 1_{FA}$ para todo $A \in |\mathfrak{C}|$.*

FUN 2. *$F(gf) = (Ff)(Fg)$ para todo $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ y todo $g \in \mathfrak{C}(B, C)$.*

Ejemplo 1.2.6 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $B \in |\mathfrak{C}|$ (fijo). Si se define $M^B : \mathfrak{C} \to \mathfrak{S}$ sobre objetos por $M^B(X) = \mathfrak{C}(X, B)$ para cada $X \in |\mathfrak{C}|$ y sobre morfismos $M^B(f) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{C}(X, B), \mathfrak{C}(X', B))$ para cada morfismo $f \in \mathfrak{C}(X', X)$ por $M^B(f)(h) = hf$ para todo $h \in \mathfrak{C}(X, B)$, entonces M^B es un funtor contravariante (de la categoría $\mathfrak{C}$ en la categoría de conjuntos $\mathfrak{S}$).*

Se cumplen los dos axiomas de funtor contravariante para M^B:

FUN 1. Para todo $X \in |\mathfrak{C}|$ se tiene $M^B(1_X) = 1_{M^B(X)}$.
En efecto, para un $X \in |\mathfrak{C}|$ dado existe $1_X \in \mathfrak{C}(X, X)$. En particular para $f = 1_X$ y $X' = X$ se ve que $M^B(1_X) : \mathfrak{C}(X, B) \to \mathfrak{C}(X, B)$ está definido por $M^B(1_X)(h) = h1_X$ para todo $h \in \mathfrak{C}(X, B)$. Como $\mathfrak{C}(X, B) \in |\mathfrak{S}|$ existe $1_{\mathfrak{C}(X,B)}$ tal que $1_{\mathfrak{C}(X,B)}(h) = h$ para todo $h \in \mathfrak{C}(X, B)$. De las dos últimas igualdades, considerando que $h1_X = h$ y $M^B(X) = \mathfrak{C}(X, B)$, se deduce que $M^B(1_X) = 1_{M^B(X)}$.

FUN 2. Para todo $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ y $g \in \mathfrak{C}(Y, Z)$ se tiene $M^B(gf) = M^B(f)M^B(g)$.
En efecto, $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ y $g \in \mathfrak{C}(Y, Z)$ implica que $gf \in \mathfrak{C}(X, Z)$. Por definición de M^B, el morfismo $M^B(gf) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{C}(Z, B), \mathfrak{C}(X, B))$ está dado por $M^B(gf)(h) = h(gf)$ para todo $h \in \mathfrak{C}(Z, B)$.
Desarrollando

$$\begin{aligned} M^B(gf)(h) &= h(gf) \\ &= (hg)f \\ &= [M^B(g)h]f \\ &= M^B(f)[M^B(g)h] \\ &= [M^B(f)M^B(g)](h) \text{ para todo } h \in \mathfrak{C}(Z, B), \end{aligned}$$

se obtiene $M^B(gf) = M^B(f)M^B(g)$.

Por definición, M^B es un funtor contravariante por cumplirse FUN 1. y FUN 2. para M^B ■

Esencialmente los funtores contravariantes son covariantes.

Usando la categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$ de una categoría $\mathfrak{C}$, $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor contravariante si $F : \mathfrak{C}^{op} \to \mathfrak{D}$ es un funtor covariante.
El siguiente ejemplo muestra cómo se puede usar funtores covariantes para tratar funtores contravariantes.

Ejemplo 1.2.7 *$Hom_\Lambda(-,B) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor contravariante para cada $B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda|$ fijo.*

Se nota que para cada $A \in \left|\mathfrak{M}^l_\Lambda\right|$, $Hom_\Lambda(-,B)(A) = Hom_\Lambda(A,B) \in |\mathfrak{Ab}|$;
para cada $f \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(C,A)$, el morfismo $Hom_\Lambda(f,B) \in \mathfrak{Ab}\,(Hom_\Lambda(A,B), Hom_\Lambda(C,B))$ está definido por $Hom_\Lambda(f,B)(h) = hf$ para todo $h \in Hom_\Lambda(A,B)$.
De la definición dada de $Hom_\Lambda(-,B)$ sobre objetos y morfismos de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$, se obtiene que:
$Hom_\Lambda(-,B)(A) = Hom_\Lambda(A,B) \in |\mathfrak{Ab}|$ para todo $A \in \left|\mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda\right|$.
$Hom_\Lambda(f^{op},B)(h) = f^{op}h$ para todo $h \in Hom_\Lambda(A,B)$ y todo morfismo $f^{op} \in \mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda(A,C)$.
Se prueba que $Hom_\Lambda(-,B) : \mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante, verificando los dos siguientes axiomas:

FUN1. $Hom_\Lambda(1_A,B) = 1_{Hom_\Lambda(A,B)}$ para todo $A \in |\mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda|$.
En efecto, para cada $A \in |\mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda|$ existe el morfismo identidad $1^{op}_A \in \mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda(A,A)$.
Tomando $f^{op} = 1^{op}_A$ y $C = A$, se sigue para
$Hom_\Lambda(1^{op}_A,B) : Hom_\Lambda(A,B) \to Hom_\Lambda(A,B)$ la secuencia de igualdades

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda(1^{op}_A,B)h = 1^{op}_A h = h1_A &= h \\ &= 1_{Hom_\Lambda(A,B)}h \text{ para todo } h \in Hom_\Lambda(A,B). \end{aligned}$$

Pero $1^{op}_A = 1_A$, luego $Hom_\Lambda(1_A,B) = 1_{Hom_\Lambda(A,B)}$.

FUN 2. $Hom_\Lambda(g^{op}f^{op},B) = Hom_\Lambda(g^{op},B)Hom_\Lambda(f^{op},B)$ para todo $f^{op} \in \mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda(A,C)$ y todo $g^{op} \in \mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda(C,D)$.
En efecto, para cualquier $f^{op} \in \mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda(A,C)$ y $g^{op} \in \mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda(C,D)$ se tiene que $(fg)^{op} = g^{op}f^{op} \in \mathfrak{M}^{l\ op}_\Lambda(A,D)$. Aplicando $Hom_\Lambda(-,B)$ se obtiene
$Hom_\Lambda(g^{op}f^{op},B) : Hom_\Lambda(A,B) \to Hom_\Lambda(D,B)$, para el cual se tiene

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda(g^{op}f^{op},B)h = (fg)^{op}h &= h(fg) \\ &= (hf)g \\ &= g^{op}(hf) \\ &= g^{op}(f^{op}h) \\ &= g^{op}(Hom_\Lambda(f^{op},B)h) \\ &= Hom_\Lambda(g^{op},B)Hom_\Lambda(f^{op},B)h \end{aligned}$$

para todo $h \in Hom_\Lambda(A,B)$.

Por lo tanto, se concluye que $Hom_\Lambda(-,B) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor contravariante ■

Proposición 1.2.8 *Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ categorías. Si $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ funtores covariantes, entonces $GF : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ es un funtor covariante.*

Prueba .- Se nota que $GF : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ se puede definir sobre objetos y sobre morfismos por $GF(A) = G(F(A))$ y $GF(f) = G(F(f))$ para cada $A \in |\mathfrak{A}|$ y cada $f \in \mathfrak{A}(A,B)$, respectivamente.
Sean $A \in |\mathfrak{A}|$, $f \in \mathfrak{A}(A,B)$ y $g \in \mathfrak{A}(B,C)$. Por hipótesis F es un funtor covariante, entonces $F(1_A) = 1_{F(A)}$ y $F(gf) = F(g)F(f)$. Ahora, aplicando G y usando el hecho que G es funtor covariante, se deduce que
$GF(1_A) = G(F(1_A)) = G\left(1_{F(A)}\right) = 1_{GF(A)}; GF(gf) = G(F(g)F(f)) = GF(g)GF(f)$.
Por lo tanto, GF es un funtor covariante por preservar cada morfismo identidad y la composición de morfismos ■

1.3. Dualidad, Morfismos y Núcleos

En esta parte se explica el principio de dualidad en la teoría de categorías.

Se comienza recordando, dada una categoría $\mathfrak{C}$ es posible construir la categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$. Los objetos de $\mathfrak{C}^{op}$ son los objetos de $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}^{op}(Y,X) = \mathfrak{C}(X,Y)$ para todo $X, Y \in |\mathfrak{C}|$.
Si $f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(X,Y)$ y $g^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(Y,Z)$, entonces la composición $g^{op}f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(X,Z)$ es definida por $g^{op}f^{op} = (fg)^{op}$, donde fg es la composición de g y f en $\mathfrak{C}$.
$\mathfrak{C}^{op}$ se obtiene de $\mathfrak{C}$ invirtiendo a los morfismos y conservando a los objetos.

Proposición 1.3.1 *Para $\mathfrak{C}^{op}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

i) *$\mathfrak{C}^{op}$ es la categoría con los mismos morfismos identidades que $\mathfrak{C}$.*

ii) *Si $\mathfrak{C}$ tiene morfismos ceros, entonces $\mathfrak{C}^{op}$ también tiene morfismos ceros.*

iii) $(\mathfrak{C}^{op})^{op} = \mathfrak{C}$.

Prueba:

i) Como $\mathfrak{C}$ es una categoría, para cada $A \in |\mathfrak{C}|$ existe $1_A \in \mathfrak{C}(A,A)$ tal que $f1_A = f$ para cualquier $f \in \mathfrak{C}(A,B)$.
Similarmente, para $A \in |\mathfrak{C}^{op}|$ existe $1_A^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(A,A)$ y es tal que
$1_A^{op}f^{op} = f^{op}$ para $f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(B,A)$.
Considerando que $\mathfrak{C}^{op}(A,A) = \mathfrak{C}(A,A)$ se obtiene :
tomando $B = A$ y $f = 1_A^{op}$ que $1_A^{op}1_A = 1_A^{op}$; tomando $B = A$ y $f^{op} = 1_A$ que $1_A^{op}1_A = 1_A$. De estas deducciones, $1_A^{op} = 1_A$.

ii) Sea $0 \in \mathfrak{C}(X,Y)$ un morfismo cero en $\mathfrak{C}$, entonces para cualesquier $f \in \mathfrak{C}(Y,Z)$ y $g \in \mathfrak{C}(W,X)$ se tiene $f0 = 0$ y $0g = 0$ en $\mathfrak{C}$. En la categoría opuesta se cumplen las igualdades $0^{op}f^{op} = 0^{op}$ y $g^{op}0^{op} = 0^{op}$ para todo $f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(Z,Y)$ y $g^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(X,W)$; así $0^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(Y,X)$ es el morfismo cero en $\mathfrak{C}^{op}$.

iii) Se ve que $|(\mathfrak{C}^{op})^{op}| = |\mathfrak{C}|$ y $(\mathfrak{C}^{op})^{op}(X,Y) = \mathfrak{C}^{op}(Y,X) = \mathfrak{C}(X,Y)$ para todo $X, Y \in |\mathfrak{C}|$. Ahora, observando la construcción, se nota que se va de $\mathfrak{C}$ a $(\mathfrak{C}^{op})^{op}$ invirtiendo dos veces cada morfismo; esto ocurre en particular con el producto de morfismos, luego se llega a que $(\mathfrak{C}^{op})^{op}$ tiene el mismo producto de morfismos que $\mathfrak{C}$. Por consiguiente $(\mathfrak{C}^{op})^{op} = \mathfrak{C}$ ■

Definición 1.3.2 *Sean f, u y v morfismos en una categoría $\mathfrak{C}$. Se dice que:*

i) *f es monomorfismo (o monic) si $fu = fv$ implica $u = v$.*

ii) *f es epimorfismo (o epic) si $uf = vf$ implica $u = v$.*

Proposición 1.3.3 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría.*

i) *$f \in \mathfrak{C}(X,Y)$ es monic si y sólo si $f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(Y,X)$ es epic.*

ii) *$f \in \mathfrak{C}(X,Y)$ es epic si y sólo si $f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(Y,X)$ es monic.*

Prueba .- Sólo se probará la parte *i)* por ser la prueba de *ii)* completamente análoga.

i) $\Rightarrow$) Sean u^{op}, $v^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(X,Z)$ tales que $u^{op}f^{op} = v^{op}f^{op}$, entonces para que f^{op} sea epic se debe deducir que $u^{op} = v^{op}$.
En efecto, de la igualdad $u^{op}f^{op} = v^{op}f^{op}$ se obtiene que $(fu)^{op} = (fv)^{op}$, de donde $fu = fv$ en $\mathfrak{C}$. Como f es monic, $u = v$. Luego $u^{op} = v^{op}$.

i) $\Leftarrow$) Sean u, $v \in \mathfrak{C}(W,X)$ tales que $fu = fv$, entonces $u = v$.
En efecto, de la igualdad $fu = fv$ se obtiene que $u^{op}f^{op} = v^{op}f^{op}$. Como f^{op} es epic se deduce que $u^{op} = v^{op}$, así en $\mathfrak{C}$ se obtiene que $u = v$ ■

Se hace uso de la noción de $\mathfrak{C}^{op}$ para introducir el siguiente principio.

Definición 1.3.4 (Principio de Dualidad) *Si a es una afirmación con sentido en cualquier categoría $\mathfrak{C}$, sea $a(\mathfrak{C})$ la afirmación con sentido en $\mathfrak{C}$. Entonces la afirmación dual a^{op} de a está definida por $a^{op}(\mathfrak{C}) = a(\mathfrak{C}^{op})$.*

Ejemplo 1.3.5 *$a(\mathfrak{C})$: I es inicial en $\mathfrak{C}$ si $\mathfrak{C}(I,X)$ es un átomo (unitario) para todo $X \in |\mathfrak{C}|$.*
$a(\mathfrak{C}^{op})$: I es inicial en $\mathfrak{C}^{op}$ si $\mathfrak{C}^{op}(I,X)$ es un átomo para todo $X \in |\mathfrak{C}^{op}|$.
$a^{op}(\mathfrak{C})$: I es coinicial en $\mathfrak{C}$ si $\mathfrak{C}(X,I)$ es un átomo para todo $X \in |\mathfrak{C}|$.

Luego, los objetos coiniciales son objetos terminales. Así inicial y terminal son conceptos duales.

Ejemplo 1.3.6 *Sea $a(\mathfrak{C})$: f es monic en $\mathfrak{C}$ si $fu = fv$ implica $u = v$.*
Entonces hallar $a^{op}(\mathfrak{C})$.

Solución .- Por definición $a^{op}(\mathfrak{C}) = a(\mathfrak{C}^{op})$, luego se debe hallar la afirmación sobre la categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$.
En efecto, como la afirmación a vale en toda categoría $\mathfrak{C}$, en particular vale en la categoría $\mathfrak{C}^{op}$, así se obtiene $a(\mathfrak{C}^{op})$: f^{op} es monic en $\mathfrak{C}^{op}$ si $f^{op}u^{op} = f^{op}v^{op}$ implica $u^{op} = v^{op}$.
Como $f^{op}u^{op} = (uf)^{op}$ y $f^{op}v^{op} = (vf)^{op}$ se tiene f^{op} es monic en $\mathfrak{C}^{op}$ si $(uf)^{op} = (vf)^{op}$ implica $u^{op} = v^{op}$. Así, la afirmación dual pedida en $\mathfrak{C}$ es: f es epic en $\mathfrak{C}$ si $uf = vf$ implica $u = v$ ■
Así los conceptos monic y epic son duales.

Proposición 1.3.7 *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

i) *La composición gf de monomorfismos es monomorfismo.*

ii) *La composición gf de epimorfismos es epimorfismo*

Prueba:

i) Sean g y f dos monics, entonces de $(gf)\alpha = (gf)\beta$ se deduce que $\alpha = \beta$. Esto quiere decir que la composición gf es un monomorfismo.
En efecto, de $(gf)\alpha = (gf)\beta$ por asociatividad se tiene $g(f\alpha) = g(f\beta)$; como g es monic se sigue que $f\alpha = f\beta$; por el mismo argumento $\alpha = \beta$ debido a que f es monic.

ii) Sean $g \in \mathfrak{C}(Y, Z)$ y $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ epics, entonces se debe probar que gf es epic.
Por Proposición 1.3.3 $g^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(Z, Y)$ y$f^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(Y, X)$ son monic. Por la parte i), $(gf)^{op} = f^{op}g^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(Z, X)$ es monic. Así, conforme a Proposición 1.3.3, $gf \in \mathfrak{C}(X, Z)$ es epic ■

Proposición 1.3.8 *Sean f y g morfismos en una categoría $\mathfrak{C}$:*

i) *Si gf es monic, entonces f es monic.*

ii) *Si fg es epic, entonces f es epic.*

Prueba:

i) Sea $fu = fv$, para que f sea monic se debe obtener $u = v$.
En efecto, de $fu = fv$ se deduce $g(fu) = g(fv)$, usando asociatividad $(gf)u = (gf)v$, como gf es monic, se obtiene $u = v$. Luego f es monic.

ii) Sea fg epic, entonces se debe deducir que f es epic.
En efecto, como fg es epic, por Proposición 1.3.3 $g^{op}f^{op} = (fg)^{op}$ es monic en $\mathfrak{C}^{op}$. Por la parte i), f^{op} es monic en $\mathfrak{C}^{op}$; luego f es epic ■

El procedimiento de invertir flechas puede ser aplicado a las definiciones, axiomas, afirmaciones, teoremas; también en las pruebas, etc.
Si se prueba que un cierto teorema $\mathcal{J}$ se cumple en cualquier categoría $\mathfrak{C}$ satisfaciendo axiomas $A, B, \ldots$, entonces el teorema $\mathcal{J}^{op}$ también se cumple en la categoría $\mathfrak{C}$ satisfaciendo axiomas $A^{op}, B^{op}, \ldots$

Si φ es un morfismo en $\mathfrak{C}$ entonces φ es monic en $\mathfrak{C}$ si y sólo si φ^{op} es epic como morfismo en $\mathfrak{C}^{op}$.

El proceso automático de dualización es útil y conveniente; será usado en lo sucesivo.

Ahora, se va a caracterizar monic y epic en la categoría de conjuntos $\mathfrak{S}$.

Proposición 1.3.9 *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

i) *f es monic en $\mathfrak{S}$ si y sólo si f es inyectiva.*

ii) *f es epic en $\mathfrak{S}$ si y sólo si f es sobreyectiva.*

Prueba:

i) Si $f : X \to Y$ es inyectiva y $fu = fv$ con $u, v : W \to X$. Entonces para $w \in W$, $fu(w) = fv(w)$, como f es inyectiva, $u(w) = v(w)$, luego $u = v$ y f es monic.
Recíprocamente, si f es monic y $f(x_1) = f(x_2)$. Sea $\{0\}$ el conjunto atómico, y definimos $u, v : \{0\} \to X$ por $u(0) = x_1, \quad v(0) = x_2$. Entonces $fu = fv$ implica $u = v$ por ser f monic. Esto significa que $x_1 = x_2$, así f es inyectiva.

ii) Si $f : X \to Y$ es sobreyectiva y $uf = vf$. Como f es sobreyectiva, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Luego
$u(y) = u(f(x)) = uf(x) = vf(x) = v(y)$ para todo $y \in Y$, de donde $u = v$. Por lo tanto f es epic.

Recíprocamente, si f es epic. Suponga que f no es sobreyectiva, luego existe $y_0 \in Y - fX$.
Sea $Z = \{0, 1\}$. Se puede definir

$$\begin{aligned} u : Y &\longrightarrow Z \quad \text{por } u(y) = 0 \text{ para todo } y. \\ v : Y &\longrightarrow Z \quad \text{por } v(y) = 0 \text{ si } y \neq y_0, \\ &\qquad\quad\;\; v(y) = 1 \text{ si } y = y_0. \end{aligned}$$

Así $u \neq v$, pero $uf = vf$ porque $y_0 \notin fX$ ($\overset{f\text{es epic.}}{\rightarrow\leftarrow}$). Luego f es sobreyectiva ■

Corolario 1.3.10 *:*

i) *Si gf es inyectiva, entonces f es inyectiva.*

ii) *Si fg es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva*

Prueba .- Es consecuencia inmediata de las dos proposiciones anteriores ■

Notación.- Se denotará en adelante un monomorfismo por $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$ y un epimorfismo por $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$.

Ahora se da otro ejemplo del principio de dualidad.
Recuerde que si $f \in \mathfrak{G}(G, H)$, el núcleo de f es $K = \{x \in G \ : \ fx = e\}$, donde e es la identidad de H. Se puede escribir $K = f^{-1}\{e\}$. En categorías no necesariamente se tiene elemento e de conjuntos para trabajar con ellos y, por consiguiente se necesita una caracterización en términos de MORFISMOS.
Así se debe sustituir en primer lugar la afirmación de que K es un subgrupo de G , por la inmersión k en la sucesión $K \overset{k}{\rightarrowtail} G \overset{f}{\longrightarrow} H$.
Se observa que:

i) $fk = 0$ (0_{KH} es el homomorfismo constante). También k es algo así como MAXIMAL para esta propiedad de ser anulada por composición por la izquierda con f. Esto se precisa en seguida.

ii) Si $fg = 0$, entonces $g = kh$ para algún h.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, "k"] \arrow[rr, bend left, "0"] & G \arrow[r, "f"] & H \\
L \arrow[u, dotted, "\exists h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se prueba que las propiedades *i)* y *ii)* caracterizan el núcleo k (salvo isomorfismo canónico).
Las flechas continuas forman parte de los datos y las flechas punteadas son los morfismos, cuya existencia está dada por una definición o será demostrada.

Definición 1.3.11 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con cero y $f \in \mathfrak{C}(G, H)$. Entonces $k : K \to G$ es núcleo de f si k es monic y se cumplen:*

i) $fk = 0$

ii) $fg = 0$*, entonces* $g = kh$*, para algún* h.

Definición 1.3.12 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con cero y $f \in \mathfrak{C}(H, G)$. Entonces $k : G \to K$ es conúcleo de f si k es epic y se cumplen:*

i) $kf = 0$

ii) Si $gf = 0$*, entonces* $g = hk$ *para algún* h

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, "k"] \arrow[rr, bend left, "0"] & G \arrow[r, "f"] & H \\
L \arrow[u, dotted, "\exists h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[d, dotted, "\exists h"'] & G \arrow[l, two heads, "k"'] \arrow[dl, "g"'] & H \arrow[l, tail, "f"'] \arrow[ll, bend right, "0"'] \arrow[dll, "0"] \\
L & &
\end{tikzcd}$$

k es núcleo de f. **k es conúcleo de f.**

Notación.- Se denotará el núcleo del morfismo f por $ker(f)$ y el conúcleo de f por $coker(f)$.

Proposición 1.3.13 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $f \in \mathfrak{C}(H, G)$. El morfismo $k \in \mathfrak{C}(G, K)$ es conúcleo de f si y sólo si $k^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(K, G)$ es núcleo de f^{op}.*

Prueba :

$\Rightarrow$) por hipótesis $k = coker(f)$, entonces:

a) $k \in \mathfrak{C}(G, K)$ es epic.

b) $kf = 0$

c) Si $g \in \mathfrak{C}(G, L)$ es tal que $gf = 0$, entonces existe $h \in \mathfrak{C}(K, L)$ tal que $g = hk$.

Aplicando el principio de dualidad a cada una de las afirmaciones *a*), *b*) y *c*):

d) $k^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(K, G)$ es monic.

e) $f^{op}k^{op} = 0$

f) Si $g^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(L, G)$ es tal que $f^{op}g^{op} = 0$, entonces existe $h^{op} \in \mathfrak{C}^{op}(L, K)$ tal que $g^{op} = k^{op}h^{op}$.

Por Definición 1.3.11, $k^{op} = ker(f^{op})$.

$\Leftarrow$) La recíproca se prueba de manera análoga ■

Proposición 1.3.14 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con cero. Entonces:*

i) *Si $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ es monic, entonces $ker(f) = 0$.*

ii) *Si $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ es epic, entonces $coker(f) = 0$.*

Prueba :

i) Se probará que $ker(f) = 0$. En efecto, se cumplen para el morfismo cero:

a) $f0 = 0$

b) Si $g : W \to X$ es tal que $fg = 0$, entonces existe $h : W \to K$ tal que $g = 0h$. Para asegurar la existencia de h, se puede usar el hecho que f es monic, así de $fg = 0 = f0$ resulta que $g = 0$. Asumiendo $h = 0$, queda verificado la afirmación *b)*.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, "0"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
W \arrow[u, dotted, "0"] \arrow[ur, "g=0"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

c) El morfismo $0 \in \mathfrak{C}(K, X)$ es monic.
Sean $u, v \in \mathfrak{C}(Z, K)$ tales que $0u = 0v$, entonces $u = v$.
En efecto, f es monic implica que K es un conjunto unitario. Por otro lado, de la igualdad $0u = 0v$ se obtiene que $0[u(z)] = 0[v(z)]$ para todo $z \in Z$, como K es unitario $u(z) = v(z)$ para todo $z \in Z$. Por lo tanto $u = v$.
De *a)*, *b)* y *c)* se deduce que $ker(f) = 0$.

ii) Se hará la prueba usando el principio de dualidad y Proposición 1.3.13.
Sea $a(\mathfrak{C})$: Si f es monic, entonces $ker(f) = 0$.
Esta afirmación se cumple por la parte *i)* en toda categoría $\mathfrak{C}$, en particular se cumple $a(\mathfrak{C}^{op})$; es decir, si f^{op} es monic, entonces $ker\,(f^{op}) = 0$. Por dualidad se cumple $a^{op}(\mathfrak{C})$; esto quiere decir que si f es epic, entonces $coker(f) = 0$ ■

1.4. Productos y Coproductos en Categorías

Se tiene una idea intuitiva de los productos cartesianos en $\mathfrak{S}$ y productos directos de $\mathfrak{G}$, son de algún modo ejemplos del mismo concepto básico. Así se busca generalizar a categorías arbitrarias estas ideas. Otra vez, puesto que no se considera elementos de objetos en categorías generales, se necesita una caracterización en términos de morfismos.

Definición 1.4.1 *Un producto de dos objetos A_1 y A_2 (si existe) en la categoría $\mathfrak{C}$, es una terna ordenada $(A; p_1, p_2)$ formada por un objeto A y morfismos $p_i : A \to A_i$ para i=1,2 llamados proyecciones, que satisface la propiedad universal: Dado un objeto X y morfismos $f_i : X \to A_i$ para i=1,2, existe un único morfismo $f = \{f_1, f_2\} : X \longrightarrow A$ con $p_1 f = f_1,\ p_2 f = f_2$. El diagrama de la propiedad universal mencionada aparece abajo*

$$\begin{tikzcd}
& A_i \\
X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, dotted, "\exists! f"] & A \arrow[u, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

para i=1,2. Éste claramente es conmutativo.

Proposición 1.4.2 *Sea $(A; p_1, p_2)$ un producto de A_1 y A_2. Si existe un isomorfismo $\mu : A' \to A$, entonces $(A'; p_1\mu, p_2\mu)$ es un producto de A_1 y A_2.*

Prueba .- Dados un objeto Y y dos morfismos $f_i : Y \to A_i$ para $i = 1, 2$; se debe garantizar la existencia de un único morfismo $f = \{f_1, f_2\} : Y \to A'$ tal que $p_1\mu f = f_1$ y $p_2\mu f = f_2$.
En efecto: Del hecho que $(A; p_1, p_2)$ es un producto de A_1 y A_2 se sabe que existe un único morfismo $g : Y \to A$ tal que $p_1 g = f_1$ y $p_2 g = f_2$. Como $\mu : A' \to A$ es un isomorfismo existe $\mu^{-1} : A \to A'$. Así, definiendo $f = \mu^{-1}g : Y \to A'$ se garantiza la existencia del único morfismo $f = \{f_1, f_2\} : Y \to A'$ con las propiedades requeridas: $p_1\mu f = (p_1\mu)(\mu^{-1}g) = f_1$ y $p_2\mu f = (p_2\mu)(\mu^{-1}g) = f_2$.
Por Definición 1.4.1, $(A'; p_1\mu, p_2\mu)$ es un producto de A_1 y A_2 ■

Definición 1.4.3 *Sean $(A; p_1, p_2)$ y $(A'; p_1', p_2')$ productos de A_1 y A_2. Se dice que dichos productos son canónicamente equivalentes si existe un isomorfismo $\mu : A' \to A$ tal que $p_1\mu = p_1'$ y $p_2\mu = p_2'$.*

No es posible garantizar que el producto exista en una categoría $\mathfrak{C}$; sin embargo, se prueba que es esencialmente única cuando existe. Esto se establece en el siguiente:

Teorema 1.4.4 *Un producto, si existe es único salvo una equivalencia canónica.*

Prueba.- Si $(A; p_1, p_2)$ y $(A'; p_1', p_2')$ son productos de los objetos A_1 y A_2, entonces se va a deducir que dichos productos son canónicamente equivalentes:
Considere los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, dotted, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_2"'] & A \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
& A_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A_1 \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, dotted, "\exists! f'"] \arrow[dr, "f_2"'] & A' \arrow[u, "p_1'"'] \arrow[d, "p_2'"] \\
& A_2
\end{tikzcd}$$

Puesto que A es el objeto producto, del primer diagrama se obtiene el único morfismo $f = \mu : A' \longrightarrow A$ tal que $p_1\mu = p_1'$, $p_2\mu = p_2'$. De hecho, se probará que μ es un isomorfismo.
De otro lado, A' es el objeto producto, entonces del segundo diagrama se obtiene un morfismo único $f' = \nu : A \longrightarrow A'$ tal que $p_1'\nu = p_1$, $p_2'\nu = p_2$. Así $p_1\mu\nu = p_1 = p_1 1$ y $p_2\mu\nu = p_2 = p_2 1$, expresando en diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \\
A \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, dotted, "{\mu\nu, 1}"] \arrow[dr, "p_2"'] & A \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
& A_2
\end{tikzcd}$$

Puesto que A es producto, se deduce de la parte de unicidad que $\mu\nu = 1$. Análogamente, se deduce que $\nu\mu = 1$. Luego $\mu : A' \to A$ es un isomorfismo, tal que $p_1\mu = p_1'$ y $p_2\mu = p_2'$. Por lo tanto, $(A; p_1, p_2)$ y $(A'; p_1', p_2')$ son canónicamente equivalentes $\blacksquare$

En $\mathfrak{S}$, el producto es el producto cartesiano junto con las proyecciones; en $\mathfrak{G}$ el producto es el producto directo. En $\mathfrak{Ab}$ el producto es la suma directa.

Los siguientes ejemplos muestran que el producto de objetos depende de la categoría que se considera. En la categoría de grupos $\mathfrak{G}$, el producto de $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4$ es el producto directo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. En $\mathfrak{Ab}$ es la suma directa $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ (realmente es la misma cosa). En la categoría de grupos cíclicos no existe el producto de $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4$.

Se denota el producto de A_1 y A_2, por $A_1 \times A_2$ y el morfismo f del diagrama de producto por $\{f_1, f_2\}$.
Por ejemplo, en la categoría $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ de Λ- módulos izquierdos se define el producto de objetos como el producto directo de Λ- módulos izquierdos.

Ejemplo 1.4.5 *Si $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor que preserva el producto, entonces $(F(A \times B); Fp_1, Fp_2)$ es un producto de FA y FB en $\mathfrak{D}$.*

Si A y B son objetos de $\mathfrak{C}$, mediante el funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & FA \\
F(A \times B) \arrow[ur, "Fp_1"] \arrow[r, dotted, "\mu"] \arrow[dr, "Fp_2"'] & FA \times FB \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
 & FB
\end{tikzcd}$$

F preserva producto significa que μ es isomorfismo. Así existe un isomorfismo $\mu : F(A \times B) \to FA \times FB$ tal que $Fp_1 = p_1\mu$ y $Fp_2 = p_2\mu$, por Proposición 1.4.2 $(F(A \times B); Fp_1, Fp_2)$ es un producto de FA y FB en $\mathfrak{D}$ $\blacksquare$

Definición 1.4.6 *El coproducto de los objetos A_1 y A_2 en $\mathfrak{C}$ es una terna ordenada $(A; q_1, q_2)$ formada por un objeto A y morfismos $q_i : A_i \to A$ para $i = 1, 2$ llamados inyecciones, tal que dados los morfismos $f_1 \in \mathfrak{C}(A_1, X)$ y $f_2 \in \mathfrak{C}(A_2, X)$ existe un único morfismo $f \in \mathfrak{C}(A, X)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "q_1"] \\
X & A \arrow[l, dotted, "\exists! f"'] \\
 & A_2 \arrow[ul, "f_2"] \arrow[u, "q_2"']
\end{tikzcd}$$

Así el coproducto de A_1 y A_2 en $\mathfrak{C}$ es el producto de dichos objetos en $\mathfrak{C}^{op}$; de donde se deduce que el coproducto es único, salvo equivalencia canónica.
Se denota el coproducto de A_1 y A_2, por $A_1 \amalg A_2$ y el morfismo f del diagrama de coproducto por $< f_1, f_2 >$.

En $\mathfrak{Ab}$, el coproducto es la suma directa.
Las siguientes notaciones se utilizarán para productos y coproductos:

$$
\begin{tikzcd}
 & A_1 \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, dotted, "\{f_1,f_2\}"] \arrow[dr, "f_2"'] & A_1 \times A_2 \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
 & A_2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "q_1"] \\
X & A_1 \amalg A_2 \arrow[l, dotted, "<f_1,f_2>"'] \\
 & A_2 \arrow[ul, "f_2"] \arrow[u, "q_2"']
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 1.4.7 *En $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ el coproducto es la suma directa, en este caso se escribe $\oplus$ en lugar de $\amalg$.*

1.5. Complejos

Definición 1.5.1 *Un módulo graduado (por los enteros) denotado por $A = \{A_n\}, n \in \mathbb{Z}$ es una familia de Λ-módulos A_n para $n \in \mathbb{Z}$. Un morfismo $\varphi : A \to B$ de módulos graduados de grado k se define como $\varphi = \{\varphi_n : A_n \to B_{n+k}\}, n \in \mathbb{Z}$. El producto de morfismos $\varphi : A \to B$ y $\psi : B \to C$ de módulos graduados de grado cero se define como $\psi\varphi : A \to C$ por $(\psi\varphi)_n = \psi_n\varphi_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 1.5.2 *$\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ es una categoría,
cuyos objetos son módulos graduados por los enteros, morfismos son los morfismos de grado cero de dichos módulos graduados y el producto de morfismos es la composición de los homomorfismos dada en la definición anterior.*

Prueba .- Se cumplen los tres axiomas de categoría para $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$:

CAT 1: Los conjuntos de morfismos $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda\,(A, B)$ y $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda\,(C, D)$ son disjuntos a menos que $A = C$ y $B = D$.
Sea $\varphi \in \mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda\,(A, B) \cap \mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda\,(C, D)$, entonces $\varphi = \{\varphi_n : A_n \to B_n\}, n \in \mathbb{Z}$;
$\varphi = \{\varphi_n : C_n \to D_n\}, n \in \mathbb{Z}$. Así, para cada $n \in \mathbb{Z}$,
$\varphi_n \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\,(A_n, B_n) \cap \mathfrak{M}^l_\Lambda\,(C_n, D_n)$. Como $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es una categoría $A_n = C_n$ y $B_n = D_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente $A = C$ y $B = D$.

CAT 2: Si $f \in \mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda\,(A, B)$, $g \in \mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda\,(B, C)$ y $h \in \mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda\,(C, D)$, entonces $h(gf) = (hg)f$.

Recuerde que $f = \{f_n : A_n \to B_n\}, n \in \mathbb{Z}$; $g = \{g_n : B_n \to C_n\}, n \in \mathbb{Z}$;
$h = \{h_n : C_n \to D_n\}, n \in \mathbb{Z}$. Como $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es una categoría se cumple
$h_n(g_n f_n) = (h_n g_n) f_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Luego $h(gf) = (hg)f$.

CAT 3: Para cada $A \in |\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda|$ existe 1_A tal que para cualesquier $f : A \to B$, $g : C \to A$ morfismos en $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ se tiene $f = f1_A$, $1_A g = g$.
Definiendo $1_A = \{1_{A_n} : A_n \to A_n\}, n \in \mathbb{Z}$, recordando que
$f = \{f_n : A_n \to B_n\}, n \in \mathbb{Z}$; $g = \{g_n : C_n \to A_n\}, n \in \mathbb{Z}$ y, usando el hecho que $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es una categoría, se siguen:

$$\begin{aligned} f1_A &= \{f_n 1_{A_n} : A_n \to B_n\}, n \in \mathbb{Z} \\ &= \{f_n : A_n \to B_n\}, n \in \mathbb{Z} \\ &= f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1_A g &= \{1_{A_n} g_n : C_n \to A_n\}, n \in \mathbb{Z} \\ &= \{g_n : C_n \to A_n\}, n \in \mathbb{Z} \\ &= g \ \blacksquare \end{aligned}$$

Definición 1.5.3 *Un complejo de cadena $C = \{C_n, \partial_n\}$ sobre Λ es un objeto en $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ con un endomorfismo $\partial : C \to C$ de grado -1 tal que $\partial\partial = 0$. En otras palabras C es un par formado por una familia $\{C_n\}, n \in \mathbb{Z}$, de Λ-módulos y una familia de homomorfismos de módulos $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}, n \in \mathbb{Z}$ tal que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.*

Un complejo de cadena $C = \{C_n, \partial_n\}$ sobre Λ se denotará por

$$C : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

El morfismo ∂ (así como cada componente ∂_n) se llama diferencial (u operador borde).

Definición 1.5.4 *Un morfismo de complejos de cadena (o aplicación de cadena) $\varphi : C \to D$ es un morfismo de grado cero en $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ tal que $\varphi\partial = \widetilde{\partial}\varphi$, donde ∂ denota diferencial en C y $\widetilde{\partial}$ denota diferencial en D.*

Así, una aplicación de cadena φ es una familia $\{\varphi_n : C_n \to D_n\}, n \in \mathbb{Z}$, de homomorfismos de módulos tal que, para cada n, el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

es conmutativo.
Por simplicidad se acostumbra omitir los subíndices de los homomorfismos de módulos ∂_n y φ_n cuando el significado de estos símbolos esté claro; así, por ejemplo, para

expresar la conmutatividad de (1.2) simplemente se escribe $\varphi\partial = \widetilde{\partial}\,\varphi$. En lo sucesivo no se distinguirá las notaciones entre las diferenciales de varios complejos de cadena, así simplemente se escribirá como ∂.

Definición 1.5.5 *El producto de morfismos $\varphi : C \to D$ y $\psi : D \to E$ de complejos de cadena sobre Λ es el morfismo $\psi\varphi \in \mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}\ (C, E)$ con $(\psi\phi)\partial = \partial(\psi\phi)$.*

La categoría cuyos objetos son complejos de cadena sobre Λ se denotará con ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$. Dados C y D complejos de cadena sobre Λ, se observa que ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}\,(C, D) \subseteq \mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}\ (C, D)$.

Proposición 1.5.6 ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ *es una categoría.*

Prueba.-Se verifica que se cumplen los tres axiomas de categoría para ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$:

CAT 1: Los conjuntos ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A, B)$ y ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(C, D)$ son disjuntos a menos que $A = C$ y $B = D$.
Sea $\varphi \in {}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A, B) \cap {}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(C, D)$, luego $\varphi : A \to B$ y $\varphi : C \to D$ son morfismos en $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$, de donde $\varphi \in \mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}\ (A, B) \cap \mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}\ (C, D)$, como $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ es una categoría, se obtiene que $A = C$ y $B = D$.

CAT 2: Si $f \in {}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A, B)$, $g \in {}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(B, C)$ y $h \in {}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(C, D)$, entonces
$h(gf) = (hg)f$. Se sigue del hecho que $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ es una categoría.

CAT 3: Para cada $A \in |{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}|$ existe 1_A tal que para cualesquier $f : A \to B$, $g : C \to A$ morfismos en ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ se tiene $f = f1_A$, $1_A g = g$.
Como los complejos de cadena son módulos graduados, $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son morfismos en la categoría $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$, luego para $A \in |\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}|$ existe 1_A tal que $f = f1_A, 1_A g = g$. Además se nota que $1_A : A \to A$ es tal que $1_A\partial = \partial 1_A = \partial$, luego existe 1_A morfismo identidad de A en ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ satisfaciendo las condiciones requeridas ■

Ahora, se introduce la noción más importante de la homología.
Sea $C = \{C_n, \partial_n\}$ un complejo de cadena sobre Λ. La condición $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ implica que $Im\partial_{n+1} \subseteq Ker\partial_n, n \in \mathbb{Z}$. De aquí se puede asociar a C el módulo graduado $H(C) = \{H_n(C)\}$, donde $H_n(C) = Ker\partial_n/Im\partial_{n+1}, n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.5.7 *Sea C un complejo de cadena sobre Λ. Se define el módulo de homología de C denotado por $H(C)$ mediante $H(C) = \{H_n(C)\}$, donde*
$H_n(C) = Ker\partial_n/Im\partial_{n+1}, n \in \mathbb{Z}$.
$H_n(C)$ se llama n-ésimo módulo de homología de C.

Proposición 1.5.8 *Dados C y D complejos de cadena sobre Λ. Si $\varphi \in {}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}\,(C, D)$, entonces φ induce el morfismo bien definido $\varphi_* = H(\varphi) : H(C) \to H(D)$ de módulos graduados (o de homologías).*

Prueba .- Recuerde que $H(C) = \{H_n(C)\}$, $H(D) = \{H_n(D)\}$ y
$H_n(C) = Ker\partial_n/Im\partial_{n+1}$. Así, para cada $n \in \mathbb{Z}$ por el hecho que
$\partial_n^d \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}\partial_n^c(x) = 0$, se puede definir

$$H_n(\varphi) : H_n(C) \to H_n(D) \text{ por } H_n(\varphi)\left(x + Im\partial_{n+1}^c\right) = \varphi_n(x) + Im\partial_{n+1}^d \tag{1.3}$$

para $x \in Ker\partial_n^c$.
$H_n(\varphi)$ está bien definido.
Sea $x + Im\partial_{n+1}^c = y + Im\partial_{n+1}^c \in H_n(C)$ con $x, y \in Ker\partial_n^c$,
entonces $H_n(\varphi)\left(x + Im\partial_{n+1}^c\right) = H_n(\varphi)\left(y + Im\partial_{n+1}^c\right)$.
En efecto:
De la igualdad tomada en $H_n(C)$, se obtiene que $x - y \in Im\partial_{n+1}^c$; *i.e.*, $x - y = \partial_{n+1}^c(z)$ para algún $z \in C_{n+1}$. Ahora como $Ker\partial_n^c \subseteq C_n$, se aplica el morfismo de módulos $\varphi_n : C_n \to D_n$ para obtener que

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) - \varphi_n(y) &= \varphi_n\partial_{n+1}^c(z) \\ &= \partial_{n+1}^d\varphi_{n+1}(z) \text{ por (1.2) para } n+1. \end{aligned}$$

Pasando al cociente, considerando que $\partial_{n+1}^d\varphi_{n+1}(z) \in Im\partial_{n+1}^d$ y efectuando operaciones de módulo cociente se obtiene que $\varphi_n(x) + Im\partial_{n+1}^d = \varphi_n(y) + Im\partial_{n+1}^d$. Luego $H_n(\varphi)\left(x + Im\partial_{n+1}^c\right) = H_n(\varphi)\left(y + Im\partial_{n+1}^c\right)$.
Poniendo $[H(\varphi)]_n = H_n(\varphi)$, por ser $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario, se deduce que
$\varphi_* = H(\varphi) : H(C) \to H(D)$ está bien definido como aplicación para cada $n \in \mathbb{Z}$ por (1.3).
Se observa que $H_n(\varphi)$ es un homomorfismo de módulos para todo $n \in \mathbb{Z}$, esto permite concluir que $H(\varphi)$ es un morfismo de módulos graduados ■

Proposición 1.5.9 $H(-) : {}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h} \to \mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$ *es un funtor covariante.*

Prueba.- Se nota que H asocia a cada objeto $C \in \left|{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}\right|$, $H(C) \in \left|\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}\right|$; a cada morfismo $\varphi \in {}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(C, D)$ asocia el morfismo $\varphi_* = H(\varphi) \in \mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(H(C), H(D))$ definido para cada $n \in \mathbb{Z}$ por $H_n(\varphi)\left(x + Im\partial_{n+1}^c\right) = \varphi_n(x) + Im\partial_{n+1}^d$ para todo $x \in Ker\partial_n^c$.
Para $H(-)$ se satisfacen los dos siguientes axiomas de funtor covariante:

FUN1. $H(1_C) = 1_{H(C)}$ para todo $C \in |{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}|$.

En efecto :
Dado $C \in |{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}|$, existe morfismo identidad $1_C = \{1_{C_n} : C_n \to C_n\}$ en ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, usando la definición de $H_n(1_C) : H_n(C) \to H_n(C)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} H_n(1_C)(x + Im\partial_{n+1}) &= 1_{C_n}(x) + Im\partial_{n+1} \\ &= x + Im\partial_{n+1} \\ &= 1_{H_n(C)}(x + Im\partial_{n+1}) \end{aligned}$$

para todo $x \in Ker\partial_n$. De donde $H_n(1_C) = 1_{H_n(C)}$, por lo tanto $H(1_C) = 1_{H(C)}$.

FUN 2. $H(\psi\varphi) = H(\psi)H(\varphi)$ para todo $\varphi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(C, D)$ y $\psi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(D, E)$.

En efecto; para $\varphi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(C, D)$ y $\psi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(D, E)$ se tiene que $\psi\varphi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(C, E)$. Ahora, para el morfismo $H(\psi\varphi) : H(C) \to H(E)$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ se obtiene las siguientes igualdades :

$$\begin{aligned}
H_n(\psi\varphi)\left(x + Im\partial^c_{n+1}\right) &= (\psi\varphi)_n(x) + Im\partial^e_{n+1} \\
&= \psi_n\left(\varphi_n(x)\right) + Im\partial^e_{n+1} \\
&= H_n(\psi)\left(\varphi_n(x) + Im\partial^d_{n+1}\right) \\
&= H_n(\psi)H_n(\varphi)\left(x + Im\partial^c_{n+1}\right) \\
&= \left[H(\psi)\right]_n\left[H(\varphi)\right]_n\left(x + Im\partial^c_{n+1}\right) \\
&= \left[H(\psi)H(\varphi)\right]_n\left(x + Im\partial^c_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

para todo $x \in Ker\partial^c_n$. Pero $H_n(\psi\varphi) = \left[H(\psi\varphi)\right]_n$, luego $H(\psi\varphi) = H(\psi)H(\varphi)$ ■

El funtor de Proposición 1.5.9 es llamado funtor de homología de la categoría de complejos de cadena sobre Λ en la categoría de módulos graduados (homologías).

Es posible construir la categoría $H\left({}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}\right)$ cuyos objetos son homologías de complejos de cadena sobre Λ, morfismos son homologías de aplicaciones de cadena y el producto es la composición de homologías de aplicaciones de cadena.
Entonces para que el morfismo $\varphi : C \to D$ entre complejos de cadena sobre Λ induzca un isomorfismo $\varphi_* = H(\varphi) \in H\left({}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}\right)(H(C), H(D))$ se debe garantizar la existencia de ${\varphi_*}^{-1} \in H\left({}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}\right)(H(D), H(C))$ tal que $\varphi_*{\varphi_*}^{-1} = 1_{H(D)}$ y ${\varphi_*}^{-1}\varphi_* = 1_{H(C)}$. Con esto se ha conseguido introducir el concepto de isomorfismo entre homologías de complejos de cadena.

Definición 1.5.10 *Si $C = \{C_n, \partial_n\}, n \in \mathbb{Z}$ es un complejo de cadena sobre Λ, entonces:*

i) *Los elementos de C_n se llaman n-cadenas*

ii) *Los elementos de $Ker\partial_n$ se llaman n-ciclos de C y $Ker\partial_n$ se escribe $Z_n = Z_n(C)$.*

iii) *Los elementos de $Im\partial_{n+1}$ se llaman n-bordes de C y $Im\partial_{n+1}$ se escribe $B_n = B_n(C)$.*

iv) *Dos n-ciclos que determinan el mismo elemento en $H_n(C)$ se llaman homólogos.*

v) *El elemento de $H_n(C)$ determinado por el n-ciclo c se llama clase de homología de c, y se denota por $[c]$.*

El módulo de homología $H_n(C)$ mide lo que le falta a C para ser exacto en C_n; $H_n(C) = 0$ si y sólo si C es exacto en C_n.

Ahora, se puede hacer algunas observaciones sobre la noción dual de complejos de cadena sobre Λ.

Definición 1.5.11 *Un complejo de cocadena sobre Λ, $C = \{C_n, \partial_n\}$, es un objeto de $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ provisto de un endomorfismo $\partial : C \to C$ de grado +1 con $\partial\partial = 0$.*
Un complejo de cocadena $C = \{C_n, \partial_n\}$ sobre Λ se denota por

$$C : \cdots \longleftarrow C_{n+1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \longleftarrow \cdots \quad \textit{donde } \partial_n\partial_{n-1} = 0 \textit{ para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Nuevamente ∂ se llamará diferencial. El morfismo de complejos de cocadena (o aplicación de cocadena) y el producto de estos morfismos son definidos de manera análoga a las definiciones dadas para complejos de cadena.

Definición 1.5.12 *Sea C un complejo de cocadena sobre Λ. Se define el módulo de cohomología de C denotado por $H(C)$ mediante $H(C) = \{H^n(C)\}$, donde*
$H^n(C) = Ker\, \partial_n / Im\, \partial_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$.
$H^n(C)$ se llama n-ésimo módulo de cohomología de C.

Se observa que:

i) Según Definición 1.5.12 y Proposición 1.5.9, se puede probar que $H(-)$ es un funtor, llamado funtor de cohomología, de la categoría de complejos de cocadena en la categoría de módulos graduados.

ii) En el caso de complejos de cocadena se habla de cocadenas, cobordes, cociclos, cociclos cohomólogos, clases de cohomología.

Ejemplo 1.5.13 *Todo módulo puede ser considerado como un ejemplo de complejo de cadena (o de cocadena). Luego, dado un módulo A, se define $C_0 = A$, $C_n = 0$ para $n \neq 0$, $\partial_n = 0$ (análogamente para complejos de cocadena). De esta manera $\mathfrak{M}_\Lambda^l$ se sumerge en ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ (categoría de complejos de cadena).*

Ejemplo 1.5.14 *Sea A un Λ-módulo y sea $F \twoheadrightarrow A$ una presentación libre (o proyectiva) de A con núcleo R, de modo que $R \overset{\mu}{\rightarrowtail} F \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A$ es una sucesión exacta corta. Se forma un complejo de cadena C, con $C_1 = R$, $C_0 = F$, $\partial_1 = \mu$, $C_n = 0$ para $n \neq 0, 1$; esto se escribe como*

$$C : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\mu} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \longrightarrow \cdots$$

luego $H_0(C) = \dfrac{Ker\partial_0}{Im\partial_1} = \dfrac{F}{Im\mu} = \dfrac{F}{Ker\varepsilon} \cong A$; $H_n(C) = 0$, $n \neq 0$.

Ejemplo 1.5.15 *Sea* $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} I \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} J$ *una presentación inyectiva de* A*. Se forma un complejo de cocadena* C*, con* $C_0 = I$*,* $C_1 = J$*,* $\partial_0 = \varepsilon$*,* $C_n = 0$ *para* $n \neq 0, 1$*. Así*

$$C : \cdots \longleftarrow 0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_{-1}} 0 \longleftarrow \cdots$$

luego $H^0(C) = \dfrac{Ker\partial_0}{Im\partial_{-1}} \cong Ker\varepsilon = Im\mu \cong A$*;* $H^n(C) = 0$ *para* $n \neq 0$*.*

Ejemplo 1.5.16 *Sea* C *complejo de cadena de* Λ*-módulos izquierdos y sea* A *un* Λ*-módulo izquierdo. Se obtiene un complejo de cadena* $D = Hom_\Lambda(A, C)$ *de grupos abelianos, donde* $D_n = Hom_\Lambda(A, C_n)$*,* $\partial_n^D = \partial_{n\,*}^C : Hom_\Lambda(A, C_n) \to Hom_\Lambda(A, C_{n-1})$*.*

Sea ahora B *un* Λ*-módulo izquierdo, se obtiene un complejo de cocadena*
$E = Hom_\Lambda(C, B)$ *de grupos abelianos, donde* $E_n = Hom_\Lambda(C_n, B)$*,*
$\partial_n = \partial_{n+1}^{C\,*} : Hom_\Lambda(C_n, B) \longrightarrow Hom_\Lambda(C_{n+1}, B)$*.*

Proposición 1.5.17 C *es un complejo de cocadena sobre* Λ *si y sólo si* C^{op} *es un complejo de cadena sobre* Λ*.*

Prueba :

$\Rightarrow$) Si C es un complejo de cocadena sobre Λ, entonces se puede considerar

$$C : \cdots \longleftarrow C_{n+1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \longleftarrow \cdots$$

donde $\partial_n\partial_{n-1} = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.
Invirtiendo flechas se obtiene

$$C^{op} : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n^{op}} C_n \xrightarrow{\partial_{n-1}^{op}} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde $\partial_{n-1}^{op}\partial_n^{op} = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, puesto que
$\partial_{n-1}^{op}\partial_n^{op} = (\partial_n\partial_{n-1})^{op} = 0^{op} = 0$. Por Definición 1.5.3, C^{op} es un complejo de cadena sobre Λ.

$\Leftarrow$) La prueba de la recíproca se hace de manera análoga ■

1.6. Complejos Dobles

Definición 1.6.1 *Un módulo bigraduado (por los pares ordenados de enteros) denotado por* $A = \{A_{m,n}\}; m, n \in \mathbb{Z}$ *es una familia de* Λ*-módulos* $A_{m,n}$ *para* $m, n \in \mathbb{Z}$*. Un morfismo* $\varphi : A \to B$ *de módulos bigraduados de grado* (k, l) *se define como*
$\varphi = \{\varphi_{m,n} : A_{m,n} \to B_{m+k,n+l}\}; m, n \in \mathbb{Z}$*. El producto de morfismos* $\varphi : A \to B$ *y* $\psi : B \to C$ *de módulos bigraduados de bigrado (0,0) se define como* $\psi\varphi : A \to C$ *por* $(\psi\varphi)_{m,n} = \psi_{m,n}\varphi_{m,n}$ *para todo* $m, n \in \mathbb{Z}$*.*

Proposición 1.6.2 $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ *es una categoría,*
cuyos objetos son módulos bigraduados, morfismos son los morfismos de grado $(0,0)$ *de módulos bigraduados y el producto de morfismos está dado en la definición anterior.*

Prueba.- La prueba es análoga a la de Proposición 1.5.2 ■

Definición 1.6.3 *Un complejo doble de cadena* B *sobre* Λ *es un objeto de* $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ *, provisto de dos endomorfismos* $\partial' : B \to B$, $\partial'' : B \longrightarrow B$ *de grado* $(-1,0)$ *y* $(0,-1)$ *respectivamente, llamados diferenciales, tales que:*

$$\partial'\partial' = 0, \quad \partial''\partial'' = 0 \qquad y \qquad \partial''\partial' + \partial'\partial'' = 0 \tag{1.4}$$

Esto quiere decir que B es una familia bigraduada de $\Lambda-$ módulos $\{B_{p,q}\}$, $p,q \in \mathbb{Z}$ provisto de dos familias de homomorfismos de $\Lambda-$ módulos
$\{\partial'_{p,q} : B_{p,q} \longrightarrow B_{p-1,q}\}, \{\partial''_{p,q} : B_{p,q} \to B_{p,q-1}\}$, tales que (1.4) se cumple. Como en el caso de complejos de cadena se omite los subíndices cuando el significado esté claro.

Definición 1.6.4 *Un morfismo* $\varphi : B \to C$ *de complejos dobles de cadena sobre* Λ *es un morfismo de* $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ *tal que* $\varphi\partial'_B = \partial'_C\varphi$ *y* $\varphi\partial''_B = \partial''_C\varphi$.
El producto de morfismos $\varphi : B \to C$ *y* $\psi : C \to D$ *de complejos dobles de cadena sobre* Λ *es el morfismo* $\psi\varphi$ *de* $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ *que cumple con las condiciones de morfismos de complejos dobles.*

La colección de complejos dobles de cadena sobre Λ se denotará con ${}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}$.

Proposición 1.6.5 ${}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}$ *es una categoría.*

Prueba.- los tres axiomas de categoría se cumplen para ${}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}$:

CAT 1: Los conjuntos ${}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}(A,B)$ y ${}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}(C,D)$ son disjuntos a menos que $A = C$ y $B = D$.
Sea $\varphi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}(A,B) \cap {}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}(C,D)$, de manera que $\varphi : A \to B$ y $\varphi : C \to D$ son morfismos en $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, de donde $\varphi \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B) \cap \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(C,D)$, siendo $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ una categoría , se concluye que $A = C$ y $B = D$.

CAT 2: Si $f \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(A,B)$, $g \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(B,C)$ y $h \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(C,D)$, entonces $h(gf) = (hg)f$.
Es inmediato del hecho que $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ es una categoría.

CAT 3: Para cada $A \in |{}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}|$ existe 1_A tal que para cualesquier $f : A \to B$, $g : C \to A$ morfismos en ${}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}$ se tiene $f = f1_A$, $1_Ag = g$.
Como los complejos dobles de cadena son módulos bigraduados, $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son morfismos en la categoría $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, luego existe 1_A tal que $f = f1_A$, $1_Ag = g$. Además $1_A : A \to A$ es tal que $1_A\partial'_A = \partial'_A1_A$ y $1_A\partial''_A = \partial''_A1_A$. Por lo tanto existe 1_A morfismo identidad de A en ${}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}}$■

Ahora, se puede construir complejo de cadena a partir de $B \in \left| {}_{\Lambda}\mathfrak{CC}_{\mathfrak{h}} \right|$.

Definición 1.6.6 *Sea B un complejo doble de cadena sobre Λ. Se define el módulo graduado $Tot\,B = \{(Tot\,B)_n\}$, donde*

$$(Tot\,B)_n = \bigoplus_{p+q=n} B_{p,q}.$$

Como $\partial'(Tot\,B)_n \subseteq (Tot\,B)_{n-1}$ y $\partial''(Tot\,B)_n \subseteq (Tot\,B)_{n-1}$ se tiene $(\partial' + \partial'')(Tot\,B)_n \subseteq (Tot\,B)_{n-1}$. Además

$$(\partial' + \partial'')(\partial' + \partial'') = \partial'\partial' + (\partial''\partial' + \partial'\partial'') + \partial''\partial'' = 0.$$

Así $Tot\,B$ es un complejo de cadena si hacemos $\partial = \partial' + \partial'' : (Tot\,B)_n \to (Tot\,B)_{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Se dirá a $Tot\,B$ complejo total de B.

Serán necesarias algunas nociones duales de complejos dobles de cadena, por tanto se dan las siguientes definiciones.

Definición 1.6.7 *Un complejo doble de cocadena B sobre Λ es un objeto de $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, provisto de dos endomorfismos $\partial' : B \to B$, $\partial'' : B \longrightarrow B$ de grado $(1,0)$ y $(0,1)$ respectivamente, llamados diferenciales, tales que:*

$$\partial'\partial' = 0, \quad \partial''\partial'' = 0 \qquad y \qquad \partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0 \tag{1.5}$$

Esto quiere decir que B es una familia bigraduada de $\Lambda -$ módulos $\{B_{p,q}\}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ provisto de dos familias de homomorfismos de $\Lambda -$ módulos
$\{\partial'_{p,q} : B_{p,q} \longrightarrow B_{p+1,q}\}, \{\partial''_{p,q} : B_{p,q} \to B_{p,q+1}\}$, tales que (1.5) se cumple.

Es posible construir un complejo de cocadena $(Tot\,B, \partial)$ a partir de un complejo doble de cocadena B dado.

Definición 1.6.8 *Sea B un complejo doble de cocadena sobre Λ. Se define el módulo graduado $Tot\,B = \{(Tot\,B)_n\}$, donde*

$$(Tot\,B)_n = \bigoplus_{p+q=n} B_{p,q}.$$

Como $\partial'(Tot\,B)_n \subseteq (Tot\,B)_{n+1}$ y $\partial''(Tot\,B)_n \subseteq (Tot\,B)_{n+1}$ se tiene $(\partial' + \partial'')(Tot\,B)_n \subseteq (Tot\,B)_{n+1}$. Además

$$(\partial' + \partial'')(\partial' + \partial'') = \partial'\partial' + (\partial'\partial'' + \partial''\partial') + \partial''\partial'' = 0.$$

Haciendo $\partial = \partial' + \partial'' : (Tot\,B)_n \to (Tot\,B)_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, se obtiene el complejo de cocadena $(Tot\,B, \partial)$, que se llamará también complejo total de B.

1.7. Categorías Abelianas y Funtores Aditivos

Ciertamente de las categorías que se han introducido algunos tienen una estructura adicional. Así, en las categorías $\mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{M}_\Lambda^r$ y $\mathfrak{M}_\Lambda^l$ el conjunto de todos los morfismos tiene una estructura de grupo abeliano y tienen la noción de sucesiones exactas. Se procede en esta parte a extraer características esenciales de tales categorías y se define la noción importante de categoría abeliana.

Definición 1.7.1 *Una categoría aditiva $\mathfrak{A}$ es una categoría con objeto cero en que dos objetos tiene un producto y en que los conjuntos de morfismos $\mathfrak{A}(A, B)$ son grupos abelianos tal que la composición $\mathfrak{A}(A, B) \times \mathfrak{A}(B, C) \longrightarrow \mathfrak{A}(A, C)$ es bilineal. Esto es:*

$(f + g)h = fh + gh;\ f, g \in \mathfrak{A}(B, C)$ *y* $h \in \mathfrak{A}(A, B)$
$f(g + h) = fg + fh;\ f \in \mathfrak{A}(B, C);\ g\ ,\ h \in \mathfrak{A}(A, B).$

Ejemplo 1.7.2 *La categoría $\mathfrak{Ab}$ es aditiva.*

Se sabe que $\mathfrak{Ab}$ es una categoría. Para que sea aditiva se va a verificar las cuatro condiciones siguientes:

i) $0 = \{e\}$ es el objeto cero de $\mathfrak{Ab}$, donde e es la identidad aditiva de cada grupo abeliano.

ii) Si $A,\ B \in |\mathfrak{Ab}|$, entonces $A \times B \in |\mathfrak{Ab}|$.
Defina la operación $+$ en $A \times B$ por $(a_1, b_1)+(a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$ considerando la notación aditiva $+$ para las operaciones de los grupos abelianos A y B. Con esta operación $A \times B$ resulta ser un grupo abeliano. Por lo tanto $A \times B \in |\mathfrak{Ab}|$ para todo $A,\ B \in |\mathfrak{Ab}|$.

iii) $\mathfrak{Ab}(A, B)$ es un grupo (aditivo) abeliano para todo $A,\ B \in |\mathfrak{Ab}|$.
Sean $f,\ g \in \mathfrak{Ab}(A, B)$, entonces $f + g$ se define por
$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ para todo $a \in A$.......(*)
Claramente $f + g \in \mathfrak{Ab}(A, B)$. La asociatividad de la operación , la existencia del elemento identidad, la existencia del inverso en B y el hecho de que B es abeliano, permite deducir que $\mathfrak{Ab}(A, B)$ es un grupo abeliano con la operación definida en (*).

iv) La composición $\mathfrak{Ab}(A, B) \times \mathfrak{Ab}(B, C) \longrightarrow \mathfrak{Ab}(A, C)$ es bilineal.
En efecto:

a) Si $h,\ g \in \mathfrak{Ab}(B, C)$ y $f \in \mathfrak{Ab}(A, B)$, entonces $(h + g)f = hf + gf$
Esto se verifica como sigue:

$$\begin{aligned} [(h + g)f](a) &= (h + g)(f(a)) \\ &= h(f(a)) + g(f(a)) \\ &= (hf)(a) + (gf)(a) \\ &= (hf + gf)(a) \,\text{para todo}\, a \in A. \end{aligned}$$

b) Si $g,\ f \in \mathfrak{Ab}(A,B)$ y $h \in \mathfrak{Ab}(B,C)$, entonces se verifica como en *a)* que $h(g+f) = hg + hf$.

Por *i)*, *ii)*, *iii)* y *iv)*; la categoría de grupos abelianos $\mathfrak{Ab}$ es aditiva ■

Ejemplo 1.7.3 *La categoría* $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ *es aditiva.*

Para probar que la categoría $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es aditiva se procede a verificar las cuatro siguientes condiciones:

i) Se sabe que $0 = \{0\}$ es el objeto cero de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$, donde 0 es la identidad aditiva de cualquier $\Lambda -$ módulo izquierdo.

ii) Si $A,\ B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda\ |$, entonces $A \times B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda\ |$.
Por componentes para $(a_1, b_1),\ (a_2, b_2) \in A \times B$ se define la operación suma mediante $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
Para $r \in \Lambda$ y $(a,b) \in A \times B$ se define el producto $r(a,b) = (ra, rb)$
Se satisfacen para $A \times B$ los axiomas de Λ-módulo izquierdo con las operaciones que se acaba de definir. Por lo tanto $A \times B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda\ |$ para todo $A,\ B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda\ |$.

iii) $\mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,B)$ es un grupo (aditivo) abeliano para todo $A,\ B \in |\mathfrak{M}^l_\Lambda\ |$.
Sean $f,\ g \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,B)$, entonces $f + g \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,B)$.
Se define $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ para todo $a \in A$.......(**)
La asociatividad de la suma de morfismos, la existencia del elemento identidad y la existencia del inverso en $\mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,B)$ son heredados por B. Como B es abeliano, el $\mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,B)$ es abeliano bajo la operación definida en (**).

iv) La composición $\mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,B) \times \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (B,C) \longrightarrow \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,C)$ es bilineal. En efecto:

a) Si $h,\ g \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (B,C)$ y $f \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,B)$, entonces $(h+g)f = hf + gf$.

Claramente:
$$\begin{aligned} [(h+g)f](a) &= (h+g)(f(a)) \\ &= h(f(a)) + g(f(a)) \\ &= (hf)(a) + (gf)(a) \\ &= (hf+gf)(a) \text{ para todo } a \in A. \end{aligned}$$

b) Si $g,\ f \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (A,B)$ y $h \in \mathfrak{M}^l_\Lambda\ (B,C)$, entonces $h(g+f) = hg + hf$. Esta igualdad se verifica como en la parte *a)*.

Así, la categoría de módulos izquierdos $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es aditiva ■

Ejemplo 1.7.4 *La categoría* $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ *es aditiva.*

Para que la categoría $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ sea aditiva se verificará las cuatro condiciones siguientes:

i) Sea $\mathsf{0} = \{A_n\}, n \in \mathbb{Z}$ tal que $A_n = 0$ es el Λ-módulo cero para cada $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathsf{0}$ es el objeto cero en $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$.

ii) Si $A,\ B \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}|$, entonces $A \times B \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}|$.
Es claro que $A = \{A_n\}, n \in \mathbb{Z}$; $B = \{B_n\}, n \in \mathbb{Z}$, entonces se define $(A \times B)_n = A_n \times B_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, luego $A \times B \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}|$.

iii) $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (A, B)$ es un grupo (aditivo) abeliano para todo $A,\ B \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}|$.
Sean $f,\ g \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (A, B)$, entonces $f + g \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (A, B)$. Se define $f + g$ por componentes $(f + g)_n = f_n + g_n : A_n \longrightarrow B_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Como $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}$ es una categoría aditiva implica que $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}\ (A_n, B_n)$ es un grupo abeliano para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (A, B)$ es un grupo abeliano.

iv) La composición $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (A, B) \times \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (B, C) \longrightarrow \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (A, C)$ es bilineal.
En efecto:

a) Si $h,\ g \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (B, C)$ y $f \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (A, B)$, entonces $(h + g)f = hf + gf$.
Como la categoría $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}$ es aditiva, la composición
$\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}\ (A_n, B_n) \times \mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}\ (B_n, C_n) \longrightarrow \mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}\ (A_n, C_n)$ es bilineal para cada $n \in \mathbb{Z}$, luego se deduce que:

$$\begin{aligned}
(h+g)f &= (\{h_n + g_n : B_n \to C_n\}, n \in \mathbb{Z})(\{f_n : A_n \to B_n\}, n \in \mathbb{Z});\\
&= \{(h_n + g_n)f_n : A_n \to C_n\}, n \in \mathbb{Z};\\
&= \{h_n f_n + g_n f_n : A_n \to C_n\}, n \in \mathbb{Z};\\
&= \{(hf + gf)_n : A_n \to C_n\}, n \in \mathbb{Z};\\
&= hf + gf.
\end{aligned}$$

b) Si $g,\ f \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (A, B)$ y $h \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\ (B, C)$, entonces $h(g + f) = hg + hf$. Esto se verifica como en la parte *a)*.

Por lo tanto, la categoría $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}$ de módulos graduados sobre Λ es aditiva ■

Ejemplo 1.7.5 $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ *es una categoría aditiva.*

Para que la categoría $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ sea aditiva verifiquemos las cuatro condiciones siguientes:

i) Sea $0 = \{A_{m,n}\}, n$ y $m \in \mathbb{Z}$ tal que $A_{m,n} = 0$ es el Λ-módulo cero para cada $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces el símbolo definido 0 es el objeto cero en $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

ii) Si $A,\ B \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}|$, entonces se define $(A \times B)_{n,m} = A_{n,m} \times B_{n,m}$.
Es claro que $A = \{A_{m,n}\}; m, n \in \mathbb{Z}$; $B = \{B_{m,n}\}; m, n \in \mathbb{Z}$, de donde $A_{m,n} \times B_{m,n} \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}|$ para cada $m, n \in \mathbb{Z}$, luego $A \times B \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}|$.

iii) $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\ (A, B)$ es un grupo abeliano para todo $A,\ B \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}|$.
Sean $f,\ g \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\ (A, B)$, entonces $f + g \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\ (A, B)$. Se define $f + g$ por $(f + g)_{m,n} = f_{m,n} + g_{m,n} : A_{m,n} \longrightarrow B_{m,n}$ para cada $m, n \in \mathbb{Z}$. Como $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}$ es una categoría aditiva implica que $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}\ (A_{m,n}, B_{m,n})$ es un grupo abeliano para cada $m, n \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\ (A, B)$ es un grupo abeliano.

iv) La composición $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)\times\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(B,C)\longrightarrow\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,C)$ es bilineal.

En efecto:

a) Si $h,\ g\in\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(B,C)$ y $f\in\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)$, entonces $(h+g)f=hf+gf$.

Como la categoría $\mathfrak{M}_\Lambda^l$ es aditiva, la composición $\mathfrak{M}_\Lambda^l(A_{m,n},B_{m,n})\times\mathfrak{M}_\Lambda^l(B_{m,n},C_{m,n})\longrightarrow\mathfrak{M}_\Lambda^l(A_{m,n},C_{m,n})$ es bilineal para cada $m,n\in\mathbb{Z}$, luego se deduce que:

$$\begin{aligned}(h+g)f &= (\{h_{m,n}+g_{m,n}:B_{m,n}\to C_{m,n}\};m,n\in\mathbb{Z})(\{f_{m,n}:A_{m,n}\to B_{m,n}\};m,n\in\mathbb{Z});\\ &= \{(h_{m,n}+g_{m,n})f_{m,n}:A_{m,n}\to C_{m,n}\};m,n\in\mathbb{Z};\\ &= \{h_{m,n}f_{m,n}+g_{m,n}f_{m,n}:A_{m,n}\to C_{m,n}\};m,n\in\mathbb{Z};\\ &= \{(hf+gf)_{m,n}:A_{m,n}\to C_{m,n}\};m,n\in\mathbb{Z};\\ &= hf+gf.\end{aligned}$$

b) Si $g,\ f\in\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)$ y $h\in\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(B,C)$, entonces $h(g+f)=hg+hf$. Esto se verifica como en la parte *a)*.

En consecuencia, la categoría $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ de módulos bigraduados es aditiva ■

Proposición 1.7.6 *La categoría* ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ *es aditiva.*

Prueba.- Para probar que la categoría ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ es aditiva se verificará las cuatro siguientes condiciones:

i) Como $0=\{A_n\},n\in\mathbb{Z}$ es el objeto cero en $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ con $\Lambda-$módulo$A_n=0$ (constante) verifica $\partial^2=0$, se deduce que 0 es el objeto cero de ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$.

ii) Si $A,\ B\in|{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}|$, entonces $A\times B\in|{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}|$.
Como A y B por estar en ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ son objetos de la categoría $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$, el producto $A\times B\in|\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}|$. Además $(\partial\times\partial)^2=0$ para $\partial\times\partial:A\times B\longrightarrow A\times B$. Por lo tanto $A\times B\in|{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}|$ para todo $A,\ B\in|{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}|$.

iii) ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A,B)$ es un grupo abeliano para todo $A,\ B\in|{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}|$.
Esto se verificará probando que ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A,B)$ es un subgrupo de $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}(A,B)$.
En efecto:

a) El morfismo cero $0\in\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}(A,B)$ es tal que $0\partial=\partial 0$ indica que $0\in{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A,B)$, luego ${}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A,B)\neq\emptyset$.

b) Si $f,\ g\in{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A,B)$, entonces $f-g\in{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A,B)$.
$f,\ g\in{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A,B)$ implica $f,\ g\in\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}(A,B)$. Como $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ es una categoría aditiva, se sigue que $f-g\in\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}(A,B)$. Adicionalmente verifica que $(f-g)\partial=\partial(f-g)$, por lo tanto $f-g\in{}_\Lambda\mathfrak{C}_\mathfrak{h}(A,B)$.

iv) La composición ${}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(A,B) \times {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(B,C) \longrightarrow {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(A,C)$ es bilineal.
En efecto:

a) Si $h,\ g \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(B,C)$ y $f \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(A,B)$, entonces $(h+g)f = hf + gf$.
Como $|{}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}| \subseteq |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}|$ y la categoría $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}$ es aditiva, la composición $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\,(A,B) \times \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\,(B,C) \longrightarrow \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}\,(A,C)$ es bilineal, luego se deduce que $(h+g)f = hf + gf$.

b) Si $g,\ f \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(A,B)$ y $h \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(B,C)$, entonces $h(g+f) = hg + hf$. Esto se verifica como en la parte *a)*.

Por consiguiente, la categoría ${}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}$ de complejos de cadena sobre Λ es aditiva ■

Se escribe $A_1 \oplus A_2$ para el producto de A_1 y A_2 en la categoría aditiva $\mathfrak{A}$. También se hace notar que el morfismo cero de $\mathfrak{A}(A,B)$ es el elemento cero del grupo abeliano $\mathfrak{A}(A,B)$.

Proposición 1.7.7 *Si $\mathfrak{A}$ es una categoría aditiva, entonces $\mathfrak{A}^{op}$ es una categoría aditiva.*

Prueba.- La categoría opuesta $\mathfrak{A}^{op}$ es aditiva ya que se verifican las cuatro siguientes condiciones:

i) Como $\mathfrak{A}$ es una categoría aditiva y $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}^{op}|$, el objeto cero de $\mathfrak{A}$ también es de $\mathfrak{A}^{op}$; *i.e.*, $0 \in |\mathfrak{A}^{op}|$.

ii) Si $A,\ B \in |\mathfrak{A}^{op}|$, entonces $A \times B \in |\mathfrak{A}^{op}|$, puesto que $A \times B \in |\mathfrak{A}|$.

iii) Si $A,\ B \in |\mathfrak{A}^{op}|$, entonces $\mathfrak{A}^{op}\,(A,B)$ es un grupo abeliano aditivo.
Sean f y $g \in \mathfrak{A}^{op}\,(A,B)$, entonces $f+g \in \mathfrak{A}^{op}\,(A,B)$.
En efecto:
f y $g \in \mathfrak{A}^{op}\,(A,B)$ implica que f^{op} y $g^{op} \in \mathfrak{A}\,(B,A)$, luego $f^{op} + g^{op}$ está definido en $\mathfrak{A}\,(B,A)$. Definiendo $f+g = (f^{op} + g^{op})^{op}$ se ve que $f+g \in \mathfrak{A}^{op}\,(A,B)$. Pero la categoría $\mathfrak{A}$ es aditiva, luego $\mathfrak{A}\,(B,A)$ es un grupo abeliano aditivo, esto también se verifica para $\mathfrak{A}^{op}\,(A,B)$.

iv) La composición $\mathfrak{A}^{op}(A,B) \times \mathfrak{A}^{op}(B,C) \longrightarrow \mathfrak{A}^{op}(A,C)$ es bilineal.
Esta afirmación consiste de las dos siguientes partes *a)* y *b)*:

a) Si $h,\ g \in \mathfrak{A}^{op}(B,C)$ y $f \in \mathfrak{A}^{op}(A,B)$, entonces $(h+g)f = hf + gf$.
En efecto, se usará la bilinealidad de la composición en $\mathfrak{A}$:

$$
\begin{aligned}
(h+g)f &= (h^{op}+g^{op})^{op}\,(f^{op})^{op}\\
&= [f^{op}\,(h^{op}+g^{op})]^{op}\\
&= (f^{op}h^{op}+f^{op}g^{op})^{op}\\
&= [(hf)^{op}+(gf)^{op}]^{op}\\
&= hf+gf.
\end{aligned}
$$

b) De manera análoga se prueba que $h(g+f) = hg + hf$ para todo $g,\ f \in \mathfrak{A}^{op}(A,B)$ y $h \in \mathfrak{A}^{op}(B,C)$ ■

***Lema* 1.7.8** $i_1p_1 + i_2p_2 = 1 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \oplus A_2$

Prueba.- Tomando producto de A_1 y A_2 se obtiene el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & A_1 \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] \arrow[r, dotted, "\exists!\{p_1,p_2\}"] & A_1 \oplus A_2 \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
 & A_2
\end{tikzcd}
$$

Se sabe que las siguientes aplicaciones canónicas $i_1 = \{1,0\} : A_1 \to A_1 \oplus A_2$, $i_2 = \{0,1\} : A_2 \to A_1 \oplus A_2$, $p_1 =< 1,0 >: A_1 \oplus A_2 \to A_1$ y $p_2 =< 0,1 >: A_1 \oplus A_2 \to A_2$; satisfacen $p_1i_1 = 1$, $p_1i_2 = 0$, $p_2i_1 = 0$ y $p_2i_2 = 1$. Claramente

$$
\begin{aligned}
\{p_1,p_2\} &= \{1,0\}p_1 + \{0,1\}p_2\\
&= i_1p_1 + i_2p_2
\end{aligned}
$$

luego se tiene:

$$
\begin{aligned}
p_1(i_1p_1+i_2p_2) &= (p_1i_1)p_1 + (p_1i_2)p_2\\
&= p_1
\end{aligned}
$$

de manera similar $p_2(i_1p_1 + i_2p_2) = p_2$.

Como la aplicación identidad $1 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ también satisface las condiciones para $\{p_1,p_2\}$ o (hace conmutar el diagrama anterior) y $\{p_1,p_2\} = i_1p_1 + i_2p_2$ es único, se debe tener $i_1p_1 + i_2p_2 = 1$ ■

Proposición 1.7.9 *Sean $i_1 = \{1,0\} : A_1 \to A_1 \oplus A_2$, $i_2 = \{0,1\} : A_2 \longrightarrow A_1 \oplus A_2$. Entonces $(A_1 \oplus A_2;\, i_1, i_2)$ es el coproducto de A_1 y A_2 en la categoría aditiva $\mathfrak{A}$.*

Prueba.- Dados $\varphi_i : A_i \to B$, $i = 1, 2$, se define
$< \varphi_1, \varphi_2 >= \varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B$, entonces:

$$\begin{aligned}
< \varphi_1, \varphi_2 > i_1 &= (\varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2) i_1 \\
&= \varphi_1 p_1 i_1 + \varphi_2 p_2 i_1 \\
&= \varphi_1; \\
< \varphi_1, \varphi_2 > i_2 &= (\varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2) i_2 \\
&= \varphi_1 p_1 i_2 + \varphi_2 p_2 i_2 \\
&= \varphi_2
\end{aligned}$$

Ahora, se prueba la unicidad de $< \varphi_1, \varphi_2 >$.
Suponga que existe $\theta : A_1 \oplus A_2 \to B$ tal que $\theta i_1 = \varphi_1$ y $\theta i_2 = \varphi_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\theta = \theta 1 &= \theta(i_1 p_1 + i_2 p_2) \text{ por Lema 1.7.8} \\
&= \theta i_1 p_1 + \theta i_2 p_2 \\
&= \varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2 \\
&= < \varphi_1, \varphi_2 > \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Gráficamente esta proposición garantiza la existencia de coproducto de dos objetos en una categoría aditiva $\mathfrak{A}$:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, dotted, "\exists! <\varphi_1, \varphi_2>"] & B \\
A_2 \arrow[u, "i_2"'] \arrow[ur, "\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Se usa el símbolo de suma en lugar del símbolo de coproducto en el caso de una categoría aditiva. Por supuesto, sumas solamente coinciden con productos en una categoría aditiva si el número de objetos involucrados es finito.

Proposición 1.7.10 *Dada la sucesión* $A \xrightarrow{\{\varphi,\psi\}} B \oplus C \xrightarrow{<\gamma,\delta>} D$ *en una categoría aditiva* $\mathfrak{A}$*, se cumple que*

$$< \gamma, \delta > \{\varphi, \psi\} = \gamma\varphi + \delta\psi.$$

Prueba.-
$$\begin{aligned}
< \gamma, \delta > \{\varphi, \psi\} &= (\gamma p_1 + \delta p_2)\{\varphi, \psi\} \\
&= \gamma p_1 \{\varphi, \psi\} + \delta p_2 \{\varphi, \psi\} \\
&= \gamma\varphi + \delta\psi \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolario 1.7.11 *La adición en el conjunto* $\mathfrak{A}(A, B)$ *está determinado por la categoría* $\mathfrak{A}$*.*

Prueba.- De Proposición 1.7.10 tomando $C = D = B$ y $\gamma = \delta = 1$,
para $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ se obtiene $\varphi + \psi =< 1, 1 > \{\varphi, \psi\}$ ■

Proposición 1.7.12 *Sea $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un funtor de una categoría aditiva $\mathfrak{A}$ en la categoría aditiva $\mathfrak{B}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) F preserva productos (de dos objetos)

ii) F preserva suma (de dos objetos)

iii) Para cada par $A, A' \in |\mathfrak{A}|$, $F : \mathfrak{A}(A, A') \to \mathfrak{B}(FA, FA')$ es un homomorfismo.

Prueba:
i) $\Rightarrow$ *ii)* Suponga que F preserva el producto.
Esto se expresa en diagramas, como sigue:

$$\begin{tikzcd}
 & F(A_1) \\
F(A_1 \oplus A_2) \arrow[ur, "Fp_1"] \arrow[r, dotted, "\exists!\{Fp_1, Fp_2\}"] \arrow[dr, "Fp_2"'] & F(A_1) \oplus F(A_2) \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
 & F(A_2)
\end{tikzcd}$$

Significa que $\{Fp_1, Fp_2\}$ es un isomorfismo, pues existe
$< F(i_1), F(i_2) >= F(i_1)p_1 + F(i_2)p_2 : F(A_1) \oplus F(A_2) \longrightarrow F(A_1 \oplus A_2)$ tal que $< F(i_1), F(i_2)) >$ es el inverso de $\{Fp_1, Fp_2\}$.

Ahora, cambiando el sentido de las flechas se obtiene el diagrama correspondiente para coproducto o suma:

$$\begin{tikzcd}
 & F(A_1) \arrow[dl, "F(i_1)"'] \arrow[d, "i_1"] \\
F(A_1 \oplus A_2) & F(A_1) \oplus F(A_2) \arrow[l, dotted, "<F(i_1), F(i_2)>"'] \\
 & F(A_2) \arrow[ul, "F(i_2)"] \arrow[u, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Por lo dicho arriba $< F(i_1), F(i_2) >= F(i_1)p_1 + F(i_2)p_2$ tiene como inverso $\{Fp_1, Fp_2\}$, por lo tanto F preserva sumas (o coproductos).

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Si $\varphi_1,\ \varphi_2 : A \to A'$, entonces $\varphi_1 + \varphi_2 =< 1, 1 > \{\varphi_1, \varphi_2\}$ como F preserva sumas (y productos)

$$\begin{aligned}
F(\varphi_1+\varphi_2) &= F<1,1>F\{\varphi_1,\varphi_2\}\\
&= <F1,F1>\{F\varphi_1,F\varphi_2\}\\
&= <1,1>\{F\varphi_1,F\varphi_2\}\\
&= F\varphi_1+F\varphi_2
\end{aligned}$$

$iii) \Rightarrow i)$ Para probar que F preserva productos se debe verificar que $\{Fp_1, Fp_2\} : F(A_1 \oplus A_2) \longrightarrow F(A_1) \oplus F(A_2)$ es un isomorfismo.

Se prueba que $F(i_1)p_1 + F(i_2)p_2 : FA_1 \oplus FA_2 \longrightarrow F(A_1 \oplus A_2)$ es inverso de $\{Fp_1, Fp_2\}$, ya que

$$\begin{aligned}
\{Fp_1,Fp_2\}(F(i_1)p_1+F(i_2)p_2) &= \{Fp_1,Fp_2\}F(i_1)p_1+\{Fp_1,Fp_2\}F(i_2)p_2\\
&= \{F(p_1i_1),F(p_2i_1)\}p_1+\{F(p_1i_2),F(p_2i_2)\}p_2\\
&= \{F(1),F(0)\}p_1+\{F(0),F(1)\}p_2\\
&= \{1,0\}p_1+\{0,1\}p_2, \quad \text{pues } F(0)=0\\
&= i_1p_1+i_2p_2\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F(i_1)p_1+F(i_2)p_2)\{Fp_1,Fp_2\} &= F(i_1)p_1\{Fp_1,Fp_2\}+f(i_2)p_2\{Fp_1,Fp_2\}\\
&= F(i_1)F(p_1)+F(i_2)F(p_2)\\
&= F(i_1p_1+i_2p_2), \qquad \text{pues } F \text{ es homomorfismo}\\
&= F(1)\\
&= 1 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición 1.7.13 *Un funtor que satisface las condiciones equivalentes de Proposición 1.7.12 se llama* FUNTOR ADITIVO.

Proposición 1.7.14 $Hom_\Lambda(A,-) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ *es un funtor covariante aditivo.*

Prueba.- Se prueba que el funtor covariante $Hom_\Lambda(A,-)$ es aditivo, verificando la igualdad $Hom_\Lambda(A, f+g) = Hom_\Lambda(A,f) + Hom_\Lambda(A,g)$ para todo $f, g \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(B,C)$. En efecto, como $f+g \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(B,C)$ se tiene
$Hom_\Lambda(A, f+g) : Hom_\Lambda(A,B) \to Hom_\Lambda(A,C)$ definido por
$Hom_\Lambda(A, f+g)h = (f+g)h$ para todo $h \in Hom_\Lambda(A,B)$,

$$\begin{aligned}
\text{Pero } (f+g)h = fh+gh &= Hom_\Lambda(A,f)h+Hom_\Lambda(A,g)h\\
&= [Hom_\Lambda(A,f)+Hom_\Lambda(A,g)](h)
\end{aligned}$$

Luego $Hom_\Lambda(A, f+g) = Hom_\Lambda(A,f) + Hom_\Lambda(A,g)$ $\blacksquare$

Proposición 1.7.15 *Sea $B \in \left|\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}\right|$, entonces $Hom_{\Lambda}(-,B) : \mathfrak{M}_{\Lambda}^{l} \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor contravariante aditivo.*

Prueba.- Considerando $f+g \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}(C,A)$ y definiendo $Hom_{\Lambda}(f+g,B)h = h(f+g)$ para todo $h \in Hom_{\Lambda}(A,B)$, se prueba como en la proposición anterior ■

Proposición 1.7.16 *El funtor covariante $H(-) : {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}} \to \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}$ es aditivo.*

Prueba.- Ya se probó en Proposición 1.5.9 que $H(-) : {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}} \to \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}$ es un funtor covariante, entonces para que H sea aditivo se verificará que $H(\varphi+\psi) = H(\varphi)+H(\psi)$ para todo $\varphi, \psi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(C,D)$.
En efecto:
$\varphi, \psi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(C,D)$ implica que $\varphi + \psi \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}(C,D)$ y por (1.3):

$$\begin{aligned}
H_n(\varphi+\psi)\left(x + Im\partial_{n+1}^{c}\right) &= (\varphi+\psi)_n(x) + Im\partial_{n+1}^{d} \\
&= \left(\varphi_n(x) + Im\partial_{n+1}^{d}\right) + \left(\psi_n(x) + Im\partial_{n+1}^{d}\right) \\
&= H_n(\varphi)\left(x + Im\partial_{n+1}^{c}\right) + H_n(\psi)\left(x + Im\partial_{n+1}^{c}\right) \\
&= \left(H_n(\varphi) + H_n(\psi)\right)\left(x + Im\partial_{n+1}^{c}\right)
\end{aligned}$$

para todo $x \in Ker\partial_{n}^{c}$. Pero $H_n(\varphi+\psi) = [H(\varphi+\psi)]_n$, luego
$[H(\varphi+\psi)]_n = H_n(\varphi) + H_n(\psi) = [H(\varphi) + H(\psi)]_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$; en consecuencia, $H(\varphi+\psi) = H(\varphi) + H(\psi)$ ■

De esta proposición se deduce que en cada componente se cumple la igualdad $H_n(\varphi+\psi) = H_n(\varphi) + H_n(\psi)$; es decir, H_n es un funtor covariante aditivo de ${}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}$ en $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}$.

Proposición 1.7.17 *Sea $A \in |\mathfrak{M}_{\Lambda}^{r}|$, $F_A = A \otimes_{\Lambda} (-) : \mathfrak{M}_{\Lambda}^{l} \to \mathfrak{Ab}$, entonces el funtor F_A es aditivo.*

Prueba.- Para demostrarlo se debe verificar que $F_A(f+g) = F_A(f) + F_A(g)$ para todo $f, g \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}(B, B')$.
Sea $a \otimes b \in A \otimes_{\Lambda} B$ (arbitrario), entonces

$$\begin{aligned}
F_A(f+g)(a \otimes b) &= [1_A \otimes (f+g)](a \otimes b) \\
&= 1_A a \otimes (f+g)b \\
&= a \otimes (fb + gb) \\
&= a \otimes fb + a \otimes gb \\
&= 1_A a \otimes fb + 1_A a \otimes gb \\
&= (1_A \otimes f)(a \otimes b) + (1_A \otimes g)(a \otimes b) \\
&= [1_A \otimes f + 1_A \otimes g](a \otimes b) \\
&= [F_A(f) + F_A(g)](a \otimes b)
\end{aligned}$$

Luego $F_A(f+g) = F_A(f) + F_A(g)$ para todo $f, g \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(B, B')$.
Por lo tanto, el funtor $A \otimes_\Lambda (-)$ es aditivo ■

Dado $B \in \left|\mathfrak{M}^l_\Lambda\right|$, se prueba como en Proposición 1.7.17 que el funtor covariante $(-)\otimes_\Lambda B$ es aditivo.

Los funtores aditivos juegan un rol crucial en la teoría de funtores derivados.

Para ser capaces de hacer una álgebra homológica efectiva se necesita introducir una estructura rica en la categoría aditiva; se desea tener núcleos, conúcleos e imágenes. Recuerde que los núcleos si existen siempre son monics y los conúcleos siempre son epics. En la categoría aditiva un monic es caracterizado como aquel que tiene núcleo cero y epic es caracterizado como aquel que tiene conúcleo cero.

Definición 1.7.18 *Una categoría abeliana es una categoría aditiva en que se satisfacen las tres siguientes condiciones :*

i) *Cada morfismo tiene un núcleo y un conúcleo.*

ii) *Cada monomorfismo es núcleo de su conúcleo; cada epimorfismo es conúcleo de su núcleo.*

iii) *Cada morfismo se expresa como composición de un epimorfismo y un monomorfismo.*

Proposición 1.7.19 *La categoría de Λ-módulos izquierdos $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es abeliana.*

Prueba.- Para que la categoría aditiva $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ sea abeliana se verificará las tres siguientes condiciones *i)*,*ii)* y *iii)*:

i) Si $f \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(A, B)$, entonces f posee núcleo y conúcleo.
Esta afirmación se verifica con los items *a)* y *b)*:

a) El núcleo de f denotado por $ker(f) : Ker(f) \to A$ se define por
$ker(f)(x) = x$..............(I)
para todo $x \in Ker(f) = \{a \in A \ / \ f(a) = 0_B\}$.
Se nota que $ker(f)$ es un morfismo de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$.
Claramente $ker(f)$ satisface las condiciones de núcleo para f:

1) $ker(f)$ es monic

2) $f \circ ker(f) = 0$

3) $f \circ g = 0$ implica que existe $h \in \mathfrak{m}^l_\Lambda(E, K)$ tal que $g = ker(f) \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, "ker(f)"] \arrow[rr, bend left, "0"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
E \arrow[u, dotted, "\exists h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

En efecto:

1) Sean $u, v : W \to K$ tal que $ker(f) \circ u = ker(f) \circ v$, entonces $u = v$.
En efecto, de $ker(f) \circ u(w) = ker(f) \circ v(w)$ por definición de $ker(f)$ se tiene $u(w) = v(w)$, luego $u = v$.

2)
$$\begin{aligned} f \circ ker(f)(a) &= f(a) \text{ pues } ker(f)(a) = a \\ &= 0, \text{ para todo } a \in Ker(f) = K. \end{aligned}$$
Luego $f \circ ker(f) = 0$.

3) Existencia de h : a partir de la igualdad dada se tiene que
$Im(g) \subseteq Ker(f) = K$.
Entonces se define $h : E \to K$ por $h(e) = g(e)$ para todo $e \in E$.
Observando la definición de h, éste es un morfismo en $\mathfrak{m}^l_\Lambda$.
Como $ker(f)(h(e)) = g(e)$, se deduce que $ker(f) \circ h(e) = g(e)$ para todo $e \in E$; por lo tanto $g = ker(f) \circ h$.

Conforme a Definición 1.3.11, el $ker(f)$ definido en (I) es el núcleo de f.

b) El conúcleo de f denotado por $coker(f) : B \to Q = Coker(f)$ se define por
$coker(f)(x) = x + Im(f)$...............(II)
para todo $x \in B$.
Se nota que $coker(f)$ es un morfismo de $\mathfrak{m}^l_\Lambda$.
$coker(f)$ satisface las tres siguientes condiciones de conúcleo para f:

1) $coker(f)$ es epic
2) $coker(f) \circ f = 0$
3) $g \circ f = 0$ implica que existe un morfismo φ en $\mathfrak{m}^l_\Lambda$ tal que $g = \varphi \circ coker(f)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, "0"'] & B \arrow[r, "coker(f)"] \arrow[dr, "g"] & Q \arrow[d, dotted, "\exists \varphi"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

En efecto:

1) Sean $u, v : Q \to W$ tal que $u \circ coker(f) = v \circ coker(f)$, entonces $u = v$.
   En efecto, para $b \in B$ (arbitrario) se obtiene $u(coker(f)(b)) = v(coker(f)(b))$, como $coker(f)(b) = b + Im(f)$, se deduce que
   $u(b + Im(f)) = v(b + Im(f))$ para todo $b + Im(f) \in Q$, luego $u = v$.

2)
$$\begin{aligned} coker(f) \circ f(a) &= f(a) + Im(f) \\ &= Im(f), \text{ pues } f(a) \in Im(f). \\ &= 0, \text{ en } Q = B/Im(f), \text{ para todo } a \in A. \end{aligned}$$

   Luego $coker(f) \circ f = 0$.

3) Existencia de φ : La igualdad $g \circ f = 0$ implica que $Im(f) \subseteq Ker(g)$.
   Se define $\varphi : Q \to C$ por $\varphi(q) = g(b)$ con $q = coker(f)(b)$......(III)
   φ está bien definida.
   Sean q y $q' \in Q$ tales que $q = q'$, entonces $\varphi(q) = \varphi(q')$.
   Por definición, $coker(f)$ es sobreyectiva; luego existen b y $b' \in B$ tales que $q = coker(f)(b)$ y $q' = coker(f)(b')$. Pero $q = q'$, luego
   $b + Im(f) = b' + Im(f)$, de donde $b - b' = f(a) \in Ker(g)$ para algún $a \in A$, así $g(b) = g(b')$. Esto significa que $\varphi(q) = \varphi(q')$.
   Claramente φ es un morfismo de $\mathfrak{m}^l_\Lambda$, por ser definido en (III) en términos del morfismo g de $\mathfrak{m}^l_\Lambda$.
   Volviendo a (III) se ve que $\varphi \circ coker(f)(b) = g(b)$ para todo $b \in B$, por lo tanto $\varphi \circ coker(f) = g$.

Por Definición 1.3.12, el $coker(f)$ definido en (II) es el conúcleo de f.

ii) Cada monomorfismo es el núcleo de su conúcleo; cada epimorfismo es conúcleo de su núcleo.
Esto se verificará con los siguientes items *a*) y *b*):

a) Si $\mu \in \mathfrak{m}^l_\Lambda(A, B)$ es monic, entonces $\mu = ker(coker(\mu))$.
   Se verificará que μ satisface las tres condiciones de núcleo para $coker(\mu)$:

   1) μ es monic
   2) $coker(\mu) \circ \mu = 0$
   3) $coker(\mu) \circ h = 0$, entonces existe $\varphi \in \mathfrak{m}^l_\Lambda\,(E, A)$ tal que $h = \mu \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[rr, bend left, "0"] & B \arrow[r, "coker(\mu)"] & B/Im(\mu) \\ E \arrow[u, dotted, "\exists\varphi"] \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

En efecto:

1) μ es monic por hipótesis.
2) Por la definición de $coker(\mu)$, se sigue que $coker(\mu) \circ \mu = 0$.
3) Existencia de φ : el morfismo $h : E \to B$ de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es tal que $coker(\mu) \circ h(e) = Im(\mu)$, entonces se deduce que $h(e) = \mu(a)$ para un (único porque μ es monic) $a \in A$, luego se puede definir $\varphi(e) = a$ para que $(\mu \circ \varphi)(e) = \mu(\varphi(e)) = \mu(a) = h(e)$, así $h = \mu \circ \varphi$.
Usando el hecho que μ es monic se prueba que φ es un morfismo de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$.

Conforme a Definición 1.3.11, se deduce que $\mu = ker(coker(\mu))$.

b) Si $\varepsilon \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(A, B)$ es epic, entonces $\varepsilon = coker(ker(\varepsilon))$.
Se verificará que ε satisface las siguientes condiciones de conúcleo para $ker(\varepsilon)$:

1) ε es epic
2) $\varepsilon \circ ker(\varepsilon) = 0$
3) $h \circ ker(\varepsilon) = 0$, entonces existe $\varphi \in \mathfrak{M}^l_\Lambda$ (B, C) tal que $h = \varphi \circ \varepsilon$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "ker(\varepsilon)"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, "0"'] & A \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[dr, "h"] & B \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

En efecto:

1) ε es epic por hipótesis.
2) Por definición de $ker(\varepsilon)$, se sigue que $\varepsilon \circ ker(\varepsilon) = 0$.
3) Existencia de φ: de $h \circ ker(\varepsilon) = 0$ se tiene que $K \subseteq Ker(h)$ ...$(*)$
Se define $\varphi : B \to C$ por $\varphi(b) = h(a)$ con $\varepsilon(a) = b$.
Si $\varepsilon(a) = \varepsilon(a') = b$, entonces $a - a' \in Ker(\varepsilon) = K$. Luego por $(*)$: $h(a - a') = 0$, esto implica que $h(a) = h(a')$.
Así, φ está bien definida por $\varphi(b) = h(a)$ con $\varepsilon(a) = b$.
Como φ es definido en términos del morfismo h de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$, se deduce que existe $\varphi \in \mathfrak{M}^l_\Lambda$ (B, C) tal que $h = \varphi \circ \varepsilon$.

Conforme a Definición 1.3.12, se obtiene que $\varepsilon = coker(ker(\varepsilon))$.

iii) Si $f \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(A, B)$, entonces $f = \mu\varepsilon$, donde ε es epic y μ es monic.

En efecto:
Definiendo $\varepsilon : A \to Im(f)$ por $\varepsilon(a) = f(a)$, se prueba que ε es epic:

Sean $u, v : Im(f) \to W$ tales que $u \circ \varepsilon = v \circ \varepsilon$, entonces $u = v$.
De la igualdad $u \circ \varepsilon = v \circ \varepsilon$ se obtiene que $u(\varepsilon(a)) = v(\varepsilon(a))$ para todo $\varepsilon(a) \in Im(f)$, luego $u = v$.
Definiendo $\mu : Im(f) \to B$ por $\mu(c) = c$, se prueba que μ es monic:
Sean $\rho,\ \sigma : W \to Im(f)$ tales que $\mu \circ \sigma = \mu \circ \rho$, entonces $\sigma = \rho$.
Es claro que $\sigma(w) = \mu(\sigma(w)) = \mu(\rho(w)) = \rho(w)$ para todo $w \in W$, luego $\sigma = \rho$.
Por las definiciones dadas de ε y μ, se deduce que $f(a) = \mu(f(a)) = \mu(\varepsilon(a)) = \mu \circ \varepsilon(a)$.
Por lo tanto $f = \mu\varepsilon$, donde ε es epic y μ es monic ■

Proposición 1.7.20 *Si $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathfrak{A}^{op}$ es una categoría abeliana.*

Prueba.- Por Proposición 1.7.7 la categoría $\mathfrak{A}^{op}$ es aditiva. Para probar que $\mathfrak{A}^{op}$ es una categoría abeliana se va a verificar las tres siguientes condiciones:

i) Sea $\varphi \in \mathfrak{A}^{op}(A, B)$, entonces existen $\mu \in \mathfrak{A}^{op}(K, A)$ y $\varepsilon \in \mathfrak{A}^{op}(B, C)$ tales que $\mu = ker(\varphi)$ y $\varepsilon = coker(\varphi)$.
En efecto:
$\varphi \in \mathfrak{A}^{op}(A, B)$ implica que $\varphi^{op} \in \mathfrak{A}(B, A)$. Como $\mathfrak{A}$ es categoría abeliana, existen morfismos $\gamma \in \mathfrak{A}(C, B)$ y $\delta \in \mathfrak{A}(A, K)$ tales que $\gamma = ker(\varphi^{op})$ y $\delta = coker(\varphi^{op})$.
Por Proposición 1.3.13, los morfismos $\gamma^{op} \in \mathfrak{A}^{op}(B, C)$ y $\delta^{op} \in \mathfrak{A}^{op}(K, A)$ son tales que $\gamma^{op} = coker(\varphi)$ y $\delta^{op} = ker(\varphi)$. Tomando $\mu = \delta^{op}$ y $\varepsilon = \gamma^{op}$, se deduce que existen morfismos μ y ε en $\mathfrak{A}^{op}$ tales que $\mu = ker(\varphi)$ y $\varepsilon = coker(\varphi)$.

ii) Sean $\varphi \in \mathfrak{A}^{op}(A, B)$ monic y $\psi \in \mathfrak{A}^{op}(C, D)$ epic, entonces $\varphi = ker\,(coker(\varphi))$ y $\psi = coker\,(ker(\psi))$.
En efecto:
Por Proposición 1.3.3 $\varphi \in \mathfrak{A}^{op}(A, B)$ monic y $\psi \in \mathfrak{A}^{op}(C, D)$ epic, implica que $\varphi^{op} \in \mathfrak{A}(B, A)$ es epic y $\psi^{op} \in \mathfrak{A}(D, C)$ es monic; luego usando el hecho que $\mathfrak{A}$ es categoría abeliana, resulta que $\varphi^{op} = coker\,(ker(\varphi^{op}))$ y $\psi^{op} = ker\,(coker(\psi^{op}))$.
Por Proposición 1.3.13, se obtiene que $\varphi = ker\,(coker(\varphi))$ y $\psi = coker\,(ker(\psi))$.

iii) Sea $\varphi \in \mathfrak{A}^{op}(A, B)$, entonces existen $\eta \in \mathfrak{A}^{op}(A, I)$ epic y $\nu \in \mathfrak{A}^{op}(I, B)$ monic tales que $\varphi = \nu\eta$.
En efecto:
$\varphi \in \mathfrak{A}^{op}(A, B)$ implica que $\varphi^{op} \in \mathfrak{A}(B, A)$. Como $\mathfrak{A}$ es categoría abeliana, luego existen morfismos $\sigma \in \mathfrak{A}(B, I)$ epic y $\lambda \in \mathfrak{A}(I, A)$ monic tales que $\varphi^{op} = \lambda\sigma$, de donde los morfismos $\sigma^{op} \in \mathfrak{A}^{op}(I, B)$ monic y $\lambda^{op} \in \mathfrak{A}^{op}(A, I)$ epic, son tales que $\varphi = \sigma^{op}\lambda^{op}$. Haciendo $\eta = \lambda^{op}$ y $\nu = \sigma^{op}$, se ve que existen morfismos η y ν en $\mathfrak{A}^{op}$ tales que $\varphi = \nu\eta$, donde η es epic y ν es monic.

En consecuencia, la categoría opuesta $\mathfrak{A}^{op}$ es abeliana ■

Definición 1.7.21 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Un objeto graduado de $\mathfrak{C}$ es una familia $A = \{A_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ de objetos A_n de $\mathfrak{C}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Un morfismo $\varphi : A \to B$ de objetos* *graduados de $\mathfrak{C}$ es una familia $\varphi = \{\varphi_n : A_n \to B_n\}$ de morfismos $\varphi_n : A_n \to B_n$ de $\mathfrak{C}$ para $n \in \mathbb{Z}$. El producto de morfismos $\varphi : A \to B$ y $\psi : B \to C$ de objetos graduados de $\mathfrak{C}$ se define como la familia $\psi\varphi = \{(\psi\varphi)_n : A_n \to C_n\}$ de morfismos $(\psi\varphi)_n = \psi_n\varphi_n : A_n \to C_n$ de $\mathfrak{C}$ para $n \in \mathbb{Z}$.*

Según Proposición 1.5.2 usando $\mathfrak{C}$ en lugar de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$, se prueba que la colección $\mathfrak{C}^{\mathbb{Z}}$ de objetos graduados de $\mathfrak{C}$ es una categoría, junto con los morfismos y el producto de morfismos definidos.

Definición 1.7.22 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana y $\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A, B)$.*

i) *El morfismo $\mu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(K, A)$ es núcleo de φ si $\mu_n = ker(\varphi_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En este caso se denotará $\mu = ker(\varphi)$.*

ii) *El morfismo $\varepsilon \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(B, C)$ es conúcleo de φ si $\varepsilon_n = coker(\varphi_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En este caso se denotará $\varepsilon = coker(\varphi)$.*

iii) *$\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A, B)$ es monic si $\varphi_n \in \mathfrak{A}(A_n, B_n)$ es monic para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

iv) *$\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A, B)$ es epic si $\varphi_n \in \mathfrak{A}(A_n, B_n)$ es epic para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 1.7.23 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana. Entonces la categoría $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ de objetos graduados de $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana [8].*

Prueba :

i) Se verifica que la categoría $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ es aditiva como se hizo en Ejemplo 1.7.4.

ii) Se prueba que la categoría aditiva $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ es abeliana, ya que se cumplen las tres siguientes condiciones:

a) Sea $\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A, B)$, entonces existen $\mu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(K, A)$ y $\varepsilon \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(B, C)$ tales que $\mu = ker(\varphi)$ y $\varepsilon = coker(\varphi)$.
En efecto:
$\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A, B)$ implica que $\varphi = \{\varphi_n : A_n \to B_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Como $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana y $\varphi_n \in \mathfrak{A}(A_n, B_n)$; existen $\mu_n \in \mathfrak{A}(K_n, A_n)$ y $\varepsilon_n \in \mathfrak{A}(B_n, C_n)$ tales que $\mu_n = ker(\varphi_n)$ y $\varepsilon_n = coker(\varphi_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego, existen $\mu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(K, A)$ y $\varepsilon \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(B, C)$ tales que $\mu = ker(\varphi)$ y $\varepsilon = coker(\varphi)$.

b) Sean $\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A, B)$ monic, $\psi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(C, D)$ epic; entonces $\varphi = ker\,(coker(\varphi))$ y $\psi = coker\,(ker(\psi))$.
En efecto:
$\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A, B)$ monic implica que $\varphi_n \in \mathfrak{A}(A_n, B_n)$ es monic para cada $n \in \mathbb{Z}$; pero $\mathfrak{A}$ es categoría abeliana, luego $\varphi_n = ker\,(coker(\varphi_n))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\varphi = ker\,(coker(\varphi))$.
Análogamente, si $\psi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(C, D)$ epic, se prueba que $\psi = coker\,(ker(\psi))$.

c) Sea $\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A,B)$, entonces existen $\eta \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A,I)$ epic y $\nu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(I,B)$ monic tales que $\varphi = \nu\eta$.
En efecto:
$\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A,B)$ implica que $\varphi = \{\varphi_n : A_n \to B_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ahora, como $\mathfrak{A}$ es categoría abeliana y $\varphi_n \in \mathfrak{A}(A_n,B_n)$; luego existen $\eta_n \in \mathfrak{A}(A_n,I_n)$ epic y $\nu_n \in \mathfrak{A}(I_n,B_n)$ monic tales que $\varphi_n = \nu_n\eta_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Así, existen $\eta \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(A,I)$ epic y $\nu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}(I,B)$ monic tales que $\varphi = \nu\eta$ ■

Corolario 1.7.24 *La categoría de Λ-módulos graduados $\mathfrak{m}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}$ es abeliana.*

Prueba.- Como $\mathfrak{m}_{\Lambda}^{l}$ es una categoría abeliana, por Proposición 1.7.23 se deduce $\mathfrak{m}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}$ es una categoría abeliana ■

Ejemplo 1.7.25 *La categoría de los complejos de cadena sobre Λ, ${}_{\Lambda}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}$, es abeliana.*

En lo que sigue, se probará algunas propiedades de categorías abelianas y se definirá sucesiones exactas.

***Lema* 1.7.26** *Si $\nu\eta$ y η tienen el mismo núcleo y η es epimorfismo. Entonces ν es un monomorfismo.*

Prueba.- Usando la condición *iii)* de categorías abelianas se puede escribir $\nu = \rho\sigma$, donde σ es epic y ρ es monic.

Entonces $\nu\eta = \rho\sigma\eta$. Sea μ es núcleo de $\sigma\eta$, entonces μ es núcleo de $\rho\sigma\eta = \nu\eta$, por hipótesis es también núcleo de η, por la condición *ii)* de categorías abelianas, $\sigma\eta$ y η son ambos conúcleos de μ. Esto significa gráficamente

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, dotted, "\exists\omega"'] & \cdot \arrow[l, two heads, "\eta"'] \arrow[dl, two heads, "\sigma\eta"'] & \cdot \arrow[l, tail, "\mu"'] \arrow[ll, bend right, "0"'] \arrow[dll, "0"] \\
\cdot & &
\end{tikzcd}$$

Así existe un isomorfismo ω en $\mathfrak{A}$, tal que $\omega\eta = \sigma\eta$, como η es epic se deduce que $\omega = \sigma$. Ahora, como σ es un isomorfismo, σ es monic, por lo tanto la composición de monics $\nu = \rho\sigma$ es monomorfismo (monic) ■

Proposición 1.7.27 *Dado el morfismo $\varphi : A \to B$ en la categoría abeliana $\mathfrak{A}$, se puede deducir de φ la sucesión de objetos y morfismos*

$$(S_{\varphi}) \quad : \quad K \overset{\mu}{\rightarrowtail} A \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} I \overset{\nu}{\rightarrowtail} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} C$$

donde $\varphi = \nu\eta$, μ es núcleo de φ, ε es conúcleo de φ, η conúcleo de μ, y ν es núcleo de ε. Además la descomposición de φ como composición de un epic y monic es esencialmente única.

Prueba.- Según la condición *i)* de categoría abeliana, sea μ núcleo de φ y η conúcleo de μ. Luego $\varphi\mu = 0$ y $\eta\mu = 0$; pero $\eta = coker(\mu)$ luego existe ν tal que $\varphi = \nu\eta$. Por ser μ núcleo de η, por Lema 1.7.26 ν es monic.
Sea ε es el conúcleo de $\varphi = \nu\eta$, entonces ε es conúcleo de ν.
En efecto:
Del hecho que ε es el conúcleo de $\varphi = \nu\eta$ se sigue:

a) ε epic.

b) $\varepsilon\nu\eta = 0$

c) $g\nu\eta = 0$ implica que existe h tal que $g = h\varepsilon$.

Ahora, del hecho que η es epic, se aplica la propiedad cancelativa por la derecha en las ecuaciones, para obtener

d) ε epic.

e) $\varepsilon\nu = 0$

f) $g\nu = 0$ implica que existe h tal que $g = h\varepsilon$.

Por lo tanto ε es conúcleo de ν.
Por la condición *ii)* de categorías abelianas, todo monic es núcleo de su conúcleo;i.e., $\nu = ker(coker(\nu)) = ker(\varepsilon)$, así ν es núcleo de ε. Luego está probada la existencia de S_φ.

Finalmente, se ve la unicidad de la descomposición:
Si $\varphi = \nu\eta = \nu_1\eta_1$ con η, η_1 epimorfismos y ν y ν_1 monomorfismos, entonces se prueba que

$$ker\varphi = ker\eta = ker\eta_1.$$

Según la condición *ii)* de categorías abelianas todo epimorfismo es conúcleo de su núcleo, permite hacer el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, dotted, leftrightarrow, "\exists\omega"'] & \cdot \arrow[l, two heads, "\eta"'] \arrow[dl, two heads, "\eta_1"] & \cdot \arrow[l, tail, "ker\eta=ker\eta_1"'] \\
\cdot & &
\end{tikzcd}$$

Luego existe un isomorfismo ω en $\mathfrak{A}$ tal que $\boxed{\eta_1 = \omega\eta}$,
usando la igualdad $\nu\eta = \nu_1\eta_1$ y el hecho que η es epic, se deduce $\boxed{\nu = \nu_1\omega}$ ■

Corolario 1.7.28 *Si un morfismo ϕ en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ es un epimorfismo y monomorfismo, entonces es isomorfismo.*

Prueba.- Como ϕ es monomorfismo y epimorfismo se puede descomponer en las dos formas $\phi = \phi 1 = 1\phi$.
Según la proposición anterior, haciendo $\nu = \phi, \eta = 1, \nu_1 = 1$ y $\eta_1 = \phi$, se garantiza existencia de un isomorfismo ω en $\mathfrak{A}$ tal que

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \omega\eta \\ &= \omega 1 \\ &= \omega \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \nu &= \nu_1\omega \\ &= 1\omega \\ &= \omega \end{aligned}$$

Luego $\phi = \eta_1 = \nu = \omega$, así ϕ es un isomorfismo ■

Se puede mostrar que la sucesión S_φ es esencialmente única. Dado un diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \end{tikzcd}$$

existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, "\alpha"] & I \arrow[r, tail, "\nu"] \arrow[d, "l"] & B \arrow[r, two heads, "\epsilon"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\lambda"] \\ K' \arrow[r, tail, "\mu'"] & A' \arrow[r, two heads, "\eta'"] & I' \arrow[r, tail, "\nu'"] & B' \arrow[r, two heads, "\epsilon'"] & C' \end{tikzcd}$$

donde $\varphi = \nu\eta,\ \varphi' = \nu'\eta'$

Se construye μ, μ' como núcleos y luego η, η' ; ϵ, ϵ' como conúcleos. Usando propiedades de núcleos y conúcleos se obtiene los morfismos k, l, λ tales que $\mu' k = \alpha\mu$,
$\eta'\alpha = l\eta,\ \epsilon'\beta = \lambda\epsilon$ y lo único que falta probar es que $\nu' l = \beta\nu$.
Como $\nu' l\eta = \nu'\eta'\alpha = \varphi'\alpha = \beta\varphi = \beta\nu\eta$ y así, por ser η epic se deduce que $\nu' l = \beta\nu$.

Definición 1.7.29 *Una sucesión exacta corta en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ es una sucesión*

$$\cdot \overset{\mu}{\rightarrowtail} \cdot \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \cdot$$

en donde μ es núcleo de ϵ y ϵ es conúcleo de μ.

Se define imagen $im(\mu)$ de μ en $\mathfrak{A}$ por $im(\mu) = ker\,(coker(\mu))$.

Proposición 1.7.30 *La siguiente sucesión de objetos y morfismos de una categoría abeliana $\mathfrak{A}$*

$$0 \longrightarrow A' \overset{f}{\longrightarrow} A \overset{g}{\longrightarrow} A'' \longrightarrow 0$$

es exacta si y sólo si f es monic, g es epic y $im(f) = ker(g)$.

Prueba :

$\Rightarrow$) Por hipótesis $f = ker(g)$ y $g = coker(f)$, luego f es monic y g es epic; mientras que $im(f) = ker\,(coker(f)) = ker(g)$.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si f es monic, g es epic y $im(f) = ker(g)$, entonces $f = ker(g)$ y $g = coker(f)$
En efecto:
Como $\mathfrak{A}$ es un categoría abeliana, f es monic y g es epic; se obtiene que
$f = ker\,(coker(f))$ y $g = coker\,(ker(g))$. Pero $ker(g) = im(f)$, luego
$g = coker\,(ker\,(coker(f))) = coker(f)$ por ser $coker(f)$ epic. Así $g = coker(f)$ y
$f = ker(g)$. Por lo tanto la sucesión dada es exacta ■

Proposición 1.7.31 *Sea* $A' \rightarrowtail^{\mu} A \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A''$ *una sucesión exacta corta en una categoría abeliana* $\mathfrak{A}$*, entonces* $A'' \overset{\varepsilon^{op}}{\rightarrowtail} A \overset{\mu^{op}}{\twoheadrightarrow} A'$ *es una sucesión exacta corta en* $\mathfrak{A}^{op}$.

Prueba .- Para la sucesión exacta corta dada en $\mathfrak{A}$ se tiene que μ es monic, ε es epic y $im(\mu) = ker(\varepsilon)$. Por dualidad se obtiene que μ^{op} es epic, ε^{op} es monic y
$im(\varepsilon^{op}) = ker(\mu^{op})$. Por lo tanto $A'' \overset{\varepsilon^{op}}{\rightarrowtail} A \overset{\mu^{op}}{\twoheadrightarrow} A'$ es exacta en $\mathfrak{A}^{op}$.
Se completa la prueba, explicando que $im(\varepsilon^{op}) = ker(\mu^{op})$.
La igualdad $im(\mu) = ker(\varepsilon)$ se escribe como $ker\,(coker(\mu)) = ker(\varepsilon)$. Aplicando el dual : $coker\,(ker(\mu^{op})) = coker(\varepsilon^{op})$, luego aplicando ker se obtiene que
$ker\,(coker\,(ker(\mu^{op}))) = ker\,(coker(\varepsilon^{op}))$.
Recordando que $\mathfrak{A}$ es categoría abeliana y $ker(\mu^{op})$ es monic,
$ker\,(coker\,(ker(\mu^{op}))) = ker(\mu^{op})$; como $im(\varepsilon^{op}) = ker\,(coker(\varepsilon^{op}))$, se deduce que $ker(\mu^{op}) = im(\varepsilon^{op})$ ■

Definición 1.7.32 *Sean* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *categorías abelianas y sea* $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *un funtor. Se dice que* F *es exacto (exacto derecho; exacto izquierdo) si* F *conserva las sucesiones exactas (exactas a la derecha; exactas a la izquierda). Por ejemplo, una sucesión exacta a la derecha es una sucesión exacta de la forma* $A' \to A \to A'' \to 0$*, decir que* F *es exacto derecho significa que si se tiene una sucesión exacta de arriba, la sucesión correspondiente* $FA' \to FA \to FA'' \to 0$ *es también exacta.*

Proposición 1.7.33 *Sea* $A \in |\mathfrak{M}^r_\Lambda|$*, entonces el funtor* $T = A \otimes_\Lambda (-) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ *es exacto derecho.*

Prueba.- Sea $B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de $\Lambda-$ módulos izquierdos, entonces se probará que

$$A \otimes_\Lambda B' \xrightarrow{f_*} A \otimes B \xrightarrow{g_*} A \otimes B'' \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

es una sucesión exacta.

i) La sucesión $(\star)$ es exacta en $A \otimes B''$; es decir, g_* es sobreyectiva.
Sea $a \otimes b'' \in A \otimes B''$. Como g es sobreyectiva, existe $b \in B$ tal que $b'' = g(b)$, de modo que existe $a \otimes b \in A \otimes B$ tal que $g_*(a \otimes b) = a \otimes b''$.

ii) La sucesión $(\star)$ es exacta en $A \otimes B$; es decir, $Im(f_*) = Ker(g_*)$, como

$$\begin{aligned} g_* f_* = (gf)_* &= 1_A \otimes (gf) \\ &= 1_A \otimes 0 \quad \text{pues } gf = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

se deduce que $Im(f_*) \subseteq Ker(g_*) \cdots (1)$
Se verifica que $Ker(g_*) \subseteq Im(f_*)$.
En efecto, sea $a \otimes b \in Ker(g_*)$, entonces

$$\begin{aligned} g_*(a \otimes b) &= (1_A \otimes g)(a \otimes b) \\ &= 1_A a \otimes g(b) \\ &= a \otimes g(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $g(b) = 0$ y así $b \in Ker(g)$.
Como la sucesión $B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B''$ es exacta, $b \in Ker(g)$ significa que existe $b' \in B'$ tal que $b = f(b')$, de modo que existe $a \otimes b' \in A \otimes B'$ tal que $f_*(a \otimes b') = a \otimes b$, luego $Ker(g_*) \subseteq Im(f_*) \cdots (2)$
De (1) y (2) queda verificado la afirmación *ii)*.

Ahora, como la sucesión $(\star)$ es exacta en $A \otimes B$ y $A \otimes B''$, la sucesión $(\star)$ es exacta y por lo tanto el funtor $A \otimes_\Lambda (-)$ es exacto derecho $\blacksquare$

Se prueba como en Proposición 1.7.33 que el funtor $(-) \otimes_\Lambda B : \mathfrak{M}^r_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ es exacto derecho para cada $B \in \left|\mathfrak{M}^l_\Lambda\right|$ fijo.

Proposición 1.7.34 *Si F es un funtor exacto derecho(o exacto izquierdo) de categorías abelianas, entonces F es aditivo.*

Prueba.- Suponga que $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es un funtor exacto derecho. Sea $A = A' \oplus A''$, luego se tiene una sucesión exacta corta $A' \overset{i'}{\rightarrowtail} A \overset{\pi''}{\twoheadrightarrow} A''$, junto con un morfismo $\pi' : A \to A'$ tal que $\pi' i' = 1$. Entonces $FA' \xrightarrow{Fi'} FA \overset{F\pi''}{\twoheadrightarrow} FA''$ es exacta por la derecha y se tiene el morfismo $F\pi' : FA \to FA'$ tal que $F\pi' Fi' = 1$. Esto implica que $FA = FA' \oplus FA''$ y luego F es aditivo $\blacksquare$

Proposición 1.7.35 *Sean $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ funtores covariantes aditivos entre categorías aditivas, entonces $GF : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ es un funtor covariante aditivo.*

Prueba.- En Proposición 1.2.8 se probó que GF es un funtor covariante, de modo que para que GF sea aditivo se verificará que $GF(\varphi + \psi) = GF(\varphi) + GF(\psi)$ para todo φ, $\psi \in \mathfrak{A}(A, A')$.
En efecto:
Como $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es aditivo se cumple que $F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + F(\psi)$ para todo φ, $\psi \in \mathfrak{A}(A, A') \cdots (1)$
El hecho que $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ es aditivo implica que para $F\varphi$, $F\psi \in \mathfrak{B}(FA, FA')$ se tiene

$$\begin{aligned} G(F(\varphi) + F(\psi)) &= G(F(\varphi)) + G(F(\psi)) \\ &= GF(\varphi) + GF(\psi) \cdots (2) \end{aligned}$$

Por composición de aplicaciones, de (1) y (2) se obtiene que
$GF(\varphi + \psi) = GF(\varphi) + GF(\psi)$ para todo φ, $\psi \in \mathfrak{A}(A, A')$ ■

Proposición 1.7.36 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana, $f \in \mathfrak{A}(A, B)$, $u \in \mathfrak{A}(C, A)$ y $v \in \mathfrak{A}(B, D)$.*

i) *Si $fu = 0$ implica $u = 0$, entonces f es monic.*

ii) *Si $vf = 0$ implica $v = 0$, entonces f es epic.*

Prueba .- Sólo se probará la primera afirmación. La prueba de la segunda afirmación es análoga.
i) Sean $u_1, u_2 \in \mathfrak{A}(C, A)$ tales que $fu_2 = fu_1$. Como $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana la composición de morfismos es bilineal, entonces la igualdad anterior queda escrita como $f(u_1 - u_2) = 0$. Pero $\mathfrak{A}(C, A)$ es un grupo abeliano bajo la adición, luego
$u_1 - u_2 \in \mathfrak{A}(C, A)$. Por hipótesis se tiene que $u = u_1 - u_2 = 0$, por lo tanto $u_1 = u_2$ ■

Definición 1.7.37 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Un objeto bigraduado de $\mathfrak{C}$ es una familia $A = \{A_{m,n}\}$, m y $n \in \mathbb{Z}$ de objetos $A_{m,n}$ de $\mathfrak{C}$ para m y $n \in \mathbb{Z}$. Un morfismo $\varphi : A \to B$ de objetos bigraduados de $\mathfrak{C}$ es una familia $\varphi = \{\varphi_{m,n} : A_{m,n} \to B_{m,n}\}$ de morfismos $\varphi_{m,n} : A_{m,n} \to B_{m,n}$ de $\mathfrak{C}$ para m y $n \in \mathbb{Z}$. El producto de morfismos $\varphi : A \to B$ y $\psi : B \to C$ de objetos bigraduados de $\mathfrak{C}$ se define como la familia $\psi\varphi = \{(\psi\varphi)_{m,n} : A_{m,n} \to C_{m,n}\}$ de morfismos $(\psi\varphi)_{m,n} = \psi_{m,n}\varphi_{m,n} : A_{m,n} \to C_{m,n}$ de $\mathfrak{C}$ para m y $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 1.7.38 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana. Entonces la categoría $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ de objetos bigraduados de $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana.*

Prueba:

i) Se prueba que $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ es una categoría como en Proposición 1.5.2 usando la categoría $\mathfrak{A}$ en lugar de $\mathfrak{M}^l_\Lambda$.

ii) Se verifica que la categoría $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ es aditiva como se hizo en Ejemplo 1.7.5.

iii) Se prueba que la categoría aditiva $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ es abeliana, ya que se cumplen las tres siguientes condiciones:

a) Sea $\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)$, entonces existen $\mu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(K,A)$ y $\varepsilon \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(B,C)$ tales que $\mu = ker(\varphi)$ y $\varepsilon = coker(\varphi)$.
En efecto:
$\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)$ implica que $\varphi = \{\varphi_{m,n} : A_{m,n} \to B_{m,n}\}$, m y $n \in \mathbb{Z}$.
Como $\varphi_{m,n} \in \mathfrak{A}(A_{m,n}; B_{m,n})$ y $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana; existen $\mu_{m,n} \in (K_{m,n}; A_{m,n})$ y $\varepsilon_{m,n} \in \mathfrak{A}(B_{m,n}; C_{m,n})$ tales que $\mu_{m,n} = ker(\varphi_{m,n})$ y $\varepsilon_{m,n} = coker(\varphi_{m,n})$ para todo m y $n \in \mathbb{Z}$. Así, existen $\mu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(K,A)$ y $\varepsilon \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(B,C)$ tales que $\mu = ker(\varphi)$ y $\varepsilon = coker(\varphi)$.

b) Sean $\lambda \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)$ monic, $\sigma \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(C,D)$ epic; entonces $\lambda = ker\,(coker(\lambda))$ y $\sigma = coker\,(ker(\sigma))$.
En efecto:
$\lambda \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)$ es monic implica que $\lambda_{m,n} \in \mathfrak{A}(A_{m,n}; B_{m,n})$ es monic para cada m y $n \in \mathbb{Z}$.
$\sigma \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(C,D)$ es epic implica que $\sigma_{m,n} \in \mathfrak{A}(C_{m,n}; D_{m,n})$ es epic para cada m y $n \in \mathbb{Z}$.
Como $\mathfrak{A}$ es categoría abeliana, se tiene que $\lambda_{m,n} = ker\,(coker(\lambda_{m,n}))$ y $\sigma_{m,n} = coker\,(ker(\sigma_{m,n}))$ para todo m y $n \in \mathbb{Z}$; por lo tanto $\lambda = ker\,(coker(\lambda))$ y $\sigma = coker\,(ker(\sigma))$.

c) Sea $\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)$, entonces existen $\eta \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,I)$ epic y $\nu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(I,B)$ monic tales que $\varphi = \nu\eta$.
En efecto:
$\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,B)$ implica que $\varphi = \{\varphi_{m,n} : A_{m,n} \to B_{m,n}\}$, m y $n \in \mathbb{Z}$. Por ser $\mathfrak{A}$ categoría abeliana y $\varphi_{m,n} \in \mathfrak{A}(A_{m,n}; B_{m,n})$; existen $\eta_{m,n} \in \mathfrak{A}(A_{m,n}, I_{m,n})$ epic y $\nu_{m,n} \in \mathfrak{A}(I_{m,n}; B_{m,n})$ monic tales que $\varphi_{m,n} = \nu_{m,n}\eta_{m,n}$ para todo m y $n \in \mathbb{Z}$.
Así, existen $\eta \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(A,I)$ epic y $\nu \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(I,B)$ monic tales que $\varphi = \nu\eta$ ■

Corolario 1.7.39 *La categoría de Λ-módulos bigraduados $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ es abeliana.*

Prueba .- Considerando en lugar de $\mathfrak{A}$, la categoría de módulos $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{l}$; por Proposición 1.7.38, se sigue que $\mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ es una categoría abeliana ■

Capítulo 2

Funtores Derivados

Esta teoría históricamente surgió como una generalización de Tor y Ext. Para alcanzar el segundo objetivo del presente trabajo se necesita conocer funtores derivados derechos. Estos funtores en la literatura de álgebra homológica van en paralelo a funtores derivados izquierdos. Como se verá el n-ésimo funtor derivado izquierdo de un funtor covariante aditivo T es una aplicación entre categorías abelianas con dominio que tiene suficientes proyectivos, definida sobre objetos usando resoluciones proyectivas y sobre morfismos usando aplicaciones de cadena. Así, el propósito de este capítulo es mostrar que tales definiciones no dependen de resoluciones proyectivas ni de aplicaciones de cadena y establecer que tales aplicaciones son funtores aditivos.
Trasladando estos resultados a funtores derivados derechos se establecerá que los funtores derivados derechos de un funtor covariante aditivo T entre categorías abelianas, donde el dominio de T tiene suficientes inyectivos, son también funtores y no dependen de la resolución inyectiva ni de la aplicación de cocadena elegidas en su definición sobre objetos y morfismos, respectivamente. El desarrollo de cada sección es gradual; en la primera sección se introducen conceptos de objetos proyectivos, inyectivos y homología; en la segunda sección se construye sucesión exacta larga de (co)homologías; en la tercera sección se establece la noción de homotopía entre aplicaciones de cadena. En la cuarta sección se discute resoluciones proyectivas e inyectivas. Se finaliza la quinta sección estudiando funtores derivados izquierdos y trasladando los resultados obtenidos a funtores derivados derechos.

2.1. Proyectivos, Inyectivos y Homologías

Recordando las nociones de módulos proyectivos, módulos inyectivos, complejos de cadena sobre Λ y complejos de cocadena sobre Λ, es posible abstraer estas nociones para categorías abelianas. Los objetos proyectivos e inyectivos se definirán en una categoría arbitraria. El propósito de esta sección, además de definir objetos proyectivos e inyectivos, es introducir sobre categorías abelianas los conceptos de homología para complejos de cadena y cohomología para complejos de cocadena.

Definición 2.1.1 *Un objeto P de una categoría $\mathfrak{C}$ se dice que es proyectivo si, dados $A, B \in |\mathfrak{C}|$ y $\varepsilon : A \twoheadrightarrow B$ un epic, para cada $\varphi \in \mathfrak{C}(P, B)$, existe un morfismo $\psi \in \mathfrak{C}(P, A)$ tal que $\varphi = \varepsilon\psi$. En diagrama esto se expresa en una de las siguientes formas*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ A \arrow[r, "\epsilon"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[r, two heads, "\epsilon"] & B \end{tikzcd}$$

Definición 2.1.2 *Un objeto I de una categoría $\mathfrak{C}$ se dice que es inyectivo si, dados $A, B \in |\mathfrak{C}|$ y $\mu : B \rightarrowtail A$ un monic, para cada $\varphi \in \mathfrak{C}(B, I)$, existe un morfismo $\psi \in \mathfrak{C}(A, I)$ tal que $\varphi = \psi\mu$. Esto en diagrama se expresa en una de las siguientes formas*

$$\begin{tikzcd} & I & \\ A \arrow[ur, dotted, "\exists\psi"] & B \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\varphi"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I \\ A \arrow[ur, dotted, "\exists\psi"] & B \arrow[l, tail, "\mu"] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Un objeto J de $\mathfrak{C}$ se dice que es inyectivo si éste es proyectivo en $\mathfrak{C}^{op}$.

Definición 2.1.3 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana. Un complejo de cadena sobre $\mathfrak{A}$ es un par (C, ∂), donde $C \in \left|\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}\right|$ y $\partial : C \longrightarrow C$ es un morfismo de grado -1 tal que $\partial^2 = 0$. Un complejo de cadena C sobre $\mathfrak{A}$ se denota por*

$$C : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, la condición $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ implica que $Im\,(\partial_{n+1}) \subseteq Ker\,(\partial_n) \subseteq C_n$. Como $C_n \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana se sabe que $Im\,(\partial_{n+1})$, $Ker\,(\partial_n) \in |\mathfrak{A}|$ ya que cada morfismo en $\mathfrak{A}$ tiene su imagen y su núcleo. La inclusión $Im\,(\partial_{n+1}) \overset{i_n}{\hookrightarrow} Ker\,(\partial_n)$ visto en $\mathfrak{A}$ tiene $coker(i_n)$, luego el objeto $Coker(i_n) = \dfrac{Ker\,(\partial_n)}{Im\,(\partial_{n+1})} \in |\mathfrak{A}|$.

Definición 2.1.4 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana y C un complejo de cadena sobre $\mathfrak{A}$. Se define homología de C como $H(C) = \{H_n(C)\} \in \left|\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}\right|$, donde $H_n(C) = \dfrac{Ker\,(\partial_n)}{Im\,(\partial_{n+1})} \in |\mathfrak{A}|$ es el n-ésimo objeto de homología de C.*

Definición 2.1.5 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana. Un complejo de cocadena sobre $\mathfrak{A}$ es un par (C, ∂), donde $C \in \left|\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}\right|$ y $\partial : C \longrightarrow C$ es un morfismo de grado 1 tal que $\partial^2 = 0$. Un complejo de cocadena C sobre $\mathfrak{A}$ se denota por*

$$C : \cdots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

donde $\partial_n \partial_{n-1} = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, la condición $\partial_n \partial_{n-1} = 0$ implica que $Im\,(\partial_{n-1}) \subseteq Ker\,(\partial_n) \subseteq C_n$. Nuevamente, la inclusión $Im\,(\partial_{n-1}) \overset{i_n}{\hookrightarrow} Ker\,(\partial_n)$ tiene su conúcleo en $\mathfrak{A}$, de manera que el objeto cociente $Coker(i_n) = \dfrac{Ker\,(\partial_n)}{Im\,(\partial_{n-1})} \in |\mathfrak{A}|$.

Definición 2.1.6 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana y C un complejo de cocadena sobre $\mathfrak{A}$. Se define cohomología de C como $H\,(C) = \{H^n\,(C)\} \in \left|\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}\right|$, donde $H^n\,(C) = \dfrac{Ker\,(\partial_n)}{Im\,(\partial_{n-1})} \in |\mathfrak{A}|$ es el n-ésimo objeto de cohomología de C.*

En lo que sigue complejo de cadena significará complejo de cadena sobre alguna categoría abeliana $\mathfrak{A}$. Lo mismo se entenderá para complejo de cocadena.

2.2. Sucesiones Exactas Largas de (Co)Homologías

En esta sección se deducirá las sucesiones exactas largas de homologías o cohomologías a partir de una sucesión exacta corta sobre una categoría abeliana de complejos de cadena o cocadena, respectivamente. Este resultado es una herramienta muy importante en el estudio de la existencia o la convergencia finita de sucesiones espectrales asociadas a complejos filtrados, como se verá en el siguiente capítulo.

***Lema* 2.2.1 (Lema de Serpiente)** *Sea el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\mu'"] & B' \arrow[r, "\epsilon'"] & C' & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Entonces existe un "Homomorfismo de conexión"

$$\omega : Ker\,\gamma \longrightarrow Coker\,\alpha$$

tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$Ker\,\alpha \xrightarrow{\mu_*} Ker\,\beta \xrightarrow{\varepsilon_*} Ker\,\gamma \xrightarrow{\omega} Coker\,\alpha \xrightarrow{\mu'_*} Coker\,\beta \xrightarrow{\varepsilon'_*} Coker\,\gamma \tag{2.2}$$

Si μ es monic, entonces μ_* es monic; si ε' es epic, entonces ε'_* es epic.

Prueba.- Se prueba que las dos últimas afirmaciones se cumplen y las dos siguientes sucesiones son exactas [3]:

$$Ker\,\alpha \xrightarrow{\mu_*} Ker\,\beta \xrightarrow{\varepsilon_*} Ker\,\gamma$$
$$Coker\,\alpha \xrightarrow{\mu'_*} Coker\,\beta \xrightarrow{\varepsilon'_*} Coker\,\gamma$$

Resta probar la existencia del homomorfismo $\omega : Ker\,\gamma \to Coker\,\alpha$
(conexión de las dos sucesiones mencionadas), la exactitud en $Ker\,\gamma$ y la exactitud en $Coker\,\alpha$.
Considerando el diagrama (2.1), se define ω como sigue:
Sea $c \in Ker\,\gamma$, como ε es epic existe $b \in B$ tal que $\varepsilon b = c$. Puesto que $\varepsilon'(\beta b) = \gamma\varepsilon b = \gamma c = 0$, se ve que $\beta b \in Ker\varepsilon' = Im\,\mu'$. De donde $\beta b = \mu' a'$ para algún $a' \in A'$. Así se define $\omega(c) = [a']$, donde la clase de a' está en $Coker\,\alpha$.
La aplicación $\omega : Ker\,\gamma \longrightarrow Coker\,\alpha$ está bien definida por $\omega(c) = [a']$ si $c = \varepsilon b$ y $\beta b = \mu' a'$ para algún $b \in B$.
Sean c_1 y $c_2 \in Ker\,\gamma$ tales que $c_1 = c_2$, entonces $\omega(c_1) = \omega(c_2)$.
En efecto:
$c_1 \in Ker\,\gamma$ implica que $c_1 \in C$ y $\gamma c_1 = 0$. Como ε es epic, es sobreyectiva, luego existe $b_1 \in B$ tal que $\varepsilon b_1 = c_1$. Así, por conmutatividad del diagrama (2.1),
$\varepsilon'\beta b_1 = \gamma\varepsilon b_1 = \gamma c_1 = 0$, de donde $\beta b_1 \in Ker\,\varepsilon' = Im\,\mu'$. Luego existe $a'_1 \in A'$ tal que $\beta b_1 = \mu' a'_1$.
Análogamente, para $c_2 \in Ker\,\gamma$ existen $b_2 \in B$ y $a'_2 \in A'$ tales que $\varepsilon b_2 = c_2$ y $\beta b_2 = \mu' a'_2$.
Usando $c_1 = c_2$, se deduce que $b_2 - b_1 \in Ker\,\varepsilon = Im\,\mu$. Es decir $b_2 - b_1 = \mu(a)$ para algún $a \in A$.
Aplicando β a esta igualdad, usando la conmutatividad $\beta\mu(a) = \mu'\alpha(a)$, se obtiene que $\beta b_2 = \beta b_1 + \mu'\alpha(a)$, de donde $\mu' a'_2 = \mu' a'_1 + \mu'\alpha(a)$, del hecho que μ' es monic resulta que $a'_2 = a'_1 + \alpha(a)$, y tomando clases y usando simetría $[a'_1] = [a'_2]$. Luego $\omega(c_1) = \omega(c_2)$.

La sucesión (2.2) es exacta en $Ker\,\gamma$.
En efecto, $c \in Im\varepsilon_*$ implica que $c = \varepsilon_* b = \varepsilon b$ para un $b \in Ker\,\beta$, $c \in Ker\,\gamma$. Como $\varepsilon'\beta b = \gamma\varepsilon b = \gamma c = 0$ se tiene $\beta b \in Ker\varepsilon' = Im\,\mu'$ y $0 = \beta b = \mu' a'$, por ser μ' es monic $a' = 0$, luego $\omega(c) = [a'] = 0$ y $c \in Ker\,\omega \cdots (1)$
Sea $c \in Ker\,\omega$. Esto significa que $c \in Ker\,\gamma$ y $\omega(c) = 0$. Entonces $c = \varepsilon b, \beta b = \mu' a'$ y existe $a \in A$ con $\alpha a = a'$. Considerando $\bar{b} = b - \mu a$, se tiene $\varepsilon\bar{b} = c$, pero $\beta\bar{b} = \beta b - \beta\mu a = \beta b - \mu' a' = 0$; es decir, $\bar{b} \in Ker\,\beta$. Luego $\varepsilon_*\bar{b} = c$ y $c \in Im\,\varepsilon_* \cdots (2)$
De (1) y (2) se obtiene que $Im\,\varepsilon_* = Ker\,\omega$. Así queda probada la afirmación.

Finalmente se prueba la exactitud de (2.2) en $Coker\,\alpha$.
Si $[a'] \in Im\,\omega$, entonces $\omega(c) = [a'] \in Coker\,\alpha$ para algún $c \in Ker\,\gamma$.
Así $c = \varepsilon b$, $\beta b = \mu' a'$ y $\mu'_*[a'] = [\mu' a'] = [\beta b] = 0$ porque $[\beta b] = 0 \in B'/Im\,\beta$, luego $[a'] \in Ker\,\mu'_* \cdots (3)$
Sea $[a'] \in Ker\,\mu'_*$, de donde $[a'] \in Coker\,\alpha$ con $\mu'_*[a'] = 0$. Entonces $\mu' a' = \beta b$ para algún $b \in B$. Poniendo $c = \varepsilon b$, se ve que $c \in Ker\,\gamma$. Así $[a'] = \omega(c)$, luego $[a'] \in Im\,\omega \cdots (4)$
De (3) y (4) se obtiene que $Im\,\omega = Ker\mu'_*$ ■

Definición 2.2.2 *La sucesión* $A \rightarrowtail^{\varphi} B \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} C$ *de complejos (de cadena o cocadena) es una sucesión exacta corta si* $0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$ *es exacta para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

***Lema* 2.2.3** *Sea C un complejo de cadena, entonces $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ induce* $\widetilde{\partial}_n : Coker\,\partial_{n+1} \longrightarrow Ker\,\partial_{n-1}$ *con* $Ker\,\widetilde{\partial}_n = H_n(C)$ *y* $Coker\,\widetilde{\partial}_n = H_{n-1}(C)$.

Prueba.- Como $Im\,\partial_{n+1} \subseteq Ker\,\partial_n \subseteq C_n$, se obtiene que $\dfrac{C_n}{Ker\,\partial_n} \cong \dfrac{C_n/Im\,\partial_{n+1}}{Ker\,\partial_n/Im\,\partial_{n+1}}$.
Luego existe $p : \dfrac{C_n}{Im\,\partial_{n+1}} \twoheadrightarrow \dfrac{C_n}{Ker\,\partial_n}$ con $Ker\,p = Ker\,\partial_n/Im\,\partial_{n+1} = H_n(C)$.
Como $\dfrac{C_n}{Ker\,\partial_n} \cong Im\,\partial_n$, existe $\omega : \dfrac{C_n}{Ker\,\partial_n} \xrightarrow{\sim} Im\,\partial_n$.
De la inclusión $Im\,\partial_n \subseteq Ker\,\partial_{n-1}$, se puede considerar $i : Im\,\partial_n \hookrightarrow Ker\,\partial_{n-1}$.
La diferencial $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ induce al morfismo $\widetilde{\partial}_n : Coker\,\partial_{n+1} \to Ker\,\partial_{n-1}$ dado por $\widetilde{\partial}_n = i\omega p$.
Calculando $Ker\,\widetilde{\partial}_n$ y $Coker\widetilde{\partial}_n$:

$$\begin{aligned} Ker\,\widetilde{\partial}_n &= \{a \in Coker\,\partial_{n+1} \,/ \widetilde{\partial}_n a = 0\} \\ &= \{a \in Coker\,\partial_{n+1} \,/\, (i\omega)\,pa = 0\} \\ &= \{a \in Coker\,\partial_{n+1} \,/ pa = 0\},\ i\omega \text{ es monic} \\ &= Ker\,p = H_n(C). \end{aligned}$$

$$\text{Por otro lado}\quad \begin{aligned} Im\,\widetilde{\partial}_n &= \widetilde{\partial}_n\,(Coker\,\partial_{n+1}) \\ &= i\,(\omega p)\,(Coker\,\partial_{n+1}) \\ &= i\,(Im\,\partial_n)\,,\ \omega p \text{ es epic} \\ &= Im\,\partial_n, \quad \text{de donde} \end{aligned}$$

$$Coker\widetilde{\partial}_n = \frac{Ker\,\partial_{n-1}}{Im\,\widetilde{\partial}_n} = \frac{Ker\,\partial_{n-1}}{Im\,\partial_n} = H_{n-1}(C)\ \blacksquare$$

Teorema 2.2.4 *Dada una sucesión exacta corta* $A \rightarrowtail^{\varphi} B \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} C$ *de complejos de cadena (o complejo de cocadena) sobre $\mathfrak{A}$ existe un morfismo de grado -1 (grado 1) de objetos graduados en $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$, $\omega : H(C) \to H(A)$, tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[rr, "\varphi_*"] & & H(B) \arrow[dl, "\psi_*"] \\ & H(C) \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

es exacto (se le llama homomorfismo de conexión).
Explícitamente el teorema afirma en el caso de complejos de cadena, la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \tag{2.3}$$

y en el caso de complejos de cocadena, la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\omega^{n-1}} H^n(A) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(B) \xrightarrow{\psi^*} H^n(C) \xrightarrow{\omega^n} H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots \tag{2.4}$$

es exacta.

Prueba.- Se va a dar la prueba para el caso de complejos de cadena en $i)$ y en $ii)$ para el caso de complejos de cocadena:

$i)$ Se comienza considerando el siguiente diagrama para cada $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker\partial_n \arrow[r] \arrow[d, tail] & Ker\partial_n \arrow[r] \arrow[d, tail] & Ker\partial_n \arrow[d, tail] & \\
& A_n \arrow[r, tail, "\varphi_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & B_n \arrow[r, two heads, "\psi_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n \arrow[d, "\partial_n"] & \\
& A_{n-1} \arrow[r, tail, "\varphi_{n-1}"] \arrow[d, two heads] & B_{n-1} \arrow[r, two heads, "\psi_{n-1}"] \arrow[d, two heads] & C_{n-1} \arrow[d, two heads] & \\
& Coker\partial_n \arrow[r] & Coker\partial_n \arrow[r] & Coker\partial_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por Lema 2.2.1 las sucesiones de las filas superior e inferior son exactas para cada $n \in \mathbb{Z}$. Luego de Lema 2.2.3 se obtiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, tail, dotted] & H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, tail, dotted] & H_n(C) \arrow[d, tail, dotted] & \\
& Coker\ \partial_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial}_n"] & Coker\ \partial_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial}_n"] & Coker\ \partial_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial}_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker\partial_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads, dotted] & Ker\partial_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads, dotted] & Ker\partial_{n-1} \arrow[d, two heads, dotted] & \\
& H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & H_{n-1}(C) &
\end{tikzcd}$$

Aplicando Lema 2.2.1, se obtiene la existencia de $\omega_n : H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ tal que la sucesión (2.3) es exacta.

$ii)$ Asumiendo que $A \overset{\varphi}{\rightarrowtail} B \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} C$ es una sucesión exacta corta de complejos de cocadena sobre una categoría abeliana $\mathfrak{A}$, por Proposición 1.7.31 se obtiene que $A^{op} \overset{\varphi^{op}}{\twoheadleftarrow} B^{op} \overset{\psi^{op}}{\leftarrowtail} C^{op}$ es una sucesión exacta corta de complejos de cadena sobre la categoría abeliana $\mathfrak{A}^{op}$. Por la parte $i)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe $H_{n-1}(C^{op}) \xleftarrow{\omega_n} H_n(A^{op})$ tal que la siguiente sucesión larga

$$\cdots \longleftarrow H_{n-1}(C^{op}) \xleftarrow{\omega_n} H_n(A^{op}) \longleftarrow H_n(B^{op}) \longleftarrow H_n(C^{op}) \xleftarrow{\omega_{n+1}} \cdots$$

es exacta en $\mathfrak{A}^{op}$.
Invirtiendo flechas y usando Lema 3.4.7 para complejos de cadena A^{op}, B^{op} y C^{op} sobre la categoría abeliana $\mathfrak{A}^{op}$; se obtiene que la sucesión (2.4):

$$\cdots \xrightarrow{\omega^{n-1}} H^n(A) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(B) \xrightarrow{\psi^*} H^n(C) \xrightarrow{\omega^n} H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

exacta en $\mathfrak{A}$, donde $\omega^{n-1} = \omega_n^{op}$ y $\omega^n = \omega_{n+1}^{op}$ ■

2.3. Homotopía

Sean C y D dos complejos de cadena sobre una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ y $\varphi, \psi : C \to D$ dos aplicaciones de cadena. Es una cuestión importante saber cuando φ y ψ inducen el mismo morfismo de homologías entre $H(C)$ y $H(D)$. Para estudiar este problema se introduce la noción de homotopía; es decir, se establece una relación entre φ y ψ que es condición suficiente para $\varphi_* = \psi_* : H(C) \to H(D)$.
Por otro lado, la relación no es condición necesaria para $\varphi_* = \psi_*$, así que la noción de homotopía no es respuesta completa a la cuestión anterior; sin embargo, es muy útil por su buen comportamiento con respecto a aplicaciones de cadena y funtores. Solamente se trata el caso de complejos de cadena y se puede trasladar los resultados para complejos de cocadena.

Definición 2.3.1 *La homotopía $\sum : \varphi \to \psi$ entre dos aplicaciones de cadena $\varphi, \psi : C \to D$ es un morfismo de grado +1 de objetos graduados $\sum : C \to D$ tal que $\psi - \varphi = \partial \sum + \sum \partial$; i.e., tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1} \textstyle\sum_n + \sum_{n-1} \partial_n \tag{2.5}$$

Se dice que φ, ψ son homotópicas o que φ es homotópica a ψ, y se escribe $\varphi \simeq \psi$ si existe una homotopía $\sum : \varphi \to \psi$.

El hecho esencial sobre homotopías es dado en la siguiente:

Proposición 2.3.2 *Si las dos aplicaciones de cadena $\varphi, \psi : C \to D$ son homotópicas, entonces $H(\varphi) = H(\psi) : H(C) \longrightarrow H(D)$.*

Prueba.- Sea $z \in Ker\, \partial_n$ un ciclo en C_n. Como $\varphi \simeq \psi$, sea $\sum : \varphi \to \psi$ una homotopía, entonces $(\psi - \varphi)z = \partial \sum z + \sum \partial z = \partial \sum z$ puesto que $\partial z = 0$. De donde $\psi(z) - \varphi(z)$ está en el borde $B_n(D) = Im \partial_{n+1}$ en D_n; i.e., que $\psi(z)$ y $\varphi(z)$ son homólogos como n-ciclos del complejo D, luego generan el mismo elemento de $H_n(D)$ para cada n. Esto significa, por Proposición 1.5.8, que $H_n(\varphi)[z] = H_n(\psi)[z]$ para todo $[z] \in H_n(C)$. Por lo tanto $H(\varphi) = H(\psi)$ ■
La recíproca de Proposición 2.3.2 no es cierta; al final de esta sección se dará un ejemplo de dos aplicaciones de cadena que inducen el mismo morfismo de homologías , pero que no son homotópicas.
Se procede a obtener resultados sobre la relación de homotopía.

***Lema* 2.3.3** *La relación homotópica " $\simeq$ " es una relación de equivalencia.*

Prueba.- Claramente " $\simeq$ " es reflexiva y simétrica. Para comprobar la transitividad, sea $\psi-\varphi=\partial\sum+\sum\partial$ y $\chi-\psi=\partial T+T\partial$ (sin subíndices). Un cálculo simple muestra que $\chi-\varphi=\partial(\sum+T)+(\sum+T)\partial$ ■

***Lema* 2.3.4** *Sea $\varphi\simeq\psi:C\to D$ y $\varphi'\simeq\psi':D\to E$, entonces $\varphi'\varphi\simeq\psi'\psi:C\to E$.*

Prueba.- Sea $\psi-\varphi=\partial\sum+\sum\partial$; entonces:

$$\begin{aligned}\varphi'\psi-\varphi'\varphi &= \varphi'\partial\textstyle\sum+\varphi'\sum\partial\\ &= \partial(\varphi'\textstyle\sum)+(\varphi'\sum)\partial.\end{aligned}$$

Sea $\psi'-\varphi'=\partial T+T\partial$, entonces:

$$\begin{aligned}\psi'\psi-\varphi'\psi &= \partial T\psi+T\partial\psi\\ &= \partial(T\psi)+(T\psi)\partial\end{aligned}$$

Sumando las dos igualdades deducidas y efectuando operaciones se ve que $\psi'\psi-\varphi'\varphi=\partial\left(\varphi'\sum+T\psi\right)+\left(\varphi'\sum+T\psi\right)\partial$; por lo tanto $\varphi'\varphi\simeq\psi'\psi:C\to E$ ■

***Lema* 2.3.5** *Sea $F:\mathfrak{m}_\Lambda\to\mathfrak{m}_\Lambda$ un funtor covariante aditivo. Si C y D son complejos de cadena de Λ-módulos y $\varphi\simeq\psi:C\to D$, entonces $F\varphi\simeq F\psi:FC\to FD$.*

Prueba.- Sea $\sum:\varphi\to\psi$ una homotopía de φ en ψ. Entonces como $\psi-\varphi=\partial\sum+\sum\partial$ y F es un funtor covariante aditivo se tiene

$$\begin{aligned}F\psi-F\varphi &= F(\psi-\varphi)\\ &= F(\partial\textstyle\sum+\sum\partial)\\ &= (F\partial)(F\textstyle\sum)+(F\sum)(F\partial)\end{aligned}$$

Así $F\sum:F\varphi\to F\psi$ es una homotopía, por lo tanto $F\varphi\simeq F\psi:FC\to FD$ ■

Lemas 2.3.4 y 2.3.5 muestran que la relación de homotopía " $\simeq$ " se comporta muy bien con respecto a la composición de aplicaciones de cadena y con respecto a funtores covariantes aditivos. Lema 2.3.5 junto con Proposición 2.3.2 producen el siguiente

Corolario 2.3.6 *Si $\varphi\simeq\psi:C\to D$ y si F es un funtor covariante aditivo, entonces*

$$H(F\varphi)=H(F\psi):H(FC)\to H(FD)\quad ■$$

Lema 2.3.4 permite definir el producto entre clases de homotopía; por consiguiente, es posible asociar a la categoría de complejos de cadena y aplicaciones de cadena, la categoría de complejos de cadena y las clases de homotopía de cadena. Este cambio es alcanzado simplemente por identificación de dos aplicaciones de cadena si y sólo si son homotópicas. La categoría así obtenida se llama categoría de homotopía.

Definición 2.3.7 *Se dice que dos complejos de cadena C y D son del mismo tipo de homotopía (o son homotópicos) si ellos son isomorfos en la categoría de homotopía; es decir, si existen aplicaciones de cadena $\varphi : C \to D$ y $\psi : D \to C$ tales que $\psi\varphi \simeq 1_C$ y $\varphi\psi \simeq 1_D$. En este caso, la aplicación φ (o ψ) se llama equivalencia homotópica.*

Se cierra esta sección con el ejemplo prometido:
Tomando $\Lambda = \mathbb{Z},\ C_1 = \mathbb{Z} =< s_1 >,\ C_0 = \mathbb{Z} =< s_0 >;\ C_n = 0,\ n \neq 0, 1;$
$\partial s_1 = 2s_0;\ D_1 = \mathbb{Z} =< t_1 >;\ D_n = 0,\ n \neq 1;\ \varphi s_1 = t_1$ se ve que C y D son complejos de cadena sobre Λ.
Claramente $\varphi : C \to D$ es una aplicación de cadena, así como $0 : C \to D$. Estas aplicaciones de cadena inducen el mismo homomorfismo nulo de homologías
$H(\varphi) = H(0) = 0 : H(C) \to H(D)$. Para mostrar que φ y 0 no son homotópicos, se aplica Corolario 2.3.6 al funtor aditivo $- \otimes \mathbb{Z}_2$; se obtiene que
$H_1(\varphi \otimes \mathbb{Z}_2) \neq H_1(0 \otimes \mathbb{Z}_2)$, ya que

$$\begin{aligned} H_1(\varphi \otimes \mathbb{Z}_2) &= 1 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2, \\ H_1(0 \otimes \mathbb{Z}_2) &= 0 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \quad [4]. \end{aligned}$$

2.4. Resoluciones

En esta sección se introducirá un objeto especial de complejo de (co)cadena que es una herramienta básica en el desarrollo de la teoría de funtores derivados. Se tratará resoluciones proyectivas o inyectivas de un objeto A de una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ y se dirá simplemente resolución proyectiva o inyectiva de A, respectivamente.
Se presta la atención por ahora a complejos de cadena positivos; i.e., complejos de cadena de la forma

$$C : \cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{2.6}$$

con $C_n = 0$ para $n < 0$.

Definición 2.4.1 *El complejo de cadena (2.6) es llamado proyectivo si C_n es proyectivo para todo $n \geq 0$. Dicho complejo es acíclico si la sucesión*
$\cdots \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to H_0(C) \to 0$ *es exacta.*
En otras palabras, el complejo de cadena (2.6) es acíclico si $H_n(C) = 0$ para $n \geq 1$.

Definición 2.4.2 *Un complejo de cadena proyectivo y acíclico*
$P : \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$ *se llama resolución proyectiva de un objeto A de una categoría abeliana si $H_0(P) \xrightarrow{\sim} A$.*

Si P es una resolución proyectiva de A, entonces $H_0(P) \cong A$ y la siguiente sucesión es exacta

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0 \tag{2.7}$$

Se denotará por $\overline{P}$ a la sucesión (2.7) y se dirá resolución proyectiva completa de A.

Teorema 2.4.3 *Sea* $C : \cdots \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$ *proyectivo y sea* $D : \cdots \to D_n \to D_{n-1} \to \cdots \to D_1 \to D_0 \to 0$ *acíclico. Entonces existe, para cada morfismo* $\varphi : H_0(C) \to H_0(D)$*, una aplicación de cadena* $\varphi : C \to D$ *inducida por* φ*. Además dos aplicaciones de cadena inducidas por* φ *son homotópicas.*

Prueba.- La aplicación de cadena $\varphi : C \to D$ se define recursivamente. Puesto que D es acíclico, $D_0 \to H_0(D) \to 0$ es exacta.

Si $n = 0$, C_0 es proyectivo implica que existe $\varphi_0 : C_0 \to D_0$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_0"] & H_0(C) = Ker\partial_0/Im\partial_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ D_0 \arrow[r, two heads] & H_0(D) \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

es conmutativo.
Si $n > 0$, suponga que $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ están definidos. Se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] & \cdots \\ D_n \arrow[r, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial"] & D_{n-2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(Si $n = 1$, poniendo $C_{-1} = H_0(C)$, $D_{-1} = H_0(D)$, el cuadrado del lado derecho es justamente (2.8)). Claramente se tiene $\partial\varphi_{n-1}\partial = \varphi_{n-2}\partial\partial = 0$. De aquí
$Im\,\varphi_{n-1}\partial \subseteq Ker(\partial : D_{n-1} \to D_{n-2}) = Ker\,\partial_{n-1}$. Como D es acíclico,
$Ker\,\partial_{n-1} = Im(\partial : D_n \to D_{n-1})$, de manera que se obtiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C_n \arrow[dl, dotted, "\varphi_n"'] \arrow[d, "\varphi_{n-1}\partial"] \\ D_n \arrow[r, two heads, "\partial"] & Im\partial_n = Ker\partial_{n-1} \end{tikzcd}$$

conmutativo porque C_n es proyectivo, $\varphi_{n-1}\partial : C_n \to Im\,\partial_n$ luego existe
$\varphi_n : C_n \to D_n$ tal que $\partial\varphi_n = \varphi_{n-1}\partial$, esto termina el paso inductivo ■

Si $\varphi = \{\varphi_n\}$, $\psi = \{\psi_n\}$ son dos aplicaciones de cadena inducidas por
$\varphi : H_0(C) \to H_0(D)$, entonces se debe probar que $\varphi \simeq \psi$.
Recursivamente se define una homotopía $\sum : \varphi \to \psi$
Si $n = 0$, se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\varphi_1"'] \arrow[d, shift left, "\psi_1"] & C_0 \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, dotted, "\Sigma_0"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_0"'] \arrow[d, shift left, "\psi_0"] & H_0(C) \arrow[r] \arrow[dl, "\Sigma_{-1}=0"'] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ D_1 \arrow[r] & D_0 \arrow[r, "\partial"] & H_0(D) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Puesto que φ_0 y ψ_0 ambos son inducidos por $\varphi : \partial\psi_0 = \partial\varphi_0 = \varphi\partial$, de donde $\partial(\psi_0 - \varphi_0) = 0$. Así $\psi_0 - \varphi_0$ aplica C_0 en

$$Ker(\partial : D_0 \to H_0(D)) = Im(D_1 \xrightarrow{\partial_1} D_0).$$

Como C_0 es proyectivo, $\psi_0 - \varphi_0 : C_0 \to Im\partial_1$ y $\partial_1 : D_1 \twoheadrightarrow Im\partial_1$, entonces existe $\sum_0 : C_0 \to D_1$ tal que $\psi_0 - \varphi_0 = \partial \sum_0$. Así para $n = 0$ se tiene $\psi_0 - \varphi_0 = \partial \sum_0 + \sum_{-1} \partial$ con $\sum_{-1} = 0$.

Si $n > 0$, suponga que están definidos $\sum_0, \ldots, \sum_{n-1}$ tales que $\psi_r - \varphi_r = \partial \sum_r + \sum_{r-1} \partial,\ r \leq n-1$. Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] \arrow[d, shift left, "\psi_n"] \arrow[dl, dotted, "\Sigma_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n-1}"] \arrow[dl, "\Sigma_{n-1}"'] & C_{n-2} \arrow[dl, "\Sigma_{n-2}"'] \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial"] & D_n \arrow[r, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial"] & D_{n-2}
\end{tikzcd}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\partial(\psi_n - \varphi_n - \textstyle\sum_{n-1}\partial) &= \psi_{n-1}\partial - \varphi_{n-1}\partial - \partial\textstyle\sum_{n-1}\partial \\
&= (\psi_{n-1} - \varphi_{n-1} - \partial\textstyle\sum_{n-1})\partial \\
&= \textstyle\sum_{n-2}\partial\partial = 0
\end{aligned}$$

De donde $\delta = \psi_n - \varphi_n - \sum_{n-1} \partial : C_n \to Ker\,\partial_n = Im\,\partial_{n+1}$ y $\partial_{n+1} : D_{n+1} \twoheadrightarrow Im\partial_{n+1}$. Como C_n es proyectivo, existe $\sum_n : C_n \to D_{n+1}$ tal que $\delta = \partial_{n+1} \sum_n$. Es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[d, "\delta"] \arrow[dl, dotted, "\Sigma_n"'] \\
D_{n+1} \arrow[r, two heads, "\partial_{n+1}"] & Im\partial_{n+1}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. De donde $\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1} \sum_n + \sum_{n-1} \partial$ y así $\varphi \simeq \psi$ ■

El siguiente teorema establece que cada módulo es cociente de algún módulo proyectivo y la prueba se puede encontrar en [1].

Teorema 2.4.4 *Cada Λ-módulo A puede ser inmerso en la siguiente sucesión exacta de Λ-módulos*

$$0 \to M \to P \to A \to 0$$

donde P es un Λ-módulo proyectivo.

La sucesión exacta de Λ-módulos $0 \to M \to P \to A \to 0$ también puede ser escrito como $M \rightarrowtail P \twoheadrightarrow A$.

Proposición 2.4.5 *Para cada Λ-módulo A existe una resolución proyectiva.*

Prueba.- La prueba de la existencia consiste en la aplicación sucesiva de Teorema 2.4.4. Así, para el Λ-módulo dado A se considera la sucesión exacta $R_1 \rightarrowtail P_0 \twoheadrightarrow A$ donde P_0 es un Λ-módulo proyectivo; luego para el Λ-módulo R_1 se considera la sucesión exacta $R_2 \rightarrowtail P_1 \twoheadrightarrow R_1$ donde P_1 es un Λ-módulo proyectivo; y así sucesivamente. De esta manera, se obtiene un complejo de cadena P sobre Λ:

$$P : \cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

donde $\partial_n : P_n \to P_{n-1}$ es definido por $P_n \twoheadrightarrow R_n \rightarrowtail P_{n-1}$.

Considerando la siguiente sucesión de Λ-módulos

$$P_{n+1} \overset{\varepsilon_{n+1}}{\twoheadrightarrow} R_{n+1} \overset{\mu_{n+1}}{\rightarrowtail} P_n \overset{\varepsilon_n}{\twoheadrightarrow} R_n \overset{\mu_n}{\rightarrowtail} P_{n-1}$$

se obtienen :

i) $\partial_{n+1} = \mu_{n+1}\varepsilon_{n+1},\ \partial_n = \mu_n\varepsilon_n$

ii)
$$\begin{aligned} Im\,\partial_{n+1} &= \mu_{n+1}\varepsilon_{n+1}(P_{n+1}),\ \varepsilon_{n+1}\text{ es epic} \\ &= \mu_{n+1}(R_{n+1}) \\ &= Im\,\mu_{n+1} \end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned} Ker\,\partial_n &= \{x \in P_n :\ \partial_n x = 0\} \\ &= \{x \in P_n :\ \mu_n\varepsilon_n x = 0\},\ \mu_n\text{ es monic} \\ &= \{x \in P_n :\ \varepsilon_n x = 0\} \\ &= Ker\,\varepsilon_n \end{aligned}$$

iv) $R_{n+1} \overset{\mu_{n+1}}{\rightarrowtail} P_n \overset{\varepsilon_n}{\twoheadrightarrow} R_n$ es exacta, implica que $Ker\,\varepsilon_n = Im\,\mu_{n+1}$ para $n \geq 0$ ($R_0 = A$).

De los tres últimos items se obtiene que $Ker\,\partial_n = Im\,\partial_{n+1}$ para $n \geq 1$, luego P es acíclico.
Se ve que P es proyectivo, acíclico y $H_0(P) \cong A$, por lo tanto P es una resolución proyectiva de A ■

Proposición 2.4.6 *Dos resoluciones proyectivas de A son del mismo tipo de homotopía.*

Prueba.- Sean C y D dos resoluciones proyectivas de A. Por Teorema 2.4.3 existen aplicaciones de cadena $\varphi : C \to D$ y $\psi : D \to C$ inducido por la identidad de $H_0(C) = A = H_0(D)$. La aplicación compuesta $\psi\varphi : C \to C$ y la identidad $1_C : C \to C$ son inducidas por la identidad $1_A : A \to A$, luego por Teorema 2.4.3 $\psi\varphi \simeq 1_C$. Análogamente $\varphi\psi \simeq 1_D$. Por lo tanto C y D son del mismo tipo de homotopía ■

En esta sección se hace algunas observaciones sobre la situación dual.

Definición 2.4.7 *Sean φ, $\psi : C \to D$ aplicaciones de cocadena entre complejos de cocadena C y D. Se dice que φ es homotópica a ψ si existe es un morfismo de grado -1 de objetos graduados $\Omega : C \to D$ tal que $\psi - \varphi = \partial\Omega + \Omega\partial$; i.e., tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\psi_n - \varphi_n = \partial_{n-1}\Omega_n + \Omega_{n+1}\partial_n \tag{2.9}$$

φ es homotópica a ψ se denota por $\varphi \simeq \psi$.

Los complejos de cocadena positivos son complejos de cocadena de la forma

$$C : 0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n+1} \longrightarrow \cdots \tag{2.10}$$

con $C_n = 0$ para $n < 0$.

Definición 2.4.8 *El complejo de cocadena C dado en (2.10) es inyectivo si cada C_n es inyectivo, y es acíclico si $H^n(C) = 0$ para $n \geq 1$.*

Por el principio de dualidad la prueba de Teorema 2.4.9 y Proposición 2.4.13 ya están establecidas.

Teorema 2.4.9 *Sea $C : 0 \to C_0 \to \cdots \to C_n \to C_{n+1} \to \cdots$ acíclico y $D : 0 \to D_0 \to \cdots \to D_n \to D_{n+1} \to \cdots$ inyectivo. Entonces existe, para cada morfismo $\varphi : H^0(C) \to H^0(D)$, una aplicación de cocadena $\varphi : C \to D$ inducida por φ. Además dos aplicaciones de cocadena inducidas por φ son homotópicas.*

Definición 2.4.10 *Un complejo de cocadena inyectivo y acíclico $I : 0 \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n \to I_{n+1} \to \cdots$ es una resolución inyectiva de A si $H^0(I) \xrightarrow{\sim} A$.*

Si I es una resolución inyectiva de A, entonces $H^0(I) \cong A$ y la siguiente sucesión es exacta

$$0 \to A \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n \to I_{n+1} \to \cdots \tag{2.11}$$

Se denotará por $\overline{I}$ a la sucesión (2.11) y se dirá resolución inyectiva completa de A.

El siguiente resultado establece que cada módulo es un submódulo de algún módulo inyectivo y la prueba se puede ver en [6].

Teorema 2.4.11 *Sea M un Λ-módulo. Entonces existe un Λ-módulo inyectivo de la forma $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Y)$, donde Y es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, tal que la sucesión*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Y)$$

es una sucesión exacta de Λ-módulos.

Proposición 2.4.12 *Para cada Λ-módulo A existe una resolución inyectiva.*

Prueba.- La prueba de la existencia consiste en la aplicación sucesiva de Teorema 2.4.11, para $A \in \left|\mathfrak{M}^l_\Lambda\right|$ existen las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu} I_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} Z_0 \longrightarrow 0 \quad \text{donde } I_0 \text{ es } \Lambda\text{-módulo inyectivo} \tag{2.12}$$

$$0 \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{\mu_0} I_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} Z_1 \longrightarrow 0 \quad \text{donde } I_1 \text{ es } \Lambda\text{-módulo inyectivo}$$

....

$$0 \longrightarrow Z_{n-1} \xrightarrow{\mu_{n-1}} I_n \xrightarrow{\varepsilon_n} Z_n \longrightarrow 0 \quad \text{donde } I_n \text{ es } \Lambda\text{-módulo inyectivo} \tag{2.13}$$

....

Así se obtiene un complejo de cocadena I sobre Λ:

$$I: \quad 0 \xrightarrow{\partial_{-1}} I_0 \xrightarrow{\partial_0} I_1 \xrightarrow{\partial_1} \cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}} I_n \xrightarrow{\partial_n} I_{n+1} \longrightarrow \cdots \tag{2.14}$$

donde $\partial_n : I_n \to I_{n+1}$ es definido como: $I_n \overset{\varepsilon_n}{\twoheadrightarrow} Z_n \overset{\mu_n}{\rightarrowtail} I_{n+1}$.
Considerando la sucesión $I_{n-1} \overset{\varepsilon_{n-1}}{\twoheadrightarrow} Z_{n-1} \overset{\mu_{n-1}}{\rightarrowtail} I_n \overset{\varepsilon_n}{\twoheadrightarrow} Z_n \overset{\mu_n}{\rightarrowtail} I_{n+1}$
los morfismos $\partial_{n-1} = \mu_{n-1}\varepsilon_{n-1}$ y $\partial_n = \mu_n\varepsilon_n$ en $\mathfrak{M}^l_\Lambda$, son tales que:

i) $Im(\partial_{n-1}) = Im(\mu_{n-1})$, ya que ε_{n-1} es epic.

ii) $Ker(\partial_n) = Ker(\varepsilon_n)$, pues μ_n es monic.

iii) $Im(\mu_{n-1}) = Ker(\varepsilon_n)$ proviene de la exactitud de la sucesión (2.13) en I_n.

De *i)*, *ii)* y *iii)* deduce que $\quad Im(\partial_{n-1}) = Ker(\partial_n)$ para $n = 1, 2, \ldots$

$$\text{Por otro lado de (2.14)}: \quad H^0(I) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_{-1})} \cong Ker(\partial_0) = Ker(\varepsilon_0) = Im(\mu)$$

La última igualdad se obtiene por exactitud de la sucesión de Λ-módulos (2.12). Por el mismo argumento se tiene que $A \cong Im(\mu)$ puesto que μ es inyectiva. Por lo tanto $H^0(I) \cong A$. Así $H^0(I) \xrightarrow{\sim} A$; como cada I_n para $n \geq 0$ es un Λ-módulo inyectivo se sigue que I es un complejo de cocadena inyectivo; $H^n(I) = 0$ para $n \geq 1$ pues $Im(\partial_{n-1}) = Ker(\partial_n)$ indica que I es acíclico; en consecuencia el complejo de cocadena I dado en (2.14) es una resolución inyectiva de A ■

Proposición 2.4.13 *Dos resoluciones inyectivas de A son del mismo tipo de homotopía.*

Definición 2.4.14 *Una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ se dice que tiene suficientes inyectivos si cada objeto $A \in |\mathfrak{A}|$ posee una resolución inyectiva. $\mathfrak{A}$ se dice que tiene suficientes proyectivos si cada objeto $A \in |\mathfrak{A}|$ posee una resolución proyectiva.*

Proposiciones 1.7.19 y 2.4.12 muestran como ejemplo que la categoría de Λ-módulos izquierdos $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es abeliana con suficientes inyectivos. Mientras que Proposiciones 1.7.19 y 2.4.5 muestran que la categoría de Λ-módulos izquierdos $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ es abeliana con suficientes proyectivos.

2.5. Funtores Derivados Izquierdos y Derechos

Se aprecia que ya se cuenta con los conocimientos previos para desarrollar el tema principal de funtores derivados de álgebra homológica. Se desarrollará la teoría considerando un funtor covariante aditivo $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ entre categorías abelianas. Se realiza la definición de funtores derivados izquierdos con detalle, mientras que acerca de funtores derivados derechos se hace algunas observaciones. El propósito de esta sección es dar definiciones básicas y propiedades de funtores derivados izquierdos L_nT y funtores derivados derechos R^nT para $n = 0, 1, \ldots$

Funtores Derivados Izquierdos

Sea $\mathfrak{A}$ categoría abeliana con suficientes proyectivos, entonces se puede construir los funtores derivados izquierdos L_nT para $n \geq 0$.

Definición 2.5.1 *Dado $A \in |\mathfrak{A}|$ y una resolución proyectiva P de A. Considerando el complejo sobre $\mathfrak{B}$*

$$TP : \cdots \to TP_n \to TP_{n-1} \to \cdots \to TP_0 \to 0$$

se define $L_n^P T(A) = H_n(TP)$, $n = 0, 1, \ldots$

Definición 2.5.2 *Dado $\alpha \in \mathfrak{A}(A, A')$, se define la aplicación $\alpha_* : L_n^P TA \to L_n^{P'} TA'$ por $\alpha_* = H_n(T\varphi)$;*
donde $\varphi : P \to P'$ es una aplicación inducida por α, P es una resolución proyectiva de A y P' es una resolución proyectiva de A'.

Proposición 2.5.3 *Sea $\alpha \in \mathfrak{A}(A, A')$, entonces α_* no depende de la elección de la aplicación de cadena.*

Prueba.- Sea P una resolución proyectiva de A y P' una resolución proyectiva de A', entonces $H_0(P) \cong A$, $H_0(P') \cong A'$, de manera que existe un morfismo
$\varphi : H_0(P) \to H_0(P')$ definido mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha"] & H_0(P) \arrow[l] \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\ A' \arrow[r] & H_0(P') \end{tikzcd}$$

Por Teorema 2.4.3, existe una aplicación de cadena $\varphi : P \to P'$ inducida por φ. Sea $\psi : P \to P'$ otra aplicación de cadena inducida por φ, luego por Teorema 2.4.3, $\varphi \simeq \psi$. Usando el funtor aditivo T, por Corolario 2.3.6 se deduce que
$H(T\psi) = H(T\varphi) : H(TP) \to H(TP')$. Por lo tanto $\alpha_* = H_n(T\psi) = H_n(T\varphi)$ ■

Proposición 2.5.4 *Sean P y Q dos resoluciones proyectivas de A. Entonces existe un isomorfismo $\eta = \eta_{P,Q} :\ L_n^P TA \xrightarrow{\sim} L_n^Q TA$, $n = 0, 1, \ldots$*

Prueba.- Como P y Q son resoluciones proyectivas de A, por Proposición 2.4.6 existen aplicaciones de cadena $\varphi : P \to Q$ y $\psi : Q \to P$ inducidas por 1_A tales que $\psi\varphi \simeq 1_P$ y $\varphi\psi \simeq 1_Q$.
Aplicando el funtor aditivo $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, por un resultado análogo a Lema 2.3.5 $T\psi T\varphi \simeq 1_{TP}$ y $T\varphi T\psi \simeq 1_{TQ}$. Según Proposición 2.3.2 se sigue que $H_n(T\psi)\, H_n(T\varphi) = 1_{H_n(TP)}$ y $H_n(T\varphi)\, H_n(T\psi) = 1_{H_n(TQ)}$. Así $H_n(T\varphi) : H_n(TP) \xrightarrow{\sim} H_n(TQ)$, donde $H_n(T\varphi) = 1_A(P,Q)$, $H_n(TP) = L_n^P TA$ y $H_n(TQ) = L_n^Q TA$. Por lo tanto, existe $\eta = 1_A(P,Q) : L_n^P TA \xrightarrow{\sim} L_n^Q TA$, $n = 0, 1, \ldots$ ∎

Este resultado permite identificar los objetos $L_n^P TA$ y $L_n^Q TA$ vía un isomorfismo η, por eso se omitirá el superíndice P y se escribirá $L_n TA$ para $L_n^P TA$.

Proposición 2.5.5 *Sean $A, A' \in |\mathfrak{A}|$; $\alpha \in \mathfrak{A}(A, A')$; P una resolución proyectiva de A y φ una aplicación de cadena inducida por α. Entonces la aplicación $L_nT : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ definida sobre los objetos por $L_nTA = H_n(TP)$ y sobre morfismos $\alpha_* = L_nT(\alpha) : L_nTA \to L_nTA'$ por $L_nT(\alpha) = H_n(T\varphi)$, es un funtor.*

Prueba.- Se verifican las dos siguientes condiciones de funtor para L_nT :

FUN1. $L_nT(1_A) = 1_{L_nTA}$ para todo $A \in |\mathfrak{A}|$.

$$\text{En efecto : } \quad \begin{aligned} L_nT(1_A) &= H_n(T1_P) \\ &= H_n(1_{TP}) \\ &= 1_{H_n(TP)} \\ &= 1_{L_nTA}. \end{aligned}$$

FUN2. $L_nT(\alpha'\alpha) = L_nT(\alpha')\, L_nT(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathfrak{A}(A, A')$ y $\alpha' \in \mathfrak{A}(A', A'')$.
En efecto, sean φ y φ' aplicaciones de cadena inducidas por α y α', respectivamente; entonces para $\alpha'\alpha \in \mathfrak{A}(A, A'')$ se tiene

$$\begin{aligned} L_nT(\alpha'\alpha) &= H_n(T(\varphi'\varphi)) \\ &= H_n(T\varphi' T\varphi) \\ &= H_n(T\varphi')\, H_n(T\varphi) \\ &= L_nT(\alpha')\, L_nT(\alpha) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 2.5.6 *Los funtores $L_nT : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $n = 0, 1, \ldots$ son aditivos.*

Prueba.- Sea P una resolución proyectiva de A y Q una resolución proyectiva de B, entonces

$$P \oplus Q : \ \cdots \to P_n \oplus Q_n \to P_{n-1} \oplus Q_{n-1} \to \cdots \to P_0 \oplus Q_0 \to 0$$

es una resolución proyectiva de $A \oplus B$, de modo que

$$\begin{aligned} L_nT\,(A \oplus B) &= H_n\,(T(P \oplus Q))\,, \text{ como } T \text{ es aditivo:} \\ &= H_n\,(TP \oplus TQ) \\ &= H_n\,(TP) \oplus H_n\,(TQ) \\ &= L_nT\,(A) \oplus L_nT\,(B) \end{aligned}$$

Por lo tanto, L_nT es aditivo para $n = 0, 1, \ldots$ ■

Definición 2.5.7 *Sea $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas donde $\mathfrak{A}$ tiene suficientes proyectivos. El funtor $L_nT : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ n = 0, 1, \ldots$ se llama n-ésimo funtor derivado izquierdo de T.*

El valor de L_nT sobre un objeto $A \in |\mathfrak{A}|$ se calcula como sigue: Se toma una resolución proyectiva P de A, se considera el complejo de cadena TP sobre $\mathfrak{B}$ y se toma homología; entonces $L_nTA = H_n(TP)$.

Como ejemplos de funtores derivados izquierdos se cita a $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, -)$ y $Tor_n^{\Lambda}(-, B)$. Estos funtores provienen, respectivamente, de los funtores covariantes aditivos $A \otimes_\Lambda (-)$ y $(-) \otimes_\Lambda B$ [4].
Dado $A \in |\mathfrak{M}_\Lambda^r|$. Se define $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, -) : \mathfrak{M}_\Lambda^l \to \mathfrak{Ab}$ por

$$\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, -) = L_n(A \otimes_\Lambda -),\ n = 0, 1, \ldots$$

Se calcula el grupo abeliano $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B)$; tomando una resolución proyectiva arbitraria $\mathcal{P}$ de B, formando el complejo de cadena $A \otimes_\Lambda \mathcal{P}$ y luego tomando la homología, por consiguiente $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B) = H_n(A \otimes_\Lambda \mathcal{P})$. Análogamente, se define $Tor_n^{\Lambda}(-, B) : \mathfrak{M}_\Lambda^r \to \mathfrak{Ab}$.

Recordando que, un funtor covariante $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ es exacto derecho si, para cada sucesión exacta $A' \to A \to A'' \to 0$, la sucesión $TA' \to TA \to TA'' \to 0$ es exacta. Según Proposición 1.7.33, un ejemplo de funtor exacto derecho es $A \otimes_\Lambda -$.

Proposición 2.5.8 *Para un Λ-módulo proyectivo P y T exacto derecho, $L_nTP = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ y $L_0TP \cong TP$*

Prueba.- Para la resolución proyectiva $\mathcal{P}$ de P,

$$\mathcal{P} : \cdots \longrightarrow P_1 = 0 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

con $P = P_0$, $T\mathcal{P}$ es una resolución proyectiva de TP, de donde

$$T\mathcal{P} :\ \ldots \longrightarrow 0 \xrightarrow{T\partial_1} TP_0 \xrightarrow{T\partial_0} 0.$$

$$\begin{aligned}
\text{Por lo tanto}\quad L_nTP &= H_n(T\mathcal{P}) = \frac{Ker\ T\partial_n}{Im\ T\partial_{n+1}} = 0 \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots;\\
L_0TP &= \frac{Ker\ T\partial_0}{Im\ T\partial_1} = \frac{TP_0}{\{0\}} \cong TP_0
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $L_0TP \cong TP$ ■

Con Teorema 2.2.4 se consigue las sucesiones exactas largas de funtores derivados izquierdos.

***Lema* 2.5.9** *Para una sucesión exacta corta de* $\Lambda-$*módulos* $A' \rightarrowtail^{\varphi} A \xrightarrow{\psi}\!\!\!\!\twoheadrightarrow A''$ *y presentaciones proyectivas* $\varepsilon' :\ P' \twoheadrightarrow A'$ *y* $\varepsilon'' :\ P'' \twoheadrightarrow A''$ *, existen una presentación proyectiva* $\varepsilon :\ P \twoheadrightarrow A$ *y homomorfismos* $i :\ P' \to P$ *y* $\pi :\ P \to P''$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, two heads, "\varepsilon'"] & P \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, two heads, "\varepsilon"] & P'' \arrow[d, two heads, "\varepsilon''"] \\
A' \arrow[r, tail, "\varphi"] & A \arrow[r, two heads, "\psi"] & A''
\end{tikzcd}$$

Prueba.- Sea $P = P' \oplus P''$ y sean $i :\ P' \to P' \oplus P''$ la inyección canónica, $\pi :\ P' \oplus P'' \to P''$ proyección canónica. Se define ε dando las componentes. La primera componente es $\varphi\varepsilon' :\ P' \to A$; para la segunda componente se usa el hecho que P'' es proyectivo y ψ es epic para construir la aplicación $\chi :\ P'' \to A$ que hace el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & P'' \arrow[dl, dotted, "\chi"'] \arrow[d, "\epsilon''"] \\
A \arrow[r, two heads, "\psi"'] & A''
\end{tikzcd}$$

Tomando χ como la segunda componente de ε, específicamente ε queda definido por $\varepsilon(x', x'') = \varphi\varepsilon' x' + \chi x''$para $(x', x'') \in P' \oplus P''$.
Con esta definición el diagrama anterior conmuta. Por Proposición 3.3.11 ε es epimorfismo pues por propiedades de i y π la fila superior del diagrama es exacta ■

Teorema 2.5.10 *Sea* $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ *un funtor aditivo y sea* $A' \rightarrowtail^{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''}\!\!\!\!\twoheadrightarrow A''$ *una sucesión exacta corta. Entonces existen homomorfismos de conexión* $\omega_n :\ L_nTA'' \to L_{n-1}TA',\ n = 1, 2, \ldots$ *tal que la siguiente sucesión es exacta*

$$\begin{aligned}
&\cdots \longrightarrow L_nTA' \xrightarrow{\alpha'_*} L_nTA \xrightarrow{\alpha''_*} L_nTA'' \xrightarrow{\omega_n} L_{n-1}TA' \longrightarrow \cdots\\
&\cdots \longrightarrow L_1TA'' \xrightarrow{\omega_1} L_0TA' \xrightarrow{\alpha'_*} L_0TA \xrightarrow{\alpha''_*} L_0TA'' \longrightarrow 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Prueba.- Aplicando Teorema 2.4.4 a los Λ-módulos A' y A'', por Lema 2.5.9 se puede construir un diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd} P_0' \arrow[r, tail] \arrow[d, "\epsilon'"] & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\epsilon"] & P_0'' \arrow[d, "\epsilon''"] \\ A' \arrow[r, tail, "\alpha'"] & A \arrow[r, two heads, "\alpha''"] & A'' \end{tikzcd}$$

con $P_0 = P_0' \oplus P_0''$, donde $P_0,\ P_0',\ P_0''$ son proyectivos. Por Lema 2.2.1 la sucesión de núcleos

$$Ker\ \varepsilon' \rightarrowtail Ker\ \varepsilon \twoheadrightarrow Ker\ \varepsilon'' \tag{2.16}$$

es exacta corta. Repitiendo este procedimiento con la sucesión (2.16) en lugar de $A' \overset{\alpha'}{\rightarrowtail} A \overset{\alpha''}{\twoheadrightarrow} A''$ y luego procediendo inductivamente, se construye una sucesión exacta de complejos de cadena $P' \overset{\alpha'}{\rightarrowtail} P \overset{\alpha''}{\twoheadrightarrow} P''$ donde $P',\ P,\ P''$ son resoluciones proyectivas de A', A, A'' respectivamente. Puesto que T es aditivo y como $P_n = P_n' \oplus P_n''$ para cada $n \geq 0$, la sucesión $0 \to TP' \to TP \to TP'' \to 0$ es exacta corta de complejos de cadena. Teorema 2.2.4 garantiza la existencia del homomorfismo de conexión $\omega_n : H_n(TP'') \to H_{n-1}(TP')$ y la exactitud de la sucesión (2.15) ■

Proposición 2.5.11 *Sea* $B \in \left|\mathfrak{M}_\Lambda^l\right|$ *y* $\mathcal{P}$ *una resolución proyectiva de* B*, entonces* $A \otimes_\Lambda \mathcal{P}$ *es una resolución proyectiva de* $A \otimes_\Lambda B$*.*

Prueba Como $\mathcal{P}$ es una resolución proyectiva de B, entonces existen proyectivos $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots, \in \left|\mathfrak{M}_\Lambda^l\right|$ tales que

$$\bar{\mathcal{P}} : \cdots \longrightarrow P_{n+1} \overset{\partial^{n+1}}{\longrightarrow} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \overset{\partial^1}{\longrightarrow} P_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \ldots (*)$$

es exacta.
Aplicando a $(*)$ el funtor exacto derecho $A \otimes_\Lambda (-)$, se obtiene el siguiente complejo de cadena exacta:

$$A \otimes_\Lambda \bar{\mathcal{P}} : \cdots \longrightarrow A \otimes_\Lambda P_{n+1} \longrightarrow A \otimes_\Lambda P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow A \otimes_\Lambda P_1 \longrightarrow A \otimes_\Lambda P_0 \overset{\eta}{\longrightarrow} A \otimes_\Lambda B \longrightarrow 0 \tag{2.17}$$

De donde

$$A \otimes_\Lambda \mathcal{P} : \cdots \longrightarrow A \otimes_\Lambda P_{n+1} \longrightarrow A \otimes_\Lambda P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow A \otimes_\Lambda P_1 \overset{\partial^1}{\longrightarrow} A \otimes_\Lambda P_0 \overset{\partial^0}{\longrightarrow} 0$$

Observando (2.17) y el complejo de cadena $A \otimes_\Lambda \mathcal{P}$ se obtiene:

i) Cada $A \otimes_\Lambda P_n$ es proyectivo para $n \geq 0$.

ii) Cada $H_n(A \otimes_\Lambda \mathcal{P}) = 0$ para $n \geq 1$, porque $A \otimes_\Lambda \bar{\mathcal{P}}$ es exacto.

iii) $H_0\,(A \otimes_\Lambda \mathcal{P}) \cong A \otimes_\Lambda B$, puesto que

$$H_0(A \otimes_\Lambda \mathcal{P}) = \frac{Ker\partial^0}{Im\ \partial^1} = \frac{A \otimes_\Lambda P_0}{Ker\ \eta} \cong A \otimes_\Lambda B.$$

De *i)*, *ii)* y *iii)*; se sigue que $A \otimes_\Lambda \mathcal{P}$ es una resolución proyectiva de $A \otimes_\Lambda B$ ■
De esta proposición se deduce que $\overline{Tor}_0^\Lambda(A, B) \cong A \otimes_\Lambda B$.

Dada una sucesión exacta corta $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ en $\mathfrak{M}_\Lambda^l$, se obtiene la $\overline{Tor}$-sucesión exacta larga en la segunda variable

$$\cdots \longrightarrow \overline{Tor}_n^\Lambda(A, B') \longrightarrow \overline{Tor}_n^\Lambda(A, B) \longrightarrow \overline{Tor}_n^\Lambda(A, B'') \xrightarrow{\omega_n} \overline{Tor}_{n-1}^\Lambda(A, B') \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \overline{Tor}_1^\Lambda(A, B'') \xrightarrow{\omega_1} A \otimes_\Lambda B' \longrightarrow A \otimes_\Lambda B \longrightarrow A \otimes_\Lambda B'' \longrightarrow 0 \qquad (2.18)$$

Para obtener este resultado se aplicó Teorema 2.5.10 usando el funtor aditivo $T = A \otimes_\Lambda (-)$ y la sucesión exacta corta $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$.

Similarmente, dada una sucesión exacta corta $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ en $\mathfrak{M}_\Lambda^r$, por ser $(-) \otimes_\Lambda B$ funtor aditivo y $Tor_0^\Lambda(A, B) \cong A \otimes_\Lambda B$; por Teorema 2.5.10 se obtiene la Tor-sucesión exacta larga en la primera variable

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^\Lambda(A', B) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(A, B) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\omega_n} Tor_{n-1}^\Lambda(A', B) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow Tor_1^\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\omega_1} A' \otimes_\Lambda B \longrightarrow A \otimes_\Lambda B \longrightarrow A'' \otimes_\Lambda B \longrightarrow 0 \qquad (2.19)$$

Funtores Derivados Derechos

Se cierra esta sección con algunas observaciones sobre funtores derivados derechos. Sea $\mathfrak{A}$ categoría abeliana con suficientes inyectivos, entonces se definen los funtores derivados derechos R^nT para $n \geq 0$.
Como en el caso de funtores derivados izquierdos se prueba que R^nTA no depende de la elección de la resolución inyectiva I de A. Por otro lado, dados $\alpha: A \to A'$ y resoluciones inyectivas I, I' de A, A' respectivamente, se puede encontrar una aplicación de cocadena $\alpha: I \to I'$ inducida por α. La aplicación de cocadena $T\alpha: TI \to TI'$ induce un morfismo entre cohomologías, el cual es $\alpha^*: R^nTA \to R^nTA'$, $n = 0, 1, \ldots$
Como en el caso de funtores derivados izquierdos, α^* no depende de la elección de la aplicación de cocadena α.

Proposición 2.5.12 *Sean $A, A' \in |\mathfrak{A}|$; $\alpha \in \mathfrak{A}(A, A')$; I una resolución inyectiva de A y φ una aplicación de cocadena inducida por α. Entonces la aplicación $R^nT : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ definida sobre los objetos por $R^nTA = H^n(TI)$ y sobre morfismos $\alpha^* = R^nT(\alpha) : R^nTA \to R^nTA'$ por $R^nT(\alpha) = H^n(T\varphi)$, es un funtor.*

Prueba.- Se realiza como en Proposición 2.5.5 ■

Definición 2.5.13 *Sea $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas donde $\mathfrak{A}$ tiene suficientes inyectivos. El funtor $R^nT : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $n = 0, 1, \ldots$ se llama n-ésimo funtor derivado derecho de T.*

El valor de R^nT sobre un objeto $B \in |\mathfrak{A}|$ se calcula tomando una resolución inyectiva I de B, considerando el complejo de cocadena TI sobre $\mathfrak{B}$ y aplicando cohomología, entonces $R^nTB = H^n(TI)$.

Para el funtor covariante $Hom_\Lambda(A, -)$ aditivo, se definen funtores derivados derechos de $Hom_\Lambda(A, -)$. Éstos son los funtores $\overline{Ext}_\Lambda^n(A, -) : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ tales que

$$\overline{Ext}_\Lambda^n(A, -) = R^n(Hom_\Lambda(A, -)),\ n = 0, 1, \ldots$$

$\overline{Ext}_\Lambda^n(A, B)$ se calcula eligiendo una resolución inyectiva I de $\Lambda-$módulo B y tomando cohomología al complejo de cocadena $Hom_\Lambda(A, I)$, de modo que $\overline{Ext}_\Lambda^n(A, B) = H^n(Hom_\Lambda(A, I))$.
Claramente $\overline{Ext}_\Lambda^n(A, B) = \dfrac{Ker\ \partial^n}{Im\ \partial^{n-1}}$ es un grupo abeliano como cociente de un grupo abeliano para $n \geq 0$.

Proposición 2.5.14 *Sea $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas, donde $\mathfrak{A}$ tiene suficientes inyectivos y sea $I \in |\mathfrak{A}|$ inyectivo; entonces $R^nTI = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ y $R^0TI \cong TI$.*

Prueba.- Tomando $I_0 = I$, se tiene la resolución inyectiva $\mathcal{I}$ de I, donde

$$\mathcal{I} : 0 \xrightarrow{\partial_{-1}} I_0 \xrightarrow{\partial_0} I_1 = 0 \xrightarrow{\partial_1} 0 \xrightarrow{\partial_2} \cdots$$

Aplicando el funtor covariante aditivo T a $\mathcal{I}$ se obtiene $T\partial_0 = 0$ por ser $\partial_0 = 0$ y

$$T\mathcal{I} : 0 \xrightarrow{T\partial_{-1}} TI_0 \xrightarrow{T\partial_0} 0 \xrightarrow{T\partial_1} 0 \xrightarrow{T\partial_2} \cdots$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto}\quad R^nTI &= H^n(T\mathcal{I}) = \frac{Ker\ T\partial_n}{Im\ T\partial_{n-1}} = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots; \\ R^0TI &= \frac{Ker\ T\partial_0}{Im\ T\partial_{-1}} = \frac{TI}{\{0\}} \cong TI\ \blacksquare \end{aligned}$$

En el caso de un funtor contravariante aditivo $S: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ entre categorías abelianas donde $\mathfrak{A}$ tiene suficientes proyectivos, el procedimiento es como sigue:

Los funtores derivados derechos $R^n S$ son obtenidos como los funtores derivados derechos de los funtores covariantes $S : \mathfrak{A}^{op} \to \mathfrak{B}$. Así, se calcula $R^n SA$ para un objeto $A \in |\mathfrak{A}|$ eligiendo una resolución proyectiva P de A (i.e., una resolución inyectiva en $\mathfrak{A}^{op}$), formando complejo de cocadena SP y tomando cohomología. Por lo tanto $R^n SA = H^n(SP),\ n = 0, 1, \ldots$

El funtor contravariante $Hom_\Lambda(-, B)$ es aditivo. Por lo tanto se pueden definir los funtores derivados derechos de $Hom_\Lambda(-, B)$. Éstos son los funtores $Ext^n_\Lambda(-, B) : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ tales que

$$Ext^n_\Lambda(-, B) = R^n(Hom_\Lambda(-, B)),\ n = 0, 1, \ldots$$

Así, el grupo abeliano $Ext^n_\Lambda(A, B)$ es calculado eligiendo una resolución proyectiva P de A y tomando cohomología al complejo de cocadena $Hom_\Lambda(P, B)$.

Se cierra este capítulo estableciendo el efecto que los funtores derivados derechos de un funtor compuesto tienen sobre objetos (los funtores mencionados son importantes para desarrollar el segundo objetivo establecido en el presente trabajo).

Sean $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ funtores covariantes aditivos y $A \in |\mathfrak{A}|$, donde $\mathfrak{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces se define el q-ésimo funtor derivado derecho $R^q(GF) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ para $q = 0, 1, \ldots$
sobre objetos por

$$R^q(GF)(A) = H^q(GF(I))$$

para alguna resolución inyectiva I de A. Además esta definición no depende de la resolución inyectiva de A

En efecto, por Proposición 1.7.35 $GF : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ es un funtor covariante aditivo. Ahora, como $\mathfrak{A}$ tiene suficientes inyectivos, por Definición 2.5.13 para cada $q = 0, 1, \ldots$, el q-ésimo funtor derivado derecho de GF denotado por $R^q(GF) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, es un funtor cuyo valor sobre el objeto A es $R^q(GF)(A) = H^q(GF(I))$ en donde I es alguna resolución inyectiva de A.

Sea I' otra resolución inyectiva de A, entonces por un resultado análogo a Proposición 2.5.4 existe un isomorfismo $\eta : H^q(GF(I)) \xrightarrow{\sim} H^q(GF(I'))$, como estos objetos en $\mathfrak{C}$ se identifican, se puede concluir que $R^q(GF)(A) = H^q(GF(I'))$.

Capítulo 3

Sucesiones Espectrales y Filtraciones

Recordando que el primer objetivo de la tesis es dar condiciones para inducir (o transferir) el isomorfismo entre los límites de dos sucesiones espectrales asociadas a dos complejos filtrados a las homologías correspondientes a dichos complejos filtrados y probar este resultado, se destina para la obtención de este objetivo las secciones 3.1, 3.2 y 3.3. A propósito, se comienza este capítulo revisando objetos diferenciales que son necesarios para tratar objetos de homología (por tanto homologías de complejos) y sucesiones espectrales en una categoría abeliana, pares exactos con las cuales es posible obtener sucesiones espectrales asociadas.
Se estudia objetos diferenciales filtrados para comprender el caso particular de complejos de cadena filtrados, pues con estos objetos automáticamente se generan un par exacto y luego una sucesión espectral. Se hace análisis de esta parte para buscar y dar condiciones a la filtración de un complejo filtrado dado con el propósito de que la sucesión espectral asociada tenga límite, se alcance sólo en un número finito de pasos y, se proporcione un procedimiento para calcular tal límite; imponiendo esas condiciones que garantizan la existencia del límite y el procedimiento para su cálculo a ambas filtraciones de los dos complejos de cadena filtrados se conseguirá la referida transferencia del isomorfismo desde los límites a las homologías; en consecuencia, se formalizará el logro del primer objetivo enunciando y demostrando Teorema 3.3.13.

El segundo objetivo del presente trabajo involucrará dos problemas una de existencia y otra de convergencia finita para la sucesión espectral de Grothendieck. En la sección 3.4, se implementará una teoría breve acerca de complejos de cocadena filtrados para obtener el resultado dual de Teorema 3.3.9 que será útil cuando se trate el problema de convergencia finita de tal sucesión espectral. Mientras que en la sección 3.5 se propone conseguir formalmente el segundo objetivo enunciando y demostrando Teorema 3.5.12.

3.1. Pares Exactos y Sucesiones Espectrales

Definición 3.1.1 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría Abeliana. Sea A un objeto de $\mathfrak{A}$ y $d : A \to A$ un endomorfismo. El par (A, d) es un objeto diferencial si $d^2 = 0$.*

En realidad :

i) Se puede definir un morfismo de objetos diferenciales $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ como un morfismo $f : A \to B$ de $\mathfrak{A}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "d_B"'] & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

ii) También se puede definir la composición de morfismos de objetos diferenciales.

Si $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$, $g : (B, d_B) \to (C, d_C)$ son morfismos de objetos diferenciales, entonces la composición de estos morfismos es $g \circ f$ en $\mathfrak{A}$ tal que $(g \circ f)d_A = d_C(g \circ f)$.

iii) Luego, es posible construir la categoría $(\mathfrak{A}, d)$ cuyos objetos son los objetos diferenciales, los morfismos entre estos objetos son definidos en *i*) y la composición de morfismos es dada en *ii*).

iv) $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B)) = \{f \in \mathfrak{A}(A, B) \;/\; fd_A = d_Bf\}$, luego $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B)) \subseteq \mathfrak{A}(A, B)$.

Proposición 3.1.2 *Si $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, entonces $(\mathfrak{A}, d)$ es una categoría.*

Prueba .- Se probará que se cumplen los siguientes tres axiomas de categoría para $(\mathfrak{A}, d)$:

CAT1: Los conjuntos de morfismos $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ y $(\mathfrak{A}, d)((C, d_C), (D, d_D))$ son disjuntos por la inclusión visto en *iv*), a menos que $(A, d_A) = (C, d_C)$ y $(B, d_B) = (D, d_D)$.

CAT 2: Dados $f \in (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$, $g \in (\mathfrak{A}, d)((B, d_B), (C, d_C))$ y $h \in (\mathfrak{A}, d)((C, d_C), (D, d_D))$ se cumple $h(gf) = (hg)f$, pues $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (D, d_D)) \subseteq \mathfrak{A}(A, D)$ para todo (A, d_A) y $(D, d_D) \in |(\mathfrak{A}, d)|$.

CAT 3: Para cada objeto $(A, d_A) \in |(\mathfrak{A}, d)|$ existe un morfismo identidad de (A, d_A), denotado por $1_{(A,d_A)} : (A, d_A) \to (A, d_A)$ tal que para cualesquier $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$, $g : (C, d_C) \to (A, d_A)$ se tiene $f = f \circ 1_{(A,d_A)}$, $1_{(A,d_A)} \circ g = g$. Es claro que $1_{(A,d_A)} = 1_A$ pues $1_Ad_A = d_A1_A = d_A$ ■

Proposición 3.1.3 *Si $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, entonces la categoría $(\mathfrak{A}, d)$ es aditiva.*

Prueba .- Para que la categoría $(\mathfrak{A}, d)$ sea aditiva se verificará las siguientes cuatro condiciones.

i) $(0, d_0) \in |(\mathfrak{A}, d)|$ puesto que el objeto cero $0 \in |\mathfrak{A}|$, d_0 es el morfismo nulo en $\mathfrak{A}(0,0)$ de manera que $d_0^2 = d_0 d_0 = 0$.

ii) Para $(A, d_A),\ (B, d_B) \in |(\mathfrak{A}, d)|$ se tiene que $(A, d_A) \times (B, d_B) \in |(\mathfrak{A}, d)|$.
Verificando $(A, d_A) \times (B, d_B) = (A \times B, d_A \times d_B)$ donde $A \times B \in |\mathfrak{A}|$ y

$$\begin{aligned}
(d_A \times d_B)^2 &= (d_A \times d_B)(d_A \times d_B) \\
&= d_A d_A \times d_B d_B \\
&= d_A^2 \times d_B^2 \\
&= 0 \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

iii) $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ es un grupo abeliano para todo $(A, d_A),\ (B, d_B) \in |(\mathfrak{A}, d)|$.
Para ello se verificará que $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ es un subgrupo de $\mathfrak{A}(A, B)$.

a) $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B)) \neq \emptyset$, pues el morfismo cero $0 \in (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ en vista de que $0 \in \mathfrak{A}(A, B)$ y $0 d_A = d_B 0 = 0$.

b) Si $f, g \in (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$, entonces $f - g \in (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$.

Por la inclusión *iv)* : $f, g \in (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ implica que $f, g \in \mathfrak{A}(A, B)$.

Ahora , como $\mathfrak{A}(A, B)$ es un grupo existe $-g \in \mathfrak{A}(A, B)$ tal que $g - g = -g + g = 0$. Además $f - g \in \mathfrak{A}(A, B)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
(f - g)d_A = (f + (-g))d_A &= f d_A + (-g)d_A \\
&= d_B f + d_B(-g) \\
&= d_B(f + (-g)) = d_B(f - g).
\end{aligned}$$

Por *a)* y *b)* se deduce que $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ es un subgrupo de $\mathfrak{A}(A, B)$.

Como $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, el grupo $\mathfrak{A}(A, B)$ es abeliano, por consiguiente $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ es un grupo abeliano.

iv) La composición

$$(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B)) \times (\mathfrak{A}, d)((B, d_B), (C, d_C)) \longrightarrow (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (C, d_C))$$

es bilineal.

En efecto:

a) $$(f+g)h = fh + gh \qquad \forall f,g \in (\mathfrak{A},d)((B,d_B),(C,d_C)) \quad \text{y} \quad \forall h \in (\mathfrak{A},d)((A,d_A),(B,d_B))$$

b) $$f(g+h) = fg + fh \qquad \forall f \in (\mathfrak{A},d)((B,d_B),(C,d_C)) \quad \text{y} \quad \forall g,h \in (\mathfrak{A},d)((A,d_A),(B,d_B)).$$

Esto es inmediato porque $(\mathfrak{A},d)((B,d_B),(C,d_C)) \subseteq \mathfrak{A}(B,C)$, $(\mathfrak{A},d)((A,d_A),(B,d_B)) \subseteq \mathfrak{A}(A,B)$ y la composición $\mathfrak{A}(A,B)\times\mathfrak{A}(B,C) \to \mathfrak{A}(A,C)$ es bilineal por ser $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana.

Conforme a Definición 1.7.1 por *i*), *ii*), *iii*) y *iv*) se concluye que $(\mathfrak{A},d)$ es una categoría aditiva ■

Según (B. Mitchell - Theory of Categories - Academic Press), las categorías abelianas están relacionadas con la categoría de Λ-módulos : Toda categoría abeliana puede ser inmerso en una categoría de Λ-módulos con Λ conveniente. En vista de este resultado y los textos utilizados como apoyo de investigación, se realizará pruebas de resultados formulados en categorías abelianas como se estuviera en categoría de módulos usando elementos y operaciones.

Proposición 3.1.4 *Si $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, entonces es posible construir un funtor covariante aditivo H de la categoría $(\mathfrak{A},d)$ en la categoría $\mathfrak{A}$.*

Prueba.- Se definirá H sobre objetos y morfismos, se verificará que H está bien definido y es un funtor covariante aditivo con los items *i*), *ii*) y *iii*).
Sea $(A,d_A) \in |(\mathfrak{A},d)|$, como $d_A^2 = d_A d_A = 0$ se tiene que $Im(d_A) \subseteq Ker(d_A)$. Esto permite definir H sobre objetos como $H(A,d_A) = \dfrac{Ker(d_A)}{Im(d_A)} \in |\mathfrak{A}|$.
Si $f \in (\mathfrak{A},d)((A,d_A),(B,d_B))$, entonces $H(f) \in \mathfrak{A}(H(A,d_A),H(B,d_B))$. De esto se ve que H se define sobre morfismos mediante $H(f) : \dfrac{Ker(d_A)}{Im(d_A)} \to \dfrac{Ker(d_B)}{Im(d_B)}$ por
$H(f)(x+Im(d_A)) = f(x) + Im(d_B)$ para todo $x + Im(d_A) \in \dfrac{Ker(d_A)}{Im(d_A)} = H(A,d_A)$.

i) $H(f)$ está bien definido como aplicación se verifica con *a*) y *b*).

a) $f(x) + Im(d_B) \in \dfrac{Ker(d_B)}{Im(d_B)}$, pues $x \in Ker(d_A)$ y $d_B f(x) = f\,\underbrace{d_A(x)}_{=0} = 0$ implica que $f(x) \in Ker(d_B)$.

b) Sean $x + Im(d_A),\ y + Im(d_A) \in \dfrac{Ker(d_A)}{Im(d_A)}$ tales que
$x + Im(d_A) = y + Im(d_A)$, entonces
$H(f)(x+Im(d_A)) = H(f)(y+Im(d_A))$

En efecto:
$$\begin{aligned} x + Im(d_A) &= y + Im(d_A) \quad \text{implica que} \\ (x-y) + Im(d_A) &= Im(d_A) \Leftrightarrow x - y \in Im(d_A). \end{aligned}$$

Así existe $z \in A$ tal que $x - y = d_A z$, aplicando f:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(d_A z) \\ &= d_B(fz), \quad \text{donde } fz \in B, \end{aligned}$$

de modo que $f(x) - f(y) \in Im(d_B)$, luego $f(x) + Im(d_B) = f(y) + Im(d_B)$. Por lo tanto $H(f)(x + Im(d_A)) = H(f)(y + Im(d_A))$.

ii) $H : (\mathfrak{A}, d) \to \mathfrak{A}$ es un funtor covariante.
Esto se prueba verificando que satisface los dos siguientes axiomas de funtor:

FUN 1. $H(1_{(A,d_A)}) = 1_{H(A,d_A)}$ para todo $(A, d_A) \in |(\mathfrak{A}, d)|$.

En efecto, $H(1_{(A,d_A)}) : H(A, d_A) \to H(A, d_A)$ está definido por

$$\begin{aligned} H(1_{(A,d_A)})(x + Im(d_A)) &= 1_{(A,d_A)}(x) + Im(d_A) \\ &= x + Im(d_A) \\ &= 1_{H(A,d_A)}(x + Im(d_A)) \end{aligned}$$

para todo $x + Im(d_A) \in H(A, d_A)$. Así, por igualdad de funciones se concluye que $H(1_{(A,d_A)}) = 1_{H(A,d_A)}$.

FUN 2. $H(gf) = H(g)H(f)$ para todo $f \in (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ y $g \in (\mathfrak{A}, d)((B, d_B), (C, d_C))$.

En efecto, para $H(gf) : H(A, d_A) \to H(C, d_C)$ por definición se tiene

$$\begin{aligned} H(gf)(x + Im(d_A)) &= (gf)(x) + Im(d_C) \\ &= g(f(x)) + Im(d_C) \\ &= H(g)(f(x) + Im(d_B)) \\ &= H(g)H(f)(x + Im(d_A)) \end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple para todo $x + Im(d_A) \in H(A, d_A)$, por lo tanto $H(gf) = H(g)H(f)$.

iii) El funtor covariante $H : (\mathfrak{A}, d) \to \mathfrak{A}$ es aditivo.
En efecto, $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, luego es aditiva. Por otro lado según Proposición 3.1.3 la categoría $(\mathfrak{A}, d)$ es aditiva, entonces por Definición 1.7.13 para probar que el funtor H es aditivo, se va a verificar que $H(f + g) = H(f) + H(g)$ para todo $f, g \in (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$.

En efecto, para $H(f+g) : H(A,d_A) \to H(B,d_B)$ por definición:

$$\begin{aligned}
H(f+g)(x+Im(d_A)) &= (f+g)(x)+Im(d_B) \\
&= (f(x)+g(x))+Im(d_B) \\
&= (f(x)+Im(d_B))+(g(x)+Im(d_B)) \\
&= H(f)(x+Im(d_A))+H(g)(x+Im(d_A)) \\
&= (H(f)+H(g))(x+Im(d_A))
\end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple para todo $x+Im(d_A) \in H(A,d_A)$, en consecuencia $H(f+g) = H(f)+H(g)$ ■

Para el objeto diferencial (A,d_A) sobre $\mathfrak{A}$:

i) $H(A) = H(A,d_A)$ se llama objeto de homología.

ii) $Z(A) = Ker(d_A)$ se llama conjunto de ciclos de A.

iii) $B(A) = Im(d_A)$ se llama frontera de A, de modo que $H(A) = \dfrac{Z(A)}{B(A)}$.

Definición 3.1.5 *Una sucesión espectral en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ es una sucesión $E = \{(E_n,d_n)\}$ de objetos diferenciales para $n = 0,1,\ldots$, tales que $E_{n+1} = H(E_n,d_n) = H(E_n)$.*

Se observa que :

i) Se define un morfismo $\varphi : E \to E'$ de sucesiones espectrales como la familia de morfismos $\varphi_n : (E_n,d_n) \to (E'_n,d'_n)$ de $(\mathfrak{A},d)$ tales que $\varphi_{n+1} = H(\varphi_n)$ para $n = 0,1,\ldots$

ii) La composición $\psi\varphi$ de morfismos $\varphi : E \to E'$ y $\psi : E' \to E''$ de sucesiones espectrales es definido como la familia $\{(\psi\varphi)_n = \psi_n\varphi_n : (E_n,d_n) \to (E''_n,d''_n)\}$ de morfismos de $(\mathfrak{A},d)$ tales que $(\psi\varphi)_{n+1} = H((\psi\varphi)_n)$ para $n = 0,1,\ldots$

Esto es posible para cada $n = 0,1,\ldots$; $\psi_n\varphi_n$ es definido en la categoría $(\mathfrak{A},d)$, de modo que $(\psi\varphi)_n = \psi_n\varphi_n$ está definido como un morfismo de $(\mathfrak{A},d)$.

Por otro lado, $H : (\mathfrak{A},d) \to \mathfrak{A}$ es un funtor covariante implica que

$$\begin{aligned}
H((\psi\varphi)_n) &= H(\psi_n\varphi_n) \\
&= H(\psi_n)H(\varphi_n) \\
&= \psi_{n+1}\varphi_{n+1} \\
&= (\psi\varphi)_{n+1} \quad \text{para } n = 0,1,\ldots
\end{aligned}$$

iii) Así, se puede construir la categoría $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})$ cuyos objetos son sucesiones espectrales en $\mathfrak{A}$, los morfismos de estos objetos son definidos en *i)* y la composición de estos morfismos está dado en *ii)*.

Proposición 3.1.6 *Si $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})$ es una categoría.*

Prueba.- Se cumplen los tres axiomas siguientes de categoría para $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})$:

CAT 1. Los conjuntos de morfismos $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})(A,B)$ y $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})(C,D)$ son disjuntos, a menos que $A = C$ y $B = D$.

En efecto, si $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})(A,B) \cap \mathfrak{E}(\mathfrak{A})(C,D) \neq \emptyset$ se prueba que $A = C$ y $B = D$.
Sea $h \in \mathfrak{E}(\mathfrak{A})(A,B) \cap \mathfrak{E}(\mathfrak{A})(C,D)$ de modo que $h : A \to B$ y $h : C \to D$. Así para cada n, $h_n : (A_n, d_{A_n}) \to (B_n, d_{B_n})$, $h_n : (C_n, d_{C_n}) \to (D_n, d_{D_n})$ son morfismos en $(\mathfrak{A}, d)$. De aquí $h_n \in (\mathfrak{A}, d)((A_n, d_{A_n}), (B_n, d_{B_n})) \cap (\mathfrak{A}, d)((C_n, d_{C_n}), (D_n, d_{D_n}))$, luego $(\mathfrak{A}, d)((A_n, d_{A_n}), (B_n, d_{B_n})) \cap (\mathfrak{A}, d)((C_n, d_{C_n}), (D_n, d_{D_n})) \neq \emptyset$.
Como $(\mathfrak{A}, d)$ es una categoría, se deduce que $(A_n, d_{A_n}) = (C_n, d_{C_n})$ y $(B_n, d_{B_n}) = (D_n, d_{D_n})$, de modo que $A_n = C_n$, $B_n = D_n$ para $n = 0, 1, \ldots$
Por consiguiente $A = C$ y $B = D$.

CAT 2. Dados $f \in \mathfrak{E}(\mathfrak{A})(A,B)$, $g \in \mathfrak{E}(\mathfrak{A})(B,C)$ y $h \in \mathfrak{E}(\mathfrak{A})(C,D)$ se cumple que $h(gf) = (hg)f$ para todo A, B, C y $D \in |\mathfrak{E}(\mathfrak{A})|$.
En efecto: Para cada $n = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned}
(h(gf))_n &= h_n(gf)_n \quad \text{en } (\mathfrak{A}, d) \\
&= h_n(g_n f_n) \\
&= (h_n g_n) f_n, \quad \text{por asociatividad en} (\mathfrak{A}, d) \\
&= (hg)_n f_n \\
&= ((hg)f)_n.
\end{aligned}$$

Por consiguiente $h(gf) = (hg)f$.

CAT 3. Para cada objeto $A \in |\mathfrak{E}(\mathfrak{A})|$ existe un morfismo identidad de A, denotado por $1_A : A \to A$ tal que para cualesquier $f \in \mathfrak{E}(\mathfrak{A})(A,B)$ y $g \in \mathfrak{E}(\mathfrak{A})(C,A)$ se tiene $f = f \circ 1_A$, $g = 1_A \circ g$.

En realidad, $1_A : A \to A$ se define como la sucesión $1_A = \{1_{A_n}\}$.

Es decir $(1_A)_n = 1_{A_n}$ de modo que
$$\begin{aligned}
(f1_A)_n &= f_n(1_A)_n \\
&= f_n 1_{A_n} \\
&= f_n \quad \text{para } n = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \circ 1_A = f$.

$$\text{Igualmente} \qquad \begin{aligned}(1_A g)_n &= (1_A)_n g_n \\ &= 1_{A_n} \circ g_n \\ &= g_n \quad \text{en } (\mathfrak{A}, d) \text{ para } n = 0, 1, \ldots\end{aligned}$$

Por lo tanto $1_A \circ g = g$ ■

Definición 3.1.7 *Si $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, entonces un par exacto $EC = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ en $\mathfrak{A}$ es un triángulo*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

exacto de morfismos en $\mathfrak{A}$.

En otras palabras:

$i)$ El triángulo (3.1) de morfismos en $\mathfrak{A}$ es exacto si la sucesión

$$D \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\alpha} D$$

es exacta.

$ii)$ El triángulo (3.1) de morfismos en $\mathfrak{A}$ es exacto si se tiene $Im(\alpha) = Ker(\beta)$, $Im(\beta) = Ker(\gamma)$, $Im(\gamma) = Ker(\alpha)$.

Los siguientes pasos facilitan la construcción de la categoría de pares exactos:

$i)$ Es posible definir un morfismo $\phi : EC \to \overline{EC}$ de pares exactos, donde $EC = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ y $\overline{EC} = \{\bar{D}, \bar{E}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$, como un par (k, λ) de morfismos de $\mathfrak{A}$; $k : D \to \bar{D}$ y $\lambda : E \to \bar{E}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} EC : \arrow[d, "\phi"] & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k"] & D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k"] & E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\lambda"] & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k"] & D \arrow[d, "k"] \\ \overline{EC} : & \bar{D} \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] & \bar{D} \arrow[r, "\bar{\beta}"'] & \bar{E} \arrow[r, "\bar{\gamma}"'] & \bar{D} \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] & \bar{D} \end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir $\bar{\alpha}k = k\alpha$, $\bar{\beta}k = \lambda\beta$, $\bar{\gamma}\lambda = k\gamma$. Sea

$$\begin{tikzcd} EC : \arrow[d, "\phi"] & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k"] & D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k"] & E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\lambda"] & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k"] & D \arrow[d, "k"] \\ \overline{EC} : \arrow[d, "\bar{\phi}"] & \bar{D} \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "\bar{k}"] & \bar{D} \arrow[r, "\bar{\beta}"] \arrow[d, "\bar{k}"] & \bar{E} \arrow[r, "\bar{\gamma}"] \arrow[d, "\bar{\lambda}"] & \bar{D} \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "\bar{k}"] & \bar{D} \arrow[d, "\bar{k}"] \\ \overline{\overline{EC}} : & \bar{\bar{D}} \arrow[r, "\bar{\bar{\alpha}}"'] & \bar{\bar{D}} \arrow[r, "\bar{\bar{\beta}}"'] & \bar{\bar{E}} \arrow[r, "\bar{\bar{\gamma}}"'] & \bar{\bar{D}} \arrow[r, "\bar{\bar{\alpha}}"'] & \bar{\bar{D}} \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

el diagrama para componer morfismos de pares exactos en $\mathfrak{A}$.

ii) Ahora, se define la composición $\overline{\bar{\phi}\phi}$ de morfismos $\phi : EC \to \overline{EC}$, $\bar{\phi} : \overline{EC} \to \overline{\overline{EC}}$ de pares exactos en $\mathfrak{A}$ como el par $(\bar{k}k, \bar{\lambda}\lambda)$ de morfismos de $\mathfrak{A}$, donde $\bar{k}k : D \to \bar{\bar{D}}$, $\bar{\lambda}\lambda : E \to \bar{\bar{E}}$ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
EC : \arrow[d, "\bar{\phi}\phi"] & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\bar{k}k"] & D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\bar{k}k"] & E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\bar{\lambda}\lambda"] & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\bar{k}k"] & D \arrow[d, "\bar{k}k"] \\
\overline{\overline{EC}} : & \bar{\bar{D}} \arrow[r, "\bar{\bar{\alpha}}"'] & \bar{\bar{D}} \arrow[r, "\bar{\bar{\beta}}"'] & \bar{\bar{E}} \arrow[r, "\bar{\bar{\gamma}}"'] & \bar{\bar{D}} \arrow[r, "\bar{\bar{\alpha}}"'] & \bar{\bar{D}}
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Es decir $\bar{\bar{\alpha}}\bar{k}k = \bar{k}k\alpha$, $\bar{\bar{\beta}}\bar{k}k = \bar{\lambda}\lambda\beta$, $\bar{\bar{\gamma}}\bar{\lambda}\lambda = \bar{k}k\gamma$

Esto es posible, pues se verifica que se cumplen estas igualdades

a) $\underbrace{\bar{\bar{\alpha}}\bar{k}}\, k = \bar{k}\,\underbrace{\bar{\alpha}k} = \bar{k}k\alpha$ pues $\bar{\bar{\alpha}}\bar{k} = \bar{k}\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}k = k\alpha$ por (3.2)

b) $\underbrace{\bar{\bar{\beta}}\bar{k}}\, k = \bar{\lambda}\,\underbrace{\bar{\beta}k} = \bar{\lambda}\lambda\beta$ pues $\bar{\bar{\beta}}\bar{k} = \bar{\lambda}\bar{\beta}$, $\bar{\beta}k = \lambda\beta$ por (3.2)

c) $\underbrace{\bar{\bar{\gamma}}\bar{\lambda}}\, \lambda = \bar{k}\,\underbrace{\bar{\gamma}\lambda} = \bar{k}k\gamma$ pues $\bar{\bar{\gamma}}\bar{\lambda} = \bar{k}\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}\lambda = k\gamma$ por (3.2)

iii) Ahora bien, es posible construir la categoría $\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})$ cuyos objetos son pares exactos en $\mathfrak{A}$, los morfismos de estos objetos son definidos en el item *i*) y la composición de estos morfismos está dada por el paso *ii*).

iv) Si $EC, \overline{EC}$ son pares exactos en $\mathfrak{A}$, entonces el conjunto de morfismos de estos pares exactos dados es el conjunto
$\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(EC, \overline{EC}) = \{(k, \lambda) : D \times E \to \bar{D} \times \bar{E} / \ \bar{\alpha}k = k\alpha,\ \bar{\beta}k = \lambda\beta,\ \bar{\gamma}\lambda = k\gamma\}$
donde $EC = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$, $\overline{EC} = \{\bar{D}, \bar{E}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$, $k : D \to \bar{D}$ y $\lambda : E \to \bar{E}$

Proposición 3.1.8 *Si $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})$ es una categoría.*

Prueba.- Se verifica que se cumplen los tres axiomas de categoría para $\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})$:

CAT 1.- Los conjuntos de morfismos $\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_1, B_1)$ y $\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_2, B_2)$ son disjuntos, a menos que $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$.
En efecto, suponiendo que $\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_1, B_1) \cap \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_2, B_2) \neq \emptyset$, se prueba que $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$.

$$\text{Sea } h \in \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_1, B_1) \cap \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_2, B_2) \tag{3.3}$$

Luego $h : A_1 \to B_1$ y $h : A_2 \to B_2$ donde $A_1 = \{D_1, E_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$,
$B_1 = \{\bar{D}_1, \bar{E}_1, \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1\}$, $h = (k_1, \lambda_1)$; $k_1 : D_1 \to \bar{D}_1$, $\lambda_1 : E_1 \to \bar{E}_1$ en $\mathfrak{A}$.
Así $h = (k_1, \lambda_1) \in \mathfrak{A}(D_1 \times E_1, \bar{D}_1 \times \bar{E}_1)$.
Análogamente $A_2 = \{D_2, E_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $B_2 = \{\bar{D}_2, \bar{E}_2, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \bar{\gamma}_2\}$ de modo que $h = (k_1, \lambda_1) \in \mathfrak{A}(D_1 \times E_1, \bar{D}_1 \times \bar{E}_1) \cap \mathfrak{A}(D_2 \times E_2, \bar{D}_2 \times \bar{E}_2)$ y así

$\mathfrak{A}(D_1 \times E_1, \bar{D}_1 \times \bar{E}_1) \cap \mathfrak{A}(D_2 \times E_2, \bar{D}_2 \times \bar{E}_2) \neq \emptyset$. Como $\mathfrak{A}$ es una categoría se cumplen las igualdades $D_1 \times E_1 = D_2 \times E_2,\ \bar{D}_1 \times \bar{E}_1 = \bar{D}_2 \times \bar{E}_2$. Además se tiene que

$$D_1 = D_2,\ E_1 = E_2,\ \bar{D}_1 = \bar{D}_2,\ \bar{E}_1 = \bar{E}_2 \tag{3.4}$$

Por (3.3) y el paso anterior *iv*) se cumplen $\bar{\alpha}_1 k_1 = k_1\alpha_1,\ \bar{\beta}_1 k_1 = \lambda_1\beta_1,$ $\bar{\gamma}_1\lambda_1 = k_1\gamma_1$ y además $\bar{\alpha}_2 k_1 = k_1\alpha_2,\ \bar{\beta}_2 k_1 = \lambda_1\beta_2,\ \bar{\gamma}_2\lambda_1 = k_1\gamma_2$. Restando se deduce $(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1)k_1 = k_1(\alpha_2 - \alpha_1),\ (\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1)k_1 = \lambda_1(\beta_2 - \beta_1)$ y $(\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1)\lambda_1 = k_1(\gamma_2 - \gamma_1)$.
De aquí se debe tener

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2,\ \gamma_1 = \gamma_2,\ \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 \tag{3.5}$$

De (3.4) y (3.5) se sigue que $A_1 = A_2,\ B_1 = B_2$.

CAT 2. Dados $f \in \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_1, A_2)$, $g \in \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_2, A_3)$ y $h \in \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A_3, A_4)$ se cumple que $h(fg) = (hg)f$ para todo $A_1, A_2, A_3, A_4 \in |\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})|$.

En efecto, por el paso *iv*) : $f = (k_1, \lambda_1),\ g = (k_2, \lambda_2)$ y $h = (k_3, \lambda_3)$ de modo que

$$\begin{aligned}
h(gf) &= h(k_2k_1, \lambda_2\lambda_1) \quad \text{por el paso } ii) \\
&= (k_3, \lambda_3)(k_2k_1, \lambda_2\lambda_1) \\
&= (k_3(k_2k_1), \lambda_3(\lambda_2\lambda_1)) \\
&= ((k_3k_2)k_1, (\lambda_3\lambda_2)\lambda_1) \quad \text{ya que la composición de morfismos en } \mathfrak{A} \text{ es asociativa} \\
&= (k_3k_2, \lambda_3\lambda_2)(k_1, \lambda_1) \\
&= ((k_3, \lambda_3)(k_2, \lambda_2))(k_1, \lambda_1) \\
&= (hg)f
\end{aligned}$$

Luego se tiene $h(gf) = (hg)f$.

CAT 3. Para cada objeto $A \in |\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})|$ existe un morfismo identidad, denotado por $1_A : A \to A$ tal que

$$f1_A = f,\ 1_A g = g \tag{3.6}$$

para cualesquier $f \in \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A, B)$ y $g \in \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(C, A)$.

En efecto, definiendo $1_A : A \to A$ por $1_A = (1_D, 1_E)$ si $A = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$, se verifican:

$$\begin{aligned}
f \circ 1_A = (k, \lambda)(1_D, 1_E) &= (k1_D, \lambda 1_E) \\
&= (k, \lambda) \quad \text{pues } 1_E \text{ y } 1_D \text{ son identidades en } \mathfrak{A} \\
&= f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1_A \circ g = (1_D, 1_E)(\bar{k}, \bar{\lambda}) &= (1_D\bar{k}, 1_E\bar{\lambda}) \\ &= (\bar{k}, \bar{\lambda}) \quad \text{porque } 1_E \text{ y } 1_D \text{ son identidades en } \mathfrak{A} \\ &= g \end{aligned}$$

Por consiguiente, existe el morfismo identidad $1_A = (1_D, 1_E) \in \mathfrak{EC}(\mathfrak{A})(A, A)$ cumpliendo las igualdades (3.6) ■

Proposición 3.1.9 *Sea* $A = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\} \in |\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})|$ *dado en (3.1). Si se define* $d : E \to E$ *por* $d = \beta\gamma$*, entonces* (E, d) *es un objeto diferencial en* $\mathfrak{A}$*.*

Prueba.- Usando la asociatividad de la composición de morfismos de la categoría abeliana $\mathfrak{A}$ y la definición dada del endomorfismo d:

$$\begin{aligned} d^2 = (\beta\gamma)(\beta\gamma) &= \beta(\gamma\beta)\gamma \\ &= \beta 0 \gamma \quad \text{por ser } A \text{ (el triángulo) exacto en } E,\ i.e.,\ \gamma\beta = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $d^2 = 0$ y $E \in |\mathfrak{A}|$, por Definición 3.1.1 se concluye que $(E, d) \in |(\mathfrak{A}, d)|$ ■
Considerando el par exacto en $\mathfrak{A}$ dado en (3.1) y haciendo $(E_0, d_0) = (E, d)$, $D_1 = \alpha D$ y $E_1 = H(E_0, d_0)$; se construye el triángulo de morfismos en $\mathfrak{A}$ como

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & D_1 \arrow[dl, "\beta_1"] \\ & E_1 \arrow[ul, "\gamma_1"] & \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

$$\text{donde se definen } \alpha_1 = \alpha|_{D_1},\ \beta_1(\alpha x) = [\beta x],\ \gamma_1[x] = \gamma(x) \tag{3.8}$$

Proposición 3.1.10 *Los morfismos* α_1*,* β_1 *y* γ_1 *en* $\mathfrak{A}$ *dados por (3.8) están bien definidos.*

Prueba.- Con los siguientes items *i*), *ii*) y *iii*) se probará que los morfismos están bien definidos.

i) $\alpha_1 : D_1 \to D_1$ está bien definido.
Sean $\alpha x, \alpha y \in D_1 = \alpha D$ tales que $\alpha x = \alpha y$, entonces $\alpha_1(\alpha x) = \alpha_1(\alpha y)$.

En efecto, aplicando α a la ecuación $\alpha x = \alpha y$ se obtiene $\alpha(\alpha x) = \alpha(\alpha y)$. Como $\alpha_1 = \alpha|_{D_1}$, se sigue que $\alpha_1(\alpha x) = \alpha_1(\alpha y)$.
Observando que $\alpha_1(\alpha x) = \alpha(\alpha x) = \alpha(z) \in \alpha D = D_1$ para todo $z = \alpha x \in D$, se deduce que el codominio de α_1 es D_1.

ii) $\beta_1 : D_1 \to E_1$ está bien definido.
Sean $\alpha x, \alpha y \in D_1 = \alpha D$ tales que $\alpha x = \alpha y$, entonces $\beta_1(\alpha x) = \beta_1(\alpha y)$. Esto significa que se debe probar que $\beta x \in Ker(d)$ y $[\beta x] = [\beta y]$.
En efecto, como $\beta x \in E_0$ y $d : E_0 \to E_0$ en $\mathfrak{A}$, aplicando d a βx se tiene

$d(\beta x) = (\beta\gamma)(\beta x) = \beta(\gamma\beta)x = 0$ pues $\gamma\beta = 0$ por ser A un par exacto. Por lo tanto $\beta x \in Ker(d)$.
Del hecho que $\alpha x = \alpha y$ se tiene $\alpha(x-y) = 0$, luego $x - y \in Ker(\alpha) = Im(\gamma)$. Esto quiere decir que $x - y = \gamma(z)$ para algún $z \in E_0$, aplicando β :

$\beta x - \beta y = \beta\gamma(z) = d(z)$. De aquí
$\beta x - \beta y \in Im(d) \Leftrightarrow \beta x + Im(d) = \beta y + Im(d) \Leftrightarrow [\beta x] = [\beta y]$.
El codominio de β_1 es E_1, pues para todo $\alpha x \in D_1$ se nota que
$\beta_1(\alpha x) = [\beta x] = \beta x + Im(d_0) \in H(E_0, d_0) = E_1$.

iii) $\gamma_1 : E_1 \to D_1$ está bien definido.
Sean $[x], [y] \in E_1 = \dfrac{Ker(d)}{Im(d)}$ tales que $[x] = [y]$, entonces $\gamma_1[x] = \gamma_1[y]$.
En efecto, $[x] = [y] \Leftrightarrow x + Im(d) = y + Im(d)$, donde $x, y \in Ker(d)$. Luego $x - y = d(z)$, para algún $z \in E_0$. Como $Ker(d) \subseteq E_0$, aplicando
$\gamma : \gamma(x) - \gamma(y) = \gamma d(z) = \gamma(\beta\gamma)(z) = (\gamma\beta)(\gamma z) = 0$ porque $\gamma\beta = 0$, luego $\gamma(x) = \gamma(y)$ para $x, y \in Ker(d)$, en consecuencia $\gamma_1[x] = \gamma_1[y]$.
Como para todo $[x] \in E_1$, $\gamma_1[x] = \gamma(x)$. Pero $x \in Ker(d_0)$ implica que
$\gamma(x) \in Ker(\beta) = Im(\alpha) = D_1$, luego $\gamma_1[x] \in D_1$; por lo tanto el codominio de γ_1 es D_1 ■

Por ser de gran importancia en el trabajo los morfismos α_1, β_1 y γ_1 en $\mathfrak{A}$, se mostrará a continuación con diagramas los efectos que tienen dichos morfismos.

a) El efecto de α_1 sobre D_1 mediante

$$\begin{tikzcd} x \in D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"] & \alpha x \in D_1 = \alpha D \arrow[d, "\alpha_1"] \\ \alpha x \in \alpha D \arrow[r, "\alpha"] & \alpha^2 x \in \alpha^2 D \subseteq D_1 \end{tikzcd}$$

es $\alpha_1(\alpha x) = \alpha^2 x$. Esto quiere decir que $\alpha_1(z) = \alpha z$ para todo $z \in D_1$.

b) El efecto de β_1 sobre D_1 mediante

$$\begin{tikzcd} x \in D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \alpha x \in D_1 = \alpha D \arrow[d, "\beta_1"] \\ \beta x \in E \arrow[r, "{[\ ]}"] & [\beta x] \in E_1 \end{tikzcd}$$

es $\beta_1(\alpha x) = [\beta x]$. Esto quiere decir que $\beta_1(z) = [\beta y]$ para todo $z = \alpha y \in D_1$.
β_1, se define en base a $\beta x \in \beta\alpha^{-1}(D_1)$ significa que β_1 es inducido por $\beta\alpha^{-1}$.

c) El efecto de γ_1 sobre E_1 mediante

$$\begin{tikzcd} x \in E \arrow[r, "{[\ ]}"] \arrow[d, "\gamma"] & {[x] \in E_1} \arrow[dl, "\gamma_1"] \\ \gamma(x) \in D_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \in Ker(d) \arrow[d, "\gamma"] \\ \gamma(x) \in Ker(\beta) = D_1 \end{tikzcd}$$

es $\gamma_1[x] = \gamma(x)$ para todo $x \in \gamma^{-1}(D_1)$ y $d = \beta\gamma : E \to E$.

Teorema 3.1.11 *Sea $EC = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\} \in |\mathfrak{EC}(\mathfrak{A})|$, entonces el siguiente triángulo en $\mathfrak{A}$ cuyos lados están definidos en (3.8)*

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & D_1 \arrow[dl, "\beta_1"] \\ & E_1 \arrow[ul, "\gamma_1"] & \end{tikzcd}$$

es exacto.

Prueba.- Proposición 3.1.10 establece que los morfismos α_1, β_1 y γ_1 están bien definidos, entonces este teorema se probará verificando las siguientes igualdades : $Ker(\alpha_1) = Im(\gamma_1)$, $Im(\alpha_1) = Ker(\beta_1)$ y $Im(\beta_1) = Ker(\gamma_1)$, lo que se hará en los siguientes items i), ii) y iii):

i) $Ker(\alpha_1) = Im(\gamma_1)$. Se verificará esta igualdad con a) y b).

- *a*) Sea $x \in Ker(\alpha_1)$, entonces $x \in D_1 = Im(\alpha) = Ker(\beta)$ y $\alpha_1 x = \alpha x = 0$ de modo que $x \in Ker(\alpha) = Im(\gamma)$, luego existe $y \in E = E_0$ tal que $x = \gamma(y)$. Como $\beta x = \beta\gamma(y) = 0$, $y \in Ker(d_0)$. Así existe $[y] \in E_1$ tal que $x = \gamma(y) = \gamma_1[y] \in Im(\gamma_1)$. Por lo tanto $Ker(\alpha_1) \subseteq Im(\gamma_1)$.
- *b*) Recíprocamente, sea $x \in Im(\gamma_1)$, entonces existe $y \in Ker(d)$ tal que $x = \gamma_1[y]$. Como $Im(\gamma_1) \subseteq D_1$, aplicando α_1 a x :
  $\alpha_1 x = \alpha_1\gamma_1[y] = \alpha_1\gamma(y) = \alpha\gamma(y) = 0,\ \alpha\gamma = 0$ por ser EC exacto en D.
  Luego $x \in Ker(\alpha_1)$. Por lo tanto $Im(\gamma_1) \subseteq Ker(\alpha_1)$.

ii) $Ker(\beta_1) = Im(\alpha_1)$, esto se verificará en a) y b):

- *a*) Sea $\alpha x \in Ker(\beta_1)$, entonces $\alpha x \in D_1$ y $\beta_1(\alpha x) = [\beta x] = Im(d_0)$ es el cero de E_1. Pero $[\beta x] = \beta x + Im(d_0)$, luego comparando los valores de $[\beta x]$ resulta que $\beta x \in Im(d_0)$. Así existe $y \in E_0$ tal que $\beta x = d_0 y = \beta\gamma y$. Tomando extremos se deduce que $x - \gamma y \in Ker(\beta) = Im(\alpha) = D_1$. Así existe $x_0 \in D_1$ tal que $x - \gamma y = x_0$. Aplicando α y considerando que $\alpha\gamma = 0$, se sabe que existe $x_0 \in D_1$ tal que $\alpha x = \alpha x_0 = \alpha_1 x_0 \in Im(\alpha_1)$; por lo tanto $Ker(\beta_1) \subseteq Im(\alpha_1)$.
- *b*) Sea $\alpha_1 z \in Im(\alpha_1)$ para algún $z \in D_1 = Im(\alpha) = Ker(\beta)$.

$$\begin{aligned} \text{Aplicando } \beta_1 : \quad \beta_1(\alpha_1 z) = \beta_1(\alpha z) &= [\beta z] \\ &= [0], \quad \text{por ser } \beta z = 0 \\ &= Im(d_0), \quad 0 \in Im(d_0) \end{aligned}$$

  Como $Im(d_0)$ es el cero de E_1, de las igualdades anteriores se obtiene que $\alpha_1 z \in Ker(\beta_1)$; por lo tanto $Im(\alpha_1) \subseteq Ker(\beta_1)$.

iii) $Ker(\gamma_1) = Im(\beta_1)$, la verificación se hará con los siguientes items *a)* y *b)*:

a) Sea $[x] \in Ker(\gamma_1)$, entonces $[x] \in E_1$ y $\gamma_1[x] = \gamma(x) = 0$. De lo que se obtiene que $x \in Ker(\gamma) = Im(\beta)$, luego $x = \beta y$ para algún $y \in D_0$. Así existe $\alpha y \in D_1$ tal que $[x] = [\beta y] = \beta_1(\alpha y) \in Im(\beta_1)$.
Por lo tanto $Ker(\gamma_1) \subseteq Im(\beta_1)$.

b) Sea $[\beta y] \in Im(\beta_1)$, entonces existe $\alpha y \in D_1$ tal que $\beta_1(\alpha y) = [\beta y]$ con $\beta y \in Ker(d_0)$, en este caso $\gamma_1[\beta y] = \gamma(\beta y)$.
Recordando que EC es exacto en E implica que $\gamma\beta = 0$ y aplicando γ_1 :

$$\begin{aligned} \gamma_1\beta_1(\alpha y) &= \gamma_1[\beta y] \quad (3.9) \\ &= \gamma(\beta y) \\ &= (\gamma\beta)(y) \\ &= 0 \quad (3.10) \end{aligned}$$

Viendo (3.9) y (3.10) se obtiene que $\gamma_1[\beta y] = 0$, de donde $[\beta y] \in Ker(\gamma_1)$. Por lo tanto $Im(\beta_1) \subseteq Ker(\gamma_1)$ ■

Definición 3.1.12 *Se dirá al par exacto (3.7) par derivado de (3.1).*

Corolario 3.1.13 *Sea* $\mathfrak{A}$ *una categoría abeliana y* $EC = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ *un par exacto en* $\mathfrak{A}$, *entonces el n-ésimo par derivado correspondiente*

$$\begin{tikzcd} D_n \arrow[rr, "\alpha_n"] & & D_n \arrow[dl, "\beta_n"] \\ & E_n \arrow[ul, "\gamma_n"] & \end{tikzcd} \quad (3.11)$$

es exacto.

Prueba.- Se prueba por inducción sobre n.

i) Para $n = 1$, el par derivado $(EC)_1 = \{D_1, E_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ es exacto por el teorema anterior.

ii) Asumiendo que $(EC)_n = \{D_n, E_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n\}$ es exacto y tomando $(EC)_n$ en lugar de EC, según Teorema 3.1.11 se concluye que
$(EC)_{n+1} = \{D_{n+1}, E_{n+1}, \alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}\}$ es exacto ■

Corolario 3.1.14 *Sea* $\mathfrak{A}$ *una categoría abeliana y* $EC = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ *un par exacto en* $\mathfrak{A}$, *entonces existe una sucesión espectral* $E = \{(E_n, d_n)\}$ *en* $\mathfrak{A}$ *obtenida de* EC.

Prueba.- Según Corolario 3.1.13, dado un par exacto $EC = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ en $\mathfrak{A}$ se obtiene una sucesión de pares derivados $\{(EC)_n\},\ n = 0, 1, \ldots$ en $\mathfrak{A}$ tal que

$(EC)_n = \{D_n, E_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n\}$ es exacto para cada n.
Haciendo $d_n = \beta_n\gamma_n$, se nota que $d_n : E_n \to E_n$ es tal que

$$\begin{aligned} d_n^2 &= (\beta_n\gamma_n)(\beta_n\gamma_n) \\ &= \beta_n(\gamma_n\beta_n)\gamma_n \\ &= 0 \qquad \text{pues } Ker(\gamma_n) = Im(\beta_n) \text{ luego } \gamma_n\beta_n = 0. \end{aligned}$$

Así, (E_n, d_n) es un objeto diferencial en $\mathfrak{A}$ para cada n tal que $E_{n+1} = H(E_n, d_n)$.
Por lo tanto, existe la sucesión espectral $E = \{(E_n, d_n)\}$ en $\mathfrak{A}$ obtenida de EC ■

Para referirse a la sucesión espectral $E = \{(E_n, d_n)\}$ en $\mathfrak{A}$ obtenida en el corolario anterior se dirá simplemente sucesión espectral asociada al par exacto (3.1).

Proposición 3.1.15 *Sea $\nabla = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ un par exacto en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$, entonces $E_1 = \gamma^{-1}(\alpha D)/\beta(\alpha^{-1}(0))$ y $d_1 : E_1 \to E_1$ es inducido por $\beta\alpha^{-1}\gamma$.*

Prueba.- Como $E_1 = \dfrac{Ker(d)}{Im(d)}$ se verificará las siguientes igualdades:

a) $\gamma^{-1}(\alpha D) = Ker(d)$

$$\text{En efecto, sea} \quad \begin{aligned} x \in \gamma^{-1}(\alpha D) &\Leftrightarrow \gamma(x) \in \alpha D = Ker(\beta) \\ &\Leftrightarrow \beta\gamma(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in Ker(d). \end{aligned}$$

b) $\beta(\alpha^{-1}(0)) = Im(d)$
En efecto, sea

$$\begin{aligned} x \in \beta(\alpha^{-1}(0)) &\Leftrightarrow x = \beta(y) \quad \text{para algún } y \in \alpha^{-1}(0) = Ker(\alpha) = Im(\gamma) \\ &\Leftrightarrow x = \beta\gamma(z) \quad \text{para algún} z \in E \\ &\Leftrightarrow x = d(z) \\ &\Leftrightarrow x \in Im(d) \end{aligned}$$

Finalmente, como $d_1 = \beta_1\gamma_1$, β_1 es inducido por $\beta\alpha^{-1}$ y γ_1 es inducido por γ, se concluye que d_1 es inducido por $\beta\alpha^{-1}\gamma$ ■

Corolario 3.1.16 *Sea $\nabla = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ un par exacto en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$, entonces $\gamma_{n-1}^{-1}(\alpha_{n-1}D_{n-1}) = Ker(d_{n-1})$ y $\beta_{n-1}(\alpha_{n-1}^{-1}(0)) = Im(d_{n-1})$.*

Prueba .- Por Corolario 3.1.13, se sabe que el par derivado
$\nabla_{n-1} = \{D_{n-1}, E_{n-1}, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}\}$ es un par exacto en $\mathfrak{A}$ por ser ∇ un par exacto, luego se verificará las siguientes igualdades de conjuntos:

a) $\gamma_{n-1}^{-1}(\alpha_{n-1}D_{n-1}) = Ker(d_{n-1})$
En efecto:

$$\begin{aligned} x \in \gamma_{n-1}^{-1}(\alpha_{n-1}D_{n-1}) &\Leftrightarrow \gamma_{n-1}(x) \in \alpha_{n-1}D_{n-1} = Ker(\beta_{n-1}) \\ &\Leftrightarrow \beta_{n-1}\gamma_{n-1}(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_{n-1}(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in Ker(d_{n-1}). \end{aligned}$$

b) $\beta_{n-1}(\alpha_{n-1}^{-1}(0)) = Im(d_{n-1})$
En efecto, $x \in \beta_{n-1}(\alpha_{n-1}^{-1}(0)) \Leftrightarrow x = \beta_{n-1}(y)$ para

$$\begin{aligned} y \in \alpha_{n-1}^{-1}(0) = Ker(\alpha_{n-1}) &= Im(\gamma_{n-1}) \\ &\Leftrightarrow x = \beta_{n-1}\gamma_{n-1}(z) \quad \text{para } z \in E_{n-1} \\ &\Leftrightarrow x = d_{n-1}(z) \\ &\Leftrightarrow x \in Im(d_{n-1}) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Deduciendo :

i) Como $D_n = \alpha_{n-1}D_{n-1}$, del corolario anterior se sigue:
$E_n = \dfrac{Ker(d_{n-1})}{Im(d_{n-1})} = \dfrac{\gamma_{n-1}^{-1}(D_n)}{\beta_{n-1}(\alpha_{n-1}^{-1}(0))}$

ii) $d_n : E_n \to E_n$ es $d_n = \beta_n\gamma_n$. Como β_n es inducido por $\beta\alpha^{-n}$ y γ_n es inducido por γ, se concluye que d_n es inducido por $\beta\alpha^{-n}\gamma$.

Teorema 3.1.17 *Sea $\nabla = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ un par exacto en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$, entonces $E_n = \dfrac{\gamma^{-1}(\alpha^n D)}{\beta(\alpha^{-n}(0))}$, y $d_n : E_n \to E_n$ es inducido por $\beta\alpha^{-n}\gamma$.*

Prueba:
i) Se dará una prueba completa para el caso $n = 2$.

a) De la deducción *i)* siguiente al corolario anterior se sabe que $E_2 = \dfrac{\gamma_1^{-1}(D_2)}{\beta_1(\alpha_1^{-1}(0))}$,

entonces es posible definir $\varphi : \gamma^{-1}(D_2) \longrightarrow \dfrac{\gamma_1^{-1}(D_2)}{\beta_1(\alpha_1^{-1}(0))}$ por

$$\varphi(x) = [x] + \beta_1(\alpha_1^{-1}(0)) \tag{3.12}$$

Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} x \in E_0 \arrow[dr, "\gamma"] & {[x] \in E_1} \arrow[d, "\gamma_1"] & {[[x]] \in E_2} \arrow[dl, "\gamma_2"] \\ & D_2 & \end{tikzcd}$$

donde $[x] \in Ker(d_1)$, se deduce que

$$\gamma_1[x] \in Ker(\beta_1) = Im\alpha_1 = D_2 \tag{3.13}$$

Además se obtiene que $\gamma_2[[x]] = \gamma_1[x] = \gamma(x)$ para todo $x \in \gamma^{-1}(D_2)$. De aquí para todo $x \in \gamma^{-1}(D_2)$, por (3.13) se ve que $[x] \in \gamma_1^{-1}(D_2)$; por lo tanto tiene sentido definir la aplicación φ como en (3.12).

b) φ es un homomorfismo.
Sean x, $y \in \gamma^{-1}(D_2)$ y λ un escalar, entonces $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
Esta afirmación se verifica observando que $x + \lambda y \in \gamma^{-1}(D_2)$ y desarrollando las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\varphi(x+\lambda y) &= [x+\lambda y] + \beta_1(\alpha_1^{-1}(0)) \\ &= \left([x] + \beta_1(\alpha_1^{-1}(0))\right) + \lambda\left([y] + \beta_1(\alpha_1^{-1}(0))\right) \\ &= \varphi(x) + \lambda\varphi(y).\end{aligned}$$

c) φ es sobreyectiva.
Sea $b \in \dfrac{\gamma_1^{-1}(D_2)}{\beta_1(\alpha_1^{-1}(0))}$, entonces existe $a \in \gamma^{-1}(D_2)$ tal que $b = \varphi(a)$.
En efecto:
$b \in \dfrac{\gamma_1^{-1}(D_2)}{\beta_1(\alpha_1^{-1}(0))}$ implica que existe $c \in \gamma_1^{-1}(D_2)$ tal que

$$b = c + \beta_1(\alpha_1^{-1}(0)) \tag{3.14}$$

Interpretando $c \in \gamma_1^{-1}(D_2)$, se tiene que $\gamma_1(c) \in D_2$, así $c \in E_1$ luego existe $a \in E_0$ tal que $c = [a]$.
Pero $[a] \in Ker(d_1)$, luego $\beta_1\gamma_1[a] = 0$; de donde $\gamma_1[a] \in Ker(\beta_1) = Im(\alpha_1) = D_2$.
Como $\gamma(a) = \gamma_1[a]$, se deduce que $a \in \gamma^{-1}(D_2)$. Resumiendo, para b dado existe $a \in \gamma^{-1}(D_2)$ tal que, por (3.14), $b = \varphi(a)$.

d) La igualdad $Ker(\varphi) = \beta(\alpha^{-2}(0))$ se verifica con las inclusiones siguientes:
Sea $b \in Ker(\varphi)$, entonces $b \in \gamma^{-1}(D_2)$ y

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= \beta_1(\alpha_1^{-1}(0)) \\ &= [b] + \beta_1(\alpha_1^{-1}(0)) \text{ por definición}\end{aligned}$$

De las últimas dos igualdades : $[b] \in \beta_1(\alpha_1^{-1}(0))$, como
$\alpha_1^{-1}(0) = Ker\alpha_1 \subseteq D_1 = \alpha D$, existe $\alpha x \in \alpha_1^{-1}(0)$ tal que $[b] = \beta_1(\alpha x) = [\beta x]$.
Pero $[b] = b + Im(d_0)$, luego $b - \beta x = \beta\gamma(y)$ para algún $y \in E_0$; de donde $b = \beta(x + \gamma y)$.
Se nota que $\alpha^2(x + \gamma y) = \alpha^2 x + \alpha\alpha\gamma y = 0$ por ser $\alpha x \in \alpha_1^{-1}(0)$ y $\alpha\gamma = 0$.
Así existe $x + \gamma y \in \alpha^{-2}(0)$ tal que $b = \beta(x + \gamma y) \in \beta(\alpha^{-2}(0))$. Por lo tanto $Ker(\varphi) \subseteq \beta(\alpha^{-2}(0))$.
Recíprocamente, sea $x \in \beta(\alpha^{-2}(0))$, entonces existe $y \in \alpha^{-2}(0) \subseteq D$ tal que $x = \beta y$. Aplicando $\gamma : \gamma x = \gamma\beta y = 0 \in D_2$, de modo que $x \in \gamma^{-1}(D_2)$.

Aplicando φ:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= [\beta y] + \beta_1(\alpha_1^{-1}(0)) \\ &= \beta_1(\alpha x) + \beta_1(\alpha_1^{-1}(0))\end{aligned} \tag{3.15}$$

Se observa que $\alpha_1(\alpha y) = \alpha^2 y = 0$ puesto que $y \in \alpha^{-2}(0)$, así existe $\alpha y \in \alpha_1^{-1}(0)$ tal que $\beta_1(\alpha y) \in \beta_1(\alpha_1^{-1}(0))$. Con esto (3.15) se convierte en $\varphi(x) = \beta_1(\alpha_1^{-1}(0))$, esto significa que $x \in Ker(\varphi)$; por lo tanto $\beta(\alpha^{-2}(0)) \subseteq Ker(\varphi)$.

Recordando que $D_2 = \alpha^2 D$ de *a*), *b*), *c*) y *d*) se concluye que
$\dfrac{\gamma^{-1}(\alpha^2 D)}{\beta(\alpha^{-2}(0))} \cong E_2 = \dfrac{\gamma_1^{-1}(D_2)}{\beta_1(\alpha_1^{-1}(0))}$

ii) De manera análoga al caso particular $n = 2$, haciendo $D_n = \alpha^n D$ y definiendo
$\varphi : \gamma^{-1}(D_n) \longrightarrow \dfrac{\gamma_{n-1}^{-1}(D_n)}{\beta_{n-1}(\alpha_{n-1}^{-1}(0))}$ por

$$\varphi(y) = \underbrace{[\cdots[}_{n-1} y \underbrace{]\cdots]}_{n-1} + \beta_{n-1}(\alpha_{n-1}^{-1}(0)) \tag{3.16}$$

y verificando que φ es un homomorfismo sobreyectivo con núcleo $\beta(\alpha^{-n}(0))$, se deduce que $\dfrac{\gamma^{-1}(\alpha^n D)}{\beta(\alpha^{-n}(0))} \cong E_n = \dfrac{\gamma_{n-1}^{-1}(D_n)}{\beta_{n-1}(\alpha_{n-1}^{-1}(0))}$

El hecho que d_n es inducido por $\beta\alpha^{-n}\gamma$ se ha visto antes del teorema ■

El isomorfismo demostrado en el teorema anterior en su enunciado es interpretado como la igualdad, $E_n = \gamma^{-1}(\alpha^n D)/\beta(\alpha^{-n}(0))$, para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Proposición 3.1.18 *Sea* $\alpha^n D \xrightarrow{\alpha_n} \alpha^n D \xrightarrow{\beta_n} E_n \xrightarrow{\gamma_n} \alpha^n D \xrightarrow{\alpha_n} \alpha^n D$ *el n-ésimo par derivado de (3.1), entonces :*

i) *la sucesión* $$0 \longrightarrow Coker(\alpha_n) \xrightarrow{\bar{\beta}_n} E_n \xrightarrow{\bar{\gamma}_n} Ker(\alpha_n) \longrightarrow 0 \tag{3.17}$$

es exacta

ii) $Ker(\alpha_n) = \alpha^n D \cap \alpha^{-1}(0)$.

iii) $Coker(\alpha_n) = \dfrac{\alpha^n D}{\alpha^{n+1} D} \cong \dfrac{D}{\alpha D + \alpha^{-n}(0)}$

Prueba:
i) Como $Im(\alpha_n) = Ker(\beta_n)$ se tiene que $Coker(\alpha_n) = \frac{\alpha^n D}{Im(\alpha_n)} = \frac{\alpha^n D}{Ker(\beta_n)} \cong Im(\beta_n)$, luego existe $\overline{\beta}_n$ con $Im(\bar{\beta}_n) = Im(\beta_n)$ tal que $0 \longrightarrow Coker(\alpha_n) \xrightarrow{\bar{\beta}_n} E_n$ es exacta.

El hecho que $Im(\gamma_n) = Ker(\alpha_n)$ implica que $\frac{E_n}{Ker(\gamma_n)} \cong Im(\gamma_n) = Ker(\alpha_n)$, luego existe $\bar{\gamma}_n$ con $Ker(\bar{\gamma}_n) = Ker(\gamma_n)$ tal que $E_n \xrightarrow{\bar{\gamma}_n} Ker(\alpha_n) \longrightarrow 0$ es exacta . Como $Im(\bar{\beta}_n) = Im(\beta_n) = Ker(\gamma_n) = Ker(\bar{\gamma}_n)$, juntando las dos sucesiones exactas anteriores se obtiene que $0 \longrightarrow Coker(\alpha_n) \xrightarrow{\overline{\beta_n}} E_n \xrightarrow{\overline{\gamma_n}} Ker(\alpha_n) \longrightarrow 0$ es exacta.

$ii)$ Se verifica la igualdad $Ker(\alpha_n) = \alpha^n D \cap \alpha^{-1}(0)$.

$$\begin{aligned}
\text{En efecto,}\quad x \in Ker(\alpha_n) &\Leftrightarrow x \in D_n \ \wedge\ \alpha_n x = 0 \\
&\ \text{Por ser } D_n = \alpha^n D,\ \alpha_n = \alpha|_{D_n} \text{ y } D_n \subseteq D \\
&\Leftrightarrow x \in \alpha^n D \ \wedge\ \alpha x = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in \alpha^n D \ \wedge\ x \in \alpha^{-1}(0) \\
&\Leftrightarrow x \in \alpha^n D \cap \alpha^{-1}(0).
\end{aligned}$$

$iii)$ Se probará el isomorfismo $Coker(\alpha_n) = \frac{\alpha^n D}{\alpha^{n+1} D} \cong \frac{D}{\alpha D + \alpha^{-n}(0)}$.

Como $\alpha^{n+1}D = Im(\alpha_n)$, se puede definir $\phi : D \to \dfrac{\alpha^n D}{Im(\alpha_n)}$ por

$\phi(x) = \alpha^n(x) + Im(\alpha_n)$ para todo $x \in D$

$a)$ ϕ está bien definido. Sean $x, y \in D$ tal que $x = y$, entonces $\phi(x) = \phi(y)$.
De $x = y$, se sigue que $\alpha^n(x) = \alpha^n(y)$ y luego
$\alpha^n(x) + Im(\alpha_n) = \alpha^n(y) + Im(\alpha_n)$. Así $\phi(x) = \phi(y)$.

$b)$ ϕ es sobreyectiva.
Dado $z \in \dfrac{\alpha^n D}{Im(\alpha_n)}$ arbitrario, existe $x \in D$ tal que $z = \alpha^n(x) + Im(\alpha_n)$. Es decir $z = \phi(x)$ para algún $x \in D$.

$c)$ Si α^n preserva operaciones de objetos, entonces también ϕ preserva operaciones de objetos.

$d)$ Se cumple que $Ker(\phi) = \alpha D + \alpha^{-n}(0)$.
En efecto:
Sea $z \in Ker(\phi) \Rightarrow z \in D$ y $\phi(z) = 0 = Im(\alpha_n)$. Es decir,
$\alpha^n(z) \in Im(\alpha_n) = \alpha^{n+1}D$. De aquí existe $w \in D$ tal que $\alpha^n(z) = \alpha^{n+1}(w)$, de donde $\alpha^n(z - \alpha w) = 0$. Esto significa que $z - \alpha w \in Ker(\alpha^n) = \alpha^{-n}(0)$. De aquí $z \in \alpha D + Ker(\alpha^n) = \alpha D + \alpha^{-n}(0)$. Así $Ker(\phi) \subseteq \alpha D + \alpha^{-n}(0)$.

Recíprocamente, si $z \in \alpha D + \alpha^{-n}(0)$, entonces existen $w \in D$,
$y \in \alpha^{-n}(0) = Ker(\alpha^n)$ tales que $z = \alpha w + y$. Aplicando α^n:

$$\alpha^n(z) = \alpha^{n+1}w + 0, \qquad \text{pues} \quad \alpha^n y = 0$$

Esto quiere decir que $\alpha^n(z) \in Im(\alpha_n)$, de manera que
$\phi(z) = \alpha^n(z) + Im(\alpha_n) = Im(\alpha_n)$ es el cero en $\dfrac{\alpha^n D}{Im(\alpha_n)}$ y $z \in D$, implica que

$z \in Ker(\phi)$. Así $\alpha D + \alpha^{-n}(0) \subseteq Ker(\phi)$.

Con las dos inclusiones obtenidas queda probada la afirmación d).

De a), b) c) y d) se concluye que $Coker(\alpha_n) = \frac{\alpha^n D}{\alpha^{n+1} D} \cong \frac{D}{\alpha D + \alpha^{-n}(0)}$ ■

Se cierra esta sección con una descripción del término (límite) E_∞ de una sucesión espectral E. El límite es alcanzado a menudo por un proceso de convergencia finita, de modo que E_∞ es hallado mediante la sucesión espectral.

E_∞ envuelve un proceso de límite. La descripción muestra que E_∞ es un tipo de objeto de homología (glorificado) para toda sucesión espectral.

Sea $E_{n,n+1}$ el subobjeto de E_n consistiendo de aquellos elementos de E_n que son ciclos de d_n, así

$$E_{n,n+1} = Z(E_n) = \{x \in E_n \ / \ d_n x = 0\} \tag{3.18}$$

Entonces existe un epimorfismo

$$\sigma = \sigma_{n,n+1} : \qquad E_{n,n+1} = Z(E_n) \twoheadrightarrow \frac{Z(E_n)}{B(E_n)} = H(E_n) = E_{n+1}$$

Sea $E_{n,n+2}$ el subobjeto de $E_{n,n+1}$ consistiendo de los elementos x de $E_{n,n+1}$ tal que $\sigma(x)$ es un ciclo para d_{n+1}, así

$$\begin{aligned} E_{n,n+2} &= \{x \in E_{n,n+1} / \ d_{n+1}(\sigma x) = 0\} \\ &= \{x \in E_{n,n+1} / \ \sigma(x) \in Z(E_{n+1}) = E_{n+1,n+2}\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Como $E_{n,n+1} = Z(E_n) \xrightarrow{\sigma} E_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} E_{n+1}$, para $x \in E_{n,n+2}$ se tiene que $d_n(x) = 0$ y $d_{n+1}(\sigma(x)) = 0$.

Nota .- Se dirá que x es un "ciclo"para d_{n+1} si $d_{n+1}(\sigma(x)) = 0$.
Sea $E_{n,n+3}$ el subobjeto de $E_{n,n+2}$ consistiendo de todos los elementos x de $E_{n,n+2}$ tal que $\sigma^2(x)$ es un ciclo para d_{n+2}, así

$$\begin{aligned} E_{n,n+3} &= \{x \in E_{n,n+2} / \ d_{n+2}(\sigma^2(x)) = 0\} \\ &= \{x \in E_{n,n+2} / \ \sigma^2(x) \in Z(E_{n+2}) = E_{n+2,n+3}\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Como

$$Z(E_{n+1}) \subseteq E_{n+1} \xrightarrow{\sigma} E_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} E_{n+2}$$

para $x \in E_{n,n+3}$ se tiene que $d_n(x) = 0$, $d_{n+1}(\sigma^1(x)) = 0$ y $d_{n+2}(\sigma^2(x)) = 0$. En resumen, de (3.18), (3.19), y (3.20), se puede decir que
$x \in E_{n,n+1}$ si x es un ciclo para d_n;
$x \in E_{n,n+2}$ si x es un ciclo para $d_n, \ d_{n+1}$, y
$x \in E_{n,n+3}$ si x es un ciclo para $d_n, \ d_{n+1}, \ d_{n+2}$.

Continuando el procedimiento se construye el subobjeto $E_{n,\infty}$ formado por todos los elementos que son ciclos para $d_n,\ d_{n+1},\ d_{n+2},\dots$

Es decir, $E_{n,\infty} = \{x \in E_n \ / \ d_{n+r}(\sigma^r(x)) = 0, r \geq 0\}$

De manera similar se obtiene $E_{n+1,\infty} = \{y \in E_{n+1} \ / \ d_{n+1+s}(\sigma^s(x)) = 0, s \geq 0\}$.
Luego existe $\sigma = \sigma_{n,n+1} : E_{n,\infty} \twoheadrightarrow E_{n+1,\infty}$ dado por $\sigma(x) = y$, de manera que se obtiene la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\sigma} E_{n,\infty} \xrightarrow{\sigma} E_{n+1,\infty} \xrightarrow{\sigma} E_{n+2,\infty} \xrightarrow{\sigma} \cdots$$

Por consiguiente, se define $E_\infty = \varinjlim_{n}(E_{n,\infty};\sigma)$.
Hablando de E_∞:

i) Un elemento de E_∞ es representado por un elemento x de algún $E_{n,\infty}$; y x representa a 0 si y sólo si está en la frontera de algún d_r $(r \geq n)$.

Así se puede decir que $x \in E_n,\ x \neq 0$ sobrevive en el infinito si este es un ciclo para $d_r,\ r \geq n$ y no está en ninguna frontera de $d_r(r \geq n)$; por lo tanto E_∞ consiste como conjunto, precisamente de 0 y clases de equivalencia de los elementos que sobreviven en el infinito.

ii) Otra manera de obtener E_∞ es pasando al límite cuando $n \to \infty$ a la sucesión exacta (3.17), de donde se deduce que

$$0 \longrightarrow Coker(\alpha') \xrightarrow{\beta_*} E_\infty \xrightarrow{\gamma_*} Ker(\alpha'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

En este caso $\alpha' : U \to U$ es el límite DIRECTO (colímite) de los morfismos α_n, $\alpha'' : I \to I$ es el límite INVERSO (límite) de los morfismos α_n.

3.2. Objetos Diferenciales Filtrados

Definición 3.2.1 *Sea C un objeto de una categoría abeliana $\mathfrak{A}$. Una familia $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de subobjetos de C ($C^p \subseteq C$ y $C^p \in |\mathfrak{A}|$) es una filtración de C si* $\cdots \subseteq C^{p-1} \subseteq C^p \subseteq \cdots \subseteq C,\ -\infty < p < \infty$.

Los siguientes items indican cómo se construye la categoría de objetos diferenciales filtrados:

i) Si $C \in |(\mathfrak{A}, d)|$, entonces C es un objeto filtrado si existe $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ familia de subobjetos de C tal que

$$\cdots \subseteq C^{p-1} \subseteq C^p \subseteq \cdots \subseteq C,\ -\infty < p < \infty \tag{3.21}$$

En este caso, cada C^p es cerrado bajo la diferencial d; es decir, $dC^p \subseteq C^p,\ d = d_C$.

ii) Se puede definir un morfismo de objetos diferenciales filtrados $f : A \to B$ como el morfismo $f \in (\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (B, d_B))$ tal que el

$$\text{diagrama} \quad \begin{array}{ccccccccc} \cdots & \subseteq & A^{p-1} & \subseteq & A^p & \subseteq & \cdots & \subseteq & A \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & & & \downarrow f \\ \cdots & \subseteq & B^{p-1} & \subseteq & B^p & \subseteq & \cdots & \subseteq & B \end{array}$$

es conmutativo.

iii) El diagrama $\begin{array}{ccc} A^{p-1} & \subseteq & A^p \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ B^{p-1} & \subseteq & B^p \end{array}$ es conmutativo significa que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^{p-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & A^p \arrow[d, "f"] \\ B^{p-1} \arrow[r, hook] & B^p \end{tikzcd}$$ es conmutativo.

iv) Se define la composición de morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$ de objetos diferenciales filtrados como $g \circ f$ en $(\mathfrak{A}, d)((A, d_A), (C, d_C))$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \subseteq & A^{p-1} & \subseteq & A^p & \subseteq & \cdots & \subseteq & A \\ & & \downarrow gf & & \downarrow gf & & & & \downarrow gf \\ \cdots & \subseteq & C^{p-1} & \subseteq & C^p & \subseteq & \cdots & \subseteq & C \end{array}$$

es conmutativo.

v) Así, es posible obtener la categoría $(\mathfrak{A}, d, f)$ cuyos objetos son los objetos diferenciales filtrados, los morfismos entre estos objetos son definidos en *ii)* y la composición de estos morfismos es dado en *iv)*.

Dado un objeto diferencial filtrado C con filtración dada como en (3.21), para la sucesión exacta corta (de objetos diferenciales)

$$0 \longrightarrow C^{p-1} \longrightarrow C^p \longrightarrow C^p/C^{p-1} \longrightarrow 0$$

existe por el teorema 3.1 de [2] el siguiente triángulo exacto de homologías

$$\begin{tikzcd} H(C^{p-1}) \arrow[rr, "\alpha"] & & H(C^p) \arrow[dl, "\beta"] \\ & H(C^p/C^{p-1}) \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd} \tag{3.22}$$

Considerando $D = \{D^p\}$ como el objeto graduado con $D^p = H(C^p)$ y $E = \{E^p\}$ como el objeto graduado con $E^p = H(C^p/C^{p-1})$, se puede incluir (3.22) para todo p en el par exacto

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd} \tag{3.23}$$

que está en la categoría graduada $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$, donde $deg\ \alpha = 1, deg\ \beta = 0$ y $deg\ \gamma = -1$. Este proceso es descrito por el funtor

$$\overline{H} : (\mathfrak{A}, d, f) \to \mathfrak{EC}(\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}) \tag{3.24}$$

Asociando a cada objeto diferencial filtrado C el término $E \in \left|\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}\right|$ extraído del par exacto (3.23), se obtiene el funtor $\mathbb{E} : (\mathfrak{A}, d, f) \to \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$. Con el propósito de factorizar este funtor como $\mathbb{E} = H \circ Gr$, se requiere hallar el funtor Gr, para ello se procede como sigue:
Dada una categoría abeliana $\mathfrak{B}$, es posible formar la categoría $(\mathfrak{B}, f)$ de objetos filtrados B de $\mathfrak{B}$, con filtración dada por

$$\cdots \subseteq B^{p-1} \subseteq B^p \subseteq \cdots \subseteq B, \quad -\infty < p < \infty \tag{3.25}$$

Ahora, construyendo el objeto graduado cuya p-ésima componente es B^p/B^{p-1} con el uso de la filtración de B dada en (3.25), se obtiene el funtor
$Gr : (\mathfrak{B}, f) \to \mathfrak{B}^{\mathbb{Z}}$ que asigna a cada objeto filtrado B el objeto graduado asociado $Gr(B) = \{B^p/B^{p-1}\}$, $p \in \mathbb{Z}$ en $\mathfrak{B}^{\mathbb{Z}}$.

Si $\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}, d)$ y $X \in |(\mathfrak{A}, d, f)|$, entonces $Gr(X) \in |(\mathfrak{A}, d)^{\mathbb{Z}}| = |(\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}, d)|$. Así se puede aplicar el funtor de homología H a $Gr(X)$ para obtener el objeto $H \circ Gr(X)$ en $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$, por lo tanto $\mathbb{E} = H \circ Gr : (\mathfrak{A}, d, f) \to \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$.

Por otro lado, comenzando de (3.21) se puede pasar a la homología y obtener una filtración (inducida) de $M = H(C)$ dada por

$$\cdots \subseteq M^{p-1} \subseteq M^p \subseteq \cdots \subseteq M \tag{3.26}$$

$$\text{donde } M^p \text{ se define como } M^p = Im(H(C^p)) \subseteq H(C) \tag{3.27}$$

Es decir, M^p es la imagen $H(C^p)$ visto en $H(C)$.
Por abuso de notación también se escribe H para el funtor que asocia (3.26) con (3.21). Así, ahora $H : (\mathfrak{A}, d, f) \to (\mathfrak{A}, f)$, de esta manera se obtiene el funtor $Gr \circ H : (\mathfrak{A}, d, f) \to \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$.

Se observa que los funtores H y Gr no conmutan, puesto que en el caso en que C es un complejo de cadena filtrado $H \circ Gr(C) = E_0$ e imponiendo ciertas condiciones razonables sobre la filtración, $Gr \circ H(C) = \{Im(H_q(C^p))/Im(H_q(C^{p-1}))\} = E_\infty$ como se verá. Además estas condiciones razonables aseguran que E_∞ es alcanzado después de un número finito de pasos a través de la sucesión espectral comenzando con E_0.

Es importante hacer análisis de $H(C)$ para determinar el alcance significativo de $H\left(C^p/C^{p-1}\right)$. La sucesión espectral es destinado a producir información sobre el objeto graduado asociado a $H(C)$, cuando $H(C)$ es filtrado por sus subobjetos $Im(H(C^p))$. Así, surge la cuestión de que muchas informaciones pueden estar relacionados a $H(C)$ con respecto a los objetos graduados asociados. Las dos condiciones que se desea de la filtración de $M = H(C)$ dada en (3.26), a fin de que los cocientes M^p/M^{p-1} representen adecuadamente a M, es que se cumplan:

$$i)\ \bigcap_p M^p = 0 \quad y \quad ii)\ \bigcup_p M^p = M \tag{3.28}$$

En el supuesto caso en que no se cumpla $i)$, existirían elementos no nulos de M en cada M^p y así se pierden en $Gr(M)$ al convertirse esos elementos en cero; mientras que si ocurre que $ii)$ no se cumpliera, existirían elementos no nulos en M y no en M^p para todo $p \in \mathbb{Z}$ y así no estarían representados en $Gr(M)$. Si ambas de estas condiciones se cumplen, entonces para cada $x \in M,\ x \neq 0$, existe precisamente un entero p tal que $x \notin M^{(r)}$ para $r < p$ y $x \in M^{(r)}$ para $r \geq p$. Así cada $x \in M$, $x \neq 0$, estará representado por un único elemento homogéneo no nulo en $Gr(M)$ y de hecho, recíprocamente, cada elemento homogéneo no nulo de $Gr(M)$ representa un único elemento no nulo de M. Asimismo es muy importante establecer las condiciones bajo las cuales (3.28) $i)$ y $ii)$ se cumplan. Con esto se aumentan los requerimientos al criterio dado en (3.28), para obtener una buena sucesión espectral E con $Gr \circ H(C) = E_\infty$. Tales requerimientos son satisfechos en el caso en que $\mathfrak{A}$ mismo es una categoría graduada, de manera que (3.21) es un COMPLEJO DE CADENA FILTRADO en $\mathfrak{A}$. Entonces el par exacto asociado

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd} \tag{3.29}$$

donde $D = \{D^{p,q}\},\ D^{p,q} = H_q(C^p);\ E = \{E^{p,q}\},\ E^{p,q} = H_q(C^p/C^{p-1})$ es un par exacto en $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

Proposición 3.2.2 *Sean $\{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ el par exacto (3.29) y $\{D_n, E_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n\}$ el n-ésimo par derivado correspondiente, entonces:*

i) los bigrados de α, β y γ son

$$deg\ \alpha = (1,0),\ deg\ \beta = (0,0)\ y\ deg\ \gamma = (-1,-1). \tag{3.30}$$

ii) los bigrados de α_n, β_n y γ_n son

$$deg\ \alpha_n = (1,0),\ \ deg\ \beta_n = (-n,0)\ \text{y}\ deg\ \gamma_n = (-1,-1). \tag{3.31}$$

iii) $$\textit{El bigrado de } d_n = \beta_n\gamma_n : E_n \to E_n \textit{ es deg } d_n = (-n-1,-1) \tag{3.32}$$

Prueba :
i) Observando (3.29), se sabe que este par exacto se ha obtenido a partir de una filtración $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de un complejo de cadena C tomando la sucesión exacta corta $C^{p-1} \rightarrowtail C^p \twoheadrightarrow C^p/C^{p-1}$ y aplicando la homología. De esta manera se tiene la sucesión exacta larga
$\cdots \to H_q(C^{p-1}) \to H_q(C^p) \to H_q\left(C^p/C^{p-1}\right) \to H_{q-1}(C^{p-1}) \to \cdots$
Esta sucesión en términos de D, E y los morfismos se escribe como:
$\cdots \longrightarrow D^{p-1,q} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q} \xrightarrow{\beta} E^{p,q} \xrightarrow{\gamma} D^{p-1,q-1} \longrightarrow \cdots$.
De donde se deduce que:

$deg\ \alpha = (p,q) - (p-1,q) = (1,0),$

$deg\ \beta = (p,q) - (p,q) = (0,0)$ y

$deg\ \gamma = (p-1,q-1) - (p,q) = (-1,-1).$

ii) Se prueba esta parte por inducción sobre n con los items *a)* y *b)*:

a) Se verifica la afirmación para $k = 1$.
Considerando $\alpha : D^{p-1,q} \to D^{p,q}$ se obtiene que $\alpha_1 = \alpha^2 : \alpha D^{p-1,q} \to \alpha D^{p,q}$, de donde $\alpha_1 : D_1^{p,q} \to D_1^{p+1,q}$ y $deg\ \alpha_1 = (p+1,q) - (p,q) = (1,0)$.
Por el triángulo (3.7) se sabe que $\beta_1(\alpha x) = [\beta x]$ para $x \in D^{p-1,q}$. Usando el diagrama

$$\begin{tikzcd} x \in D^{p-1,q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \alpha x \in D_1^{p,q} \arrow[d, "\beta_1"] & D^{p,q} \arrow[d, "\beta"] \\ \beta x \in E^{p-1,q} \arrow[r, "{[\ ]}"] & {[\beta x] \in E_1^{p-1,q}} & E^{p,q} \end{tikzcd}$$

se deduce que $deg\ \beta_1 = (p-1,q) - (p,q) = (-1,0)$.
Nuevamente, del triángulo (3.7) $\gamma_1[x] = \gamma(x)$ para $x \in E^{p,q}$ y como $\gamma : E^{p,q} \to D^{p-1,q-1}$, se tiene que $\gamma_1 : E_1^{p,q} \to D_1^{p-1,q-1}$ ya que $Im\gamma_1 \subseteq Im\gamma$, luego $deg\ \gamma_1 = (p-1,q-1) - (p,q) = (-1,-1)$.

b) Usando la hipótesis inductiva para $k = n-1$ se verifica la afirmación para $k = n$, como sigue:
Asumiendo que $deg\ \alpha_{n-1} = (1,0)$, de $\alpha_{n-1} : D_{n-1}^{p-1,q} \to D_{n-1}^{p,q}$ aplicando α y considerando $D_n^{p,q} = \alpha D_{n-1}^{p-1,q}$ se obtiene que $\alpha_n = \alpha\alpha_{n-1} : D_n^{p,q} \to D_n^{p+1,q}$, luego $deg\ \alpha_n = (p+1,q) - (p,q) = (1,0)$.
Sea $deg\ \beta_{n-1} = (-(n-1),0)$. Definiendo $\beta_n(\alpha x) = [\beta_{n-1}x]$ para $x \in D_{n-1}^{p-1,q}$ y usando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
x \in D_{n-1}^{p-1,q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \alpha x \in D_n^{p,q} \arrow[d, "\beta_n"] & D_{n-1}^{p,q} \arrow[d, "\beta_{n-1}"] \\
\beta_{n-1}x \in E_{n-1}^{p-n,q} \arrow[r, "{[\,]}"] & {[\beta_{n-1}x] \in E_n^{p-n,q}} & E_{n-1}^{p-n+1,q}
\end{tikzcd}$$

se obtiene que $deg\ \beta_n = (p-n,q) - (p,q) = (-n,0)$.
Sea $deg\ \gamma_{n-1} = (-1,-1)$, luego $\gamma_{n-1} : E_{n-1}^{p,q} \to D_{n-1}^{p-1,q-1}$. Si se define γ_n como $\gamma_n[x] = \gamma_{n-1}(x)$ para $x \in E_{n-1}^{p,q}$, observando que $Im\gamma_n \subseteq Im\gamma_{n-1}$ se tiene $\gamma_n : E_n^{p,q} \to D_n^{p-1,q-1}$, por lo tanto $deg\ \gamma_n = (p-1,q-1) - (p,q) = (-1,-1)$.

iii) De la parte *ii*), se sabe que $deg\ \beta_n = (-n,0)$ y $deg\ \gamma_n = (-1,-1)$. Del hecho que $d_n = \beta_n\gamma_n : E_n^{p,q} \to D_n^{p-1,q-1} \to E_n^{p-n-1,q-1}$ se obtiene que $deg\ d_n = (p-n-1,q-1) - (p,q) = (-n-1,-1)$ ■

En la siguiente sección se usará (3.31) para establecer las condiciones bajo las cuales $E_\infty \cong Gr \circ H(C)$ y se cumpla (3.28) para $M = H(C)$. Mientras que (3.32) se usará en la prueba de Teorema 3.3.2.

3.3. Convergencia Finita para Complejos de Cadena Filtrados

En esta sección se dará las condiciones sobre los complejos de cadena filtrados (3.21) que aseguren simultáneamente que $Gr \circ H(C) \cong E_\infty$, que (3.28) *i*) y *ii*) se cumplan, y que E_∞ se alcanza sólo en un número finito de pasos a través de la sucesión espectral (Teorema 3.3.2).

En lo que se refiere a una mera convergencia finita de la sucesión espectral, se puede proceder para el par exacto bigraduado (3.29). Sin embargo, además se tiene que inferir que E_∞ es realmente un objeto graduado asociado a $H(C)$, adecuadamente filtrado y que las condiciones (3.28) *i*) y *ii*) para la filtración de $M = H(C)$ se cumplen, entonces se tiene que proceder de la filtración (3.21) de C. Primero se considera la convergencia finita de la sucesión espectral.

Definición 3.3.1 *Se dice que $\alpha : D \to D$ en (3.29) es positivamente estacionario si dado $q \in \mathbb{Z}$, existe $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p,q} \xrightarrow{\sim} D^{p+1,q}$ para todo $p \geq p_1$*

(figura 3.1). Se dice que $\alpha : D \to D$ *en (3.29) es negativamente estacionario si dado* $q \in \mathbb{Z}$*, existe* $p_0 = p_0(q) \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\alpha : D^{p,q} \xrightarrow{\sim} D^{p+1,q}$ *para todo* $p < p_0$ *(figura 3.2).* $\alpha : D \to D$ *es estacionario si es positiva y negativamente estacionario.*

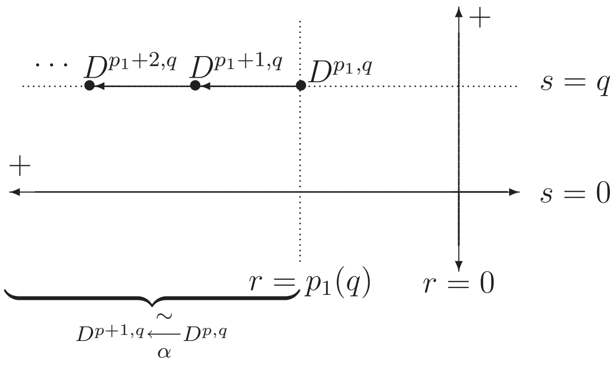

Figura 3.1: $\alpha : D \to D$ es positivamente estacionario

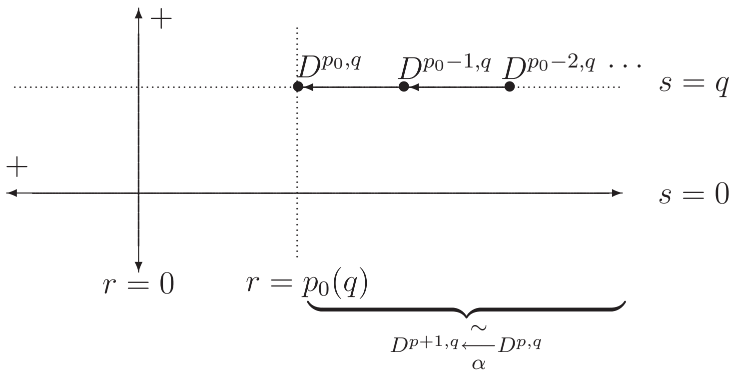

Figura 3.2: $\alpha : D \to D$ es negativamente estacionario

Teorema 3.3.2 *Si* α *es estacionario, entonces la sucesión espectral asociada al par exacto (3.29) converge finitamente; es decir, dado* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*, existe* $r = r(p, q) \in \mathbb{N}$ *tal que* $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q}$.

Prueba.- Para q fijo, se considera la sucesión exacta

$$D^{p-1,q} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q} \xrightarrow{\beta} E^{p,q} \xrightarrow{\gamma} D^{p-1,q-1} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q-1} \tag{3.33}$$

Como α es positivamente estacionario, para q dado existe $p_2 = p_2(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p-1,q} \xrightarrow{\sim} D^{p,q}$ para todo $p - 1 \geq p_2$. Igualmente, para $q - 1$ existe $p_3 = p_3(q - 1) \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p-1,q-1} \xrightarrow{\sim} D^{p,q-1}$ para todo $p - 1 \geq p_3$. De donde, haciendo $p_1 = p_1(q) = \text{máx}\{p_2 + 1, p_3 + 1\}$, resulta que $\alpha : D^{p-1,q} \xrightarrow{\sim} D^{p,q}$ y $\alpha : D^{p-1,q-1} \xrightarrow{\sim} D^{p,q-1}$ para todo $p \geq p_1$. Considerando estos isomorfismos en (3.33),

$$\text{para } q \text{ dado existe } p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z} \text{ tal que } E^{p,q} = 0 \text{ para todo } p \geq p_1 \tag{3.34}$$

Del hecho que α es negativamente estacionario, para q dado existe $p_4 = p_4(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p-1,q} \xrightarrow{\sim} D^{p,q}$ para todo $p - 1 < p_4$. Lo mismo para $q - 1$ existe $p_5 = p_5(q-1) \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p-1,q-1} \xrightarrow{\sim} D^{p,q-1}$ para todo $p - 1 < p_5$. Haciendo $p_0 = p_0(q) = \text{mín}\{p_4 + 1, p_5 + 1\}$, se tiene que $\alpha : D^{p-1,q} \xrightarrow{\sim} D^{p,q}$ y $\alpha : D^{p-1,q-1} \xrightarrow{\sim} D^{p,q-1}$ para todo $p < p_0$. Reemplazando estos isomorfismos en (3.33),

$$\text{para } q \text{ dado existe } p_0 = p_0(q) \in \mathbb{Z} \text{ tal que } E^{p,q} = 0 \text{ para todo } p \leq p_0 \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \text{Por definición } E_1^{p,q} &= H\left(E_0^{p,q}, d_0\right), \text{ como } deg\ d_0 = (-1,-1): \\ &= \frac{Ker\left(E_0^{p,q} \xrightarrow{d_0} E_0^{p-1,q-1}\right)}{Im\left(E_0^{p+1,q+1} \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q}\right)} \end{aligned}$$

Luego, por (3.34) y (3.35) se deduce que para q dado existen p_0 y p_1 tales que $E_1^{p,q} = 0$ para todo $p \geq p_1$ y $p \leq p_0$. En general, por el mismo razonamiento para cualquier $n \in I\!N$, resulta que para q dado existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$E_n^{p,q} = 0 \text{ para todo } p \geq p_1 \tag{3.36}$$

$$E_n^{p,q} = 0 \text{ para todo } p \leq p_0 \tag{3.37}$$

Ahora, para $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fijo, se puede considerar

$$E_r^{p+r+1,q+1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p-r-1,q-1} \tag{3.38}$$

para algún $r \in I\!N$ que se va hallar a partir de (p,q) dado:
En particular, para $n = r$ por (3.36) para $q+1$, existe $\bar{p_1} = \bar{p_1}(q+1) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$E_r^{p+r+1,q+1} = 0 \text{ para todo } p + r + 1 \geq \bar{p_1} \tag{3.39}$$

Por (3.37), para $q - 1$ existe $\bar{p_0} = \bar{p_0}(q-1) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$E_r^{p-r-1,q-1} = 0 \text{ para todo } p - r - 1 \leq \bar{p_0} \tag{3.40}$$

Sea $r = \text{máx}\{\bar{p_1} - p - 1, p - 1 - \bar{p_0}\} = r(p,q)$, de (3.39) y (3.40) $E_r^{p+r+1,q+1} = E_r^{p-r-1,q-1} = 0$. Así de la sucesión (3.38) se obtiene que

$$Im(d_r) = 0 \quad \text{y} \quad Ker(d_r) = E_r^{p,q} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} \text{Por definición } E_{r+1}^{p,q} &= \frac{Ker\left(E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p-r-1,q-1}\right)}{Im\left(E_r^{p+r+1,q+1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q}\right)}, \text{ de (3.41) :} \\ &= E_r^{p,q} \end{aligned}$$

Nuevamente, considerando en lugar de (3.38), la sucesión

$$E_{r+1}^{p+r+2,q+1} \xrightarrow{d_{r+1}} E_{r+1}^{p,q} \xrightarrow{d_{r+1}} E_{r+1}^{p-r-2,q-1}$$

y repitiendo el argumento anterior para p y q fijos se obtiene que $E_{r+2}^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$.
De las igualdades anteriores, se concluye que $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q}$ ■

De lo que se ha obtenido se puede decir que todo elemento no nulo de $E_r^{p,q}$ es un ciclo para cada d_s para todo $s \geq r$, y sólo la identidad aditiva 0 de $E_r^{p,q}$ está en la frontera para algún d_s, donde $s \geq r$.

A continuación, se considera las condiciones sobre (3.21) para que $E_\infty^{p,q} = Im(H_q(C^{(p)}))/Im(H_q(C^{(p-1)}))$ y α sea estacionario, de modo que la sucesión espectral converja finitamente.

Se procede esto, obteniendo de (3.21) un segundo par exacto (3.44). Sea $\bar{D}$ el objeto bigraduado dado por

$$\bar{D}^{p,q} = H_q(C/C^{(p-1)}) \tag{3.42}$$

Por Teorema 2.2.4, la sucesión exacta de complejos de cadena

$$0 \longrightarrow C^p/C^{p-1} \longrightarrow C/C^{p-1} \longrightarrow C/C^p \longrightarrow 0 \tag{3.43}$$

da origen a un par exacto de objetos bigraduados

$$\begin{tikzcd} \bar{D} \arrow[rr, "\bar{\alpha}"] & & \bar{D} \arrow[dl, "\bar{\beta}"] \\ & E \arrow[ul, "\bar{\gamma}"] & \end{tikzcd} \tag{3.44}$$

Proposición 3.3.3 *Sea $\{\bar{D}, E, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$ el par exacto (3.44), entonces los bigrados de $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ y $\bar{\gamma}$ son*

$$deg\ \bar{\alpha} = (1,0),\ deg\ \bar{\beta} = (-1,-1)\ y\ deg\ \bar{\gamma} = (0,0). \tag{3.45}$$

Prueba .- Observando (3.44), se sabe que este par exacto se obtiene usando una filtración $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de un complejo de cadena C, tomando la sucesión exacta corta (3.43) y aplicando la homología. De esta manera se tiene la sucesión exacta larga
$\cdots \to H_q\left(C^p/C^{p-1}\right) \to H_q\left(C/C^{p-1}\right) \to H_q\left(C/C^p\right) \to H_{q-1}\left(C^p/C^{p-1}\right) \to \cdots$
Esta sucesión en términos de $\bar{D}$, E y los morfismos se escribe como:
$\cdots \longrightarrow E^{p,q} \xrightarrow{\bar{\gamma}} \bar{D}^{p,q} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{D}^{p+1,q} \xrightarrow{\bar{\beta}} E^{p,q-1} \longrightarrow \cdots .$
De donde se deduce que:

$deg\ \bar{\alpha} = (p+1,q) - (p,q) = (1,0)$,

$deg\ \bar{\beta} = (p,q-1) - (p+1,q) = (-1,-1)$ y

$deg\ \bar{\gamma} = (p,q) - (p,q) = (0,0)$ ■

Ahora, se da una definición que será aplicado a D, E y $\bar{D}$.

Definición 3.3.4 *Un objeto bigraduado A se dice que es positivamente graduado si, dado $q \in \mathbb{Z}$ existe un $p_0 = p_0(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $A^{p,q} = 0$ para todo $p \leq p_0$ (figura 3.3).*

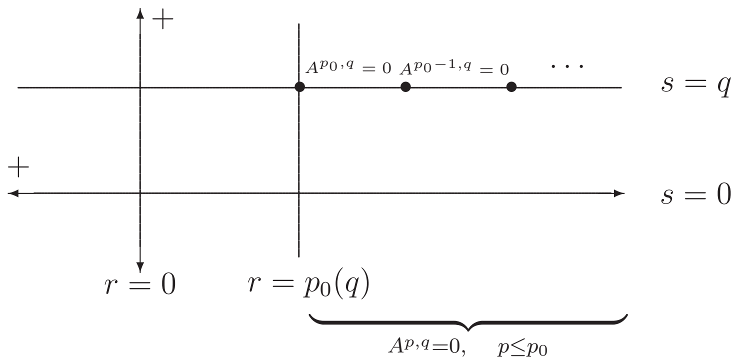

Figura 3.3: A es positivamente graduado

Un objeto bigraduado A se dice que es negativamente graduado si, dado $q \in \mathbb{Z}$ existe un $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $A^{p,q} = 0$ para todo $p \geq p_1$ (figura 3.4).

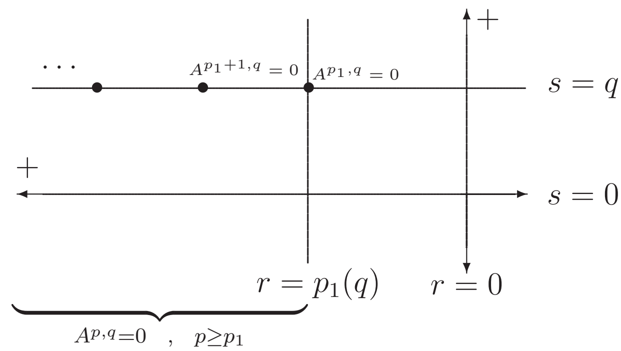

Figura 3.4: A es negativamente graduado

Proposición 3.3.5 *Si D ($\circ \bar{D}$) es positivamente (o negativamente) graduado, entonces α (o $\bar{\alpha}$) es negativamente (o positivamente) estacionario.*

Prueba.- Por hipótesis, D es positivamente graduado, luego dado $q \in \mathbb{Z}$ existe $p_0 = p_0(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $D^{p,q} = 0$ para todo $p \leq p_0$. Así para q dado existe $p_0 - 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p,q} \xrightarrow{\sim} D^{p+1,q}$ para todo $p \leq p_0 - 1$, pues $D^{p_0,q} = D^{p_0-1,q} = D^{p_0-2,q} = \cdots = 0$,

así α es negativamente estacionario.
$\bar{D}$ es negativamente graduado implica que dado $q \in \mathbb{Z}$ existe $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{D}^{p,q} = 0$ para todo $p \geq p_1$. Así para q dado existe $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{\alpha} : \bar{D}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^{p+1,q}$ para todo $p \geq p_1$ porque $\bar{D}^{p_1,q} = \bar{D}^{p_1+1,q} = \bar{D}^{p_1+2,q} = \cdots = 0$, de donde $\bar{\alpha}$ es positivamente estacionario ■

Teorema 3.3.6 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *α es positivamente estacionario.*

ii) *E es negativamente graduado.*

iii) *$\bar{\alpha}$ es positivamente estacionario.*

Prueba:

i) $\Rightarrow$ *ii)* De (3.29) se sabe que la sucesión

$$D^{p-1,q} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q} \xrightarrow{\beta} E^{p,q} \xrightarrow{\gamma} D^{p-1,q-1} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q-1} \tag{3.46}$$

es exacta.
Ahora, como α es positivamente estacionario, para $q \in \mathbb{Z}$ dado existe $r_1 = r_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p-1,q} \xrightarrow{\sim} D^{p,q}$ para todo $p - 1 \geq r_1$. Lo mismo para $q - 1 \in \mathbb{Z}$ existe $r_2 = r_2(q-1) \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p-1,q-1} \xrightarrow{\sim} D^{p,q-1}$ para todo $p - 1 \geq r_2$.
Sea $r_3 = \text{máx}\{r_1, r_2\}$, entonces $\alpha : D^{p-1,q} \xrightarrow{\sim} D^{p,q}$ y $\alpha : D^{p-1,q-1} \xrightarrow{\sim} D^{p,q-1}$ para todo $p - 1 \geq r_3$. De donde, por la exactitud de (3.46) se deduce que para $q \in \mathbb{Z}$ dado, existe $p_1 = p_1(q) = r_3 + 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $E^{p,q} = 0$ para todo $p \geq p_1$, en consecuencia E es negativamente graduado.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* De (3.44) se sabe que la sucesión

$$E^{p,q} \xrightarrow{\bar{\gamma}} \bar{D}^{p,q} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{D}^{p+1,q} \xrightarrow{\bar{\beta}} E^{p,q-1} \tag{3.47}$$

es exacta.
Como E es negativamente graduado se tiene:
Para $q \in \mathbb{Z}$ existe $r_1 = r_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $E^{p,q} = 0$ para todo $p \geq r_1$.
Para $q - 1 \in \mathbb{Z}$ existe $r_2 = r_2(q-1) \in \mathbb{Z}$ tal que $E^{p,q-1} = 0$ para todo $p \geq r_2$.
Sea $p_1 = \text{máx}\{r_1, r_2\}$, entonces $E^{p,q} = E^{p,q-1} = 0$ para todo $p \geq p_1$. Reemplazando estos valores en la sucesión exacta (3.47), se deduce que para $q \in \mathbb{Z}$ dado existe $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{\alpha} : \bar{D}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^{p+1,q}$ para todo $p \geq p_1$, por lo tanto $\bar{\alpha}$ es positivamente estacionario.

$iii) \Rightarrow i)$ Asumiendo que $\bar{\alpha}$ es positivamente estacionario, para $q \in \mathbb{Z}$ dado existe $r_1 = r_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{\alpha} : \bar{D}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^{p+1,q}$ para todo $p \geq r_1$. Lo mismo para $q+1 \in \mathbb{Z}$ existe $r_2 = r_2(q+1) \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{\alpha} : \bar{D}^{p,q+1} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^{p+1,q+1}$ para todo $p \geq r_2$; de modo que $\bar{\alpha} : \bar{D}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^{p+1,q}$ y $\bar{\alpha} : \bar{D}^{p,q+1} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^{p+1,q+1}$ para todo $p \geq r_3 = \text{máx}\{r_1, r_2\}$.

Considerando estos isomorfismos en la siguiente sucesión exacta extraída de (3.44)

$$\bar{D}^{p,q+1} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{D}^{p+1,q+1} \xrightarrow{\bar{\beta}} E^{p,q} \xrightarrow{\bar{\gamma}} \bar{D}^{p,q} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{D}^{p+1,q}$$

se obtiene que para

$$q \in \mathbb{Z} \text{ dado existe } r_3 = r_3(q) \in \mathbb{Z} \text{ tal que } E^{p,q} = 0 \text{ para todo } p \geq r_3 \tag{3.48}$$

De (3.29) se sabe que la sucesión

$$E^{p+1,q+1} \xrightarrow{\gamma} D^{p,q} \xrightarrow{\alpha} D^{p+1,q} \xrightarrow{\beta} E^{p+1,q} \tag{3.49}$$

es exacta.

Por (3.48) para $q+1 \in \mathbb{Z}$ existe $r_4 = r_4(q+1) \in \mathbb{Z}$ tal que $E^{p+1,q+1} = 0$ para todo $p+1 \geq r_4$. También por (3.48) para $q \in \mathbb{Z}$ existe $r_3 = r_3(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $E^{p+1,q} = 0$ para todo $p+1 \geq r_3$.

Sea $p_1 = \text{máx}\{r_3 - 1, r_4 - 1\}$, entonces considerando estos dos últimos resultados en la sucesión exacta (3.49) se deduce que para $q \in \mathbb{Z}$ existe $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha : D^{p,q} \xrightarrow{\sim} D^{p+1,q}$ para todo $p \geq p_1$, por consiguiente α es positivamente estacionario ■

Ahora, ya se cuenta con lo necesario para demostrar el teorema principal que permitirá obtener el primer objetivo del presente trabajo. Para eso se requiere el concepto clave de filtración homológicamente finita para complejos de cadena filtrados.

Definición 3.3.7 *Se dice que la filtración*

$$\cdots \subseteq C^{p-1} \subseteq C^p \subseteq \cdots \subseteq C, \quad -\infty < p < \infty \tag{3.50}$$

de un complejo de cadena C es finita si para cada $q \in \mathbb{Z}$, existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left.\begin{array}{lll} i) & C_q^p = 0 & \textit{para} \quad p \leq p_0 \\ ii) & C_q^p = C_q & \textit{para} \quad p \geq p_1 \end{array}\right\} \tag{3.51}$$

Se dice que la filtración (3.50) de C es HOMOLÓGICAMENTE FINITA *si para cada $q \in \mathbb{Z}$, existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$\left.\begin{array}{lll} i) & H_q(C^p) = 0 & \textit{para} \quad p \leq p_0 \\ ii) & H_q(C^p) = H_q(C) & \textit{para} \quad p \geq p_1 \end{array}\right\} \tag{3.52}$$

Proposición 3.3.8 *Si la filtración del complejo de cadena C es finita, entonces la filtración es homológicamente finita.*

Prueba.- Sea $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ una filtración finita del complejo de cadena C.
Sea $q \in \mathbb{Z}$(arbitrario) para calcular, $H_q(C^p)$, q-ésima homología del subobjeto C^p de C. Entonces para $q \in \mathbb{Z}$ dado se va a probar que existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{array}{lll} i) \quad H_q(C^p) = 0 & \text{para} & p \leq p_0 \\ ii) \quad H_q(C^p) = H_q(C) & \text{para} & p \geq p_1 \end{array}$$

$i)$ Como $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración finita de C, para los enteros $q+1$, q y $q-1 \in \mathbb{Z}$ existen $p_0(q+1)$, $p_0(q)$ y $p_0(q-1) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{array}{lll} C^p_{q+1} = 0 & \text{para} & p \leq p_0(q+1) \\ C^p_q = 0 & \text{para} & p \leq p_0(q) \\ C^p_{q-1} = 0 & \text{para} & p \leq p_0(q-1). \end{array}$$

Haciendo $p_0 = \text{mín}\{p_0(q+1), p_0(q), p_0(q-1)\} \in \mathbb{Z}$ se tiene que $C^p_{q+1} = C^p_q = C^p_{q-1} = 0$ para $p \leq p_0$, de esto se deduce que

$$\begin{aligned} H_q(C^p) &= \frac{Ker\left(C^p_q \longrightarrow C^p_{q-1}\right)}{Im\left(C^p_{q+1} \longrightarrow C^p_q\right)} \\ &= \frac{Ker\left(0 \longrightarrow 0\right)}{Im\left(0 \longrightarrow 0\right)} \\ &= 0 \quad \text{para } p \leq p_0 \end{aligned}$$

$ii)$ Como $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración finita de C, para los enteros $q+1$, q y $q-1 \in \mathbb{Z}$ existen $p_1(q+1)$, $p_1(q)$ y $p_1(q-1) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{array}{lll} C^p_{q+1} = C_{q+1} & \text{para} & p \geq p_1(q+1) \\ C^p_q = C_q & \text{para} & p \geq p_1(q) \\ C^p_{q-1} = C_{q-1} & \text{para} & p \geq p_1(q-1). \end{array}$$

Tomando $p_1 = \text{máx}\{p_1(q+1), p_1(q), p_1(q-1)\} \in \mathbb{Z}$ se tiene que $C^p_{q+1} = C_{q+1}$, $C^p_q = C_q$ y $C^p_{q-1} = C_{q-1}$ para $p \geq p_1$, de donde resulta que

$$\begin{aligned} H_q(C^p) &= \frac{Ker\left(C^p_q \longrightarrow C^p_{q-1}\right)}{Im\left(C^p_{q+1} \longrightarrow C^p_q\right)} \\ &= \frac{Ker\left(C_q \longrightarrow C_{q-1}\right)}{Im\left(C_{q+1} \longrightarrow C_q\right)} \\ &= H_q(C) \quad \text{para } p \geq p_1 \end{aligned}$$

Por Definición 3.3.7 de las partes $i)$ y $ii)$ de (3.52) se deduce que $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración homológicamente finita de C ■

Teorema 3.3.9 *Si una filtración del complejo de cadena C es homológicamente finita, entonces:*

i) La sucesión espectral asociada converge finitamente.

ii) La filtración inducida de la homología $H(C)$ es finita.

iii) $E_\infty \cong Gr \circ H(C)$;
precisamente $E_\infty^{p,q} \cong (Gr \circ H_q(C))_p = Im(H_q(C^p))/Im(H_q(C^{p-1}))$.

Prueba:
i) Es suficiente probar que α es estacionario.
Sea $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ una filtración homológicamente finita del complejo de cadena C.
Luego se cumple (3.52) *i)*, así para cada $q \in \mathbb{Z}$ existe $p_0 = p_0(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $D^{p,q} = H_q(C^p) = 0$ para todo $p \leq p_0$; lo cual significa que el objeto $D = \{D^{p,q}\}$ es positivamente graduado, según Proposición 3.3.5, α es negativamente estacionario.
Por Teorema 2.2.4, para la sucesión exacta corta de complejos de cadena
$C^{p-1} \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C/C^{p-1}$, la siguiente sucesión de homologías es exacta

$$\cdots \to H_q\left(C^{p-1}\right) \to H_q(C) \to H_q\left(C/C^{p-1}\right) \to H_{q-1}\left(C^{p-1}\right) \to H_{q-1}(C) \to \cdots \tag{3.53}$$

Por (3.52) *ii)*, para $q \in \mathbb{Z}$ existe $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $H_q(C^{p-1}) = H_q(C)$ para todo $p \geq p_1 + 1$. Similarmente, para $q-1 \in \mathbb{Z}$ existe $p_2 = p_2(q-1) \in \mathbb{Z}$ tal que $H_{q-1}(C^{p-1}) = H_{q-1}(C)$ para todo $p \geq p_2+1$, luego para $p \geq \bar{p_1} = \text{máx}\{p_1+1, p_2+1\}$, de (3.53) considerando estas igualdades como isomorfismos se obtiene $H_q(C/C^{p-1}) = 0$.
Así, para cada $q \in \mathbb{Z}$ existe $\bar{p_1} \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{D}^{p,q} = H_q\left(C/C^{p-1}\right) = 0$ para todo $p \geq \bar{p_1}$; esto quiere decir que $\bar{D} = \{\bar{D}^{p,q}\}$ es negativamente graduado, según Proposición 3.3.5, $\bar{\alpha}$ es positivamente estacionario; por Teorema 3.3.6 se deduce que α es positivamente estacionario.
Así α estacionario, de acuerdo a Teorema 3.3.2 la sucesión espectral asociada converge finitamente.

ii) Como $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración homológicamente finita del complejo de cadena C, entonces dado $q \in \mathbb{Z}$ existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$H_q(C^p) = 0 \text{ para todo } p \leq p_0 \text{ y } H_q(C^p) = H_q(C) \text{ para todo } p \geq p_1 \tag{3.54}$$

Como $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración de C se obtiene
$\cdots \hookrightarrow C^{p-1} \hookrightarrow C^p \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow C$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.
Aplicando funtor covariante H, para cada q fijo (se conserva el sentido de las flechas):

$$\cdots \to H_q(C^{p-1}) \to H_q(C^p) \to \cdots \to H_q(C) \tag{3.55}$$

De esta sucesión y de (3.54) se obtiene:

$$0 = H_q(C^{p_0}) \longrightarrow H_q(C^{p_0+1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_q(C^p) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_q(C^{p_1}) = H_q(C) \tag{3.56}$$

Ahora, definiendo $D = H(C)$ y $D_q^p = ImH_q(C^p)$, se ve que D_q^p es la imagen de $H_q(C^p)$ en $H_q(C)$. A partir de (3.55) se tiene las inclusiones

$$\cdots \subseteq ImH_q(C^{p-1}) \subseteq ImH_q(C^p) \subseteq \cdots \subseteq H_q(C), \quad -\infty < p < \infty$$

de manera que $\{D^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración de $D = H(C)$, y es tal que $D_q^p = 0$ para todo $p \leq p_0$ y $D_q^p = D_q$ para todo $p \geq p_1$ conforme a (3.56). Por lo tanto, la filtración inducida $\{D^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración finita para la homología $D = H(C)$.

iii) Considerando el n-ésimo par derivado obtenido del par exacto (3.29), se sabe por (3.31) que los bigrados de α_n, β_n y γ_n son $deg\ \alpha_n = (1,0), deg\ \beta_n = (-n,0)$ y $deg\ \gamma_n = (-1,-1)$, luego el n-ésimo par derivado se escribe como

$$D_n^{p+n-1,q} \xrightarrow{\alpha_n} D_n^{p+n,q} \xrightarrow{\beta_n} E_n^{p,q} \xrightarrow{\gamma_n} D_n^{p-1,q-1} \xrightarrow{\alpha_n} D_n^{p,q-1} \tag{3.57}$$

Ahora, para hallar $E_\infty^{p,q}$, se toma $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ fijo; por la parte *i*) ya probada del teorema existe $r = r(p,q) \in I\!N$ tal que

$$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q} \tag{3.58}$$

Por (3.54), para $q \in \mathbb{Z}$ dado existe $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tal que $H_q(C^{p+n}) = H_q(C)$ para $n \geq p_1 - p$ donde p es fijo. Considerando

$$D^{p,q} = H_q(C^p) \xrightarrow{\alpha} H_q(C^{p+1}) \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} H_q(C^{p+n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_q(C^{p+n}) = H_q(C)$$

se ve que $\alpha H_q(C^p) \subseteq H_q(C^{p+1}), \ldots, \alpha^n H_q(C^p) \subseteq H_q(C^{p+n})$.

Como $D_1^{p+1,q} = \alpha D^{p,q}$ y $D_2^{p+2,q} = \alpha D_1^{p+1,q} = \alpha^2 D^{p,q}$, resulta que

$$D_n^{p+n,q} = \alpha^n D^{p,q} = \alpha^n H_q(C^p) = Im(H_q(C^p)) \subseteq H_q(C) \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} Im(\alpha_n) &= \alpha_n\left(D_n^{p+n-1,q}\right), \text{ por (3.57)} \\ &= \alpha\left(\alpha^n D^{p-1,q}\right) \\ &= \alpha^{n+1} H_q\left(C^{p-1}\right) \\ &= Im\left(H_q\left(C^{p-1}\right)\right) \subseteq H_q(C) \end{aligned} \tag{3.60}$$

De $\alpha D^{p-1,q} \subseteq D^{p,q}$ y $\alpha^{n+1} D^{p-1,q} \subseteq \alpha^n D^{p,q}$, se tiene la inclusión $Im(H_q(C^{p-1})) \subseteq Im(H_q(C^p))$.

$$\text{Pero} \qquad \begin{aligned} D_n^{p-1,q-1} = D_n^{(p-1-n)+n,q-1} &= \alpha^n D^{p-n-1,q-1} \\ &= \alpha^n(H_{q-1}(C^{(p-n-1)})) \end{aligned} \tag{3.61}$$

De aquí, por (3.54) para el entero $q-1$ existe $\bar{p_0} = \bar{p_0}(q-1) \in \mathbb{Z}$ tal que $H_{q-1}(C^{p-n-1}) = 0$ para todo $p - n - 1 \leq \bar{p_0}$; es decir, $H_{q-1}(C^{p-n-1}) = 0$ para todo

$n \geq p - 1 - \bar{p_0}$, luego por (3.61) $D_n^{p-1,q-1} = 0$ para todo $n \geq p - 1 - \bar{p_0}$.
Para calcular $E_n^{p,q}$, sea $n \in \mathbb{Z}$ (suficientemente grande); es decir, tal que $n \geq \text{máx}\{r, p_1 - p, p - 1 - \bar{p_0}\}$, de manera que $D_n^{p-1,q-1} = 0$. Reemplazando este valor en (3.57), por la exactitud de (3.57), β_n es sobreyectiva, de donde

$$
\begin{aligned}
E_n^{p,q} \cong Coker(\alpha_n) &= \frac{D_n^{p+n,q}}{Im(\alpha_n)}, \quad \text{de (3.59) y (3.60):} \\
&= \frac{Im(H_q(C^p))}{Im(H_q(C^{p-1}))}, \quad \text{por definición:} \\
&= (Gr \circ H_q(C))_p \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

De (3.62) y (3.58) se deduce que

$$E_\infty^{p,q} \cong (Gr \circ H_q(C))_p$$

Por lo tanto, $E_\infty = \{E_\infty^{p,q}\} \cong Gr \circ H(C)$ ■

En el caso en que las conclusiones del Teorema 3.3.9 se cumplen, la sucesión espectral converge finitamente al objeto graduado asociado a $H(C)$, filtrado convenientemente. Esto se abrevia diciendo que la sucesión espectral converge finitamente a $H(C)$, o simplemente por el símbolo $E_1^{p,q} \Rightarrow H(C)$.

***Lema* 3.3.10** *Sean $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ y $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ sucesiones exactas cortas de Λ-módulos. Suponga que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "\mu"'] \arrow[d, "\alpha'"] & A \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[d, "\alpha''"] \\
B' \arrow[r, tail, "\mu'"'] & B \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"'] & B''
\end{tikzcd}
$$

Si α' y α'' son isomorfismos, entonces α es un isomorfismo.

Prueba.- Un morfismo de módulos es un isomorfismo si es inyectivo (su núcleo es trivial) y sobreyectivo. Así se probará este lema con las dos afirmaciones siguientes:

Se afirma que $Ker(\alpha) = \{0\}$. Es decir α es inyectivo.
En efecto, $a \in Ker(\alpha)$, entonces $0 = \varepsilon'\alpha a = \alpha''\varepsilon a$. Por hipótesis α'' es isomorfismo (inyectivo), implica que $\varepsilon a = 0$. Así $a \in Ker\ \varepsilon = Im\ \mu$, luego existe $a' \in A'$ con $a = \mu a'$. Entonces $0 = \alpha a = \alpha\mu a' = \mu'\alpha' a'$. Como $\mu'\alpha'$ es inyectivo por ser α' isomorfismo (inyectivo), se sigue que $a' = 0$. De aquí $a = \mu a' = 0$.

Se afirma que α es sobreyectivo.
Sea $b \in B$; se tiene que probar que $b = \alpha a$ para algún $a \in A$.
En efecto, puesto que α'' es isomorfismo (sobreyectivo) existe $a'' \in A''$ tal que

$\alpha''a'' = \varepsilon' b$. Como ε es sobreyectivo, existe $\bar{a} \in A$ con $\varepsilon\bar{a} = a''$.
Pero $\alpha''a'' = \alpha''\varepsilon\bar{a} = \varepsilon'\alpha\bar{a}$, de modo que $\varepsilon'(b - \alpha\bar{a}) = \alpha''a'' - \alpha''a'' = 0$, luego $b - \alpha\bar{a} \in Ker(\varepsilon') = Im(\mu')$ por la exactitud en B de la sucesión inferior. Así existe $b' \in B'$ con $b - \alpha\bar{a} = \mu' b'$.
Puesto que α' es isomorfismo (sobreyectivo), existe $a' \in A'$ con $\alpha' a' = b'$, de modo que

$$\begin{aligned} b &= \alpha\bar{a} + \mu' b' \\ &= \alpha\bar{a} + \mu'\alpha' a' \\ &= \alpha\bar{a} + \alpha\mu a', \quad \text{por conmutatividad del diagrama} \\ &= \alpha(\bar{a} + \mu a'). \end{aligned}$$

Haciendo $a = \mu a' + \bar{a}$, concluye que $b = \alpha a$ para algún $a \in A$ ■

Si α', α'' son epimorfismos, entonces α es un epimorfismo. Si α', α'' son monomorfismos, entonces α es un monomorfismo. Las pruebas de las dos afirmaciones es inmediata del lema anterior.

Proposición 3.3.11 *Sean* $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ *y* $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ *sucesiones exactas cortas en alguna categoría abeliana* $\mathfrak{A}$. *Suponga que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "\mu"'] \arrow[d, "\alpha'"] & A \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[d, "\alpha''"] \\ B' \arrow[r, tail, "\mu'"'] & B \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"'] & B'' \end{tikzcd}$$

Si α' *y* α'' *son isomorfismos, entonces* α *es un isomorfismo.*

Prueba.- Se probará con las dos afirmaciones siguientes:

i) α es monic (ver diagrama inferior izquierdo).
Sea $\beta : C \longrightarrow A$ tal que $\alpha\beta = 0$. Aplicando ε' por la izquierda y usando la conmutatividad del segundo cuadrilátero : $\alpha''\varepsilon\beta = \varepsilon'\alpha\beta = 0$. Pero α'' es monic por ser un isomorfismo, luego $\varepsilon\beta = 0$. Además $\varepsilon\mu = 0$ por ser $\mu = ker(\varepsilon)$, luego se sabe que existe $\gamma \in \mathfrak{A}(C, A')$ tal que $\beta = \mu\gamma$. Aplicando α y usando la conmutatividad del primer cuadrilátero $0 = \alpha\beta = \alpha\mu\gamma = (\mu'\alpha')\gamma$.
Como $\mu'\alpha'$ es monic, resulta que $\gamma = 0$, de donde $\beta = \mu 0 = 0$. Así, por Proposición 1.7.36 α es monic.

ii) α es epic (ver diagrama inferior derecho).
Sea $\nu : B \longrightarrow D$ tal que $\nu\alpha = 0$. Aplicando μ por la derecha y usando la conmutatividad del primer cuadrilátero : $\nu\mu'\alpha' = \nu\alpha\mu = 0$. Ahora como α' es epic por ser un isomorfismo, se tiene $\nu\mu' = 0$. Por otro lado $\varepsilon'\mu' = 0$ por ser $\varepsilon' = coker(\mu')$, luego se sabe que existe $\gamma \in \mathfrak{A}(B'', D)$ tal que $\nu = \gamma\varepsilon'$. Aplicando α por la derecha y usando la conmutatividad del segundo cuadrilátero $0 = \nu\alpha = \gamma\varepsilon'\alpha = \gamma(\alpha''\varepsilon)$.

De donde $\gamma = 0$ por ser $\alpha''\varepsilon$ epic, de manera que $\nu = 0\varepsilon' = 0$. Así, por Proposición 1.7.36 α es epic.
De $i)$ y $ii)$ se concluye que α es un isomorfismo ■

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, dotted, "\gamma"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
A' \arrow[rr, tail, "\mu"'] \arrow[d, "\alpha'"] & & A \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[d, "\alpha''"] \\
B' \arrow[rr, tail, "\mu'"'] & & B \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"'] & B''
\end{tikzcd}$$

α **es monic.**

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "\mu"'] \arrow[d, "\alpha'"] & A \arrow[rr, two heads, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\alpha"] & & A'' \arrow[d, "\alpha''"] \\
B' \arrow[r, tail, "\mu'"'] & B \arrow[rr, two heads, "\varepsilon'"'] \arrow[dr, "\nu"'] & & B'' \arrow[dl, dotted, "\gamma"] \\
& & D &
\end{tikzcd}$$

α **es epic.**

Definición 3.3.12 *Sea C un complejo de cadena filtrado. A la sucesión espectral E que se obtiene del par exacto (3.29) se dice que es sucesión espectral asociada al complejo filtrado C.*

Teorema 3.3.13 *Sean C y C' complejos de cadena filtrados con filtraciones homológicamente finitas. Si $\varphi : C \to C'$ es un morfismo tal que $\varphi_* : E_\infty \to E'_\infty$ es un isomorfismo, entonces $\varphi_* : H(C) \to H(C')$ es un isomorfismo.*

Prueba.- Sean $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$, $\{C'^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ filtraciones homológicamente finitas de C y C', respectivamente. Por Teorema 3.3.9, las sucesiones espectrales E y E' asociadas a los complejos filtrados C y C' convergen finitamente, así existen los términos límites E_∞ y E'_∞ de las sucesiones espectrales E y E', donde $E_\infty \cong (Gr\circ H(C))$ y $E'_\infty \cong (Gr\circ H(C'))$
Como $\varphi : C \to C'$ es un morfismo de complejos filtrados, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook] & C^{p-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & C^p \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \arrow[r, hook] & C \arrow[d, "\varphi"] \\
\cdots \arrow[r, hook] & C'^{p-1} \arrow[r, hook] & C'^p \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & C'
\end{tikzcd} \tag{3.63}$$

Aplicando el funtor de homología $H : ({}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}, f) \to (\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}, f)$, donde ${}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}} = \big(\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}, d\big)$ y $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana en que están definidos C y C', se conservan los sentidos de las fechas y la conmutatividad del diagrama (3.63) porque H es un funtor covariante, luego para $q \in \mathbb{Z}$ dado, se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(C^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_q(C^p) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & \cdots \arrow[r] & H_q(C) \arrow[d, "\varphi_*"] \\
\cdots \arrow[r] & H_q(C'^{(p-1)}) \arrow[r] & H_q(C'^p) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & H_q(C')
\end{tikzcd} \tag{3.64}$$

Como $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración homológicamente finita de C, para $q \in \mathbb{Z}$ existen $s_0 = s_0(q)$ y $s_1 = s_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que $H_q(C^p) = 0$ para todo $p \leq s_0$ y $H_q(C^p) = H_q(C)$ para todo $p \geq s_1$, luego se tiene

$$0 = H_q\left(C^{s_0}\right) \to H_q\left(C^{s_0+1}\right) \to \cdots \to H_q\left(C^{s_1-1}\right) \to H_q\left(C^{s_1}\right) = H_q(C) \tag{3.65}$$

El hecho que $\{C'^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración homológicamente finita de C' implica que, para $q \in \mathbb{Z}$ también existen $r_0 = r_0(q)$ y $r_1 = r_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que $H_q(C'^p) = 0$ para todo $p \leq r_0$ y $H_q(C^p) = H_q(C)$ para todo $p \geq r_1$, esto permite obtener

$$0 = H_q\left(C'^{r_0}\right) \to H_q\left(C'^{r_0+1}\right) \to \cdots \to H_q\left(C'^{r_1-1}\right) \to H_q\left(C'^{r_1}\right) = H_q(C') \tag{3.66}$$

Sea $p_0 = \text{mín}\{s_0, r_0\}$ y $p_1 = \text{máx}\{s_1, r_1\}$, así para $q \in \mathbb{Z}$ dado existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que, por (3.65) y (3.66) el diagrama (3.64), se convierte en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 = H_q(C^{p_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_q(C^{p_0+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & \cdots \arrow[r] & H_q(C^{p_1-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_q(C^{p_1}) = H_q(C) \arrow[d, "\varphi_*"] \\
0 = H_q(C'^{(p_0)}) \arrow[r] & H_q(C'^{(p_0+1)}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & H_q(C'^{(p_1-1)}) \arrow[r] & H_q(C'^{p_1}) = H_q(C')
\end{tikzcd} \tag{3.67}$$

Recuerde que $E_\infty^{p,q} = (Gr \circ H_q(C))_p = \dfrac{ImH_q(C^p)}{ImH_q(C^{p-1})}$; para formar este tipo de cocientes, de las filas del diagrama (3.67) se obtienen dos cadenas de inclusiones

$$0 = ImH_q(C^{p_0}) \subseteq ImH_q(C^{p_0+1}) \subseteq \cdots \subseteq ImH_q(C^{p_1-1}) \subseteq ImH_q(C^{p_1}) = H_q(C);$$
$$0 = ImH_q(C'^{p_0}) \subseteq ImH_q(C'^{p_0+1}) \subseteq \cdots \subseteq ImH_q(C'^{(p_1-1)}) \subseteq ImH_q(C'^{(p_1)}) = H_q(C');$$

Las flechas verticales del diagrama (3.67) pueden ser vistos como $\varphi_* : ImH_q(C^p) \longrightarrow ImH_q(C'^p)$, luego con el principio de inducción matemática para $p \geq p_0$ se prueba que

$$\varphi_* : ImH_q(C^p) \xrightarrow{\sim} ImH_q(C'^p) \tag{3.68}$$

a) Para $n = p_0$ la afirmación (3.68) es cierta por el diagrama (3.67).

b) Asumiendo que la afirmación (3.68) es cierta para $n = p \geq p_0$, se verificará que (3.68) es cierta para $n = p + 1$.

En efecto, se construye el diagrama (3.69) con filas sucesiones exactas cortas, con la primera flecha vertical isomorfismo por hipótesis inductiva y con la última flecha vertical, $\varphi_* : E_\infty^{p+1,q} = (Gr\circ H_q(C))_{p+1} \xrightarrow{\sim} (Gr\circ H_q(C'))_{p+1} = E'^{(p+1,q)}_\infty$, un isomorfismo por hipótesis del teorema:

$$\begin{tikzcd}
ImH_q(C^p) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\varphi_*"', "\cong"] & ImH_q(C^{p+1}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi_*"] & (Gr \circ H_q(C))_{p+1} \arrow[d, "\varphi_*"', "\cong"] \\
ImH_q(C'^p) \arrow[r, tail] & ImH_q(C'^{(p+1)}) \arrow[r, two heads] & (Gr \circ H_q(C'))_{p+1}
\end{tikzcd} \tag{3.69}$$

Por Proposición 3.3.11, se deduce que $\varphi_* : ImH_q(C^{p+1}) \xrightarrow{\sim} ImH_q(C'^{p+1})$, esto completa la prueba inductiva de (3.68). En particular (3.68) vale para $p = p_1$, de las dos cadenas de inclusiones se obtiene que $\varphi_* : H_q(C) \xrightarrow{\sim} H_q(C')$ para todo q, por lo tanto $\varphi_* : H(C) \to H(C')$ es un isomorfismo de homologías ■

3.4. Convergencia Finita para Complejos de Cocadena Filtrados

Para describir los funtores derivados derechos de un funtor compuesto a través de la llamada sucesión espectral de Grothendieck se requiere estudiar su convergencia, este problema se resuelve con el dual de Teorema 3.3.9. Así, en esta sección se va a desarrollar nociones y resultados de complejos de cocadena filtrados, para finalmente probar el resultado dual (Teorema 3.4.8).

Definición 3.4.1 *Se dice que la filtración*

$$\cdots \subseteq C^{p+1} \subseteq C^p \subseteq \cdots \subseteq C, \quad -\infty < p < \infty \tag{3.70}$$

de un complejo de cocadena C es finita si para cada $q \in \mathbb{Z}$, existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{array}{lll} i) & C^p_q = 0 & \textit{para} \quad p \geq p_0 \\ ii) & C^p_q = C_q & \textit{para} \quad p \leq p_1 \end{array}$$

Se dice que la filtración (3.70) del complejo de cocadena C es cohomológicamente finita si para cada $q \in \mathbb{Z}$, existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{array}{lll} iii) & H^q(C^p) = 0 & \textit{para} \quad p \geq p_0 \\ iv) & H^q(C^p) = H^q(C) & \textit{para} \quad p \leq p_1 \end{array}$$

Proposición 3.4.2 *Si la filtración del complejo de cocadena C es finita, entonces la filtración es cohomológicamente finita.*

Prueba.- Sea $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ una filtración finita del complejo de cocadena C. Dado $q \in \mathbb{Z}$ se prueba que existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{array}{lll} iii) & H^q(C^p) = 0 & \text{para} \quad p \geq p_0 \\ iv) & H^q(C^p) = H^q(C) & \text{para} \quad p \leq p_1 \end{array}$$

En efecto:
iii) Como $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración finita de C, por Definición 3.4.1 para los tres enteros $q-1$, q y $q+1$ existen $p_0(q-1)$, $p_0(q)$ y $p_0(q+1) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{array}{lll} C^p_{q-1} = 0 & \text{para} & p \geq p_0(q-1) \\ C^p_q = 0 & \text{para} & p \geq p_0(q) \\ C^p_{q+1} = 0 & \text{para} & p \geq p_0(q+1). \end{array}$$

Sea $p_0 = p_0(q) = \text{máx}\{p_0(q-1), p_0(q), p_0(q+1)\} \in \mathbb{Z}$, luego se tiene $C^p_{q-1} = C^p_q = C^p_{q+1} = 0$ para $p \geq p_0$, con estos valores se obtiene que

$$\begin{aligned} H^q\left(C^p\right) &= \frac{Ker\left(C^p_q \longrightarrow C^p_{q+1}\right)}{Im\left(C^p_{q-1} \longrightarrow C^p_q\right)} \\ &= \frac{Ker\left(0 \longrightarrow 0\right)}{Im\left(0 \longrightarrow 0\right)} \\ &= 0 \quad \text{para } p \geq p_0. \end{aligned}$$

iv) Nuevamente, usando el hecho que $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración finita de C, por Definición 3.4.1 para $q-1$, q y $q+1 \in \mathbb{Z}$ se sabe que existen $p_1(q-1)$, $p_1(q)$ y $p_1(q+1) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{array}{lll} C^p_{q-1} = C_{q-1} & \text{para} & p \leq p_1(q-1) \\ C^p_q = C_q & \text{para} & p \leq p_1(q) \\ C^p_{q+1} = C_{q+1} & \text{para} & p \leq p_1(q+1). \end{array}$$

Sea $p_1 = p_1(q) = \text{mín}\{p_1(q-1), p_1(q), p_1(q+1)\} \in \mathbb{Z}$, luego se tiene $C^p_{q-1} = C_{q-1}$, $C^p_q = C_q$ y $C^p_{q+1} = C_{q+1}$ para $p \leq p_1$, con esta información se halla

$$\begin{aligned} H^q\left(C^p\right) &= \frac{Ker\left(C^p_q \longrightarrow C^p_{q+1}\right)}{Im\left(C^p_{q-1} \longrightarrow C^p_q\right)} \\ &= \frac{Ker\left(C_q \longrightarrow C_{q+1}\right)}{Im\left(C_{q-1} \longrightarrow C_q\right)} \\ &= H^q\left(C\right) \quad \text{para } p \leq p_1 \end{aligned}$$

Así, según Definición 3.4.1 se deduce que $\{C^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración cohomológicamente finita de C ■

Proposición 3.4.3 *Si la situación de módulos y homomorfismos de $\Lambda -$ módulos es la siguiente:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "u'"] & B \arrow[r, "v'"] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.71}$$

con filas exactas y cuadrado conmutativo. Entonces:

i) *Existe un homomorfismo de $\Lambda -$ módulos $f'' : A'' \to B''$ tal que el diagrama es conmutativo.*

ii) Si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

Prueba:

$i)$ Existencia de f'' satisfaciendo las condiciones requeridas. Se prueba esta parte con los siguientes items $a)$, $b)$ y $c)$.
Sea $a'' \in A''$. Por ser v un epimorfismo, $a'' = v(a)$ para algún $a \in A$. Entonces

$$\text{se define } f'' : A'' \to B'' \text{ por } f''(a'') = v'(f(a)) \text{ si } a'' = v(a). \tag{3.72}$$

$a)$ f'' está bien definida como aplicación.
Sean $a'', b'' \in A''$ tales que $a'' = b''$, entonces $f''(a'') = f''(b'')$.
En efecto; siendo v un epimorfismo, para $a'' \in A''$ existe $a \in A$ tal que $a'' = v(a)$, de manera similar para $b'' \in A''$ existe $b \in A$ tal que $b'' = v(b)$. De modo que $a'' = b''$ implica que $a - b \in Ker(v) = Im(u)$.

De donde $a - b = u(a')$ para algún $a' \in A'$. Ahora, aplicando f:

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= (fu)(a') \\ &= (u'f')(a') \text{ por conmutatividad del diagrama.} \end{aligned}$$

Aplicando v' obtenemos que

$$\begin{aligned} v'(f(a)) - v'(f(b)) &= v'[(u'f')(a')] \\ &= (v' \circ u')(f'(a')) \\ &= 0(f'(a')) \quad \text{porque } v' \circ u' = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así obtenemos $v'(f(a)) = v'(f(b))$ para $a'' = v(a)$ y $b'' = v(b)$.
Por lo tanto, $f''(a'') = f''(b'')$ por definición de f''.

$b)$ $f'' : A'' \to B''$ es un homomorfismo de $\Lambda -$ módulos .
Sean c y $d \in A''$ y $\lambda \in \Lambda$, entonces:

1) $f''(c + d) = f''(c) + f''(d)$.
2) $f''(\lambda c) = \lambda f''(c)$.

En efecto, por definición de f'' y del hecho que v' y f son homomorfismos de $\Lambda -$ módulos :
1)

$$\begin{aligned} f''(c + d) &= v'f(a + b), \text{ si } c = v(a) \text{ y } d = v(b);\ a, b \in A \\ &= v'\,(f(a) + f(b)) \\ &= v'[f(a)] + v'[f(b)] \\ &= v'f(a) + v'f(b) \\ &= f''(c) + f''(d). \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} f''(\lambda c) &= v'f(\lambda a), \text{ si } c = v(a) \text{ para algún } a \in A \\ &= v'(\lambda f(a)) \\ &= \lambda v'[f(a)] \\ &= \lambda [v'(f(a))] \\ &= \lambda f''(c). \end{aligned}$$

De 1) y 2), se deduce que f'' es un homomorfismo de $\Lambda -$ módulos .

c) f'' hace que el diagrama (3.71) sea conmutativo.
Se cumple la igualdad $f''v = v'f$.
En efecto; sea $a \in A$ (arbitrario), entonces como $v(a) \in A''$. Haciendo $a'' = v(a)$, de la definición de f'' dada en (3.72) se tiene que $f''(a'') = v'f(a)$. De donde se obtiene que $f''v(a) = v'f(a)$ para todo $a \in A$.
Así el segundo cuadrado de (3.71) también es conmutativo, esto completa la prueba de la conmutatividad del diagrama.

ii) Se prueba con las partes 3) y 4) que f'' es un isomorfismo.

3) Sea $b'' \in B''$, entonces existe $a'' \in A''$ tal que $b'' = f''(a'')$ (3.73)

En efecto:
Por ser v' un epimorfismo, para $b'' \in B''$ existe $b \in B$ tal que $b'' = v'(b)$. Como f es un isomorfismo (epimorfismo), para $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

$$\text{De estas dos deducciones:} \quad \begin{aligned} b'' &= v'f(a) \\ &= f''v(a), \text{ por conmutatividad} \\ &= f''(a'') \text{ para } a'' = v(a) \in A''. \end{aligned}$$

Así queda verificada la afirmación (3.73), por lo tanto f'' es un epimorfismo.

4) Sea $a'' \in Ker(f'')$, luego $a'' \in A''$ y $f''(a'') = 0$. De donde $v'(f(a)) = f''(a'') = 0$ para algún $a \in A$ tal que $a'' = v(a)$, así $f(a) \in Ker(v') = Im(u')$. Esto significa que $f(a) = u'(b')$ para algún $b' \in B'$. Siendo f' un isomorfismo existe $a' \in A'$ tal que $b' = f'(a')$.

$$\text{Luego se tiene} \quad \begin{aligned} f(a) &= u'(f'(a')), \text{ por conmutatividad:} \\ &= f(u(a')). \end{aligned}$$

Como f es inyectivo, se sigue que $a = u(a')$, y así $a'' = v(a) = (vu)(a') = 0$ pues $vu = 0$. Por lo tanto f'' es un monomorfismo ■

Proposición 3.4.4 *Si la situación de objetos y morfismos de una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ es la siguiente:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "u'"] & B \arrow[r, "v'"] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.74}$$

con filas exactas y cuadrado conmutativo. Entonces:

i) *Existe un morfismo $f'' : A'' \to B''$ tal que el diagrama es conmutativo.*

ii) *Si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.*

Prueba :

i) Por Definición 1.7.29 observando el diagrama se tiene que $v = coker(u)$, como $vu = 0$ y $gu = 0$ para algún g, existe h tal que $g = hv$.
Se ve en el diagrama que se puede tomar $g = v'f$ ya que cumple la condición $gu = (v'f)\,u = v'\,(fu) = v'\,(u'f') = (v'u')\,f' = 0$ por la exactitud de la segunda fila del diagrama.
Tomando $f'' = h$ se sabe que existe el morfismo $f'' : A'' \to B''$ tal que el diagrama (3.74) es conmutativo, pues $f''v = g = v'f$.

ii) a) f'' es monic.
Suponga que f'' no es monic, luego existe $\beta \in \mathfrak{A}\,(C, A'')$ no nulo tal que $f''\beta = 0$.
Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, dotted, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\beta"] & \\
Ker(f'') \arrow[r, tail, "ker(f'')"] & A'' \arrow[r, "f''"] & B''
\end{tikzcd}$$

β se descompone como $\beta = ker(f'')\gamma$.
Por otro lado, se puede considerar $\lambda \in \mathfrak{A}\,(C, A)$ tal que $f\lambda = 0$.
Ahora, aplicando v' por la izquierda se tiene $v'f\lambda = 0$; por la conmutatividad del segundo cuadrilátero del diagrama (3.74), $f''\,(v\lambda) = 0$.
Como $v\lambda, \beta \in \mathfrak{A}\,(C, A'')$, se puede tomar $v\lambda = ker(f'')\gamma = \beta \neq 0$. De aquí se deduce que existe $\lambda \neq 0$ tal que $f\lambda = 0$, esto indica que f no es monic. Esta contradicción a la hipótesis proviene de haber supuesto que f'' no es monic, por lo tanto se concluye que f'' es monic.

ii) b) f'' es epic.
Sea $\alpha \in \mathfrak{A}\,(B'', D)$ tal que $\alpha f'' = 0$.
Aplicando v por la derecha y usando la conmutatividad del segundo cuadrilátero del diagrama (3.74) : $\alpha\,(v'f) = \alpha f''v = 0$. Ahora como f es epic por ser un isomorfismo y v' es epic por hipótesis, $v'f$ es epic; luego $\alpha = 0$. Así, por Proposición 1.7.36 f'' es epic.
Por Corolario 1.7.28, de *ii) a)* y *ii) b)*, f'' es un isomorfismo ■

Proposición 3.4.5 *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana. Si $f \in \mathfrak{A}\,(A, B)$, entonces $Coim(f) \cong Im(f)$, donde $Coim(f)$ y $Im(f) \in |\mathfrak{A}|$.*

Prueba.- Como la categoría $\mathfrak{A}$ es abeliana y $f \in \mathfrak{A}\,(A, B)$, existen en $\mathfrak{A}$ los siguientes morfismos $ker(f)$, $coker(f)$, $im(f) = ker\,(coker(f))$ y $coim(f) = coker\,(ker(f))$.
Se sabe que $coker(f)f = 0$. Por propiedad universal de $ker\,(coker(f))$ existe

$$f' : A \to Ker\,(Coker(f)) \text{ tal que } f = ker\,(coker(f))\,f' \tag{3.75}$$

$$\begin{tikzcd} Ker\,(Coker(f)) \arrow[r, tail, "ker(coker(f))"] & B \arrow[r, two heads, "coker(f)"] & Coker(f) \\ & A \arrow[u, "f"] \arrow[ul, dotted, "\exists f'"] & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, del hecho que $fker(f) = 0$, por (3.75) se tiene
$ker\,(coker(f))\, f'ker(f) = 0$, pero $ker\,(coker(f))$ es monic, luego $f'ker(f) = 0$.
Como $Coim(f) = Coker\,(Ker(f))$ y $Im(f) = Ker\,(Coker(f))$, según la propiedad universal de $coker\,(ker(f))$, existe un morfismo $h : Coim(f) \to Im(f)$ en $\mathfrak{A}$ tal que

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, tail, "ker(f)"] & A \arrow[r, two heads, "coker(ker(f))"] \arrow[d, "f'"'] & Coker\,(Ker(f)) \arrow[dl, dotted, "\exists h"] \\ & Ker\,(Coker(f)) & \end{tikzcd}$$

Así, se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, "ker(f)"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'=coim(f)"'] & B \arrow[r, "coker(f)"] & Coker(f) \\ & Coim(f) \arrow[r, "h"] & Im(f) \arrow[u, "\imath'=im(f)"'] & \end{tikzcd}$$

donde f queda factorizado en la siguiente manera

$$\begin{aligned} f &= \imath' \circ h \circ \pi', \text{ por asociatividad:} \\ &= \imath' \circ (h \circ \pi') \qquad (3.76) \\ &= (\imath' \circ h) \circ \pi' \qquad (3.77) \end{aligned}$$

Usando la condición $iii)$ de Definición 1.7.18, el morfismo f en la categoría abeliana $\mathfrak{A}$, se escribe como composición de un epic seguido de un monic, así de (3.76) por ser $\imath'$ monic se debe tener $h \circ \pi'$ epic. Por Proposición 1.3.8, h es epic. Observando (3.77), por ser π' epic se debe tener $\imath' \circ h$ monic, por el mismo argumento anterior se deduce que h es monic.
Como h es monic y epic, por Corolario 1.7.28 h es un isomorfismo; por lo tanto $Coim(f) \cong Im(f)$ ■

Proposición 3.4.6 *Sea* C : $\quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{f} C_n \xrightarrow{g} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$
un complejo de cadena sobre una categoría abeliana $\mathfrak{A}$*, entonces:*

i) $Ker(f^{op}) \cong [Coker(f)]^{op}$.

ii) $Im\,(g^{op}) \cong [Im(g)]^{op}$.

Prueba.- Proposición 1.7.20 indica que $\mathfrak{A}^{op}$ es categoría abeliana, luego están definidos $ker(f^{op})$ y $im\,(g^{op})$ para los morfismos f^{op} y g^{op} de $\mathfrak{A}^{op}$.

i) Se comienza verificando que $[coker(f)]^{op}$ satisface las tres siguientes condiciones de núcleo para f^{op}:
a) $[coker(f)]^{op}$ es monic
b) $f^{op}\,[coker(f)]^{op} = 0$
c) $f^{op}g^{op} = 0$ implica que existe h^{op} tal que $g^{op} = [coker(f)]^{op}\,h^{op}$.
En efecto:
a) $coker(f)$ es epic, luego por Proposición 1.3.3 $[coker(f)]^{op}$ es monic.
b) $f^{op}\,[coker(f)]^{op} = 0$, ya que por propiedad $coker(f)f = 0$.
c) $f^{op}g^{op} = 0$ implica que $gf = 0$ en $\mathfrak{A}$. Usando la propiedad de conúcleo de f, existe un morfismo h en $\mathfrak{A}$ tal que $g = h \circ coker(f)$; pasando a la categoría opuesta, se ve que existe h^{op} tal que $g^{op} = [coker(f)]^{op}\,h^{op}$.
En resumen, el siguiente diagrama muestra dos núcleos para f^{op} en $\mathfrak{A}^{op}$.

$$\begin{tikzcd}
Ker\,(f^{op}) \arrow[r, tail, "ker(f^{op})"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[d, dotted, "\exists\omega"'] & C_n \arrow[r, "f^{op}"] & C_{n+1} \\
{[Coker(f)]^{op}} \arrow[ur, tail, "{[coker(f)]^{op}}"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Considerando que $[coker(f)]^{op}$ es núcleo de f^{op}, existe
$\omega \in \mathfrak{A}^{op}\left(Ker\,(f^{op}), [Coker(f)]^{op}\right)$ tal que $ker\,(f^{op}) = [coker(f)]^{op}\,\omega$.
Por otro lado, usando que $ker\,(f^{op})$ es núcleo de f^{op}, se garantiza la existencia de ω^{-1} (inversa de ω), luego ω es un isomorfismo; por lo tanto
$Ker(f^{op}) \cong [Coker(f)]^{op}$.

ii) Como $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, $\mathfrak{A}^{op}$ es también una categoría abeliana, de donde

$$\begin{aligned}
[im(g)]^{op} &= [ker\,(coker(g))]^{op} \\
&= coker\,(ker(g^{op})) \\
&= coim(g^{op})
\end{aligned}$$

La igualdad de estos morfismos implica que sus codominios son también iguales.

$$\text{Es decir, } [Im(g)]^{op} = Coim(g^{op}) \tag{3.78}$$

Según proposición 3.4.5, para la categoría abeliana $\mathfrak{A}^{op}$ y $g^{op} \in \mathfrak{A}^{op}\,(C_{n-1}, C_n)$, se tiene que

$$Coim\,(g^{op}) \cong Im\,(g^{op}) \tag{3.79}$$

Usando la propiedad de simetría del isomorfismo de (3.78) y (3.79) se concluye que $Im\,(g^{op}) \cong [Im(g)]^{op}$ ■

***Lema* 3.4.7** *Sea C un complejo de cadena sobre una categoría abeliana $\mathfrak{A}$, entonces $H\,(C^{op}) \cong [H(C)]^{op}$, donde C^{op} es el opuesto del complejo C.*

Prueba .- Escribiendo el complejo de cadena C sobre $\mathfrak{A}$ como

$$C: \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{f} C_n \xrightarrow{g} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{3.80}$$

se obtiene su opuesto

$$C^{op}: \qquad \cdots \longleftarrow C_{n+1} \xleftarrow{f^{op}} C_n \xleftarrow{g^{op}} C_{n-1} \longleftarrow \cdots \tag{3.81}$$

Sea $n \in \mathbb{Z}$ (arbitrario), entonces al observar (3.80) se ve que $H_n(C) = \dfrac{Kerg}{Imf}$, $H_n(C) \subseteq \dfrac{C_n}{Imf} = Cokerf$ y $Img \cong \dfrac{C_n}{Kerg} \cong \dfrac{Cokerf}{H_n(C)}$; de donde se obtiene la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow Cokerf \longrightarrow Img \longrightarrow 0 \tag{3.82}$$

Por otro lado, como $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op} = 0$, de (3.81) se obtiene en $\mathfrak{A}^{op}$ la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Im(g^{op}) \longrightarrow Ker(f^{op}) \longrightarrow H^n\left(C^{op}\right) \longrightarrow 0 \tag{3.83}$$

Por Proposición 1.7.31, de (3.82) se obtiene la siguiente sucesión exacta corta en $\mathfrak{A}^{op}$

$$0 \longrightarrow (Img)^{op} \longrightarrow (Cokerf)^{op} \longrightarrow [H_n(C)]^{op} \longrightarrow 0 \tag{3.84}$$

Por Proposición 3.4.6 se tiene que $Im(g^{op}) \cong (Img)^{op}$ y $Ker(f^{op}) \cong (Cokerf)^{op}$; así, de (3.83) y (3.84) según Proposición 3.4.4 se deduce que $H^n\left(C^{op}\right) \cong [H_n(C)]^{op}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$; por consiguiente $H\left(C^{op}\right) \cong [H(C)]^{op}$ ■

Teorema 3.4.8 *Si una filtración del complejo de cocadena C es cohomológicamente finita, entonces:*

i) *La sucesión espectral asociada converge finitamente.*

ii) *La filtración inducida de la cohomología $H(C)$ es finita.*

iii) $E_\infty \cong Gr \circ H(C)$;
precisamente $E_\infty^{p,q} \cong (Gr \circ H^q(C))_p = Im(H^q(C^p))/Im(H^q(C^{p+1}))$

Prueba.- Se realiza la prueba utilizando el principio de dualización. El complejo de cocadena C sobre alguna categoría abeliana $\mathfrak{A}$ tiene filtración cohomológicamante finita si y sólo si C^{op} tiene filtración homológicamente finita sobre $\mathfrak{A}^{op}$, luego por Teorema 3.3.9 en la categoría $\mathfrak{A}^{op}$ se cumple que:

i) La sucesión espectral E^{op} asociada al complejo filtrado C^{op} converge finitamente.

ii) La filtración inducida de la homología $H(C^{op})$ es finita.

iii) $(E^{op})^{p,q}_{\infty} \cong (Gr \circ H_q(C^{op}))_p$.

Usando Lema 3.4.7 en las partes *ii)*, *iii)*; y viendo estos resultados sobre $\mathfrak{A}$:

i) La sucesión espectral E asociado al complejo filtrado C converge finitamente.

ii) La filtración inducida de la cohomología $H(C)$ es finita.

iii) Considerando

$$\begin{aligned}(E^{p,q}_{\infty})^{op} \cong (E^{op})^{p,q}_{\infty} &\cong (Gr \circ H_q(C^{op}))_p \\ &\cong (Gr \circ [H^q(C)]^{op})_p \cong \left[(Gr \circ H^q(C))_p\right]^{op},\end{aligned}$$

por dualidad se concluye que $E^{p,q}_{\infty} \cong (Gr \circ H^q(C))_p$ ■

3.5. La Sucesión Espectral de Grothendieck

Se ha establecido que el segundo objetivo de la tesis es describir los funtores derivados de un funtor compuesto a través de la sucesión espectral de Grothendieck, por lo que se plantea resolver este problema de descripción en esta sección enunciando y demostrando el teorema de sucesión espectral de Grothendieck que relaciona a los funtores derivados derechos.

Complejos Dobles y Filtraciones de sus Complejos Totales

La existencia de la sucesión espectral de Grothendieck y el problema de convergencia finita correspondiente están relacionados con el estudio de complejos dobles y filtraciones de los complejos totales respectivos. El propósito de esta parte será obtener resultados que permitan hallar los dos primeros términos de la sucesión espectral que se construye a partir de un complejo doble con alguna filtración de su complejo total, y conseguir la convergencia finita en el caso en que el complejo doble sea positivo.

Sea $(B, \partial', \partial'')$ un complejo doble sobre alguna categoría abeliana $\mathfrak{A}$ como el dado en Definición 1.6.3, luego se tiene el siguiente diagrama anticonmutativo en $\mathfrak{A}$

$$\begin{tikzcd} B_{r,s} \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "\partial''"] & B_{r-1,s} \arrow[d, "\partial''"] \\ B_{r,s-1} \arrow[r, "\partial'"] & B_{r-1,s-1} \end{tikzcd} \tag{3.85}$$

$\partial''\partial' + \partial'\partial'' = 0$ para cada $r, s \in \mathbb{Z}$; será conveniente reemplazar (3.85) por un diagrama conmutativo (3.87) y viceversa; esto se logra haciendo

$$d' = \partial', \; d'' = (-1)^r \partial'' \quad \text{sobre} \quad B_{r,s} \tag{3.86}$$

Se sabe que el complejo total de B se define como $Tot\,B = \{(Tot\,B)_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ donde $(Tot\,B)_n = \bigoplus_{r+s=n} B_{r,s}$. Es conveniente subrayar que $Tot\,B$ es un complejo de cadena si la diferencial en $Tot\,B$ es dado por $\partial = \partial' + \partial'' \; : \; Tot\,B \to Tot\,B$.
Si se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd} B_{r,s} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d''"] & B_{r-1,s} \arrow[d, "d''"] \\ B_{r,s-1} \arrow[r, "d'"] & B_{r-1,s-1} \end{tikzcd} \tag{3.87}$$

se refieren a d', d'' como diferenciales horizontal y vertical en B, respectivamente.

También es posible referirse a ∂' y ∂'' como diferenciales horizontal y vertical.

El complejo $Tot\,B$ puede ahora filtrarse en los siguientes dos modos de manera natural:

$${}_1F^p(Tot\,B)_n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ r \le p}} B_{r,s} \tag{3.88}$$

$${}_2F^p(Tot\,B)_n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ s \le p}} B_{r,s} \tag{3.89}$$

Se referirá a la filtración (3.88) de la figura 3.5 como la PRIMERA FILTRACIÓN de $Tot\,B$, y la filtración (3.89) de la figura 3.6 como la SEGUNDA FILTRACIÓN de $Tot\,B$. Con estas filtraciones se obtienen dos sucesiones espectrales denotadas por ${}_1E$ y ${}_2E$.

Las pruebas de Proposiciones 3.5.1 y 3.5.3 se pueden encontrar en [4].

Proposición 3.5.1 *Para la primera sucesión espectral asociada a la filtración (3.88) se tiene*

$${}_1E_0^{p,q} = H_{q-p}(B_{p,*}; \partial''), \qquad {}_1E_1^{p,q} = H_p(H_{q-p}(B, \partial''), \partial') \tag{3.90}$$

Para la segunda sucesión espectral asociada a la filtración (3.89) se tiene

$${}_2E_0^{p,q} = H_{q-p}(B_{*,p}; \partial'), \qquad {}_2E_1^{p,q} = H_p(H_{q-p}(B, \partial'), \partial'') \tag{3.91}$$

Definición 3.5.2 *Se dice que el complejo doble B (figura 3.7) es positivo si existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$B_{r,s} = 0 \quad si \quad r < n_0 \quad o \quad s < n_0 \tag{3.92}$$

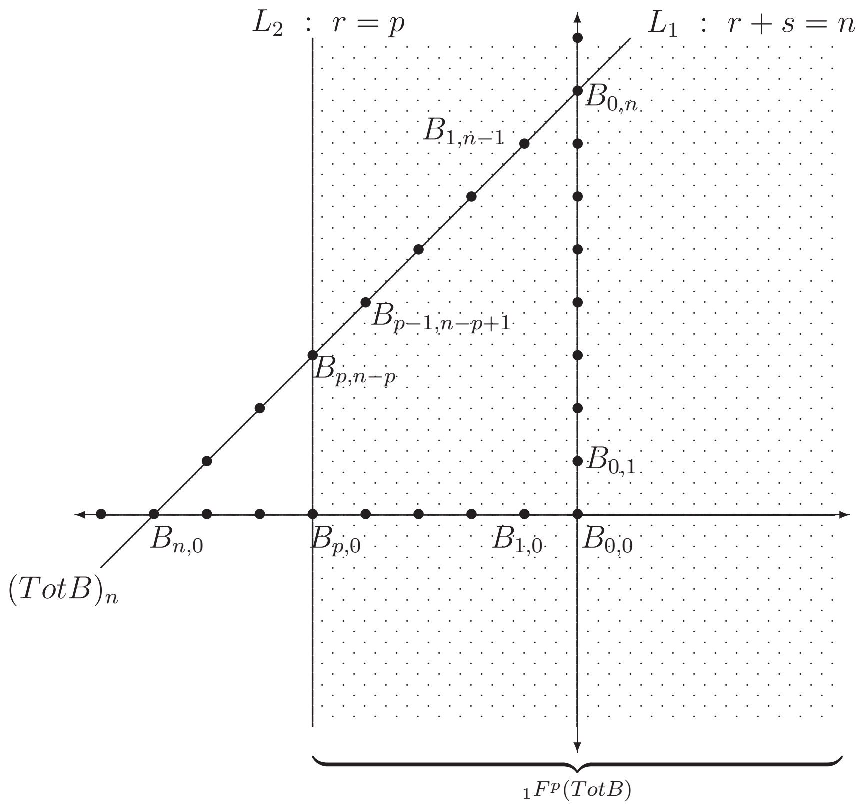

Figura 3.5: ${}_1F^p(Tot\,B)_n$ se puede ilustrar como suma directa de todos los puntos de la recta L_1 que están sobre la recta vertical $L_2\ : r = p$ y a su derecha.

Proposición 3.5.3 *Si B es un complejo de cadena doble positivo, entonces ambas primera y segunda sucesión espectral ${}_1E$ y ${}_2E$, de las cuales dos primeros términos se dan en (3.90) y (3.91), respectivamente; convergen finitamente al correspondiente objeto graduado asociado a la homología $\{H_n(Tot\,B)\}$, la cual es adecuada y finitamente filtrada.*

La técnica de construcción de la sucesión espectral de Grothendieck relacionado a los funtores derivados derechos, en el presente trabajo, requiere de definiciones y proposiciones duales a definiciones y proposiciones dadas hasta aquí en la sección, por lo que se establecerá en seguida definiciones y resultados sobre complejos dobles de cocadena.

Sea $B = \{B_{r,s}\}$ un complejo doble de cocadena sobre alguna categoría abeliana $\mathfrak{A}$ definida como en Definición 1.6.7; es decir, para todo $r, s \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama de

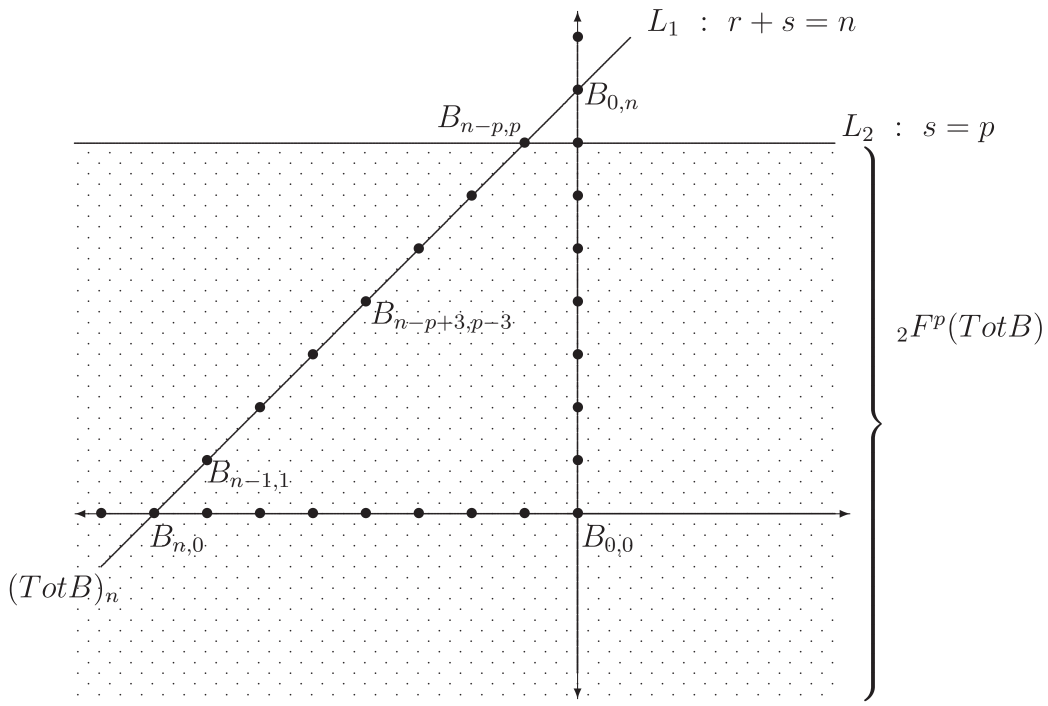

Figura 3.6: ${}_2F^p(Tot\,B)_n$ se puede ilustrar como suma directa de todos los puntos de la recta L_1 que están sobre la recta horizontal $L_2 \ : \ s=p$ y debajo de ella.

objetos y morfismos en $\mathfrak{A}$

$$\begin{tikzcd} B_{r+1,s+1} & B_{r,s+1} \arrow[l, "\partial'"'] \\ B_{r+1,s} \arrow[u, "\partial''"] & B_{r,s} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[u, "\partial''"'] \end{tikzcd} \tag{3.93}$$

es tal que $\partial'\partial' = 0$, $\partial''\partial'' = 0$ y $\partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$.
En este caso, el complejo $Tot\,B$ puede ser filtrado en los dos modos siguientes:

$${}_1F^p(Tot\,B)_n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ r\geq p}} B_{r,s} \tag{3.94}$$

$${}_2F^p(Tot\,B)_n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ s\geq p}} B_{r,s} \tag{3.95}$$

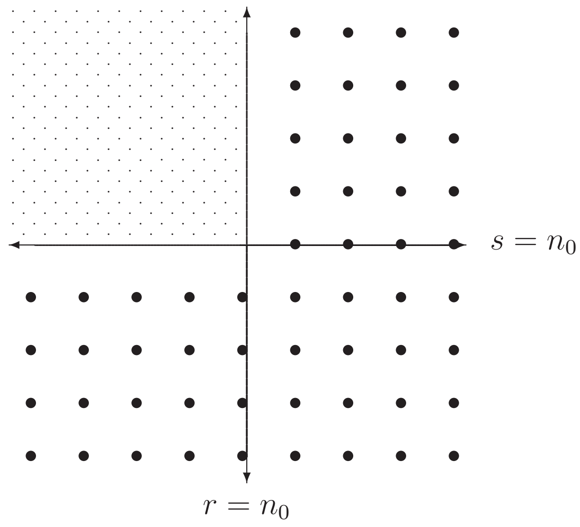

Figura 3.7: Cada punto marcado de la región no sombreada es $B_{r,s} = 0$

Con estas filtraciones (figura 3.8 y figura 3.9) se obtienen dos sucesiones espectrales denotadas por ${}_1E$ y ${}_2E$, para cada una de estas sucesiones se va a calcular los dos primeros términos en la siguiente:

Proposición 3.5.4 *Para la primera sucesión espectral ${}_1E$ asociada a la filtración de $Tot\,B$ definida por (3.94) se tiene*

$$ {}_1E_0^{p,q} = H^{q-p}(B_{p,*}; \partial''), \qquad {}_1E_1^{p,q} = H^p(H^{q-p}(B, \partial''), \partial') \tag{3.96}$$

Para la segunda sucesión espectral ${}_2E$ asociada a la filtración de $Tot\,B$ definida por (3.95) se tiene

$$ {}_2E_0^{p,q} = H^{q-p}(B_{*,p}; \partial'), \qquad {}_2E_1^{p,q} = H^p(H^{q-p}(B, \partial'), \partial'') \tag{3.97}$$

Prueba:
i) Para probar (3.96), se escribe F^p en lugar de ${}_1F^p$. En la figura 3.10 se observa que

$$F^p(Tot\,B)_q / F^{p+1}(Tot\,B)_q = B_{p,q-p} \tag{3.98}$$

donde $F^p(Tot\,B)_q = \bigoplus\limits_{\substack{r+s=q \\ r \geq p}} B_{r,s}$

de manera que $0 \longrightarrow F^{p+1}(Tot\,B) \xrightarrow{i} F^p(Tot\,B) \xrightarrow{\pi} \dfrac{F^p(Tot\,B)}{F^{p+1}(Tot\,B)} \longrightarrow 0$

es una sucesión exacta corta de complejos de cocadena, luego según Teorema 2.2.4 existe un homomorfismo de conexión $\gamma : H(F^p(Tot\,B)/F^{p+1}(Tot\,B)) \to H(F^{p+1}(Tot\,B))$

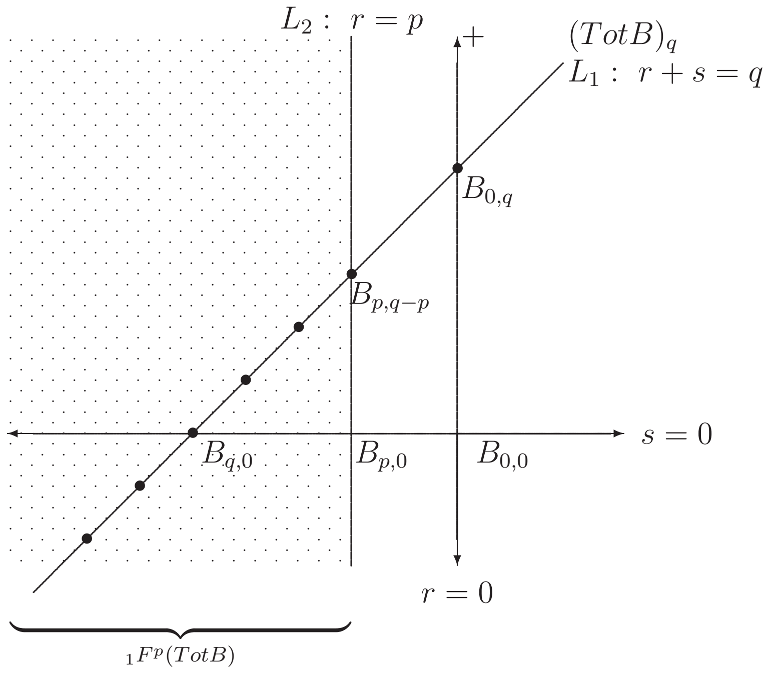

Figura 3.8: Primera filtración

tal que el siguiente triángulo de cohomologías es exacto

$$\begin{tikzcd} H(F^{p+1}(Tot\,B)) \arrow[rr, "\alpha"] & & H(F^p(Tot\,B)) \arrow[dl, "\beta"] \\ & H(F^p(Tot\,B)/F^{p+1}(Tot\,B)) \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

Haciendo ${}_1D = \{{}_1D^{p,q}\}$, ${}_1D^{p,q} = H^q\left(F^p(Tot\,B)\right)$;
${}_1E = \{{}_1E^{p,q}\}$, ${}_1E^{p,q} = H^q\left(F^p(Tot\,B)/F^{p+1}(Tot\,B)\right)$
se obtiene el par exacto $\nabla = \{{}_1D_0, {}_1E_0, \alpha, \beta, \gamma\}$ en $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ donde $\mathfrak{A}$ es alguna categoría abeliana.
Por el dual de Proposición 3.2.2, los bigrados de α, β, γ son $deg\ \alpha = (-1, 0)$, $deg\ \beta = (0, 0)$ y $deg\ \gamma = (1, 1)$.
El par exacto ∇ origina el $n-$ésimo par derivado, $\nabla_n = \{{}_1D_n, {}_1E_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n\}$, el cual a su vez es exacto para cada n; de donde se obtiene la sucesión espectral ${}_1E = \{({}_1E_n, d_n)\}$ para $n = 0, 1, \ldots,$ en $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$

$$\text{donde } d_n = \beta_n\gamma_n,\ {}_1E_{n+1} = H({}_1E_n, d_n) \text{ es cohomología y } {}_1E_n = \{{}_1E_n^{p,q}\} \tag{3.99}$$

Ahora, se calcularán los primeros dos términos de la sucesión espectral ${}_1E_0^{p,q}$, ${}_1E_1^{p,q}$ en los items $a)$ y $b)$ siguientes:

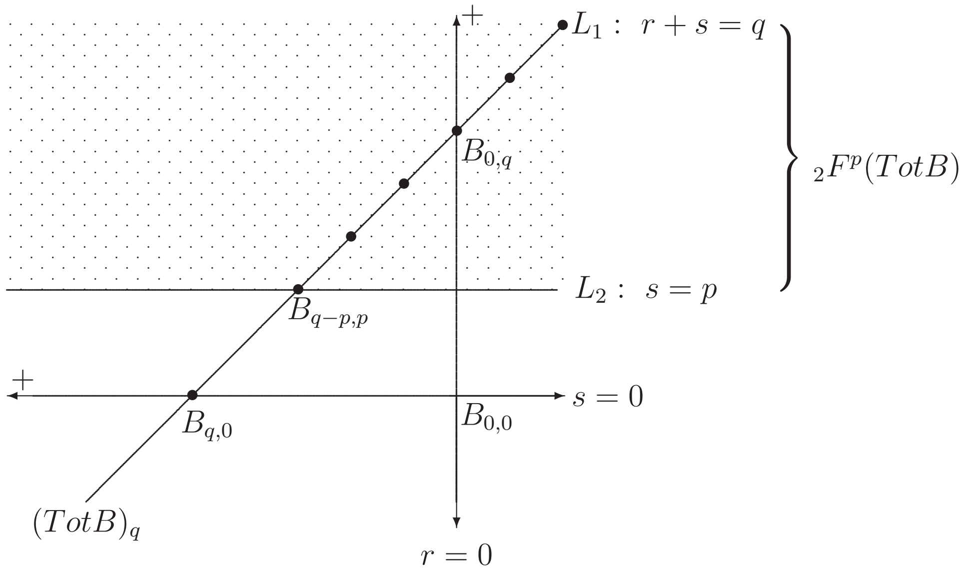

Figura 3.9: Segunda filtración

a)
$$\begin{aligned} {}_1E_0^{p,q} &= {}_1E^{p,q} \\ &= H^q\left(F^p(Tot\,B)/F^{p+1}(Tot\,B)\right) \qquad (3.100) \\ &= \frac{Ker\,(F^p(Tot\,B)_q/F^{p+1}(Tot\,B)_q \to F^p(Tot\,B)_{q+1}/F^{p+1}(Tot\,B)_{q+1})}{Im\,(F^p(Tot\,B)_{q-1}/F^{p+1}(Tot\,B)_{q-1} \to F^p(Tot\,B)_q/F^{p+1}(Tot\,B)_q)} \\ &= \frac{Ker\left(B_{p,q-p} \xrightarrow{\partial''_{p,q-p}} B_{p,q-p+1}\right)}{Im\left(B_{p,q-p-1} \xrightarrow{\partial''_{p,q-p-1}} B_{p,q-p}\right)}, \text{ por (3.98)} \\ &= H^{q-p}\left(B_{p,*};\partial''\right) \qquad (3.101) \end{aligned}$$

Por lo tanto ${}_1E_0^{p,q} = H^{q-p}\left(B_{p,*};\partial''\right)$.

b) Se calculará
$${}_1E_1^{p,q} = H^p\left({}_1E_0^{*,q};d_0\right) \qquad (3.102)$$

Se necesita hallar $d_0 :_1 E_0^{p,q} \to_1 E_0^{p+1,q+1}$.
Como ${}_1E_1 = H({}_1E_0,d_0)$ es cohomología y $d_0 = \beta_0\gamma_0 = \beta\gamma$ se observa que $d_0 \ : \ {}_1E_0^{p,q} \xrightarrow{\gamma} D_0^{p+1,q+1} \xrightarrow{\beta} {}_1E_0^{p+1,q+1}$ para todo par $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, luego según la definición de E y D en ∇, considerando para abreviar $F^p = F^p(TotB)$, se tiene que

$$d_0 : H^q\left(F^p/F^{p+1}\right) \xrightarrow{\gamma} H^{q+1}\left(F^{p+1}(TotB)\right) \xrightarrow{\beta} H^{q+1}\left(F^{p+1}/F^{p+2}\right)$$

El procedimiento que se tomará para hallar d_0 consistirá en ver cómo se aplica γ

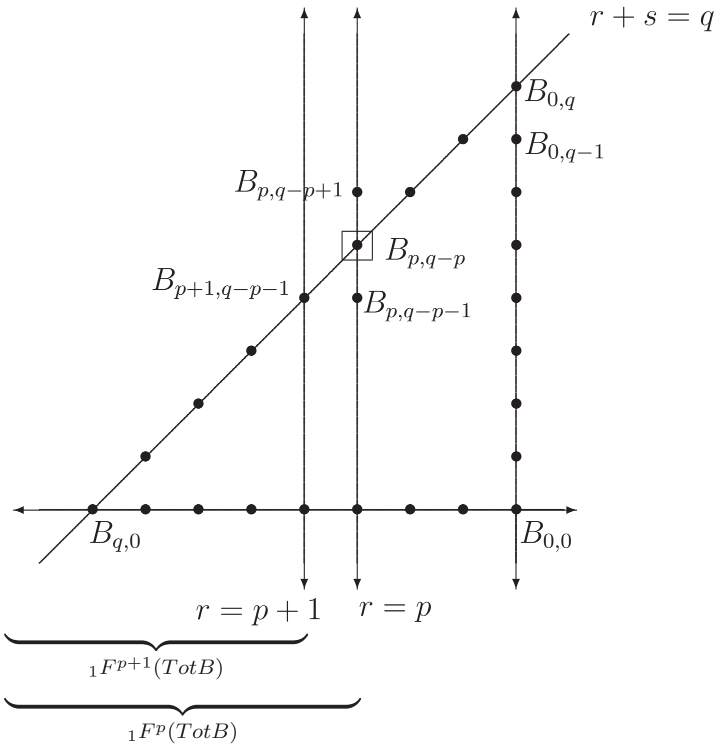

Figura 3.10: ${}_1F^p(TotB)_q/\ F^{p+1}(TotB)_q = B_{p,q-p}$

sobre un elemento dado y lo mismo se hará para β para que el codominio de $\beta\gamma$ sea $H^{q+1}\left(F^{p+1}/F^{p+2}\right)$.

$$\begin{aligned}\text{Sea}\quad x \in H^q\left(F^p(TotB)/F^{p+1}(TotB)\right) &= H^{q-p}\left(B_{p,*};\partial''\right), \text{por (3.100) y (3.101)}\\ &= \frac{Ker\left(\partial''_{p,q-p}\right)}{Im\left(\partial''_{p,q-p-1}\right)}\end{aligned}$$

donde $Ker\left(\partial''_{p,q-p}\right) \subseteq B_{p,q-p}$.
Luego, existe $b \in B_{p,q-p}$ tal que $x = [b] = b + Im\left(\partial''_{p,q-p-1}\right)$ y $b \in Ker\left(\partial''_{p,q-p}\right)$.
Se sabe que

$$H^{q+1}\left(F^{p+1}(TotB)\right) = \frac{Ker\left(F^{p+1}(Tot\,B)_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} F^{p+1}(Tot\,B)_{q+2}\right)}{Im\left(F^{p+1}(Tot\,B)_{q} \xrightarrow{\partial_{q}} F^{p+1}(Tot\,B)_{q+1}\right)} \tag{3.103}$$

donde $\partial = \partial' + \partial''$.
Como $B_{p,q-p} \subseteq F^p(Tot\,B)_q$ y $\partial : F^p(Tot\,B)_q \to F^p(Tot\,B)_{q+1}$, entonces aplicando ∂ a

$b \in B_{p,q-p}$ se obtiene que $\partial b \in B_{p+1,q-p}$, pues

$$\begin{aligned}
\partial b &= \partial' b + \partial'' b \\
&= \partial'_{p,q-p} b + \partial''_{p,q-p} b \\
&= \partial'_{p,q-p} b, \quad \partial''_{p,q-p} b = 0 \quad \text{ya que } b \in Ker\left(\partial''_{p,q-p}\right) \\
&= \partial' b \in B_{p+1,q-p} \qquad (3.104)
\end{aligned}$$

Como $\partial b \in B_{p+1,q-p} \subseteq F^{p+1}(Tot\, B)_{q+1} = \bigoplus\limits_{\substack{r+s=q+1 \\ r \geq p+1}} B_{r,s}$,

$$\text{se ve que } \partial b \in F^{p+1}(Tot\, B)_{q+1} \qquad (3.105)$$

$$\begin{aligned}
\text{Luego} \quad \partial\left(\partial b\right) &= \left(\partial' + \partial''\right)\left(\partial' b\right), \quad \text{por (3.104)} \\
&= \partial'\partial' b + \partial''\partial' b, \quad \partial'\partial' = 0 : \\
&= -\partial'\partial'' b, \quad \text{por anticonmutatividad} \\
&= -\partial' 0, \ \text{puesto que } \partial'' b = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así $\partial b \in Ker\partial_{q+1}$. De (3.103), (3.104) y $\partial' b \in Ker\partial_{q+1}$ se sigue que

$$[\partial' b] = \partial' b + Im\partial_q \in H^{q+1}\left(F^{p+1}(Tot\, B)\right) \qquad (3.106)$$

Luego $\gamma x = [\partial' b]$, donde $x = [b] = b + Im\left(\partial''_{p,q-p-1}\right)$.
Hace falta analizar $\beta\gamma x$ para que sea un elemento de la cohomología

$$\begin{aligned}
H^{q+1}\left(F^{p+1}/F^{p+2}\right) &= \frac{Ker\left(F^{p+1}_{q+1}/F^{p+2}_{q+1} \to F^{p+1}_{q+2}/F^{p+2}_{q+2}\right)}{Im\left(F^{p+1}_{q}/F^{p+2}_{q} \to F^{p+1}_{q+1}/F^{p+2}_{q+1}\right)} \\
&= \frac{Ker\left(B_{p+1,q-p} \xrightarrow{\partial''} B_{p+1,q-p+1}\right)}{Im\left(B_{p+1,q-p-1} \xrightarrow{\partial''} B_{p+1,q-p}\right)}, \ \text{por (3.98)} \\
&= \frac{Ker\left(\partial''_{p+1,q-p}\right)}{Im\left(\partial''_{p+1,q-p-1}\right)}.
\end{aligned}$$

Para abreviar la fórmula se denotó $F^p_q = F^p(Tot\, B)_q$.
Se afirma que $\partial' b \in Ker\left(\partial''_{p+1,q-p}\right)$, pues

$$\begin{aligned}
\partial''\left(\partial' b\right) &= \partial''_{p+1,q-p}\left(\partial'_{p,q-p} b\right) \\
&= -\partial'_{p,q-p+1}\left(\partial''_{p,q-p} b\right) \\
&= -\partial'_{p,q-p+1}\left(0\right), \quad b \in Ker\partial''_{p,q-p} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
B_{p+1,q-p+1} & B_{p,q-p+1} \arrow[l, "\partial'"'] \\
\partial' b \in B_{p+1,q-p} \arrow[u, "\partial''"] & b \in B_{p,q-p} \arrow[l, "\partial'"] \arrow[u, "\partial''"']
\end{tikzcd}$$

$$\text{Así está definido} \quad [\partial' b] = \partial' b + Im\left(\partial''_{p+1,q-p-1}\right) \qquad (3.107)$$

Viendo el efecto de la aplicación $\beta : H^{q+1}(F^{p+1}) \longrightarrow H^{q+1}(F^{p+1}/F^{p+2})$

$$[(\ldots,0,\partial' b,0)] \longmapsto [\partial' b]$$

se puede definir esta aplicación por $\beta\left(\partial' b + Im\partial_q\right) = \partial' b + Im\left(\partial''_{p+1,q-p-1}\right)$.

Usando (3.106) y (3.107):

$$\begin{aligned} \beta\gamma x = \beta[\partial' b] &= \beta\left(\partial' b + Im\partial_q\right) \\ &= \partial' b + Im\left(\partial''_{p+1,q-p-1}\right) \in H^{q+1}\left(F^{p+1}/F^{p+2}\right) \end{aligned}$$

Resumiendo $d_0(x) = \beta\gamma x = \partial' b + Im\partial'' = [\partial' b] = \partial'_*[b] = \partial'_*(x)$ para todo $x = [b] = b + Im\partial'' \in {}_1E_0^{p,q}$. Por lo tanto $d_0 = \partial'_* \;:\; {}_1E_0^{p,q} \longrightarrow {}_1E_0^{p+1,q+1}$.
Con el valor obtenido de d_0, se desarrolla (3.102):

$$\begin{aligned} {}_1E_1^{p,q} &= H^p\left(E_0^{*,q}, d_0\right) \\ &= \frac{Ker\left(E_0^{p,q} \xrightarrow{d_0} E_0^{p+1,q+1}\right)}{Im\left(E_0^{p-1,q-1} \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q}\right)} \\ &= \frac{Ker\left(H^{q-p}\left(B_{p,*};\partial''\right) \xrightarrow{\partial'_*} H^{q-p}\left(B_{p+1,*};\partial''\right)\right)}{Im\left(H^{q-p}\left(B_{p-1,*};\partial''\right) \xrightarrow{\partial'_*} H^{q-p}\left(B_{p,*};\partial''\right)\right)}, \text{ por (3.101)} \\ &= H^p\left(H^{q-p}(B,\partial''),\partial'_*\right). \end{aligned}$$

Por ser ∂'_* inducido por ∂', se puede usar ∂' en lugar de ∂'_*, así de la igualdad obtenida se concluye que ${}_1E_1^{p,q} = H^p\left(H^{q-p}(B,\partial''),\partial'\right)$. Con las partes $a)$ y $b)$ queda probado (3.96).

$ii)$ Para probar (3.97), se escribe F^p en lugar de ${}_2F^p$. En la figura 3.11

$$\text{se observa que} \quad F^p(Tot\,B)_q/F^{p+1}(Tot\,B)_q = B_{q-p,p} \tag{3.108}$$

donde $F^p(Tot\,B)_q = \bigoplus\limits_{\substack{r+s=q \\ s\geq p}} B_{r,s}$

La sucesión $0 \longrightarrow F^{p+1}(Tot\,B) \xrightarrow{i} F^p(Tot\,B) \xrightarrow{\pi} \dfrac{F^p(Tot\,B)}{F^{p+1}(Tot\,B)} \longrightarrow 0$
es una sucesión exacta corta de complejos de cocadena, luego según Teorema 2.2.4 existe un homomorfismo de conexión $\gamma : H(F^p(Tot\,B)/F^{p+1}(Tot\,B)) \to H(F^{p+1}(Tot\,B))$

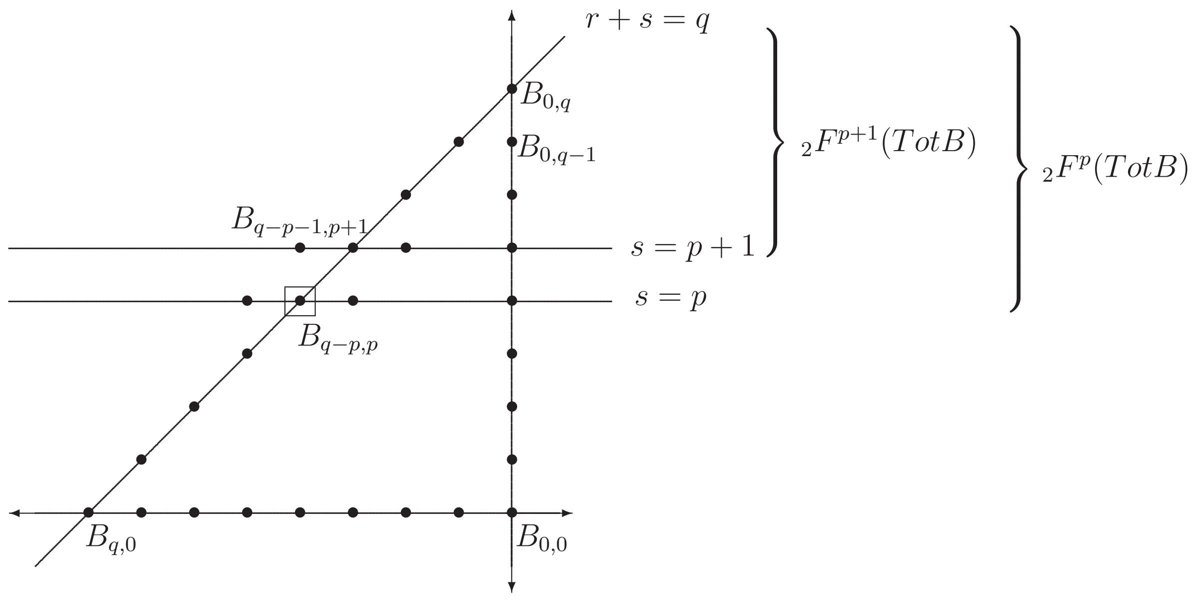

Figura 3.11: ${}_2F^p(TotB)_q/\ {}_2F^{p+1}(TotB) = B_{q-p,p}$

tal que el siguiente triángulo de cohomologías es exacto

$$\begin{tikzcd}
H(F^{p+1}(Tot\,B)) \arrow[rr, "\alpha"] & & H(F^{p}(Tot\,B)) \arrow[dl, "\beta"] \\
& H(F^{p}(Tot\,B)/F^{p+1}(Tot\,B)) \arrow[ul, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

Haciendo ${}_2D = \{{}_2D^{p,q}\}$, ${}_2D^{p,q} = H^q\left(F^p(Tot\,B)\right)$;
${}_2E = \{{}_2E^{p,q}\}$, ${}_2E^{p,q} = H^q\left(F^p(Tot\,B)/F^{p+1}(Tot\,B)\right)$
se obtiene el par exacto $\nabla = \{{}_2D_0, {}_2E_0, \alpha, \beta, \gamma\}$ en $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ donde $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana; $deg\alpha = (-1,0)$, $deg\ \beta = (0,0)$ y $deg\ \gamma = (1,1)$.
El par exacto ∇ origina una sucesión espectral ${}_2E = \{({}_2E_n, d_n)\}$ para $n = 0, 1, \dots,$ en $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$; donde se obtiene ${}_2E_{n+1} = H({}_2E_n, d_n)$ por cohomología, ${}_2E_n = \{{}_2E_n^{p,q}\}$ y $d_0 = \beta_0\gamma_0$.
Calculando los dos primeros términos de ${}_2E$, denotados por ${}_2E_0^{p,q}$, ${}_2E_1^{p,q}$:

$$
\begin{aligned}
c) \quad {}_2E_0^{p,q} &= {}_2E^{p,q} \\
&= H^q\big(F^p(Tot\,B)/F^{p+1}(Tot\,B)\big) \\
&= \frac{Ker\,(F^p(Tot\,B)_q/F^{p+1}(Tot\,B)_q \to F^p(Tot\,B)_{q+1}/F^{p+1}(Tot\,B)_{q+1})}{Im\,(F^p(Tot\,B)_{q-1}/F^{p+1}(Tot\,B)_{q-1} \to F^p(Tot\,B)_q/F^{p+1}(Tot\,B)_q)} \\
&= \frac{Ker\left(\; B_{q-p,p} \xrightarrow{\partial'_{q-p,p}} B_{q-p+1,p} \right)}{Im\left(\; B_{q-p-1,p} \xrightarrow{\partial'_{q-p-1,p}} B_{q-p,p} \right)}, \text{ por (3.108)} \\
&= H^{q-p}\left(B_{*,p};\partial'\right) \qquad (3.109)
\end{aligned}
$$

$d)$ Se halla el diferencial $d_0 = \partial''_* = \partial''$ como en la parte $b)$, luego se procede a calcular

$$
\begin{aligned}
{}_2E_1^{p,q} &= H^p\left({}_2E_0^{*,q}, d_0\right) \\
&= \frac{Ker\left(\; {}_2E_0^{p,q} \xrightarrow{d_0} {}_2E_0^{p+1,q+1} \right)}{Im\left(\; {}_2E_0^{p-1,q-1} \xrightarrow{d_0} {}_2E_0^{p,q} \right)}, \text{ por (3.109) :} \\
&= \frac{Ker\left(\; H^{q-p}\left(B_{*,p};\partial'\right) \xrightarrow{\partial''} H^{q-p}\left(B_{*,p+1};\partial'\right) \right)}{Im\left(\; H^{q-p}\left(B_{*,p-1};\partial'\right) \xrightarrow{\partial''} H^{q-p}\left(B_{*,p};\partial'\right) \right)} \qquad (3.110) \\
&= H^p\big(H^{q-p}(B,\partial'),\partial''\big) \qquad (3.111)
\end{aligned}
$$

Con las partes $c)$ y $d)$ queda probado (3.97) ■

Proposición 3.5.5 *Si B es un complejo doble de cocadena positivo, entonces ambas primera y segunda sucesión espectral ${}_1E$ y ${}_2E$, cuyos dos primeros términos se dan en (3.96) y (3.97), respectivamente; convergen finitamente al correspondiente objeto graduado asociado a la cohomología $\{H^n(Tot\,B)\}$, la cual es adecuada y finitamente filtrada.*

Prueba.- Por Proposición 3.4.2 y Teorema 3.4.8 es suficiente verificar que las dos filtraciones de $Tot\,B$ definidas en (3.94), (3.95) sean finitas.
En efecto, tal verificación se realiza, como sigue:

$i)$ La filtración de $Tot\,B$ definida en (3.94) es finita (Definición 3.4.1 y figura 3.12).

Por hipótesis B es un complejo doble de cocadena positivo, luego existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $B_{r,s} = 0 \quad \text{si} \quad r < n_0 \quad o \quad s < n_0$. Sea $q \in \mathbb{Z}$ (fijo), entonces existen $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$
\begin{aligned}
a) \quad {}_1F^p(Tot\,B)_q &= 0, \quad \text{para } p \geq p_0 \\
b) \quad {}_1F^p(Tot\,B)_q &= (Tot\,B)_q, \quad \text{para } p \leq p_1
\end{aligned}
$$

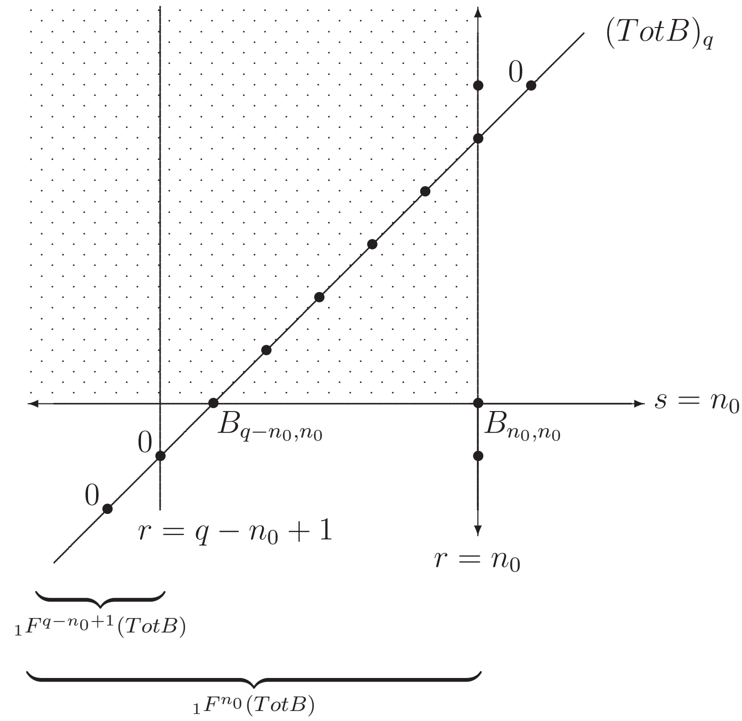

Figura 3.12: ${}_1F$ es filtración finita

a) $B_{r,s} = 0$ para $s < n_0$ implica que $\bigoplus_{\substack{r+s=q\\ s<n_0}} B_{r,s} = 0$, de $s = q - r < n_0$ se tiene $r \geq q - n_0 + 1$ y así ${}_1F^p(Tot\, B)_q = \bigoplus_{\substack{r+s=q\\ r\geq p}} B_{r,s} = 0$ para $p \geq q - n_0 + 1$.

Haciendo $p_0 = p_0(q) = q - n_0 + 1 \in \mathbb{Z}$ se obtiene que ${}_1F^p(Tot\, B)_q = 0$, para $p \geq p_0$.

b) Del hecho que $B_{r,s} = 0$ para todo $r < n_0$ se deducen:

$$\begin{aligned} {}_1F^{n_0-1}(Tot\, B)_q &= \left(\bigoplus_{\substack{r+s=q\\ r\geq n_0}} B_{r,s} \right) \oplus B_{n_0-1,q-n_0+1} \\ &= {}_1F^{n_0}(Tot\, B)_q, \text{ pues } r = n_0 - 1 < n_0; \end{aligned}$$

${}_1F^{n_0-2}(Tot\, B)_q = {}_1F^{n_0-1}(Tot\, B)_q$, y en general

$$
\begin{aligned}
{}_1F^p(Tot\,B)_q &= {}_1F^{n_0}(Tot\,B)_q \text{ para } p \le n_0 \\
&= \left(\bigoplus_{\substack{r+s=q\\ r\ge n_0}} B_{r,s}\right) \oplus B_{n_0-1,q-n_0+1} \oplus B_{n_0-2,q-n_0+2} \oplus \cdots \\
&= (Tot\,B)_q
\end{aligned}
$$

Haciendo $p_1 = p_1(q) = n_0 \in \mathbb{Z}$ se obtiene que ${}_1F^p(Tot\,B)_q = (Tot\,B)_q$ para $p \le p_1$.

ii) La filtración de $Tot\,B$ definida en (3.95) es finita (Definición 3.4.1 y figura 3.13).

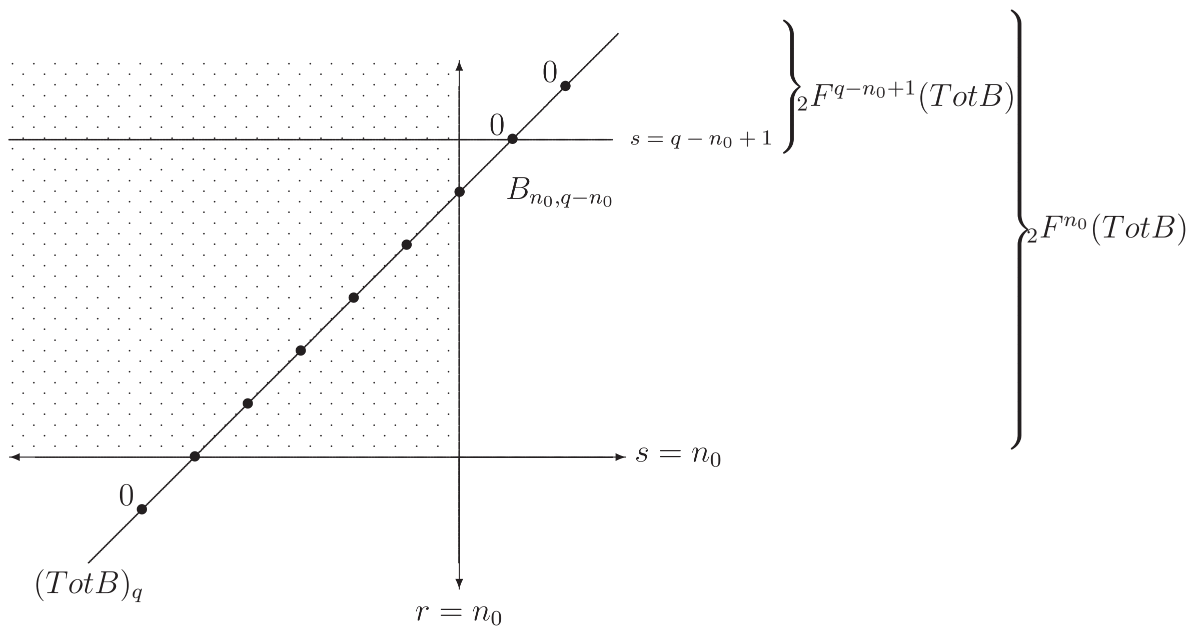

Figura 3.13: ${}_2F$ es filtración finita

Para probar esto, dado $q \in \mathbb{Z}$ se debe garantizar la existencia de $p_0 = p_0(q)$ y $p_1 = p_1(q) \in \mathbb{Z}$ tales que

$$
\begin{aligned}
&c) \quad {}_2F^p(Tot\,B)_q = 0, \quad \text{para } p \ge p_0 \\
&d) \quad {}_2F^p(Tot\,B)_q = (Tot\,B)_q, \quad \text{para } p \le p_1
\end{aligned}
$$

c) Del hecho que $B_{r,s} = 0$ para $r < n_0$ se tiene $\bigoplus\limits_{\substack{r+s=q\\ r<n_0}} B_{r,s} = 0$, pero $r = q - s < n_0$ conduce a $s \geq q - n_0 + 1$ y ${}_2F^p(Tot\,B)_q = \bigoplus\limits_{\substack{r+s=q\\ s\geq p}} B_{r,s} = 0$ para $p \geq q - n_0 + 1$.

Haciendo $p_0 = p_0(q) = q - n_0 + 1 \in \mathbb{Z}$ resulta que ${}_2F^p(Tot\,B)_q = 0$ para $p \geq p_0$.

d) $B_{r,s} = 0$ para todo $s < n_0$ implica que

$$\begin{aligned} {}_2F^{n_0-1}(Tot\,B)_q &= \left(\bigoplus_{\substack{r+s=q\\ s\geq n_0}} B_{r,s}\right) \oplus B_{q-n_0+1,n_0-1} \\ &= {}_2F^{n_0}(Tot\,B)_q, \text{ pues } B_{q-n_0+1,n_0-1} = 0 \end{aligned}$$

Similarmente ${}_2F^{n_0-2}(Tot\,B)_q = {}_2F^{n_0-1}(Tot\,B)_q$, y en general

$$\begin{aligned} {}_2F^p(Tot\,B)_q &= {}_2F^{n_0}(Tot\,B)_q \text{ para } p \leq n_0 \\ &= \left(\bigoplus_{\substack{r+s=q\\ s\geq n_0}} B_{r,s}\right) \oplus B_{q-n_0+1,n_0-1} \oplus B_{q-n_0+2,n_0-2} \oplus \cdots \\ &= (Tot\,B)_q \end{aligned}$$

Tomando $p_1 = p_1(q) = n_0 \in \mathbb{Z}$ se obtiene que ${}_2F^p(Tot\,B)_q = (Tot\,B)_q$ para $p \leq p_1$ ■

Existencia y Convergencia de la Sucesión Espectral de Grothendieck

La construcción de la sucesión espectral de Grothendieck se hará usando un complejo doble J de objetos inyectivos y este complejo para su construcción requerirá una herramienta llamada LEMA DE HERRADURA, así en lo que sigue se abordará el lema mencionado y otros resultados previos que son necesarios para demostrar la existencia de la sucesión espectral de Grothendieck.

Proposición 3.5.6 *Sean I_1 y I_2 objetos inyectivos en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$, entonces $I_1 \oplus I_2$ es inyectivo.*

Prueba.- Sea $\alpha : A \longrightarrow I_1 \oplus I_2$ un morfismo y $\mu : A \rightarrowtail B$ un monomorfismo, entonces existe un morfismo $\beta : B \longrightarrow I_1 \oplus I_2$ tal que $\alpha = \beta \circ \mu$.
Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ con $\alpha_1 : A \longrightarrow I_1$ y $\alpha_2 : A \longrightarrow I_2$. Como I_1 e I_2 son objetos inyectivos, existen morfismos $\beta_1 : B \longrightarrow I_1$ y $\beta_2 : B \longrightarrow I_2$ tales que $\alpha_1 = \beta_1 \circ \mu$ y $\alpha_2 = \beta_2 \circ \mu$. Así existe $\beta = (\beta_1, \beta_2) : B \longrightarrow I_1 \oplus I_2$ tal que
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1 \circ \mu, \beta_2 \circ \mu) = \beta \circ \mu$ ■

***Lema* 3.5.7 (Lema de Herradura)** *Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana y $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ una sucesión exacta corta en $\mathfrak{A}$. Si $I' : 0 \to I'_0 \to I'_1 \to \cdots$ y $I'' : 0 \to I''_0 \to I''_1 \to \cdots$ son resoluciones inyectivas de A' y A'', respectivamente; entonces existe una resolución inyectiva I de A tal que la sucesión de complejos de cocadena $0 \to I' \to I \to I'' \to 0$ es exacta y el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & I''_1 \arrow[l] \arrow[u, "\partial''_1"] & I_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[u, dotted, "\partial_1"] & I'_1 \arrow[l, "\imath_1"'] \arrow[u, "\partial'_1"] & 0 \arrow[l] \\
0 & I''_0 \arrow[l] \arrow[u, "\partial''_0"] & I_0 \arrow[l, "\pi_0"'] \arrow[u, dotted, "\partial_0"] & I'_0 \arrow[l, "\imath_0"'] \arrow[u, "\partial'_0"] & 0 \arrow[l] \\
0 & A'' \arrow[l] \arrow[u, "\mu''"] & A \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, dotted, "\mu"] & A' \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[u, "\mu'"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{3.112}$$

Prueba.- Sea $I_0 = I'_0 \oplus I''_0$, como I'_0 es inyectivo se define $\mu : A \to I_0$ por

$\mu(a) = (\psi a, \mu''\beta a)$
donde $\psi\alpha = \mu'$
También se definen los morfismos
$\imath_0 : I'_0 \to I_0$ por $\imath_0(b) = (b, 0)$,
$\pi_0 : I_0 \to I''_0$ por $\pi_0(b, c) = c$.

$$\begin{tikzcd}
 & I'_0 & \\
a \in A \arrow[ur, dotted, "\exists\psi"] & A' \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\mu'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Se prueba que los dos cuadriláteros inferiores del diagrama (3.112) son conmutativos, verificando que $\imath_0\mu' = \mu\alpha$ y $\pi_0\mu = \mu''\beta$, como sigue:

$$\text{Sea } a' \in A', \text{ entonces } \quad \imath_0\mu'(a') = (\mu'(a'), 0) \tag{3.113}$$

$$\mu\alpha(a') = (\psi\alpha(a'), \mu''\beta\alpha(a')) = (\mu'(a'), 0), \text{ pues } \beta\alpha = 0 \tag{3.114}$$

De (3.113) y (3.114) se obtiene que $\imath_0\mu' = \mu\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{De las igualdades} \quad \pi_0\mu(a) &= \pi_0(\psi a, \mu''\beta a) \\ &= \mu''\beta a \\ &= \mu''\beta(a), \text{ para todo } a \in A \end{aligned}$$

se sigue que $\pi_0\mu = \mu''\beta$.

La sucesión $0 \longleftarrow I''_0 \xleftarrow{\pi_0} I_0 \xleftarrow{\imath_0} I'_0 \longleftarrow 0$ es exacta de inyectivos. Se consigue verificando los items $i)$, $ii)$, $iii)$ y $iv)$:

i) $\quad a' \in Ker\, \imath_0 \;\Rightarrow a' \in I_0'$ y $\quad \imath_0(a') \;=\; (0,0)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = \; (a',0)$ por definición.

Luego $a' = 0$. Por lo tanto, $\imath_0$ es un monomorfismo.

ii) $Im\, \imath_0 = Ker \pi_0$, puesto que $\pi_0 \imath_0(b') = \pi_0(b',0) = 0$ implica que $Im \imath_0 \subseteq Ker \pi_0$. $(b,c) \in Ker\pi_0$ implica que $(b,c) \in I_0 = I_0' \oplus I_0''$ y

$$\begin{aligned} \pi_0(b,c) &= 0 \\ &= c \end{aligned}$$

luego $c = 0$. De esa manera existe $b \in I_0'$ tal que $\imath_0(b) = (b,0) = (b,c) \in Im \imath_0$, así $Ker\, \pi_0 \subseteq Im\, \imath_0$.

iii) Dado $c \in I_0''$ existe $(0,c) \in I_0 = I_0' \oplus I_0''$ tal que $\pi_0(0,c) = c$, por lo tanto π_0 es un epimorfismo.

iv) Por ser I_0' y I_0'' objetos inyectivos de $\mathfrak{A}$, de Proposición 3.5.6 se sigue que $I_0 = I_0' \oplus I_0''$ es inyectivo.

El morfismo $\mu : A \to I_0$ es un monomorfismo. En efecto, sea $a \in Ker \mu$ entonces $a \in A$ y $\mu(a) = (0,0) = (\psi a, \mu'' \beta a)$. De donde $\psi a = 0$ y $\mu'' \beta a = 0$; como μ'' es un monomorfismo y $Im \alpha = Ker \beta$, existe $a' \in A'$ tal que $a = \alpha a'$. Luego $0 = \psi a = \psi \alpha a' = \mu' a'$, como μ' es monomorfismo se obtiene que $a' = 0$. Por lo tanto $a = \alpha a' = 0$.

HIPÓTESIS INDUCTIVA: Suponga que es posible construir la sucesión exacta corta de inyectivos $0 \longleftarrow I_m'' \xleftarrow{\pi_m} I_m \xleftarrow{\imath_m} I_m' \longleftarrow 0$ para $1 \leq m \leq n$ donde $I_m = I_m' \oplus I_m''$ de manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 & I_n'' \arrow[l] & I_n \arrow[l, "\pi_n"'] & I_n' \arrow[l, "\imath_n"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & I_{n-1}'' \arrow[l] \arrow[u, "\partial_{n-1}''"'] & I_{n-1} \arrow[l, "\pi_{n-1}"'] \arrow[u, "\partial_{n-1}"'] & I_{n-1}' \arrow[l, "\imath_{n-1}"'] \arrow[u, "\partial_{n-1}'"'] & 0 \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \\
0 & I_1'' \arrow[l] \arrow[u] & I_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[u] & I_1' \arrow[l, "\imath_1"'] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \\
0 & I_0'' \arrow[l] \arrow[u, "\partial_0''"'] & I_0 \arrow[l, "\pi_0"'] \arrow[u, "\partial_0"'] & I_0' \arrow[l, "\imath_0"'] \arrow[u, "\partial_0'"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & A'' \arrow[l] \arrow[u, "\mu''"'] & A \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, "\mu"'] & A' \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[u, "\mu'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{3.115}$$

Entonces se puede construir la sucesión exacta corta de inyectivos
$0 \longleftarrow I''_{n+1} \xleftarrow{\pi_{n+1}} I_{n+1} \xleftarrow{\imath_{n+1}} I'_{n+1} \longleftarrow 0$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 & I''_{n+1} \arrow[l] & I_{n+1} \arrow[l, "\pi_{n+1}"'] & I'_{n+1} \arrow[l, "\imath_{n+1}"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & I''_n \arrow[l] \arrow[u, "\partial''_n"'] \arrow[ur, phantom, "\boxed{2}"] & I_n \arrow[l, "\pi_n"'] \arrow[u, "\partial_n"'] \arrow[ur, phantom, "\boxed{1}"] & I'_n \arrow[l, "\imath_n"'] \arrow[u, "\partial'_n"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & I''_{n-1} \arrow[l] \arrow[u, "\partial''_{n-1}"'] & I_{n-1} \arrow[l, "\pi_{n-1}"'] \arrow[u, "\partial_{n-1}"'] & I'_{n-1} \arrow[l, "\imath_{n-1}"'] \arrow[u, "\partial'_{n-1}"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{3.116}$$

es conmutativo con $Ker\partial_n = Im\partial_{n-1}$.
Se completa la prueba por inducción, definiendo el $n+1-$ésimo objeto como $I_{n+1} = I'_{n+1} \oplus I''_{n+1}$; y tres morfismos:

$$\begin{tikzcd}
 & I'_{n+1} & \\
I_n \arrow[ur, dotted, "\exists\varphi_n"] & I'_n \arrow[l, "\imath_n"'] \arrow[u, "\partial'_n"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\partial_n : I_n \longrightarrow I_{n+1}$ por $\partial_n(b,c) = (\varphi_n(b,c), \partial''_n\pi_n(b,c))$ donde $b \in I'_n$ y $c \in I''_n$; $\imath_{n+1}(b_{n+1}) = (b_{n+1}, 0)$, $\pi_{n+1}(b_{n+1}, c_{n+1}) = c_{n+1}$. Se garantiza la existencia de φ_n por ser I'_{n+1} inyectivo y i_n monomorfismo. A continuación, se prueban las siguientes afirmaciones:

$v)$ $\imath_{n+1}$ es un monomorfismo, pues
$a \in Ker\imath_{n+1} \Rightarrow a \in I'_{n+1}$ y $\imath_{n+1}(a) = (0,0) = (a,0)$. Por igualdad $a = 0$.

$vi)$ $Im\,\imath_{n+1} = Ker\,\pi_{n+1}$.
Es inmediato que $Im\,\imath_{n+1} \subseteq Ker\,\pi_{n+1}$.
$(b,c) \in Ker\pi_{n+1} \Rightarrow (b,c) \in I_{n+1} = I'_{n+1} \oplus I''_{n+1}$ y $\pi_{n+1}(b,c) = 0 = c$, de donde $c = 0$. Así existe $b \in I'_{n+1}$ tal que $\imath_{n+1}(b) = (b,0) = (b,c) \in Im\,\imath_{n+1}$, luego $Ker\pi_{n+1} \subseteq Im\imath_{n+1}$.

$vii)$ π_{n+1} es un epimorfismo, puesto que dado $c_{n+1} \in I''_{n+1}$ existe $(0, c_{n+1}) \in I_{n+1} = I'_{n+1} \oplus I''_{n+1}$ tal que $\pi_{n+1}(0, c_{n+1}) = c_{n+1}$.

$viii)$ Como I'_{n+1} y I''_{n+1} objetos inyectivos de $\mathfrak{A}$, de Proposición 3.5.6 se sigue que $I_{n+1} = I'_{n+1} \oplus I''_{n+1}$ es inyectivo.

$ix)$ Se prueba la igualdad $Im\partial_{n-1} = Ker\partial_n$ verificando que $H^n(I) = 0$ para $n \geq 1$.

Dualizando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 & I''_{n+1} \arrow[l] & I_{n+1} \arrow[l] & I'_{n+1} \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & I''_n \arrow[l] \arrow[u, "\partial''_n"'] & I_n \arrow[l] \arrow[u, "\partial_n"'] & I'_n \arrow[l] \arrow[u, "\partial'_n"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

se obtiene el diagrama conmutativo con filas sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {I''_{n+1}}^{op} \arrow[r] \arrow[d, "{\partial''_n}^{op}"] & {I_{n+1}}^{op} \arrow[r] \arrow[d, "{\partial_n}^{op}"] & {I'_{n+1}}^{op} \arrow[r] \arrow[d, "{\partial'_n}^{op}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {I''_n}^{op} \arrow[r] & {I_n}^{op} \arrow[r] & {I'_n}^{op} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.117}$$

Por Lema 2.2.1, las siguientes sucesiones $Ker - Coker$ son exactas

$$\begin{array}{c}
0 \longrightarrow Ker\left({\partial''_n}^{op}\right) \longrightarrow Ker\left({\partial_n}^{op}\right) \longrightarrow Ker\left({\partial'_n}^{op}\right) \quad \text{y} \\
Coker\left({\partial''_n}^{op}\right) \longrightarrow Coker\left({\partial_n}^{op}\right) \longrightarrow Coker\left({\partial'_n}^{op}\right) \longrightarrow 0
\end{array} \tag{3.118}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.
De (3.117), (3.118) y Lema 2.2.3 se deduce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & H_n\left(I''^{op}\right) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & H_n\left(I^{op}\right) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & H_n\left(I'^{op}\right) \arrow[d, dotted] & \\
 & Coker\left({\partial''_{n+1}}^{op}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{{\partial''_n}^{op}}"] & Coker\left({\partial_{n+1}}^{op}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{{\partial_n}^{op}}"] & Coker\left({\partial'_{n+1}}^{op}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{{\partial'_n}^{op}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker\left({\partial''_{n-1}}^{op}\right) \arrow[r] \arrow[d, dotted, two heads] & Ker\left({\partial_{n-1}}^{op}\right) \arrow[r] \arrow[d, dotted, two heads] & Ker\left({\partial'_{n-1}}^{op}\right) \arrow[d, dotted, two heads] & \\
 & H_{n-1}\left(I''^{op}\right) \arrow[r] & H_{n-1}\left(I^{op}\right) \arrow[r] & H_{n-1}\left(I'^{op}\right) &
\end{tikzcd}$$

Ahora, por Lema 2.2.1, se sigue la siguiente sucesión exacta
$H_n\left(I''^{op}\right) \to H_n\left(I^{op}\right) \to H_n\left(I'^{op}\right) \to H_{n-1}\left(I''^{op}\right) \to H_{n-1}\left(I^{op}\right) \to H_{n-1}\left(I'^{op}\right)$
Aplicando Lema 3.4.7, se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$H^{n-1}\left(I'\right) \to H^{n-1}\left(I\right) \to H^{n-1}\left(I''\right) \to H^n\left(I'\right) \to H^n\left(I\right) \to H^n\left(I''\right) \tag{3.119}$$

Para $n > 1$, usando la hipótesis inductiva y (3.119), por el hecho que I' y I'' son acíclicos, se deduce que la siguiente sucesión es exacta
$0 \to 0 \to 0 \to 0 \to H^n\left(I\right) \to 0$, por consiguiente $H^n\left(I\right) = 0$ para $n > 1$.

Para el caso $n = 1$, de (3.119) se tiene la sucesión exacta
$H^0\left(I'\right) \to H^0\left(I\right) \to H^0\left(I''\right) \to 0 \to H^1\left(I\right) \to 0$, de donde $H^1\left(I\right) = 0$.

Además de eso, la sucesión $0 \to H^0(I') \to H^0(I) \to H^0(I'') \to 0$ es exacta porque $H^{-1}(I'') = 0$. Por ser I' una resolución inyectiva de A' y I'' una resolución inyectiva de A'', se sabe que $H^0(I') \cong A'$ y $H^0(I'') \cong A''$; del diagrama (3.115):

$$\begin{tikzcd}
0 & H^0(I'') \arrow[l] & H^0(I) \arrow[l] & H^0(I') \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & A'' \arrow[l] \arrow[u, "\mu''"'] & A \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, dotted, "\mu"'] & A' \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[u, "\mu'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{3.120}$$

Se prueba que $\mu : A \longrightarrow H^0(I)$ verificando que $\partial_0 \mu a = (0,0)$.

Recordando que $\partial_0 : I_0 \longrightarrow I_1$ se define como $\partial_0(b,c) = (\varphi_0(b,c), \partial_0''\pi_0(b,c))$ donde $b \in I_0'$ y $c \in I_0''$; para $\mu(a) = (\psi a, \mu''\beta a) \in I_0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_0 \mu a &= (\varphi_0(\psi a, \mu''\beta a), \partial_0''\pi_0(\psi a, \mu''\beta a)) \\
&= (\varphi_0(\psi a, 0) + \varphi_0(0, \mu''\beta a), \partial_0''\mu''\beta a)\,, \text{ de } \partial_0''\mu'' = 0 : \\
&= (\partial_0'\psi a + \varphi_0(0, \mu''\beta a), 0)
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Por otro lado la sucesión exacta corta $0 \longleftarrow I_0'' \longleftarrow I_0 \longleftarrow I_0' \longleftarrow 0$ se descompone por ser I_0' inyectivo [9]. Esto quiere decir que existen morfismos $\pi_0' : I_0 \longrightarrow I_0'$ y $\imath_0'' : I_0'' \longrightarrow I_0$ tales que

$$\begin{tikzcd}
 & I_1'' & I_1 & I_1' & \\
0 \arrow[r] & I_0'' \arrow[r, "\imath_0''"'] \arrow[u, "\partial_0''"'] & I_0 \arrow[r, "\pi_0'"'] \arrow[u, "\partial_0"'] \arrow[ul, "\varphi_0''"'] \arrow[ur] & I_0' \arrow[r] \arrow[u, "\partial_0'"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, $\partial_0 \mu a$ también se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\partial_0 \mu a &= (\partial_0'\pi_0'(\psi a, \mu''\beta a), \varphi_0''(\psi a, \mu''\beta a)) \\
&= (\partial_0'\psi a, \varphi_0''(\psi a, 0) + \varphi_0''(0, \mu''\beta a)) \\
&= (\partial_0'\psi a, \varphi_0''(\psi a, 0) + \varphi_0''\imath_0''\mu''\beta a) \\
&= (\partial_0'\psi a, \varphi_0''(\psi a, 0) + \partial_0''\mu''\beta a) \\
&= (\partial_0'\psi a, \varphi_0''(\psi a, 0))
\end{aligned} \tag{3.122}$$

De (3.121) y (3.122) : $\varphi_0(0, \mu''\beta a) = 0 = \varphi_0''(\psi a, 0)$. Por lo tanto $\partial_0 \mu a = (0,0)$ si $\psi a \in Ker\, \partial_0'$.
Considerando el diagrama (3.120), por Proposición 3.3.11 se deduce que μ es un isomorfismo, en consecuencia $H^0(I) \cong A$.

x) Los dos cuadriláteros $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ del diagrama (3.116) conmutan; es decir,

$$\imath_{n+1}\partial'_n = \partial_n\imath_n : I'_n \to I_{n+1}, \quad \pi_{n+1}\partial_n = \partial''_n\pi_n : I_n \to I''_{n+1}.$$

$$\begin{aligned}
\text{En efecto:}\quad \imath_{n+1}\partial'_n(a'_n) &= (\partial'_n(a'_n), 0), \text{ como } \partial'_n = \varphi_n\imath_n : \\
&= (\varphi_n(a'_n, 0), \partial''_n\pi_n(a'_n, 0)) \\
&= \partial_n(a'_n, 0) \\
&= \partial_n\imath_n(a'_n), \quad \text{para todo } a'_n \in I'_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1}\partial_n(b_n, c_n) &= \pi_{n+1}(\varphi_n(b_n, c_n), \partial''_n\pi_n(b_n, c_n)) \\
&= \pi_{n+1}(\varphi_n(b_n, c_n), \partial''_n c_n) \\
&= \partial''_n c_n \\
&= \partial''_n\pi_n(b_n, c_n), \quad \text{para todo } (b_n, c_n) \in I_n
\end{aligned}$$

En síntesis, existe un complejo de cocadena $I : 0 \to I_0 \to I_1 \to \cdots$ donde cada I_n es inyectivo por *iv*) y *viii*); I es acíclico por *ix*) y además $H^0(I) \cong A$, por definición resulta que I es una resolución inyectiva de A. La sucesión $0 \to I' \to I \to I'' \to 0$ es exacta ya que $0 \to I'_n \to I_n \to I''_n \to 0$ es exacta para cada $n = 0, 1, \ldots$ y el diagrama (3.112) es conmutativo por *x*), por lo tanto queda probado el lema de herradura ■

***Lema* 3.5.8** *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos.*
Sean $\cdots \longleftarrow F_{n+1} \xleftarrow{\partial_n} F_n \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\partial_0} F_0 \longleftarrow 0$ *un complejo de cocadena en $\mathfrak{C}$, $Z_r = Ker\partial_r$ y $B_{r+1} = Im\partial_r$ para $r = 0, 1, \ldots$; entonces existe una resolución inyectiva de*

$$\cdots \leftarrowtail B_2 \twoheadleftarrow F_1 \leftarrowtail Z_1 \leftarrowtail B_1 \twoheadleftarrow F_0 \leftarrowtail Z_0 \tag{3.123}$$

expresada como el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & L_{2,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] & J_{1,1} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{1,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] & L_{1,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] & J_{0,1} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{0,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
\cdots & L_{2,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] & J_{1,0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{1,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] & L_{1,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] & J_{0,0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{0,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
\cdots & B_2 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail] & F_1 \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] & Z_1 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail] & B_1 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail] & F_0 \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] & Z_0 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail]
\end{tikzcd} \tag{3.124}$$

donde cada columna es una resolución inyectiva completa del objeto que aparece en su pie y $L_{r+1,s} \twoheadleftarrow J_{r,s} \leftarrowtail K_{r,s}$ *es exacta.*

Prueba .- Con el morfismo $F_1 \xleftarrow{\partial_0} F_0$ se origina la sucesión exacta corta $Im\partial_0 = B_1 \twoheadleftarrow F_0 \leftarrowtail Z_0 = Ker\partial_0$. Como $\mathfrak{C}$ tiene suficientes inyectivos, los objetos Z_0 y B_1 de $\mathfrak{C}$ poseen resoluciones inyectivas y se puede asumir que éstas son las que aparecen en las columnas de Z_0 y B_1 en (3.124). Por el lema de herradura, con esas resoluciones inyectivas de Z_0 y B_1 se halla una resolución inyectiva de F_0, la cual aparece en la columna correspondiente en (3.124) tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
L_{1,1} \arrow[u] & J_{0,1} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{0,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
L_{1,0} \arrow[u] & J_{0,0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{0,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
B_1 \arrow[u, tail] & F_0 \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] & Z_0 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail]
\end{tikzcd} \tag{3.125}$$

La condición de complejo de cocadena $\partial_1\partial_0 = 0$ implica que $Im\partial_0 \subseteq Ker\partial_1$; es decir, $B_1 \subseteq Z_1$. Luego se tiene la sucesión exacta corta $Z_1/B_1 \twoheadleftarrow Z_1 \leftarrowtail B_1$. Con la resolución inyectiva anterior de B_1 y tomando una resolución inyectiva del objeto Z_1/B_1 de $\mathfrak{C}$, por el lema de herradura se obtiene una resolución inyectiva de Z_1, la cual aparece en la columna correspondiente en (3.124) tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
C_{1,1} \arrow[u] & K_{1,1} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & L_{1,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
C_{1,0} \arrow[u] & K_{1,0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & L_{1,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
Z_1/B_1 \arrow[u, tail] & Z_1 \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] & B_1 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail]
\end{tikzcd} \tag{3.126}$$

es conmutativo, donde $K_{1,s} = L_{1,s} \oplus C_{1,s}$ para $s = 0, 1, \ldots$.
Con el diagrama (3.125) y parte del diagrama (3.126) se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
K_{1,1} \arrow[u] & L_{1,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] & J_{0,1} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{0,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
K_{1,0} \arrow[u] & L_{1,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] & J_{0,0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{0,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
Z_1 \arrow[u, tail] & B_1 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail] & F_0 \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] & Z_0 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail]
\end{tikzcd} \tag{3.127}$$

Luego, usando la resolución inyectiva de $Z_1 = Ker\partial_1$ y una resolución inyectiva arbitraria de $B_2 = Im\partial_1$, con el lema de herradura se halla una resolución inyectiva de F_1, la cual se muestra en la columna correspondiente en (3.124) tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
L_{2,1} \arrow[u] & J_{1,1} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{1,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
L_{2,0} \arrow[u] & J_{1,0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{1,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
B_2 \arrow[u, tail] & F_1 \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] & Z_1 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail]
\end{tikzcd} \tag{3.128}$$

Continuando el proceso hacia la izquierda de (3.123), y acoplando los siguientes diagramas del proceso con los diagramas (3.127) y (3.128) se logra la construcción del diagrama conmutativo (3.124) con las condiciones exigidas ■

Las siguientes observaciones son extraídas de la prueba de Lema 3.5.8 :

i) $$B_{r+1} = Im\partial_r \twoheadleftarrow F_r \leftarrowtail Z_r = Ker\partial_r \text{ para } r = 0, 1, \ldots \tag{3.129}$$

ii) $B_r = Im\partial_{r-1} \subseteq Z_r = Ker\partial_r$ para $r = 1, 2, \ldots$, pues $\partial_r\partial_{r-1} = 0$.
Tomando la sucesión exacta corta $Z_r/B_r \twoheadleftarrow Z_r \leftarrowtail B_r$ se construye una resolución inyectiva de Z_r, con la resolución inyectiva ya obtenida de B_r y tomando una resolución inyectiva arbitraria del objeto cociente Z_r/B_r de $\mathfrak{C}$, de manera que el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
C_{r,1} \arrow[u] & K_{r,1} \arrow[u] \arrow[l, two heads] & L_{r,1} \arrow[u] \arrow[l, tail] \\
C_{r,0} \arrow[u] & K_{r,0} \arrow[u] \arrow[l, two heads] & L_{r,0} \arrow[u] \arrow[l, tail] \\
Z_r/B_r \arrow[u, tail] & Z_r \arrow[u, tail] \arrow[l, two heads] & B_r \arrow[u, tail] \arrow[l, tail]
\end{tikzcd}
\tag{3.130}
$$

sea conmutativo, donde $K_{r,s} = L_{r,s} \oplus C_{r,s}$ para $s = 0, 1, \ldots$.
De donde $C_{r,s} = K_{r,s}/L_{r,s}$, por consiguiente

$$
\cdots \longleftarrow K_{r,2}/L_{r,2} \longleftarrow K_{r,1}/L_{r,1} \longleftarrow K_{r,0}/L_{r,0} \longleftarrowtail Z_r/B_r \tag{3.131}
$$

para $r = 1, 2, \ldots$ es una resolución inyectiva completa de Z_r/B_r.

Proposición 3.5.9 *Del diagrama (3.124) se obtiene el diagrama conmutativo*

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & J_{2,1} \arrow[u] \arrow[l] & J_{1,1} \arrow[u] \arrow[l] & J_{0,1} \arrow[u] \arrow[l] \\
\cdots & J_{2,0} \arrow[u] \arrow[l] & J_{1,0} \arrow[u] \arrow[l] & J_{0,0} \arrow[u] \arrow[l] \\
\cdots & F_2 \arrow[u, tail] \arrow[l] & F_1 \arrow[u, tail] \arrow[l] & F_0 \arrow[u, tail] \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{3.132}
$$

donde cada fila es un complejo de cocadena y la $r-$ésima columna es una resolución inyectiva completa de F_r; $r = 0, 1, \ldots$.

Prueba .- Sean los morfismos del diagrama (3.124):

$F_{r+1} \overset{i^z_{r+1}}{\leftarrowtail} Z_{r+1} \overset{i^b_{r+1}}{\leftarrowtail} B_{r+1} \overset{p^f_r}{\twoheadleftarrow} F_r$, $\quad J_{r+1,s} \overset{i^k_{r+1,s}}{\leftarrowtail} K_{r+1,s} \overset{i^l_{r+1,s}}{\leftarrowtail} L_{r+1,s} \overset{p^j_{r,s}}{\twoheadleftarrow} J_{r,s}$;

$J_{r,s+1} \xleftarrow{\partial^j_{r,s}} J_{r,s}$, $L_{r,s+1} \xleftarrow{\partial^l_{r,s}} L_{r,s}$ y $K_{r,s+1} \xleftarrow{\partial^k_{r,s}} K_{r,s}$.

Definiendo $J_{r+1,s} \xleftarrow{d^j_{r,s}} J_{r,s}$ por $d^j_{r,s} = i^k_{r+1,s} \circ i^l_{r+1,s} \circ p^j_{r,s}$ y

definiendo $F_{r+1} \xleftarrow{d_r} F_r$ por $d_r = i^z_{r+1} \circ i^b_{r+1} \circ p^f_r$ se obtienen las tres siguientes afirmaciones:

i) Para cada $r = 0, 1, \ldots$ la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} J_{r+1,0} & J_{r,0} \arrow[l] \\ F_{r+1} \arrow[u, tail] & F_r \arrow[l] \arrow[u, tail] \end{tikzcd}$$

deriva de la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} J_{r+1,0} & K_{r+1,0} \arrow[l, tail] & L_{r+1,0} \arrow[l, tail] & J_{r,0} \arrow[l, two heads] \\ F_{r+1} \arrow[u, tail] & Z_{r+1} \arrow[l, tail] \arrow[u, tail] & B_{r+1} \arrow[l, tail] \arrow[u, tail] & F_r \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] \end{tikzcd}$$

ii) Para cada $r, s = 0, 1, \ldots$ la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} J_{r+1,s+1} & J_{r,s+1} \arrow[l] \\ J_{r+1,s} \arrow[u] & J_{r,s} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

deriva de la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} J_{r+1,s+1} & K_{r+1,s+1} \arrow[l, tail] & L_{r+1,s+1} \arrow[l, tail] & J_{r,s+1} \arrow[l, two heads] \\ J_{r+1,s} \arrow[u] & K_{r+1,s} \arrow[l, tail] \arrow[u] & L_{r+1,s} \arrow[l, tail] \arrow[u] & J_{r,s} \arrow[l, two heads] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En efecto:
$$\begin{aligned} d^j_{r,s+1} \circ \partial^j_{r,s} &= \left(i^k_{r+1,s+1} \circ i^l_{r+1,s+1} \circ p^j_{r,s+1}\right) \circ \partial^j_{r,s} \\ &= i^k_{r+1,s+1} \circ \left(i^l_{r+1,s+1} \circ \partial^l_{r+1,s}\right) \circ p^j_{r,s} \\ &= i^k_{r+1,s+1} \circ \left(\partial^k_{r+1,s} \circ i^l_{r+1,s}\right) \circ p^j_{r,s+1} \\ &= \partial^j_{r+1,s} \circ \left(i^k_{r+1,s} \circ i^l_{r+1,s} \circ p^j_{r,s}\right) \\ &= \partial^j_{r+1,s} \circ d^j_{r,s}. \end{aligned}$$

iii) $d^j_{r+1,s} \circ d^j_{r,s} = 0$, pues $p^j_{r+1,s} \circ i^k_{r+1,s} = 0$ por la condición de exactitud en (3.124); $d_{r+1} \circ d_r = 0$, pues $p^f_{r+1} \circ i^z_{r+1} = 0$ por (3.129).

Ahora bien, observando que cada cuadrilátero del diagrama (3.132) está en uno de los casos *i*) o *ii*), se deduce que tal diagrama es conmutativo.
En las filas del diagrama (3.132), por *iii*) la composición de morfismos sucesivos se anula, luego cada fila de ese diagrama es un complejo de cocadena. Mientras que la $r-$ésima columna es una resolución inyectiva completa de F_r; $r = 0, 1, \ldots$ proviene del

diagrama (3.124) ■

Sea

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & C_{2,2} \arrow[l] \arrow[u] & C_{1,2} \arrow[l] \arrow[u] & C_{0,2} \arrow[l] \arrow[u] \\
\cdots & C_{2,1} \arrow[l] \arrow[u] & C_{1,1} \arrow[l] \arrow[u] & C_{0,1} \arrow[l] \arrow[u] \\
\cdots & C_{2,0} \arrow[l] \arrow[u] & C_{1,0} \arrow[l] \arrow[u] & C_{0,0} \arrow[l] \arrow[u] \\
\cdots & A_2 \arrow[l] \arrow[u] & A_1 \arrow[l] \arrow[u] & A_0 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{3.133}
$$

un complejo doble de cocadena que será denotado por D.

Proposición 3.5.10 *Si las cohomologías de las columnas de D se anulan, entonces el complejo total de D tiene cohomología nula.*

Prueba .- Sea $D_1 =_1 F^1\left(Tot\ D\right)$ y C_j columna $j-$ésima de D, entonces para $C_0 = D_0/D_1$ y $D_0 =_1 F^0\left(Tot\ D\right) = Tot\ D$ la sucesión $D_1 \rightarrowtail Tot\ D \twoheadrightarrow C_0$ es exacta corta de complejos de cocadena. Así, por Teorema 2.2.4 existe la siguiente sucesión exacta larga
$0 \to H^0(D_1) \to H^0(Tot\ D) \to H^0\left(C_0\right) \to H^1(D_1) \to H^1(Tot\ D) \to H^1\left(C_0\right) \to H^2(D_1) \to H^2(Tot\ D) \to H^2\left(C_0\right) \to \cdots$
Observando (3.133) : $H^0(D_1) = 0$. Por hipótesis $H^n\left(C_0\right) = 0$ para todo n, luego $H^0\left(C_0\right) = H^1\left(C_0\right) = H^2\left(C_0\right) = 0$.
Con estos valores exhibidos, de la sucesión anterior : $H^0(Tot\ D) = 0$,
$H^1(D_1) \cong H^1(Tot\ D)$, $H^2(D_1) \cong H^2(Tot\ D)$, ...

Por el mismo argumento, para la sucesión exacta corta $D_2 \rightarrowtail D_1 \twoheadrightarrow C_1$ donde $D_2 =_1 F^2\left(Tot\ D\right)$ y $C_1 = D_1/D_2$.
La siguiente sucesión larga es exacta
$0 \to H^1(D_2) \to H^1(D_1) \to H^1\left(C_1\right) \to H^2(D_2) \to H^2(D_1) \to H^2\left(C_1\right) \to \cdots$
Nuevamente observando (3.133), se ve que $H^1(D_2) = 0$; por hipótesis $H^n\left(C_1\right) = 0$. De manera que, de la sucesión anterior : $H^1(D_1) = 0$, $H^2(D_2) \cong H^2(D_1)$, ...
Hasta aquí se obtiene $H^1(Tot\ D) = 0$, puesto que $H^1(D_1) \cong H^1(Tot\ D)$.
Repitiendo otra vez el argumento, para la sucesión exacta corta $D_3 \rightarrowtail D_2 \twoheadrightarrow C_2$ donde $D_3 =_1 F^3\left(Tot\ D\right)$ y $C_2 = D_2/D_3$,
existe la siguiente sucesión exacta larga de cohomologías con $H^2(D_3) = 0$:
$0 \to H^2(D_3) \to H^2(D_2) \to H^2\left(C_2\right) \to H^3(D_3) \to H^3(D_2) \to H^3\left(C_2\right) \to \cdots$
De donde se obtiene que $H^2(D_2) = 0$, $H^3(D_3) \cong H^3(D_2)$, ...

Recordando $H^2(D_2) \cong H^2(D_1)$, resulta que $H^2(D_1) = 0$. Pero $H^2(D_1) \cong H^2(Tot\ D)$, luego $H^2(Tot\ D) = 0$.
Continuando el proceso de los tres pasos anteriores, se concluye que $H^n(Tot\ D) = 0$ para todo $n = 0, 1, \ldots$ ■

Ahora, ya se está en condiciones para enunciar y probar EL TEOREMA DE EXISTENCIA Y CONVERGENCIA de la sucesión espectral de Grothendieck.

Se va a considerar tres categorías abelianas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ y dos funtores aditivos $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$.

Asimismo, se considerará que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen suficientes inyectivos; esto significa que todos los objetos en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen resoluciones inyectivas. Así es posible construir los funtores derivados derechos de F, G y $G \circ F$. El siguiente teorema establece una relación entre estos funtores derivados mediante una sucesión espectral.

Definición 3.5.11 *Se dice que un objeto B de $\mathfrak{B}$ es G-acíclico (derecho) si*

$$R^q G(B) = \begin{cases} G(B), & q = 0 \\ 0, & q \geq 1 \end{cases} \tag{3.134}$$

Proposición 2.5.14 muestra como ejemplo que un objeto inyectivo I es T-acíclico (derecho).

Teorema 3.5.12 (Sucesión Espectral de Grothendieck) *Sean $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ funtores covariantes aditivos de categorías abelianas, donde $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen suficientes inyectivos. Si I es un objeto inyectivo de $\mathfrak{A}$ y $F(I)$ es G-acíclico, entonces existe una sucesión espectral $E = \{E_n(A)\}$ correspondiente a cada objeto A de $\mathfrak{A}$, tal que*

$$E_1^{p,q} = (R^p G)(R^{q-p} F)(A) \Rightarrow R^q(GF)(A) \tag{3.135}$$

Es decir, la sucesión espectral E converge finitamente al objeto graduado asociado a $\{R^q(GF)(A)\}$, filtrado adecuadamente.

Prueba.- Con un objeto dado A de $\mathfrak{A}$ se va a construir apropiadamente un complejo doble positivo B de cocadena en $\mathfrak{C}$, el cual permitirá calcular la sucesión espectral denotada por ${}_2E$ que converja finitamente al objeto graduado asociado a $\{H^q(Tot\, B)\}$, donde $B = GJ$ y J también es un complejo doble de cocadena en $\mathfrak{B}$.

Sea A un objeto en la categoría $\mathfrak{A}$, la cual por hipótesis tiene suficientes inyectivos, luego existe una resolución inyectiva I de A. Sea

$$I : \cdots \longleftarrow I_{n+1} \longleftarrow I_n \longleftarrow \cdots \longleftarrow I_1 \longleftarrow I_0 \longleftarrow 0 \tag{3.136}$$

donde I_r es un objeto inyectivo de $\mathfrak{A}$ para $r = 0, 1, \ldots$
Aplicando el funtor covariante aditivo F a (3.136) se obtiene el siguiente complejo de

cocadena en $\mathfrak{B}$, escrito por

$$FI : \cdots \longleftarrow FI_{n+1} \xleftarrow{\partial_n} FI_n \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\partial_1} FI_1 \xleftarrow{\partial_0} FI_0 \longleftarrow 0 \tag{3.137}$$

Como $\mathfrak{B}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos y FI es un complejo de cocadena en $\mathfrak{B}$, por Lema 3.5.8 se obtiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathfrak{B}$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & L_{2,1} \arrow[l] \arrow[u] & J_{1,1} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{1,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] & L_{1,1} \arrow[l] \arrow[u] & J_{0,1} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{0,1} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
\cdots & L_{2,0} \arrow[l] \arrow[u] & J_{1,0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{1,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] & L_{1,0} \arrow[l] \arrow[u] & J_{0,0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] & K_{0,0} \arrow[l, tail] \arrow[u] \\
\cdots & B_2 \arrow[l] \arrow[u, tail] & FI_1 \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] & Z_1 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail] & B_1 \arrow[l] \arrow[u, tail] & FI_0 \arrow[l, two heads] \arrow[u, tail] & Z_0 \arrow[l, tail] \arrow[u, tail]
\end{tikzcd} \tag{3.138}$$

donde cada columna es una resolución inyectiva completa del objeto que aparece en su pie y $L_{r+1,s} \twoheadleftarrow J_{r,s} \leftarrowtail K_{r,s}$ es exacta.
Aplicando Proposición 3.5.9 al diagrama (3.138), se obtiene el siguiente diagrama conmutativo (se nota que se omitió la columna de Z_0)

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & J_{2,1} \arrow[l] \arrow[u] & J_{1,1} \arrow[l] \arrow[u] & J_{0,1} \arrow[l] \arrow[u] \\
\cdots & J_{2,0} \arrow[l] \arrow[u] & J_{1,0} \arrow[l] \arrow[u] & J_{0,0} \arrow[l] \arrow[u] \\
\cdots & FI_2 \arrow[l] \arrow[u, tail] & FI_1 \arrow[l] \arrow[u, tail] & FI_0 \arrow[l] \arrow[u, tail]
\end{tikzcd} \tag{3.139}$$

donde cada fila es un complejo de cocadena y la $r-$ésima columna es una resolución inyectiva completa de FI_r; $r = 0, 1, \ldots$

Ahora, si se designan los morfismos verticales y horizontales, respectivamente, por $J_{r,s+1} \xleftarrow{\partial^j_{r,s}} J_{r,s}$ y $J_{r+1,s} \xleftarrow{d^j_{r,s}} J_{r,s}$; usando el funtor covariante aditivo G y el diagrama (3.139) resulta que:

a) $G\left(d^j_{r+1,s}\right) G\left(d^j_{r,s}\right) = G\left(d^j_{r+1,s} d^j_{r,s}\right) = G(0) = 0$

b) $G\left(\partial^j_{r,s+1}\right) G\left(\partial^j_{r,s}\right) = G\left(\partial^j_{r,s+1} \partial^j_{r,s}\right) = G(0) = 0$

c) $G\left(d^j_{r,s+1}\right) G\left(\partial^j_{r,s}\right) = G\left(d^j_{r,s+1}\partial^j_{r,s}\right) = G\left(\partial^j_{r+1,s} d^j_{r,s}\right) = G\left(\partial^j_{r+1,s}\right) G\left(d^j_{r,s}\right).$

Aplicando G al diagrama (3.139) y definiendo $\partial' = Gd$ y $\partial'' = (-1)^r G\partial$ sobre $GJ_{r,s}$, en virtud de *a)*, *b)* y *c)* se obtiene el siguiente complejo doble de cocadena $B = GJ$

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & GJ_{2,2} \arrow[l] \arrow[u] & GJ_{1,2} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[u] & GJ_{0,2} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[u] \\
\cdots & GJ_{2,1} \arrow[l] \arrow[u, "\partial''"] & GJ_{1,1} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[u, "\partial''"] & GJ_{0,1} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[u, "\partial''"] \\
\cdots & GJ_{2,0} \arrow[l] \arrow[u, "\partial''"] & GJ_{1,0} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[u, "\partial''"] & GJ_{0,0} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[u, "\partial''"]
\end{tikzcd}
\tag{3.140}
$$

El complejo doble GJ de cocadena es positivo, ya que existe $n_0 = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $GJ_{r,s} = 0$ si $r < 0$ o $s < 0$. Por Proposición 3.5.5, existe la SUCESIÓN ESPECTRAL denotada por ${}_2E$, asociada a la filtración del complejo $Tot\ GJ$ definida por (3.95), que CONVERGE FINITAMENTE al objeto graduado asociado a $\{H^q(Tot\ GJ)\}$,
donde $H\,(Tot\ GJ) = \{H^q(Tot\ GJ)\}$ tiene filtración inducida finita. Esto se escribe

$$ {}_2E_1^{p,q} \Rightarrow H^q\,(Tot\ GJ) \tag{3.141}$$

Lo cual indica que, para finalizar la prueba se deben calcular los dos objetos ${}_2E_1^{p,q}$ y $H^q\,(Tot\ GJ)$ con la idea de obtener los mismos que aparecen en el enunciado del teorema.
Usando Proposición 3.5.4 se calculará ${}_2E_1^{p,q}$, en los pasos *d)* y *e)*, como sigue :

d)
$$
\begin{aligned}
{}_2E_0^{p,q} &= H^{q-p}\,(GJ_{*,p};\partial')\,,\ \text{por (3.97)} \qquad (3.142)\\
&= \frac{Ker\left(GJ_{q-p,p} \xrightarrow{\partial'} GJ_{q-p+1,p}\right)}{Im\left(GJ_{q-p-1,p} \xrightarrow{\partial'} GJ_{q-p,p}\right)}\\
&= \frac{Ker\partial'_{q-p,p}}{Im\partial'_{q-p-1,p}} \qquad (3.143)
\end{aligned}
$$

Por la construcción del diagrama (3.138) se tiene
$K_{r+1,s} \hookleftarrow L_{r+1,s} \twoheadleftarrow J_{r,s} \hookleftarrow K_{r,s}$
donde $J_{r,s} = K_{r,s} \oplus L_{r+1,s}$ y $L_{r+1,s}$ es sumando directo de $K_{r+1,s}$, luego aplicando el funtor covariante aditivo G se obtiene
$GK_{r+1,s} \hookleftarrow GL_{r+1,s} \twoheadleftarrow GJ_{r,s} \hookleftarrow GK_{r,s}$ para todo $r, s = 0, 1, \ldots$
Ahora, usando la sucesión

$$\begin{tikzcd}
GJ_{q-p+1,p} & GK_{q-p+1,p} \arrow[l, tail, "n"'] & GL_{q-p+1,p} \arrow[l, tail, "m"'] & GJ_{q-p,p} \arrow[l, two heads, "p"'] \arrow[lll, bend right, "\partial'_{q-p,p}"'] & GK_{q-p,p} \arrow[l, tail]
\end{tikzcd}$$

se deduce que $Ker\partial'_{q-p,p} = GK_{q-p,p}$, pues

$$\begin{aligned}
Ker\partial'_{q-p,p} &= \{a \in GJ_{q-p,p} \ / \ n \circ m \circ p\,(a) = 0\} \\
&= \{a \in GJ_{q-p,p} \ / \ p\,(a) = 0\}, \ n \circ m \text{ es monic} \\
&= GK_{q-p,p}, \quad GJ_{q-p,p} = GK_{q-p,p} \oplus GL_{q-p+1,p}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, considerando la sucesión

$$\begin{tikzcd}
GJ_{q-p,p} & GK_{q-p,p} \arrow[l, tail, "j"'] & GL_{q-p,p} \arrow[l, tail, "i"'] & GJ_{q-p-1,p} \arrow[l, two heads, "p"'] \arrow[lll, bend right, "\partial'_{q-p-1,p}"']
\end{tikzcd}$$

se deduce que $Im\partial'_{q-p-1,p} = GL_{q-p,p}$, puesto que $GL_{q-p,p}$ es sumando directo de $GJ_{q-p,p}$;

$$\begin{aligned}
Im\partial'_{q-p-1,p} &= \partial'_{q-p-1,p}\,(GJ_{q-p-1,p}) \\
&= j \circ i \circ p\,(GJ_{q-p-1,p})\,, \text{ como } p \text{ es epic:} \\
&= j \circ i\,(GL_{q-p,p})
\end{aligned}$$

$j \circ i\,(GL_{q-p,p})$ se identifica con $GL_{q-p,p}$ por ser $j \circ i$ la inclusión en suma directa. Reemplazando en (3.143) el núcleo e imagen hallados :

$$_2E_0^{p,q} = GK_{q-p,p}/GL_{q-p,p} \tag{3.144}$$

Viendo el diagrama (3.130) y considerando el procedimiento de construcción del diagrama (3.138), se sabe que $L_{r,s}$ es sumando directo de $K_{r,s}$ para $r = 1, 2, \ldots$. Así existen objetos $C_{r,s}$ en $\mathfrak{B}$ tales que $K_{r,s} = L_{r,s} \oplus C_{r,s}$, de donde al aplicar G a $L_{r,s} \rightarrowtail K_{r,s}$ se deduce que $GL_{r,s} \rightarrowtail GK_{r,s} = GL_{r,s} \oplus GC_{r,s}$ y $\dfrac{G(K_{r,s})}{G(L_{r,s})} = G(C_{r,s})$, pero $C_{r,s} = \dfrac{K_{r,s}}{L_{r,s}}$; luego $\dfrac{G(K_{r,s})}{G(L_{r,s})} = G(\dfrac{K_{r,s}}{L_{r,s}})$.
Con este resultado, de (3.144) se obtiene que

$$_2E_0^{p,q} = G(K_{q-p,p}/L_{q-p,p}) \tag{3.145}$$

$e)$ Aquí se calcula el término principal $_2E_1^{p,q}$ de la sucesión espectral $_2E$.

$$
\begin{aligned}
{}_2E_1^{p,q} &= H^p(H^{q-p}(GJ,\partial'),\partial''),\ \text{por (3.97)}\\
&= \frac{Ker\left(\ H^{q-p}\left(GJ_{*,p};\partial'\right)\xrightarrow{\partial''}H^{q-p}\left(GJ_{*,p+1};\partial'\right)\right)}{Im\left(\ H^{q-p}\left(GJ_{*,p-1};\partial'\right)\xrightarrow{\partial''}H^{q-p}\left(GJ_{*,p};\partial'\right)\right)},\ \text{por (3.110) y (3.111)}\\
&= \frac{Ker\left(\ {}_2E_0^{p,q}\xrightarrow{\partial''}{}_2E_0^{p+1,q+1}\right)}{Im\left(\ {}_2E_0^{p-1,q-1}\xrightarrow{\partial''}{}_2E_0^{p,q}\right)},\ \text{por (3.142). Ahora de (3.145) :}\\
&= \frac{Ker\left(\ G\left(\frac{K_{q-p,p}}{L_{q-p,p}}\right)\xrightarrow{\partial''}G\left(\frac{K_{q-p,p+1}}{L_{q-p,p+1}}\right)\right)}{Im\left(\ G\left(\frac{K_{q-p,p-1}}{L_{q-p,p-1}}\right)\xrightarrow{\partial''}G\left(\frac{K_{q-p,p}}{L_{q-p,p}}\right)\right)},\ \text{por (3.131) para } r=q-p:\\
&= R^pG\left(Z_{q-p}/B_{q-p}\right),\ \text{de (3.137)} : Z_r/B_r = H^r\left(FI\right) = R^rF(A),\ \text{luego}\\
&= R^pG\left(R^{q-p}F(A)\right)\\
&= \left(R^pG\right)\left(R^{q-p}F\right)(A) \qquad (3.146)
\end{aligned}
$$

Sólo falta hallar $H^q(Tot\ GJ)$, lo cual se puede hacer de la siguiente manera: Como $G:\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ es un funtor covariante aditivo, entonces $R^qG:\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ es el q-ésimo funtor derivado derecho de G y $R^qG\left(FI_r\right)=H^q\left(GJ_r\right)$ para $r=0,1,\ldots$ donde FI_r es un objeto de $\mathfrak{B}$ y J_r es una resolución inyectiva de FI_r según (3.139). Para cada objeto inyectivo I_r de $\mathfrak{A}$, por hipótesis FI_r es G-acíclico, luego se obtiene que

$$
R^qG\left(FI_r\right)=\begin{cases} G(FI_r), & q=0\\ 0, & q\geq 1\end{cases} \qquad (3.147)
$$

Así, las cohomologías de las columnas del siguiente complejo doble de cocadena, D, obtenido de (3.139) aplicando G, se ANULAN.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & GJ_{2,1} \arrow[l] \arrow[u] & GJ_{1,1} \arrow[l] \arrow[u] & GJ_{0,1} \arrow[l] \arrow[u] \\
\cdots & GJ_{2,0} \arrow[l] \arrow[u] & GJ_{1,0} \arrow[l] \arrow[u] & GJ_{0,0} \arrow[l] \arrow[u] \\
\cdots & GFI_2 \arrow[l] \arrow[u] & GFI_1 \arrow[l] \arrow[u] & GFI_0 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad (3.148)
$$

Luego por Proposición 3.5.10,

la cohomología del complejo total para D se anula. (3.149)

Denotando con D_1 al complejo $Tot\,GJ$ cuando es visto como subcomplejo de $Tot\,D$, se tiene la sucesión exacta corta $D_1 \rightarrowtail Tot\ D \twoheadrightarrow GF(I)$ de complejos de cocadena, donde $D_1 = {}_2F^1\,(Tot\ D)$ y $(Tot\ D)\,/D_1 = GF(I)$. Por Teorema 2.2.4, la siguiente sucesión larga es exacta
$0 \to H^0(D_1) \to H^0(Tot\,D) \to H^0\,(GF(I)) \to H^1(D_1) \to H^1(Tot\,D) \to H^1\,(GF(I)) \to H^2(D_1) \to H^2(Tot\ D) \to H^2\,(GF(I)) \to H^3(D_1) \to H^3(Tot\ D) \to \cdots$
Pero, por (3.149) se tiene $H^q(Tot\ D) = 0$ para todo $q = 0, 1, \ldots$.
Así, de la sucesión anterior se extrae
$0 \to H^0\,(GF(I)) \xrightarrow{\sim} H^1(D_1) \to 0 \to H^1\,(GF(I)) \xrightarrow{\sim} H^2(D_1) \to 0 \to \cdots$
Considerando que $H^n(D_1) \cong H^{n-1}\,(Tot\ GJ)$ para $n = 1, 2, \ldots$, se obtiene sucesivamente:
$R^0\,(GF)\,(A) = H^0\,(GF(I)) \cong H^1(D_1) \cong H^0\,(Tot\ GJ)$;
$R^1\,(GF)\,(A) = H^1\,(GF(I)) \cong H^2(D_1) \cong H^1\,(Tot\ GJ)$; $\ldots$
En general, $R^q\,(GF)\,(A) \cong H^q\,(Tot\ GJ)$ para $q = 0, 1, \ldots$.
De esto, como dos objetos isomorfos se identifican, se puede deducir que

$$H^q\,(Tot\ GJ) = R^q\,(GF)\,(A) \tag{3.150}$$

En consecuencia, reemplazando en (3.141) los valores hallados en (3.146) y (3.150), se concluye que para cada objeto A de $\mathfrak{A}$, existe una sucesión espectral $E = {}_2E$ satisfaciendo las condiciones requeridas; es decir, tal que
$E_1^{p,q} = (R^pG)(R^{q-p}F)(A) \Rightarrow R^q(GF)(A)$ ■

Además, existe una sucesión espectral ${}_1E = \{{}_1E_n(A)\}$ correspondiente a cada objeto A de $\mathfrak{A}$, tal que

$${}_1E_\infty^{p,q} = \begin{cases} R^q\,(GF)\,A, & \text{si} \quad p = q \\ 0, & \text{si} \quad p \neq q \end{cases} \tag{3.151}$$

En efecto; puesto que GJ es un complejo doble de cocadena positivo, por Proposición 3.5.5 existe la sucesión espectral denotada por ${}_1E$, cuyos dos primeros términos se exhiben en (3.96). Dicha sucesión converge finitamente al objeto graduado asociado a $\{H^q(Tot\ GJ)\}$.
Usando Proposición 3.5.4, se pueden calcular los dos primeros términos de la sucesión espectral ${}_1E$ en $f)$ y $g)$:

$f)$

$$\begin{aligned} {}_1E_0^{p,q} &= H^{q-p}\,(GJ_{p,*}; \partial'')\,, \text{ por (3.96)} \\ &= R^{q-p}G\,(FI_p)\,, \text{ como } FI_p \text{ es } G \text{ acíclico:} \\ &= \begin{cases} G\,(FI_p)\,, & \text{si} \quad q - p = 0 \\ 0, & \text{si} \quad q - p \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} G\,(FI_p)\,, & \text{si} \quad p = q \\ 0, & \text{si} \quad p \neq q \end{cases} \end{aligned}$$

$$g)\qquad
\begin{aligned}
{}_1E_1^{p,q} &= H^p(H^{q-p}(GJ,\partial''),\partial'),\ \text{por (3.96)}\\
&= \frac{Ker\left(H^{q-p}\left(GJ_{p,*};\partial''\right) \xrightarrow{\partial'} H^{q-p}\left(GJ_{p+1,*};\partial''\right)\right)}{Im\left(H^{q-p}\left(GJ_{p-1,*};\partial''\right) \xrightarrow{\partial'} H^{q-p}\left(GJ_{p,*};\partial''\right)\right)},\ \text{por } f)\\
&= \begin{cases} \dfrac{Ker\left(G\left(FI_q\right) \xrightarrow{\partial'} G\left(FI_{q+1}\right)\right)}{Im\left(G\left(FI_{q-1}\right) \xrightarrow{\partial'} G\left(FI_q\right)\right)}, & \text{si}\quad q=p\\[2ex] \dfrac{Ker\left(0 \xrightarrow{\partial'} 0\right)}{Im\left(0 \xrightarrow{\partial'} 0\right)}, & \text{si}\quad q\neq p \end{cases}\\
&= \begin{cases} R^q\left(GF\right)A, & \text{si}\quad p=q\\ 0, & \text{si}\quad p\neq q \end{cases}
\end{aligned}$$

Usando cohomología se pueden calcular los otros términos de la sucesión espectral ${}_1E$ recursivamente :

$$h)\qquad
\begin{aligned}
{}_1E_2^{p,q} &= H^p\left({}_1E_1^{*,q},d_1\right),\ \text{como } deg d_1=(2,1):\\
&= \frac{Ker\left({}_1E_1^{p,q} \xrightarrow{d_1} {}_1E_1^{p+2,q+1}\right)}{Im\left({}_1E_1^{p-2,q-1} \xrightarrow{d_1} {}_1E_1^{p,q}\right)},\ \text{por } g):\\
&= \begin{cases} \dfrac{Ker\left(R^q\left(GF\right)A \xrightarrow{d_1} 0\right)}{Im\left(0 \xrightarrow{d_1} R^q\left(GF\right)A\right)}, & \text{si}\quad p=q\\[2ex] \dfrac{Ker\left(0 \xrightarrow{d_1} {}_1E_1^{p+2,q+1}\right)}{Im\left({}_1E_1^{p-2,q-1} \xrightarrow{d_1} 0\right)}, & \text{si}\quad p\neq q \end{cases}\\
&= \begin{cases} R^q\left(GF\right)A, & \text{si}\quad p=q\\ 0, & \text{si}\quad p\neq q \end{cases}
\end{aligned}$$

Aquí, es conveniente recalcar que el morfismo d_1 es nulo.
Por el dual de (3.32), se sabe que $deg\ d_r=(r+1,1)$ para la r-ésima diferencial d_r de la sucesión espectral ${}_1E$. Así, para $r\geq 1$ las partes $g)$ y $h)$ implican que, $d_r=0$ y

$$ {}_1E_r^{p,q} = \begin{cases} R^q\left(GF\right)A, & \text{si}\quad p=q\\ 0, & \text{si}\quad p\neq q \end{cases} \tag{3.152}$$

Por consiguiente $\quad {}_1E_\infty^{p,q} = \begin{cases} R^q\,(GF)\,A, & \text{si} \quad p = q \\ 0, & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$

Se finaliza este trabajo mostrando la utilidad de sucesiones espectrales mediante un resultado, Teorema 3.5.21 de Lyndon-Hochschild-Serre, que permite calcular el grupo de cohomología utilizando sucesiones espectrales [4].

El Grupo de Cohomología con Sucesiones Espectrales.

Sea G un grupo escrito multiplicativamente con identidad e. Se denotará $\mathbb{Z}G = \{r \;/\; r = \sum\limits_{x\in G} m_r(x)x,$ para alguna función $m_r : G \to \mathbb{Z}$ con $m_r(x) = 0$ excepto para un número finito de elementos x de $G\}$.

Sea $\imath : G \to \mathbb{Z}G$ una aplicación definida por $\imath(g) = \sum\limits_{x\in G} m_g(x)x$,
donde para cada $g \in G$ existe $m_g(x) = \begin{cases} 1, & g = x \\ 0, & g \neq x \end{cases}$
La aplicación $\imath : G \to \mathbb{Z}G$ es llamada LA INMERSIÓN y claramente $\imath G \subseteq \mathbb{Z}G$, luego $\mathbb{Z}G \neq \emptyset$.
Ahora, considerando $r = \sum\limits_{x\in G} m_r(x)x$ y $s = \sum\limits_{x\in G} m_s(x)x$ se define la suma $r + s$ y la multiplicación rs en $\mathbb{Z}G$, respectivamente, por

$$r + s = \sum_{x\in G} \left[m_r(x) + m_s(x)\right] x \tag{3.153}$$

$$rs = \sum_{x,y\in G} \left[m_r(x)m_s(x)\right] xy \tag{3.154}$$

Proposición 3.5.13 *Dado un grupo G, $\mathbb{Z}G$ con las operaciones dadas en (3.153) y (3.154) es un anillo unitario.*

Prueba.- Con las operaciones dadas se verifican los siguientes axiomas de anillo unitario para $\mathbb{Z}G$:

R_1. $(\mathbb{Z}G, +)$ es un grupo abeliano, esta estructura es transferida del grupo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$ mediante (3.153); aquí es conveniente enfatizar que $0 = \sum\limits_{x\in G} m_0(x)x$ donde $m_0 : G \to \mathbb{Z}$ es función nula y $-r = \sum\limits_{x\in G} (-m_r)(x)x$ son la identidad aditiva e inverso aditivo en $\mathbb{Z}G$.

R_2. La multiplicación en $\mathbb{Z}G$ es asociativa.
Esta propiedad se verifica usando (3.154), la asociatividad de la multiplicación

en $\mathbb{Z}$ y en G, como sigue:

$$\begin{aligned} r\,(st) &= \sum_{x;y,z\in G} \left[m_r(x)\,(m_s(y)m_t(z))\right] x(yz) \\ &= \sum_{x,y;z\in G} \left[(m_r(x)m_s(y))\,m_t(z)\right](xy)z \\ &= (rs)t. \end{aligned}$$

R_3. Se cumplen las leyes distributivas en $\mathbb{Z}G$, las cuales se siguen de las correspondientes en $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} r\,(s+t) &= \sum_{x,y\in G} m_r(x)\left[m_s(y)+m_t(y)\right] xy \\ &= \sum_{x,y\in G} \left[m_r(x)m_s(y)+m_r(x)m_t(y)\right] xy \\ &= rs+rt; \qquad \text{análogamente } (r+s)t = rt+st. \end{aligned}$$

R_4. $\mathbb{Z}G$ tiene elemento unitario, el cual es $\imath(e) = \sum\limits_{y\in G} m_e(y)y$ donde $m_e(y) = 1$ para $y = e$ y $m_e(y) = 0$ para $y \neq e$. De hecho, se cumplen las igualdades $r\imath(e) = r$ y $\imath(e)r = r$ pues

$$\begin{aligned} r\imath(e) &= \left(\sum_{x\in G} m_r(x)x\right)\left(\sum_{y\in G} m_e(y)y\right) \\ &= \sum_{x,y\in G} \left[m_r(x)m_e(y)\right] xy \\ &= \sum_{x\in G} m_r(x)xe \\ &= \sum_{x\in G} m_r(x)x \\ &= r; \quad \text{lo mismo se verifica la otra igualdad.} \end{aligned}$$

El elemento unitario de $\mathbb{Z}G$ es diferente de la identidad aditiva, ya que $\imath(e) = \sum\limits_{x\in G} m_e(x)x \neq 0 = \sum\limits_{x\in G} m_0(x)x$ por ser $m_e \neq m_0$.
De R_1, R_2, R_3 y R_4; se sigue que $\mathbb{Z}G$ es un anillo unitario ■
El anillo de la proposición anterior es llamado ANILLO DE GRUPO ENTERO y se caracteriza por la siguiente propiedad universal.

Proposición 3.5.14 *Sea G un grupo, $\imath : G \to \mathbb{Z}G$ la inmersión y R un anillo. Para cualquier función $f : G \to R$ con $f(xy) = f(x)f(y)$ y $f(e) = 1_R$ (elemento unitario del anillo R) existe un único homomorfismo de anillos $f' : \mathbb{Z}G \to R$ tal que $f'\imath = f$.*

Prueba.- Se define $f'\left(\sum_{x\in G} m(x)x\right) = \sum_{x\in G} m(x)f(x)$. Entonces f' es el único homomorfismo de anillos tal que $f'\imath = f$ ■

Definición 3.5.15 *Un G-módulo izquierdo (módulo izquierdo sobre un grupo G o simplemente un G-módulo) es un grupo abeliano A provisto de un homomorfismo $\sigma : G \to Aut\,(A)$ de grupos, definido por $\sigma(x)(a) = x \circ a$, $\forall x \in G$, $\forall a \in A$.*

Cada grupo aditivo abeliano A es un G-módulo (trivial) bajo el homomorfismo trivial de grupos $\sigma : G \to Aut\,(A)$ dado por $\sigma(g) = 1_A$ para todo $g \in G$.

Proposición 3.5.16 *Sea G un grupo. Entonces A es un G-módulo si y sólo si A es $\mathbb{Z}G$-módulo.*

Prueba:

$\Rightarrow$) Asumiendo que A es un G-módulo, se sabe que existe un homomorfismo $\sigma : G \to Aut\,(A)$ de grupos, luego se sigue que $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ y $\sigma(e) = 1_A$. Como $End\,(A)$ es un anillo y $Aut\,(A) \subseteq End\,(A)$, se ve que $\sigma : G \to End\,(A)$. Por Proposición 3.5.14, existe $\sigma' : \mathbb{Z}G \to End\,(A)$ homomorfismo de anillos tal que $\sigma'\imath = \sigma$; es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\imath"'] & End\,(A) \\ \mathbb{Z}G \arrow[ur, "\sigma'"'] & \end{tikzcd}$$

Según Definición 1.1.1, A es $\mathbb{Z}G$-módulo.

$\Leftarrow$) Recíprocamente; si A es $\mathbb{Z}G$-módulo, entonces existe un homomorfismo de anillos $\sigma' : \mathbb{Z}G \to End\,(A)$. Ahora, se consigue $\sigma : G \to Aut\,(A)$ definiendo $\sigma(g) = \sigma'\imath(g)$, resulta que $\sigma(g)$ tiene inversa. En efecto, para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = e$. Ahora, del hecho que σ' preserva la multiplicación y el elemento unitario se obtiene $\sigma(g)\sigma(g^{-1}) = \sigma(e) = 1_A$; análogamente se deduce $\sigma(g^{-1})\sigma(g) = 1_A$. Así la inversa de $\sigma(g)$ es $\sigma(g^{-1})$ para cada $g \in G$.
Usando el hecho que $\sigma(g)$ tiene inversa, se sigue inmediatamente que $\sigma(g)$ es inyectiva y sobreyectiva. Así $\sigma(g) \in Aut\,(A)$ para cada $g \in G$. Por consiguiente, A es un G-módulo ■

Proposición 3.5.17 *Sea G un grupo y $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -) : \mathfrak{M}^l_{\mathbb{Z}G} \to \mathfrak{Ab}$ dado por $A \mapsto Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$. Entonces $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$ es un funtor covariante aditivo.*

Prueba.- Como el grupo aditivo abeliano $\mathbb{Z}$ es un G-módulo, por Proposición 3.5.16 $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo. Para $\Lambda = \mathbb{Z}G$, de Ejemplo 1.2.2 se sigue que $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$ es un funtor covariante; luego según Proposición 1.7.14 se deduce que el funtor covariante $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$ es aditivo ■

Proposición 3.5.18 *Sea $\varphi : H \to G$ un homomorfismo de grupos, entonces $\mathbb{Z}\varphi : \mathbb{Z}H \to \mathbb{Z}G$ es un homomorfismo de anillos definido por $\mathbb{Z}\varphi\left(\sum\limits_{x\in H} m(x)x\right) = \sum\limits_{x\in H} m(x)\varphi(x)$.*

Prueba.- Se verifica que $\mathbb{Z}\varphi$ preserva la suma y la multiplicación ■
También se puede probar la proposición anterior utilizando Proposición 3.5.14.

Corolario 3.5.19 *Sea N un subgrupo de un grupo K. Si A es un K-módulo, entonces A es un N-módulo.*

Prueba.- En virtud de Proposición 3.5.16, A es K-módulo implica que existe un homomorfismo de anillos $\sigma' : \mathbb{Z}K \to End(A)$. Por otro lado, como N es un subgrupo de K, se puede considerar el homomorfismo inclusión $i : N \to K$ de grupos, luego Proposición 3.5.18 indica que $\mathbb{Z}i : \mathbb{Z}N \to \mathbb{Z}K$ es un homomorfismo de anillos, de modo que la composición $\sigma' \circ \mathbb{Z}i : \mathbb{Z}N \to End(A)$ es un homomorfismo de anillos; así A es un $\mathbb{Z}N$-módulo, por Proposición 3.5.16 se deduce que A es un N-módulo ■

Según Proposición 8.1 de [4], los bifuntores $Ext^n_\Lambda(-,-)$ y $\overline{Ext}^n_\Lambda(-,-)$ para $n = 0, 1, \ldots$ son naturalmente equivalentes. Esto quiere decir que el bifuntor $Ext^n_\Lambda(-,-)$ es balanceado. Entonces se obtiene el valor de $Ext^n_\Lambda(A,B)$ vía resolución proyectiva de A o bien utilizando resolución inyectiva de B; i.e., se obtiene $Ext^n_\Lambda(A,B)$ como el valor del funtor derivado derecho de $Hom_\Lambda(-,B)$ en A o bien como el valor del funtor derivado derecho de $Hom_\Lambda(A,-)$ en B.
En virtud de Proposición 3.5.17, dado un grupo G, $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-) : \mathfrak{M}^l_{\mathbb{Z}G} \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo, luego para $n \geq 0$ los funtores derivados derechos de $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-)$ son $Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-) = R^n(Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-)) : \mathfrak{M}^l_{\mathbb{Z}G} \to \mathfrak{Ab}$. Por consiguiente está definido $Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$ para todo $A \in \left|\mathfrak{M}^l_{\mathbb{Z}G}\right|$.

Definición 3.5.20 *Sea G un grupo, A un G-módulo. El n-ésimo grupo de cohomología de G con coeficientes en A denotado por $H^n(G,A)$ se define como $H^n(G,A) = Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$, donde $\mathbb{Z}$ es visto como un G-módulo trivial.*
El grupo graduado $\{H^n(G,A)\}$ por $\mathbb{N} \cup \{0\}$ es llamado el grupo de cohomología de G con coeficientes en A.

En términos de Λ-módulos, según Proposición 3.5.16, la categoría de G-módulos es $\mathfrak{M}^l_{\mathbb{Z}G}$.

Teorema 3.5.21 (Lyndon-Hochschild-Serre) *Dada la sucesión exacta corta de grupos $N \overset{\imath}{\rightarrowtail} K \overset{p}{\twoheadrightarrow} Q$ y dado un K-módulo A, existe una sucesión espectral $E = \{E_n(A)\}$ tal que*

$$E_1^{p,q} = H^p\left(Q, H^{q-p}(N,A)\right) \Rightarrow H^q(K,A) \tag{3.155}$$

Es decir, la sucesión espectral E converge finitamente al grupo graduado asociado al grupo de cohomología $\{H^q(K,A)\}$, filtrado adecuadamente.

Prueba.- Se realizará aplicando el teorema de la sucesión espectral de Grothendieck, por lo que se requiere verificar las hipótesis correspondientes y esto se hace en los dos siguientes items:

i) Se va a construir funtores $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ covariantes aditivos entre categorías abelianas donde $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tengan suficientes inyectivos.
Sean $\mathfrak{A}$ la categoría de K-módulos, $\mathfrak{B}$ la categoría de Q-módulos y $\mathfrak{C}$ la categoría de grupos abelianos, entonces $\mathfrak{A} = \mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}K}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}Q}$ y $\mathfrak{C} = \mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}}$. Por Proposición 1.7.19 se sigue que las categorías $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ son abelianas; mientras que Proposición 2.4.12 indica que las categorías $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen suficientes inyectivos.
Según Proposición 3.5.17 para $G = N$ se tiene que $Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, -) : \mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}N} \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo. Pero Corolario 3.5.19 proporciona la inclusión $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}K} \subseteq \mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}N}$, luego definiendo $F = Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, -)|_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{Ab}$ se nota que para cada $A \in |\mathfrak{A}|$, $F(A) = Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A)$ es un grupo aditivo abeliano, de donde $F(A)$ es un Q-módulo trivial y así $F(A) \in |\mathfrak{B}|$. Por lo tanto $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas.
Nuevamente, si se define $G = Hom_{\mathbb{Z}Q}(\mathbb{Z}, -) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, aplicando Proposición 3.5.17 para $G = Q$, se deduce que $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ es un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas.

ii) Si $I \in \left|\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}K}\right|$ es inyectivo, entonces $F(I) = Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, I)$ es G-acíclico.
Según Proposición 2.5.14, para que $F(I)$ sea G-acíclico es suficiente verificar que $F(I) \in \left|\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}Q}\right|$ es inyectivo siempre que $I \in \left|\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}K}\right|$ es inyectivo. En otras palabras F preserva inyectivos. En efecto, el homomorfismo $K \xrightarrow{p} Q$ de grupos induce homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}p : \mathbb{Z}K \to \mathbb{Z}Q$. Este hecho permite considerar cada Q-módulo como K-módulo y cada Q-homomorfismo como K-homomorfismo.
Recordando que $F(I) = Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, I) = I^N$, se va a demostrar que I^N es Q-módulo inyectivo.
Se puede considerar el siguiente diagrama dado en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}Q}$ como el diagrama visto en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}K}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I^N \arrow[r, "\jmath"] & I \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[u, dotted, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

donde μ es monic, $\jmath$ es inclusión y $\varphi : B \to I^N$ es un morfismo dado en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}Q}$.
Viendo en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}K}$ los morfismos $\jmath\varphi : B \to I$ y $\mu : B \to A$ monic, del hecho que I es K-módulo inyectivo existe $\psi : A \to I$ tal que $\jmath\varphi = \psi\mu$. Además se verifica que $Im\psi \subseteq I^N = \{i \in I \ / \ ni = i, \ \forall n \in N\}$.
De hecho, dado $a \in A$ se tiene que $\psi(a) \in I$. Ahora, si $n \in N$ (fijo y arbitrario) se sigue que $n\psi(a) = \psi(na) = \psi(a)$, pues $na = a$ viendo A como Q-módulo trivial, luego A es N-módulo trivial.
Como $\psi : A \to I^N$ es un homomorfismo de Q-módulos tal que $\psi\mu = \varphi$, se deduce

que I^N es Q-módulo inyectivo. Esto quiere decir que si I es K- módulo inyectivo, resulta que $F(I) = I^N$ es un Q- módulo inyectivo.

De $i)$ y $ii)$ se ve que se satisfacen las hipótesis de Teorema 3.5.12, entonces para el objeto dado A de $\mathfrak{A}$ existe una sucesión espectral (de Grothendieck) $E = \{E_n(A)\}$ tal que

$$E_1^{p,q} = (R^pG)(R^{q-p}F)(A) \Rightarrow R^q(GF)(A) \tag{3.156}$$

Es decir, la sucesión espectral E converge finitamente al objeto graduado asociado a $\{R^q(GF)(A)\}$, filtrado adecuadamente.
Se completa la prueba, calculando valores de $E_1^{p,q}$ y $R^q(GF)(A)$ en los items $iii)$ y $iv)$:

iii) Dado que $F(A) = Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A)$ se tiene que
$(R^{q-p}F)(A) = Ext^{q-p}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A) = H^{q-p}(N, A)$, de donde

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} = (R^pG)\left(R^{q-p}F\right)(A) &= (R^pG)\left[(R^{q-p}F)(A)\right] \\ &= (R^pG)\left[H^{q-p}(N, A)\right] \\ &= H^p\left(Q, H^{q-p}(N, A)\right) \end{aligned}$$

$$\text{Por consiguiente } E_1^{p,q} = H^p(Q, H^{q-p}(N, A)) \tag{3.157}$$

iv) Por la ecuación (9.9) del capítulo XI de [8] se sabe que para Q-módulo C y K-módulos A, B (donde $Q = K/N$ resulta de la sucesión exacta corta de grupos) existe un isomorfismo natural

$$Hom_{\mathbb{Z}Q}(C, Hom_{\mathbb{Z}N}(B, A)) \cong Hom_{\mathbb{Z}K}(C \otimes B, A)$$

Considerando este isomorfismo como igualdad y que $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, para $C = B = \mathbb{Z}$ se obtiene que $Hom_{\mathbb{Z}Q}(\mathbb{Z}, Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A)) = Hom_{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z}, A)$, de donde

$$\begin{aligned} R^q(GF)(A) &= R^q\left(Hom_{\mathbb{Z}Q}(\mathbb{Z}, Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, -))\right)(A) \\ &= R^q\left(Hom_{\mathbb{Z}Q}(\mathbb{Z}, Hom_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A))\right) \\ &= R^q\left(Hom_{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z}, A)\right) \\ &= Ext^q_{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z}, A) = H^q(K, A). \end{aligned}$$

$$\text{Luego } R^q(GF)(A) = H^q(K, A) \tag{3.158}$$

Con (3.157) y (3.158) en (3.156), se garantiza la existencia una sucesión espectral $E = \{E_n(A)\}$ tal que $E_1^{p,q} = H^p(Q, H^{q-p}(N, A)) \Rightarrow H^q(K, A)$ ■

El siguiente ejemplo es una consecuencia directa del teorema anterior:

Ejemplo 3.5.22 *Si N es un subgrupo normal de un grupo K y A es un K-módulo, entonces $E_1^{p,q} = H^p(K/N, H^{q-p}(N, A)) \Rightarrow H^q(K, A)$.*

En consecuencia, el grupo de cohomología $H(K, A) = \{H^q(K, A)\}$ de un grupo K con coeficientes en K-módulo A, puede se aproximado por una sucesión espectral cuyos términos envuelven grupos de cohomología del grupo cociente K/N y del subgrupo N.

CONCLUSIONES

1. El isomorfismo entre los límites de dos sucesiones espectrales asociadas a dos complejos de cadena con filtraciones homológicamente finitas se induce a las homologías correspondientes a dichos complejos filtrados (Teorema 3.3.13).

2. Sean C y C' complejos de cadena filtrados con filtraciones finitas. Si $\varphi : C \to C'$ es un morfismo tal que $\varphi_* : E_\infty \to E'_\infty$ es un isomorfismo, entonces $\varphi_* : H(C) \to H(C')$ es un isomorfismo (Proposición 3.3.8 y Teorema 3.3.13).

3. Las dos sucesiones espectrales ${}_1E$ y ${}_2E$ de un complejo doble B de cocadena positivo convergen finitamente a los objetos graduados correspondientes asociados a la misma cohomología $H(Tot\, B)$ (Proposición 3.5.5).

4. Se ha descrito los funtores derivados derechos de un funtor compuesto a través de la sucesión espectral de Grothendieck, pues dado un objeto A en la categoría abeliana $\mathfrak{A}$ existe una sucesión espectral de Grothendieck (Teorema 3.5.12) que converge finitamente al objeto graduado asociado a $\{R^q\,(GF)\,(A)\}$, donde $R^q\,(GF)\,(A)$ es el q-ésimo funtor derivado derecho evaluado en A para cada $q \in \mathbb{Z}$.

5. El límite de la sucesión espectral de Grothendieck E es un objeto bigraduado de una categoría abeliana y se puede calcular usando funtores derivados de un funtor compuesto de dos funtores aditivos, como se mostró en (3.151) se tiene
$${}_1E_\infty^{p,q} = \begin{cases} R^q\,(GF)\,A, & \text{si} \quad p = q \\ 0, & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$$

6. Para un par exacto $\nabla = \{D, E, \alpha, \beta, \gamma\}$ en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$, siempre existe una sucesión espectral $E = \{(E_n, d_n)\}$ asociada en $\mathfrak{A}$ (Corolario 3.1.14).

7. El concepto de convergencia finita para sucesiones espectrales es la misma que la convergencia de sucesiones en espacios topológicos, puesto que da información del comportamiento de los términos de la sucesión correspondientes a números naturales suficientemente grandes. Si existe el límite de la sucesión espectral, éste debe ser un objeto graduado, por lo que el análisis de convergencia finita debe ser hecho en los términos de la sucesión espectral (como en el caso de complejos filtrados) en cada par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (Teorema 3.3.2).

8. Reformulando Teorema 3.5.12 se obtiene otro teorema de sucesión espectral de Grothendieck cambiando inyectivos por proyectivos y funtores derivados derechos por funtores derivados izquierdos. La prueba de este resultado se puede hacer usando argumentos análogos; es decir, con el lema de herradura para resoluciones proyectivas (parte de Teorema 2.5.10) se podría conseguir un lema que tenga el papel de Lema 3.5.8, con Proposición 3.5.3 se garantizaría la existencia de la sucesión espectral, con Proposición 3.5.1 se podría calcular el término exhibido de la sucesión, y para completar con el cálculo de la homología del complejo total se establecería un resultado análogo a Proposición 3.5.10.

Bibliografía

[1] CARTAN - EILENBERG: ***Homological Algebra***
Princeton University Press, New Jersey 1956.

[2] P. HILTON : ***Tópicos de Álgebra Homológica***
Octavo Colóquio Brasileiro de Matemática 1971.

[3] PETER HILTON : ***Curso de Álgebra Moderna***
Editorial Reverté, S.A- España 1977.

[4] P.J.HILTON U. STAMMBACH: ***A Course in Homological Algebra***
Springer - Verlag New York Heidelberg Berlin 1970.

[5] ANA MARÍA IBÁÑEZ: ***Homología Efectiva y Sucesiones Espectrales***
Logroño, setiembre 2007.

[6] FRANCISCO CESAR POLCINO MILIES: ***Anéis e Módulos***
Publicações do Instituto de Matematica e Estatistica da Universidade de São Paulo 1972.

[7] JOSEPH J. ROTMAN: ***The theory of Groups An Introduction***
Allyn and Bacon,Inc. Boston 1965.

[8] SAUNDERS MAC LANE: ***Homology***
Springer - Verlag Berlin Heidelberg 1995.

[9] SZE-TSEN-HU: ***Introduction to Homological Algebra***
Holden-Day, INC. San Francisco, Cambridge, london, Amsterdam 1968.

[10] CHARLES A. WEIBEL: ***An Introduction to Homological Algebra***
Cambridge University Press 1994.

[11] ——-: ***Stucture de L'anneav d'homologie d'une representation, C.R.Acad. Sci***
(Paris) 222(1946), 1419-1422.