UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POST-GRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS MENCIÓN MATEMÁTICA APLICADA

TITULADA:

UN ESTUDIO SOBRE FUNCIONES PSEUDOCONVEXAS

PRESENTADA POR:

YBOON VICTORIA GARCÍA RAMOS

LIMA-PERÚ

2003

Contenido

Introducción

Es un hecho bien conocido la definición de función convexa se da sólo en base al concepto de espacio vectorial real y el ordenamiento en la recta real. Sin embargo, muchas propiedades importantes de las funciones convexas tienen caracter topológico. Un claro ejemplo es la propiedad de que todo mínimo local de una función tal es también mínimo global. Esta propiedad juega un papel importante en optimización ya que permite hallar mínimos globales de funciones convexas utilizando métodos iterativos de direcciones de descenso. Lamentablemente, en práctica exigir la condición de convexidad es muy restrictivo, por lo que años atrás muchos investigadores volcaron su esfuerzo en el estudio de una clase más grande de funciones, conocidas como funciones cuasiconvexas. Aunque éstas comparten con las funciones convexas su origen algebraico, poseen una gran carencia, no todo mínimo local es un mínimo global para funciones cuasiconvexas. Para salvar este inconveniente se introdujeron conceptos de pseudoconvexidad para funciones, que dependen de nociones topológicas. Inicialmente se introduce el concepto de pseudoconvexidad (ver [25]) bajo hipótesis de diferenciabilidad; más adelante esta condición sería reemplazada por la subdiferenciabilidad (ver [18]). En ninguno de estos casos se conserva el carácter principal de las funciones convexas y cuasiconvexas, esto es su naturaleza algebraica. Motivados por esto y en la búsqueda de una uniformidad introducimos un nuevo concepto de función pseudoconvexa, el cual depende únicamente de conceptos algebraicos. Las funciones pseudoconvexas, además de ser cuasiconvexas tienen la propiedad particular de que todo mínimo local es un mínimo global; estas funciones de algún modo ya están presentes en la literatura (ver [3], [16], [23]), decimos que de algún modo porque las definiciones que se dan sólo coinciden con nuestra definición asumiendo condiciones de semicontinuidad inferior. En este trabajo establecemos varias propiedades de las funciones pseudoconvexas, a la vez recogiendo lo ya existente en la literatura, hacemos esto concentrando nuestro interés en las relaciones existentes entre este tipo de generalización de la convexidad y cierto tipo de monotonicidad de ciertas multifunciones asociadas a ellas.

Describiremos brevemente como está organizado el trabajo. Las primeras cuatro secciones del primer capítulo sirven para repasar algunos hechos básicos del algebra lineal, topología y del análisis funcional; introduciendo en la sección 4 los conceptos de gradiente en espacios de Banach y de monotonicidad generalizada para operadores. La sección 5 está dedicada al estudio de multifunciones, en particular la semicontinuidad de multifunciones, y las multifunciones KKM, estrechamente ligadas al lema de Ky Fan [31], una herramienta fundamental en los resultados de existencia de soluciones en los problemas de equilibrio y de desigualdad variacional; y al final de la sección introducimos las nociones de monotonicidad generalizada para multifunciones. En la sección 6, se establecen varios resultados del análisis convexo clásico, referentes a funciones convexas, conos tangentes y conos normales; luego se hace un estudio de las funciones cuasiconvexas. En la sección 7, se estudian las derivadas generalizadas en el sentido de Clarke (ver [12]) y establecen dos teoremas principales, el teorema de valor medio de Lebourg y el teorema de valor medio aproximado de Zagrodny; veremos en la sección 8, y posteriormente en el capitulo 3, que son éstas herramientas fundamentales para establecer relaciones entre la convexidad generalizada de las funciones y la monotonicidad generalizada de los subdiferenciales.

El capítulo 2 está dedicado al estudio de las funciones pseudoconvexas. En la primera sección se introduce el concepto de función pseudoconvexa y se establecen algunas características de tales funciones. En la sección 2, se estudian las propiedades algebraicas de las funciones pseudoconvexas y en la sección 3 se establecen resultados relativos a máximos y mínimos. La sección 4 trata hechos concernientes a continuidad y diferenciabilidad. Más adelante, en la sección 5, caracterizamos las funciones pseudoconvexas mediante las propiedades de sus subdiferenciales y en la sección 6 por medio de las propiedades de la multifunción normal, la cual es definida en base a los conos normales a sus subconjuntos de nivel de la función en estudio. En el capitulo 3, primero estudiaremos el problema de equilibrio, bajo hipótesis de pseuconvexidad extendiendo resultados ya conocidos para hipótesis de convexidad,

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo establecemos las herramientas básicas para tratar los siguientes capítulos. En primer lugar, revisamos ciertos conceptos y resultados básicos del álgebra linea, topología y análisis funcional. A continuación hacemos un breve repaso de la teoría de multifunciones, para luego mencionar algunos resultados básicos del análisis convexo. En la última sección, desarrollamos la teoría de derivadas generalizadas, con el objetivo de probar el llamado *teorema del valor medio de Zagrodny.*

1.1 Espacios Vectoriales

Un *espacio vectorial real* es un conjunto $\mathcal{X}$, en el que se han definido dos operaciones. Una operación interna $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ llamada *adición*, la cual a cada par $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ le asocia un elemento de $\mathcal{X}$ denotado por $x + y$, de tal forma que se satisface

1. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$;

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$;

3. existe un único elemento denotado con 0 tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$; y

4. a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ le corresponde un único elemento $-x \in \mathcal{X}$ tal que $x + (-x) = 0$.

La otra operación, externa, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, la cual es llamada *multiplicación escalar*, a cada par $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ le asocia un elemento de $\mathcal{X}$ denotado por $\lambda \cdot x$ (o simplemente λx), y satisface

1. $1x = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$;

2. $\alpha(\beta x) = \beta(\alpha x)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathcal{X}$.

Estas operaciones están relacionadas por las siguientes leyes distributivas:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad y \quad (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x,$$

para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Una *transformación lineal* de un espacio vectorial $\mathcal{X}$ en un espacio vectorial $\mathcal{Y}$ es una aplicación $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ que satisface

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $x, y \in \mathcal{X}$. En el caso particular en el que $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, T es llamada *funcional lineal*.

El conjunto

$$\mathcal{X}' = \{T : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \,/\, T \text{ es funcional lineal}\}$$

provisto de las operaciones:

$$+ : \mathcal{X}' \times \mathcal{X}' \to \mathcal{X}', \quad +(T_1, T_2) = T_1 + T_2,$$

donde $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$, $\forall x \in X$ y

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{X}' \to \mathcal{X}', \quad (\alpha T) = \alpha T,$$

donde $(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$, $\forall\, x \in X$, es un espacio vectorial, llamado el *espacio vectorial dual (algebraico)* de $\mathcal{X}$. Para $x, y \in \mathcal{X}$, consideramos los conjuntos

$$[x,y] = \{z \in \mathcal{X} : z = \lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda\ \in [0,1]\},$$

y

$$]x,y] = [x,y]\backslash\{x\}, \quad [x,y[= [x,y]\backslash\{y\}, \quad]x,y[= [x,y]\backslash\{x,y\}.$$

Definición 1.1 (Core) [1] *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial real y K, C subconjuntos convexos de $\mathcal{X}$ con $C \subseteq K$, entonces se define el core de C relativo a K, denotado por* $\mathrm{core}_K C$ *como el conjunto*

$$\mathrm{core}_K C = \{a \in C : C \cap]a,y[\neq \emptyset,\ \forall\, y \in K \setminus C\}$$

1.2 Espacios Topológicos

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto cualquiera. Una *topología* en $\mathcal{X}$ es una colección τ de subconjuntos de $\mathcal{X}$, llamados *conjuntos abiertos* de la topología, los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\emptyset \in \tau, \mathcal{X} \in \tau$;

(ii) Si $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, entonces $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$;

(iii) Si $\{A_j\}_{j\in J} \subseteq \tau$, entonces $\displaystyle\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau$.

El par $(\mathcal{X}, \tau)$ es llamado *espacio topológico*; en lo que sigue sólo denotaremos por $\mathcal{X}$ al espacio topológico, supuesto que tengamos una topología fijada.
Un subconjunto F de $\mathcal{X}$ es llamado *cerrado* con respecto a τ si su complemento

[1] Core: palabra inglesa.

$F^c = \mathcal{X} \setminus F \in \tau$. La *clausura* $\overline{A}$ de A es la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen A. Un punto $x \in \mathcal{X}$ se dice que es un ***punto de adherencia*** con respecto a τ de un conjunto $C \subseteq \mathcal{X}$, si dado $U \in \tau$ tal que $x \in U$, se tiene que $U \cap C \neq \emptyset$. La clausura de un conjunto A es igual al conjunto formado por todos los puntos de adherencia de A. A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.

Dado un punto $x \in \mathcal{X}$ [un subconjunto $A \subseteq \mathcal{X}$], decimos que el conjunto U es una ***vecindad de*** x [*vecindad de* A] si existe un subconjunto abierto V tal que $x \in V \subseteq U$ $[A \subseteq V \subseteq U]$. Un espacio $\mathcal{X}$ es *Hausdorff* si dados $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$, existen vecindades $U \ni x$, $V \ni y$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Dados los espacios topológicos (X, τ_1) e (Y, τ_2) decimos que la función $f : X \to Y$ es *continua* con respecto a τ_1 y τ_2, si y sólo si

$$f^{-1}(V) = \{x \in \mathcal{X} \,/\, f(x) \in V\} \in \tau_1, \text{ para todo } V \in \tau_2.$$

Cuando $Y = \mathbb{R}$; diremos que la función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *semicontinua inferiormente* (s.c.i.) en $x \in \mathcal{X}$ con respecto a τ, si para todo $\lambda > f(x)$ existe una vecindad V de x tal que $\lambda > f(y)$ para todo $y \in V$; asimismo diremos que f es *semicontinua superiormente* (s.c.s.) en x con respecto a τ, si $-f$ es semicontinua inferiormente en $x \in \mathcal{X}$ con respecto a τ y diremos que la función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *semicontinua inferiormente*(s.c.i.) con respecto a τ si y solo f es semicontinua inferiormente con respecto a τ en cada punto de $\mathcal{X}$.

La prueba de la siguiente proposición es de carácter elemental y puede hallarse en cualquier libro de análisis, por ejemplo [11]

Proposición 1.1 *El supremo de una familia* $\{f_i\}_{i \in I}$, $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *de funciones semicontinuas inferiormente es semicontinua inferiormente.*

Lema 1.2 *Sean $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Si para algún $x_0 \in \mathcal{X}$ tenemos que $g(x_0) = h(x_0)$ y h es semicontinua superiormente en x_0, entonces g es semicontinua superiormente en x_0.*

Corolario 1.3 *Sean $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $g(x) \geq h(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Si para algún $x_0 \in \mathcal{X}$ tenemos que $h(x_0) = g(x_0)$ y h es semicontinua inferiormente en x_0, entonces g es semicontinua inferiormente en x_0.*

Prueba. Se obtiene directamente del lema anterior, teniendo en cuenta que h es s.c.i. x_0 si y sólo si $-h$ es s.c.s. en x_0. □

Sea $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ un espacio vectorial real provisto de una topología τ; diremos que $(\mathcal{X}, \tau)$ es un *espacio vectorial topológico* (con siglas t.v.s.[2]) si las operaciones $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ son continuas en las respectivas topologías producto.

En lo que sigue, denotaremos simplemente por $\mathcal{X}$ al espacio topológico $(\mathcal{X}, \tau)$.

Denotamos por $\mathcal{X}^*$ al espacio dual (topológico) de $\mathcal{X}$, i.e.

$$\mathcal{X}^* = \{T : \mathcal{X} \to \mathbb{R};\ T \text{ lineal y continua}\}$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X}^* \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ al *producto de dualidad*,

$$\langle x^*, x \rangle = x^*(x) \text{ para todo } x^* \in \mathcal{X}^* \text{ y } x \in \mathcal{X}.$$

Un t.v.s. $\mathcal{X}$ es llamado *espacio localmente convexo*, si para toda vecindad V de 0, existe una vecindad U del 0 convexa tal que $U \subseteq V$.

Dado un t.v.s. $\mathcal{X}$, para una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, los conjuntos

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathcal{X} : f(x) < \infty\},$$

[2]Por sus siglas en inglés, *topological vector space*

$$\mathrm{Epi}(f) = \{(x, \lambda) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\},$$

y

$$\widetilde{\mathrm{Epi}}(f) = \{(x, \lambda) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} : f(x) < \lambda\}$$

se denominan respectivamente *dominio*, *epígrafo* y *epígrafo estricto* de f; dado $\lambda \in \mathbb{R}$, los conjuntos

$$S_\lambda(f) = \{x : f(x) \leq \lambda\}$$

y

$$\widetilde{S_\lambda}(f) = \{x : f(x) < \lambda\},$$

se denominan *conjunto de nivel* y *conjunto de nivel estricto* de f relativo a λ.

Ahora proporcionamos una caracterización de las funciones semicontinuas inferiormente, la cual será una herramienta fundamental en los siguientes capítulos. La prueba puede ser vista en [11].

Proposición 1.4 *Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. Para una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son equivalentes:*

(i) f es semicontinua inferiormente;

(ii) $S_\lambda(f)$ es cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $\mathrm{Epi}(f)$ es cerrado.

El siguiente teorema, que damos sin demostración, es un hecho bien conocido (ver [11]).

Teorema 1.5 (Weierstrass) *Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s., $K \subseteq \mathcal{X}$ compacto, $f : K \to \mathbb{R}$. Si f es s.c.i. entonces f alcanza su mínimo en K.*

1.3 Espacios Métricos

Un *espacio métrico* es un conjunto $\mathcal{X}$ en el que está definida una función *distancia* (o *métrica*) $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, la cual satisface:

(i) $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

(ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$.

La propiedad (iv) se denomina *desigualdad triangular*.

Denotamos al espacio métrico por $(\mathcal{X}, d)$ ó simplemente $\mathcal{X}$.
Si $x \in \mathcal{X}$ y $r > 0$, la *bola abierta [cerrada] centrada en* x *y de radio* r es el conjunto

$$B_r(x) = \{y \in \mathcal{X} / d(x, y) < r\} \qquad [\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathcal{X} / d(x, y) \leq r\}].$$

Si $\mathcal{X}$ es un espacio métrico y τ es la colección de todos los conjuntos de $\mathcal{X}$ que son uniones arbitrarias de bolas abiertas, entonces τ es una topología en $\mathcal{X}$. En esta topología: un conjunto $C \subseteq \mathcal{X}$ es abierto si y sólo si para cada $x \in \mathcal{X}$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq C$.

Dado un subconjunto C de un espacio métrico $\mathcal{X}$, se define el diámetro de C, denotado por $\mathrm{Diam}(C)$ mediante

$$\mathrm{Diam}(C) = \sup_{x,y \in C} d(x, y) \tag{1.1}$$

(observe que es $+\infty$ si C no es acotado). En un espacio métrico $\mathcal{X}$, una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* a $x \in \mathcal{X}$ si

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \text{ implica } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ es una *sucesión de Cauchy* si

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, n \geq n_0 \text{ implican } d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Un espacio métrico $\mathcal{X}$ se dice que es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Sean $(\mathcal{X}, d_1)$ y $(\mathcal{Y}, d_2)$ dos espacios métricos. Una función $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se dice que es una *isometría* si para todo $x, y \in \mathcal{X}$ se satisface

$$d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y)).$$

Teorema 1.6 (Ekeland) *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico completo, y $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función propia, acotada inferiormente y semicontinua inferiormente. Sean $x_0 \in \mathcal{X}$ y $\varepsilon > 0$ tales que*

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} f(x) \leq f(x_0) < \inf_{x\in\mathcal{X}} f(x) + \varepsilon. \tag{1.2}$$

Entonces, para todo $\lambda > 0$, existe $\overline{x} \in \mathcal{X}$ tal que

(i) $f(\overline{x}) \leq f(x_0)$;

(ii) $d(x_0, \overline{x}) \leq \lambda$;

(iii) $f(\overline{x}) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y, \overline{x}) < f(y)$; $\forall\, y \neq \overline{x}$.

Prueba. Tomemos $\alpha = \varepsilon/\lambda$ y consideremos, los siguientes conjuntos

$$F(x) = \{y \in \mathcal{X} : f(y) + \alpha d(x, y) \leq f(x)\}. \tag{1.3}$$

para $x \in \mathcal{X}$. Estos conjuntos gozan de las siguientes propiedades:

(a) $y \in F(y)$ para todo $y \in \mathcal{X}$;

(b) si $y \in F(x)$, entonces $F(y) \subseteq F(x)$.

En efecto, (a) es inmediato de la definición de $F(x)$. Probemos (b).

Si $f(x) = +\infty$, entonces (b) se satisface trivialmente, pues en este caso $F(x) = \mathcal{X}$. Supongamos que $f(x)$ es finito. Sea $y \in F(x)$ y $z \in F(y)$; sumando las desigualdades

$$f(z) + \alpha d(y, z) \leq f(y) \quad \text{y} \quad f(y) + \alpha d(x, y) \leq f(x)$$

y usando la desigualdad triangular obtenemos

$$f(z) + \alpha d(x, z) \leq f(x),$$

lo cual implica que $z \in F(x)$. Esto prueba (b).

Consideremos la función $v : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(y) = \inf_{z \in F(y)} f(z).$$

Es claro de (1.3) que

$$\forall y \in F(x),\ \alpha d(x, y) \leq f(x) - v(x),$$

de donde nuevamente por la desigualdad triangular

$$\forall y, w \in F(x);\ \alpha d(y, w) \leq \alpha d(y, x) + \alpha d(x, w) \leq 2(f(x) - v(x))$$

lo cual implica que

$$Diam(F(x)) \leq 2(f(x) - v(x)). \tag{1.4}$$

Definamos ahora la sucesión $\{x_n\}$. Comenzando con x_0, tomemos $x_{n+1} \in F(x_n)$ tal que $f(x_{n+1}) \leq v(x_n) + 2^{-n}$ (lo que es posible por definición de ínfimo).

Como por (b), $F(x_{n+1}) \subseteq F(x_n)$,

$$v(x_n) \leq v(x_{n+1}). \tag{1.5}$$

Por otro lado siempre se cumple que $v(y) \leq f(y)$, de donde

$$v(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1}) \leq v(x_n) + 2^{-n} \leq v(x_{n+1}) + 2^{-n}, \tag{1.6}$$

y de aquí

$$0 \leq f(x_{n+1}) - v(x_{n+1}) \leq 2^{-n}. \tag{1.7}$$

La desigualdad (1.4) implica que el diámetro de los conjuntos cerrados $F(x_n)$ converge a cero (pues $\alpha > 0$ es una constante.). Como estos conjuntos son cerrados no vacíos, tenemos por la completitud de $\mathcal{X}$ y lo anterior que

$$\bigcap_{n\geq 0} F(x_n) \neq \emptyset,$$

i.e. existe $\overline{x} \in \bigcap_{n\geq 0} F(x_n)$; en particular $\overline{x} \in F(x_0)$ y (i) está probado. Pero además, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$F(\overline{x}) \subseteq F(x_n)$$

y por lo tanto $F(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. De esto deducimos que si $y \neq \overline{x}$, entonces $y \notin F(\overline{x})$ y por lo tanto

$$f(x) + \alpha d(\overline{x}, x) > f(\overline{x}).$$

Esto prueba (iii). Para verificar (ii), observe que de (1.3) (con $x = x_0$)

$$(f(\overline{x}) - f(x_0)) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0, \overline{x}) \leq 0,$$

y de (1.2), $(f(\overline{x}) - f(x_0)) > -\varepsilon$; de estas condiciones concluimos que $\frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0, \overline{x}) < \varepsilon$ y por lo tanto $d(x_0, \overline{x}) \leq \lambda$, lo que es precisamente (ii). Esto concluye la prueba. □

1.4 Espacios Normados

Definición 1.2 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial real; diremos que $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial normado ó simplemente un espacio normado si existe una función $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, llamada norma, tal que*

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$;

(ii) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *para todo* $x \in \mathcal{X}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in \mathcal{X}$.

Tomando $d(x, y) = \|x - y\|$, tenemos que $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es una métrica en $\mathcal{X}$; así todo espacio normado es un espacio métrico.
Un *espacio de Banach* es un espacio normado que es completo con la métrica inducida por su norma.

Dados $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios normados, la *norma* de la transformación lineal $T : X \to Y$ se define por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in \mathcal{X} \text{ y } \|x\| = 1\}. \tag{1.8}$$

En caso que $\|T\| < \infty$, diremos que T es una transformación lineal *acotada*. Una caracterización de dichas transformaciones es dada en la siguiente proposición, para ver su prueba consultar [28].

Proposición 1.7 *Dados* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *espacios normados. Para una transformación lineal* $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, *son equivalentes:*

(i) T *es acotada,*

(ii) T *es continua;*

(iii) T *es continua en un punto de* $\mathcal{X}$.

Note que $\mathcal{X}^*$ es un espacio normado con la norma dada por (1.8).

Los siguientes resultados, los cuales nos permiten hallar funcionales lineales acotadas con propiedades especiales, son hechos bien conocidos del análisis funcional; la prueba de ellos puede ser hallada en ([13]).

Teorema 1.8 (Hahn-Banach) *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial real, $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función que verifica*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \, \forall\, \lambda > 0 \;y\; \forall\, x \in \mathcal{X};$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \, \forall\, x, y \in \mathcal{X};$$

(la función p que cumple las dos propiedades anteriores, se dice que es una funciónal sublineal positivamente homogénea) y T una funcional lineal definida en un subespacio Y de $\mathcal{X}$, la cual satisface $T(x) \leq p(x), \forall\, x \in Y$. Entonces existe una funcional lineal $\widehat{T}$, definida en $\mathcal{X}$, satisfaciendo

$$\widehat{T}(x) \leq p(x), \, \forall\, x \in \mathcal{X} \qquad y \qquad \widehat{T}(x) = T(x), \, \forall\, x \in Y.$$

Corolario 1.9 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado, y $x \in \mathcal{X}$. Entonces existe un $x^* \in \mathcal{X}^*$ diferente de cero, tal que $\langle x^*, y\rangle = \|x^*\|\|y\|$.*

Teorema 1.10 (Teorema de separación de Hahn-Banach) *Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado, y sean $C, K \subseteq \mathcal{X}$ dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Si C es cerrado y K compacto, entonces existen $f \in \mathcal{X}^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) < \alpha < f(y)$, para todo $x \in C$ y todo $y \in K$.*

Dado un espacio de Banach $\mathcal{X}$, podemos definir en él dos topologías. La primera, la usual (también conocida como *topología fuerte*) es inducida por la norma $\|\cdot\|$, y la segunda que es conocida como *topología débil* la cual es denotada por $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$; la topología débil es la topología menos fina sobre $\mathcal{X}$ que hace continuas a todas las funcionales lineales $T \in \mathcal{X}^*$. La convergencia en ésta topología está caracterizada de la siguiente manera: una sucesión (x_n) converge *débilmente* a x (converge en la topología $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$), denotado por $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si

$$\langle T, x_n\rangle \to \langle T, x\rangle \text{ para todo } T \in \mathcal{X}^*.$$

Todo conjunto cerrado en la topología débil (llamado *débilmente cerrado*) $\sigma(X, X^*)$ es cerrado en la topología fuerte. En efecto, sea $A \subseteq \mathcal{X}$ débilmente cerrado y consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$; entonces tenemos que $x_n \rightharpoonup x$, de donde $x \in A$; luego A es cerrado. El recíproco no es cierto en general, como lo muestra el ejemplo a continuación.

Ejemplo 1.1 *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. La esfera unitaria $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ no es cerrado en la topología débil. De hecho, la clausura débil de S es la bola unitaria $B = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ (ver [13]).*

Para conjuntos convexos, las nociones de cerradura fuerte y débil coinciden como muestra el siguiente teorema, el cual puede ser encontrado en [28].

Teorema 1.11 *Sea $C \subseteq \mathcal{X}$ convexo y cerrado. Entonces C es débilmente cerrado si y sólo si es fuertemente cerrado.*

Corolario 1.12 *Sea $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función s.c.i. (respecto a la topología fuerte), para la cual todos sus subconjuntos de nivel $S_\lambda(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ son convexos. Entonces φ es s.c.i. en la topología débil. En particular, si $x_n \rightharpoonup x$, entonces*

$$\varphi(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n).$$

Prueba. Se sigue directamente del teorema anterior y de la proposición 1.4.

Definición 1.3 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado, $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Decimos que f es hemicontinua superiormente, si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$, la restricción $f|_{[x,y]} : [x, y] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es semicontinua superiormente en $[x, y]$.*

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, sabemos que $\mathcal{X}^*$ es un espacio normado con la norma

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{X} \\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|;$$

De forma análoga dotamos al espacio $\mathcal{X}^{**}$, el dual de $\mathcal{X}^*$ (llamado *bidual* de $\mathcal{X}^*$) de la norma

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{X}\\ \|f\|\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle|.$$

Consideremos la *inyección canónica* $J : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}$, dada por

$$J(x) : \mathcal{X}^* \to \mathbf{R}, \quad [J(x)](f) = \langle f, x\rangle.$$

La inyección J es una isometría lineal que permite identificar $\mathcal{X}$ con un subespacio de $\mathcal{X}^{**}$; de ésta manera, sobre el espacio $\mathcal{X}^*$ quedan definidas las siguientes topologías:

1) La topología fuerte (asociada a la norma de $\mathcal{X}^*$).

2) La topología débil $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^{**})$.

3) La *topología débil estrella*, que denotaremos con $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$, que es la topología menos fina que hace continuas a todas las aplicaciones

$$\{\varphi_x : \mathcal{X}^* \to \mathbf{R}\}_{x\in\mathcal{X}},$$

donde

$$\varphi_x(f) = \langle f, x\rangle \text{ para todo } f \in \mathcal{X}^*.$$

La topología débil estrella queda caracterizada por: $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$ si y sólo si

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \text{ para todo } x \in \mathcal{X}.$$

La siguiente proposición establece las relaciones entre estas tres topologías, para la prueba ver [8].

Proposición 1.13 *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{X}^*$. Se verifica*

(i) $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$ si y sólo si $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

(ii) Si $f_n \to f$, entonces $f_n \rightharpoonup f$.

(iii) Si $f_n \rightharpoonup f$, entonces $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(iv) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ y $x_n \to x$, entonces $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Teorema 1.14 (Alaoglu) *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach. $M \subseteq \mathcal{X}^*$ es cerrado en la topología débil estrella, si y sólo si M es acotado y cerrado en la topología débil estrella (ver [2]).*

Si $J : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}$ es sobreyectiva, diremos que $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach *reflexivo*. La reflexividad de un espacio puede caracterizarse mediante la topología débil, como se muestra a continuación:

Teorema 1.15 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{X}$ es reflexivo si y sólo si*

$$B_x = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq 1\}$$

es compacto en la topología $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ (ver ([8]).

De aquí se tiene que un subconjunto K de un espacio de Banach reflexivo $\mathcal{X}$, es débilmente compacto si y sólo si es acotado y débilmente cerrado.

La siguiente proposición muestra la relación que existe entre el concepto de core y la topología de un espacio normado.

Proposición 1.16 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado y C un subconjunto convexo abierto, no vacío de $\mathcal{X}$, entonces $core_{\mathcal{X}}(C) = C$.*

Prueba. Sea $x \in C$, como C es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq C$. Sea $y \in \mathcal{X}$, entonces para $0 < \lambda < 1$ suficientemente pequeño tenemos que

$$\|\lambda y + (1 - \lambda)x - x\| = \lambda\|y - x\| < \varepsilon,$$

esto es $]x, y[\cap C \neq \emptyset$. Como y fue arbitrario concluimos que $x \in core_X(C)$. Por lo tanto $C \subseteq core_X(C)$. $\square$

Funciones de Soporte

Sea C un subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$; la *función de soporte* de C en $\mathcal{X}$, denotada por σ_C es la función $\sigma_C : \mathcal{X}^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$\sigma_C(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in C\}.$$

Las siguientes propiedades de las funciones de soporte son conocidas; el lector interesado puede hallar las pruebas en [19].

Proposición 1.17 *Sean C y D subconjuntos convexos cerrados no vacíos de $\mathcal{X}$, y sean C^*, D^* dos subconjuntos convexos, cerrados en la topología débil estrella de X^*. Entonces:*

1) *$C \subseteq D$ si y sólo si $\sigma_C(x^*) \leq \sigma_D(x^*)$, para todo $x^* \in \mathcal{X}^*$.*

2) *$C^* \subseteq D^*$ si y sólo si $\sigma_{C^*}(x) \leq \sigma_{D^*}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X}$.*

3) *C^* es compacto en la topología débil estrella si y sólo si σ_{C^*} sólo toma valores finitos.*

4) *Una función $\sigma : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es positivamente homogénea, subaditiva, s.c.i. (fuerte o débil) y propia, si y sólo si existe un subconjunto C^* de X^* no vacío, convexo, cerrado en la topología débil estrella tal que $\sigma = \sigma_C$, y además este conjunto es único.*

1.4.1 Diferenciabilidad y Monotonicidad

En la solución de problemas de desigualdad variacional, una de las hipótesis mas comunes es la monotonicidad del mapeo que define el problema, lo cual es natural considerando que en problemas de optimización, tales como el problema clásico de minimización, se asume que las funciónes involucradas son convexas, lo que implica, como veremos más adelante, la monotonicidad del gradiente. Desde hace muchas décadas se han hecho esfuerzos para generalizar la monotonicidad, con el objetivo de tratar problemas de optimización no convexos; sin embargo ha sido recién desde la década de los 90, cuando se ha hecho un estudio sistemático de ésta generalización; uno de los primeros trabajos relevantes sobre esto fue realizado por Karamardian [21].

Los conceptos que se dan en esta sección están estrechamente relacionados con las propiedades de los gradientes de ciertos tipos de funciones con propiedades de convexidad generalizadas, como veremos más adelante.

La definición de diferenciabilidad en espacios normados es análoga a la de las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$:

Definición 1.4 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado y V un subconjunto abierto de $\mathcal{X}$. Una función $f : V \to \mathbb{R}$ es diferenciable según Fréchet en $u_0 \in V$ si y sólo si existe $u^* \in \mathcal{X}^*$ tal que*

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + (u^*, h) + r(h), \tag{1.9}$$

para h lo suficientemente pequeño y $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{||h||} = 0$. El vector u^* será denotado por $\nabla f(x_0)$ y es llamado gradiente de f en u_0.

Si f es diferenciable según Fréchet en todo $v \in V$, diremos simplemente que f es *diferenciable.* En este caso, definimos el *gradiente* de f, $\nabla f : V \to \mathcal{X}^*$ asociando a cada $x \in V$ el gradiente $\nabla f(x)$.

A continuación daremos algunas definiciones que más adelante servirán para caracterizar cierto tipo de funciones por las propiedades de sus gradientes.

Definición 1.5 *Dado $C \subseteq \mathcal{X}$ convexo y $T : C \to \mathcal{X}^*$, T es llamado* *(i) monótono si*

$$x_1, x_2 \in C \text{ implica } \langle T(x_2) - T(x_1), x_2 - x_1\rangle \geq 0.$$

(ii) cíclicamente monótono si

$$\{x_1, \ldots x_n, x_{n+1}\} \subseteq C \text{ con } x_1 = x_{n+1}, \text{ implica } \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i), x_{i+1} - x_i\rangle \leq 0;$$

(iii) cuasimonótono si

$$x_1, x_2 \in C, \langle T(x_1), x_2 - x_1\rangle > 0 \text{ implica } \langle T(x_2), x_2 - x_1\rangle \geq 0.$$

(iv) cíclicamente cuasimonótono si para cada $\{x_1, \ldots x_n, x_{n+1}\} \subseteq C$ *con* $x_{n+1} = x_1$ *existe* $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$ *tal que*

$$\langle T(x_i), x_{i+1} - x_i\rangle \leq 0.$$

(v) propiamente cuasimonótono si para cada $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq C$ *y* $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, *existe* $i \in \{1, \ldots n\}$ *tal que*

$$\langle T(x_i), z - x_i\rangle \leq 0.$$

(vi) pseudomonótono si

$$x_1, x_2 \in C, \langle T(x_1), x_2 - x_1\rangle > 0 \text{ implica } \langle T(x_2), x_2 - x_1\rangle > 0.$$

(vii) cuasipseudomonótono si T *es cuasimonótono y además*

$$x_1, x_2 \in C, \langle T(x_1), x_2 - x_1\rangle > 0$$

implica que el conjunto $\{z \in [x_1, x_2] : \langle T(z), x_2 - x_1\rangle > 0\}$ *es denso en* $[a, b]$.

Observación 1.1 *Para un operador $T : C \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, se verifican las siguientes implicaciones:*

- *T cíclicamente monótono $\Longrightarrow$ T monótono $\Longrightarrow$ T pseudomonótono $\Longrightarrow$ T cuasipseudomonótono $\Longrightarrow$ T cuasimonótono*
- *T cíclicamente monótono $\Longrightarrow$ T cíclicamente cuasimonótono $\Longrightarrow$ T propiamente cuasimonótono.*

En la proposición anterior, las relaciones recíprocas no son necesariamente ciertas; a continuación mostramos algunos ejemplos al respecto.

Ejemplo 1.2 *Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $T(a,b) = (\frac{a}{2} - b, a + \frac{b}{2})$. Entonces T así definido es monótono; en particular es pseudomonótono y cuasimonótono. Sin embargo T no es cíclicamente quasimonótono, como se ve al considerar los puntos $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (-1,0)$, y $x_4 = (0,-1)$; en particular T no es cíclicamente monótono.*

Ejemplo 1.3 *Sea $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ y $x_1 = (0,1)$, $x_2 = (0,0)$,$x_3 = (1,0)$. Definimos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, por $T(x_1) = (-1,-1)$, $T(x_2) = (1,0)$, $T(x_3) = (0,1)$, y $T(x) = 0$ en otro caso. Es fácil verificar que T es cuasimonótono, pero no es propiamente cuasimonótono (considere $y = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$).*

1.5 Multifunciones

1.5.1 Definiciones básicas

Definición 1.6 *Sean $\mathcal{X}$ e Y dos conjuntos. Una multifunción F de $\mathcal{X}$ en Y, denotada por $F : X \rightrightarrows Y$, es una función $F : X \to 2^Y$ que a cada $x \in \mathcal{X}$ le asocia de* *manera única un subconjunto* $F(x) \subseteq Y$. *Una multifunción está caracterizada por su gráfico* $\mathrm{Graf}(F) \subseteq \mathcal{X} \times Y$ *definido por*

$$\mathrm{Graf}(F) = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times Y \,/\, y \in F(x)\}.$$

El conjunto $F(x)$ *es la imagen o valor de* F *en el punto* x.

El dominio de la multifunción F *es el conjunto*

$$\mathrm{Dom}(F) = \{x \in \mathcal{X};\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

Si $\mathrm{Dom}(F) \neq \emptyset$ *decimos que* F *es propia. La imagen de* F *es la unión de los valores de* $F(x)$*, donde* x *recorre* $\mathcal{X}$*:*

$$\mathrm{Im}(F) = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} F(x).$$

Definimos la imagen inversa de un conjunto M *mediante la multifunción* F *por*

$$F^{-1}(M) = \{x \in \mathcal{X} \,/\, F(x) \subseteq M\}.$$

Para $F : X \rightrightarrows Y$, *definimos* $F^* : Y \rightrightarrows \mathcal{X}$ *mediante*

$$F^*(y) = \{x \in \mathcal{X} \,/\, y \notin F(x)\}.$$

Sean $\mathcal{X}$, Y espacios topológicos.

Definición 1.7 $F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ *es llamada semicontinua superiormente si para todo abierto* $U \subseteq \mathcal{Y}$ *el conjunto* $F^{-1}(U)$ *es abierto en* $\mathcal{X}$.

Definición 1.8 *Sean* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ *espacios vectoriales topológicos y* K *un subconjunto convexo no vacío de* $\mathcal{X}$. *Diremos que la multifunción* $F : K \rightrightarrows \mathcal{Y}$ *es hemicontinua superiormente en* K*, si para cualesquiera* $x, y \in K$*, la restricción* $F|_{[x,y]} : [x, y] \rightrightarrows \mathcal{Y}$ *es semicontinua superiormente en* $[x, y]$.
Diremos que $F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ *es débilmente hemicontinua superiormente en* K *si es hemicontinua superiormente considerando en* $\mathcal{X}^*$ *la topología débil estrella.*

Utilizaremos además el mapeo $\overline{F} : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ dado por

$$\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$$

para $x \in \mathcal{X}$.

1.5.2 Mapeos KKM

Definición 1.9 *Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s, $D \subseteq \mathcal{X}$ no vacío. $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ es llamada multifunción (ó mapeo) KKM si* $\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$ *para cualquier subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subseteq D$; aquí* $\operatorname{conv}(A)$ *denota la capsula convexa de un subconjunto A de $\mathcal{X}$.*

Una condición suficiente para que una multifunción $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ sea KKM es dada en el siguiente teorema:

Teorema 1.18 *Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. y $K \subseteq \mathcal{X}$ convexo. Si $F : K \rightrightarrows K$ satisface*

(i) $x \in F(x)$ para cada $x \in K$;

(ii) $F^*(y)$ es convexo para cada $y \in K$;

entonces F es KKM.

Prueba. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ e $\overline{y} \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$; tenemos que mostrar que

$$\overline{y} \in \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i).$$

Como $\overline{y} \in F(\overline{y})$, tenemos que $\overline{y} \notin F^*(\overline{y})$ y por lo tanto $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\} \nsubseteq F^*(\overline{y})$. Desde que $F^*(\overline{y})$ es convexo, al menos un punto $x_i \notin F^*(\overline{y})$, lo que implica que $\overline{y} \in F(x_i)$; que era lo que queríamos probar. □

Ejemplo 1.4 *Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. de Hausdorff, $K \subseteq \mathcal{X}$ convexo no vacío, $f : K \times K \to \mathbb{R}$ una función tal que, para cada $y \in \mathcal{X}$, el subconjunto $\{x \in K \,/\, f(y,x) < 0\}$ es convexo. Si $f(x,x) \geq 0$ para todo $x \in K$, la multifunción $F : K \rightrightarrows K$ dada por*

$$F(y) = \{x \in K \,/\, f(x,y) \geq 0\}$$

es KKM.

En efecto; evidentemente $x \in F(x)$ para cada $x \in K$; además

$$F^*(y) = \{x \in K \,/\, f(y,x) < 0\}$$

es un conjunto convexo para todo $y \in K$; luego por el teorema 1.18, F es KKM.

Más adelante le daremos sentido a este ejemplo, a través del concepto de *cuasi-convexidad.*

Necesitaremos el siguiente teorema para garantizar la existencia de soluciones de determinados problemas; la prueba puede verse en ([31]).

Teorema 1.19 (Lema de Ky Fan) *Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. de Hausdorff, $D \subseteq \mathcal{X}$ no vacío y $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ una multifunción tal que:*

i) $G(x)$ es cerrado para cada $x \in D$;

ii) $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ es KKM;

iii) Al menos uno de los $G(x)$ es compacto.

Entonces

$$\bigcap_{x \in D} G(x) \neq \emptyset.$$

1.5.3 Monotonicidad de Multifunciones

En seguida extendemos el concepto de monotonicidad generalizada para multifunciones.

Definición 1.10 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, K un subconjunto no vacío convexo y cerrado, $T : K \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ es*

(i) monótono si

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0, \text{ para todo } x^* \in T(x),\ y^* \in T(y).$$

(ii) cíclicamente monótono si para cualquier ciclo $x_1, \ldots x_n, x_{n+1} \subseteq K$ (sucesión finita de puntos con $x_{n+1} = x_1$) y cualesquiera $x_i^* \in T(x_i)$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x_{i+1} - x_i\rangle \leq 0.$$

(iii) cuasimonótono si para todo $x, y \in \mathcal{X}$ y $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$ se verifica que

$$\langle x^*, y - x\rangle > 0 \text{ implica } \langle y^*, y - x\rangle \geq 0.$$

(iv) cíclicamente cuasimonótono si para cualquier ciclo $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \subseteq K$ y cualquier $x_i^* \in T(x_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se cumple que

$$\langle x_i^*, x_{i+1} - x_i\rangle > 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ implica } \langle x_n^*, x_1 - x_n\rangle \leq 0.$$

(v) propiamente cuasimonótono si para todo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ y todo $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\langle x^*, z - x_i\rangle \leq 0 \text{ para todo } x^* \in T(x_i).$$

(vi) pseudomonótono si para todo $x, y \in \mathcal{X}$ y $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$ se verifica que

$$\langle x^*, y - x \rangle \geq 0 \text{ implica } \langle y^*, y - x \rangle \geq 0;$$

lo cual es equivalente a lo siguiente: si existe $y^* \in T(y)$ tal que

$$\langle y^*, y - x \rangle < 0, \text{ entonces } \langle x^*, y - x \rangle < 0, \text{ para todo } x^* \in T(x).$$

(vii) cuasipseudomonótono si T es cuasimonótono y para todo $x, y \in \mathcal{X}$, se tiene que si existe $x^* \in T(x)$ con $\langle x^*, y - x \rangle > 0$, entonces el conjunto

$$\{z \in]x, y[: \langle z^*, y - x \rangle > 0 \text{ para algún } z^* \in T(z)\}$$

es denso en $[x, y]$.

Como en el caso de operadores monovaluados, se dan relaciones análogas

Proposición 1.20 *Para un mapeo multivaluado $T : K \subseteq \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ se cumplen las siguientes relaciones*

- *T cíclicamente monótono $\Longrightarrow$ T monótono $\Longrightarrow$ T pseudomonótono $\Longrightarrow$ T cuasipseudomonótono $\Longrightarrow$ T cuasimonótono.*

- *T cíclicamente monótono $\Longrightarrow$ T cíclicamente cuasimonótono $\Longrightarrow$ T propiamente cuasimonótono.*

Prueba. Se siguen directamente de las definiciones.□

Una relación no tan evidente es la siguiente:

Proposición 1.21 *Un operador cuasipseudomonótono es propiamente cuasimonótono.*

Prueba. Sea $T : K \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ cuasipseudomonótono. Por reducción al absurdo, supongamos que T no sea propiamente cuasimonótono; entonces existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ y $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ con $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ($z \in \text{conv}\{x_1, \cdots, x_n\}$) de modo que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, y existen $x_i^* \in T(x_i)$ tal que

$$\langle x_i^*, z - x_i \rangle > 0.$$

De esto podemos hallar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\langle x_i^*, w - x_i \rangle > 0, \, \forall w \in B_\varepsilon(z). \tag{1.10}$$

Como T es propiamente cuasipseudomonótono, podemos hallar $y \in]x_1, z[\cap B_\varepsilon(z)$ y $y^* \in T(y)$ $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)z$ ($\lambda \in]0, 1[$), con $\langle y^*, z - x_1 \rangle > 0$, y de aquí $\langle y^*, z - y \rangle = \lambda \langle y^*, z - x_1 \rangle > 0$. Como

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle y^*, z - x_i \rangle = \langle y^*, z - y \rangle > 0,$$

existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $\langle y^*, z - x_j \rangle > 0$, de donde por la cuasimonotonicidad de T se sigue que

$$\langle x_j^*, x_j - y \rangle \leq 0,$$

contradiciendo (1.10).

Proposición 1.22 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach reflexivo, K un subconjunto no vacío, convexo y cerrado, y $T : K \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ una multifunción cuasimonótona. Son equivalentes:*

(i) T es cuasipseudomonótono;

(ii) T satisface la siguiente propiedad:

$$\exists x^* \in T(x) : \langle x^*, y - x \rangle > 0 \text{ implica que}$$

$$\exists z \in \left] \frac{x+y}{2}, y \right[\text{ y } z^* \in T(z) \text{ tal que } \langle z^*, y - x \rangle > 0.$$

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ Se sigue fácilmente de la definición. Probemos $(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que (ii) se cumpla y que $\langle x^*, y-x\rangle > 0$ para algún $x^* \in T(x)$; esto implica que $\langle x^*, z-x\rangle > 0$ para todo $z \in]x,y]$. Sea $w \in]x,y]$, definamos inductivamente una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq]x,w[$ tal que $\|z_n - w\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x-w\|$ y $\langle z_n^*, y-x\rangle > 0$ para algún $z_n^* \in T(z_n)$, como sigue: hacemos $z_1 = x$, y si z_n está definida, entonces $\langle z_n^*, y-x\rangle > 0$, para algún $z_n^* \in T(z_n)$; por (ii), podemos escoger $z_{n+1} \in]\frac{z_n+w}{2}, w[$ tal que $\langle z_{n+1}^*, w-z_n\rangle > 0$, para algún $z_{n+1}^* \in T(z_{n+1})$. Evidentemente $\langle z_{n+1}^*, y-x\rangle > 0$ y $\|z_{n+1} - w\| \leq \frac{1}{2}\|z_n - w\| \leq \frac{1}{2^n}\|x-w\|$. Por lo tanto $z_n \to w$, de donde se sigue (i).

Proposición 1.23 *Una multifunción $T : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ es monótona si y sólo si, $\forall \alpha^* \in \mathcal{X}^*$ la multifunción*
$T + \alpha*$, definida por $(T+\alpha^*) = \{x^* + \alpha^* : x^* \in T(x)\}$ es cuasimonótono.

Prueba. Si T es monótono es obvio que para cualquier $\alpha^* \in \mathcal{X}^*$, $T + \alpha^*$ es cuasimonótono. Recíprocamente, supongamos que para todo α^*, $T+\alpha^*$ es cuasimonótono. Sean $x, y \in \text{Dom}(T)$ con $x \neq y$, $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$. Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $\alpha^* \in \mathcal{X}^*$ tal que

$$\langle x^* + \alpha, y - x\rangle = \varepsilon > 0,$$

como por hipótesis $(T + \alpha^*)$ es cuasimonótono, esto implica

$$\langle y^* + \alpha^*, y - x\rangle \geq 0$$

y esto a su vez implica que $\langle y^*, y-x\rangle \geq \langle -\alpha, y-x\rangle = \langle x^* + \alpha, y-x\rangle - \varepsilon$, de donde $\langle y^* - x^*, y-x\rangle \geq -\varepsilon$. Como ε fue arbitrario, concluimos que $\langle y^* - x^*, y-x\rangle \geq 0$ y por lo tanto T es monótono.□

1.6 Elementos del Análisis Convexo y Convexidad generalizada

En esta sección estableceremos resultados básicos del análisis convexo referentes a conjunto convexos, cono y funciones convexas; que serán herramientas necesarias para los resultados posteriores. En lo que sigue, $\mathcal{X}$ denotará un espacio de Banach real.

1.6.1 Funciones convexas

Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se dice que la función f es *convexa* si su epígrafo $\text{Epi}(f)$ es convexo.

La siguiente proposición muestra algunas de las caracterizaciones de carácter netamente geométrico de las funciones convexas.

Proposición 1.24 *Para $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es convexa;

(2) $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, $\forall\, x,\, y \in \mathcal{X}$ y $z \in [x, y]$;

(3) $\forall\, x, y \in \text{Dom}(f)$, $\forall\, \lambda \in]0, 1[$

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x)}{1-\lambda} + \frac{f(x_\lambda) - f(y)}{\lambda} \leq 0,$$

donde $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Si $X = \mathbb{R}$, lo anterior es también equivalente a:

4) $\dfrac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \dfrac{f(u) - f(t)}{u - t}$, $\forall\, a, s, t, u, b \in \text{Dom}(f)$ con $a \leq s < t < u \leq b$.

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2) Es directo desde que $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ están en el $\text{Epi}(f)$ y este conjunto por hipótesis es convexo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sean x, $y \in \text{Dom}(f)$, como $\forall \lambda \in]0,1[$; $f(x_\lambda) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ tenemos que

$$\lambda(f(x_\lambda) - f(x)) + (1-\lambda)(f(x_\lambda) - f(y)) \leq 0$$

de donde dividiendo entre $\lambda(1-\lambda)$ obtenemos (3). (3) $\Rightarrow$ (1) Sean (x, α), (y, β) $\in \text{Epi}(f)$, entonces $f(x) \leq \alpha$ y $f(y) \leq \beta$ luego para todo $\lambda \in]0,1[$,

$$\frac{f(x_\lambda) - \alpha}{1-\lambda} + \frac{f(x_\lambda) - \beta}{\lambda} \leq \frac{(f(x_\lambda) - f(x))}{1-\lambda} + \frac{(f(x_\lambda) - f(y))}{\lambda} \leq 0,$$

lo cual implica que $f(x_\lambda) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$, i.e. $(x_\lambda, \alpha_\lambda) \in \text{Epi}(f)$, con $\alpha_\lambda = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$, $\forall \lambda \in]0,1[$. Esto prueba (1).

Si $X = \mathbb{R}$,

(3) $\Rightarrow$ (4) Basta observar que $t = \dfrac{t-s}{u-s} u + \dfrac{u-t}{u-s} s$, luego tenemos

$$\frac{u-t}{u-s}[f(t) - f(s)] + \frac{t-s}{u-s}[f(u) - f(t)] \leq 0$$

de donde se sigue fácilmente que:

$$\frac{f(t) - f(s)}{t-s} \leq \frac{f(t) - f(u)}{u-t}.$$

(4) $\Rightarrow$ (3) Basta tomar $s = a$ y $u = b$.

Para $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $a \in \text{Dom}(f)$, $d \in \mathcal{X}$ definimos la función

$$f_{a,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{1.11}$$

mediante

$$f_{a,d}(t) = f(a + td).$$

La siguiente proposición muestra que las funciones convexas, pueden ser caracterizadas por su comportamiento unidimensional.

Proposición 1.25 *Una función* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *es convexa si y solamente si* $\forall\, d, a \in \mathcal{X}$, $f_{a,d}$ *es convexa.*

A continuación enumeraremos algunas de las propiedades de las funciones convexas, que como veremos en el capitulo 2 se siguen verificando para una familia mas grande de funciones, las llamadas funciones pseudoconvexas; para ver su demostración ver [19].

Proposición 1.26 *Sea* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa, tenemos que*

1) El dominio de f *es convexo.*

2) Si $\lambda > 0$, *entonces* λf *también es convexa.*

3) Todo mínimo local de f *es también un mínimo global.*

4) Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función creciente, y entonces* $h \circ f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ *es convexa.*

5) Si $(-f)$ *es también convexa y* f *no es constante, entonces* f *no tiene mínimo; en este caso* f *es una función afín.*

6) Sea $\{f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$, $i \in I$ *una familia de funciones convexas; entonces la función* $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \sup_{i=1,\ldots,n} f_i(x)$ *es convexa.*

7) Si f *alcanza un máximo relativo en un punto que pertenece al interior de su dominio, entonces* f *es constante en una vecindad alrededor de este punto.*

8) Si f *alcanza un máximo global en el interior de su dominio, entonces* f *es constante.*

9) Para cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$ *y* $v \in \mathcal{X}$, *la función*

$$t \to \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

es no decreciente.

Otro hecho conocido sobre las funciones convexas que será extendido es el siguiente.

Proposición 1.27 *Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, propia, convexa tal que $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, donde $\{h_n\}$ es una sucesión no decreciente de funciones s.c.i., convexas, propias, definidas en $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si h tiene un subconjunto de nivel compacto y no vacío, entonces para todo n suficientemente grande, h_n tiene un subconjunto de nivel compacto y no vacío.*

Caracterización de las funciones convexas diferenciables

Teorema 1.28 *Sea $C \subseteq \mathcal{X}$, abierto convexo y $f : C \to \mathbb{R}$ una función diferenciable; entonces son equivalentes:*

(i) f *es convexa.*

(ii) $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$, $\forall x, y \in C$.

(iii) ∇f *es monótono; mas aún* ∇f *es cíclicamente monótono.*

Conjugada de funciones convexas

Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se define la *conjugada* de f (*en el sentido de Fenchel*), como la función $f^* : \mathcal{X}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$$

y la *biconjugada* de f, como la función $f^{**} : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in\mathcal{X}^*} \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}.$$

Como la conjugada f^* de cualquier función f es el supremo de funciones lineales (que son convexas y s.c.i.), es siempre una función convexa y s.c.i. La siguiente proposición muestra que, en particular, toda función convexa, propia y s.c.i. es el supremo de funciones afines:

Proposición 1.29 *Una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa, s.c.i. y propia si y sólo si $f = f^{**}$.*

El subdiferencial convexo

Proposición 1.30 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia. Sean $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ y $v \in \mathcal{X}$, entonces*

$$f'(x_0; v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t},$$

existe en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y satisface

$$f(x_0) - f(x_0 - v) \leq f'(x_0; v) \leq f(x_0 + v) - f(x_0),$$

además la aplicación $v \to f'(x_0, , v)$ es convexa y positivamente homogénea.

Definición 1.11 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia. Para $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, definimos el subdiferencial de f en x_0 denotado por $\partial f(x_0)$, como el conjunto*

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, v \rangle \leq f'(x_0; v), \forall\, v \in \mathcal{X}\}.$$

Los elementos de $\partial f(x_0)$ son llamados subgradientes.

Observe que $x_0 \to \partial f(x_0)$ define una multifunción $\partial f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$. La siguiente proposición nos proporciona una caracterización de los subgradientes.

Proposición 1.31 *(ver [19]) Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia. Supongamos que $\partial f(x_0) \neq \emptyset$, entonces son equivalentes:*

(i) $x^* \in \partial f(x)$.

(ii) $\langle x^*, x\rangle = f(x) + f^*(x^*)$

(iii) $f(x) - \langle x^*, x\rangle \leq \inf_{y\in\mathcal{X}}(f(y) - \langle x^*, y\rangle), \forall x \in \mathcal{X}$.

(iv) $f(x) + \langle x^*, x - y\rangle \leq f(y), \forall y \in \mathcal{X}$.

Proposición 1.32 *Sean $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones, propias, convexas y s.c.i., tales que*

$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f) - \operatorname{Dom}(g)),$$

entonces

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

1.6.2 Conos Tangentes y Normales

En seguida daremos las nociones de cono tangente y normal, y veremos como se relacionan estos dos conceptos. Estos conceptos serán de gran utilidad para el análisis de subdiferenciabilidad.

Sea K un subconjunto convexo de un espacio de Banach $\mathcal{X}$. Si $x \in K$, el *cono normal* a K en x, denotado por $N_K(x)$ es definido como el conjunto

$$N_K(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, x\rangle = \sigma_K(x^*)\},$$

donde σ_K es la *función de soporte* de K definida en 1.17; y el *cono tangente* de K en x, denotado por $T_K(x)$, es definido como el conjunto

$$T_K(x) = \overline{\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x)}.$$

Lema 1.33 *Sea $C \subseteq \mathcal{X}$ un cono convexo cerrado, entonces se satisface:*

(1) $\psi_C^*(p) = \psi_{C^-}(p)$, *donde* $C^- = \{p \in \mathcal{X}^* / \langle p, x\rangle \leq 0;\ \forall x \in C\}$*;*

(2) $\sup\limits_{p\in C^-} \langle p, x\rangle = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in C \\ +\infty & \textit{si } x \notin C \end{cases}$

En particular, si $x \notin C$*, entonces existe* $p \in C^-$ *tal que* $\langle p, x\rangle > 0$.

Aquí ψ *denota la función indicador.*

Prueba. De la definición de ψ_C^*, tenemos

$$\psi_C^*(p) = \sup_{x\in\mathcal{X}}\{\langle p, x\rangle - \psi_C(p)\} = \sup_{x\in C}\langle p, x\rangle.$$

Luego si $p \in C^-$; $\langle p, x\rangle \leq 0$; $\forall x \in C$, y como $0 \in C$ concluimos que

$$\sup_{x\in C}\langle p, x\rangle = 0.$$

Si $p \notin C^-$, existe $x_0 \in C$ tal que $\langle p, x_0\rangle > 0$ y dado que $\lambda x_0 \in C$ para todo $\lambda > 0$ se tiene que

$$\sup_{x\in C}\langle p, x\rangle = +\infty;$$

lo que prueba (1).

Para probar (2), observemos primero que

$$\psi_C^{**}(x) = \sup_{p\in\mathcal{X}^*}\{\langle p, x\rangle - \psi_C^*(x)\} = \sup_{p\in C^-}\langle p, x\rangle.$$

Como C es convexo, ψ_C es convexa y entonces $\psi_C = \psi_C^{**}$, de donde por (1)

$$\sup_{p\in C^-}\langle p, x\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in C \\ +\infty & \text{si } p \notin C \end{cases}$$

y (2) esta probado.□

La siguiente proposición muestra la dualidad existente entre $T_K(x)$ y $N_K(x)$.

Proposición 1.34 *Sea* K *un conjunto convexo, entonces los conos tangente y normal satisfacen la relación*

$$N_K(x) = T_K(x)^- \quad \forall x \in K.$$

1.6.3 Funciones Cuasiconvexas

En esta sección, haremos un estudio de las funciones cuasiconvexas y veremos su relación con las funciones convexas.

Una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *cuasiconvexa* si todos sus conjuntos de nivel $S_\lambda(f)$ son convexos.
Una función cuasiconvexa que satisface la siguiente propiedad: $\forall x, y \in X, x \neq y, f(z) < \max\{f(x), f(y)\}, \forall z \in]x, y[$, es llamada estrictamente cuasiconvexa.

Como ya vimos anteriormente, las funciones convexas gozan de esta propiedad, luego toda función convexa es cuasiconvexa. El recíproco no es cierto en general; en efecto, toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente es cuasiconvexa mas no necesariamente convexa, para lo cual basta tomar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

Proposición 1.35 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Son equivalentes:*

1) f es cuasiconvexa;

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\widetilde{S_\lambda}(f)$ es convexo;

3) $f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$ y $z \in [x, y]$;

4) $f(z) > f(x)$ implica $f(z) \leq f(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$ y $z \in [x, y]$.

Prueba. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. Dados $x, y \in \widetilde{S_\lambda}(f)$, escogemos μ tal que

$$f(x) < \mu < \lambda \quad \text{y} \quad f(y) < \mu < \lambda.$$

Por hipótesis $S_\mu(f)$ es convexo, luego $z \in S_\mu(f)$, $\forall z \in [x, y]$, i.e. $f(z) \leq \mu, \forall z \in [x, y]$ y como $\mu < \lambda$ concluimos que $z \in \widetilde{S_\lambda}(f)$, $\forall z \in [x, y]$.
2) $\Rightarrow$ 3) Si 3) no fuera cierto, existirían $x, y \in \mathcal{X}$ y $z \in [x, y]$ tales que $f(x) < f(z)$ y $f(y) < f(z)$, de donde $x, y \in \widetilde{S_{f(z)}}(f)$ y luego por 2) $z \in \widetilde{S_{f(z)}}(f)$, lo cual es claramente una contradicción.

3) $\Rightarrow$ 4) En efecto $f(z) > f(x)$ y $f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, implican que $f(z) \leq f(y)$.
4) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S_\lambda(f)$ no es convexo, i.e. existen $x, y \in S_\lambda(f)$ y $z \in [x, y]$ tal que $z \notin S_\lambda$. Pero entonces $f(x) \leq \lambda < f(z)$ y por 4) $f(z) \leq f(y)$, de donde $\lambda < f(z) \leq f(y) \leq \lambda$, una contradicción.

Lema 1.36 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función cuasiconvexa. Entonces* $\mathrm{Dom}(f)$ *es convexo.*

Prueba. Sean $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, i.e. $f(x) < \infty$ y $f(y) < \infty$, de la proposición 1.35, item 3 tenemos que para cualquier $z \in [x, y]$ $f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, de donde $[x, y] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Lema 1.37 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función cuasiconvexa. Si para algunos puntos $x, y \in$* $\mathrm{Dom}(f)$ *y $z \in]x, y[$ tenemos $f(x) \leq f(z) = f(y)$, entonces f es constante en $[x, z]$ o en $[z, y]$.*

Prueba. Supongamos que no sea cierto, entonces como f es cuasiconvexa existen $u \in [x, z[$ y $v \in]z, y]$ tales que

$$f(u) < f(z) \quad \text{y} \quad f(v) < f(y) = f(z);$$

como $z \in [u, v]$, entonces $f(z) \leq \max\{f(u), f(v)\} < f(z)$, lo cual es una contradición. Por lo tanto el lema esta probado.□

La siguiente proposición muestra, que al igual que las funciones convexas, las funciones cuasiconvexas pueden ser caracterizadas por su comportamiento unidimensional.

Proposición 1.38 *Una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es cuasiconvexa si y solamente si $\forall\, d, a \in \mathcal{X}$, $f_{a,d}$ es cuasiconvexa .*

Prueba. Si f es cuasiconvexa, entonces claramente $f_{x,d}$ es cuasiconvexa para todo $x, d \in \mathcal{X}$. Recíprocamente sean $x, y \in \mathcal{X}$ cualesquiera. Para todo $\lambda \in [0,1]$, $f_{x,y-x}(\lambda) \leq \max\{f_{x,y-x}(0), f_{x,y-x}(1)\}$, y de la definición de $f_{x,y-x}$ obtenemos $f(x + \lambda(y-x)) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, lo que prueba que f es cuasiconvexa. □

Con respecto a la composición tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.39 *Sea $f : C \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función cuasiconvexa, y g una función no decreciente. Si $f(X) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, entonces $g \circ f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es también cuasiconvexa.*

Prueba. Sean x, $y \in C$ y $z \in]x, y[$; sin pérdida de generalidad supongamos que $f(x) \leq f(y)$, luego por la cuasiconvexidad de f tenemos que $f(z) \leq f(y)$, lo que implica que

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) \leq g(f(y)) = (g \circ f)(y),$$

pues g es no decreciente. Por lo tanto $g \circ f$ es cuasiconvexa.□

Ejemplo 1.5 *Para funciones convexas, el resultado anterior no es necesariamente cierto, i.e. la composición de una función convexa con una no decreciente no es necesariamente convexa. Para ver esto basta considerar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$. Aquí f es convexa y g es creciente mas $g \circ f = g$ no es convexa.*

Extremos relativos de funciones cuasiconvexas

Proposición 1.40 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función cuasiconvexa. Si x_0 es un mínimo local estricto, entonces x_0 es también un mínimo local.*

Prueba. Como x_0 es un mínimo local estricto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) < f(x)$, $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$. Es claro que si $y \notin \mathrm{Dom}(f)$, entonces $f(x_0) < f(y)$. Sea $y \in \mathrm{Dom}(f)$, luego por la convexidad de $\mathrm{Dom}(f)$, $z \in]x_0, y[\cap B_\varepsilon(x_0)$, de donde por hipótesis $f(x_0) < f(z)$, y luego cuasiconvexidad de f implica que $f(x_0) < f(z) \leq f(y)$. Como y fue arbitrario concluimos que x_0 es un mínimo global.□

Proposición 1.41 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función cuasiconvexa. Si x_0 es un mínimo local que no es un mínimo global, entonces f es constante en la intersección de alguna vecindad de x_0 y el segmento de recta que une x_0 y cualquier mínimo global.*

Prueba. Como x_0 es un mínimo local, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(y), \forall y \in B_\varepsilon(x_0)$. Sea y_0 un mínimo global de f, entonces $f(y_0) < f(x_0)$ (pues x_0 no es un mínimo global), luego para todo $z \in]y_0, x_0[\cap B_\varepsilon(x_0)$, tenemos que $f(z) \leq f(x_0)$ de donde concluimos que $f(z) = f(x_0)$.□

Es un hecho conocido el que si f y $-f$ son funciones convexas, entonces f es una función afín. Aunque para las funciones cuasiconvexas este resultado no es cierto en general, para funciones cuasiconvexas f tales que $-f$ también es cuasiconvexa se satisfacien propiedades interesantes, como la dada en la siguiente proposición.

Proposición 1.42 *Sea $f : C \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, las funciones f y $-f$ son cuasiconvexas, si y sólo si, los conjuntos $M_\alpha = \{x \in C : f(x) = \alpha\}$ son convexos, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

Prueba. $\Rightarrow$) Si f y $-f$ son cuasiconvexas, tenemos para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ que los subconjuntos de nivel $S_\alpha(f)$ y $S_\alpha(-f)$ son convexos, lo que implica que $M_\alpha = S_\alpha(f) \cap S_\alpha(-f)$ es convexo.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que f no es cuasiconvexa, entonces existen $x, y \in C$ y $z \in]x, y[$ tales que

$$f(z) > \max\{f(x), f(y)\}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(x) \leq f(y) < f(z)$; haciendo $\alpha = f(y)$, la continuidad de f y la compacidad de $[x, z]$ implican la existencia de un punto $\overline{x} \in [x, z]$ tal que $f(\overline{x}) = \alpha$. Como por hipótesis M_α es convexo y $z \in]\overline{x}, y[$, concluimos que $f(z) = \alpha$, lo que cual es una contradicción. Por lo tanto f es cuasiconvexa.□

Funciones cuasiconvexas diferenciables

Teorema 1.43 *Sea $C \subseteq \mathcal{X}$ un conjunto abierto, no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces f es cuasiconvexa, si y sólo si, para cada $x, y \in C$ se cumple que*

$$f(x) \leq f(y) \text{ implica } \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq 0.$$

Prueba. $\Rightarrow$) Si $f(x) \leq f(y)$, la cuasiconvexidad de f implica que

$$f(y + \lambda(x - y)) \leq f(y), \; \forall \, \lambda \in]0, 1[,$$

de donde

$$\frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda} \leq 0, \; \forall \, \lambda \in]0, 1[$$

y como la función es diferenciable, podemos tomar limite cuando $\lambda \to 0^+$ obteniendo

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq 0.$$

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in C$ y $t \in]0, 1[$ tales que para $z_t = tx + (1-t)y$, se tiene que $f(z_t) > f(x)$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f_{(x,y-x)}$ en los puntos t y 1, podemos hallar $t < t_0 < 1$ tal que $f_{(x,y-x)}(1) - f_{(x,y-x)}(t) = f'_{(x,y-x)}(t_0)(1 - t)$. De aquí obtenemos

$$0 > f(x) - f(z_t) = \langle \nabla(z_{t_0}), x - y \rangle$$

lo cual implica que

$$\langle \nabla f(z_{t_0}), y - z_0 \rangle > 0. \tag{1.12}$$

Como para $w \in [z_0, y]$, i.e. $w = \lambda y + (1-\lambda) z_0, \lambda \in]0, 1[$, tenemos que $w - z_0 = \lambda(y - z_0)$, de (1.12),

$$\langle \nabla f(z_{t_0}), w - z_0 \rangle > 0$$

y lo cual implica, por hipótesis, que $f(z_0) < f(w)$, de donde

$$\langle \nabla f(w), z_0 - w \rangle \leq 0$$

y luego

$$\langle \nabla f(w), x - y\rangle \leq 0.$$

La última desigualdad muestra que $f'_{(x,y-x)}(t)) \leq 0$, $\forall\, \alpha \in]0, t_0[$, i.e. la función $f'_{(x,y-x)}$ es decreciente en ese intervalo. Ahora de $0 < t < t_0$, $f'_{(x,y-x)}(t) \leq f'_{(x,y-x)}(0)$ y reemplazando obtenemos $f(z_t) \leq f(y)$. Esto muestra que f es cuasiconvexa.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.44 *Sea $C \subseteq \mathcal{X}$ un abierto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces f y $-f$ son cuasiconvexas si y sólo si, para cada $x, y \in C$,*

$$f(x) \leq f(y) \text{ implica } \langle \nabla f(y), x - y\rangle \leq 0$$

y

$$f(y) \leq f(x) \text{ implica } \langle \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0.$$

Corolario 1.45 *Sea $C \subseteq \mathcal{X}$ abierto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ una función diferenciable; entonces f y $-f$ son cuasiconvexas si y sólo si, para cada $x, y \in C$,*

$$f(x) \geq f(y) \text{ implica } \langle \nabla f(z), x - y\rangle \geq 0,\ \forall\, z \in [x, y]. \tag{1.13}$$

Prueba. $\Rightarrow$) Sean $x, y \in C$ tales que $f(x) \geq f(y)$, la cuasiconvexidad de f implica que $f(z) \leq f(x)$, $\forall\, z \in]x, y[$; luego por la proposición 1.44,

$$\langle \nabla f(z), x - z\rangle \geq 0,\ \forall\, z \in]x, y[,$$

lo que claramente implica que

$$\langle \nabla f(z), x - y\rangle \geq 0,\ \forall\, z \in]x, y[.$$

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in C$ tales que $f(x) \geq f(y)$, por (1.13) con $z = y$

$$\langle \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0. \tag{1.14}$$

Sean $x, y \in C$ tales que $f(x) \leq f(y)$, entonces (1.13) implica en particular que

$$\langle \nabla f(y), y - x \rangle \geq 0$$

o lo que es equivalente a

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq 0, \tag{1.15}$$

luego de (1.14) y (1.15), por la proposición 1.44, concluimos que f y $-f$ son cuasiconvexas.□

Teorema 1.46 *Sea $C \subseteq \mathcal{X}$, abierto convexo y $f : C \to \mathbb{R}$ una función diferenciable; entonces f es cuasiconvexa si y sólo si ∇f es (cíclicamente) cuasimonótono.*

Prueba. $\Rightarrow$) Sean $x, y \in C$ tales que

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle > 0, \tag{1.16}$$

como la función es cuasiconvexa por la proposición 1.43 tenemos que (1.16) implica $f(x) < f(y)$, y entonces nuevamente por la misma proposición

$$\langle \nabla f(y), y - x \rangle \leq 0$$

o lo que es lo mismo

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

Esto muestra que ∇f es cuasimonótono. $\Leftarrow$) Supongamos que ∇f es cuasimonótono. Sean $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ y $t \in]0,1[$ tal que para $z_t = tx + (1-t)y$ se tiene que $f(z_t) > f(x)$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f_{(x;y-x)}$ en los puntos t y 1, hallamos $t < t_0 < 1$ tal que

$$f_{(x;y-x)}(1) - f_{(x;y-x)}(t) = f'_{(x;y-x)}(t_0)(1-t).$$

De esto último

$$0 > f(x) - f(z_t) = \langle \nabla f(z_{t_0}), x - y \rangle,$$

lo cual implica que

$$\langle \nabla f(z_{t_0}), y - z_0 \rangle > 0. \tag{1.17}$$

Si $w \in [z_0, y]$, $w = \lambda y + (1-\lambda) z_0$, $\lambda \in]0,1[$, entonces $w - z_0 = \lambda(y - z_0)$, y (1.17) implica que

$$\langle \nabla f(z_{t_0}), w - z_0 \rangle > 0,$$

luego por la cuasimonotonicidad de ∇f, $\langle \nabla(z_w), w - z_0 \rangle \geq 0$, lo que implica a su vez que $\langle \nabla f(z_w), x - y \rangle \leq 0$. De aquí $f'_{x;y-x}(\alpha) \leq 0$, $\forall\, \alpha \in]0, t_0[$ y la función $f'_{x,y-x}$ es decreciente en ese intervalo. Para $0 < t < t_0$ se tiene que $f_{(x;y-x)}(t) \leq f_{(x;y-x)}(0)$, i.e. $f(z_t) \leq f(y)$, luego por la proposición 1.35f es cuasiconvexa. □

La siguiente definición servirá para caracterizar a las funciones cuasiconvexas diferenciables.

Definición 1.12 *Dada $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, diremos que el punto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un máximo local semi-estricto, si existen $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que*

$$f(x_0) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2),\ \forall\, \lambda \in]0,1[$$

y

$$f(x_0) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Es claro de la definición anterior que una función cuasiconvexa no puede tener máximos semi-estrictos.

Teorema 1.47 *Dada $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función diferenciable en el intervalo abierto I. Entonces f es cuasiconvexa, si y sólo si, f no alcanza un máximo relativo local semi-estricto en ningún punto $x_0 \in C$ con $f'(x_0) = 0$.*

Prueba. $\Rightarrow$) Evidente, de la definición de máximo relativo estricto.

$\Leftarrow$) Supongamos que f no es cuasiconvexa, luego existen $x, y \in I$ y $z \in]x, y[\subseteq I$ tales que

$$f(z) > \max\{f(x), f(y)\}. \tag{1.18}$$

Como f es continua en $[x, y]$ existe $x_0 \in [x, y]$ tal que

$$f(x_0) \geq f(z), \forall\, z \in [x, y]$$

(teorema de Weierstrass), luego de (1.18), $x_0 \in]x, y[$ pues $f(x_0) \geq f(z) > \max\{f(x), f(y)\}$ y esto implica que $f'(x_0) = 0$, de donde x_0 es un máximo relativo local semi-estricto, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto f es cuasiconvexa. $\square$

Combinando este teorema y la proposición 1.11, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.48 *Sea $C \subsetneq \mathcal{X}$ abierto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces f es cuasiconvexa si y sólo si, para cada $x_0 \in C$ y $v \in \mathcal{X}$ tales que $\|v\| = 1$ y $\langle \nabla f(x_0), v\rangle = 0$, la función $f_{x_0,v}$ no alcanza un máximo relativo local semi-estricto en $t = 0$.*

Una regularización para las funciones cuasiconvexas

Para estudiar algunas propiedades relativas a continuidad de las funciones cuasiconvexas, introduciremos brevemente un concepto de regularización para funciones cuasiconvexas.

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Para todo $\forall\, \lambda < \mu$ se tiene que

$$\widetilde{S_\lambda}(f) \subseteq S_\lambda(f) \subseteq \widetilde{S_\mu}(f) \subseteq S_\mu(f).$$

Definimos la función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mediante

$$\overline{f}(x) = \inf\{\lambda : x \in \overline{S_\lambda(f)}\}.$$

Es fácil ver que $\overline{f}$ está limitada superiormente por f; veremos más adelante que $\overline{f}$ es la mayor función s.c.i. limitada por f.

Proposición 1.49 *Sean $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones tales que $f \leq g$, entonces $\overline{f} \leq \overline{g}$.*

Prueba. Basta con observar que $S_\lambda(g) \subseteq S_\lambda(f)$, de donde $\overline{S_\lambda(g)} \subseteq \overline{S_\lambda(f)}$. Esto implica que $\{\lambda : x \in \overline{S_\lambda(g)}\} \subseteq \{\lambda : x \in \overline{S_\lambda(f)}\}$ y por lo tanto

$$\inf\{\lambda : x \in \overline{S_\lambda(f)}\} \leq \inf\{\lambda : x \in \overline{S_\lambda(g)}\},$$

i.e. $\overline{g} \leq \overline{f}$.□

Lema 1.50 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Entonces*

$$\mathrm{Epi}(\overline{f}) = \overline{\mathrm{Epi}(f)}.$$

Prueba. Sea $(x, \lambda) \in \overline{\mathrm{Epi}(f)}$, entonces $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$ con $f(x_n) \leq \lambda_n$; Como $\overline{f}$ es s.c.i. y $\overline{f} \leq f$, de la desigualdad anterior tenemos que

$$\overline{f}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \overline{f}(x_n) \leq \lambda,$$

i.e. $(x, \lambda) \in \mathrm{Epi}(\overline{f})$.

Sea ahora $(x, \lambda) \in \mathrm{Epi}(\overline{f})$ i.e. $\overline{f}(x) \leq \lambda$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{f}(x) < \lambda + \frac{1}{n}$, luego de la definición de $\overline{f}$, $x \in \overline{S_{\lambda+\frac{1}{n}}(f)}$, de donde podemos escoger $x_n \in \mathcal{X}$ tal que $f(x_n) \leq \lambda + \frac{1}{n}$, y $x_n \to x$. De esto concluimos que $(x, \lambda) \in \overline{\mathrm{Epi}(f)}$. □

Proposición 1.51 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, entonces $\overline{f}$ es la mayor función s.c.i. limitada por f.*

Prueba. Sea h una función s.c.i. tal que $h \leq f$, es claro del lema anterior que $\overline{h} = h$. Por la proposición 1.49, $h = \overline{h} \leq \overline{f}$. Esto concluye la prueba. □

Proposición 1.52 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa [cuasiconvexa]. Entonces*

$$\overline{f} \text{ es convexa [cuasiconvexa].}$$

Prueba. En caso de que f es convexa, el resultado es directo, del lema anterior. Sea f cuasiconvexa, afirmamos que $S_\lambda(\overline{f}) = \bigcap_{\mu>\lambda} \overline{S_u(f)}$. En efecto, sea $x \in \bigcap_{\mu>\lambda} \overline{S_\lambda(f)}$ de la definición de $\overline{f}$, $\overline{f}(x) \leq \mu$, $\forall\, \mu > \lambda$, de donde $\overline{f}(x) \leq \lambda$ y por lo tanto $x \in S_\lambda(\overline{f})$. Sea ahora $x \in S_\lambda(\overline{f})$; para cualquier $\mu > \lambda$ tenemos que $\overline{f}(x) < \mu$ y de la definición de $\overline{f}$, tenemos que existe $\mu' < \mu$ tal que $x \in \overline{S_{\mu'}(f)}$, y luego $x \in \overline{S_\mu(f)}$. Por lo tanto $x \in \bigcap_{\mu>\lambda} \overline{S_u(f)}$ y la afirmación está probada. Con esto queda probado que todo subconjunto de nivel de $\overline{f}$ es convexo, al ser la intersección de conjuntos convexos; esto concluye la prueba. □

Proposición 1.53 *Sea* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *entonces*

$$f \text{ es semicontinua inferiormente en } a \text{ si y solamente si } \overline{f}(a) = f(a).$$

Prueba. Supongamos que f es s.c.i. en a y $\overline{f}(a) < f(a)$, entonces para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\overline{f}(a) < \lambda < f(a)$, existe una vecindad V de a, para la cual $\lambda < f(x)$ $\forall\, x \in V$. Luego $a \notin \overline{S_\mu}(f)$, $\forall\, \mu \leq \lambda$ lo que contradice el hecho que $\overline{f}(a) < \lambda$.

Supongamos ahora que $\overline{f}(a) = f(a)$. Como $\overline{f}$ es s.c.i. en a, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda < \overline{f}(a) = f(a)$, existe una vecindad V de a tal que $\lambda < \overline{f}(x)$, $\forall x \in V$ y por lo tanto $\lambda < f(x)$, $\forall\, x \in V$ pues $\forall\, x \in \mathcal{X}$, $\overline{f}(x) \leq f(x)$. Por lo tanto f es s.c.i. en a.□

Proposición 1.54 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función cuasiconvexa y* $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces* f *es continua en* x *si y solamente si* $\overline{f}$ *es continua en* x.

Prueba. Si f es continua en x, en particular f es semicontinua inferiormente en x, y por la proposición 1.53 tenemos que $\overline{f}(x) = f(x)$. De aquí como f es s.c.s. y $\overline{f} \leq f$ tenemos del lema 1.2 que $\overline{f}$ es s.c.s. en x. Por lo tanto $\overline{f}$ es continua en x.

Recíprocamente, supongamos que $\overline{f}$ es continua en x. Dado $\lambda > \overline{f}(x) = f(x)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda > \overline{f}(y)$ para todo $y \in B_\varepsilon(x)$, i.e. $B_\varepsilon(x) \subseteq \overline{S_\lambda(f)}$. De aquí (como $\mathbb{R}^n$ es un espacio de dimensión finita)

$$B_\varepsilon(x) = \text{int}B_\varepsilon(x) \subseteq \text{int}\overline{S_\lambda(f)} = S_\lambda(f)$$

y por lo tanto f es s.c.s. en x. Ahora $\overline{f} = f(x)$ y $\overline{f} \leq f$ de donde por el corolario 1.3, tenemos que f es s.c.i. en x. Por lo tanto f es continua en x.$\square$

Ejemplo 1.6 *El resultado anterior no es necesariamente cierto en espacios de dimensión infinita. Considere un espacio de normado $\mathcal{X}$ de dimensión infinita, vimos en el ejemplo 1.1 que el conjunto $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ no es cerrado en la topología débil. La función definida por $f(x) = 0$, si $x \in S$ y $f(x) = 1/2$, para $x \notin S$; no es continua en la topología débil, sin embargo $\overline{f}$ es la función idénticamente nula, la cual es obviamente continua.*

Proposición 1.55 *Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, propia, cuasiconvexa tal que*

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) \,\forall\, x \in \mathcal{X},$$

donde $\{h_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$ es una sucesión no decreciente de funciones s.c.i., cuasiconvexas, propias. Si h tiene un subconjunto de nivel compacto y no vacío, entonces para todo n suficientemente grande, h_n tiene un subconjunto de nivel compacto y no vacío.

Prueba. Por hipótesis existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto de nivel $S_\lambda(h)$ es compacto y no vacío. Probaremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $S_\lambda(h_n)$ es compacto; observe que $S_\lambda(h_n)$ es no vacío pues $S_\lambda(h) \subseteq S_\lambda(h_n)$. Como los conjuntos $S_\lambda(h_n)$ son convexos y cerrados, bastará con mostrar que $(S_\lambda(h_n))_\infty = \{0\}$ (cono de recesión de $S_\lambda(h_n)$), $\forall n > n_0$([17], prop. 1.4.1). Supongamos, por reducción al absurdo, que esto no ocurre i.e., que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ y $0 \neq d_k \in \mathbb{R}^n$

con $d_k \in (S_\lambda(h_n))_\infty$; sin pérdida de generalidad supongamos que $n_1 < n_2 < \cdots < n_m < \ldots$ y $\|d_k\| = 1$. Entonces existe una subsucesión $\{d_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1$ tal que $d_{m_k} \to u$. Como $u \neq 0$, para $t \in \mathbb{R}$ lo suficientemente grande $h(x + tu) > \lambda$, (pues $S_\lambda(h)$ es compacto), luego existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $h_n(x + tu) > \lambda, \forall n \geq n_1$. Como h_{n_1} es s.c.i. existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall y \in B_\varepsilon(x + tu) : h_{n_1}(y) > \lambda$. Tomando m_k lo suficientemente grande para que $x + td_{m_k} \in B_\varepsilon(x + tu)$ y $m_k > n_1$, tenemos que $h_{m_k}(x + td_{m_k}) \geq h_{n_1}(x + td_{m_k}) > \lambda$, lo cual es una contradicción pues $d_{m_k} \in (S_\lambda(h_{m_k}))_\infty$. La proposición está probada.□

1.7 Derivadas Generalizadas

En esta sección estudiaremos los gradientes generalizados, los cuales constituyen un reemplazo para la derivada en ausencia de ésta. El objetivo de esta sección es el de establecer teoremas de valor medio para derivadas generalizadas, los cuales nos permitirán en las secciones posteriores caracterizar a cierto tipo de funciones con propiedades más débiles que la convexidad, por medio de sus subdiferenciales, y también por medio de una multifunción normal asociada a ellas.
Siguiendo el esquema de [12] haremos primero el estudio para funciones localmente lipschitzianas, y luego para funciones que son sólo semicontinuas inferiormente.

En adelante $\mathcal{X}$ denotará un espacio de Banach.

1.7.1 Gradiente Generalizado

Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathcal{X}$, recordemos que una función es llamada lipschitziana en una vecindad de x, si existen $\varepsilon > 0$ y $k > 0$ tales que

$$\|f(y) - f(y')\| \leq k\|y - y'\|, \forall y, y' \in B_\varepsilon(x);$$

k es llamada constante de Lipschitz. Definimos la *derivada direccional generalizada* de f en x en la dirección v, como el límite

$$f^\circ(x;v) = \limsup_{y\to x\ \lambda\downarrow 0} \frac{f(y+\lambda v) - f(y)}{\lambda};$$

observe que este límite siempre existe en $\overline{\mathbb{R}}$ pues es un límite superior, pero como veremos en la siguiente proposición, este límite, entre otras, tiene la propiedad de ser finito, para la prueba ver [12].

Proposición 1.56 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función lipschitziana, con constante de Lipschitz k en una vecindad de x. Entonces*

1) La función $v \to f^\circ(x;v)$, es finita, positivamente homogénea y subaditiva en $\mathcal{X}$. Además

$$|f^\circ(x;v)| \le k\|v\|;\ \forall\, v \in \mathcal{X}.$$

2) $f^\circ(x;v)$ es semicontinua superiormente como función de (x,v) y lipschitziana con constante k como función sólo de v para x fijo.

3) $f^\circ(x;-v) = (-f)^\circ(x;v)$, $\forall x, v \in \mathcal{X}$.

Por el teorema de Hahn-Banach 1.8, cualquier funcional subaditiva y positivamente homogénea, mayora alguna funcional lineal en $\mathcal{X}$; luego bajo las condiciones de la proposición 1.56, tenemos que existe por lo menos una funcional lineal $x^* \in \mathcal{X}^*$ tal que $x^*(v) \le f^\circ(x;v)$; conocido este hecho definimos el *gradiente generalizado* de f en x, denotado por $\partial f(x)$, como el subconjunto de $\mathcal{X}^*$, definido por

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, v\rangle \le f^\circ(x;v);\ \forall\, v \in \mathcal{X}\};$$

y a la multifunción asociada $\partial f : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}^*$, la llamaremos *subdiferencial* de f. Tenemos las siguientes propiedades básicas :

Proposición 1.57 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función lipschitziana, con constante de Lipschitz k en una vecindad de x. Entonces*

(1) $\partial f(x)$ es un conjunto no vacío, convexo, débilmente compacto en la topología débil estrella; y $\|x^*\| \leq k$ para cada $x^* \in \partial f(x)$.

(2) Para cada $v \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$f^\circ(x; v) = \max\{\langle x^*, v\rangle : x^* \in \partial f(x)\}.$$

Prueba. (1) Al definir el gradiente generalizado probamos que $\partial f(x) \neq \emptyset$. Como $f^\circ(x, \cdot)$ es una sublineal positivamente homogénea y lipschitziana, la definición de $\partial f(x)$ implica que $\partial f(x)$ es convexo, cerrado y que $\|x^*\| \leq k$. Luego el hecho de que ∂f sea compacto en la topología débil estrella se sigue del teorema de Alaoglu (teorema 1.14). Veamos (2); supongamos, por reducción al absurdo, que existe v tal que $f^\circ(x; v)$ excede al máximo; utilizando el teorema de Hahn-Banach 1.9, tenemos la existencia de una funcional lineal mayorada por $f(x; \cdot)$, para la cual $x^*(v) = f^\circ(x; v)$; de donde se sigue que $x^* \in \partial f(x)$ pero

$$f^\circ(x; v) = \langle x^*, v\rangle < f^\circ(x; v),$$

lo cual es una contradicción; lo que prueba (2). □

Una propiedad importante de la multifunción ∂f, que será necesaria mas adelante es la siguiente.

Proposición 1.58 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función lipschitziana en una vecindad de x. Sean $\{x_n\}$ y $\{x_n^*\}$ sucesiones en $\mathcal{X}$ y X^* tales que $x_n^* \in \partial f(x_n)$. Si $x_n \to x$ y x^* es un punto de acumulación en la toplogía débil estrella de $\{x_n^*\}$; entonces $x \in \partial f(x^*)$.*

Prueba. Sea $v \in \mathcal{X}$, entonces existe una subsucesión de los números $\langle x_n^*, v\rangle$ que convergen a $\langle x^*, v\rangle$. Esto junto con $f^\circ(x_n; v) \geq \langle x_n, v\rangle$ y la semicontinuidad superior de f°, implica que $f^\circ(x;v) \leq \langle x^*, v\rangle$. Como v fue arbitrario, concluimos que $x^* \in \partial f(x)$.□

La siguiente proposición muestra la relación existente entre el subdiferencial del análisis convexo, y el que estamos estudiando; para la prueba ver ([12]).

Proposición 1.59 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función convexa, lipschitziana en una vecindad U de x. Entonces $\partial f(x)$ coincide con el subdiferencial del análisis convexo, visto en la sección 1.6.1 y $f^\circ(x;v)$ coincide con la derivada direccional $f'(x;v)$ para cada $v \in \mathcal{X}$.*

1.7.2 Cono Tangente y Normal de Clarke

Ahora estudiaremos algunos conceptos geométricos, relacionados con los conceptos vistos hasta el momento.

Función Distancia

Sea C un subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$, la *función distancia* a C es la función $d_C : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, definida por

$$d_C(x) = \inf\{\|x - c\| : c \in C\}.$$

No es difícil observar que si C es cerrado, entonces $x \in C$ si y solamente si $d_C(x) = 0$. Esta función no siempre es diferenciable, pero es globalmente lipschitziana. Usaremos el gradiente generalizado de d_C para definir los conceptos de cono tangente de Clarke, y cono normal de Clarke a un conjunto arbitrario C.

El siguiente hecho, que es bien conocido será nuestro punto de partida.

Proposición 1.60 *Sea C un subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$. La función distancia d_C satisface*

$$|d_C(x) - d_C(y)| \leq \|x - y\|; \, \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

Definición 1.13 *Decimos que un vector $v \in \mathcal{X}$ es tangente a C en x, cuando $d_C(x;v) = 0$; y se define el cono tangente de Clarke de C en x, denotado por $T_C(x)$ como el conjunto de los vectores tangentes a C en x.*

Observe que de la proposición 1.56(2), inmediatamente obtenemos que $T_C(x)$ es un cono convexo cerrado en $\mathcal{X}$.

Definición 1.14 *El cono normal de Clarke de C en el punto x, denotado por $N_C(x)$ se define como el conjunto*

$$N_C(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, v\rangle \leq 0, \forall v \in T_C(x)\}$$

La siguiente proposición muestra la relación que existe entre los conos normal y tangente de Clarke y aquellos definidos en el caso convexo

Proposición 1.61 *Sea S convexo. Entonces*

$$T_S(x) = \overline{\{\lambda(s-x) : \lambda \geq 0, s \in S\}}$$

y

$$N_S(x) = \{y \in \mathcal{X}^* : \langle y, z - x\rangle \leq 0, \forall z \in S\}.$$

Prueba. La convexidad de S implica claramente la de la función d_C. Se sigue de la proposición 1.59 que $d'_S(x;v)$ existe y coincide con $d^\circ_S(x;v)$. Por consiguiente, $T_s(x)$ consiste de todos los vectores $v \in \mathcal{X}$ para los cuales

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{d_S(x+tv)}{t} = 0;$$

esto a su vez es equivalente a la existencia de $s(t) \in S$ tal que

$$\frac{\|x + tv - s(t)\|}{t} \to 0 \text{ cuando } t \downarrow 0.$$

Haciendo $u(t) := (x + tv - s(t))/t$, esto puede ser expresado en la forma

$$v = \left(\frac{1}{t}\right)(s(t) - x) + u(t),$$

donde $u(t) \to 0$ cuando $t \downarrow 0$, y esta es la caracterización de $T_s(x)$ dada en el enunciado de la proposición. La expresión para $N_s(x)$ se sigue entonces de esta caracterización, junto con el hecho de que $N_s(x)$ es el cono polar de $T_s(x)$.□

El siguiente teorema muestra una caracterización para el cono tangente de Clarke, la prueba puede ser revisada en [12].

Teorema 1.62 *Un elemento v de $\mathcal{X}$ pertenece a $T_C(x)$ si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ en C convergente a x y cada sucesión $\{t_n\}_{n\in \mathbb{N}} \subseteq]0, +\infty[$ decreciendo a 0; existe una sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{X}$ convergiendo a v tal que $x_n + t_n v_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Corolario 1.63 *Sea $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ donde $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ son espacios de Banach, $C = C_1 \times C_2 \subseteq \mathcal{X}$; y $x = (x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$. Entonces*

$$T_{C_1\times C_2}(x) = T_{C_1}(x_1) \times T_{C_2}(x_2)$$

y

$$N_{C_1\times C_2}(x) = N_{C_1}(x_1) \times N_{C_2}(x_2).$$

Prueba. La primera igualdad se sigue de la caracterización del cono tangente de Clarke del teorema 1.62; la segunda se obtiene de la polaridad existente en la definición de cono normal.□

El siguiente teorema muestra que la tangencia es consistente con las derivadas generalizadas.

Teorema 1.64 *Sea f lipschitziana en una vecindad de x, entonces $T_{\mathrm{Epi}(f)}(x, f(x))$ es el epígrafo de $f^\circ(x;\cdot)$; esto es, $(v, r) \in T_{\mathrm{Epi}(f)}(x, f(x))$ si y sólo si, $r \geq f^\circ(x; v)$.*

Corolario 1.65 *Sea f lipschitziana en una vecindad de x. Un elemento x^* de X^* pertenece a $\partial f(x)$ si y sólo si $(x^*, -1) \in N_{\mathrm{Epi}(f)}(x, f(x))$.*

Ahora de manera natural extendemos la definición del subdiferencial generalizado $\partial f(x)$ para funciones que no son necesariamente localmente lipschitzianas y con valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definición 1.15 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función propia. Definimos $\partial f(x)$ como el conjunto de los elementos $x^* \in \mathcal{X}^*$ para los cuales $(x^*, -1) \in N_{\mathrm{Epi}(f)}(x, f(x))$.*

Observe que a diferencia del caso lipschitziano, dada f cualquiera y $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se puede tener que $\partial f(x) = \emptyset$. La siguiente proposición nos proporciona una condición suficiente para que $\partial f(x) \neq \emptyset$, la prueba puede ser vista en [12].

Proposición 1.66 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $x \in \mathrm{Dom}(f)$ un mínimo local de f, entonces $0 \in \partial f(x)$.*

A continuación mostraremos a modo de ejemplo, el subdiferencial de una función muy particular, la función indicador de un conjunto; este ejemplo muestra la compatibilidad entre los conceptos geométricos y analíticos vistos hasta ahora.

Ejemplo 1.7 *La función indicador de un subconjunto C de $\mathcal{X}$, es la función $\psi_C : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definida por*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in C; \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $x \in C$, veamos que

$$\partial \psi_C(x) = N_C(x).$$

El punto $x^* \in \partial\psi_C(x)$ si y sólo si $(x^*, -1) \in N_{\mathrm{Epi}(f)}(x, 0)$. Pero claramente $\mathrm{Epi}(\psi_C) = C \times [0, \infty[$, lo que es equivalente por el corolario 1.63 a que

$$x^* \in N_C(x) \ y \ -1 \in N_{[0,+\infty[}(0);$$

como $-1 \in N_{[0,+\infty[}(0)$ *siempre se satisface (pues ya hemos visto que en el caso convexo, estos conos coinciden con los usuales), tenemos que*

$$x^* \in \partial\psi_C(x) \textit{ si y solamente si } x^* \in N_C(x).$$

El siguiente teorema, debido a Rockafellar (ver [27]), extiende las derivadas direccionales f° a funciones que no son necesariamente localmente lipschitzianas.

Teorema 1.67 *Sea* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *y* $x \in \mathrm{Dom}(f)$. *Entonces el cono tangente de Clarke* $T_{\mathrm{Epi}(f)}(x, f(x))$ *es el epígrafo de la función* $f^\uparrow(x;\cdot) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *definida por*

$$f^\uparrow(x;v) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{\substack{(y,\alpha)\downarrow_f x \\ t\downarrow 0}} \inf_{w\in B_\varepsilon(v)} \frac{f(y+tw)-\alpha}{t}.$$

donde la expresión $(y,\alpha)\downarrow_f x$ *significa que* $(y,\alpha) \in \mathrm{Epi}f$, $y \to x$, $\alpha \to f(x)$.

Prueba. Debemos probar que un punto $(v,r) \in \mathcal{X}\times\mathbb{R}$ pertenece a $T_{\mathrm{Epi}f}(x, f(x))$ si y sólo si $f^\uparrow(x;v) \le r$.

$\Rightarrow$) Sea $(v,r) \in T_{\mathrm{Epi}f}(x, f(x))$ y $\varepsilon > 0$ fijo, es suficiente mostrar que

$$\limsup_{\substack{(y,\alpha)\downarrow_f x \\ t\downarrow 0}} \inf_{w\in B_\varepsilon(v)} \frac{f(y+tw)-\alpha}{t} \le r. \tag{1.19}$$

Para ver esto, sea $(y_n,\alpha_n)\downarrow_f x$ y $t_n \downarrow 0$. Como $(v,r) \in T_{\mathrm{Epi}f}(x, f(x))$, por el teorema 1.62, existe una sucesión $(v_n,r_n) \to (v,r)$ tal que $(y_n,\alpha_n) + t_n(v_n,r_n) \in \mathrm{Epi}f$ i.e. tal que

$$\alpha_n + t_n r_n \ge f(y_n + t_n v_n)$$

por consiguiente para n suficientemente grande tal que $|v_n - v| < \varepsilon$ obtenemos

$$\inf_{w\in B_\varepsilon(v)} \frac{f(y_n+t_n w)-\alpha_n}{t_n} \le \frac{f(y_n+t_n v_n)-\alpha_n}{t_n} \le r_n$$

de lo cual se sigue (1.19).

$\Leftarrow$) Supongamos que $f^\uparrow(x;v) \le r$ y sean $(y_n,\alpha_n) \to (x, f(x))$ y $t_n \downarrow 0$ sucesiones arbitrarias en el Epi$f$ y en $[0,+\infty[$ respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon_n < 1/n$ tal que

$$\limsup_{\substack{(y,\alpha)\downarrow_f x \\ t\downarrow 0}} \inf_{w\in B_{\varepsilon_n}(v)} \frac{f(y+tw)-\alpha}{t} \leq r + 1/n,$$

en consecuencia como $(y_n, \alpha_n) \downarrow_f x$, podemos encontrar una subsucesión $i = i(n) > n$ tal que

$$\inf_{w\in B_\varepsilon(v)} \frac{f(y_i + t_i w) - \alpha_n}{t_i} \leq r + 2/n \tag{1.20}$$

y además un punto $v_i \in B_{\varepsilon_n}(w)$ tal que

$$\frac{f(y_i + t_i v_i) - \alpha_i}{t_i} \leq r + 3/n. \tag{1.21}$$

Para los indices i de la subsucesión $i(n)$, definimos

$$r_i = \max\{r, \frac{f(y_i + t_i v_i) - \alpha_i}{t_i}\} \tag{1.22}$$

de donde obtenemos

$$\alpha_i + t_i r_i \geq f(y_i + t_i v_i).$$

Además de (1.21) y (1.22) tenemos que $r_i \to r$. Por el teorema 1.62 concluimos que $(v,r) \in T_{\mathrm{Epi}f}(x, f(x))$. □

Corolario 1.68 *Bajo las hipótesis del teorema anterior, tenemos que*

$$\partial f(x) = \emptyset \text{ si y sólo si } f^\uparrow(x;0) = -\infty,$$

y en caso contrario

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : f^\uparrow(x;v) \geq \langle x^*, v\rangle;\ \forall v \in \mathcal{X}\}$$

y

$$f^\uparrow(x;v) = \sup\{\langle x^*, v\rangle : x^* \in \partial f(x)\}.$$

Prueba. Por definición $x^* \in \partial f(x)$, si y sólo si $\langle (x^*, -1), (v, r) \rangle \leq 0$ para todo $(v, r) \in T_{\mathrm{Epi} f}(x, f(x)) = \mathrm{Epi} f^{\uparrow}(x;)$ (teorema 1.67). Equivalentemente, $x^* \in \partial f(x)$ si y sólo si $\langle x^*, v \rangle \leq r$ para todo $v \in \mathcal{X}$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $f^{\uparrow}(x; v) \leq r$. Si $f^{\uparrow}(x; v) = -\infty$ para algún v, es claro que no puede existir x^* que satisfaga lo anterior, de donde $\partial f(x) = \emptyset$. Por otro lado, tenemos que $f^{\uparrow}(x; \lambda v) = \lambda f^{\uparrow}(x; v)$; $\forall\, v \in \mathcal{X}$ y $\lambda > 0$, y como $\mathrm{Epi} f$ es un cono, entonces $f^{\uparrow}(x; \cdot)$ es $-\infty$ en algún punto si y solamente si, es $-\infty$ en 0.

Si suponemos que $f^{\uparrow}(x; \cdot) > -\infty$, tenemos que $x^* \in \partial f(x)$ si y solamente si $\langle x^*, v \rangle \leq f^{\uparrow}(x; v) \,\forall\, v \in \mathcal{X}$, como hemos visto anteriormente. La segunda afirmación es equivalente a que $f^{\uparrow}(x; v)$ sea la función de soporte de $\partial f(x)$; que es precisamente la afirmación (4) de la proposición 1.17.

Lema 1.69 *Sean $f_1 : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. y finita en x y $f_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, una función lipschitziana en una vecindad de x. Entonces se cumple que*

$$(f_1 + f_2)^{\uparrow}(x; v) \leq f_1^{\uparrow}(x; v) + f_2^{\uparrow}(x; v), \,\forall\, v \in \mathcal{X}. \tag{1.23}$$

Prueba. Por comodidad hagamos $f_0 = f_1 + f_2$ y $l_i(v) = f_i^{\uparrow}(x; v)$, $i = 0, 1, 2$, así lo que queremos mostrar es que

$$l_0(v) \leq l_1(v) + l_2(v), \,\forall\, v \in \mathcal{X}. \tag{1.24}$$

Si $l_1(v) = +\infty$; entonces esta desigualdad se cumple trivialmente; asi que solo veamos el caso en que $l_1(v) < \infty$, pues como f_2 es lipschitziana en una vecindad de x, siempre se tiene que $l_2(v) \in \mathbb{R}$; $\forall\, v \in \mathcal{X}$. Sea $\beta > l_2(v)$, por definición, tenemos que existe $\alpha > 0$ y $\widetilde{t} > 0$ tal que

$$\frac{f_2(y + tv) - f_2(y)}{t} < \beta, \,\forall\, y \in B_\alpha(x) \text{ y } t \in]0, \widetilde{t}[. \tag{1.25}$$

De

$$f_0(y + tw) - f_0(y) = f_1(y + tw) - f_1(y) \;+\; f_2(y + tw) - f_2(y) \tag{1.26}$$

y (1.25), obtenemos

$$l_o(v) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \limsup_{y \to_f x t \downarrow 0} \inf_{w \in B_\epsilon(v)} \left\{ \frac{f_1(y+tw) - f_1(y)}{t} - \beta \right\}$$
$$= f_1^{\uparrow}(x; v) + \beta = l_1(v) + \beta.$$

y como esto se cumple para todo $\beta > l_2(v)$, tenemos (1.24) y por lo tanto el lema esta probado.

Proposición 1.70 *Sean $f_1 : X \to \mathbb{R}$ una función s.c.i. y finita en x y $f_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, una función lipschitziana en una vecindad de x. Entonces se cumple que*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \subseteq \partial f_1(x) + \partial f_2(x). \tag{1.27}$$

Prueba. Al igual que en el lema anterior haremos $f_0 = f_1 + f_2$ y $l_i(v) = f_i^{\uparrow}(x; v)$, $i = 0, 1, 2$. Si $l_1(0) = -\infty$ entonces por el lema 1.69 tenemos que $l_0 = -\infty$; luego por el corolario 1.68 tendríamos que $\partial(f_1 + f_2) = \emptyset$ y no hay nada que probar.
Supongamos entonces que $l_1(0) = l_2(0) = 0$ (pues esta es la otra posibilidad dado que l_i es una sublineal). Entonces tenemos que

$$\partial f_0(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, v \rangle \leq l_0(v), \forall\, v \in \mathcal{X}\} \tag{1.28}$$
$$\subseteq \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, v \rangle \leq (l_1 + l_2)(v), \forall\, v \in \mathcal{X}\} (\text{ por el lema 1.69})$$
$$= \partial(l_1 + l_2)(0),$$

Donde la ultima desigualdad es valida pues, $l_1 + l_2$ es una función convexa la cual es 0 en 0. Ahora como $0 \in \text{int}(\text{Dom}(l_1) + \text{Dom}(l_2))$, por el teorema 1.32, tenemos que

$$\partial(l_1 + l_2)(0) = \partial l_1(0) + \partial l_2(0).$$

Pero $\partial l_1(0) = \partial f_1(x)$ y $\partial l_2(0) = \partial f_2(x)$ y por lo tanto la proposición está probada.
□

Ahora estamos en condiciones de establecer el teorema de valor medio aproximado para derivadas generalizadas.

1.7.3 Teorema del valor medio aproximado para derivadas generalizadas

El siguiente teorema reúne varios resultados concernientes a la derivadas generalizadas, ya establecidos anteriormente, y que por comodidad reunimos en un solo teorema; estos serán de gran utilidad en lo que sigue.

Teorema 1.71 *Sea* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *y* $x \in \mathrm{Dom}(f)$

1) La función $f^{\uparrow}(x;\cdot)$ *es positivamente homogénea (i.e.* $f^{\uparrow}(x;\alpha d) = \alpha f^{\uparrow}(x;d) \, \forall v \in \mathcal{X}$ *y* $\alpha > 0$*).*

2) Se tiene que $\partial f(x) = \emptyset$ *si y sólo si,* $f^{\uparrow}(x;0) = -\infty$*; y en otro caso se tiene que* $\partial f(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\uparrow}(x;v), \, \forall v \in \mathcal{X}\}$.

3) Si f *alcanza un minímo local en* x*, entonces* $f^{\uparrow}(x;d) \geq 0, \, \forall d \in \mathcal{X}$ *y* $0 \in \partial f(x)$.

4) Si f *es localmente lipschitziana, entonces* $\alpha \partial f(x) = \partial(\alpha f)(x)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

5) Si f *es localmente lipschitziana, entonces la función* $f^{\uparrow}(\cdot;\cdot)$ *es semicontinua superiormente.*

6) Sea f *localmente lipschitziana y sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones en* $\mathcal{X}$ *y* X^* *respectivamente, tal que* $x_n^* \in \partial f(x_n), \, \forall n \in \mathbb{N}$*. Supongamos que* $x_n \to x$ *y que* x^* *es un punto de acumulación en la topología débil de* $\{x_n^*\}$*, entonces* $x^* \in \partial f(x)$.

7) Si f *es lipschitziana en una vecindad de* x *con constante* k*; entonces la función* $f^{\uparrow}(x,\cdot)$ *es también lipschitziana con constante* k*, y además se tiene* $|f^{\uparrow}(x,v)| \leq k\|v\|; \, \forall v \in \mathcal{X}$.

8) Supongamos que g *es una función lipschitziana en una vecindad de* x*. Entonces* $\partial(f+g) \subseteq \partial f(x) + \partial g(x)$ *y* $(f+g)^{\uparrow}(x;v) \leq f^{\uparrow}(x;v) + g^{\uparrow}(x;v)$*, para todo* $v \in \mathcal{X}$.

9) Si f es convexa y localmente lipschitziana entonces

$$f^{\uparrow}(x;d) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}, \; \forall\, d \in \mathcal{X}.$$

10) El conjunto $\{(d,\alpha) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} : \alpha \geq f^{\uparrow}(x;d)\}$ es convexo y cerrado.

Los siguientes resultados serán utilizados para probar el teorema del valor medio de Zagrodny.

Propiedades de la función norma y de la función distancia

El siguiente lema es de carácter elemental, y es presentado sin prueba.

Lema 1.72 *Sea $C \subseteq \mathcal{X}$ compacto. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ es tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d_C(x_n) = 0$, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a $c \in C$.*

Teorema 1.73 *El subdiferencial de la función $\|\cdot\|$ en el origen coincide con la bola cerrada unitaria del espacio dual y para $x \neq 0$ se cumple*

$$\partial\|x\| = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \|x^*\| = 1, \langle x^*, x\rangle = \|x\|\} \tag{1.29}$$

Prueba. De la desigualdad triangular tenemos, para $x, y \in \mathcal{X}$, $t \in [0,1]$

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\|, \qquad |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|,$$

esto muestra que la función norma es convexa y lipschitziana. Luego $\partial\|\cdot\|$ coincide con el subdiferencial convexo usual; se sigue de la proposición 1.31(4) que $x^* \in \partial\|x\|$ si y sólo si

$$\|x\| + \langle x^*, y - x\rangle \leq \|y\|, \; \forall\, y \in \mathcal{X}. \tag{1.30}$$

En particular para $y = 0, 2x$ tenemos

$$\|x\| + \langle x^*, -x\rangle \leq 0$$

y

$$\|x\| + \langle x^*, 2x - x\rangle \leq 2\|x\|,$$

y de estas dos desigualdades obtenemos

$$\langle x^*, x\rangle = \|x\|. \tag{1.31}$$

Reemplazando esto último en (1.30) obtenemos

$$\langle x^*, y\rangle \leq \|y\|, \; \forall\, y \in \mathcal{X} \tag{1.32}$$

de donde

$$\|x^*\| = 1. \tag{1.33}$$

Observe ahora que si tomamos $x^* \in \mathcal{X}^*$, cumpliendo (1.31) y (1.33), claramente se satisface (1.30) y por lo tanto $x^* \in \partial\|x\|$. □

Lema 1.74 *Sean $a, b \in \mathcal{X}$, entonces para cualquier $x \in \mathcal{X}$, se cumple que*

$$d^{\uparrow}_{[a,b]}(x; b - x) \leq -d_{[a,b]}(x). \tag{1.34}$$

Prueba. Como la función $d_{[a,b]} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es convexa,

$$d_{[a,b]}(x + t(b - x)) \leq (1 - t)d_{[a,b]}(x) + td_{[a,b]}(b), \; \forall\, t \in [0, 1]$$

de donde

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{d_{[a,b]}(x + t(b - x)) - d_{[a,b]}(x)}{t} \leq -d_{[a,b]}(x).$$

Luego por el teorema 1.71(9) concluimos que (1.34) se satisface.

Corolario 1.75 *Sean $a, b \in \mathcal{X}$ y $x \in X$ tal que $d_{[a,b]}(x) < \|x - b\|$, entonces $d^{\uparrow}_{[a,b]}(x; b - a) \leq 0$.*

Prueba. Sea $y \in [a,b]$, $y \neq b$ tal que

$$d_{[a,b]}(x) = \|x - y\|. \tag{1.35}$$

Del teorema 1.71(5) tenemos

$$d^{\uparrow}_{[a,b]}(x; b - y) \leq d^{\uparrow}_{[a,b]}(x; b - x) + \|x - y\|. \tag{1.36}$$

Ahora de (1.34), (1.35) y (1.36), obtenemos

$$d^{\uparrow}_{[a,b]}(x; b - y) \leq 0$$

y como $y \neq b$; $b - a = \frac{\|b-a\|}{\|b-y\|}(b - y)$. Del teorema 1.71(1) concluimos que

$$d^{\uparrow}_{[a,b]}(x; b - a) \leq 0.$$

Corolario 1.76 *Sean $a, b \in \mathcal{X}$. Si $d_{[a,b]}(x) < \min\{\|x - a\|, \|x - b\|\}$, entonces*

$$d^{\uparrow}_{[a,b]}(x; b - a) \leq 0$$

y

$$d^{\uparrow}_{[a,b]}(x; a - b) \leq 0.$$

Prueba. Se sigue directamente del corolario 1.75 y de la igualdad $d_{[a,b]}(y) = d_{[b,a]}(y)$.

Lema 1.77 *Sean $x^* \in \mathcal{X}^*$, a, b en $\mathcal{X}$, $a \neq b$ y $s > 0$ tales que*

$$\langle x^*, y - a\rangle + s\|y - a\| \geq 0, \forall y \in \overline{B}(b, \|b - a\|). \tag{1.37}$$

Entonces

$$\|x^*\| \leq 2s + \langle x^*, \frac{b - a}{\|b - a\|}\rangle.$$

Prueba. Por reducción al absurdo, supongamos que el resultado es falso. Entonces existe $z \in \mathcal{X}$ tal que $\|z\| = 1$ y

$$\langle x^*, z\rangle > 2s + \langle x^*, \frac{b-a}{\|b-a\|}\rangle,$$

o lo que es lo mismo,

$$0 > 2s\|b-a\| + \langle x^*, b - \|b-a\|z - a\rangle. \tag{1.38}$$

También como $(b - \|b-a\|z) \in \overline{B}(b, \|b-a\|)$, se sigue de (1.37) que

$$\langle x^*, b - \|b-a\|z - a\rangle + s\|b - \|b-a\|z - a\| \geq 0.$$

lo que junto con (1.38) implica que

$$s\|b - \|b-a\|z - a\| > 2s\|b-a\|,$$

esto es

$$\|b - \|b-a\|z - a\| > 2\|b-a\|.$$

Pero se contradice con

$$\|b - \|b-a\|z - a\| \leq \|b-a\| + \|z\|\|b-a\| =\leq 2\|b-a\|,$$

lo que finaliza la prueba.□

Lema 1.78 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente y sean $a, b \in \mathcal{X}$ $a \neq b$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que f es acotada inferiormente en*

$$\overline{B}([a,b],\varepsilon) = \{x \in \mathcal{X} : d_{[a,b]}(x) \leq \varepsilon\}.$$

Prueba. Por reducción al absurdo, supongamos que el resultado es falso, entonces podemos escoger una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ para la cual

$$d_{[a,b]}(x_k) \leq k^{-1}, \forall k \in \mathbb{N} \tag{1.39}$$

y

$$f(x_k) \leq -k, \; \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{1.40}$$

De la desigualdad (1.39) por el lema (1.72), podemos garantizar que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a algún $x \in [a,b]$. Ahora de la desigualdad (1.40) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_k) = -\infty,$$

pero desde que f es s.c.i. deberíamos tener $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} f(x_k) = -\infty$, lo cual es una contradicción.

Observación 1.2 *Si $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es semicontinua inferiormente y $a, b \in \mathcal{X}$, $a \neq b$, como*

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{||b-a||}\|a - b\| = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{||b-a||}||b - b||$$

y la función

$$y \to f(y) + \frac{f(b) - f(a)}{||b-a||}||y - b||$$

es semicontinua inferiormente; por el teorema de Weierstrass podemos asegurar que existe $x \in [a,b]$ tal que

$$f(x) + \frac{f(b) - f(a)}{||b-a||}\|x - b\| \leq f(y) + \frac{f(b) - f(a)}{||b-a||}\|y - b||, \; \forall\, y \in [a,b]. \tag{1.41}$$

Teorema 1.79 (Zagrodny) *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente y sean $a, b \in \mathrm{Dom}(f), a \neq b$ y $x \in [a, b[$ tales que*

$$f(x) + \frac{f(b) - f(a)}{||b-a||}\|x - b\| \leq f(y) + \frac{f(b) - f(a)}{||b-a||}\|y - b||, \; \forall\, y \in [a,b].$$

Entonces existen sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{X}$ y $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^*$ tales que

(a) $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

(b) $\limsup_{k\to\infty} f(x_k) \leq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{\|b-a\|}\|x-a\|$.

(c) $x_k^* \in \partial f(x_k)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$

(d) $\liminf_{n\to\infty} \langle x_n^*, b - x_n\rangle \geq \dfrac{f(b)-f(a)}{\|b-a\|}\|b-x\|$.

(e) $\liminf_{n\to\infty} \langle x_n^*, b - a\rangle \geq f(b) - f(a)$.

Si además $x \neq a$, *entonces*

(f) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n^*, b-a\rangle = f(b) - f(a)$.

Prueba. Del lema 1.78, existe $\varepsilon > 0$ tal que f es acotada inferiormente en el conjunto $\overline{B}([a,b],\varepsilon)$. Consideremos la función $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$g(y) = f(y) + \frac{f(b)-f(a)}{\|b-a\|}\|y-b\|,$$

g así definida es s.c.i., $g(a) = g(b)$ y

$$g(x) \leq g(y) \text{ para todo } y \in [a,b]. \tag{1.42}$$

Ahora consideremos las funciones $g_{j,k} : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definidas por

$$g_{i,j}(y) = j d_{[a,b]}(y) + k^{-1}\|y - x\| + g(y), \text{ para todo } y \in \mathcal{X}$$

es fácil ver que estas funciones son s.c.i y acotadas inferiormente en el conjunto $B([a,b],\varepsilon)$. Por el principio variacional de Ekeland, teorema 1.6, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una doble sucesión $\{y_{j,k}\}_{j,k} \subseteq B([a,b],\varepsilon)$ tal que

$$g_{j,k}(y_{j,k}) \leq g(x)\, \forall j,k \in \mathbb{N} \tag{1.43}$$

y

$$g_{j,k}(y) - g_{j,k}(y_{j,k}) \geq -k^{-1}\|y - y_{j,k}\| \tag{1.44}$$

para todo $y \in B([a,b],\varepsilon)$ y para todo $j,k \in \mathbb{N}$. Como la función g está acotada inferiormente en $B([a,b],\varepsilon)$, la desigualdad (1.43) implica que

$$\lim_{j\to\infty} d_{[a,b]}(y_{j,k}) = 0, \text{ para cada } k \in \mathbb{N};$$

de aquí, por el lema 1.72 existe una subsucesión $\{y_{j_n,k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} y_{j_n,k} = y_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{1.45}$$

De la desigualdad (1.42) se sigue que

$$g(x) \leq g(y_k) \,\forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1.46}$$

Observe que de la definición de las funciones $g_{j_n k}$:

$$k^{-1}\|y_{j_n k} - x\| + g(y_{j_n k}) \leq g_{j_n k}(y_{j_n k}).$$

Luego de (1.43), (1.45) y la s.c.i de g:

$$g(y_k) + k^{-1}\|y_k - x\| \leq g(x), \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

lo cual implica por (1.46) que $y_k = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora escojamos una subsucesión $\{y_{j_{n_k},k}\}$, con $\{j_{n_k}\}$ crecientes, tal que

$$\lim_{k\to\infty} y_{j_{n_k},k} = x. \tag{1.47}$$

Definamos la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ como $x_k = y_{j_{n_k}k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la desigualdad (1.47) tenemos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ y (a) se satisface. De la desigualdad (1.42) tenemos que $g(x) \leq g(b) = f(b)$, de donde por (1.43) obtenemos

$$f(x_k) \leq f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\|b-a\|}\|x_k - b\|, \,\forall\, k \in \mathbb{N}$$

De aquí

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k) \leq f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\|b-a\|}\|x - b\|,$$

y como

$$f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|x - b\| = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|x - a\|$$

tenemos que se cumple (b).

Como $\|x_k - x\| < \varepsilon$ para todo $k > k_o$, de (1.44) se sigue que las funciones

$$y \to g_{j_{n_k},k}(y) + k^{-1}\|y - x_k\|$$

alcanza su mínimo local en x_k. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $k_0 = 1$. Se sigue del teorema 1.71(2)(3)y (6) que

$$0 \in \partial f(x_k) + \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\partial\|x_k - b\| + j_{n_k}\partial d_{[a,b]}(x_k) + k^{-1}\partial\|x_k - x\| + k^{-1}\partial\|0\|, \forall\, k \in N$$

Luego existen sucesiones $\{x_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{u_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{v_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{w_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{z_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X^*, tales que

$$x_k^* \in \partial f(x_k), u_k^* \in \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\partial\|x_k - b\|, v_k^* \in j_{n_k}\partial d_{[a,b]}(x_k), w_k^* \in k^{-1}\partial\|x_k - x\|$$

$z_k^* \in k^{-1}\partial\|0\|$, y

$$0 = x_k^* + u_k^* + v_k^* + w_k^* + z_k^*, \text{ para todo } k \in N. \tag{1.48}$$

Por el lema 1.74 tenemos que

$$\langle v_k^*, b - x_k\rangle \le d_{[a,b]}^{\uparrow}(x_k; b - x_k) \le -d_{[a,b]}(x_k) \le 0. \tag{1.49}$$

De (1.29) se sigue que

$$\langle u_k^*, b - u_k\rangle = \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|x_k - b\| \tag{1.50}$$

y

$$\|u_k^*\| = \frac{|f(b) - f(a)|}{\|b - a\|} \tag{1.51}$$

Luego de (1.29), (1.48),(1.49),(1.50), obtenemos

$$\langle x_k^*, b - x_k\rangle \ge \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|x_k - b\| - 2k{-}1\|x_k - b\|, \forall\, k \in \mathbb{N}$$

de donde

$$\liminf_{k\to\infty}\langle x_k^*, b - x_k\rangle \geq \frac{f(b)-f(a)}{\|b-a\|}\liminf_{k\to\infty}\|x_k - b\|$$

y (d) esta probado.

Ahora, asumamos sin pérdida de generalidad que

$$d_{[a,b]}(x_k) < \|x_k - b\|, \forall k \in \mathbb{N},$$

como $b - x = \frac{\|b-x\|}{\|b-a\|}(b-a)$, se sigue del corolario 1.75 que

$$\langle v_k^*, b - x\rangle \leq 0 \forall k \in \mathbb{N} \tag{1.52}$$

Desde que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, de (1.51) tenemos que

$$\lim_{k\to\infty}\langle u_k^*, x - x_k\rangle = 0, \tag{1.53}$$

de aquí junto con (1.29), (1.48) y (1.52) se tiene que

$$\langle x_k^*, b - x\rangle \geq -\langle u_k^*, b - x\rangle - 2k^{-1}\|b - x\|, \forall k \in \mathbb{N}$$

en consecuencia por (1.50) y (1.53)

$$\liminf_{k\to\infty}\langle x_k^*, b - x\rangle \geq \frac{f(b)-f(a)}{\|b-a\|}\|x - b\|$$

y como

$$b - a = \frac{\|b-a\|}{\|b-x\|}(b-x),$$

también tenemos que

$$\liminf_{k\to\infty}\langle x_k^*, b - a\rangle \geq f(b) - f(a).$$

i.e. se satisface (e).

Si $x \neq a$ y $x \neq b$ entonces

$$d_{[a,b]}(x_k) < \min\{\|x_k - a\|, \|x_k - b\|\}$$

para todo $k \geq k_0$, para algún $k_0 \in \mathbb{N}$.

Por el corolario 1.76 tenemos

$$d^{\uparrow}_{[a,b]}(v_k; b-a) \leq 0 \ \text{ y } \ d^{\uparrow}_{[a,b]}(v_k; b-a) \leq 0, \forall\, k \geq k_0$$

y como $v_k \in j_{n_k} \partial d_{[a,b]}(x_k)$ esto implica que ;

$$\langle v_k^*, b-a \rangle \leq 0 \ \text{ y } \ \langle v_k^*, a-b \rangle \leq 0,$$

luego

$$\langle v_k^*, b-a \rangle = 0; \text{ para todo } k \geq k_0.$$

En consecuencia por (1.48) y (1.50)

$$\langle x_k^*, b-x \rangle = \frac{f(b)-f(a)}{\|b-a\|}\|x_k - b\| + \langle u_k^*, x-x_k \rangle - \langle w_k^* + z_k, b-x \rangle = 0; \forall\, k \geq k_0. \quad (1.54)$$

Desde que $\lim\limits_{k\to\infty}(w_k^* + z_k^*) = 0$, se sigue de (1.53) y (1.54) que

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k^*, b-x \rangle = \frac{f(b)-f(a)}{\|b-a\|}\|x-b\|$$

y como una consecuencia inmediata de la igualdad $\dfrac{b-x}{\|b-x\|} = \dfrac{b-a}{\|b-a\|}$, obtenemos (f) y la prueba del teorema esta completa.

Teorema 1.80 (T.V.M. de Lebourg) Sean a y b en $\mathcal{X}$ con $a \neq b$. Supongamos que f es localmente lipschitziana. Entonces existe $x \in [a,b]$, $x \neq a$, $x \neq b$ tal que

$$\langle x^*, b-a \rangle = f(b) - f(a)$$

para algún $x^* \in \partial f(x)$.

Prueba. Primero observemos que existe $x \in [a,b]$, $x \neq a$ y $x \neq b$, tal que (1.41) se cumple para la función f o $-f$. Supongamos que (1.41) se cumple para la función f en x. El teorema 1.79 asegura la existencia de una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a x, tal que $x_k^* \in \partial f(x_k)$ y $\lim_{k\to\infty} \langle x_k^*, b-a\rangle = f(b) - f(a)$. Sea A_k la clausura de el conjunto $\{x_k^*, x_{k+1}^*, \cdots\}$ en la topología débil estrella, como la función f es localmente lipschitziana del teorema 1.71(4)(6), deducimos que A_k es acotado para cada $k \in \mathbb{N}$, luego se sigue del teorema de Alaoglu 1.14, que los conjuntos A_k son compactos en la tolopogía débil estrella. Ahora desde que la intersección de una familia decrecientes de conjuntos compactos es cerrado y no vacía, existe $x^* \in \cap_{k=1}^{\infty} A_k$ y como es claro es un punto de acumulación de la sucesición $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en la topología débil estrella. Luego existe una subsucesión $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_{k_n}^*, b-a\rangle = \langle x^*, b-a\rangle$$

y esto implica que $\langle x^*, b-a\rangle = f(b) - f(a)$. Por el teorema 1.71(4) tenemos que $x^* \in \partial f(x)$. Si (1.41) se cumple para $-f$, procediendo de manera similar, obtenemos que existe $x^* \in \partial(-f)(x)$ tal que

$$\langle x^*, b-a\rangle = (-f)(b) - (-f)(a)$$

Por el teorema 1.71(3), tenemos que $-x^* \in \partial f(x)$ y

$$\langle -x^*, b-a\rangle = f(b) - f(a).$$

Lema 1.81 *Sea* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *semicontinua inferiormente y* $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ *con* $f(x) < f(y)$. *Entonces existen sucesiones* $\{w_n\} \subseteq \mathcal{X}$, $\{w_n^*\} \subseteq \mathcal{X}^*$ *tales que* $w_n \to c \in [x, y[$, $w_n^* \in \mathrm{Dom}\partial f(w_n)$, $\langle w_n^*, y - w_n\rangle > 0$ *y* $\langle w_n^*, y - x\rangle > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prueba.

Por el teorema anterior, tenemos que existe $c \in [x, y[$ y sucesiones $\{x_n\} \subseteq \mathcal{X}$, $\{x_n^*\} \subseteq \mathcal{X}^*$ tales que $x_n \to c$, $x_n^* \in \mathrm{Dom}\partial f(x_n)$, $\forall n \in N$,

$$\liminf_{n\to\infty} \langle x_n^*, y - x_n\rangle > 0 \qquad \text{y} \qquad \liminf_{n\to\infty} \langle x_n^*, y - x\rangle > 0;$$

Afirmación: Dado $k \in \mathbb{N}$ existe $k < n_k \in N$ tal que $\langle x^*_{n_k}, y - x_{n_k}\rangle > 0$ y $\langle x^*_{n_k}, y - x\rangle > 0$.

En efecto. De no ser así existiría, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle x^*_n, y - x_n\rangle \leq 0 \quad \text{o} \quad \langle x^*_n, y - x\rangle \leq 0, \forall n \geq n_0$$

lo cual implicaría que

$$\liminf_{n\to\infty}\langle x^*_{n_k}, y - x_{n_k}\rangle \leq 0 \quad \text{o} \quad \liminf_{n\to\infty}\langle x^*_{n_k}, y - x\rangle \leq 0,$$

lo cual es una contradicción. Ahora construiremos una sucesión x_{n_k} tal que $\langle x^*_{n_k}, y - x_{n_k}\rangle > 0$ y $\langle x^*_{n_k}, y - x\rangle > 0$; $\forall k \in \mathbb{N}$. De la siguiente manera, por la afimación para $n = 1$ existe $n_1 > 1$ tal que $\langle x^*_{n_1}, y - x_{n_1}\rangle > 0$ y $\langle x^*_{n_1}, y - x\rangle > 0$, también para $n = n_1$ existe $n_2 > n_1$ tal que $\langle x^*_{n_2}, y - x_{n2}\rangle > 0$ y $\langle x^*_{n_2}, y - x\rangle > 0$, supongamos que ya tenemos x_{n_k}, entonces para $n = n_k$ existe $n_{k+1} > n_k$ tal que $\langle x^*_{n_1}; y - x_{n_{k+1}}\rangle > 0$ y $\langle x^*_{n_{k+1}}; y - x\rangle > 0$.

Luego tomando $w_k = x_{n_k}$ y $w^*_k = x^*_{n_k}$: $\langle w^*_k, y - w_k\rangle > 0$ y $\langle w^*_k, y - x\rangle > 0, \forall k \in N$; luego la afirmación esta probada y de esta se deduce fácilmente el resultado.

Corolario 1.82 *Sea* $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ *semicontinua inferiormente,* $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ *con* $x \neq y$ *y* $z \in [x, y[$ *tal que* $f(z) > f(x)$. *Entonces existen sucesiones* $\{w_n\} \subseteq \mathcal{X}$, $\{w^*_n\} \subseteq \mathcal{X}^*$ *tales que* $w_n \to c \in [x, z[$, $w^*_n \in \mathrm{Dom}\partial f(w_n)$ *y* $\langle w^*_n, y - w_n\rangle > 0 \forall n \in N$.

Prueba. Por el lema 1.81, aplicado a los puntos x y z, tenemos que existe $c \in [x, z[$ y sucesiones $\{w_n\} \subseteq \mathcal{X}$, $\{w^*_n\} \subseteq \mathcal{X}^*$ tales que $w_n \to c$, $w^*_n \in \mathrm{Dom}\partial f(w_n)$, $\langle w^*_n, z - w_n\rangle > 0$ y $\langle w^*_n, z - x\rangle > 0$ $\forall n \in N$. Luego

$$\langle w^*_n, y - w_n\rangle = \langle w^*_n, z - w_n\rangle > 0 + \frac{\|z - y\|}{\|z - x\|}\langle w^*_n, z - x\rangle > 0, \forall n \in N. \square$$

1.8 Convexidad generalizada vs. Monotonicidad generalizada

Para una función diferenciable hemos visto en la sección anterior, la relación existente entre las propiedades de su gradiente y el hecho que la función sea convexa (cuasiconvexa). En esta sección no consideraremos hipótesis de diferenciabilidad, solo supondremos que la función es s.c.i y veremos como para este tipo de funciones, el subdiferencial de Clarke Rockafellar sigue manteniendo estas relaciones.

Proposición 1.83 *[10] Una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa si y sólo si, $\forall\, \alpha^* \in \mathcal{X}^*$ la función $f + \alpha^*$ es cuasiconvexa.*

Prueba. Si f es convexa, entonces obviamente para cualquier $\alpha^* \in \mathcal{X}^*$, la función $f + \alpha^*$ es convexa, para probar lo recíproco, tomemos $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ y escojamos $\alpha^* \in \mathcal{X}^*$ tal que

$$\langle \alpha^*, y - x\rangle = f(x) - f(y). \tag{1.55}$$

lo cual implica

$$\langle \alpha^*, x\rangle + f(x) = \langle \alpha^*, y\rangle + f(y),$$

y como por hipótesis $(f + \alpha^*)$ es cuasiconvexa;

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) + \langle \alpha^*, \lambda x + (1-\lambda)y)\rangle \leq \max\{f(x) + \langle \alpha^*, x\rangle, f(y) + \langle \alpha^*, y\rangle\}$$

por (1.55) entonces

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) + \langle \alpha^*, \lambda x + (1-\lambda)y\rangle \leq \lambda(f(x) + \langle \alpha^*, x\rangle) + (1-\lambda)(f(y) + \langle \alpha^*, y\rangle)$$

lo cual obviamente implica, desde que $\langle \alpha^*, \cdot\rangle$ es lineal que,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

El siguiente teorema muestra, como es que el subdiferencial de una función cuasiconvexa sigue manteniendo ese cáracter de monótonicididad generalizada, similar al que se encuentra en el caso diferenciable.

Teorema 1.84 *Para $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i. Son equivalentes,*

(1) ∂f es cuasimonótono.

(2) $\exists x^* \in \partial f(x) : \langle x^*, y - x\rangle > 0$ implica $f(z) \leq f(y), \forall z \in [x, y]$

(3) f es cuasiconvexa.

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $x \in \mathrm{Dom}\partial f$, $y \in \mathrm{Dom}(f)(x \neq y)$ y $z = x + \alpha(y - x) \in [x, y[$, con $f(z) > f(y)$. Por el corolario 1.82, existen sucesiones (w_n) y (w_n^*) tal que $w_n \to w \in [y, z[, \quad w_n^* \in \partial f(w_n)$, $\langle w_n^*, x - w_n\rangle > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. De aquí como por la cuasimonotonicidad de ∂f tenemos que

$$\langle x^*, x - w_n\rangle \geq 0, \forall x^* \in \partial f(x), \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que implica que $\langle x^*, x - w\rangle \geq 0$, de donde

$$\langle x^*, x - y\rangle = \frac{\|w - x\|}{\|y - x\|}\langle x^*, x - w\rangle \geq 0,$$

por lo tanto $\langle x^*, y - x\rangle \leq 0$ y la implicación esta probada.

(2) $\Rightarrow$ (3) Dados $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ y

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in [x, y], \text{ con } f(z) > f(x).$$

Por el corolario 1.82, existen sucesiones (x_n) y (x_n^*) tal que

$$x_n \to c \in [x, z[, \quad x_n^* \in \partial f(x_n) \quad \text{y} \quad \langle x_n^*, y - x_n\rangle > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

La hipótesis (2) implica entonces que para cada $n \in N$, $z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)y$ satisface

$$f(z_n) \leq f(y),$$

de esta desigualdad como f es s.c.i. obtenemos $f(z) \leq f(y)$ y por la proposición 1.35 tenemos que f es cuasiconvexa.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que f es cuasiconvexa y que $x, y \in \mathrm{Dom}(\partial f)$ y $x^* \in \partial f(x)$ es tal que $\langle x^*, x - y\rangle > 0$. Por la definición de ∂f, será suficiente probar que $f^\dagger(y, x-y) \leq 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\gamma \in]0, \varepsilon[$ tal que $\langle x^*, v - x\rangle > 0$, $\forall v \in B_\gamma(y)$. Para $\overline{v} \in B_\gamma$ fijo, desde que $f^\dagger(x, \overline{v} - x) > 0$, existen $\varepsilon' \in]0, \varepsilon - \gamma[$, $u_{\overline{v}} \in B_{\varepsilon'}(x)$, $\alpha \in B_{\varepsilon'}(f(x))$ y $\tau \in]0,1[$ que satisfacen

$$\overline{v} - u_{\overline{v}} \in B'_\varepsilon(\overline{v} - x) \text{ y } f(u_{\overline{v}} + \tau(\overline{v} - u_{\overline{v}})) > \alpha \geq f(u_{\overline{v}}),$$

de la última desigualdad por la cuasiconvexidad de f tenemos

$$f(\overline{v} + t(u_{\overline{v}} - \overline{v}) \leq f(\overline{v}) \, \forall t \in [0,1].$$

Además de la forma en que hemos escogido γ y ε', la dirección $u_{\overline{v}} - \overline{v} \in B_\varepsilon(x - y)$, de esto y los pasos previos tenemos:
Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que para cualesquiera $v \in B_\gamma(y)$, $\beta \in B_\gamma(f(y))$ con $f(v) \leq \beta$ y $t \in]0,1[$, se puede encontrar una dirección $w = u_v - v \in B_\varepsilon(x - y)$ tal que

$$\frac{f(v + t(u_v - v)) - \beta}{t} \leq 0,$$

lo que implica por la definición de $f^\dagger(y, x-y)$, que $f^\dagger(y, x-y) \leq 0$.□

Teorema 1.85 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i., entonces, f es convexa si y sólo si ∂f es monótono.*

Prueba La multifunción ∂f es monótono si y sólo si para cada $\alpha \in \mathcal{X}^*$ la multifunción $\partial f + \alpha$ es cuasimonótono, por el teorema anterior esto es equivalente a que para cada $\alpha \in \mathcal{X}^*$ la función $f + \alpha$ es cuasiconvexa. Luego, por la proposición 1.83 concluimos que f sea convexa.

Teorema 1.86 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i., entonces f es cuasiconvexa si y sólo si ∂f es cíclicamente cuasimonótono.*

Prueba. $\Rightarrow$ Por reducción al absurdo supongamos que ∂f no es cíclicamente cuasimonótono. Entonces existen $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathrm{Dom}(f)$ y $x_i^* \in \partial f(x_i), i = 1, 2 \cdots k$ tal que $\langle x_i^*, x_{i+1} - x_i \rangle > 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$ donde $x_{k+1} = x_1$. Como f es cuasiconvexa por el teorema 1.84 (2), las desigualdades anteriores implican que $f(x_{i+1}) \geq f(x_i)$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, y esto a su vez que $f(x_1) = f(x_2) = \cdots f(x_k)$. Ahora de $\langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle > 0$, deducimos que $f^{\dagger}(x_1, x_1 - x_2) > 0$. Luego existen sucesiones $y_n \to x_1$ y $t_n \to 0^+$ tal que $f(y_n + t_n(x_2 - y_n)) - f(y_n) > 0$ y como $y_n + t_n(x_2 - y_n) \in [y_n, x_2]$, la cuasiconvexidad de f implica entonces que $f(y_n) < f(x_2) = f(x_1)$. De otro lado desde que $\langle x_k^*, x_1 - x_k \rangle > 0$, para n suficientemente grande $\langle x_k^*, y_n - x_k \rangle > 0$, nuevamente por el teorema 1.84 (2) esto implica que $f(y_n) \geq f(x_k) = f(x_1)$, lo cual es una contradicción. $\Leftarrow$) Es directo, desde que todo operador cíclicamente monótono es en particular cuasimonótono y por el teorema 1.84, concluimos que f es cuasiconvexa.

Lema 1.87 *[3]Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función cuasiconvexa, semicontinua inferiormente, y sean $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$. Supongamos que f es constante en el segmento $[x, y]$ y que existe $x^* \in \partial f(x)$ tal que $\langle x^*, y - x \rangle > 0$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones :*

1) Cada $z \in]x, y]$ es un mínimo local de la función f.

2) El punto x no es un mínimo local.

3) Para cualquier $z \in]x, y[$ y $z^* \in \partial f(z)$ se tiene que $\langle z^*, y - x \rangle = 0$.

Prueba.

1) Por el teorema 1.84 (3) ∂f es cuasimonótono. Sea $z \in]x, y]$, como $\langle x^*, z-x\rangle > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle x^*, z' - x\rangle > 0$, $\forall z' \in B_\varepsilon(z)$, por el teorema 1.84 (2) tenemos que $f(z') \geq f(x) = f(z)$, en consecuencia z es un mínimo local de f.

2) Desde que $\langle x^*, y-x\rangle > 0$, tenemos que $f^\uparrow(x; y-x) > 0$. Luego de la definición existe $\varepsilon > 0$ y sucesiones $x_n \to x$ y $t_n \downarrow 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{d' \in B_\varepsilon(y-x)} \frac{f(x_n + t_n d') - f(x_n)}{t_n} > 0 \tag{1.56}$$

de aquí escogiendo n suficientemente grande para que $y - x_n \in B_\varepsilon(y-x)$ (1.56) implica que $f(x_n + t_n(y - x_n)) > f(x_n)$; y como $x_n + t_n(y - x_n) \in]x_n, y[$ de la cuasiconvexidad de f; $f(x_n + t_n(y - x_n)) < f(y)$, luego $f(x_n) < f(y) = f(x)$, esto muestra que x no es un mínimo local.

3) Supongamos que para algún $z \in]x, y[$ y algún $z^* \in \partial f(z)$, $\langle z^*, y-x\rangle \neq 0$. Como $\langle x^*, y - x\rangle > 0$, entonces $\langle x^*, z - x\rangle > 0$ luego por la cuasimonótonicidad de ∂f tenemos que $\langle z^*, z - x\rangle > 0$. Esto último con nuestra suposición nos da $\langle z^*, y - x\rangle > 0$; ahora aplicando (2) tenemos que z no es un mínimo local, lo cual es una contradicción con lo probado en (1). Por lo tanto $\langle z^*, y - x\rangle = 0$ para todo $z \in]x, y]$ y todo $z^* \in \partial f(z)$.

Teorema 1.88 *Si $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, es s.c.i y satisface:*

$$x, y \in \mathcal{X} \text{ y } \exists x^* \in \partial f(x) : \langle x^*, y - x\rangle \geq 0 \text{ implica } f(x) \leq f(y) \tag{1.57}$$

entonces:

1) Todo mínimo local es un mínimo global.

2) f es cuasiconvexa.

3) ∂f, es pseudomonótono.

Prueba.

1) Sean $x \in \mathrm{Dom}(f)$ un mínimo local. Tomemos un elemento arbitrario, $y \in \mathrm{Dom}(f)$. De la definición de $f^{\dagger}(x;v)$, $f^{\dagger}(x;y-x) \geq 0$, luego
$$\langle x^*, y-x\rangle = 0,$$
esto implica por 1.57 que $f(x) \leq f(y)$.

2) Supongamos que existan $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ y $z \in]x,y[$ tal que $f(z) > \max\{f(x), f(y)\}$. Sea $m = \max\{f(x), f(y)\}$. Desdé que f es s.c.i, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(w) > m, \forall w \in B_\varepsilon(z)$. Por (1) tenemos que z no puede ser un mínimo local, pues si no sería un mínimo global, luego existe $\overline{w} \in B_\varepsilon(z)$ tal que $f(\overline{w}) < f(z)$. Aplicando el teorema del valor medio de Zagrodny al segmento $[\overline{w}, z]$ obtenemos $u \in [\overline{w}, z[$ y una sucesión $u_n \to u$ y $u_n^* \in \partial f(u_n)$, con $\langle u_n^*, z-u_n\rangle > 0$. Desde que $z \in \mathrm{conv}\{x, y\}$ se sigue que $\langle u_n^*, x-u_n\rangle > 0$ o $\langle u_n^*, y-u_n\rangle > 0$. Por (1.57) entonces $m \geq f(x) \geq f(u_n)$ o $m \geq f(y) \geq f(u_n)$, desde que f es s.c.i. en cualquier caso tenemos $m \geq f(u)$. Lo que contradice que $u \in B_\varepsilon(z)$.

3) Por reducción al absurdo. Supongamos que existen $x, y \in \mathrm{Dom}(\partial f)$, $x^* \in \partial f(x), y^* \in \partial f(y)$ con $\langle x^*, y-x\rangle > 0$ y $\langle y^*, x-y\rangle > 0$. Esto implica que para todo $z \in]x,y[$, $\langle x^*, z-x\rangle > 0$ y $\langle y^*, z-y\rangle > 0$, luego por (1.57) $f(x) \leq f(z)$ y $f(y) \leq f(z)$, desde que f es cuasiconvexa concluimos que f es constante en $[x,y]$. También de $\langle y^*, x-y\rangle > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle y^*, w-y\rangle > 0$, $\forall w \in B_\varepsilon(x)$, de cual por (1.57) $f(y) \leq f(w)$. Como habíamos visto que $f(x) = f(y)$, entonces $f(x) \leq f(w), \forall w \in B_\varepsilon(x)$, i.e. x es un mínimo local, lo cual es una contradicción por lo probado en el lema 1.87.

Observación 1.3 *Si en el teorema anterior no consideramos la hipótesis de que f sea s.c.i. el resultado no es necesariamente cierto. Para esto considere la función* *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x = 0 \\ x^2, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

f así definida, satisface (1.57), pero ∂f no es cuasimonótono.

Capítulo 2

Funciones Pseudoconvexas

Como hemos visto en el capítulo anterior, las definiciones de convexidad y cuasiconvexidad, depende solo de las propiedades algebraicas de la recta real. En el pasado, las funciones convexas han ocupado un lugar importante en la teoría de minimización, al ser éstas las funciones que se comportan mejor en diversos métodos de minimización. Sin embargo, la condición de convexidad es muy restrictiva por lo que es posteriormente reemplazada por la cuasiconvexidad, la que se presenta en diversos problemas de economía, entre otras áreas, de una manera más natural. Aunque las funciones cuasiconvexas conservan muchas de las propiedades de las funciones convexas, ellas carecen de otras propiedades relevantes. El hecho de que todo mínimo local es también global, propiedad estándar de las funciones convexas, no es siempre valido para las funciones cuasiconvexas, como mostraremos con algunos ejemplos simples. Asímismo, la búsqueda de puntos estacionarios (puntos donde el gradiente de la función dada se anula) no garantiza el encontrar mínimos, siquiera locales, para una función cuasiconvexa. Esto motivó la introducción del concepto de pseudoconvexidad para salvar este inconveniente. En [25], puede revisarse el primer concepto introducido de pseudoconvexidad, bajo condiciones de diferenciabilidad; en [18], se introduce otro concepto, bajo condiciones mas débiles (subdiferenciabilidad). Sin embargo, estos conceptos están dados bajo condiciones topológicas, lo cúal limita su aplicación (lo que, como mencionamos, no ocurre con las funciones convexas y cuasiconvexas). Con esta filosofía, introducimos un concepto de pseudoconvexidad que no depende de propiedades topológicas. Entre otras propiedades, estas funciones poseen una cuasiconvexidad "natural", que ésta presente en la definición dada en [25], mas no en la dada en [18]; comparten diversas propiedades con las funciones convexas, lo cual permite extender rápidamente resultados asociados a éstas (como veremos en el siguiente capítulo), entre las mas resaltantes es el hecho de que todo mínimo local es también un mínimo global. Hay que mencionar que, bajo ciertas condiciones de regularidad (por ejm., semicontinuidad inferior), estas funciones ya aparecen en la literatura bajo otro nombre (ver [3], [4], [23], [26]). En estos trabajos, se han establecido ciertas relaciones entre monotonicidad generalizada de gradientes y subdiferenciales, en analogía al caso convexo; y propiedades de los conos normales a los conjuntos de nivel de las funciones pseudoconvexas; las cuales recogemos en este trabajo.

En este capítulo introducimos en la primera sección, el concepto de función pseudoconvexa, y damos algunas de sus caracterizaciones de carácter algebraico, luego estudiaremos sus extremos relativos (máximos y mínimos) a través del concepto de *core* de un conjunto, de naturaleza algebraica. En la siguiente sección, estudiamos propiedades relativas a continuidad y diferenciabilidad; estableciendo en el caso finito dimensional, el hecho de que las funciones pseudoconvexas, semicontinuas superiormente, son aquellas funciones cuasiconvexas para las cuales todo mínimo local es también un mínimo global, extendiendo de esa manera un resultado ya existente bajo la hipótesis de continuidad; y establecemos la relación existente entre la pseudoconvexidad de una función y cierto tipo de monotonicidad generalizada de su gradiente. En las dos últimas secciones estudiamos propiedades relativas a monotonicidad generalizada del subdiferencial de Clarke y de una multifunción normal asociada a los subconjuntos de nivel.

2.1 Definición y propiedades básicas

Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial real, diremos que una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *pseudoconvexa* si dados $x, y \in \mathcal{X}$ y $z \in]x, y[$,

$$f(z) \geq f(x) \quad \text{implica} \quad f(y) \geq f(z),$$

o equivalentemente

$$f(z) > f(x) \quad \text{implica} \quad f(y) > f(z).$$

En esta primera proposición, veremos como se relacionan los conceptos de convexidad y cuasiconvexidad de funciones, con este concepto de ***pseudoconvexidad*** de funciones.

Proposición 2.1 *Para una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, se satisface*

1) Si f es convexa, entonces f es pseudoconvexa.

2) Si f es estrictamente cuasiconvexa, entonces f es pseudoconvexa.

3) Si f es pseudoconvexa, entonces f es cuasiconvexa.

Prueba

Sean $x, y \in \mathcal{X}$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x, y[$ tal que

$$f(z) \geq f(x), \tag{2.1}$$

1) Desde que f es convexa tenemos que

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \tag{2.2}$$

lo cual junto con (2.1) implica que

$$0 \leq f(z) - f(x) \leq (1-\lambda)(f(y) - f(x)),$$

de donde $f(x) \leq f(y)$, y ahora de (2.2),

$$f(z) \leq f(y).$$

2) Como f es estrictamente cuasiconvexa, entonces

$$f(z) < \max\{f(x), f(y)\},$$

y de (2.1), concluimos que $f(z) < f(y)$.

3) Por redución al absurdo. Si f no fuera cuasiconvexa, existirían x, $y \in \mathcal{X}, z \in]x, y[$ tales que $f(z) > \max\{f(x), f(y)\}$, lo cual es una contradicción, pues

$$f(z) > f(x) \quad \text{implica} \quad f(y) < f(z).$$

Los siguientes ejemplos muestran, que las recíprocas de las proposiciones anteriores no son necesariamente ciertas.

Ejemplos 2.1

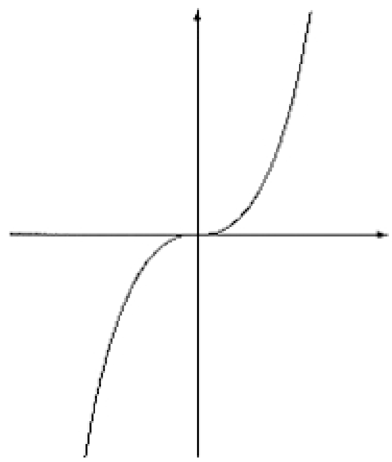

Figura 2.1: Función pseudoconvexa que no es convexa: $f(x) = x^3$

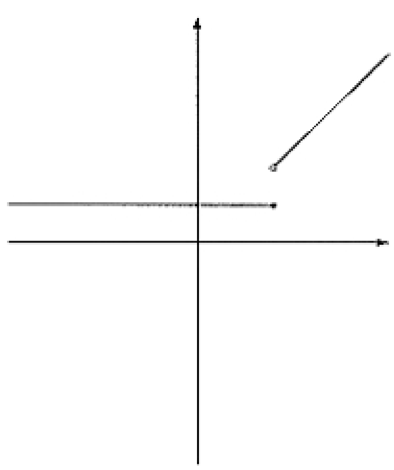

Figura 2.2: Función pseudoconvexa que no es estrictamente cuasiconvexa:
$f(x) = 1$ si $x \leq 1$, $f(x) = x$ si $x > 1$

Corolario 2.2 *El dominio de una función pseudoconvexa es convexo.*

Prueba Se sigue directamente del hecho que una función pseudoconvexa, es en particular cuasiconvexa y del lema 1.36.

Lema 2.3 *Si f es cuasiconvexa, son equivalentes:*

1) f es pseudoconvexa.

2) Para todo $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ y $z \in]x, y[$: $f(x) < f(y)$ implica $f(z) < f(y)$.

Prueba. $1 \Rightarrow 2$) Supongamos que existan $x, y \in \mathrm{Dom} f$ y $z \in]x, y[$ tal que $f(x) < f(y)$ y $f(z) \geq f(y)$, entonces la pseudoconvexidad de f implicara que $f(z) \leq f(x)$ y esto a su vez que $f(y) \leq f(x)$, y la implicación esta probada. $2 \Leftarrow 1$)Supongamos que f no es pseudoconvexa, entonces existen $x, y \in \mathrm{Dom} f$ y $z \in]x, y[$ tal que $f(x) < f(z)$ y $f(z) \geq f(y)$, como la función es cuasiconvexa, la segunda desigualdad implica que $f(z) = f(y)$, luego $f(x) < f(y)$ y $f(z) = f(y)$, i.e. (2) no se cumple. □

2.2 Propiedades Algebraicas de las funciones pseudoconvexas

Sabemos que la familia de funciones convexas son cerradas bajo muchas operaciones algebraicas, tales como la suma, la combinación convexa y otras mas. A continuación veremos algunas de las operaciones algebraicas que se siguen conservando para funciones pseudoconvexas.

Proposición 2.4 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función pseudoconvexa, entonces las funciones af con $a \in \mathbf{R}^+$ y $(f+r)$ con $r \in \mathbb{R}$, donde $af(x) = af(x)$ y $(f+r)(x) = f(x) + r$, son pseudoconvexas.*

Prueba Sean $x,\ y\ \in\ \mathcal{X}, z\ \in]x,y[,\ r\ \in\ \mathbb{R},\ a\in\ \mathbb{R}+$.

Si

$$(f+r)(z)\geq(f+r)(x),$$

entonces por definición $f(z)+r\geq f(x)+r$, luego

$$f(z)\geq f(x),$$

y la pseudoconvexidad de f implicara $f(z)\leq f(y)$, de donde sumándoles r a cada lado obtenemos

$$(f+r)(z)\leq(f+r)(y).$$

Veamos el otro caso. Si

$$(af)(z)\geq(af)(x),$$

por definición $af(z)\geq af(x)$, como $a>0$, multiplicando a ambos lados de desigualdad por a^{-1} obtenemos $f(z)\geq f(x)$ luego de la pseudoconvexidad de f

$$f(z)\leq f(y),$$

multiplicando ahora por a a ambos, finalmente tenemos

$$(af)(z)\leq(af)(y).\quad\square$$

Proposición 2.5 *Sea* $f:\mathcal{X}\rightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *una función pseudoconvexa y* $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *una función no decreciente, entonces la función* $g\circ f:\mathrm{Dom}(f)\rightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *es también pseudoconvexa.*

Prueba

Sean $x,\ y\ \in\ \mathcal{X}, z\ \in]x,y[$ tales que

$$g\circ f(z)\geq g\circ f(x),$$

como g es no decreciente tenemos entonces

$$f(z) \geq f(x),$$

luego de la pseudoconvexidad de f,

$$f(z) \leq f(y)$$

y nuevamente por ser g no decreciente obtenemos

$$g \circ f(z) \leq g \circ f(y).$$

Corolario 2.6 *Si $f : \mathcal{X} \to]0, \infty[$ es pseudoconvexa, entonces la función f^a dada por $f^a(x) = f(x)^a$, con $a > 1$ es también pseudoconvexa.*

Prueba Basta observar que la función dada por $g(x) = x^a$, es creciente en $]0, +\infty[$ luego de la proposión anterior tenemos $f \circ g$ es pseudoconvexa.

Teorema 2.7 *Sea $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $i \in I$ una familia finita de funciones pseudoconvexas, entonces la función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por $f(x) = \max\{f_i(x);\ i \in I\}$ es pseudoconvexa.*

Prueba. Sean $x, y \in \mathcal{X}, z \in]x, y[$ tales que

$$f(z) \geq f(x),$$

i.e.

$$\max\{f_i(z);\ i \in I\} \geq \max\{f_i(x);\ i \in I\}$$

entonces existe un $i_0 \in I$ con

$$f_{i_0}(z) \geq f_{i_0}(x) \text{ y } f_{i_0}(z) = \max\{f_i(z);\ i \in I\},$$

luego de la pseudoconvexidad de f_{i_0}, $f_{i_0}(z) \leq f_{i_0}(y)$, de donde obtenemos

$$\max\{f_i(z);\ i \in I\} \leq \max\{f_i(y);\ i \in I\}$$

i.e. $f(z) \leq f(y)$.

2.3 Máximos y Mínimos de funciones pseudoconvexas

Como lo hemos presentado, las propiedades dadas en la sección anterior son de carácter algebraico, solo hemos necesitado la estructura de espacio vectorial, y la buena ordenación de $\mathbb{R}$. Ahora veremos algunas propiedades relativas a máximos y mínimos de estas funciones.

Las funciones pseudoconvexas, con respectos a sus máximos y mínimos, siguen gozando de algunas de las propiedades de las funciones convexas, como veremos en esta sección.

Proposición 2.8 *Sean $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función pseudoconvexa y x_0 un mínimo de f/V; donde V es un conjunto convexo que contiene a x_0. Si $x_0 \in \mathrm{core}_{\mathrm{Dom}(f)}V$, entonces x_0 es un mínimo global de f.*

Prueba. Sea $y \in \mathrm{Dom}(f)$, entonces por hipótesis existe $\lambda \in]0,1[$ tal que $\lambda x_0 + (1-\lambda)y \in V$ y como x_0 es un mínimo de f/V, $f(x_0) \leq f(\lambda x_0 + (1-\lambda)y)$ y de la pseudoconvexidad de f entonces $f(\lambda x_0 + (1-\lambda)y) \leq f(y)$ luego $f(x_0) \leq f(y)$, lo cual muestra que x_0 es un mínimo global.

Corolario 2.9 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función pseudoconvexa y V un subconjunto convexo no vacío de $\mathcal{X}$ tal que $\mathrm{core}_{\mathrm{Dom}(f)}V \neq \emptyset$, y sobre el cual f es constante. Entonces f alcanza un mínimo global en este conjunto.*

Corolario 2.10 *Si $\mathcal{X}$ es un espacio normado para toda función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pseudoconvexa; se tiene que cualquier mínimo local es un mínimo global.*

Prueba. Directo de la proposición anterior y del corolario 1.16.

Proposición 2.11 *Sea $\mathcal{X}$ es un espacio normado y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función pseudoconvexa, entonces*

1) Si $x \in \text{int}(\text{Dom}(f))$ es un máximo relativo local, entonces f es constante en una vecindad alrededor de este punto.

2) Si $x \in \text{int}(\text{Dom}(f))$ es un máximo, entonces f es constante en su dominio.

Prueba. 1) Sea $x \in \text{int}(\text{Dom}(f))$ y $\delta > 0$, tal que

$$f(x) \geq f(y), \forall y \in B_\delta(x), \tag{2.3}$$

veamos que f es constante en $B_\delta(x)$. Si existiese $p \in B_\epsilon(0)$ tal que $f(x+p) < f(x)$, la pseudoconvexidad de f y el hecho de que $-p \in B_\delta(0)$ y $x = \frac{1}{2}(x+p) + \frac{1}{2}(x-p)$ implicarían que $f(x) < f(x-p)$. Lo cual sería una contradición, luego $f(x+p) \geq f(x)$, $\forall p \in B_\delta(0)$, lo que es equivalente a $f(y) \geq f(x)$, $\forall y \in B_\epsilon(x)$, de lo cual por (2.3) concluimos que f es constante en $B_\delta(x)$.
2) De (1) tenemos que existe $\delta > 0$ tal que f es constante en $B_\delta(x)$. Sea $y \in \text{Dom}(f)$, tomando $z \in [x, y] \cap B_\delta(x)$, como $f(z) = f(x)$ la pseudoconvexidad f implicara que $f(y) \geq f(x)$, y como x es un maximizante de f, $f(y) \leq f(x)$, así $f(x) = f(y)$.

Observación 2.1 *Para una función cuasiconvexa el resultado no siempre es cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.2 *Considere la función f, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in]-\infty, 0[\\ -x & si \quad x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

entonces, f es cuasiconvexa, pero claramente el teorema anterior no se satisface.

Como es bien conocido una función que es, a la vez convexa y cóncava es una función afín y aunque este no es el caso para funciones pseudoconvexas, es decir, no toda función f que sea pseudoconvexa y pseudocóncava ($(-f)$ pseudoconvexa) es una función afín, estas últimas funciones siguen compartiendo con las primeras una propiedad relativa a los mínimos.

Teorema 2.12 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función no constante tal que f y $-f$ son pseudoconvexas, entonces f no alcanza ni mínimos ni máximos en el interior de su dominio.*

Prueba Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que existe $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$ tal que $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$, esto es equivalente a $(-f)(x_0) \geq (-f)(x), \forall x \in \mathcal{X}$, y como tenemos por hipótesis que $-f$ es también pseudoconvexa, de la propoción (2.11) concluimos que $-f$ es constante.

Teorema 2.13 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función pseudoconvexa, si para $\{x_1, x_2, \cdots x_n\} \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ existe $i \in \{1, 2, \cdots n\}$, tal que $f(x_j) < f(x_i) \forall j \in \{1, 2, \cdots n\} \setminus \{i\}$, entonces*

$$f(z) < f(x_i) \forall z \in (\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \cdots x_n\}) \setminus \{x_i\}$$

Prueba De la definición sabemos que el resultado es cierto para $n = 2$, procedamos por inducción, supongamos que se cumple para subconjuntos finitos de $n - 1$ elementos, tomemos $z \in (\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \cdots x_n\}) \setminus \{x_i\}$, entonces $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ con $0 \leq \lambda_k \leq 1$ y $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Si algún $\lambda_j = 1$, entonces $z = x_j$, y se cumple que $f(z) < f(x_i)$. Ahora si $0 < \lambda_k < 1 \forall k = 1, \cdots, n$. Poniendo $w = \sum_{k=1_{k \neq j}}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_j} x_k$, para algún $j \neq i$, es fácil ver que $f(w) < f(x_i)$ y como $z \in]w, x_i[$ la pseudoconvexidad de f implicara que $f(z) < f(x_i)$, que era lo que queríamos probar.

Observación 2.2 *Para funciones cuasiconvexas, desde que los subconjuntos de nivel son convexos, solo podemos asegurar que*

$$f(z) < f(x_i), \forall z \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \cdots x_{i-1}, x_{i+1} \cdots x_n\}$$

cuando $f(x_j) < f(x_i) \forall i \neq j$, *como lo muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.3 *Considere la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in]-\infty, 0[\\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Tomando $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ *y* $z = -1 \in (\operatorname{conv}\{x_1, x_2, x_3\}) \setminus \{x_1\}$, *tenemos que* $f(x_1) > f(x_2) = f(x_3)$ *pero* $f(z) = f(x_1)$.

2.3.1 Funciones Pseudoconvexas definidas en los reales

Lema 2.14 *[3] Para una función cuasiconvexa* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son equivalentes*

1) f *es pseudoconvexa.*

2) f *satisface la siguiente propiedad:* $\forall x, y \in \operatorname{Dom}(f)$ *tal que* f *es constante en* $[x, y]$, *se cumple que* $f(z) \geq f(x) \forall z \in \mathbb{R}$.

Prueba Supongamos primero que f es pseudoconvexa. Sea $z \in \operatorname{Dom}(f) \setminus [x, y]$, entonces tenemos que

$$x \in [z, y], \text{ o } y \in [x, z],$$

en cualquiera de los casos la pseudoconvexidad implicara $f(z) \geq f(x)$. para los puntos de $[x, y]$ la desigualdad es trivial.

Ahora supongamos que se cumple (2) y que f no es pseudoconvexa. Entonces existen $x, y \in \operatorname{Dom}(f)$ y $z \in]x, y[$, tales que

$$f(z) > f(x) \text{ y } f(z) = f(y),$$

como f es cuasiconvexa, del lema 1.37 tenemos entonces que f es constante en $[z, y]$ y de (2) concluimos entonces $f(x) \geq f(z)$, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 2.15 *Para una función cuasiconvexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son equivalentes:*

1) f es pseudoconvexa.

2) Todo mínimo local de f es un mínimo global.

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2) es el corolario 2.10. (2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que f no es pseudoconvexa, entonces por el lema anterior tenemos que existen $x, y \in \text{Dom}(f)$, y $z \in \text{Dom}(f) \setminus [z, y]$ tal que f es constante en $[z, y]$, y $f(z) < f(x)$, luego $\dfrac{z+y}{2}$ es un mínimo local pero no es un mínimo global.$\square$

Mas adelante veremos que este resultado se sigue verificando en espacio de dimensiones mayores, bajo algunas hipótesis adicionales de continuidad.

Habíamos visto anteriormente que se puede determinar la cuasiconvexidad (convexidad) de una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, analizando la cuasiconvexidad (convexidad) de las funciones $f_{x,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definidas por $f_{x,d}(t) = f(x + td)$; donde x y d recorren X. La siguiente proposición muestra, que se puede hacer lo mismo para una función pseudoconvexa.

Proposición 2.16 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Entonces*

$$f \text{ es pseudoconvexa, si y sólo si } f_{x,d} \text{ es pseudoconvexa} \forall\, x,\, d \in \mathcal{X}.$$

Prueba

$\Rightarrow$) Si f es pseudoconvexa, entonces obviamente $f_{x,d}$ es pseudoconvexa $\forall x,\, d \in \mathcal{X}$.

$\Leftarrow$) Sean $x,\, y \in \mathcal{X}$, $z = \lambda x + (1 - \lambda) y \in]x, y[$, tal que

$$f(z) \geq f(x).$$

Por hipótesis la función $f_{x,y-x}$ es pseudoconvexa y como $f_{x,y-x}(0) = f(x)$, $f_{x,y-x}(\lambda) = f(z)$ y $f_{x,y-x}(1) = f(y)$ tenemos entonces

$$f(z) = f_{x,y-x}(\lambda) \leq f_{x,y-x}(1) = f(y),$$

tomando extremos $f(z) \leq f(y)$. $\square$

Una curiosidad en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.17 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuasiconvexa. Entonces*

$$f \text{ es pseudoconvexa, si y sólo si } \overline{f} \text{ es pseudoconvexa.}$$

Prueba Primero supongamos que f es pseudoconvexa, bastara probar que siempre que $\overline{f}$ sea constante en $[x,y] \subseteq Dom(\overline{f})$, entonces $\overline{f}(z) \geq \overline{f}(x)$, $\forall z \in \mathrm{Dom}(f)$, pues desde que f es cuasiconvexa, del lema (2.14) obtendremos el resultado. Para esto pongamos $a = \overline{f}(x)$ y veamos que $f(p) \leq a$, $\forall p \in \mathrm{Dom}(f)$. Supongamos que esto no es cierto, i.e. existe $p \in \mathrm{Dom}(f)$, tal que

$$f(p) < a.$$

Ahora como para una función cuasiconvexa definida en $\mathbb{R}$ los puntos de discontinuidad son numerables; existe $z \in]x,y[$ tal que $a = \overline{f}(z) = f(z)$, luego

$$f(p) < f(z) \text{ implica } f(w) < f(z) = a, \ \forall w \in [p,z[,$$

en particular $\forall w \in [p,z]\cap]x,y[$ de donde $a = \overline{f}(w) \leq f(w) < a$ para algún w, lo cual es una contradicción.
Ahora supongamos que $\overline{f}$ es pseudoconvexa, y supongamos que existen $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ y $z \in [x,y]$ tal que $f(x) = f(z) > f(y)$, entonces del lema 1.37 tenemos que f es constante en $[x,z]$, procediendo como antes escojamos $w \in [x,z]$ tal que $\overline{f}(w) = f(w)$, entonces tendríamos

$$\overline{f}(w) = f(z) > \overline{f}(y)$$

y la pseudoconvexidad de $\overline{f}$ y su definición implicaran entonces

$$f(x) \geq \overline{f}(x) > f(w),$$

lo cual es una contradicción, desde que $f(w) = f(x)$; por tanto f es pseudoconvexa.□

2.4 Continuidad y Diferenciabilidad

En esta sección estudiaremos propiedades relativas a la continuidad y diferenciabilidad, de las funciones pseudoconvexas.

Lema 2.18 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ cuasiconvexa. Entonces $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es pseudoconvexa si, y solo si, $\forall y \in \mathrm{Dom}(f)$;*

$$x \in \widetilde{S_{f(y)}}(f) \text{ implica } [x, y) \subseteq \widetilde{S_{f(y)}}(f).$$

Prueba

$\Rightarrow$) Sea $y \in \mathrm{Dom}(f)$ y $x \in \widetilde{S_{f(y)}}(f)$, entonces tenemos $f(x) < f(y)$, si para algún $z \in [x, y)$ se tiene $f(z) \geq f(y)$ de la pseudoconvexidad de f tendríamos que $f(z) \leq f(x) < f(y)$, lo cual es una contradicción. Esto implica que $[x, y[\subseteq [x, y) \subseteq \widetilde{S_{f(y)}}(f)$
$\Leftarrow$)Se sigue directamente del lema 2.3, por la definición de $\widetilde{S_{f(y)}}(f)$.

Lema 2.19 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función para la cual todo mínimo local es un mínimo global, entonces $\forall y \in \mathrm{Dom}(f)$ con $\widetilde{S_{f(y)}}(f) \neq \emptyset$, se cumple que $y \in \overline{\widetilde{S_{f(y)}}}(f)$.*

prueba Supongamos que existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $\widetilde{S_{f(y)}}(f) \neq \emptyset$ e $y \notin \overline{\widetilde{S_{f(y)}}}(f)$, entonces $\exists\, \epsilon > 0$ tal que $\forall w \in B_\epsilon(y) : f(y) \leq f(w)$ luego y es un mínimo local y por hipótesis entonces, y es un mínimo global, lo que contradice que $\widetilde{S_{f(y)}}(f) \neq \emptyset$.

El siguiente resultado extiende el ya existente en [26] para funciones continuas; a funciones que solo son semicontinuas superiormente.

Teorema 2.20 *Supongamos que $\mathcal{X}$ es de dimensión finita. Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua superiormente, cuasiconvexa. Entonces f es pseudoconvexa si, y solo si, $\forall y \in \mathcal{X}$ con $\widetilde{S_{f(y)}}(f) \neq \emptyset$ se tiene que $y \in \overline{\widetilde{S_{f(y)}}}(f)$.*

prueba

$\Leftarrow$) Desde que f es cuasiconvexa y semicontinua superiormente, para cualquier $y \in \mathcal{X}$ el conjunto $\widetilde{S_{f(y)}}(f)$ es convexo y abierto, si además es no vacío, por hipótesis tenemos que $y \in \overline{\widetilde{S_{f(y)}}}(f)$, luego como $\mathcal{X}$ es de dimensión finita

$$x \in \widetilde{S_{f(y)}}(f) \text{ implica } [x, y[\subseteq \widetilde{S_{f(y)}}(f).$$

luego por el lema 2.18 tenemos el resultado.

$\Rightarrow$) Directo del corolario 2.10 y el lema 2.19.

Observación 2.3 *La semicontinuidad superior es imprescindible en el teorema anterior, como lo muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.4 *Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por,*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \ si \ x < 0 \ e \ y < 0, \\ \frac{1}{2}, \ si \ y = 0 \ y \ x \in]-\infty, 0[, \\ 1, \ si \ y = 0, \ y \ x \in [0,1[, \\ x^2 + y^2 + 2, \ si \ x > 0 \ e \ y > 0, \end{cases}$$

Es un ejercicio practico probar que f así definida es cuasiconvexa, y $y \in \overline{\widetilde{S_{f(y)}}}(f)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ pero f no es semicontinua superiormente ni pseudoconvexa.

En el siguiente teorema extendemos el resultado dado en [26] para funciones continuas, exigiendo solamente semicontinuidad superiormente.

Teorema 2.21 *Sea X un espacio de dimensión finita y $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función cuasiconvexa, semicontinua superiormente. Entonces, f es pseudoconvexa si y sólo si todo mínimo local de f es también un mínimo global.*

Prueba. $\Rightarrow$) El resultado es dado en el lema 2.10.

$\Leftarrow$) Directo del lema 2.19 y e la proposición 2.20.

Proposición 2.22 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función pseudoconvexa, diferenciable en el abierto* $\mathrm{Dom}(f)$*, entonces* $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ *tal que* $f'(x) > 0$*, se cumple que* $f(x+\lambda) > f(x), \forall \lambda \in [0,1]$.

Prueba. Dado $\lambda \in [0,1]$ fijo ; de $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} > 0$, podemos encontrar t suficiente pequeño $t \in]0,\lambda[$, tal que $f(x+t) > f(x)$. Como $x+t \in [x, x+\lambda]$ la pseudoconvexidad de f implica $f(x+t) < f(x+\lambda)$, que junto con la desigualdad anterior nos da $f(x) < f(x+\lambda)$. Luego la proposición esta probada.

A continuación damos el principal resultado de esta sección, en el cual se caracteriza a las funciones pseudoconvexas diferenciables por medio de su gradiente, de manera análoga a las caracterizaciones que fueron hechas en 2.23 para las funciones cuasiconvexas y convexas.

Proposición 2.23 *Sea* $C \subseteq \mathcal{X}$*, abierto convexo y* $f : C \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable, que satisface:*

$$x, y \in K \text{ y } f(y) < f(x) \text{ implica } \langle \nabla f(x), y - x \rangle < 0$$

entonces ∇f *es pseudomonótono.*

Prueba. Sean $x, y \in C$ con

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle > 0,$$

entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(y + t(x-y)) - f(y)}{t} > 0,$$

luego existe $t_0 > 0$ con

$$f(y + t_0(x-y)) - f(y) > 0,$$

entonces haciendo $z = y + t_0(x - y)$,

$$\langle \nabla f(z), y - z\rangle < 0 \text{ lo que implica } \langle \nabla f(z), z - x\rangle < 0;$$

de lo cual deducimos que

$$f(y) < f(z) \leq f(x).$$

Por hipótesis entonces

$$\langle \nabla f(x), y - x\rangle < 0.$$

Lo que muestra que, ∇f es pseudomonótono.

Teorema 2.24 *[24] Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el abierto* $\mathrm{Dom}(f)$. *Son equivalentes:*

1) f es pseudoconvexa.

2) ∇f es cuasipseudomonótono.

Prueba. ($1 \Longrightarrow 2$) Como f es pseudoconvexa, en particular es cuasiconvexa, luego por la proposición 1.35 tenemos que ∇f es cuasimonótono. Sean $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que $\langle \nabla f(x), y - x\rangle > 0$, si existe un intervalo $I \subseteq [0,1]$ tal que $f'_{x,y-x}(t) = 0, \forall t \in I$ entonces $f_{x,y-x}$ es constante en I y por el lema 2.14 deberíamos tener $f_{x,y-x}(t) \leq f_{x,y-x}(0)$ para $t \in I$. Por la proposicción 2.22 como $f'_{x,y-x}(0) > 0$, en particular $f_{x,y-x}(\lambda) > f_{x,y-x}(0)\ \forall \lambda \in I$, lo cual es una contradicción con lo obtenido anteriormente. Por lo tanto ∇f es cuasipseudomonótono.

($2 \Longrightarrow 1$) Si f no fuera pseudoconvexa, existiría $[x, y] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y $z \in Afin\{x, y\} \bigcap \mathrm{Dom}(f)$ tal que f es constante en $[x, y]$ y $f(z) < f(x)$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in [z, y]$, entonces aplicando el teorema del valor medio a la función $f_{x,y-x}$ y a los puntos correspondientes a z y a y tenemos que existe $w \in]z, y[$ tal que $\langle \nabla f(w), w - x \rangle > 0$. Luego de (2) existe $(w_n) \subseteq]z, y[$ tal que $w_n \to y$ con $\langle \nabla f(w_n), w_n - x \rangle > 0$. Lo cual es una contradicción pues para n suficientemente grande, $w_n \in [x, y]$, pero $f_{x,y-x}$ es constante en $[0,1]$ y esto implica que $f'_{x,y-x}(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Por lo tanto f es pseudoconvexa.

Corolario 2.25 *[7] Sea $K \subseteq \mathcal{X}$, no vacío convexo abierto y $f : K \to \mathbb{R}$, función diferenciable en K, que satisface*

$$x, y \in K \text{ y } f(y) < f(x) \text{ implica } \langle \nabla f(x), y - x \rangle < 0$$

Entonces f es pseudoconvexa.

Prueba. El resultado se sigue directamente del teorema anterior y de la proposición 2.23.

2.5 Caracterización de funciones pseudoconvexas por medio de su subdiferencial

En esta sección daremos una caracterización de las funciones pseudoconvexas no diferenciables, aparecida en [3] por medio de su subdiferencial de Clarke Rockafeller, análoga a la que se dio en la subsección 1.8 para funciones cuasiconvexas y convexas.

Lema 2.26 *Para una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pseudoconvexa y semicontinua inferiormente se cumple:*

$$\exists x^* \in \partial f(x) : \langle x^*, y - x \rangle > 0 \text{ implica } f(z) < f(y) \text{ para todo } z \in [x, y[\tag{2.4}$$

Prueba. Por el lema 2.3 bastara probar que $f(x) < f(y)$. Supongamos que $f(y) \leq f(x)$, como f es particular cuasiconvexa por el teorema 1.84 el primer termino de (2.4) implica que $f(x) \leq f(y)$ y como f es pseudoconvexa concluimos que f es constante en $[x, y]$. Ahora como $\langle x^*, y - x\rangle > 0$, aplicando el lema 1.87 (1) tenemos que y es un mínimo local de f y por lo tanto un mínimo global, desde que de f es pseudoconvexa. De otro lado por lema 1.87(2), x no puedes ser un mínimo local, por lo tanto existe $w \in \mathcal{X}$ tal que $f(w) < f(x)$, lo que es una contradicción con el hecho de que $f(x) = f(y)$ e y es un mínimo global. Por lo tanto $f(x) < f(y)$.

Corolario 2.27 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, pseudoconvexa. Si para dos puntos distintos $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ la función f es constante en el segmento $[x, y]$, entonces para cualquier $z \in]x, y[$ y $z^* \in \partial f(z)$, se cumple que $\langle z^*, y - x\rangle = 0$.*

Prueba. Desde que f es constante en $[x, y]$, para cualquier $z \in]x, y[$ por lema 2.26 tenemos que $\langle z^*, x - z\rangle \leq 0$ y $\langle z^*, y - x\rangle \leq 0$, $\forall z^* \in \partial f(z)$. Esto implica que $\langle z^*, x - y\rangle \leq 0$ y $\langle z^*, y - x\rangle \leq 0$, $\forall z^* \in \partial f(z)$, . i.e. $\langle z^*, y - x\rangle = 0$ $\forall z^* \in \partial f(z)$, y el corolario esta probado.

Teorema 2.28 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función localmente lipschitziana. Entonces f es pseudoconvexa si y solamente si, se cumple lo siguiente*

$$\exists x^* \in \partial f(x) : \langle x^*, y - x\rangle > 0 \textit{ implica } f(z) < f(y) \textit{ para todo } z \in [x, y] \tag{2.5}$$

Prueba. $\Rightarrow$) Es directo del lema 2.26, ya que una función localmente lipschitziana es en particular semicontinua inferiormente.

$\Leftarrow$) Supongamos que (2.5) se cumple. Por el teorema 1.84 tenemos que f es cuasiconvexa. Si f no es pseudoconvexa, existen $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ y $z \in]x, y[$ tal que $f(x) < f(z) = f(y)$. Aplicando el teorema del valor medio de Lebourg al segmento $[x, z[$, obtenemos $w \in]x, z[$ y $w^* \in \partial f(w)$ tal que $\langle w^*, z - x\rangle = f(z) - f(x) > 0$, de aquí $\langle w^*, y - w\rangle > 0$. Ahora como $z \in]w, y[$ (2.5) implica que $f(z) < f(y)$, una contradicción. Por lo tanto f es pseudoconvexa.

A continuación damos el teorema principal de esta sección, el cual caracteriza a las funciones pseudoconvexas localmente lipschitzianas por la naturaleza de su subdiferencial.

Teorema 2.29 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función localmente lipschitziana. Entonces f es pseudoconvexa si y solamente si ∂f es "cuasipseudomonótono".*

Prueba. $\Rightarrow$) Si f es pseudoconvexa, en particular es cuasiconvexa y por lo tanto ∂f es cuasimonótono. Ahora sean $x, y \in \mathcal{X}$ y $x^* \in \partial f$ tales que $\langle x^*, y - x\rangle > 0$ el teorema 2.28 implica que $f(\frac{x+y}{2}) < f(y)$. Aplicando el teorema del valor medio de Lebourg, al segmento $[\frac{x+y}{2}, y]$ obtenemos $w \in]\frac{x+y}{2}, y[$ y $w^* \in \partial f(w)$ tal que

$$\frac{1}{2}\langle w^*, y - x\rangle = \langle w^*, y - \frac{x+y}{2}\rangle = f(y) - f(\frac{x+y}{2}) > 0,$$

luego por la proposición 1.22 tenemos lo deseado.
$\Leftarrow$) Como ∂f es cuasipseudomonótono en particular es cuasimonótono, y por lo tanto f es cuasiconvexa. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que f no es pseudoconvexa. Entonces existen $x, y \in \mathrm{Dom} f$ y $z \in]x, y[$ tal que $f(x) < f(z) = f(y)$. Como f es cuasiconvexa entonces debe ser constante en $[z, y]$. Aplicando el teorema del valor medio de Lebourg a este segmento, conseguimos $x_1 \in]x, y[$ y $x_1^* \in \partial f(x)$ con $\langle x_1^*, y - x\rangle > 0$. Como ∂f es cuasipseudomonótono existe $z_1 \in]z, y[$ y $z_1^* \in \partial f(z_1)$ tal que $\langle z_1^*, y - x\rangle > 0$ y de aquí $\langle z_1^*, y - z_1\rangle > 0$. Del lema 1.87(3) aplicado a $[z_1, y]$, para todo $w \in]z_1, y[$ y $w^* \in \partial f(w)$, $\langle w^*, y - x\rangle = 0$, lo cual es una contradicción, pues ∂f es cuasipseudomonótono.

Corolario 2.30 *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función localmente lipschitziana, que satisface*

$$x, y \in \mathcal{X} \text{ y } \exists x^* \in \partial f(x) : \langle x^*, yx\rangle \geq 0 \textit{ implica } f(x) \leq f(y).$$

Entonces f es pseudoconvexa.

Prueba. Del teorema 1.88 ∂f es pseudomonótono, en particular es cuasipseudomonótono. Luego del teorema anterior f es pseudomonótono.

2.6 Caracterización de las funciones pseudoconvexas por medio del cono normal a sus subconjuntos de nivel

En esta sección daremos una caracterización de las funciones pseudoconvexa, debida a [5] en términos de una multifunción asociada a estas, la llamada multifunción normal N_f, primero haremos la caracterización para las funciones cuasiconvexas y luego para las pseudoconvexas, mostrando al final de la sección que esta caracterización no puede ser utilizada cuando trabajamos con funciones convexas.

Para una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i, se define la multifunción normal $N_f : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ por

$$N_f(x) = \begin{cases} N_{S_{f(x)}}(x); & \text{si } x \in \mathrm{Dom}(f), \\ \emptyset; & \text{en otro caso} \end{cases};$$

donde $N_{S_{f(x)}}(x)$ es el cono normal de Clarke, de $S_{f(x)}(f)$ en el punto x.

Proposición 2.31 *Si $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i es cuasiconvexa, entonces*

$$N_f(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle y^*, y - x\rangle \leq 0 \textit{ siempre que } f(y) \leq f(x)\}$$

Prueba. Sea $A = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle y^*, y - x\rangle \leq 0$ siempre que $f(y) \leq f(x)\}$
Como f es cuasiconvexa y s.c.i. para cada $x \in \mathrm{Dom} f$, $S_{f(x)}(f)$ es convexo y cerrado, luego por la proposición 1.61

$$T_{S_{f(x)}}(x) = \overline{\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(S_{f(x)}(f) - \{x\})}. \tag{2.6}$$

Si $f(y) \leq f(x)$, entonces $y - x \in T_{S_{f(x)}}(x)$ y por lo tanto $\langle x^*, y - x\rangle \leq 0$, $\forall x^* \in N_{S_{f(x)}(f)}$, como y fue tomado arbitrariamente, esto implica que $N_f(x) \subseteq A$. Sea $x^* \in A$ y tomemos $d \in T_{S_{f(x)}}(x)$, de (2.6) existen una sucesiones $\lambda_n \downarrow 0$ y $\{y_n\} \subseteq S_{f(x)}(x)$ tal que $\lambda_n(y_n - x) \to d$, de donde

$$\langle x^*, d\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x^*, \lambda_n(y_n - x)\rangle \leq 0$$

como d fue cualquiera, esto muestra que $x^* \in N_f(x)$, también como x^* fue arbitrario se sigue que $A \subseteq N_f(x)$, y por lo tanto $A = N_f(x)$.

Lema 2.32 *Sea C un subconjunto cerrado no vacío de $\mathcal{X}$ y sea ψ su función indicador (i.e. $\psi(x) = 0$, si $x \in C$ y $\psi(x) = +\infty$ si $x \notin C$). Entonces*

(1) $N_{\psi_C}(x) = \partial\psi_C(x)$, para cualquier $x \in C$.

(2) Para cualquier $x \in C$ e $d \in \mathcal{X}$.Son equivalentes:

(a) $\psi^\uparrow(x, y - x) = +\infty$,

(b) $y - x \notin T_C(x)$,

(c) $\exists x^* \in N_\psi(x) : \langle x^*, y - x\rangle > 0$.

Prueba. (1) Observe que esto ya fue visto en el ejemplo 1.7; pues si $x \in C$ entonces $S_{\psi_C(x)}(\psi_C) = C$. (2) Del corolario, 1.68 tenemos que $\psi_C^\uparrow(x; d) = sup\{\langle x^*, d\rangle : x^* \in \partial\psi_C(x)\}$; lo que es equivalente por (1) a

$$\psi_C^\uparrow(x; d) = sup\{\langle x^*, d\rangle : x^* \in N_C(x)\}, \tag{2.7}$$

de donde se sigue por el lema 1.33 que

$$\psi_C^\uparrow(x, d) = \begin{cases} +\infty & \text{si } d \notin T_C(x), \\ 0 & \text{si } d \in T_C(x) \end{cases} \tag{2.8}$$

Luego de (2.8) y (2.7), se sigue directamente las equivalencias.

Teorema 2.33 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente. Considerando las siguientes afirmaciones*

1) f es una función cuasiconvexa.

2) $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, $x^* \in N_f(x)$ y $\langle x^*, y - x\rangle > 0$ implica $f(x) < f(y)$.

3) N_f es un operador cíclicamente cuasimonótono.

4) N_f es un operador cuasimonótono

Tenemos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). *Además si f es continua* (4) $\Rightarrow$ (1), *y por lo tanto las tres condiciones son equivalentes.*

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2) En efecto, si para algún $x^* \in N_f(x) = N_{S_{f(x)}}$ tenemos $\langle x^*, y - x\rangle > 0$, entonces $y - x \notin T_{S_{f(x)}}(x)$. Desde que $S_{f(x)}$ es convexo, el cono tangente de clarke $T_{S_{f(x)}}(x)$ coincide con el cono de Bouligand $\overline{\bigcup_{\lambda>0} \lambda(S_{f(x)} - \{x\})}$, luego y no puede ser un elemento de $S_{f(x)}(f)$, por lo tanto $f(x) < f(y)$. (2) $\Rightarrow$ (3) Sea $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ cualquier subconjunto finito de elementos de $\mathcal{X}$, supongamos que para $i \in \{1, 2 \cdots n\}$, existe $x_i^* \in N_f(x_i)$ tal que $\langle x_i^*, x_{i+1} - x_i\rangle > 0$ donde $x_{n+1} = x_1$, la hipótesis implicara $f(x_1) < f(x_2) < \cdots < f(x_{n+1}) = f(x_1)$, lo cual es una contradiccón, así N_f es ciclicamente cuasimonótono. (3) $\Rightarrow$ (4) obvio.

(3) $\Rightarrow$ (1)Por reducción al absurdo, supongamos que f no es cuasiconvexa, entonces para algún $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, la función ψ_{x_0} no es cuasiconvexa de donde por el teorema 1.84 tenemos que su subdiferencial $\partial\psi_{x_0}$ no es cuasimonótono, luego existe $x, y \in \mathrm{Dom}\psi_{x_0} = S_{f(x_0)}(f)$, $x^* \in \partial\psi_{x_0}(x)$ y $y^* \in \partial\psi_{x_0}(y)$ tales que

$$\langle x^*, y - x\rangle > 0 \text{ y } \langle y^*, x - y\rangle > 0. \tag{2.9}$$

lo que implica por el lema 2.32 que $\psi_{x_0}^{\dagger}(x, y - x) = +\infty$.

Afirmación. $f(x) = f(y) = f(x_0)$. Obviamente tenemos que $f(x) \leq f(x_0)$, pues

$x, y \in S_{f(x_0)}(f)$ Supongamos que $f(x) < f(x_0)$, entonces podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $f(u) < f(x_0)$ para todo $u \in B_\delta(x)$ de aquí se sigue que la función ψ_{x_0} es localmente constante en x, lo que contradice que $\psi_{x_0}^{\uparrow}(x, y - x) = +\infty$, por lo tanto $f(x) = f(x_0)$, procediendo de manera análoga tenemos que $f(x_0) = f(y)$. Ahora como $\psi_{x_0} = \psi_x = \psi_y$, x^* es un elemento de $\partial\psi_{x_0}(x) = \partial\psi_x(x)$ luego por el lema 2.32(a) $x^* \in N_f(x)$, e igualmente obtenemos $y^* \in N_f(y)$, lo que junto con (2.9) contradice la cuasimonotonicidad de N_f, por lo tanto f es cuasiconvexa; y la prueba esta completa.

Teorema 2.34 *[5] Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente y continua en su* Dom(f). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) f es una función pseudoconvexa.

2) $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, $x^* \in N_f(x)$ y $\langle x^*, y - x\rangle > 0$ implica $f(z) < f(y)$, $\forall z \in [x, y[$.

3) N_f es cuasipseudomonótono.

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que f es pseudoconvexa, por el teorema 2.33 N_f es un operador cuasimonótono. Sean $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, y $x^* \in N_f(x)$ tal que $\langle x^*, y - x\rangle > 0$; por el teorema 2.33(2) tenemos $f(x) < f(y)$. Tomemos $z \in]\frac{x+y}{2}, y[$. Por la pseudoconvexidad de f, $y \notin S_{f(z)}(f)$, también como $S_{f(z)}(f)$ es convexo y cerrado, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \cap S_{f(z)}(f) = \emptyset$, esto junto con la pseudoconvexidad de f nos lleva a:

$$\mathrm{conv}(\{z\} \cup B_\delta(y)) \bigcap S_{f(z)}(f) = \{z\}$$

de aquí $y - x \notin T_{S_{f(z)}(f)}(z)$ y por el lema 2.32 existe $z^* \in N_f(z)$ tal que $\langle z^*, y - x\rangle > 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que N_f es cuasipseudomonótono, entonces N_f es en particular cuasimonótono, luego por el teorema 1.35 f es cuasiconvexa. Sean

$x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, $x^* \in N_f(x)$ tal que $\langle x^*, y - x\rangle > 0$ aplicando el teorema 2.33 $f(x) < f(y)$, por hipótesis para cada $z_0 \in]x, y[$ fijo podemos hallar $z \in]x, y[$ y $z^* \in N_f(z)$ tal que $z_0 \in]x, z[$ y $\langle z^*, y - z\rangle > 0$, aplicando nuevamente el teorema 2.33 tenemos $f(z) < f(y)$ luego de la cuasiconvexidad de f; $f(z_0) < \max\{f(x), f(z)\}$ lo que implica $f(z_0) < f(y)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Es claro que (2) implica la condición (2) del teorema 2.33 y por lo tanto la cuasiconvexidad de f. Sean $x, y \in \mathrm{Dom} f$ tal que $x < f(y)$. demostraremos que para cualquier $z \in]x, y[$ $f(z) < f(y)$, como f es continua no hay pérdida de generalidad en suponer que $f(x) < f(z)$ para cualquier $z \in]x, y[$. Fijemos un elemento $\overline{z} \in]x, y[$ tal que $f(\overline{z}) < f(y)$ podemos otra vez suponer sin pérdida de generalidad que $f(\overline{z}) < f(z)$ para todo $z \in]\overline{z}, y[$. Desde que $S_{f(\overline{z})}$ es un subconjunto convexo cerrado, con interior no vacío podemos separar los conjuntos $S_{f(\overline{z})}$ y $]\overline{z}, y]$ luego existe $\overline{z}^* \in \mathcal{X}^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \overline{z}^*, z'\rangle \leq \alpha \leq \langle \overline{z}*, x'\rangle$ para todo $z' \in]\overline{z}, y]$ y todo $x' \in S_{f(\overline{z})}$ de aquí $\langle \overline{z}^*, \overline{z}\rangle = \alpha$ y podemos concluir entonces que $\overline{z}^* \in N_f(\overline{z})$ y por lo tanto $\langle \overline{z}^*, y - \overline{z}\rangle \geq 0$.

Si $\langle \overline{z}^*, y - \overline{z}\rangle > 0$ entonces por hipótesis $f(z) < f(y)$ para cada $z \in [\overline{z}, y]$, y combinando $f(x) < f(\overline{z})$ y la cuasiconvexidad de f conseguimos $f(z) \leq f(\overline{z}) < f(y)$ para cada $z \in [x, \overline{z}]$, luego $f(z) < f(y), \forall z \in [x, y]$ y la implicación estaría probada. Veamos que en efecto este es el caso; supongamos que $\langle \overline{z}^*, y\rangle = \langle \overline{z}^*, \overline{z}\rangle$ entonces también tenemos $\langle \overline{z}^*, x\rangle = \langle \overline{z}^*, \overline{z}\rangle$. De otro lado, para cualquier $u \in S_{f(\overline{z})}$, $\langle \overline{z}^*, u\rangle \leq \langle \overline{z}^*, \overline{z}\rangle$, de aquí, como x es un punto interior de $S_{f(\overline{z})}$ que maximiza $\langle \overline{z}^*, \cdot\rangle$, deducimos que $\langle \overline{z}^*, \cdot\rangle$ es constante en $S_{f(\overline{z})}$. Esto implica que $z^* = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\langle \overline{z}^*, y - \overline{z}\rangle > 0$.

Observación 2.4 *El siguiente ejemplo muestra que no se puede caracterizar a las funciones pseudoconvexas que solo son semicontinuas inferiormente por medio de su* *multifunción normal.*

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & si\ |x| + |y| \leq 1, \\ |y| - 2\sqrt{1-x^2} + 2 & si\ |x| \leq 1\ y\ x^2 + \frac{y^2}{4} > 1, \\ +\infty & si\ |x| > 1, \\ \dfrac{|y| + |x| - 1}{2\sqrt{1-x^2} - 1 + |x|} + 1 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Como los conjuntos de nivel de f *son convexos y cerrados, tenemos que* f *es semicontinua inferiormente y cuasiconvexa, también tenemos que en particular* f *es pseudoconvexa. Aunque el operador normal* N_f *no es cuasipseudomonótono. Por ejemplo tomando los puntos* $x = (1,0)$ *e* $y = (1,1)$ *tenemos* $N_f(y) = \{\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2\}$ *con* $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, U_1 =]1,-1[$ *y* $U_2 =]1,1[$ *mientras que* $N_f(y) = \mathbb{R}\{x\}$ *y* $\forall z \in]x,y]$, $N_f(z) = \mathbb{R}\{x\}$.

Capítulo 3

El Problema de Equilibrio

En esta sección extenderemos algunos de los resultados obtenidos en [1] y [10], considerando una hipótesis mas débil sobre la función considerada en el problema de equilibrio.

En lo que sigue $\mathcal{X}$ denotara un espacio de Banach real, K un subconjunto convexo, cerrado no vacío de $\mathcal{X}$ y $f : K \times K \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes hipótesis:

(f_1) $f(x,x) \geq 0$ para todo $x \in K$;

(f_2) $\forall x \in K$, la función $f(x,\cdot)$ es pseudoconvexa y semicontinua inferiormente;

(f_3) $f(\cdot,y)$ es hemicontinua superiormente, para todo $y \in K$.

Consideraremos el Problema de Equilibrio relativo a f,

$$PE: \text{ Hallar } \overline{x} \in K \quad \text{tal que} \quad f(\overline{x},y) \geq 0, \forall y \in K. \tag{3.1}$$

Para estudiar este problema, consideraremos el problema auxiliar de viabilidad convexa relativa a los siguientes conjuntos convexos, cerrados $F(y) = \{x \in K : f(y,x) \leq 0\}$ con $y \in K$, esto es:

$$PVC: \text{ Hallar } \overline{x} \in \bigcap_{y \in K} F(y) \tag{3.2}$$

El siguiente lema establece la relación existente entre el conjunto de soluciones del problema de viabilidad convexa 3.2, y del problema de equilibrio 3.1.

Lema 3.1 *El conjunto de soluciones del problema de viabilidad convexa 3.2 es un subconjunto del conjunto de soluciones del problema de equilibrio 3.1.*

Prueba. Sea $\overline{x}$ una solución de 3.2, e $y \in K$. Para $t \in (0,1)$ pongamos $x_t = ty + (1-t)\overline{x}$, Si $f(x_t, y) < 0 = f(x_t, x_t)$ para algún $t \in (0,1)$, la pseudoconvexidad de $f(x_t, \cdot)$ implicaría que $f(x_t, \overline{x}) > 0 = f(x_t, x_t)$, lo que es obviamente una contradicción; luego tenemos que $f(x_t, y) \geq 0$ para todo $t \in (0,1)$; haciendo $t \to 0$ de (f_3) podemos concluir que $0 \leq f(\overline{x}, y)$. Lo cual prueba que $\overline{x}$ es solución del problema de equilibrio 3.1.

Observación 3.1 *El recíproco del lema anterior no es cierto en general, para ver esto consideremos $X = \mathbb{R}$, $K = [0, a]$ y definamos*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & si\ x = 0, \\ -\frac{y}{x} + 1, & si\ x > 0. \end{cases}$$

El conjunto solución del problema de equilibrio es $\{0, a\}$ mientras que el conjunto solución del problema de viabilidad convexa es $\{a\}$.

Una condición que garantiza que el conjunto de soluciones del PE y del PVC coincidan es la siguiente :

(f_5) : Para todo $x, y \in K$; $f(x,y) \geq 0$ implica $f(y,x) \leq 0$; que a su vez es equivalente a

(f_5') : Para todo $x, y \in K$; $f(x,y) > 0$ implica $f(y,x) < 0$;

Proposición 3.2 *Si f satisface f_1, f_2 f_3 y f_5, entonces se cumple que:*
(f_4) : Para todo subconjunto finito $\{x_1, x_2 \cdots x_n\} \subseteq K$ y todo $z \in \text{conv}\{x_1, x_2 \cdots x_n\}$ se tiene que $\min_{1 \leq i \leq n}\{f(y_i, z)\} \leq 0$; las funciones que satisfacen esta propiedad son conocidas en la literatura como funciones diagonalmente cuasiconcavas.

Prueba. Supongamos que f no es diagonalmente cuasiconcava. Entonces existen $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq K$ y $z \in \text{conv}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, satisfaciendo $f(x_i, z) > 0$ para todo $i = 1, 2 \cdots, n$, lo que implica por f_5' que $f(z, x_i) < 0$ para todo $i \in \{1, 2 \cdots, n\}$. Ahora como $f(z, .)$ es cuasiconcava, $f(z, z) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{f(z, x_i)\}$. De desigualdades anteriores $f(z, z) < 0$, lo cual es una contradicción con f_1.

Proposición 3.3 *Bajo el contexto del problema 3.1. Si f satisface f_1-f_3 y f_5 entonces el problema de equilibrio 3.1 y el problema de viabilidad convexa 3.2, tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Prueba. Del lema 3.1 tenemos que el conjunto de soluciones del problema de viabilidad convexa, esta contenido en el conjunto de soluciones del problema de equilibrio. Ahora si $\overline{x}$ es una solución del problema de equilibrio, tenemos que $f(\overline{x}, y) \geq 0$ para todo $y \in K$; luego f_5 implicara que $f(y, \overline{x}) \leq 0$. Esto es, $\overline{x}$ es también una solución del problema de viabilidad convexa.

3.1 Resultados de Existencia

Daremos un primer resultado de existencia de solución del problema 3.2 cuando K es acotado en un espacio de Banach reflexivo.

Lema 3.4 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach reflexivo. Supongamos que K es acotado y que f satisface las condiciones f_1- f_4. Entonces el problema de viabilidad convexa 3.2 tiene por lo menos una solución.*

Prueba. Como los conjuntos $F(y) = \{x \in K : f(y,x) \leq 0\}$, son convexos, cerrados y acotados y por lo tanto débilmente compactos. Solo falta verificar la hip(2) del lema 1.19 para concluir que $\bigcap_{y\in K} F(y) \neq \emptyset$. Para esto tomemos cualquier subconjunto finito $\{y_1, y_2, \dots y_n\}$ de K y $z \in \text{conv}\{y_1, y_2, \dots y_n\}$. Por f_4 tenemos que $\min f(y_i, z) \geq 0$, de donde existe $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $f(y_i, z) \leq 0$, luego $z \in F(y_i)$. Esto prueba que F satisface la hip(2) y por lo tanto el lema esta probado.

Ahora considerando el problema de equilibrio 3.1, definimos la función *gap*, $g_f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$g_f(x) = \begin{cases} \sup_{y\in K} f(y,x) & \text{si} \quad x \in K, \\ +\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Lema 3.5 *La función gap g_f es no negativa, semicontinua inferiormente, además si para cada $x \in K$, $\sup_{y\in K} f(y,x)$ es alcanzado, g_f es también pseudoconvexa.*

Prueba. Para ver que g_f es no negativa, basta con observar que $f(x,x) = 0$ para todo $x \in K$, también como $f(y,\cdot)$ es semicontinua inferiormente para todo $y \in K$, entonces del lema 1.1 tenemos que $g_f(\cdot) = \sup_{y\in K} f(y,\cdot)$ es semicontinua inferiormente. Ahora supongamos que para cada $x \in K$ exista $y_x \in K$ con $g_f(x) = f(y_x, x)$, veamos que g_f es pseudoconvexa. Sean $x, \overline{x} \in \mathcal{X}$ y $z \in [x, \overline{x}]$ tal que $g_f(z) \geq g_f(x)$, si $g_f(z) = +\infty$ por lo que estamos suponiendo $z \notin K$ y si $g_f(x) < +\infty$, entonces $\overline{x}$ tampoco pertenece a K pues K es convexo, luego $g_f(z) \leq g_f(\overline{x})$. Supongamos entonces sin pérdida de generalidad que $x, \overline{x} \in K$ entonces para $z \in [x, \overline{x}]$ existe $z_0 \in K$ tal que $g_f(z_0) = f(z_0, z)$, luego $f(z_0, z) \geq g_f(x) \geq f(z_0, x)$ de aquí $f(y_0, z) \geq f(y_0, x)$ lo cual implica por la pseudoconvexidad de $f(z_0, \cdot)$ que $f(z_0, z) \leq f(z_0, \overline{x})$. Luego $g_f(z) \leq g_f(\overline{x})$ y por lo tanto g_f es pseudoconvexa.

En lo que sigue usaremos la siguiente notación

1) $m = \inf g_f(x)$

2) $M = \{x \in \mathcal{X} / g_f(x) = m\}$.

Observación 3.2 *M es el conjunto de minimizantes de g_f y m es el mínimo valor de g_f, si $M \neq \emptyset$.*

Teorema 3.6 *El Problema de Viabilidad convexa 3.2 tiene solución si y sólo si, $M \neq \emptyset$ y $m = 0$. Además M es el conjunto de soluciones de este problema.*

Prueba.

$\Rightarrow$) Sea x una solución del PVC 3.2, i.e. $f(y,x) \leq 0$, $\forall y \in K$, entonces $g_f(x) \leq 0$, luego como del lema 3.5 $g_f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $g_f(x) = 0$ esto es $m = 0$ y $x \in M$.
$\Leftarrow$) Tomemos $x \in M$ entonces por definición de g_f, $\sup_{y \in K} f(x,y) = 0$ pues $m = 0$, de aquí tenemos que $f(y,x) \leq 0 \forall y \in K$, por lo tanto x es solución del PVC 3.2.

Observación 3.3 *Cuando el problema de equilibrio no tiene solución puede ocurrir que $M \neq \emptyset$ (en este caso $m \neq 0$) o que $m = 0$ (en este caso $M = \emptyset$). Para ver un ejemplo del primer caso, considere $K = [0, +\infty[$ y $f(x,y) = -\frac{y}{x} + 1$, si $x > 0$ y $f(0,y) = 0$, en este caso $m = 1$ y $M = K$.*
Para ver el segundo caso, considere $K = \mathbb{R}$ y $f(x,y) = \exp y - \exp x$, en este caso $m = 0$ y $M = \emptyset$.

Definición 3.1 *Para cada subconjunto no vacío $K \subseteq \mathcal{X}$, definimos la aproximación asintótica de K por*

$$A(K) = \{\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} / K_n \subseteq core_K K_{n+1} \subsetneq K_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = K\}$$

Lema 3.7 *Consideremos el problema de equilibrio 3.1 con $A(K) \neq \emptyset$. Para cada $\{K_n\} \in A(K)$, la sucesión (g_f^n) donde $g_f^n : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es definida por:*

$$g_f^n(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in K_n} f(y,x), & si \quad x \in K, \\ +\infty, & en\ otro\ caso; \end{cases}$$

es una sucesión no-decreciente de funciones semicontinuas inferiormente propias. Además para todo $x \in K$, $g_f(x) = \lim_{n\to\infty} g_f^n(x)$.

Prueba. Aplicando el lema 3.5 con $K = K_n$, tenemos que g_f^n es semicontinua inferiormente y propia. Ahora como $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\sup_{y\in K_n} f(y,x) \le \sup_{y\in K_{n+1}} f(y,x) \le \sup_{y\in K} f(y,x)$ para cada $x \in K$, lo que es equivalente a $g_f^n(x) \le g_f^{n+1}(x) \le g_f(x)$, esto muestra a la vez que $\{g_f^n\}$ es no decreciente y esta acotada superiormente por g_f. Ahora veamos que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{g_f^n(x)\} = g_f(x)$ para cada $x \in K$. fijemos x y pongamos $\sup_{n\in N}\{g_f^n(x)\} = A$, por reducción al absurdo supongamos que $A < g_f(x)$ entonces para $\varepsilon = \dfrac{g_f(x) - A}{2}$ tenemos que existe $y \in K$ tal que

$$f(y,x) \ge g_f(x) - \varepsilon$$

y como $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ también existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in K_n$ luego

$$A \ge g_f^n(x) \ge f(y,x) \ge g_f(x) - \varepsilon = \frac{g_f(x) + A}{2}$$

y de aquí $A \ge g_f(x)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto el lema esta probado.

Observación 3.4 *Consideremos el problema de equilibrio 3.1 con* f *satisfaciendo* f_1-f_5 *y una sucesión de conjuntos* $\{K_n\} \in A(K)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* $y \in K$, *definimos* $F_n(y) = \{x \in K_n : f(y,x) \le 0\}$ *observemos que* $\bigcap_{y\in K_n} F_n(y) \subseteq \{x \in K : f(x,y) \ge 0, \forall y \in K\}$ *i.e. cada solución del Problema de viabilidad convexa restringido a* K_n *es solución del problema de equilibrio restringido a* K_n.

Lema 3.8 *Si para algún* $n \in \mathbb{N}$ *y algún* $x \in \bigcap_{y\in K_n} F_n(y)$ *existe* $y \in core_K(K_n)$ *tal que* $f(x,y) \le 0$, *entonces* x *es solución del problema de equilibrio.*

Prueba. Basta probar que $f(x,w) \ge 0$ para todo $w \in K \setminus K_n$, pues ya tenemos que $f(x,w) \ge 0$ para todo $w \in K_n$. Tomemos $w \in K \setminus K_n$ por definición de $core_K K_n$

existe $t \in]0,1[$ tal que $tw + (1-t)y \in K_n$, luego $f(x,y) \leq 0 \leq f(x, tw + (1-t)y)$. Ahora, de la pseudoconvexidad de $f(x,\cdot)$, $0 \leq f(x, tw + (1-t)y) \leq f(x,w)$ i.e. $0 \leq f(x,w)$, que era lo que queríamos probar.

Definición 3.2 *En el contexto del problema de equilibrio, la función gap g_f es llamada secuencialmente inf-compacta si existe una sucesión de subconjuntos convexos cerrados no vacíos $\{K_n\} \in A(K)$ tal que :*

1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcap_{y \in K_n} F_n(y) \neq \emptyset$.

2) M es no vacío.

3) Existe $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $\{x \in \mathcal{X} : g_f^i(x) < m\} \subseteq core_K(K_j)$

Teorema 3.9 *En el contexto del problema de equilibrio, si g_f es una función secuencialmente inf-compacta, entonces el problema de equilibrio tiene solución.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n \in \displaystyle\bigcap_{y \in K_n} F_n(y)$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in core_K K_n$, entonces por el lema 3.8 x_n es solución del problema de equilibrio. Ahora si para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K_n \setminus core_K K_n$, por el item 2 de la definición 3.2 tenemos que M es no vacío. Supongamos que $m > 0$, por el item 3 de la definición 3.2 tenemos que existe $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $\{x \in \mathcal{X} : g_f^i < m\} \subseteq core_K K_j$, tomando $n = \max\{i, j\}$ entonces $0 = g_f^n(x_n) \geq g_f^i(x_n) \geq m$, pues $x_n \notin core_K K_n$ contradiciendo el hecho de que $m > 0$, luego $m = 0$ y se tiene la afirmación aplicando el teorema 3.6.

Observación 3.5 *Supongamos que $\mathcal{X}$ es de dimensión finita. Sea $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, propia, pseudoconvexa tal que $h(x) = \lim_{n \to \infty} h_n(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$ donde $\{h_n\}$ es una sucesión no decreciente de funciones semicontinuas inferiormente, pseudoconvexas, propias definidas en $\mathcal{X}$ con valores en*

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Probamos en la proposición 1.55 que si h tiene un subconjunto de nivel compacto y no vacío, entonces para n suficientemente grande h_n tiene también un subconjunto de nivel compacto.*

Proposición 3.10 *Consideremos el problema de equilibrio con $\mathcal{X}$ de dimensión finita y K un subconjunto no vacío, cerrado, convexo y no acotado. Si f satisface f_5 y M es no vacío y compacto, entonces g_f es secuencialmente inf-compacto.*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $K_n = \{x \in K : \|x\| \leq n\}$(sin pérdida de generalidad supongamos que $K_n \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$). Entonces $\{K_n\} \subseteq A(K)$ es una sucesión de conjuntos convexos compactos. el item 1 de la definición 3.2 se sigue del lema 3.1, el item 2 es precisamente la hipótesis de que $M \neq \emptyset$ y el item 3, de la observación anterior.

Ahora consideremos el problema de equilibrio, en un espacio de Banach real reflexivo y f satisfaciendo f_1- f_5. introduzcamos la siguiente condición:
f_6: Para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K \setminus \{0\}$ satisfaciendo:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$

2) $\frac{x^k}{\|x^k\|}$ converge débilmente a un elemento x, que satisface $f(y, x+y) \leq 0$, para todo $y \in K$, existe una sucesión $\{u_n\}_{n\in K} \subseteq K$ tal que para m suficientemente grande:

   (a) $\|u_n\| < \|x_n\|$,

   (b) $f(x_n, , u_n) \leq 0$,

Bajo las siguientes condiciones han sido dados resultados de existencia para el problema de equilibrio,

(C_1) Una función $f : K \times K$ se dice que es $1-$*coercitiva* en K si existe un subconjunto compacto L de $\mathcal{X}$ y $y_0 \in L \cap K$ tal que para cada $x \in K \setminus L$, $f(x, y_0) < 0$. [14]

(C_2) Una función $f : K \times K$ se dice que es $2-$*coercitiva* en K si existe un conjunto compacto $C \subseteq K$ tal que para cada $x \in C \setminus core_{K_C}$, existe $a \in core_K C$ tal que $f(x, a) \leq 0$.[9]

La siguiente proposición muestra que la relación existente entre los conceptos de $1-$*coercitiva* y $2-$*coercitiva*, con la condición f_6.

Proposición 3.11 *Para una función $f : K \times K \to \mathbb{R}$ tenemos que si f es 1-coercitiva o 2-coercitiva, entonces f satisface f_6.*

Prueba. Sea $x_n \subseteq K \backslash \{0\}$ con $\|x_n\| \to +\infty$ y $\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightharpoonup x$, satisfaciendo $f(y, x+y) \leq 0$. Si f es 1-coercitiva, entonces por definición existe un subconjunto compacto C e $y \in C \cap K$ tal que $f(x, y) < 0$ para todo $x \in K \setminus C$, tomando $u_n = y \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que se satisface (a) y (b) de f_6.
Si f es 2-coercitiva, por definición existe $x \in K$ tal que $f(y, x) \leq 0 \forall y \in K$, ahora basta tomar $u_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y esta sucesión cumple con lo requerido en f_6. La recíproca de la proposicón anterior no es cierta en general, como lo muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.1 *Consideremos $K = \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = h(y) - h(x)$ con h definida por* $h(x) = \begin{cases} x, & \textit{si } x > 0, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$

Como para todo $y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $y - x > 0$ y es equivalente a $f(x, y) > 0$ en particular f no es 1-coercitiva.
Pero es f satisface las condiciones f_1- f_6.

Ejemplo 3.2 *Consideremos $K = [0, +\infty[$ y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y - x$. En este caso f no es 2-coercitiva.*
Pero es f satisface las condiciones f_1- f_6.

Como se vio en los ejemplos (3.1) y (3.2), $1-coercividad$ y $2-coercividad$ no son condiciones necesarias para que el problema de equilibrio tenga solución, el siguiente resultado muestra que este no es el caso para f_6 i.e. f_6 es una condición necesaria y suficiente para que el problema de equilibrio tenga solución.

Teorema 3.12 *La condición f_6 es una condición necesaria y suficiente para que el problema de equilibrio tenga solución.*

Prueba. Necesidad: Consideremos $x_n \subseteq K \setminus \{0\}$ con $\|x_n\| \to +\infty$ y $\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightharpoonup x$, satisfaciendo $f(y, x+y) \leq 0$. Sea w una solución del problema de equilibrio, tomando $u_n = w \forall n \in \mathbb{N}$ obtenemos a y b de f_6.
Suficiencia: Del lema 3.4 tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ $\bigcap_{y \in K_n} F_k(y) \neq \emptyset$, tomemos $x_n \in \bigcap_{y \in K} F_n(y)$ y consideremos dos casos:

1) Si $\|x_n\| = k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $y \in K$ fijo, tomando $m > \|y\|$ tenemos $f(y, x_n) \leq 0$ para todo $n \geq m$ y como de f_2 $f(y, , \cdot)$ es en particular cuasiconvexa

$$f(y, (1 - \frac{1}{\|x_n\|})y + \frac{1}{\|x_n\|}x_n) \leq \max\{f(y, y), f(y, x_n)\} \leq 0; \ \forall n \geq m. \quad (3.4)$$

Ahora como $(1 - \frac{1}{\|x_n\|})y + \frac{1}{\|x_n\|}x_n) \rightharpoonup y + x$ de 3.4 y de la observación 1.12, $f(y, y + x) \leq 0$. Luego por f_6 existe $\{u_n\} \subseteq K$ tal que para k suficientemente grande $\|u_k\| < \|x_k\|$ y $f(x_k, u_k) \leq 0$, de la primera desigualdad por la proposición 1.16 tenemos que $u_k \in core_K K_n$ y por el lema 3.8 concluimos que u_k es solución del problema de equilibrio.

2) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| < n$ entonces nuevamente por la proposición 1.16 $x_n \in core_K K_n$ y por el lema 3.8, x_n es solución del problema de equilibrio.

3.1.1 EL Problema de Minimización Pseudoconvexo.

En esta sección estamos interesados en ver el problema de minimización de una función pseudoconvexa semicontinua inferiormente $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

$$\text{MP}: \quad \text{Hallar } x_0 \in K \text{ tal que } h(x_0) \leq h(x), \text{ para todo } x \in K.$$

Para esto tomaremos $K = \text{Dom}(h)$ y $f(x,y) = h(y) - h(x)$, $\forall x, y \in K$. Veamos que f así definida satisface f_1,f_2,f_3 y f_5.

- $f(x,x) = h(x) - h(x) = 0$.
- $f(x,\cdot) = h(\cdot) - h(x)$, para cada $x \in K$ es pseudoconvexa y semicontinua inferiormente, desde que h es semicontinua inferiormente y pseudoconvexa.
- $f(y,\cdot) = h(y) - h(\cdot)$ es semicontinua superiormente, pues $-h$ es semicontinua superiormente.
- Claramente se satisface también f_5 pues $f(x,y) = -f(y,x)$.

Proposición 3.13 *Con respecto a este problema se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) La función gap g_f, de la definición 3.3 se reduce a

$$g_f(x) = \begin{cases} h(x) - \inf\limits_{y \in K} h(y), & si\ x \in K = \text{Dom}(h), \\ +\infty, & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{3.5}$$

2) Si h es acotada inferiormente, entonces $m = \inf\limits_{x \in \mathcal{X}} g_f(x) = 0$, *3) Si $\emptyset \neq M = \{x \in \mathcal{X} : g_f(x) = m\} \neq \mathcal{X}$, entonces h es acotada inferiormente.*

Prueba. 1. De la definición de $g_f(x)$ y f tenemos

$$\begin{aligned} g_f(x) &= \sup_{y\in K} f(x,y) \\ &= \sup_{y\in K}\{h(x) - h(y)\} \\ &= h(x) + \sup_{y\in K}\{-h(y)\} \\ &= h(x) - \inf_{y\in K} h(y). \end{aligned}$$

2. Si $\alpha = \inf\limits_{y\in K} h(y)$, entonces 3.3 queda como

$$g_f(x) = \begin{cases} h(x) - \alpha, & \text{si } x \in K = \mathrm{Dom}(h), \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.6}$$

luego

$$\begin{aligned} m &= \inf_{x\in K} g_f(x) \\ &= \inf_{x\in K}\{h(x) - \alpha\} \\ &= \inf_{x\in K} h(x) - \alpha = 0.(\text{ pues } \alpha \text{ es una constante.}) \end{aligned}$$

3. Por reduccción al absurdo supongamos que h no es acotado inferiormente, entonces $\inf_{y\in K} = -\infty$ luego por 3.5 $g_f(x) = +\infty\ \forall x \in \mathcal{X}$, de esto concluimos que $m = +\infty$ y $M = \mathcal{X}$. Lo cual es una contradicción, pues por condición $M \neq \mathcal{X}$.

Teorema 3.14 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio e Banach reflexivo, entonces*

1) Si $X \neq M \neq \emptyset$; el conjunto M de minimizantes de la función gap g_f coincide con el conjunto de soluciones del problema de minimización pseudoconvexa.

2) Si $M \neq \emptyset$ y M es acotado; $V = \{x \in \mathcal{X} : h(z + x) \leq h(z) \text{ para todo } z \in K\} = \{0\}$.

Prueba. 1. Por 3.13 tenemos que $m = 0$, luego por el teorema 3.6 M es el conjunto de soluciones del PVC que en este caso obviamente coincide con el conjunto de soluciones del problema de minimización. 2. Tomemos $x \in V$ i.e. $h(z + x) \leq h(z)$ para todo $z \in K$. Luego $z + x \in K$ para todo $z \in K$ y de aquí $h(z + 2x) = h((z + x) + x) \leq h(z + x) \leq h(z)$ para todo $z \in K$, esto implica que $2x \in V$, procediendo de la misma manera obtenemos que $nx \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomemos ahora $w \in M$, es to es $m \leq h(w + nx) - \inf_{y \in K} h(y) \leq h(w) - \inf_{y \in K} h(y) = m$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por lo tanto $w + nx \in M \, \forall n \in \mathbb{N}$ y como M es acotado necesariamente $x = 0$.

Teorema 3.15 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de dimensión finita, C un subconjunto cerrado, convexo no vacío de $\mathcal{X}$ y $h : \mathcal{X} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, una función propia, pseudoconvexa y semicontinua inferiormente. Si el siguiente problema*

$$(PA): \text{ Encontrar } x \in \mathcal{X} \text{ tal que } \|x\| = 1 \text{ y } h(x + y) \leq h(y) \, \forall y \in C$$

no tiene solución, entonces el problema $\min_{x \in C} h(x)$ *tiene solución.*

Prueba. Tomemos $K = \mathrm{Dom}(h) \cap C$. Si $K = \emptyset$ entonces la afirmación se cumple trivialmente pues $h(x) = +\infty$ para todo $x \in C$. Si $K \neq \emptyset$ definamos $f(x, y) = h(y) - h(x)$ para todo $x, y \in K$. Entonces como ya habíamos visto anteriormente, una función asídefinida satisface f_1- f_4. Ahora si (AP) no tiene solución, entonces la condición (2) de f_7 nunca ocurre, luego f_7 se satisface por vacuidad y el resultado se sigue del teorema 3.12.

3.1.2 El Problema de Desigualdad Variacional

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach real y K un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de $\mathcal{X}$. Dada una correspondencia $T : K \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ con valores no vacíos, que satisface las siguientes condiciones

(T_1) $T(x)$ es un conjunto compacto en la topología débil estrella.

(T_2) T es débilmente hemicontinua superiormente.

(T_3) T es propiamente cuasimonótono.

El **Problema de Desigualdad Variacional relativo a** T (denotado *VIP*[1]) es

$$\begin{array}{ll} \text{VIP}: & \text{Hallar } x_0 \in K \text{ tal que} \\ & \text{para todo } x \in K, \text{ existe } x^* \in T(x_0) : \langle x^*, x - x_0 \rangle \geq 0. \end{array}$$

Definiendo $f : K \times K \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \max_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle;$$

observe que f esta bien definida, por la condición T_1 i.e. el máximoo siempre es alcanzado, y además tenemos que f satisface f_1 - f_4. En efecto:

1) $f(x,x) = \max_{x^* \in T(x)} \langle x^*, x - x \rangle = 0$.

2) $f(x,.)$ es semicontinua inferiormente y convexa, al ser el máximo de funciones convexas semicontinuas inferiormente.

3) Probemos que $f(.,y)$ es hemicontinua superiormente para todo $y \in K$. Sean $x \in K$ fijo arbitrario y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) < \lambda$, por definición entonces $\max_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle < \lambda$ tomemos $V = \{w^* \in \mathcal{X}^* : \langle w^*, y - x \rangle < \lambda\} = \varphi_{y-x}^{-1}(-\infty, 0)$ una vecindad débil de $T(x)$. Como T es hemicontinua superiormente, existe $\eta > 0$ tal que para todo z con $\|z - x_0\| < \eta$ y $z \in [x,y]$, se tiene $T(z) \subseteq V$; Luego como para todo $z^* \in T(z)$

$$\begin{aligned} \langle z^*, y - z \rangle &= \langle z^*, y - (\lambda x + (1-\lambda)y) \rangle \\ &= \langle z^*, \lambda(y - x) \rangle \\ &= \lambda \langle z^*, y - x \rangle < 0, \end{aligned}$$

[1] Por sus siglas en inglés, *Variational Inequality Problem*

tenemos $f(z,y) = \max_{z^* \in T(z)} \langle z^*, y - z\rangle < 0$ para todo $z \in B_\eta(x) \cap [x, y]$. Por lo tanto f es hemicontinua superiormente.

4) Veamos que f es diagonalmente cuasiconcava. Sea $\{x_1, x_2, \cdots x_n\} \subseteq K$ y $z \in \text{conv}\{x_1, x_2 \cdots, x_n\}$. Como T es propiamente cuasimonótono existe $1 \leq i \leq n$ tal que $\langle x^*, z - x_i\rangle \leq 0$ para todo $x^* \in T(x_i)$, luego de aquí $\max_{\{x^* \in T(x_i)\}}\langle x^*, z - x_i\rangle \leq 0$, o lo que es lo mismo $f(x_i, z) \leq 0$, luego $\min_{1 \leq n}\{f(x_i, y)\} \leq 0$ y por lo tanto f es diagonalmente cuasiconvexa.

Lema 3.16 *El conjunto de soluciones del problema de equilibrio asociado a T y el problema VIP tiene el mismo conjunto de soluciones.*

Prueba. Sea $\overline{x}$ una solución del problema de equilibrio, entonces

$$0 \leq f(\overline{x}, y) = \max_{x^* \in T(\overline{x})} \langle x^*, y - \overline{x}\rangle, \forall y \in K.$$

luego para cada $y \in K$, existe $x^* \in T(\overline{x})$ tal que $\langle x^*, y - \overline{x}\rangle \geq 0$, i.e. $\overline{x}$ es una solución del VIP. Recíprocamente si $\overline{x}$ es una solución del VIP, para cada $y \in K$ existe $x^* \in T(\overline{x})$ tal que $\langle x^*, y - \overline{x}\rangle \geq 0$, lo cual implica que

$$0 \geq \max_{x^* \in T(\overline{x})} \langle x^*, y - \overline{x}\rangle, \forall y \in K = f(\overline{x}, y),$$

y tenemos que $\overline{x}$ es una solución del problema de equilibrio asociado a T. El problema *VIP* está estrechamente relacionado con el problema de hallar $x_0 \in K$ tal que

$$\text{para todo } x \in K, x^* \in T(x) : \langle x^*, x - x_0\rangle \geq 0;$$

el cual es llamado **Problema Dual de Desigualdad Variacional** (DVIP[2]).

Observación 3.6 *El problema DVIP coincide con el problema de viabilidad convexa asociado a f. En efecto, $F(y) = \{x \in K : f(y, x) \leq 0\} = \{x \in K : \max_{\{} y^* \in$*

[2] *Dual Variational Inequality Problem*

$T(y)\}\langle y^*, x-y\rangle \leq 0\} = \{x \in K : \langle y^*, x-y\rangle \leq 0$ para todo $y^* \in T(y)\}$. Luego el problema de viabilidad convexa es equivalente a: Hallar $\overline{x} \in K$ tal que para todo $y \in K, y^* \in T(y)$, $\langle y^*, \overline{x}-y\rangle \leq 0$; que es precisamente el DVIP.

Proposición 3.17 *Bajo las hipótesis impuestas a T, el problema dual de desigualdad variacional DVIP tiene solución.*

Prueba. Directo de la observación anterior y del lema 1.19.

Teorema 3.18 *Si T satisface T_1 y además es pseudomonótono, entonces el conjunto de soluciones del problema DVIP y VIP coinciden.*

Prueba. Es fácil observar que la pseudomonótonicidad de T implica la pseudoconvexidad de f, implica que f satisfaga f_5, luego el resultado se sigue directamente del lema 3.16 y el teorema 3.6.□

En este trabajo, hemos abordado algunas propiedades generales de las funciones pseudoconvexas, propiedades algebraicas, de composición, de extremos relativos, etc. Sin embargo aún queda mucho por estudiar. Por ejemplo, es un hecho conocido que una función cuasiconvexa es continua en casi todo punto del interior de su dominio, por lo que esta propiedad se sigue cumpliendo en particular para una función pseudoconvexa. Nos preguntamos entonces, ¿existirá alguna propiedad adicional sobre el conjunto de puntos de discontinuidad de este tipo de funciones?.

Otra cuestión en la que estamos particularmente interesados es la de hallar condiciones suficientes para garantizar la existencia de mínimos de las funciones pseudoconvexas, cuando trabajamos sobre espacios vectoriales en los cuales no tenemos definida ninguna topología. Queda además abierta la pregunta, de si es posible caracterizar las funciones pseudoconvexas que sólo son semicontinuas inferiormente por medio de su subdiferencial.

Bibliografía

[1] Alfredo N. Iusem and Wilfredo Sosa Sandoval, New results for equilibrium problems,
Nonlinear Analysis 52, pp. 621-635, 2003.

[2] Barry Simon and Michael Reed, Methods of Modern Mathematical Physics,
Academic Press, inc.1980.

[3] Daiinilis, A. and Hadjisavas, Characterization of nonsmooth semistrictly quasiconvex and strictly quasiconvex functions,
J. Optimization Theory and Applications.102, pp.525-536, 1999.

[4] Daiinilis, A. and Hadjisavas, On Generalized Cyclically Monotone Operators and Proper Quasimonotonicity.
J. Optimization 47, pp.123-135, 2000.

[5] Didier Auseel and Daiinilis, Normal Characterization of Main Classes of Quasiconvex Functions.
Set-Valued Analysis 8, pp.219-236, 2000.

[6] Didier Aussel,Jean-Noël Corvellec, Mac Lassonde, Subdifferential Characterization of Quasiconvexity and Convexity,
Journal of Convex Analysis 1, pp. 195-201, 1994.

[7] Didier Aussel, Subdifferential Propertis of Quasiconvex and Pseudoconvex Function: Unified Approach,
Jota vol 97 N° 1 Abril. 15, pp. 29-45, 1998.

[8] Dunford and Schwartz,"Lineal Operators. Part 1: General theory ",
Wiley Interscience Publication, New York 1958.

[9] E. Blum and W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problems,
Math Student, 63 pp. 123-145, 1994.

[10] Fabián Flores-Bazán, Existence Theorems for generalized noncoercive equilibrium problems:the quasi-convex case,
SIAM J. OPTM. 11, pp. 675-690, 2000.

[11] Fabián Flores Bazán, Optimización y cálculo de variaciones sin convexidad: Una introducción,
Monografías del IMCA, N° 15.

[12] Frank H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis,
Wiley Interscience Publication, 1983.

[13] Hain Brezis, Análisis funcional y aplicaciones,
Alianza Editorial Masson, París, 1983.

[14] H.Brezis, L.Nirenberg, G. Stampacchia, Aremark on Ky Fan'minimax principle,
Boll. Un. Mat. Ital. 6, 1972 pp. 232-300.

[15] J. P. Crouzeix, Generalized Convexity and Generalized Monotonicity,
Monografías del IMCA, N° 17.

[16] J. P. Crouzeix, J. E. Martínez Legaz and M. Volle (editores)
Generalized Convexity, Generalized Monotonicity, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[17] Jean Pierre Crouzeix, Eladio Ocaña, Wilfredo Sosa; Análisis Convexo
Monografías del IMCA N° 33.

[18] J.-Penot and P.H. Quang, Generalized Convexity of functions and Generalized Monotonicity of Set-Value Maps,
J. Optimization Theory and Applications. 92, pp. 343-356, 1997.

[19] Jean Pierre Aubin, Optima and Equilibria,
Springer-Verlag,Berlin Heidelberg 1993.

[20] J. P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis,
Birkhäuser, Boston, Basel, Belin, 1990.

[21] Karamardian, S., and Schaible, S. ; Seven kinds of monotone maps,
J. Optimization Theory and Applications. 66, pp. 37-46, 1990.

[22] Ky Fan, A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem,
Math Annalen 142, pp. 305-319, 1961.

[23] Nicolas Hadjisavas, N. and Schaible, Quasimonotone Variational inequalities in Banach Spaces,
Journal of Optimization, Theory and Applications 90, pp.95-111, 1996.

[24] Nicolas Hadjisavas and Schaible, On Strong Psudomonotonicidad and (Semi)stric Quasimonotonicity J. Optimization Theory Appl.79, pp.139-155, 1993.

[25] Mangasarian O., Non linear programming, Mc Graw-Hill, New York, 1969.

[26] Mordecai Avriel, Walter E. Diewert, Siegfried Schaible, and Israel Zang, Generalized Concavity,
Mathematical concepts and methods in science and engineering, volume 36. Plenum Press- New York and London.

[27] R. T. Rockafellar, Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions, Can. J. Mat., Vol XXXII, N° 2, pp. 227-280,1980.

[28] Kreysing, E., Introductoty Funtional Analysis with applications. John-Wiley and Sons, 1980.

[29] Wilfredo Sosa Sandoval and Fabián Flores-Bazán, Existence of Solutions for noncoercive pseudomonotene equilibrium problems,
Math.Oper.Res., submittted.

[30] Wilfredo Sosa Sandoval, Comunicación personal.

[31] Yboon Garcia Ramos, "El lema de Ky Fan y algunas de sus aplicaciones" Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Ingienería, 2001.

[32] D. Zagrodny, Aprproximate Mean Value Theorem for Upper Subderivatives, Nonlinear Analysis 12, pp. 1413-1428, 1998.