

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA  
ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL



TÉSIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

TITULO

**DINÁMICA DE GRAFOS DE UN CICLO PARA  
FUNCIONES DE GRADO DIFERENTE DE UNO**

POR  
ALBA MARINA MÁLAGA SABOGAL

ASESOR  
DR. CHRISTIAN VALQUI

LIMA – PERÚ  
2011

# Índice

Resumen	v
<b>I Conceptos básicos</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.2. Estructura de capítulos . . . . .	4
Notas bibliográficas . . . . .	4
<b>2. Espacios de recubrimiento y espacios de levantamiento</b>	<b>5</b>
2.1. Espacios de recubrimiento . . . . .	5
2.2. Levantamientos . . . . .	6
2.3. Espacios de levantamiento . . . . .	7
Notas bibliográficas . . . . .	10
<b>3. Grafos topológicos</b>	<b>11</b>
3.1. Grafos . . . . .	11
3.2. Árboles . . . . .	16
3.3. Grafos de un ciclo . . . . .	17
Notas bibliográficas . . . . .	17
<b>II Grados diferentes de 1</b>	<b>18</b>
<b>4. Generalidades sobre grafos de ciclo único</b>	<b>19</b>
4.1. Recubrimiento de un grafo de ciclo único . . . . .	19
4.2. Levantamiento de funciones en un grafo de ciclo único . . . . .	23
4.3. Grado de funciones en un grafo de ciclo único . . . . .	25
<b>5. Funciones de grado mayor a 1 (en valor absoluto)</b>	<b>26</b>
5.1. Las clases de puntos fijos . . . . .	26
5.2. Los periodos posibles . . . . .	29

---

<b>6. Funciones de grado 0 y de grado <math>-1</math></b>	<b>32</b>
6.1. Levantamiento del problema para las funciones de grado 0 . . . . .	32
6.2. Levantamiento del problema para funciones de grado $-1$ . . . . .	33
<b>7. Conclusiones</b>	<b>34</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	34
<b>Bibliografía</b>	<b>38</b>

# Índice de figuras

## Conceptos básicos

1.1. Dos ejemplos de billares (con y sin barreras) y ejemplos de trayectorias. . .	3
2.1. Un ejemplo de recubrimiento del círculo . . . . .	6
2.2. El grafo peine: un ejemplo de espacio de levantamiento . . . . .	8
2.3. Otro ejemplo de espacio de levantamiento . . . . .	9
2.4. Ejemplos de espacios que tienen un espacio de levantamiento como recubrimiento . . . . .	9
2.5. Ejemplos de espacios que no tienen un espacio de levantamiento como recubrimiento . . . . .	10
3.1. Ejemplos de grafos estrella . . . . .	12
3.2. Ejemplo de grafo . . . . .	16
3.3. Grafo sigma y grafo theta . . . . .	17
4.1. Construcción de $T_n$ para el grafo sigma . . . . .	20
4.2. Construcción de $T$ a partir de $T_n$ . . . . .	21
4.3. Ilustración del recubrimiento universal del planeta de los baobabs . . . . .	22
7.1. Ejemplo de grafo que no se puede “desenrollar” en un espacio de levantamiento	35
7.2. Ejemplos de grafos que se “desenrollan” en espacios de levantamiento . . . .	36



# Resumen

El estudio de la dinámica en espacios de dimensión 1 es un área muy dinámica en estos días. El principal resultado, desde el cual comenzó todo es el teorema de Sharkovskii que afirma que dado el orden sobre los enteros positivos siguiente

$$1 \succ 2 \succ 4 \succ \dots \succ 2^n \cdot 7 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 3 \succ \dots \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 3 \succ \dots 9 \succ 7 \succ 5 \succ 3,$$

llamado orden de Sharkovskii, toda aplicación continua de un intervalo en sí mismo tiene un conjunto de periodos que es el conjunto de sucesores de cierto  $n$  con dicho orden. (Entre otros, Alsedà et al. (1993) expone una prueba muy clara de este resultado.)

Luego del estudio de la dinámica de un intervalo, es completamente natural estudiar la dinámica de aplicaciones continuas del círculo. En el estudio de la dinámica de éste, aparece la noción de grado de una aplicación. Se ha observado que el caso del grado 1 es el más complicado a estudiar y que el caso del grado de valor absoluto mayor o igual que dos es el más rápido.

Luego del intervalo, los espacios unidimensionales más manejables son los grafos. Entre éstos, el caso de los árboles ha sido ya analizado y descortezado a fondo, llegando a conclusiones sobre los periodos posibles a partir de las propiedades combinatorias del árbol.

Dado que el recubrimiento universal de un grafo es siempre un árbol, y que el recubrimiento universal de un grafo con un solo ciclo es un árbol infinito que posee una "traslación", la intuición dice que quizás procedimientos análogos a los del círculo puedan permitir hallar los periodos posibles de aplicaciones continuas de grafos con un solo ciclo, a partir de periodos de su levantamiento. El objetivo de este trabajo es explorar esa analogía para obtener resultados concretos.

## Parte I

# Conceptos básicos

Esta primera parte de la tesis presenta los conceptos básicos (y otros que no lo son tanto) necesarios para la comprensión de la misma. Contiene un capítulo de introducción, seguido de una descripción de los espacios de elevación, del recubrimiento universal, del levantamiento de una función y de los grafos topológicos.

# Capítulo 1

## Introducción

*Lo importante es invisible a los ojos.*

Antoine de Saint-Exupéry, "El Principito"

**RESUMEN:** Este capítulo presenta una breve introducción a la tesis. También se encuentra aquí una descripción del resto de capítulos de la tesis.

### 1.1. Introducción

En esta tesis se resuelve un problema particular de sistemas dinámicos en dimensión 1. El interés por resolver problemas de dinámica en dimensión 1 comenzó fuertemente entre los matemáticos en los años setenta. Lamentablemente la comunicación entre los matemáticos soviéticos que habían obtenido resultados significativos ya a fines de los sesenta y los matemáticos occidentales no fue tan fluida.

Así, Sharkovskii (1964) introdujo el orden siguiente sobre el conjunto  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$  :

$$1 \succ 2 \succ 4 \succ \dots \succ 2^\infty \dots \succ 2^n \cdot 7 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 3 \succ \dots \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 3 \succ \dots \succ 9 \succ 7 \succ 5 \succ 3,$$

y demostró que dado un intervalo  $I$  y dada cualquier función continua  $f : I \rightarrow I$  existe  $s \in \overline{\mathbb{N}}$  tal que los periodos posibles de  $f$ ,  $\text{Per}(f)$ , es el conjunto  $S(s)$  de los sucesores de  $s$  según este orden.

Un corolario del resultado de Sharkovskii es que toda función real de variable real que posee un punto periódico de periodo tres, posee puntos periódicos de todos los periodos. Sin embargo, el teorema de Sharkovskii no fue difundido entre los matemáticos del otro lado del Atlántico, en todo caso no lo suficiente para que Li y Yorke se enterasen del resultado. Fue el artículo titulado "Period three implies chaos" (Li y Yorke, 1985), el que despertó un gran interés por la dinámica en dimensión 1 en occidente desde los años setenta.

Otra razón para estudiar dinámica en dimensiones bajas es que a veces los fenómenos dinámicos más interesantes en problemas multidimensionales ocurren en realidad en pocas dimensiones. Esto ocurre por ejemplo en la modelación del clima con las ecuaciones de Lorentz que se terminan estudiando en dimensión 2 o 3.

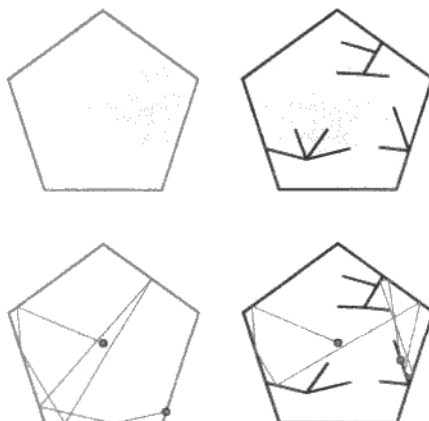


Figura 1.1: Dos ejemplos de billares (con y sin barreras) y ejemplos de trayectorias.

Un ejemplo de un fenómeno dinámico que sucede en dimensión dos, pero cuya dinámica se puede estudiar en dimensión 1 es el de los billares poligonales racionales. Lo que sucede es que los puntos de rebote en las paredes del billar forman un sistema de intercambio de intervalos.

En esta línea de investigación, aparece un resultado sobre los periodos posibles de una función continua de un círculo en sí mismo, demostrado independientemente por Efremova (1978) y por Block et al. (1978).

Una de las líneas posibles de extensión de estos resultados sería la de estudiar la dinámica en otros espacios de dimensión 1 que el círculo y el intervalo. Así, el caso de los árboles ha sido estudiado por largo tiempo, introduciéndose allí también un orden especial entre los periodos posibles, llamado orden de Baldwin (Alsedà et al., 2005).

Parece natural estudiar enseguida los grafos que tienen el mismo tipo de homotopía que el círculo, llamados grafos de un solo ciclo. En estos grafos se puede definir un concepto de grado análogamente a como se hace en el círculo.

Ahora bien, en el estudio de los periodos posibles de funciones del círculo en sí mismo, se ha observado que el caso de las funciones de grado 1 era el más difícil y por lo tanto el más interesante. Es por eso que la investigación del caso de funciones de grado 1 ha sido la primera a ser tomada en cuenta por los investigadores más avanzados (Alsedà y Ruelle, 2008). En esta tesis en cambio, se explora la dinámica de grafos de un solo ciclo para funciones de grado  $\neq 1$ .

Las motivaciones principales para resolver el problema planteado en esta tesis son por un lado la simplicidad del enunciado del problema y que puedan utilizarse herramientas análogas al caso del círculo. Por otro lado tenemos el hecho de que los resultados se pueden utilizar en sistemas dinámicos en dimensiones mayores como por ejemplo en el caso de billares con barreras internas, como el de la figura 1.1.

Entonces, la principal pregunta que se ha intentado resolver en la presente investigación ha sido la de hallar los periodos posibles para funciones de grado diferente de uno de un grafo de un ciclo en sí mismo. La pregunta que se ha logrado responder completamente es la de hallar los periodos posibles para funciones de grado mayor a uno en valor absoluto de

un grafo de un ciclo en sí mismo. Para los demás casos se han dado algunas aproximaciones.

El método utilizado se ha inspirado en el que describen Alsedà et al. (1993). Sin embargo, para lograr una tesis lo más autocontenida posible, se ha debido precisar los conceptos utilizados: esa es la primera parte de la tesis. En la segunda parte de la tesis se ha especificado la resolución del problema.

## 1.2. Estructura de capítulos

La tesis está estructurada en dos partes y en 8 capítulos:

- En la primera parte se explican los conceptos necesarios para la comprensión de la tesis. Salvo por el concepto de “espacio de levantamiento” (*lifted space*), introducido por Alsedà y Ruelle (2008), los demás conceptos suelen abordarse en cursos de fin de pregrado o comienzo de postgrado.
- El capítulo 2 describe los espacios de recubrimiento y el levantamiento de funciones, así como la definición del grado de una función continua del círculo en sí mismo. Luego se pasa a describir los espacios de levantamiento.
- El capítulo 3 se centra sobre la definición de grafo topológico. Asimismo se incluyen algunos ejemplos de grafos de un solo ciclo, objeto de estudio de la presente tesis.
- En la segunda parte se estudia las funciones de grado diferente de 1 de un grafo a un ciclo en sí mismo.
- El capítulo 4 aborda las propiedades generales de una función de un grafo de un ciclo en sí mismo y de su levantamiento.
- El capítulo 5 muestra que en el caso de las funciones de grado mayor que 1 en valor absoluto se pueden obtener resultados análogos a los del círculo.
- El capítulo 6 aborda el caso de las funciones de grado 0 y  $-1$ .
- Por último, el capítulo 7 resume las conclusiones de la tesis.

## Notas bibliográficas

Se recomienda comenzar el estudio de dinámica en dimensión 1 por el libro de Alsedà et al. (1993). El caso del círculo por ejemplo está trabajado al detalle, y algunos resultados en grafos conocidos en el momento de la publicación están presentes en el libro. Además la exposición se complementa con notas histórico-bibliográficas muy interesantes, que han sido la fuente de información para la redacción de la sección 1.1.

## Capítulo 2

# Espacios de recubrimiento y espacios de levantamiento

**RESUMEN:** Se definen los espacios de recubrimiento y los espacios de levantamiento.

### 2.1. Espacios de recubrimiento

Dados dos espacios topológicos  $X, Y$  denotamos por  $\mathcal{C}(X, Y)$  el espacio de las funciones continuas de  $X$  en  $Y$ .

**Definición 2.1.1** (Espacio de recubrimiento). Sea  $F$  un espacio topológico. Un recubrimiento de  $F$  es un par  $(E, \pi)$  en donde,  $E$  es un espacio topológico y  $\pi : E \rightarrow F$  es una función que satisface:

1.  $\pi$  es un homeomorfismo local.
2. Para todo punto  $y \in F$ , existe una vecindad  $V$  de  $y$  tal que  $\pi^{-1}(V)$  es la unión disjunta de abiertos  $U_i$  y la restricción de  $\pi$  a cada uno de estos abiertos es inyectiva.

*Ejemplo 2.1.2.* Uno de los ejemplos más simples es el caso del círculo, ilustrado en la figura 2.1.

**Definición 2.1.3** (Morfismos). Sean  $E, E'$  dos espacios topológicos,  $(F, \pi)$  un recubrimiento de  $E$  y  $(F', \pi')$  un recubrimiento de  $E'$ . Se dice que  $(g, g')$  es un morfismo de recubrimientos si y solamente si  $g : E \rightarrow E'$  es continua,  $g' : F \rightarrow F'$  es continua y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & g' & \\ & \longrightarrow & \\ F & & F' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ & & \\ E & \longrightarrow & E' \\ & g & \end{array}$$

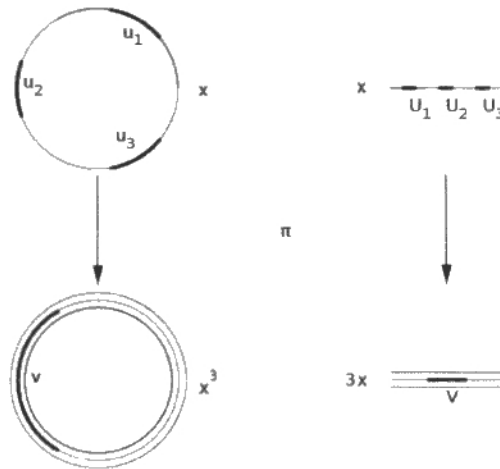


Figura 2.1: Un ejemplo de recubrimiento del círculo

(Es decir  $g \circ \pi = \pi' \circ g'$ .) Si  $E = E'$ ,  $F = F'$ ,  $g = id$  y  $g'$  es un homeomorfismo, diremos que  $g'$  es un automorfismo de  $(F, \pi)$ .

**Definición 2.1.4** (Recubrimiento universal). Sea  $E$  un espacio topológico y  $(F, \pi)$  un recubrimiento de  $E$ . Si  $F$  es simplemente conexo, se dice que  $F$  es el recubrimiento universal de  $E$  y se denota  $F = \tilde{E}$ .

*Observación 2.1.5.* El recubrimiento universal satisface la propiedad universal siguiente: si  $(F', \pi')$  es un recubrimiento de  $E$ , entonces existe  $(\tilde{E}, \pi'')$  recubrimiento de  $F'$  tal que  $\pi = \pi' \circ \pi''$ .

## 2.2. Levantamientos

Los espacios de recubrimiento se utilizan principalmente para transportar un problema de un espacio topológico a su recubrimiento, especialmente cuando el problema en cuestión es el de analizar ciertas propiedades de una función continua sobre el espacio topológico de base. En este contexto el concepto de levantamiento es muy importante.

**Definición 2.2.1** (Levantamiento de una función). Sea  $X$  un espacio topológico y  $(\mathcal{X}, \pi)$  un recubrimiento de  $X$ ,  $Y$  otro espacio topológico y  $(\mathcal{Y}, \rho)$  un recubrimiento de  $Y$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Un levantamiento de  $f$  es una función continua  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  (o  $\tilde{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ) que conmuta con el recubrimiento, es decir:

$$f \circ \pi = \rho \circ F \quad (\text{o } f \circ \pi = \rho \circ \tilde{F}).$$

## 2.3. Espacios de levantamiento

**Definición 2.3.1.** Un espacio de levantamiento es un espacio topológico conexo  $E$  dotado de dos funciones continuas  $\tau : E \rightarrow E$  (llamada *traslación*) y  $\mathfrak{R} : E \rightarrow E$  (llamada *retracción*) que satisfacen:

1. Si se denota  $\mathbb{R}_E = \{x \in E \mid \mathfrak{R}(x) = x\}$ , entonces  $\mathfrak{R}$  es constante en cada componente conexa de  $E \setminus \mathbb{R}_E$ .
2. Para cada  $x$ ,  $\mathfrak{R}^{-1}(x)$  es un conjunto compacto y conexo.
3. Para cada  $x$ ,  $\mathfrak{R}^{-1}(x) \setminus \{x\}$  tiene un número finito de componentes conexas.
4. Existe  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_E$  un homeomorfismo tal que

$$h(x+1) = \tau(h(x)), \forall x \in \mathbb{R},$$

y el conjunto

$$\{t \in [0, 1] \mid \mathfrak{R}^{-1}(h(t)) \neq \{h(t)\}\}$$

es finito.

*Observación 2.3.2.* Se identifica naturalmente  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{R}_E$ , lo cual induce una relación de orden y operaciones aritméticas en  $\mathbb{R}_E$ . Reemplazando posiblemente  $h(t)$  por  $h(t+a)$  para un  $a$  adecuado, gracias al ítem 4 de la definición supondremos sin pérdida de generalidad que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{R}^{-1}(n) = \{n\}$ .

**Proposición 2.3.3.** Sea  $E$  un espacio de levantamiento. La clausura de cada componente conexa  $C$  de  $E \setminus \mathbb{R}$  interseca  $\mathbb{R}$  en un solo punto  $x_C$  tal que  $\mathfrak{R}(C) = \{x_C\}$ .

*Demostración.* Como  $C$  es una componente conexa,  $C$  es abierto en  $E \setminus \mathbb{R}$  que es un abierto. Luego  $C$  es un subconjunto abierto de  $E$ , diferente del vacío y de  $E$ . Como  $E$  es conexo, entonces  $C$  no es un subconjunto cerrado de  $E$ . Luego existe  $x \in E \setminus C$  tal que  $x$  es un punto de acumulación de  $C$ . Como  $C$  es cerrado en  $E \setminus \mathbb{R}$ , entonces  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $\mathfrak{R}$  es constante en  $C$  y  $\mathfrak{R}$  es continua, entonces  $\mathfrak{R}(C) = \{\mathfrak{R}(x)\}$ . Como  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $\mathfrak{R}(x) = x$ .

Si  $y \in E \setminus C$  es otro punto de acumulación, el mismo razonamiento demuestra que  $\mathfrak{R}(C) = \{\mathfrak{R}(y)\} = \{y\}$ . Luego  $x = y$ . Por lo tanto hemos demostrado que la clausura de  $C$  interseca  $\mathbb{R}$  en un solo punto  $x$  tal que  $\mathfrak{R}(C) = \{x\}$ .  $\square$

**Proposición 2.3.4.** Sea  $(E, \tau, \mathfrak{R})$  un espacio de levantamiento, entonces:

$$\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}$$

$$\tau \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \circ \tau$$

*Demostración.* Sea  $x \in E$ . Supongamos primero que  $\mathfrak{R}(x) = x$ , entonces está claro que  $\mathfrak{R}^2(x) = \mathfrak{R}(x)$ . Además  $\tau(x) = x+1 \in \mathbb{R}$ , luego

$$\mathfrak{R}(\tau(x)) = \tau(x) = \tau(\mathfrak{R}(x)).$$

Supongamos ahora que  $\mathfrak{R}(x) \neq x$ . Sea  $C$  la componente conexa de  $E \setminus \mathbb{R}$  tal que  $x \in C$ . Entonces  $C \cap \mathbb{R} = \{\mathfrak{R}(x)\}$ , en particular  $\mathfrak{R}(x) \in \mathbb{R}$ , luego  $\mathfrak{R}^2(x) = \mathfrak{R}(x)$ . Como



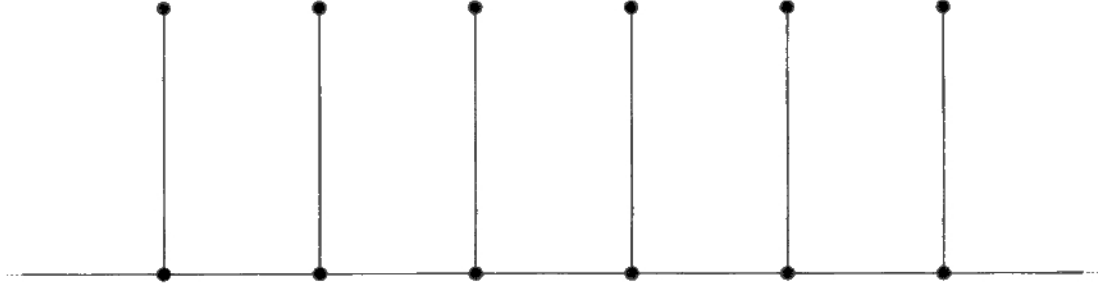


Figura 2.2: El grafo peine: un ejemplo de espacio de levantamiento

$\tau$  es un homeomorfismo,  $\tau(C)$  es también una componente conexa de  $E \setminus \mathbb{R}$ . Se tiene que  $\{\mathfrak{R}(\tau(x))\} = \tau(C) \cap \mathbb{R}$ . Como  $\mathfrak{R}(x) \in C$ , entonces  $\tau(\mathfrak{R}(x)) \in \tau(C)$ . Como además  $\tau(\mathfrak{R}(x))$  es real entonces  $\tau(\mathfrak{R}(x)) \in \tau(C) \cap \mathbb{R}$ , luego

$$\tau(\mathfrak{R}(x)) = \mathfrak{R}(\tau(x)).$$

□

*Observación 2.3.5.* Para una mayor simplicidad de las notaciones, se usará el abuso de notación siguiente: se denotará  $\tau(x) = x + 1$ , incluso si  $x \notin \mathbb{R}$ .

*Ejemplo 2.3.6* (Ejemplos simples y detallados).

- La recta real  $\mathbb{R}$  junto con la traslación  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\tau(x) = x + 1$  y la retracción  $\mathfrak{R} = id$  es un espacio de elevación. Ya que por definición todo espacio de levantamiento contiene una copia de  $\mathbb{R}$ , este es el ejemplo más simple.
- El espacio topológico siguiente

$$T = \{(x, y) \mid y = 0 \vee (x \in \mathbb{Z} + 1/2 \wedge y \in [0, 1])\},$$

dibujado en la figura 2.2, es llamado grafo peine. Si en este espacio se define  $\tau(x, y) = (x + 1, y)$  y  $\mathfrak{R}(x, y) = (x, 0)$ , se obtiene un espacio de levantamiento  $T$ . Utilizando las notaciones de la definición de espacio de levantamiento, se tiene  $\mathbb{R}_T = \mathbb{R} \times \{0\}$ , y un homeomorfismo posible entre  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}_T$  es  $h(x) = (x, 0)$ .

*Ejemplo 2.3.7* (Ejemplo más elaborado).

- Sea  $\mathcal{X}$  un espacio topológico compacto y conexo y sea  $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ . Sea  $x_0 \in \mathcal{X}$ . Se define  $\tau : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  por  $\tau(x, t) = (x, t + 1)$  y  $\mathfrak{R} : \mathcal{Y} \rightarrow \{x_0\} \times \mathbb{R}$  por  $\mathfrak{R}(x, t) = (x_0, t)$ , para todo  $x \in \mathcal{X}$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Está claro que

$$\mathbb{R}_{\mathcal{Y}} = \{(x, t) \in \mathcal{Y} \mid \mathfrak{R}(x, t) = (x, t)\} = \{x_0\} \times \mathbb{R}$$

es una copia de  $\mathbb{R}$  mediante el homeomorfismo  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{Y}}$ , definido por  $h(t) = (x_0, t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

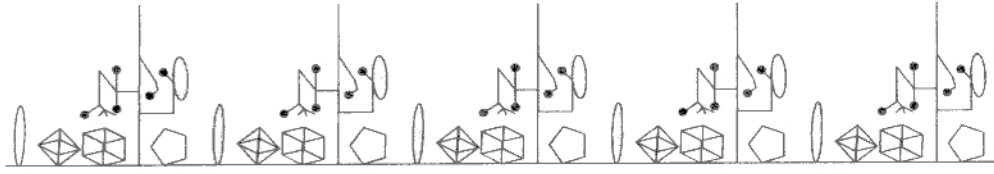


Figura 2.3: Otro ejemplo de espacio de levantamiento

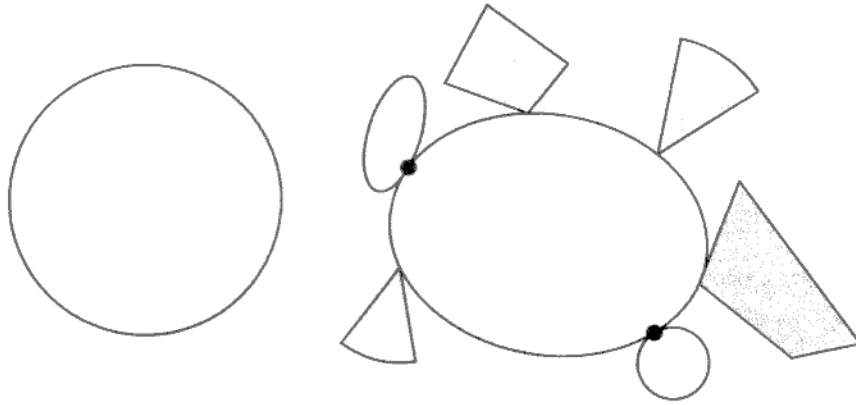


Figura 2.4: Ejemplos de espacios que tienen un espacio de levantamiento como recubrimiento

Para cada  $(x_0, t) \in \mathbb{R}_Y$  se tiene que  $\mathfrak{R}^{-1}(x_0, t) = \mathcal{X} \times \{t\}$ .

Una pregunta natural es cuando un subconjunto  $T$  de  $\mathbb{Y}$  que contiene  $\mathbb{R}_Y$  es un espacio de levantamiento con la traslación  $\tau|_T$  y la retracción  $\mathfrak{R}|_T$ . Una condición suficiente es que los puntos  $t \in [0, 1]$ , tales que  $S_t = (\mathcal{X} \setminus \{x_0\}) \times \{t\} \cap T \neq \emptyset$ , sea finito; que para cada uno de estos puntos el número de componentes conexas de  $S_t$  sea finito y que  $S_t \cup \{x_0\}$  sea cerrado en  $\mathcal{X}$ .

- Recíprocamente, es fácil ver que cualquier espacio de levantamiento será homeomorfo a uno del tipo descrito arriba.

*Observación 2.3.8.* El lector quizás puede estarse preguntando cual es la necesidad de introducir este nuevo concepto de espacio de levantamiento. Lo que sucede es que en grafos de un solo ciclo, el recubrimiento universal es un espacio de levantamiento; los autores Alsedà y Ruelle quienes trabajaron el tema de la dinámica de funciones de grado uno en un grafo de un solo ciclo, se percataron que en realidad solo necesitaban que un recubrimiento del objeto estudiado sea un espacio de levantamiento (Alsedà et al., 1993), es por eso que introdujeron este concepto. Hay ejemplos en los cuales el recubrimiento de un espacio coincide con un espacio de elevación, y otros en los que esto no es posible. Ejemplos de ambos casos se muestran en las figuras 2.4 y 2.5.

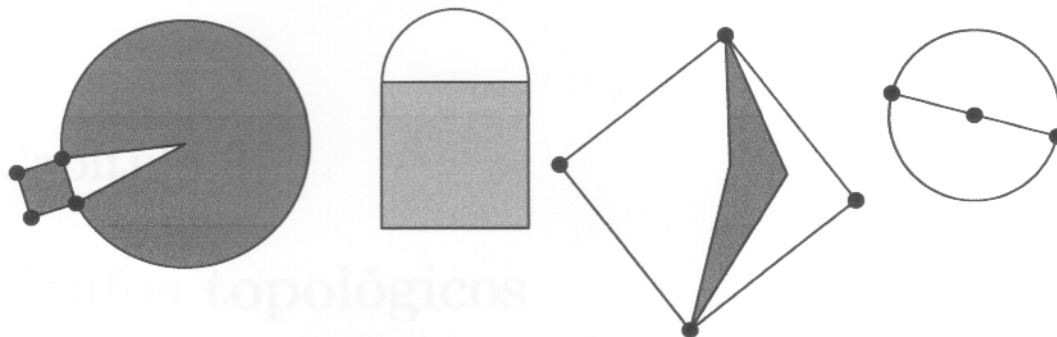


Figura 2.5: Ejemplos de espacios que no tienen un espacio de levantamiento como recubrimiento

**Definición 2.3.9.** Un árbol de la clase  $T^T$  es un árbol que es al mismo tiempo un espacio de levantamiento. (Para la definición de árbol véase 3.2.1)

## Notas bibliográficas

Los espacios de recubrimiento y el levantamiento de funciones están ampliamente documentados en la literatura de Topología Algebraica. Eso sí, no hay un acuerdo único sobre si llamar al levantamiento de caminos y funciones (*lifting* en inglés), “levantamiento” o “elevación”. Por ejemplo los traductores de Massey (1982) y Kosniowski y Solanas (1992) utilizan el término “elevación”, mientras que el traductor de Dieudonné (1977) utiliza el término “levantamiento”.

El concepto de espacio de levantamiento ha sido introducido en la literatura por Alsedà y Ruelle (2008), para expresar resultados sobre la dinámica de funciones de grado uno en grafos de un solo ciclo con la mayor generalidad posible. Hay una ambigüedad sobre el nombre del “levantamiento” de funciones, que algunos llaman elevación.

## Capítulo 3

# Grafos topológicos

**RESUMEN:** Un grafo topológico puede definirse ya sea por las propiedades de los caminos continuos que él contiene, ya sea en forma constructiva como unión de segmentos pegados por sus extremos. En este capítulo se da la primera definición y se muestran algunas de sus propiedades.

### 3.1. Grafos

Los ejemplos más simples de grafos son los grafos estrella. En realidad todo grafo es localmente un grafo estrella.

**Definición 3.1.1** (Segmento). Sea  $S$  un espacio topológico.  $S$  es un segmento si y solamente si existen  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $S$  es homeomorfo a un intervalo

$$I \in \{[a, b], [a, b[, ]a, b], ]a, b\}.$$

Si  $I$  es un intervalo cerrado, diremos que  $S$  es un segmento cerrado y que las imágenes de  $a, b$  por un homeomorfismo entre  $I$  y  $S$  son las extremidades de  $S$ ; si  $I$  es un intervalo abierto diremos que  $S$  es un segmento abierto.

*Observación 3.1.2.* Todos los segmentos cerrados son homeomorfos entre sí (ídem para los segmentos abiertos).

**Definición 3.1.3** (Grafo estrella). Sea  $E$  un espacio topológico.  $E$  es un grafo estrellado si y solamente si existe  $x_0 \in E$ ,  $n \geq 1$ ,  $n \neq 2$ , y existen  $S_1, \dots, S_n \subset E$ ,  $n$  segmentos cerrados distintos entre sí, tales que para cada  $1 \leq i \leq n$   $x_0 \in S_i$  es un extremo de  $S_i$ ,  $\bigcup S_i = E$  y  $S_i \cap S_j$  contiene sólo  $\{x_0\}$  si  $i \neq j$ .

A  $x_0$  se le llama el centro de la estrella y a los otros extremos de los  $S_i$  se les llama las puntas de la estrella. Si  $x_1, \dots, x_n$  son las puntas del grafo estrella  $E$ , entonces se dirá que  $E \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  es una estrella abierta.

Es decir que un grafo estrella de grado  $n$  se obtiene pegando  $n$  segmentos por una de sus extremidades. De forma equivalente  $E$  es un grafo estrella si y solamente si existe  $n \geq 1$ ,  $n \neq 2$ , tal que  $E$  es homeomorfo a

$$S_{\mathbb{C}}(n) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n \in \mathbb{R}^+, |z| \leq 1\}$$

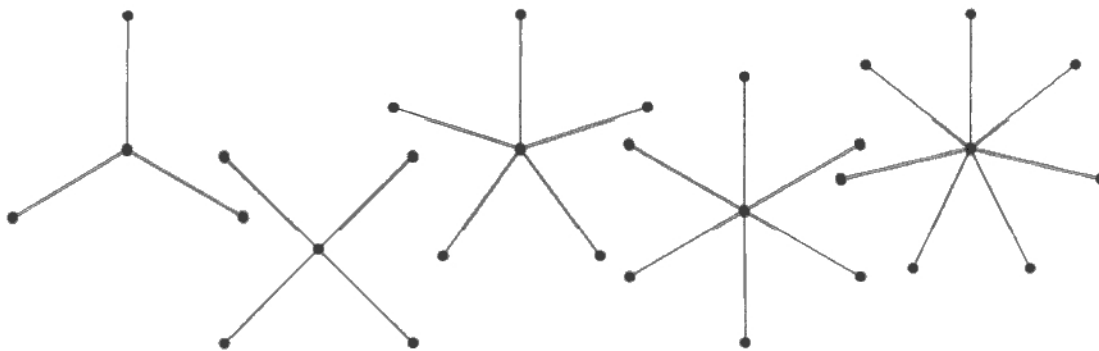


Figura 3.1: Ejemplos de grafos estrella

y  $E$  es una estrella abierta si y solamente si existe  $n \geq 1$ ,  $n \neq 2$ , tal que  $E$  es homeomorfo a

$$\hat{S}_{\mathbb{C}}(n) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n \in \mathbb{R}^+, |z| < 1\}$$

Un grafo en general se define como un espacio topológico que se parece localmente a un grafo estrella o a un segmento.

**Definición 3.1.4.** Sea  $G$  un espacio topológico conexo. Se dice que  $G$  es un grafo si para todo  $x \in G$  existe una vecindad de  $x$  que es un segmento abierto o una estrella abierta. Si ninguna vecindad de  $x$  es un segmento abierto, se dice que  $x$  es un vértice de  $G$ . Una arista abierta de  $G$  es un segmento abierto contenido en  $G$  y abierto en  $G$  maximal para la inclusión. Una arista (cerrada) de  $G$  es la clausura topológica de una arista abierta de  $G$ .

*Observación 3.1.5.* En esta tesis se considera la posibilidad de un número infinito de aristas o vértices, pero este no es el caso de todos los libros.

**Proposición 3.1.6.** Sea  $G$  un grafo que no es homeomorfo a un círculo y  $A$  una arista abierta de  $G$ . Entonces los elementos de la frontera de  $A$  son vértices de  $G$ . De ahora en adelante llamaremos a estos elementos las extremidades de  $\bar{A}$ .

*Demostración.* Sea  $A$  una arista abierta en un grafo topológico  $G$ . Si  $f$  es un homeomorfismo entre  $]0, 1[$  y  $A$ , entonces los elementos de la clausura de  $A$  en  $G$  son de la forma  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$  para un  $t_0 \in [0, 1]$ . En particular los elementos de la frontera de  $A$  en  $G$  son de la forma  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$  o  $\lim_{t \rightarrow 1} f(t)$ .

Si  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$  existe, definimos  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ . Si  $\lim_{t \rightarrow 1} f(t)$  existe, definimos  $f(1) = \lim_{t \rightarrow 1} f(t)$ .

Si la frontera de  $A$  en  $G$  es vacía, entonces  $A$  es cerrado en  $G$ . Como  $G$  es conexo, esto implica que  $A = G$ , luego  $G$  es un segmento abierto y  $G$  no contiene ningún vértice.

Si la frontera de  $A$  en  $G$  tiene un solo punto, digamos  $f(0)$ , existen dos posibilidades. Si  $\lim_{t \rightarrow 1} f(t)$  existe, entonces  $f(0) = f(1)$  y la clausura de  $A$  es homeomorfa a un círculo. Como  $G$  no es un círculo, entonces  $G \neq A \cup \{x\} = \bar{A}$ . Como  $G$  conexo y  $\bar{A}$  es cerrado, existe un punto en  $\bar{A}$  que no está en el interior de  $\bar{A}$ . Como  $\bar{A} = A \cup \{x\}$  y  $A$  es abierto en

$G$ , este punto es necesariamente  $x$ . Luego toda vecindad de  $x$  contiene un punto de  $G \setminus \bar{A}$ . Como  $V$  es una vecindad de  $x = f(0) = f(1)$  y  $f$  es continua, existe  $\alpha > 0$  tal que

$$W = f(]1 - \alpha, 1] \cup f([0, \alpha]) \subset V.$$

Ahora bien,  $W$  es un segmento abierto contenido en  $\bar{A}$ , abierto en  $\bar{A}$ , luego existe  $V' \subset V$  una vecindad de  $x$  tal que  $W = V' \cap \bar{A}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $V'$  tiene la forma de una estrella abierta de centro  $x$  o de un segmento abierto. Si  $V'$  es un segmento abierto, entonces  $W$  es abierto en  $V'$  luego en  $G$  así que  $W$  es una vecindad de  $x$  contenida en  $\bar{A}$ , lo cual es una contradicción. Luego  $V$  es una estrella abierta de centro  $x$  y  $x$  es un vértice.

Si  $\lim_{t \rightarrow 1} h(t)$  no existe entonces  $f : ]0, 1[ \rightarrow \bar{A}$  es un homeomorfismo. Llamamos  $x = f(0)$  y tratamos este caso junto con el caso en que ambos límites existen.

Si  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$  y  $\lim_{t \rightarrow 1} f(t)$  existen, y  $f(0) \neq f(1)$  entonces  $f : ]0, 1[ \rightarrow A$  es un homeomorfismo. Las extremidades de  $A$  son  $x = f(0)$ ,  $y = f(1)$ . Veamos que  $x$  es un vértice de  $G$  (el razonamiento para  $y$  es análogo).

Procedamos por contradicción y supongamos que  $x$  no es un vértice de  $G$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  y  $g : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow V \subset G$  un homeomorfismo tal que  $g(0) = x$  y  $V$  es abierto en  $G$ . Como  $f$  es un homeomorfismo y  $V \cap A$  es una vecindad de  $x$  en  $A$  entonces  $f^{-1}(V \cap A)$  es una vecindad de  $0$  en  $]0, 1[$ . Luego existe  $0 < \eta$  tal que  $V \cap A \supseteq f([0, 2\eta] \cap ]0, 1[)$ . Como  $A$  es una arista,  $f(]0, 1[)$  es un segmento abierto maximal, si  $\eta > 1/2$  entonces  $V \cap A \supseteq f(]0, 1[)$  luego  $V \not\supseteq f(]0, 1[)$  contradiciendo la maximalidad del interior de  $A$  ya que  $V = g(]-\epsilon, \epsilon[)$  es también un segmento abierto. Luego  $\eta \leq \frac{1}{2}$ ,  $[0, 2\eta] \cap ]0, 1[ = ]0, 2\eta[$  y  $V \cap A \supseteq f(]0, 2\eta[)$ .

Como  $f$  es continua,  $f(]0, 2\eta[)$  es conexo. Como  $f(0) = g(0)$ ,  $g$  es continua e inyectiva y  $f(]0, 2\eta[) \subseteq V = g(]-\epsilon, \epsilon[)$ , entonces

$$f(]0, 2\eta[) \subseteq g(]-\epsilon, 0]) \cup (g(]0, \epsilon[)$$

está contenido en la unión disjunta de dos abiertos. Por conexidad se deduce que  $f(]0, 2\eta[)$  está contenido en  $g(]0, \epsilon[)$  ó  $g(]-\epsilon, 0])$ . Sin pérdida de generalidad consideramos solo el primer caso, entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $f(\eta) = g(\delta)$ . Se ve que

$$\begin{aligned} f(]0, 1]) \cap g([0, \delta]) &= (f(]0, 1]) \setminus g([0, \delta]) \cap g([0, \delta]) \\ &= f(]0, 1]) \cap g(\{\delta\}) = \{f(\eta)\} = \{g(\delta)\} \end{aligned}$$

Definimos una función  $h : ]-\epsilon - \delta, 1 - \eta[ \rightarrow V \cup A$  por

$$h(t) = \begin{cases} g(t + \delta), & \text{si } -\epsilon - \delta < t \leq 0 \\ f(t + \eta), & \text{si } 0 \leq t \leq 1 - \eta \end{cases}$$

Como  $h(]-\epsilon - \delta, 1 - \eta[) = g(]-\epsilon, \delta]) \cup f(]0, 1])$  y  $g(]-\epsilon, \delta]) \cap f(]0, 1])$  tiene un solo elemento, entonces  $h(]-\epsilon - \delta, 1 - \eta[)$  es un segmento abierto que contiene estrictamente la arista abierta  $f(]0, 1])$ , lo cual es una contradicción.

Concluimos que  $x$  es un vértice. □

**Proposición 3.1.7.** *Una arista abierta no contiene ningún vértice. Además, una arista abierta es la vecindad de cualquiera de sus puntos.*

*Demostración.* Sea  $A$  una arista abierta.  $A$  es un segmento abierto y  $A$  es abierto en  $G$  por definición. Entonces para cada  $x \in A$ ,  $A$  es una vecindad de  $x$  que es un segmento abierto, luego  $x$  no es un vértice.  $\square$

**Proposición 3.1.8.** *Sea  $G$  un grafo que no es homeomorfo al círculo. Dos aristas abiertas distintas no se intersecan. Dos aristas distintas no se intersecan o se intersecan en una extremidad o en sus dos extremidades.*

*Demostración.* Sean  $S, S'$  dos aristas abiertas de un grafo  $G$  y  $\bar{S}, \bar{S}'$  las aristas cerradas que son las clausuras de  $S$  y  $S'$ . Sean  $h : ]0, 1[ \rightarrow S, h' : ]0, 1[ \rightarrow S'$  homeomorfismos. Si  $S$  y  $S'$  se intersecan, entonces

$$h^{-1} \circ h' : h'^{-1}(S \cap S') \rightarrow h^{-1}(S \cap S')$$

es un homeomorfismo.

Como  $\bar{S}$  y  $\bar{S}'$  son cerrados,  $\bar{S} \cap \bar{S}'$  es cerrado. Como  $S$  y  $S'$  son abiertos,  $S \cap S'$  es abierto. Supongamos que  $S \cap S'$  es no vacío y sea  $x$  en la frontera de  $S \cap S'$  en  $G$ . Como  $\bar{S}$  y  $\bar{S}'$  son cerrados,  $x \in \bar{S} \cap \bar{S}'$ . Como  $x \notin S \cap S'$ ,  $x$  es una extremidad de  $S$  o una extremidad de  $S'$ . Por 3.1.6 sabemos que  $x$  es un vértice. Por 3.1.7  $x$  es una extremidad de  $S$  y de  $S'$ . En particular como  $h$  es un homeomorfismo,  $h^{-1}(S \cap S')$  es un conjunto abierto de  $[0, 1]$  cuya frontera está contenida en  $\{0, 1\}$ . Ahora bien, todo conjunto abierto de  $[0, 1]$  contiene por lo menos dos puntos en su frontera, por lo tanto  $h^{-1}(S \cap S') = ]0, 1[$ . Similarmente  $h'^{-1}(S \cap S') = ]0, 1[$ . Se deduce que

$$S = h(]0, 1[) = S \cap S' = h'(]0, 1[) = S'.$$

Supongamos que  $S$  y  $S'$  son distintos entonces  $S \cap S' = \phi$ , luego si  $\bar{S} \cap \bar{S}'$  no es vacío y  $x \in \bar{S} \cap \bar{S}'$  entonces  $x$  es una extremidad de  $\bar{S}$  o de  $\bar{S}'$ . Luego  $x$  es un vértice. Como ni  $S$  ni  $S'$  contienen vértices entonces  $x$  es una extremidad de  $\bar{S}$  y de  $\bar{S}'$ .  $\square$

**Proposición 3.1.9.** *Sean  $x, y$  dos puntos distintos de un grafo  $G$ . Entonces todo camino de  $x$  a  $y$  pasa por un número finito de vértices.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo y  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  un camino de  $x$  a  $y$ . Como  $\gamma$  es continua, su traza  $A = \gamma([0, 1])$  es un conjunto compacto. Sea  $B$  el conjunto de todos los vértices de  $G$  que pertenecen a  $A$ . Si  $B$  es infinito, entonces existe  $z \in A$  un punto de acumulación de  $B$ . Por la definición de grafo, si  $z$  es un vértice, existe una vecindad de  $z$  que es una estrella abierta cuyo centro es  $z$ , que por lo tanto no contiene ningún otro vértice aparte de  $z$ ; si  $z$  no es un vértice existe una vecindad de  $z$  que es un segmento abierto y que por lo tanto no contiene ningún vértice. De cualquier forma  $z$  no puede ser un punto de acumulación de  $B$ , luego  $B$  es finito.  $\square$

**Proposición 3.1.10.** *Sea  $x, y$  dos vértices distintos y  $c$  un camino minimal (para la inclusión) de  $x$  a  $y$ . Si  $x, y$  son los únicos vértices en  $c$ , entonces la traza de  $c$  es una arista.*

*Demostración.* Primero recortamos  $c$  para que pase una sola vez por  $x$  y por  $y$ . Sean

$$\begin{aligned} r &= \text{máx}\{t \mid c(t) = x\} \\ s &= \text{mín}\{t \mid c(t) = y\} \end{aligned}$$

Definamos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  por  $\gamma(t) = c(r + (s - r)t)$ . Entonces  $\gamma$  es un camino de  $x$  a  $y$  cuya traza está contenida en la traza de  $c$ . Como  $c$  es minimal,  $\gamma$  tiene la misma traza que  $c$ , y además pasa una sola vez por  $x$  y por  $y$ .

Para cada  $0 < t < 1$ ,  $\gamma(t)$  no es un vértice, luego tiene una vecindad que es un segmento abierto. Sea  $S_t$  el segmento abierto maximal (abierto en  $G$ ) que contiene a  $\gamma(t)$ . Si para  $t < t'$  se tiene  $S_t \neq S_{t'}$  entonces  $S_t \cap S_{t'} = \emptyset$  por 3.1.8. Sean

$$\begin{aligned} r &= \inf\{\tau \mid t \leq \tau \leq t', \gamma(\tau) \notin S_t\} \\ s &= \sup\{\tau \mid t \leq \tau \leq t', \gamma(\tau) \notin S_{t'}\} \end{aligned}$$

entonces  $\gamma(r)$  es una extremidad de  $S_t$  y  $\gamma(s)$  es una extremidad de  $S_{t'}$ . Por lo tanto  $\gamma(r)$  es un vértice contradiciendo que  $\gamma([0, 1])$  no contiene ningún vértice.

Se sigue que  $S_t = S_{t'}$  para todos  $0 < t, t' < 1$ . Denotamos  $S = S_t$ , entonces  $S$  es un segmento abierto maximal (abierto en  $G$ ) ya que sus extremidades son  $x, y$  que son vértices. Luego  $S$  es una arista y queda demostrado que la traza de  $c$  es una arista.  $\square$

**Proposición 3.1.11.** *Para todo camino entre dos puntos distintos cuya traza sea minimal para la inclusión existe un camino inyectivo de la misma traza.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo y  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  un camino de  $x$  a  $y$  en donde  $x \neq y$ .

Sea  $B$  el conjunto de vértices en la traza de  $\gamma$ . Por 3.1.9 sabemos que  $B$  es finito. Denotamos  $\gamma_0 = \gamma$ ,  $t_0 = -1$  y construimos recursivamente  $\gamma_i$

$$\begin{aligned} r_i &= \min\{t \geq 0 \mid t_{i-1} < t \leq 1, \gamma_{i-1}(t) \text{ es un vértice}\} \\ s_i &= 1 - \max\{t \geq 0 \mid t_{i-1} \leq t \leq 1, \gamma_{i-1}(t) = \gamma_{i-1}(r_i)\} \\ \gamma_i : [0, 1] &\rightarrow G \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma_{i-1}((r_i + s_i)t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{r_i}{r_i + s_i} \\ \gamma_{i-1}(1 - (r_i + s_i)(1 - t)), & \text{si } 1 - \frac{s_i}{r_i + s_i} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ t_i &= \frac{r_i}{r_i + s_i} \end{aligned}$$

Esta construcción se repite  $k$  veces, con lo cual se obtiene  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow G$  que tiene la misma traza que  $\gamma$  (porque  $\gamma$  es minimal) y que pasa una vez por cada vértice en  $B$ .

Definimos

$$\begin{aligned} r &= \sup\{t \geq 0 \mid 0 < t \leq 1, \gamma_k(t) = x\} \\ s &= \inf\{t \geq r \mid 0 \leq t \leq 1, \gamma_k(t) = y\} \\ c : [0, 1] &\rightarrow G \\ t &\mapsto \gamma_k(t(s - r) + r). \end{aligned}$$

$c$  es un camino que pasa una vez por cada vértice en  $B$  y que pasa una vez por  $x$  y por  $y$  y que tiene la misma traza que  $\gamma$ .

Luego  $B = \{b_1 = c(t_1), \dots, b_k = c(t_k)\}$ . Si  $x \notin B$ , consideramos  $S_0$  la arista que contiene  $x$ . Esta arista tiene  $b_1$  como una extremidad, llamamos  $b_0$  a la otra extremidad. En forma similar, si  $y \notin B$ , consideramos  $S_k$  la arista que contiene  $y$ . Esta arista tiene  $b_k$  como una extremidad, llamamos  $b_{k+1}$  a la otra extremidad. Por 3.1.11 sabemos que  $c([t_i, t_{i+1}])$  es una arista, la llamamos  $S_i$ . Para cada  $i$ , consideramos  $f_i : [0, 1] \rightarrow S_i$  continua e inyectiva tal que  $f_i(0) = b_i$ ,  $f_i(1) = b_{i+1}$ . Consideramos  $f$  la concatenación de todos los caminos  $f_i$ , de forma monótona en  $i$ . Entonces  $f$  es un camino inyectivo. Restringiendo  $f$  adecuadamente obtenemos un camino inyectivo de  $x$  a  $y$  que tiene la misma traza que  $c$  (y por lo tanto la misma traza que  $\gamma$ ).  $\square$



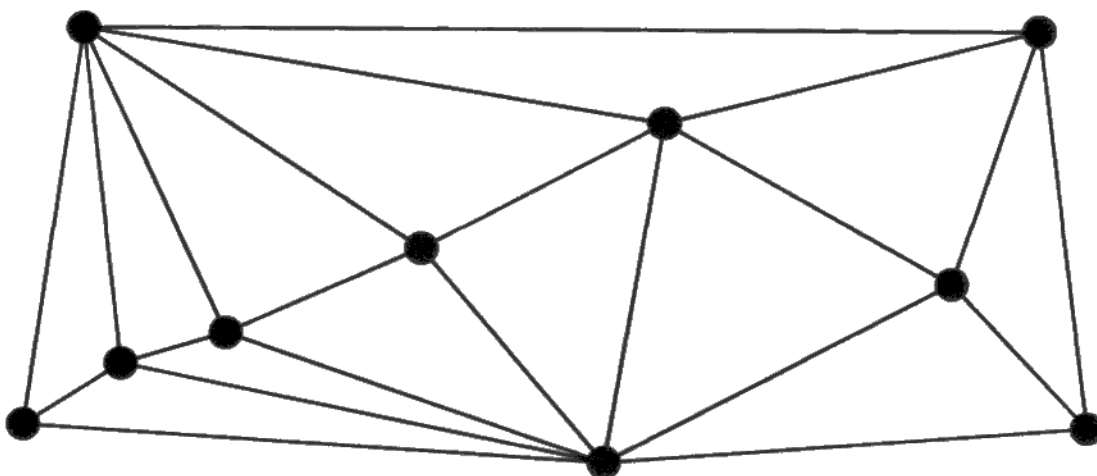


Figura 3.2: Ejemplo de grafo

**Proposición 3.1.12.** *Todo camino inyectivo entre dos puntos es minimal con respecto de la inclusión.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo y sean  $x, y \in G$  dos puntos distintos.

Consideremos la familia

$$\mathcal{C}_x^y = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow G \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma \text{ es continua}\}$$

de todos los caminos continuos de  $x$  a  $y$  en  $G$ . Consideremos entre ellos la relación

$$\gamma_1 \prec \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1([0, 1]) \subset \gamma_2([0, 1]).$$

Si  $\gamma \in \mathcal{C}_x^y$  es inyectivo, demostraremos que  $\gamma$  es minimal. En efecto, sea  $\gamma' \in \mathcal{C}_x^y$  un camino tal que  $\gamma'([0, 1]) \subset \gamma([0, 1])$ . Veamos que  $\gamma^{-1} \circ \gamma'$  es continua. En efecto,  $\gamma$  es continua sobre  $[0, 1]$  que es un compacto, luego es uniformemente continua. Se sigue que  $\gamma^{-1}$  es continua sobre  $\gamma([0, 1]) \supset \gamma'([0, 1])$ . Luego  $\gamma^{-1} \circ \gamma'$  es continua.

Como  $\gamma^{-1} \circ \gamma' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es continua y  $\gamma^{-1} \circ \gamma'(0) = 0$ ,  $\gamma^{-1} \circ \gamma'(1) = 1$ , entonces  $\gamma^{-1} \circ \gamma'([0, 1]) = [0, 1]$ . Luego  $\gamma([0, 1]) = \gamma'([0, 1])$  con lo cual queda demostrado que  $\gamma$  es minimal.  $\square$

## 3.2. Árboles

**Definición 3.2.1.** Un árbol es un grafo simplemente conexo. En otras palabras, es un grafo en el cual entre dos puntos diferentes la traza de todos los caminos minimales es la misma.

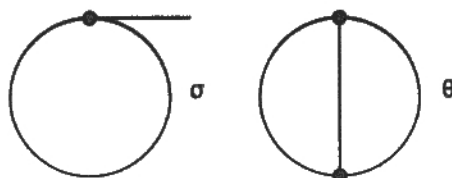


Figura 3.3: Grafo sigma y grafo theta

### 3.3. Grafos de un ciclo

**Definición 3.3.1.** Sea  $G$  un grafo. Sea  $c : [0, 1] \rightarrow G$  un camino entre  $x = c(0)$  e  $y = c(1)$ . Si  $c$  es minimal para la inclusion,  $x = y$  y la traza de  $c$  es homeomorfa a un círculo, se dice que  $c$  es un ciclo minimal.

Sea  $\gamma$  un camino entre  $x$  e  $y$ . Si  $x = y$  y  $\gamma$  contiene en su traza la traza de un ciclo minimal, se dice que  $\gamma$  es un ciclo. Por comodidad, en este caso también se le puede llamar ciclo a la traza de  $c$ .

**Definición 3.3.2.** Sea  $G$  un grafo compacto. Si  $G$  contiene un ciclo y las trazas de todos los ciclos minimales en  $G$  coinciden, entonces se dice que  $G$  es un grafo de un ciclo o un grafo de ciclo único.

*Ejemplo 3.3.3.* El grafo  $\sigma$ , dibujado en la figura 3.3, es un grafo de ciclo único, mientras que el grafo  $\theta$  no lo es.

### Notas bibliográficas

Para una descripción topológica de la teoría de grafos se puede ver Serre (1977) o su traducción al inglés Serre (2003). Sin embargo cabe observar que la definición dada allí no es exactamente la misma que la presentada en esta tesis. En esta tesis, se ha privilegiado el enfoque local, en el caso de grafos compactos, que es el caso comunmente tratado, ambas definiciones coinciden salvo por el caso de un grafo de un solo vértice que en esta tesis no ha sido tomado en cuenta.

Para una descripción combinatoria, se puede ver por ejemplo Diestel (2006).

## Parte II

# Grados diferentes de 1

Esta segunda parte de la tesis contiene un estudio de los periodos posibles de funciones continuas sobre un grafo a un ciclo en los casos "fáciles", es decir, en los casos en que el grado de la función es diferente de uno.

Un primer capítulo explica el caso de funciones de grado de valor absoluto mayor a 1, en cuyo caso la prueba para el círculo se adapta bastante bien. La tesis pasa después a explicar como adaptar la prueba del caso del círculo para transformar el estudio de los periodos de una función de grado 0 del grafo a un ciclo en sí mismo, en el estudio de los periodos de una función de un árbol en sí mismo, que es un caso que ya ha sido resuelto. Por último, se describe hasta dónde puede ir la analogía entre el círculo y el grafo a un ciclo en el caso de funciones de grado -1.

## Capítulo 4

# Generalidades sobre grafos de ciclo único

**RESUMEN:** Este capítulo presenta una descripción breve de las propiedades comunes a todos los grafos de ciclo único. Se precisa su recubrimiento, el levantamiento de funciones definidas sobre el mismo o hacia el mismo y las relaciones entre el levantamiento, la retracción y la traslación.

### 4.1. Recubrimiento de un grafo de ciclo único

**Definición 4.1.1** (Puntos de ramificación de un grafo de ciclo único). Un vértice de un grafo de ciclo único será llamado punto de ramificación si y solamente si este pertenece al único ciclo.

**Teorema 4.1.2.** *Un grafo de ciclo único tiene como recubrimiento universal un árbol de la clase  $T^T$ , i.e. que es un espacio de levantamiento, obtenido a partir de infinitas copias de un árbol finito  $T_0$ , pegándolas por los extremos de un intervalo unitario.*

*Demostración.* La idea de la prueba es la de “desenrollar” el grafo a lo largo del ciclo. Si por momentos el texto parece muy pesado, véase las figuras para seguir la demostración.

Sea  $G$  un grafo compacto que posee un único ciclo  $C$ ,  $x_0$  un punto de  $C$  que no es un punto de ramificación y consideremos

$$\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow G$$

un camino que parametriza  $C$  de tal forma que  $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = x_0$  y  $\gamma_0$  es inyectiva en  $]0, 1[$ . Sea  $\gamma$  la única extensión de  $\gamma_0$ , periódica de periodo 1, definida sobre toda la recta real. Observamos que  $\gamma_n = \gamma|_{[n, n+1]}$  es inyectiva en  $]n, n+1[$ .

Denotemos por  $T_n$  el conjunto obtenido a partir del ciclo  $C$  desenrollado en un intervalo pegado a todas las ramas de  $G$ , es decir el conjunto

$$(G \setminus \{x_0\}) \cup [n, n+1]$$

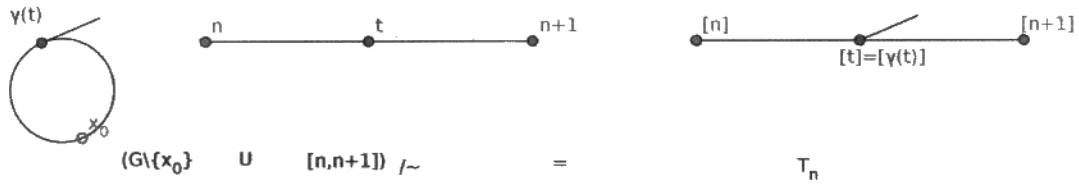


Figura 4.1: Construcción de  $T_n$  para el grafo sigma

cocientado por la relación  $\sim$  definida para todo

$$x, y \in (G \setminus \{x_0\}) \cup \bigcup_{\text{disjunta}} [n, n+1]$$

por

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x = y \\ &\vee (x \in ]n, n+1[, y \in G, \gamma_n(x) = y) \\ &\vee (y \in ]n, n+1[, x \in G, \gamma_n(y) = x). \end{aligned}$$

(Véase la figura 4.1.) Veamos un poco la función  $\eta_n : [n, n+1] \rightarrow T_n$  definida por  $\eta_n(t) = [t]_n$  (denotaremos con un corchete indexado  $[ ]_n$  las clases de  $T_n$ ). Se tiene la siguiente fórmula:

$$\eta_n(t) = \begin{cases} \{\gamma_n(t), t\} & \text{si } n < t < n+1 \\ \{n\} & \text{si } t = n \\ \{n+1\} & \text{si } t = n+1 \end{cases}$$

que nos servirá para demostrar que  $\eta_n$  es inyectiva. En efecto, si

$$n-1 \leq t, s \leq n \text{ y } \eta_n(t) = \eta_n(s),$$

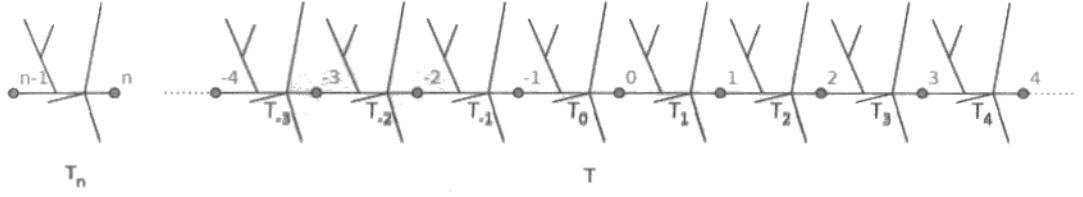
por la fórmula se ve claramente que si  $t \neq s$ ,

$$n-1 < t, s < n \text{ y } \{\gamma_n(t), t\} = \{\gamma_n(s), s\},$$

como  $\gamma_n(t) \in G$  y  $s \in S$  están en conjuntos disjuntos, se deduce que  $\gamma_n(t) \neq s$  y por lo tanto  $\gamma_n(t) = \gamma_n(s)$  y se concluye por la inyectividad de  $\gamma_n$ . De paso, observamos que  $\eta_n(]n, n+1[)$  es  $C \setminus \{x_0\}$  (o mejor dicho las clases de  $C$  en el cociente).

Finalmente, consideremos el árbol infinito obtenido pegando los infinitos  $T_n$ , es decir el cociente  $T = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_n / \approx$  de la unión disjunta de los  $T_n$  por la relación de equivalencia  $\approx$  en donde  $\approx$  está definida por

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \bigcup_{\text{disjunta}} T_n : x \approx y &\Leftrightarrow x = y \\ &\vee \exists n \in \mathbb{Z} \mid (x = \eta_{n-1}(n) \wedge y = \eta_n(n)) \\ &\vee \exists n \in \mathbb{Z} \mid (y = \eta_{n-1}(n) \wedge x = \eta_n(n)). \end{aligned}$$

Figura 4.2: Construcción de  $T$  a partir de  $T_n$ 

(Véase la figura 4.2.) Esta definición de la relación de equivalencia implica que los  $\eta_n : [n, n+1] \rightarrow T_n$  se pegan bien entre sí dando lugar a una aplicación inyectiva  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow T$  definida por  $\eta(t) = [\eta_{[t]}(t)]$ . Por lo tanto  $T$  contiene una imagen inyectiva de la recta real  $\mathbb{R}$ . Además, por su construcción misma,  $T$  es un árbol. Una traslación continua puede ser definida en  $T$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tau : T &\rightarrow T \\ \forall t \in \mathbb{R} : \eta(t) &\mapsto \eta(t+1) \\ \forall n \in \mathbb{Z} : \forall x \in G \setminus \{x_0\} : [[x]_n] &\mapsto [[x]_{n+1}]. \end{aligned}$$

Además,  $T$  posee una retracción  $\mathfrak{R} : T \rightarrow \eta(\mathbb{R})$  definida por  $\mathfrak{R}(\eta(t)) = \eta(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathfrak{R}([[x']_n]) = [[x]_n]$  si  $x' \in G \setminus \{x_0\}$  y cualquier camino de  $x'$  a  $x_0$  en  $G$  pasa por  $x \in C$ .

Se ve fácilmente que las condiciones de la definición de un espacio de levantamiento son satisfechas. Por lo tanto,  $T$  es un árbol de la clase  $T^T$ . Solo falta demostrar que es un recubrimiento de  $G$ . Consideramos  $\pi : T \rightarrow G$  definido por

$$\pi(y) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } \exists n \in \mathbb{Z}, \exists t \in [n, n+1] \mid y = [[t]_n] \\ x & \text{si } x \in G \setminus \{x_0\}, y \in T \setminus \eta(\mathbb{Z}), \exists n \in \mathbb{Z} \mid y \in T_n, y = [[x]_n] \end{cases}$$

Mostremos que  $\pi$  da lugar a un recubrimiento de  $G$ . Sea  $x \in G$ . Si  $x \neq x_0$  entonces  $V = G \setminus \{x_0\}$  es una vecindad de  $x$  en  $G$  tal que

$$\pi^{-1}(V) = T \setminus \gamma(\mathbb{Z}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\{[[z]_n] \mid z \in G \setminus \{x_0\}\}}_{\text{abierto } U_n} = \bigcup_{\text{disjunta}} U_n$$

y  $\pi|_{U_n}$  es inyectiva de inversa  $\sigma_n$  continua, definida para todo  $z \in V$  por  $\sigma_n(z) = [[z]_n]$ . (La topología considerada es la topología cociente, en este contexto la continuidad de todas las funciones consideradas es evidente.)

Si  $x = x_0$ , sean

$$\begin{aligned} t_0 &= \text{mín}\{t \mid 0 \leq t \leq 1, \gamma(t) \text{ es un vértice de } G\} \\ t_1 &= \text{máx}\{t \mid 0 \leq t \leq 1, \gamma(t) \text{ es un vértice de } G\}. \end{aligned}$$

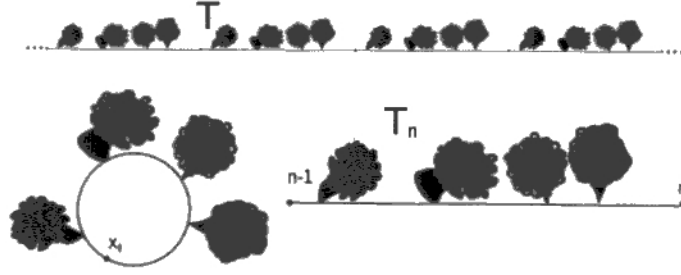


Figura 4.3: Ilustración del recubrimiento universal del planeta de los baobabs

Consideremos el conjunto abierto

$$V = C \setminus \gamma([t_0, t_1]) = \{x_0\} \cup \{\gamma(t) \mid 1 \geq t > t_1 \vee 0 \leq t < t_0\}.$$

Entonces  $V$  satisface

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(V) &= \mathbb{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \eta([n + t_1, n + 1]) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \eta([n, n + t_0]) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\eta([n - 1 + t_1, n + t_0])}_{U'_n \text{ abierto}} \end{aligned}$$

en donde  $U_n = \eta([n - 1 + t_1, n + t_0[$  es abierto porque  $\eta$  es un homeomorfismo sobre su imagen y  $U_n$  no interseca ningún vértice. Además, se tiene que  $\pi|_{U'_n}$  es inyectiva de inversa  $\sigma'_n$  definida por  $\sigma'_n(n) = x_0$  y para todo  $t \in ]n - 1 + t_1, n + t_0[ \setminus \{n\}$ ,  $\sigma'(\eta(t)) = \gamma(t)$ . Está claro que  $\sigma'(n)$  es continua, con lo cual concluye la prueba.  $\square$

*Ejemplo 4.1.3* (Los baobabs del Principito). Haciendo un guiño al planeta de los baobabs de la novela “El Principito” de Antoine de Saint-Exupéry, en la figura 4.3 se puede observar una ilustración gráfica de como se verían en el recubrimiento universal si pensamos en ese planeta como en un círculo.

*Observación 4.1.4.* Como de costumbre, se identifica  $\mathbb{R}$  con su imagen en  $T$ , se denota  $\tau(x) = x + 1$  y para todo  $A \subset T$  se denota  $A + n = \{a + n \mid a \in A\}$

Para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ , denotemos por  $T_a^b$  (respectivamente  $\bar{T}_a^b$ ) al subárbol finito de  $T$  dado por

$$T_a^b = \{x \in T \mid a < \Re(x) < b\} \text{ ( resp. } \bar{T}_a^b = \{x \in T \mid a \leq \Re(x) \leq b\})$$

Viendo la definición de  $\pi, \Re, \tau$  tal como ha sido dada en 4.1.2, los hechos siguientes son bastante claros:

1. Para todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(t)$  no sea un punto de ramificación de  $G$ , la aplicación  $\tilde{\pi} : T_t^{t+1} \rightarrow G \setminus \{\pi(t)\}$  restricción de  $\pi$  es un homeomorfismo.
2. Para todo  $B$  subconjunto de  $G \setminus \{\pi(t)\}$ , sea  $A = T_t^{t+1} \cap \pi^{-1}(B)$ . Entonces  $\pi^{-1}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A + n$  es la unión disjunta de una familia contable de conjuntos  $A + n$  abiertos en la topología relativa de  $\pi^{-1}(B)$  (de hecho  $A + n = T_{t+n}^{t+n+1} \cap \pi^{-1}(B)$ ) y  $\pi$  induce un homeomorfismo de cada  $A + n$  en  $B$ .

*Observación 4.1.5.* Sin pérdida de generalidad supondremos siempre que  $\pi(0) = \pi(1)$  no es un punto de ramificación y que  $T_0^1$  es homeomorfo a  $G \setminus \{\pi(0)\}$ . (Este era el caso en la prueba de 4.1.2 por la construcción misma, en el caso general se puede reparametrizar la recta real incluida en  $T$  con ayuda de una traslación por un real.)

## 4.2. Levantamiento de funciones en un grafo de ciclo único

Sea  $G$  un grafo de ciclo único, y sea  $T$ , como en el teorema 4.1.2.

**Lema 4.2.1.** [*Levantamiento de caminos*] Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  un camino continuo en  $G$ , entonces  $\gamma$  posee un levantamiento a  $T$ , único salvo traslación o si se fija la imagen de un punto.

*Demostración.* Esta prueba es una adaptación fiel de la prueba para el caso del círculo propuesta en Alsedà et al., L.3.1.4.

Sea  $t \in [0, 1]$  fijo pero arbitrario, y sean  $x, y \in C \setminus \{\gamma(t)\}$  dos puntos diferentes que no son puntos de ramificación. Como  $C$  es un círculo topológico, existe un camino de  $x$  a  $y$  en  $C$  que no pasa por  $\gamma(t)$ , denotemos por  $\delta_t$  su parametrización continua. Como  $\gamma$  es continua, existe  $\epsilon_t > 0$  tal que  $\gamma([t - 2\epsilon_t, t + 2\epsilon_t] \cap [0, 1]) \subseteq G_t = (G \setminus \delta_t([0, 1]))$ . La familia  $\{[t - 2\epsilon_t, t + 2\epsilon_t] \mid t \in [0, 1]\}$  forma un recubrimiento abierto del compacto  $[0, 1]$ , por lo tanto existen  $0 = t_0 < t_1, \dots, t_{k-1} < t_k = 1 \in [0, 1]$  tales que  $[0, 1] \subset \cup_{i=1}^k [t_i - 2\epsilon_{t_i}, t_i + 2\epsilon_{t_i}]$ . Denotemos por  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$  los extremos de los intervalos  $[t_i - \epsilon_{t_i}, t_i + \epsilon_{t_i}] \cap [0, 1]$ . Cada intervalo  $[s_{i-1}, s_i]$  está contenido en algún intervalo  $[t - 2\epsilon_t, t + 2\epsilon_t] \cap [0, 1]$  por lo cual  $\gamma([s_{i-1}, s_i])$  es un subconjunto  $G_i$  de  $G$  que excluye infinitos puntos de  $C$ , ya que excluye por lo menos  $\delta_t([0, 1])$  la traza de un camino no constante. (Informalmente, puede decirse que hemos partido nuestro intervalo de tal forma que ninguno de los intervalos resultantes logra dar una vuelta completa).

Sea  $y \in T$  tal que  $\pi(y) = \gamma(0)$ . Probaremos por inducción en  $i$  que para todo  $i$  existe un único levantamiento de  $\gamma|_{[0, s_i]}$ ,  $F_i : [0, s_i] \rightarrow T$ , tal que  $F_i(0) = y$ .

Para  $i = 0$ , se toma  $F_i$  la aplicación constante de valor  $y$ . Sea  $i > 0$  tal que  $i - 1$  satisface la propiedad que queremos probar. Debemos probar que entonces  $i$  también la satisface. Sea  $x_i \in C$  que no pertenece a  $G_i$  y que no es un punto de ramificación (esto es posible porque  $G_i$  excluye infinitos puntos de  $C$ , y el número de puntos de ramificación es finito). Sea  $y_i \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(y_i) = x_i$ , y sea  $A_i = \pi^{-1}(G_i) \cap T_{y_i}^{y_i+1}$ . Entonces  $\pi^{-1}(G_i)$  es la unión disjunta de los conjuntos  $A_i + n$ , cada uno de los cuales es abierto en  $\pi^{-1}(G_i)$  (cf. 4.1.4.) Como

$$\pi(F_{i-1}(x_{i-1})) = f|_{[0, x_{i-1}]}(x_{i-1}) = \gamma(x_{i-1}) \in G_i,$$

entonces existe  $n_i \in \mathbb{Z}$  tal que  $F_{i-1}(x_{i-1}) \in A_i + n_i$ . Sea  $\pi_i : A_i + n_i \rightarrow G_i$  el homeomorfismo inducido por  $\pi$ .

Entonces podemos definir  $F_i$  mediante

$$F_i = \begin{cases} \pi_i^{-1} \circ \gamma(s) & \text{si } s_{i-1} < s < s_{i+1} \\ F_{i-1}(s) & \text{si } 0 \leq s \leq s_{i-1} \end{cases}.$$

Está claro por la elección de  $n_i$  que  $F_{i+1}$  es una función continua.



Recíprocamente queremos probar la unicidad. Sea  $\tilde{F}_i : [0, s_i] \rightarrow T$  otro levantamiento de  $f|_{[0, s_i]}$ . Por la hipótesis de inducción,  $\tilde{F}_i|_{[0, s_{i-1}]} = F_{i-1}$ . Como para cada  $s \in [s_{i-1}, s_i]$  se tiene  $\pi(\tilde{F}(s)) = \gamma(s) \in G_i$ , entonces  $\tilde{F}([s_{i-1}, s_i])$  contenido  $\pi^{-1}(G_i)$  que es unión disjunta de abiertos  $A + n$ . Como  $[s_{i-1}, s_i]$  es conexo y  $\tilde{F}$  es continua, existe  $\tilde{n}_i \in \mathbb{Z}$  tal que  $\tilde{F}([s_{i-1}, s_i]) \subset A + \tilde{n}_i$ . Como  $\tilde{F}_i(s_{i-1}) = F_{i-1}(s_{i-1}) \in A + n_i$ , entonces  $\tilde{n}_i = n_i$ . Por lo tanto  $\tilde{F}_i|_{[s_{i-1}, s_i]} = \pi_i^{-1} \circ f = F_i$ .

Probemos ahora que fijar la imagen de un punto basta para probar la unicidad salvo traslación. Si  $F'$  es un levantamiento cualquiera de  $\gamma$ , entonces  $\pi(F'(0)) = \pi(F(0)) = \gamma(0)$  por lo cual  $F'(0) \in F(0) + \mathbb{Z}$  (véase la observación 4.1.4). Sea  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $F'(0) = F(0) + k$ , como  $\tau^k \circ F$  es también un levantamiento de  $\gamma$  y  $F'(0) = \tau^k \circ F(0)$ . Se concluye por la unicidad dada la imagen de un punto, que  $F' = \tau^k(F)$   $\square$

*Observación 4.2.2.* Una prueba más rápida de la existencia del levantamiento sería recordar que el lema 4.2.1 es cierto en el círculo, que  $G$  tiene el mismo tipo de homotopía que el círculo y que por lo tanto el lema vale también en  $G$ . Pero seguir ese camino nos podría hacer perder de vista las posibilidades en espacios de levantamiento generales, y complicaría la prueba de la unicidad salvo traslación.

*Ejemplo 4.2.3.* Veamos un ejemplo en el caso de un grafo con  $b$  puntos de ramificación  $x_1, x_2, \dots, x_b$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  una parametrización de su único ciclo tal que  $x_i = \gamma(i/b + 1)$  para  $i = 1, \dots, b$ . Entonces  $s_0 = 0 < s_1 = \frac{2b+1}{2(b+1)} < s_2 = 1$  tiene las propiedades deseadas. Una vez fijado  $t_0 \in \mathbb{R} \subset T$  tal que  $\pi(t_0) = \gamma(0) = \gamma(1)$ , el levantamiento de  $\gamma$  es el intervalo  $[t_0, t_0 + 1]$  recorrido a velocidad 1.

**Lema 4.2.4** (Levantamiento de árboles). *Sea  $\bar{T}$  un árbol y  $x_0 \in \bar{T}$ . A toda función  $f : \bar{T} \rightarrow G$  continua corresponde un levantamiento  $F : \bar{T} \rightarrow T$ , único salvo traslación. Dicho de otra forma, si se fija un  $y$  tal que  $\pi(y) = f(x_0)$ , entonces existe un único levantamiento  $F$  tal que  $F(x_0) = y$ .*

*Demostración.* Sea  $y \in \pi^{-1}(f(x_0))$ . Para cada  $x \in \bar{T}$ , sea  $\delta_x$  un camino inyectivo de  $x_0$  a  $x$ . Por el lema 4.2.1, existe un único  $F_x : [0, 1] \rightarrow T$  tal que  $\pi \circ F_x = f \circ \delta_x$ .

Para cada  $z \in \bar{T}$  si  $x \neq x'$  son dos puntos de  $\bar{T}$  tales que  $\delta_x(t) = \delta_{x'}(t') = z$ , entonces  $\pi(F_x(t)) = \pi(F_{x'}(t')) = f(z)$ , por lo cual  $F_x|_{[0, t]}$  y  $F_{x'}|_{[0, t']}$  correctamente reparametrizados son ambos un levantamiento del camino  $\delta_z$ . Por la unicidad en 4.2.1,  $F_x(t) = F_{x'}(t')$ . Así que podemos definir  $F(z) = F_x(t)$  para todo  $z, x \in \bar{T}, t \in [0, 1]$  tales que  $\delta_x(t) = z$ .

Cuando  $z$  no es un vértice,  $F$  es continua en  $z$  por su relación con  $F_x$  que es continua en el intervalo. Cuando  $z$  es un vértice, existe  $V$  una vecindad de  $z$  tal que  $V$  es una estrella abierta cuyo centro es  $z$ . Como  $\delta_z$  es continuo, existe  $0 < t_1 < 1$  tal que  $\delta_z(t_1) = x_1 \in V$ . Si  $V$  es una estrella de  $n$  puntas, sean  $x_2, \dots, x_n$  puntos de  $\bar{T} \setminus \{z\}$  y  $t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ , tales que  $z = \delta_{x_i}(t_i)$  para  $i = 2, \dots, n$ , y cada  $x_i \in V$  esta en una arista abierta diferente. (Para ver que tales puntos existen basta con considerar el ejemplo de un grafo estrella.) Sea  $V$  una vecindad de  $F(z)$ , entonces como  $F_z, F_{x_2}, \dots, F_{x_n}$  son continuos y  $F_z(1) = F_{x_2}(t_2) = \dots = F_{x_n}(t_n) = F(z) \in V$ , existe  $\eta > 0$  tal que  $F_z[1 - \eta, 1] \cup F_{x_2}[t_2, t_2 + \eta] \cup \dots \cup F_{x_n}[t_n, t_n + \eta] \subset V$ . Por lo tanto  $U = \delta_z[1 - \eta, 1] \cup \delta_{x_2}[t_2, t_2 + \eta] \cup \dots \cup \delta_{x_n}[t_n, t_n + \eta]$  es una vecindad abierta de  $z$  tal que  $F(U) \subset V$ .  $\square$

### 4.3. Grado de funciones en un grafo de ciclo único

Sea  $G$  un grafo de ciclo único de recubrimiento  $G$ ,  $T$  su recubrimiento y sea  $f : G \rightarrow G$  una función continua. Sea  $F : \bar{T}_0^1 \rightarrow T$  un levantamiento de  $f \circ \pi |_{\bar{T}_0^1}$ . Entonces  $\pi(F(0)) = \pi(F(1)) = f(\pi(0))$ , por lo tanto existe  $d \in \mathbb{Z}$  tal que  $F(1) = F(0) + d$ . Si  $\tilde{F}$  es otro levantamiento de  $f$  entonces existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\tilde{F} = \tau^k \circ f$  por lo cual  $\tilde{F}(1) = F(1) + k = F(0) + d + k = F(0) + k + d = \tilde{F}(0) + k$  así que  $d$  no depende del levantamiento.

**Definición 4.3.1 (Grado).** El grado de  $f$  es

$$\deg(f) = F(1) - F(0)$$

en donde  $F$  es cualquier levantamiento de  $f \circ \pi |_{\bar{T}_0^1}$ .

**Teorema 4.3.2.** Sea  $f : G \rightarrow G$  una función continua. Entonces todo levantamiento  $F : T \rightarrow T$  de  $f$ , satisface

$$\forall x \in T : F(x+1) = F(x) + d.$$

*Demostración.* Sea  $F_0 = F |_{\bar{T}_0^1} : \bar{T}_0^1 \rightarrow T$ , entonces  $F_0$  es un levantamiento de  $f \circ \pi |_{\bar{T}_0^1}$ . Extendemos  $F_0$  continuamente a  $T$  diciendo que si  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \leq \mathfrak{R}(x) < n+1$  entonces  $F_1(x) = F_0(x-n) + n \deg(f)$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \pi \circ F_1(x) &= \pi(F_0(x-n) + n \deg(f)) = \pi(F_0(x-n)) \\ &= f \circ \pi |_{\bar{T}_0^1}(x-n) = f \circ \pi(x) \end{aligned}$$

por lo tanto  $F_1$  es un levantamiento de  $F \circ \pi$  y  $F_1(0) = F_0(0) = F(0)$ . Por la unicidad en 4.2.4 se concluye que  $F = F_1$  y  $F$  satisface la igualdad deseada.  $\square$

La siguiente proposición resume propiedades del grado y la traslación que ya han sido demostradas o que se deducen fácilmente por inducción.

**Proposición 4.3.3 (Grado y levantamiento).** Sea  $f$  una función continua de  $G$ , un grafo de ciclo único en sí mismo. Sea  $F$  un levantamiento de  $f$ . Entonces

1. Si  $F'$  es otro levantamiento de  $f$  entonces  $F = F' + k$  para algún entero  $k$ .
2. Si  $k \in \mathbb{Z}$  entonces  $F + k$  es también un levantamiento de  $f$ .
3. Si  $x \in T$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ , entonces  $F^n(x+k) = F^n(x) + kd^n$ .
4. Si  $x \in T$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ , entonces  $(F+k)^n(x) = F^n(x) + k(1+d+\dots+d^{(n-1)})$ .

## Capítulo 5

# Funciones de grado mayor a 1 (en valor absoluto)

**RESUMEN:** En este caso la prueba se inspira fuertemente en el caso del círculo. Se obtiene que todo periodo natural  $n$  es posible para aplicaciones de grado  $|d| \geq 2$  si  $d$  es positivo o  $n$  es par, o si  $n$  es impar y suficientemente grande, donde la grandeza necesaria de  $n$  depende no solo del grado de la aplicación sino también del número de puntos de ramificación.

### 5.1. Las clases de puntos fijos

Sea  $G$  un grafo de ciclo único que posea  $b$  puntos de ramificación,

$$f : G \rightarrow G \text{ (resp. } h : G \rightarrow G)$$

una función continua de grado  $d$  (resp.  $d'$ ) y  $F : T \rightarrow T$  (resp.  $H : T \rightarrow T$ ) su levantamiento al recubrimiento universal de  $G$ . Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $\Re(F(0)), \Re(H(0)) \in [0, 1[$  y que  $\pi(F(0)), \pi(H(0))$  no es un punto de ramificación.

**Definición 5.1.1.**  $n$  es un periodo para  $f$  si y solamente si existe  $x \in G$  un punto tal que  $f^n(x) = x$  y para todo  $0 < m < n$  se tiene que  $f^m(x) \neq x$ .

Comenzamos este capítulo por una observación simple:

*Observación 5.1.2.* Denotamos por  $\text{Fix}(g)$  el conjunto de puntos fijos de una función  $g$ . Dado que  $f^n(x) = x$  implica que  $x$  es periódico de periodo  $k \mid n$ , está claro que para cualquier  $g$  y  $n$  se tiene

$$\bigcup_{\substack{k \mid n \\ k < n}} \text{Fix}(g^k) \subset \text{Fix}(g^n)$$

Entonces  $n$  es un periodo para  $f$  si y solamente si

$$\bigcup_{\substack{k|n \\ k < n}} \text{Fix}(f^k) \neq \text{Fix}(f^n)$$

Denotamos  $H_k = H + k = \tau^k \circ H$ . Por la proposición 4.3.3 tenemos que el conjunto de todos los levantamientos de  $h$  es

$$\{H_k \mid k \in \mathbb{Z}, H_k = H + k = \tau^k \circ H\}$$

**Teorema 5.1.3.** *El conjunto de los puntos fijos de  $h$  se expresa como unión de clases de puntos fijos de  $H_k$  de la forma siguiente:*

$$\text{Fix}(h) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \pi(\text{Fix}(H_k))$$

y si  $d' \neq 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(\text{Fix}(H_k)) \cap \pi(\text{Fix}(H_j)) \neq \emptyset &\Rightarrow (d' - 1) \mid |k - j| \\ \pi(\text{Fix}(H_k)) = \pi(\text{Fix}(H_j)) &\Leftarrow (d' - 1) \mid |k - j| \end{aligned}$$

Hay a lo más  $|1 - d'|$  clases de puntos fijos diferentes.

*Demostración.* Sea  $x \in G$  un punto fijo de  $h$  y sea  $y \in T$  un punto tal que  $\pi(y) = x$ . Entonces  $\pi(H(y)) = h(x) = x$ . Pero  $\pi^{-1}(x) = y + \mathbb{Z}$  (cf. obs. 4.1.4), luego existe  $j \in \mathbb{Z}$  tal que  $H(y) = y + j$ . Por lo tanto para  $k = -j$  se tiene que  $H_k(y) = (y + j) + k = y$  así que  $y \in \text{Fix}(H_k)$  y  $x \in \pi(\text{Fix}(H_k))$ , con lo cual la primera fórmula queda demostrada.

Ahora supongamos que dos clases de puntos fijos se intersecan, y sea  $x$  un elemento de la intersección, es decir

$$x \in \pi(\text{Fix}(H_k)) \cap \pi(\text{Fix}(H_j)).$$

Sean  $y_k \in \text{Fix}(H_k)$ ,  $y_j \in \text{Fix}(H_j)$  tales que  $x = \pi(y_k) = \pi(y_j)$ . Entonces existe  $l \in \mathbb{Z}$  tal que  $y_k = y_j + l$ . Por la proposición 4.3.3 tenemos que  $H_k(y_j + l) = H_k(y_j) + ld$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_j &= y_k - l = H_k(y_k) - l = H_k(y_j + l) - l = H_k(y_j) + l(d' - 1) \\ &= H_j(y_j) + (k - j) + l(d' - 1) = y_j + (k - j) + l(d' - 1). \end{aligned}$$

Como la traslación  $\tau$  es inyectiva en  $T$ ,  $(k - j) + l(d' - 1) = 0$ , por lo tanto  $(d' - 1) \mid |k - j|$ .

Recíprocamente, supongamos que  $(d' - 1) \mid |k - j|$  y sea  $l \in \mathbb{Z}$  tal que  $k - j = l(1 - d')$ . Supongamos que la clase de puntos fijos  $\pi(\text{Fix}(H_k))$  es no vacía y sea  $y_k \in \text{Fix}(H_k)$ . Entonces  $y - l \in \text{Fix}(H_j)$ , en efecto

$$\begin{aligned} H_j(y_k - l) &= H_j(y_k) - ld' = H_k(y_k) - (k - j) - ld' \\ &= y_k - l(1 - d') - ld' = y_k - l. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\text{Fix}(H_k) - l \subset \text{Fix}(H_j)$ , en particular  $\text{Fix}(H_j)$  es no vacía. Análogamente se demuestra que  $\text{Fix}(H_j) + l \subset \text{Fix}(H_k)$ . Por lo tanto

$$\pi(\text{Fix}(H_k)) = \pi(\text{Fix}(H_j)).$$

□

La utilidad mayor del teorema 5.1.3 será el hecho de poder estimar cuando  $\text{Fix}(f^n)$  es no vacío a partir de sus clases de puntos fijos. Así que el próximo paso es hallar condiciones para que una clase de puntos fijos sea no vacía.

**Teorema 5.1.4.** *Si  $d' > 1$  entonces la clase de puntos fijos  $\pi(\text{Fix}(H_k))$  es no vacía.*

*Demostración.* Consideremos la función  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\delta(x) = \mathfrak{R}(H_k(x)) - x$$

Entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene

$$\delta(n) = \mathfrak{R}(H_k(n)) - n = \mathfrak{R}(H_k(0) + nd') - n = \mathfrak{R}(H_k(0)) + n(d' - 1)$$

Por lo tanto  $\delta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . En particular, existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathfrak{R}(H_k(x)) = x$ .

Se tiene que  $\mathfrak{R}(H_k(x+1)) = x + d'$ . Por lo tanto el camino

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow T \\ s &\mapsto H_k(x + s) \end{aligned}$$

que une  $H_k(x)$  a  $H_k(x+1)$  contiene  $[x, x+d']$  en su traza. Como  $\gamma([0, 1])$  contiene  $[x, x+1]$  existe  $0 \leq s_1 \leq 1$ , tal que  $x = H_k(x + s_1)$ . Como el camino  $\gamma|_{[s_1, 1]}$  contiene  $[x + s_1, x + 1]$  en su traza, existe  $s_1 \leq s_2 \leq 1$  tal que  $x + s_1 = H_k(x + s_2)$ , y así sucesivamente. Obtenemos una sucesión  $\{s_n\} \subset [0, 1]$  tal que para todo  $n$   $x + s_n = H_k(x + s_{n+1})$ . Como esta sucesión es creciente, ella posee un límite  $\bar{s}$ . Entonces  $\bar{x} = x + \bar{s}$  es un punto fijo de  $H_k$ , en efecto

$$H_k(\bar{x}) = H_k(x + \lim_{n \rightarrow \infty} s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_k(x + s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x + s_{n+1}) = \bar{x}.$$

□

**Teorema 5.1.5.** *Si  $d' < 1 - b$ , entonces  $h$  posee por lo menos  $0 < 1 - d' - b$  clases no vacías de puntos fijos.*

*Demostración.* Consideremos el camino  $\gamma(t) = \mathfrak{R}(H(t))$  ( $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ). Como  $\gamma(0) \in [0, 1]$ ,  $\gamma(1) = \gamma(0) + d' \in [d', 1 + d']$ . Para cada  $0 \leq i \leq -d'$  definimos

$$\gamma_i(t) = \min\{\gamma(t), 1 - i\} - \min\{\gamma(t), -i\}$$

Entonces cada  $\gamma_i$  es una función continua de  $[0, 1]$  en  $[0, 1]$ . Por el teorema del punto fijo, para cada  $i$ , existe  $t_i \in [0, 1]$  tal que  $\gamma_i(t_i) = t_i$ . Además, los  $t_i$  son diferentes; en efecto,

$$\begin{aligned} \gamma_j(t) = \gamma_i(t) &\Leftrightarrow i = j \vee 1 - \min\{i, j\} \leq \gamma(t) \vee \gamma(t) \leq -\max\{i, j\} \\ &\Leftrightarrow i = j \vee \gamma_i(t) = \gamma_j(t) = 0 \vee \gamma_i(t) = \gamma_j(t) = 1, \end{aligned}$$

de donde

$$t_j(t) = t_i \Leftrightarrow i = j \vee t_i = t_j = 0 \vee t_i = t_j = 1.$$

Pero, al comienzo de esta sección, hemos supuesto que  $\gamma(0) \in [0, 1[$  luego  $\gamma_j(0) = 0$  implica  $j = 0$ . Por otro lado,  $h$  es de grado  $d'$ , luego  $\gamma(1) \in [d', 1 + d']$ , luego  $\gamma_j(1) = 1$  implica  $j = -d'$ . Se concluye que

$$t_j(t) = t_i \Leftrightarrow i = j.$$

De paso hemos demostrado que para cada  $i$ ,  $\gamma_i(t_i) = \gamma(t_i) + i$ . Luego

$$\Re(H_{-i}(t_i)) = (\gamma(t_i) + i) - i = \gamma(t_i) = t_i.$$

Se deduce que si  $t_i$  no es un punto de ramificación, entonces  $t_i$  es un punto fijo de  $H_{-i}$ .

Como  $\{t_i\}_{i=0}^{-d'}$  tiene  $1 - d'$  elementos y hay  $b$  puntos de ramificación, entonces por lo menos  $1 - d' - b$  de los puntos  $t_i$  son puntos fijos de  $H_{-i}$ . Luego por lo menos  $1 - d' - b$  de las clases de puntos fijos son no vacías.  $\square$

## 5.2. Los periodos posibles

En esta sección demostraremos el teorema principal que explica bajo que condiciones un número natural es un periodo posible para  $f$ .

**Lema 5.2.1** (Un lema de conteo). *Para todo  $|d| \geq 2$ ,  $n \geq 1$ , o  $d = -2$  y  $n > 1$  se tiene*

$$|1 - d^n| > \sum_{\substack{k|n \\ k < n}} |1 - d^k|.$$

*Demostración.* Gracias a la fórmula

$$\sum_{k=0}^{m-1} x^k = \frac{1-x^m}{1-x}$$

tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |1 - d^k| = \begin{cases} -n + \frac{1-d^n}{1-d}, & \text{si } d > 0 \\ -1 + \frac{1+d^n}{1+d}, & \text{si } d < 0, n \text{ impar} \\ 0 + \frac{1-d^n}{1+d}, & \text{si } d < 0, n \text{ par.} \end{cases}$$

Como

$$|1 - d^n| = \begin{cases} -1 + d^n, & \text{si } d > 0 \\ 1 - d^n, & \text{si } d < 0, n \text{ impar} \\ -1 + d^n, & \text{si } d < 0, n \text{ par.} \end{cases}$$

Luego, hay tres casos para ver, según el signo de  $d$  y la paridad de  $n$ . Si  $d \geq 2$ ,  $n \geq 1$

$$(-1 + d^n) - \left(-n + \frac{1-d^n}{1-d}\right) = \frac{d-2}{d-1}(d^n - 1) + n > 0,$$

por lo tanto  $|1 - d^n| > \sum_{k=0}^{n-1} |1 - d^k|$

Si  $d \leq -2$ ,  $n \geq 1$  impar

$$(1 - d^n) - \left(-1 + \frac{1+d^n}{1+d}\right) = 3 - \frac{d+2}{d+1}(d^n + 1) \geq 3 > 0.$$

por lo tanto  $|1 - d^n| > \sum_{k=0}^{n-1} |1 - d^k|$

Si  $d \leq -3$ ,  $n \geq 1$  par

$$(-1 + d^n) - \frac{1 - d^n}{1 + d} = \frac{2 + d}{1 + d}(d^n - 1) > 0$$

por lo tanto  $|1 - d^n| > \sum_{k=0}^{n-1} |1 - d^k|$

El caso  $d = -2$  es particular. Si  $n \geq 0$  es par,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(-2)^k - 1| = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = |(-2)^n - 1|$$

Pero si  $n > 2$ , existe  $1 \leq k < n$  tal que  $k$  no divide a  $n$ , luego

$$\sum_{\substack{1 \leq k < n \\ k | n}} |(-2)^k - 1| < \sum_{k=0}^{n-1} |(-2)^k - 1| = |(-2)^n - 1|$$

□

**Teorema 5.2.2** (Los periodos en el caso  $|d| \geq 2$ ). *Cada una de las condiciones siguientes es suficiente para que  $n \geq 1$  sea un periodo de  $f$ .*

1.  $d \geq 2$
2.  $d \leq -3$ ,  $n$  impar,  $b \leq 3$
3.  $d \leq -3$ ,  $n$  impar,  $b > 3$ ,  $n > \log_{|d|}(2(b-3) + 1)$
4.  $d \leq -3$ ,  $n$  par
5.  $d = -2$ ,  $n$  impar,  $b < 3$
6.  $d = -2$ ,  $n$  impar,  $b \geq 3$ ,  $n - 1 > \log_2(b - 2)$
7.  $d = -2$ ,  $n$  par  $> 2$

*Demostración.* Si  $d \geq 2$  o  $d \leq -2$  y  $n$  es par,  $f^n$  tiene  $|d^n - 1|$  clases de puntos fijos no vacías, por el teorema 5.1.3. Para cada  $k | n$ ,  $f^k$  tiene a lo más  $|d^k - 1|$  clases de puntos fijos no vacías. Si además  $n > 2$  en el caso  $d = -2$ , por el lema 5.2.1, por lo menos una de las clases de puntos fijos de  $f^n$  no es una clase de puntos fijos de ningún  $k < n$ . Un elemento de esta clase será un punto de periodo  $n$ , con lo cual quedan demostrados los puntos 1, 4 y 7.

Si  $d \leq -3$  y  $n$  es impar entonces por lo menos  $|d^n - 1| - b$  de las clases de puntos fijos de  $f^n$  son no vacías por el teorema 5.1.5. Por el lema 5.2.1, por lo menos  $q_1 =$

$$(|1 - d^n| - b) - \sum_{k=0}^{n-1} |1 - d^k| = 3 - b - \frac{d+2}{d+1}(d^n + 1) \geq (3 - b) + \frac{1}{2}(|d|^n - 1)$$

clases no vacías de puntos fijos de  $f^n$  no son clases de puntos fijos de ningún  $k < n$ . Cada uno de estos puntos será un punto de periodo  $n$ . Ahora bien 2 ó 3 son condiciones suficientes para que  $q_1 > 0$ , luego son condiciones suficientes para que exista un punto de periodo  $n$ .

Si  $d = -2$  y  $n$  es impar, hay por lo menos  $q_2 =$

$$(|1 - d^n| - b) - \sum_{\substack{k < n \\ k | n}} |1 - d^k| = 3 - b + \sum_{\substack{k < n \\ k \nmid n}} |1 - d^k| \geq (3 - b) + |1 - 2^{n-1}|$$

clases de puntos fijos no vacías de  $f^n$  que no son clases de puntos fijos de ningún  $k < n$ . Cada uno de estos puntos será un punto de periodo  $n$ , lo cual demuestra 5 y 6 ya que cualquiera de éstos es una condición suficiente para que  $q_2 > 0$ .  $\square$

*Observación 5.2.3.* En la prueba del teorema 5.2.2 se ha demostrado de paso que la cantidad de puntos de periodo  $n$  varía como  $|d|^n$  para  $n$  grande.



## Capítulo 6

# Funciones de grado 0 y de grado $-1$

**RESUMEN:** En el caso de las funciones de grado 0 se demuestra que los periodos son los mismos que aquellos de cierta función en un árbol, es decir que el problema se traduce a un caso ya estudiado. En el caso de las funciones de grado  $-1$  no se llega en esta tesis a ningún resultado concluyente pero se dan algunos resultados intermedios que transportan el problema a un espacio de levantamiento.

### 6.1. Levantamiento del problema para las funciones de grado 0

Sea  $G$  un grafo de ciclo único y sea  $f : G \rightarrow G$  una función continua de grado 0 y  $F$  un levantamiento de  $f$ . Por el teorema 5.1.3, para cada  $n$ ,  $\text{Fix}(f^n) = \pi(\text{Fix}(F^n))$ . Se deduce el lema 6.1.1

**Lema 6.1.1.** *Un punto de  $G$  es periódico de periodo  $n$  para  $f$  si y solamente si este es proyección de un punto de  $T$  periódico de periodo  $n$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in G$  y sea  $y \in T$  tal que  $x = \pi(y)$ .

Supongamos que  $x$  es de periodo  $n$ . Entonces existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $F^n(y) = y + m$ . Como  $f^n$  es de grado 0,  $F^n(y + m) = F^n(y) = y + m$  luego  $y_1 = y + m$  es un punto fijo de  $F^n$ . Si  $y_1$  no es un punto de periodo  $n$  para  $F$  entonces existe  $k|n$  tal que  $k < n$  y  $F^k(y_1) = y_1$ . Pero esto implica  $f^k(x) = x$  contradiciendo la hipótesis de que  $x$  es de periodo  $n$ . Luego  $y_1$  es de periodo  $n$ .

Recíprocamente, supongamos que  $y$  es un punto periódico de periodo  $n$  para  $F$ . Entonces  $f^n(x) = \pi(F^n(y)) = x$ , luego  $x$  es un punto periódico para  $f$ . Sea  $k$  su periodo. Como  $f^k(x) = x$  existe  $l \in \mathbb{Z}$  tal que  $F^k(y) = y + l$ . Entonces  $y_k = y + l$  es un punto fijo de  $F^k$ . Entonces

$$F^n(y) = F^n(y_k) = (F^k)^{n/k}(y_k) = y_k = y + l$$

Como  $y$  es un punto fijo de  $F^n$  entonces  $l = 0$ . Como  $y$  es de periodo  $n$  para  $F$  y  $k \leq n$ , entonces  $k = n$ . Luego  $x$  es de periodo  $n$ .  $\square$

**Teorema 6.1.2.** Sean  $n, m \in \mathbb{Z}$  tales que  $\mathfrak{R}(F(T)) \subset [n, m]$  pero  $\mathfrak{R}(F(T)) \not\subset [n+1, m]$ ,  $\mathfrak{R}(F(T)) \not\subset [n, m-1]$ . Sea  $\tilde{F} : \tilde{T}_n^m \rightarrow \tilde{T}_n^m$  definida por  $\tilde{F}(y) = F(y)$ . Entonces los periodos de  $f$  son precisamente los periodos de  $F$ . Se remite a Alsedà et al. (2005) para el caso de los árboles finitos.

*Demostración.* Es una consecuencia directa del lema 6.1.1 □

## 6.2. Levantamiento del problema para funciones de grado $-1$

Sea  $G$  un grafo de ciclo único. Sea  $f$  una función continua de grado  $-1$  y  $F$  un levantamiento de  $f$ .

La proposición siguiente es una reformulación de 4.3.3.

**Proposición 6.2.1** (Grado y levantamiento). Si  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ ,  $y \in T$ , entonces

1.  $F^n(y+k) = F^n(y) + (-1)^n k$
2.  $(F+k)^n(y) = F^n(y) + \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)k$

**Teorema 6.2.2.** Si  $n$  es impar y  $x \in G$  es un punto de periodo  $n$ , entonces existe  $z \in \pi^{-1}(x)$  que es un punto periódico de  $F$  o de  $F+1$ , de periodo  $n$  tal que  $\pi(z) = x$ .

*Demostración.* Sea  $x \in G$ ,  $y \in T$  tales que  $\pi(y) = x$ . Supongamos que  $x$  es un punto de periodo  $n$ . Entonces  $f^n(x) = x$ , luego  $F^n(y) = y+k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Supongamos que  $n$  es impar. Si  $k$  es par, entonces:

$$F^n(y+k/2) = F^n(y) - k/2 = y+k/2,$$

así que basta con tomar  $z = y+k/2$ . En cambio si  $k$  es impar, entonces

$$(F+1)^n\left(y + \frac{k+1}{2}\right) = F^n\left(y + \frac{k+1}{2}\right) + 1 = F^n(y) - \frac{k+1}{2} + 1 = y + \frac{k+1}{2},$$

así que basta con tomar  $z = y + (k+1)/2$ .

En ambos casos se obtiene  $z \in T$  tal que  $F^n(z) = z$  y  $\pi(z) = x$ . Si  $0 < k \leq n$  es tal que  $F^k(z) = z$  entonces  $f^k(x) = x$  luego  $k = n$  ya que  $x$  es un punto de periodo  $n$ . Se sigue que  $z$  es un punto de periodo  $n$ . □

# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1. Conclusiones

El área de los sistemas dinámicos es muy rica en herramientas generales que se aplican a situaciones de lo más diversas. El estudio del caso particular de la dimensión 1 puede usarse como fuente de inspiración para dimensiones más grandes.

Como era de prever, el caso de los grafos de ciclo único permite usar el caso del círculo como fuente de inspiración. Más aún, mirando las pruebas, uno se da cuenta que todo lo desarrollado en esta tesis para grafos de ciclo único es válido para cualquier espacio que sea el cociente de un espacio de elevación por una relación de equivalencia que respete la traslación.

Es decir que si  $E$  es un espacio de elevación, y  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $E$  tal que

$$x \sim y \Rightarrow \tau(x) \sim \tau(y),$$

se demuestra similarmente a 5.2.2 que  $F = \frac{E}{\sim}$  posee las propiedades siguientes:

**Teorema 7.1.1.** *Sea  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $L : E \rightarrow E$ ,  $l : F \rightarrow F$  que hacen conmutar los diagramas siguientes:*

$$\begin{array}{ccc} & \tau & \\ E & \rightarrow & E \\ L \downarrow & & \downarrow L \\ E & \rightarrow & E \\ & \tau^d & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & L & \\ E & \rightarrow & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ F & \rightarrow & F \\ & l & \end{array} .$$

*Llamamos puntos de ramificación de  $F$  a las imágenes por  $\pi$  de los puntos  $x \in \mathbb{R}_F$  tales que  $\mathfrak{R}^{-1}(x) \neq x$ . Sea  $b$  el número de puntos de ramificación de  $F$ . Cada una de las condiciones siguientes es suficiente para que  $n \geq 1$  sea un periodo de  $l$ .*

1.  $d \geq 2$
2.  $d \leq -3$ ,  $n$  impar,  $b \leq 3$
3.  $d \leq -3$ ,  $n$  impar,  $b > 3$ ,  $n > \log_{|d|}(2(b-3)+1)$
4.  $d \leq -3$ ,  $n$  par

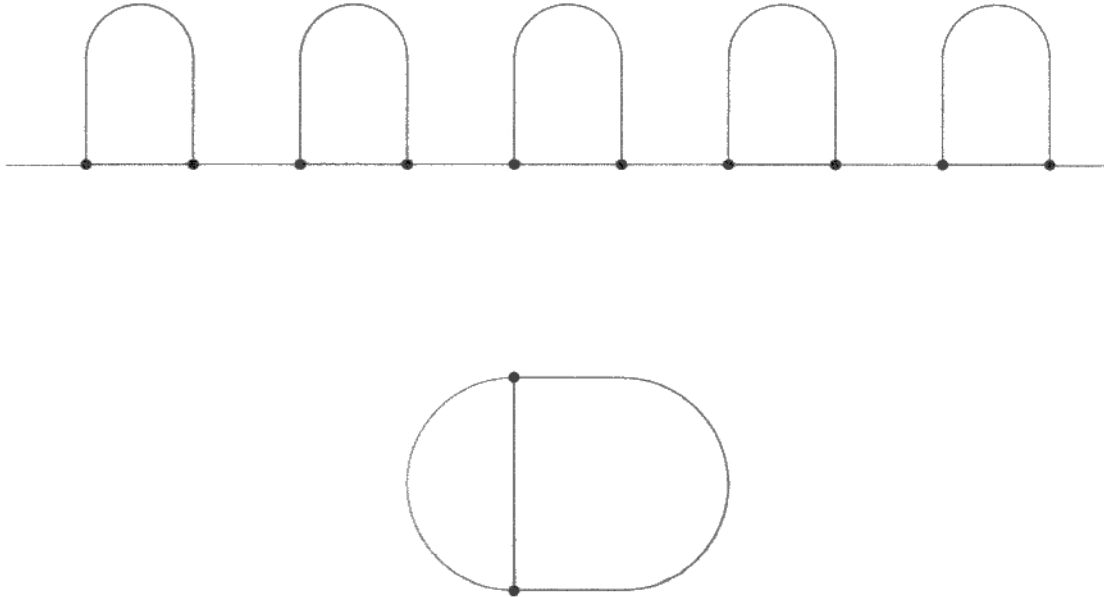


Figura 7.1: Ejemplo de grafo que no se puede “desenrollar” en un espacio de levantamiento

5.  $d = -2$ ,  $n$  impar,  $b < 3$
6.  $d = -2$ ,  $n$  impar,  $b \geq 3$ ,  $n - 1 > \log_2(b - 2)$
7.  $d = -2$ ,  $n$  par  $> 2$

Entonces se ve a partir de allí que los resultados obtenidos para funciones de grado de valor absoluto mayor a uno para grafos de ciclo único en esta tesis pueden generalizarse a cualquier grafo que sea el cociente de un espacio de levantamiento.

Sin embargo, queda pendiente estudiar el caso de funciones de grado 0, 1 o  $-1$  y de los grafos que no puedan obtenerse como cocientes de grafos que sean espacios de levantamiento. Intuitivamente, un grafo se puede “desenrollar” en un espacio de levantamiento si y solo si este contiene un ciclo minimal que se cruce una sola vez con todos los demás ciclos minimales. En la figura 7.1 se ve un grafo al cual nuestros resultados no se aplican. En la figura 7.2 se ven dos grafos que son cocientes de grafos de levantamiento, a los cuales se puede por lo tanto aplicar el teorema 7.1.1.

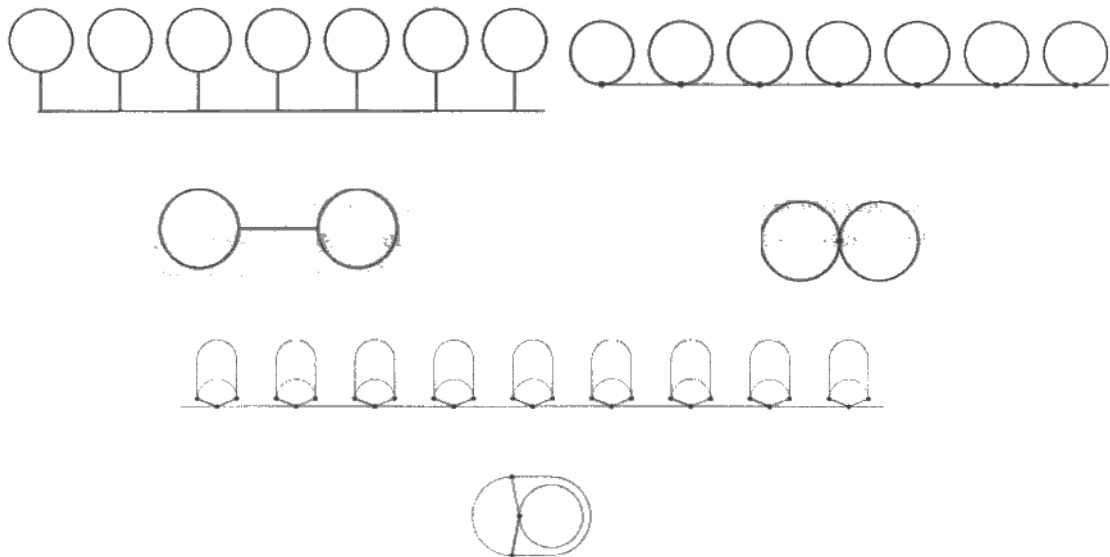


Figura 7.2: Ejemplos de grafos que se “desenrollan” en espacios de levantamiento

# Bibliografía

- ALSEDÀ, L., JUHER, D. y MUMBRU, C. Periodic behavior on trees. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, vol. 25(5), páginas 1373–1400, 2005.
- ALSEDÀ, L., MISIUREWICZ, M. y LLIBRE, J. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*. Número 5 en Advanced Series in Nonlinear Dynamics. World Scientific Publishing Co. Inc., NJ, 2 edición, 1993.
- ALSEDÀ, L. y RUETTE, S. Rotation sets for graph maps of degree 1. *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 58, páginas 1233–1294, 2008.
- BLOCK, L., GUCKENHEIMER, J., MISIUREWICZ, M. y YOUNG, L.-S. Periodic points and topological entropy of one dimensional maps. *Global theory of dynamical systems*, (819), páginas 18–34, 1978.
- DIESTEL, R. *Graph theory*. Graduate texts in mathematics. Springer, 2006.
- DIEUDONNÉ, J. *Elementos de análisis*. Reverté, 1977.
- EFREMOVA, L. S. Periodic orbits and a degree of a continuous map. *Diff. and Integr. Equations (Gor'kii)*, vol. 2, páginas 109–115, 1978.
- KOSNIOWSKI, C. y SOLANAS, M. *Topología algebraica*. Reverté, 1992.
- LI, T.-Y. y YORKE, J. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, vol. 82, páginas 985–992, 1985.
- MASSEY, W. S. *Introducción a la topología algebraica*. Reverté, 2 edición, 1982.
- SERRE, J. *Arbres, amalgames,  $SL_2$ : cours au Collège de France*. 1977.
- SERRE, J. *Trees*. Springer monographs in mathematics. Springer, 2003.
- SHAR KOVSKIĬ, A. N. Co-existencia de ciclos de una aplicación continua de la recta en sí misma. *Ukrain. Math. Zh.*, vol. 82(1), páginas 61–71, 1964.