

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**ANÁLISIS PARAMÉTRICO DEL COMPORTAMIENTO SÍSMICO  
DE DOMOS DE CONCRETO ARMADO DE GRAN LUZ**

**TESIS**

**Para optar el Título Profesional de:**

**INGENIERO CIVIL**

**RONNIE FERNANDO BARRERA PÉREZ**

**Lima- Perú**

**2012**

*A mis padres Fernando Barrera Argüelles y  
Janet Pérez Rojas, por su gran apoyo no solo a lo largo  
del desarrollo de esta tesis sino durante toda mi vida*

## **AGRADECIMIENTOS**

Esta tesis significa la culminación de una investigación que particularmente encontré interesante y provechosa; además, es el fin de mi travesía para obtener el Título Universitario. Esta tesis ha continuado hasta el final gracias al apoyo y aliento de numerosas personas a las cuales quisiera agradecer pues contribuyeron de alguna manera en ella.

En primer lugar quisiera agradecer a Dios por haberme dado una vida llena de felicidad.

Expreso mi más sincera gratitud a mi asesor Ph.D. Víctor Fernández-Dávila, pues esta investigación no hubiera sido posible sin sus consejos y apoyo continuo. Sus palabras de aliento y orientación me permitieron superar las dificultades que encontraba a lo largo del desarrollo de la tesis. Gracias por brindarme su tiempo y su amistad.

Parte de los resultados descritos en la presente tesis no habrían podido obtenerse sin la colaboración de la empresa MWH Perú. Agradezco por facilitarme gentilmente sus instalaciones para la utilización del programa ANSYS.

Agradezco también al Dr. Hugo Scaletti por sus sugerencias y comentarios finales.

Me gustaría extender mis agradecimientos a mis grandes amigos de la UNI con los cuales comencé conjuntamente el camino de la tesis. Gracias por su apoyo moral, los días de avance conjunto y por terminar cada uno su investigación y no recurrir al facilismo.

Por último y no por eso menos importante, agradezco a toda mi familia que siempre me mostró su aliento e inspiración desde el inicio hasta el final. A mi mamá, papá, hermanas, abuelos, tíos y tías que siempre estuvieron pendientes de mi avance. Mención especial merece mi tía Doris por su constante apoyo y motivación.

## ÍNDICE

	Pág.
<b>RESUMEN</b>	<b>3</b>
<b>LISTA DE TABLAS</b>	<b>4</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>5</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	<b>8</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>12</b>
<b>CAPÍTULO I: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA</b>	<b>13</b>
1.1 EL DOMO COMO SISTEMA ESTRUCTURAL	13
1.1.1 Proceso constructivo de domos de concreto armado	15
1.2 DISCRETIZACIÓN EN SISTEMAS ESTRUCTURALES	16
1.2.1 El concepto del Método de Elementos Finitos en estructuras tipo viga	17
1.2.1.1 <i>Funciones de desplazamiento</i>	19
1.3 FORMULACIÓN DE ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE SISTEMAS DE VARIOS GDL	21
1.4 PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE ELEMENTOS PRISMÁTICOS ELÁSTICOS	26
1.4.1 Matriz de rigidez	26
1.4.2 Matriz de masa	28
1.4.2.1 <i>Matriz de masas concentradas</i>	29
1.4.2.2 <i>Matriz de masas consistentes</i>	30
1.4.3 Matriz de amortiguamiento	31
<b>CAPÍTULO II: GENERACIÓN DE LA FAMILIA DE ESTRUCTURAS TIPO DOMO</b>	<b>33</b>
2.1 COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE DOMOS DE CONCRETO ARMADO	33
2.1.1 Comportamiento ante cargas axisimétricas	33
2.1.2 Comportamiento ante cargas asimétricas	37
2.2 PARÁMETROS GEOMÉTRICOS Y DINÁMICOS	40
2.3 FAMILIA REPRESENTATIVA DE DOMOS	45
2.4 DEFINICIÓN DE MODELOS ESTRUCTURALES DE ELEMENTOS FINITOS	48
2.4.1 Modelo SAP2000 de elementos FRAME	49
2.4.2 Modelo SAP2000 de elementos SHELL	52
2.4.3 Modelo SAP2000 de elementos SOLID	54
2.4.4 Modelo ANSYS con elementos sólidos	55
<b>CAPÍTULO III: MODELO ESTRUCTURAL PARAMÉTRICO</b>	<b>57</b>
3.1 INTRODUCCIÓN	57
3.2 DEFINICIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL	58
3.2.1 Hipótesis del modelo	69
3.2.2 Matrices estructurales del modelo propuesto	70

---

3.2.2.1	Matriz de rigidez del modelo domo	71
3.2.2.2	Matriz de masa del domo	77
<b>CAPÍTULO IV: ANÁLISIS SÍSMICO DE LOS MODELOS ESTRUCTURALES</b>		<b>78</b>
4.1	INTRODUCCIÓN	78
4.2	SOLICITACIONES SÍSMICAS	79
4.2.1	Superposición modal espectral	82
4.2.1.1	Espectro de diseño	83
4.3	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	85
4.4	RESPUESTAS DE INTERÉS	97
<b>CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>		<b>111</b>
5.1	INTRODUCCIÓN	111
5.2	MODELO ADIMENSIONAL	111
5.3	MÉTODO SIMPLIFICADO PARA EVALUAR RESPUESTAS SÍSMICAS	113
5.3.1	Función Período Fundamental	116
5.3.2	Función Desplazamiento Sísmico Máximo Probable	119
5.3.3	Función Fuerza Cortante Sísmica	126
5.3.4	Función Momento Flector Sísmico	130
5.4	VALIDACIÓN DEL MÉTODO	134
<b>CONCLUSIONES</b>		<b>137</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>		<b>141</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>		<b>142</b>
<b>ANEXOS</b>		<b>145</b>

## RESUMEN

En esta investigación se propone estimar las respuestas sísmicas elásticas de domos de concreto armado de gran luz mediante un modelo de elementos finitos más simple que los usualmente utilizados. Además se plantea un método simplificado para estimar el período fundamental de vibración así como tales respuestas sísmicas (desplazamientos, fuerzas cortantes y momentos flectores), el cual consiste en ecuaciones para cada respuesta, dependientes de los parámetros geométricos del domo y de las propiedades mecánicas del concreto.

El modelo consiste en representar a la estructura continua tipo domo, como una elemento vertical en voladizo (empotramiento perfecto en la base y libre en el extremo opuesto) de eje recto y de sección variable. Dicho elemento lo conforman un número determinado de elementos discretos tipo viga, los cuales están interconectados en un número finito de nudos. En tales nudos se consideran un total de dos grados de libertad (desplazamientos lateral y rotacional) y para representar las características inerciales del modelo se empleó el criterio de masas consistentes. Como sollicitación sísmica, se utilizó el espectro de diseño de pseudo-aceleraciones recomendado por la norma peruana de diseño sismorresistente. Las respuestas modales fueron combinadas tanto con la regla de combinación CQC como con la regla de combinación recomendada por la NTP E.030.

El resultado obtenido en este estudio fue aplicado a una familia de 10 domos de concreto armado, que representó la vasta cantidad de ellos. La precisión del modelo fue evaluada mediante la comparación con los resultados obtenidos por modelos de elementos finitos más sofisticados. Analizando los resultados se verificó que las deformaciones por cortante son relevantes en este tipo de estructura; además, el modelo proporciona resultados satisfactorios si se discretiza considerando 20 segmentos.

## LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1 Propiedades mecánicas del concreto armado	45
Tabla 2.2 Parámetro geométrico adimensional de domos hemisféricos	46
Tabla 2.3 Familia representativa de domos considerada	48
Tabla 4.1 Factores de sitio usados en el espectro de diseño	84
Tabla 4.2 Comparación del período fundamental de vibración empleando un número diferente de elementos discretos	87
Tabla 4.3 Comparación del desplazamiento elástico máximo probable en el ápice del domo empleando un número diferente de elementos discretos	89
Tabla 4.4 Comparación de la fuerza cortante en la base del domo empleando un número diferente de elementos discretos	91
Tabla 4.5 Comparación del momento flector en la base del domo empleando un número diferente de elementos discretos	94
Tabla 5.1 Factores de transformación de respuestas	113
Tabla 5.2 Comparación de períodos fundamentales entre las respuestas reales y las calculadas por el método simplificado	119
Tabla 5.3 Valores A, B y C correspondientes al ajuste de la curva normalizada de desplazamiento sísmico	121
Tabla 5.4 Máximos desplazamientos adimensionales	123
Tabla 5.5 Comparación de valores de máximos desplazamientos sísmicos dados por la Ec. (5.11) y valores reales	126
Tabla 5.6 Valores de la variable A correspondiente al ajuste de la curva normalizada de fuerzas cortantes sísmicas elásticas	127
Tabla 5.7 Máximas fuerzas cortantes adimensionales	129
Tabla 5.8 Comparación de valores de cortantes sísmicos elásticos dados por la Ec. (5.17) y los valores reales	130
Tabla 5.9 Valores de la variable A correspondiente al ajuste de la curva normalizada de momentos flectores sísmicos elásticos	131
Tabla 5.10 Máximos momentos flectores adimensionales	133
Tabla 5.11 Comparación de valores de momentos sísmicos elásticos dados por la Ec. (5.22) y los valores reales	134
Tabla 5.12 Características geométricas de los domos adicionales	135
Tabla 5.13 Validación de las Ecs. (5.6), (5.11), (5.17) y (5.22)	136

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Estructuras domo: (a) Silo para cemento, y (b) viviendas unifamiliares	14
Figura 1.2 Cimentación tipo anillo	15
Figura 1.3 Inflado de la membrana que dará forma al domo	16
Figura 1.4 Lanzado de concreto	16
Figura 1.5 Discretización de un sistema continuo	18
Figura 1.6 Grados de libertad considerados en una estructura plana	18
Figura 1.7 Desplazamientos virtuales debidos a un desplazamiento y giro unitarios en un nudo	20
Figura 1.8 Grados de libertad considerados en un elemento viga	21
Figura 1.9 Estructura tipo viga discretizada	23
Figura 1.10 Definición de coeficientes de rigidez	27
Figura 1.11 Masas concentradas en nodos estructurales	29
Figura 1.12 Par debido a la inercia rotacional	30
Figura 2.1 Esfuerzos membranales en un elemento cáscara de revolución	34
Figura 2.2 Estado membranal de esfuerzos en un domo	34
Figura 2.3 Flexión anular adicional en un domo debida a las condiciones de borde	35
Figura 2.4 Reacciones en el borde de un domo	36
Figura 2.5 Condiciones de apoyo en un domo para restringir el desplazamiento lateral	37
Figura 2.6 Distribución de cargas de viento sobre un domo	38
Figura 2.7 Variación de fuerzas de membrana debidas a cargas de viento a lo largo de un domo	39
Figura 2.8 Esfuerzos debidos a cargas sísmicas en una estructura cilíndrica y un domo	40
Figura 2.9 Tipos de estructuras domo: (a) Esféricos, (b) paraboloidales y (c) elipsoidales	41
Figura 2.10 Geometría de un diferencial de domo	42
Figura 2.11 Parámetros de un domo esférico	44
Figura 2.12 Domos esféricos: (a) Domo hemisférico, y (b) domo poco elevado	46
Figura 2.13 Grados de libertad en un elemento FRAME	50

---

Figura 2.14 Discretización del domo: (a) Elementos FRAME, y (b) sección transversal típica	51
Figura 2.15 Masas concentradas en el modelo de elementos FRAME	52
Figura 2.16 Formación de un elemento de cáscara plana	52
Figura 2.17 Domo modelado mediante elementos SHELL	53
Figura 2.18 Elemento SOLID de ocho nodos	54
Figura 2.19 Domo modelado mediante elementos SOLID	55
Figura 2.20 Elemento SOLID168 de ANSYS	56
Figura 2.21 Domo en ANSYS: (a) Modelo estructural, y (b) mallado del modelo	56
Figura 3.1 Modelamiento de domo hemisférico mediante elementos viga	61
Figura 3.2 Grados de libertad considerados en un elemento típico referido a su sistema de coordenadas locales $\{\dot{x}, \dot{y}\}$	62
Figura 3.3 Metodología de discretización del domo hemisférico	63
Figura 3.4 Parámetros geométricos globales y auxiliares del modelo simplificado	64
Figura 3.5 Grados de libertad del modelo planteado	65
Figura 3.6 Elementos finitos tipo viga generados: (a) De forma de zona esférica hueca, y (b) de forma de casquete esférico	71
Figura 3.7 Deformación de una fibra debida a un esfuerzo cortante: (a) Teoría elemental, y (b) teoría de Collignon	74
Figura 3.8 Variación del factor de cortante	76
Figura 4.1 Espectro inelástico de pseudo-aceleraciones aplicado a los domos	85
Figura 4.2 Desplazamientos laterales elásticos máximos en la familia de domos de gran luz	101
Figura 4.3 Fuerzas cortantes máximas probables en la familia de domos de gran luz	105
Figura 4.4 Momentos flectores máximos en la familia de domos de gran luz	109
Figura 5.1 Esquema resumen de una respuesta sísmica	115
Figura 5.2 Curva de ajuste de la Función Período fundamental dado por el modelo simplificado	117
Figura 5.3 Curva de corrección de la Función Período Fundamental	118
Figura 5.4 Curvas normalizadas correspondientes a desplazamientos sísmicos máximos probables	120

---

---

Figura 5.5 Ajuste de la variable A correspondiente a la curva normalizada de desplazamientos sísmicos	121
Figura 5.6 Ajuste de la variable B correspondiente a la curva normalizada de desplazamientos sísmicos	122
Figura 5.7 Ajuste de la variable C correspondiente a la curva normalizada de desplazamientos sísmicos	122
Figura 5.8 Curva de ajuste de máximos desplazamientos adimensionales	124
Figura 5.9 Curvas normalizadas correspondientes a fuerzas cortantes sísmicas elásticas	126
Figura 5.10 Ajuste de la variable A correspondiente a la curva normalizada de fuerzas cortantes sísmicas elásticas	128
Figura 5.11 Curva de ajuste de máximas fuerzas cortantes adimensionales	129
Figura 5.12 Curvas normalizadas correspondientes a momentos flectores sísmicos elásticos	131
Figura 5.13 Ajuste de la variable A correspondiente a la curva normalizada de momentos flectores sísmicos elásticos	132
Figura 5.14 Curva de ajuste de máximos momentos flectores adimensionales	133

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $A$  Área de la sección transversal. Variable literal de ajuste
- $b(y)$  Ancho de una sección transversal que varía en función de la posición  $y$
- $B$  Vector de influencia de aceleración de la base del sistema. Variable literal de ajuste
- $c_{ij}$  Coeficientes de influencia de amortiguamiento
- $C$  Matriz de amortiguamiento. Parámetro de amplificación sísmica del espectro de la NTP E.030. Variable literal de ajuste
- $dw$  Movimiento transversal relativo de una sección respecto a otra
- $\{d\}$  Vector de deformación elástica
- $D$  Desplazamiento sísmico máximo probable del domo
- $e$  Espesor del domo
- $e'$  Espesor de una sección tubular transversal al eje del domo
- $\{e\}$  Vector de desplazamientos nodales
- $E$  Módulo de elasticidad del material
- $ER$  Esbeltez del domo
- $f_i^D$  Fuerza de amortiguamiento
- $f_i^I$  Fuerza de inercia
- $f_i^S$  Fuerza elástica
- $F^D$  Vector de fuerzas de amortiguamiento
- $F^I$  Vector de fuerzas de inercia
- $F^S$  Vector de fuerzas elásticas
- $F_\varphi$  Fuerza de membrana en el domo
- $F_\theta$  Fuerza anular en el domo
- $FFD$  Función adimensional para desplazamiento sísmico probable
- $FFM$  Función adimensional para momento flector sísmico

---

$FFP$	Función adimensional para período fundamental
$FFV$	Función adimensional para fuerza cortante sísmica
$\mathcal{F}$	Relación entre la frecuencia angular del modo $i$ y la frecuencia angular del modo $j$
$G$	Módulo de corte
$h$	Posición a lo largo de la altura total del domo
$H$	Altura de cada elemento discreto del modelo
$i$	Número entero
$I$	Momento de inercia de la sección transversal
$j$	Número entero
$k_{ij}$	Coefficientes de influencia de rigidez
$K$	Matriz de rigidez
$K_{lat}$	Matriz de rigidez lateral
$L$	Longitud
$m$	Número de grados de libertad dinámicos
$m_{ij}$	Coefficientes de influencia de masa
$M$	Matriz de masa. Momento flector sísmico del domo
$n$	Número de elementos discretos en que se divide la zona esférica del domo
$N_{ai}$	Funciones de forma en la dirección longitudinal por encima y por debajo del eje neutro de la sección transversal del miembro
$N_b$	Funciones de forma relativas a deformaciones por flexión
$N_n$	Función de desplazamiento $n$
$N_s$	Funciones de forma relativas a deformaciones por corte
$[N]$	Matriz de funciones de desplazamiento
$P(x, t)$	Carga dinámica que varía con la posición y el tiempo
$q$	Número de esfuerzos y deformaciones asociadas al problema

---

---

$Q(y)$	Momento estático del área transversal de un elemento discreto
$r_i$	Radio interno de una sección tubular transversal al eje del domo
$R$	Radio de la sección media del domo
$R_c$	Radio de curvatura de la sección transversal
$R_e$	Radio externo del domo
$R_i$	Radio interno del domo
$(R)$	Factor de reducción sísmica
$S$	Fuerza cortante en el domo. Parámetro de suelo del espectro de la NTP E.030
$T_f$	Período fundamental del domo
$u_n$	Coordenada generalizada
$u(x)$	Deflexión en función de la posición
$\{u\}$	Vector desplazamiento
$U$	Parámetro de uso del espectro de la NTP E.030
$v$	Vector desplazamiento
$\dot{v}$	Vector velocidad
$\ddot{v}$	Vector aceleración
$v_g$	Desplazamiento del suelo
$\ddot{v}_g$	Aceleración del suelo
$v_i$	Desplazamiento transversal en el nudo $i$
$v_r$	Vector de desplazamiento de la estructura relativo al suelo
$V$	Volumen total. Fuerza cortante sísmica del domo
$x$	Variable aleatoria. Posición en el sistema de coordenadas globales
$\bar{x}$	Posición en el sistema de coordenadas locales
$z$	Distancia de la fibra de análisis al eje neutro de la sección transversal
$Z$	Parámetro de zona del espectro de la NTP E.030

---

---

$\beta$	Relación entre el radio interno y el radio externo de una sección tubular
$\gamma_{xy}$	Distorsión angular de una sección transversal sometida a un esfuerzo cortante
$\Gamma_i$	Factor de participación modal correspondiente al modo $i$
$\varepsilon$	Deformación unitaria
$\eta$	Parámetro adimensional sísmico
$\theta$	Ángulo que denota una posición a lo largo de un paralelo
$\theta_i$	Desplazamiento rotacional en el nudo $i$
$\mu$	Factor de corte
$\xi$	Razón de amortiguamiento del sistema
$\rho$	Densidad del concreto armado
$\sigma$	Esfuerzo normal
$\sigma_\varphi$	Esfuerzo normal a lo largo del meridiano de la cáscara de revolución
$\sigma_\theta$	Esfuerzo normal a lo largo del paralelo de la cáscara de revolución
$\nu$	Módulo de Poisson
$\Upsilon_{ij}$	Coefficiente de correlación modal con amortiguamiento constante en la regla de combinación CQC
$\varphi$	Ángulo que denota una posición a lo largo de un meridiano
$\phi$	Factor adimensional para cortante
$\Phi$	Matriz de formas de modo
$\chi$	Posición adimensional
$\Psi_{ki}$	Respuesta modal $k$ asociada al modo $i$
$\omega$	Frecuencia angular de vibración

## INTRODUCCIÓN

Las estructuras tipo domo, desde el punto de vista de la arquitectura, se han utilizado como cubierta de grandes luces debido a su rigidez y condición autoportante, en especial de modernos edificios y centros religiosos. En los últimos años son utilizados los domos de concreto armado denominados de gran luz, por tener grandes alturas en relación con la luz o distancia horizontal que cubren, como formas innovadoras en el desarrollo de silos; así como también, se aprovecha sus bondades estructurales y arquitectónicas en viviendas unifamiliares, colegios y coliseos. Sin embargo, la complejidad de su análisis, diseño y construcción limitan su uso a nivel mundial.

A pesar que existe una cantidad significativa de investigaciones analíticas sobre estructuras domo, enfocadas básicamente en su comportamiento estático y dinámico en vibración libre, hay una relativa escasez de estudios conducentes a la obtención de la respuesta dinámica de domos sometidos a cargas sísmicas severas que asegure un adecuado diseño de éstos. Por esta razón, la presente investigación propuso estudiar la respuesta sísmica elástica de domos de concreto armado de gran luz mediante un modelo simplificado; lo que permitirá, además de realizar un buen diseño, favorecer la evaluación de la vulnerabilidad sísmica de construcciones de concreto armado que cuenten en su configuración arquitectónica con este tipo especial de estructura.

En el primer capítulo se presenta una revisión de la teoría de elementos finitos unidimensionales y el planteamiento de ecuaciones del movimiento de sistemas de varios grados de libertad, en los cuales se basa el modelo planteado. Posteriormente, en el capítulo 2 se presenta una revisión del comportamiento estructural de los domos con el objetivo de plantear una familia que represente la totalidad del universo razonable de domos de gran luz. En el capítulo 3 se presenta la metodología y planteamiento del modelo simplificado para evaluar el comportamiento dinámico de domos de gran luz. En el capítulo 4 se presentan los resultados del análisis sísmico de los modelos simplificados y se comparan con los datos por modelos más sofisticados con el fin de calibrar el modelo. Finalmente, en el último capítulo se presenta un método simplificado que permite obtener las respuestas sísmicas en domos de concreto armado de gran luz que consiste en una serie de ecuaciones para cada una de las respuestas de interés.

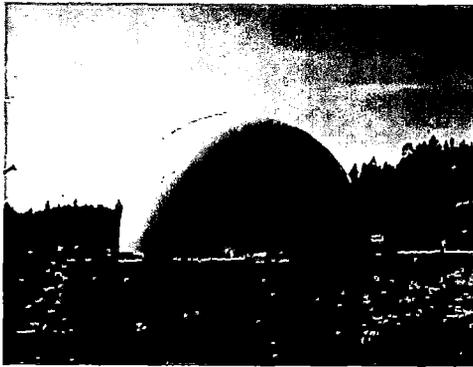
## CAPÍTULO I: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Los domos son elementos estructurales muy empleados como cubiertas de una variedad de estructuras debido a su versátil geometría y a su condición natural de estructura autoportante. Debido a la complejidad de su análisis y construcción, su uso ha sido limitado. Para el entendimiento de la metodología aplicada para simplificar el análisis de tales estructuras, en el presente capítulo se describirán los fundamentos principales tanto de discretización, como base del método de elementos finitos para estructuras continuas; así como, del análisis dinámico de sistemas de varios grados de libertad.

### 1.1 EL DOMO COMO SISTEMA ESTRUCTURAL

Dentro de la variedad de estructuras analizadas por los ingenieros existen aquellas denominadas cáscaras, que son los cuerpos limitados por dos superficies curvas, donde la distancia entre ellas es pequeña en comparación con las otras dimensiones. Ejemplos de estructuras cáscara son las usadas como cubiertas que envuelven grandes luces, tanques de agua, silos, etc. Estas formas son generalmente más atractivas que los diseños basados en elementos rectangulares. Sin embargo, no sólo las características estéticas son superiores sino que el comportamiento estructural usualmente es mejor.

Dentro de la familia de las estructuras cáscaras aparecen los domos o cúpulas que merecen un tratamiento especial pues es el tipo de cáscara más común, generalmente como cubierta de grandes luces, en especial de modernos edificios y centros religiosos. Últimamente vienen siendo utilizados como formas innovadoras en el desarrollo de silos (Fig. 1.1 (a)), así como también se aprovechan sus bondades estructurales y atractivo visual en viviendas unifamiliares (Fig. 1.1 (b)), colegios y coliseos.



(a)



(b)

*Figura 1.1 Estructuras domo: (a) Silo para cemento, y (b) viviendas unifamiliares*

Un domo se define como un elemento estructural autoportante que se asemeja a la mitad superior de una esfera hueca, que está considerado como la forma más favorable a nivel de resistencia estructural. A través de la historia, el domo ha sido la forma arquitectónica escogida cuando se ha buscado eficiencia y resistencia dentro de una misma estructura. Desde un simple iglú que resiste tormentas en el ártico, hasta la imponente Capilla Sixtina, el domo ha sido utilizado en cada cultura y cada continente como la estructura más versátil que ha realizado el hombre.

A lo largo de la historia, los domos tenían limitaciones derivadas de los materiales de la época, no existiendo elementos adecuados para resistir las tracciones elevadas, problema resuelto en la actualidad mediante el empleo del concreto armado que permite realizar domos de pequeño espesor y con elevadas resistencias tanto a tracción como a compresión. En estos días, técnicas modernas de construcción y materiales utilizados han colocado al domo como la más versátil de todas las estructuras (Dome Technology).

Comparado con otras estructuras, los domos cubren grandes áreas con poca cantidad de materiales, área superficial y perímetro. Los domos de concreto resisten al fuego y cuentan con una configuración estructural capaz de resistir cualquier fuerza que la naturaleza les depare, como huracanes y movimientos sísmicos. No es de extrañar que los domos modernos de concreto estén experimentando una oleada de popularidad en todo el mundo debido a las razones expuestas.

### 1.1.1 Proceso constructivo de domos de concreto armado

Los domos de concreto modernos vienen siendo construidos mediante el método novedoso que utiliza una capa de espuma inflada como molde para darle la forma de semiesfera a la estructura. Variaciones en la tecnología de estas capas infladas se usaron por los inicios de los años 60s hasta finales de los 80s.

A finales de los 70s, David y Barry South desarrollaron un sistema que se ha convertido en el más utilizado en la actualidad, el cual consiste en rociar con poliuretano a la espuma, el cual otorga a la capa molde la rigidez requerida para soportar el peso del acero de refuerzo ubicado en el interior. De acuerdo a David South, luces en el rango de 30 m a 60 m son comunes encontrar, y luces por encima de esas cantidades hasta 300 m son factibles (Meyer y Sheer, 2005).

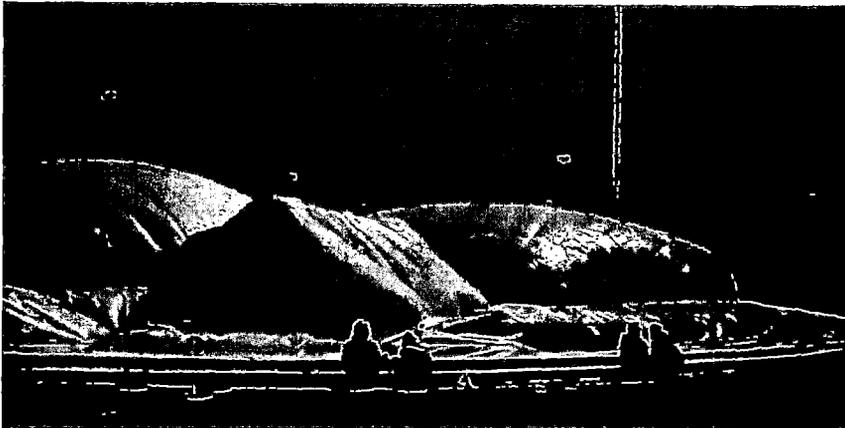
La cimentación de la estructura consiste en una viga tipo anillo de concreto armado que soporta el peso total del domo. Esta cimentación anillo es necesaria alrededor del perímetro pues trasladará las cargas muertas hacia el terreno. En la Fig. 1.2 se puede apreciar los dowels que se dejan para conectar el domo a la cimentación. Estos dowels se doblan hacia adentro para que no dañen la membrana que se instalará posteriormente.



*Figura 1.2 Cimentación tipo anillo*

Posteriormente a la construcción de la cimentación, se sujeta la membrana al anillo y se infla a través de dos o más ventiladores. Esta membrana formará la capa exterior de la estructura domo (Dome Technology) como se muestra en la Fig. 1.3. Una vez inflada la membrana, los dowels se regresan a su posición inicial y se rocía a la membrana con poliuretano formando una capa interior de espuma que le otorgará una rigidez inicial para que la malla de acero de refuerzo

colocada en la totalidad del área superficial del domo se pueda atar mediante alambres a la membrana.



*Figura 1.3 Inflado de la membrana que dará forma al domo*

El paso final en la construcción de domos de concreto involucra la aplicación de capas de shotcrete o concreto lanzado. Éste se aplica sobre toda la malla de acero colocada previamente (Fig. 1.4). El espesor del concreto armado se calcula para cada uso específico del domo. Domos ligeros consisten en únicamente una capa de acero y una capa de concreto lanzado. En cambio para domos pesados para almacenamiento podrían necesitar más capas de refuerzo y concreto.



*Figura 1.4 Lanzado de concreto*

## 1.2 DISCRETIZACIÓN EN SISTEMAS ESTRUCTURALES

Es muy difícil obtener soluciones exactas a problemas de la mecánica continua donde se tengan geometrías complicadas, cargas arbitrariamente colocadas y

materiales no homogéneos. Soluciones analíticas generalmente requieren la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, las cuales muchas veces no se obtienen para problemas complejos. Por estas razones se hace inevitable utilizar métodos numéricos para llegar a soluciones aceptables de las ecuaciones diferenciales del sistema estructural analizado. Estos métodos llegan a valores aproximados en puntos discretos. El proceso de modelar una estructura dividiéndola en un sistema equivalente de unidades más pequeñas (elementos finitos) interconectadas en puntos comunes a dos o más elementos (puntos nodales o nodos) y/o líneas y/o superficies de borde se le denomina discretización (Monolithic Dome).

Varios métodos de discretización han sido propuestos en estos últimos años para lidiar con la dificultad de resolver los problemas de la mecánica continua. Todos implican una aproximación que en el límite llega a la solución del problema continuo. En ingeniería usualmente se aproxima estos problemas intuitivamente creando una analogía entre los elementos discretos y porciones finitas de un dominio continuo (Zienkiewicz y Taylor, 2000). De esta analogía directa nace el término "elemento finito". El término es utilizado por primera vez por Clough, con el cual involucra el uso de una metodología estándar aplicada a sistemas discretos. Con el pasar de los años, ha avanzado el estudio de la discretización como solución de problemas de estructuras continuas donde el Método de Elementos Finitos (MEF) está considerado como el procedimiento de discretización general matemáticamente definido para tales problemas.

### 1.2.1 El concepto del Método de Elementos Finitos en estructuras tipo viga

Los elementos tipo barra representan componentes estructurales fundamentales en algunas aplicaciones de la ingeniería. En la Fig. 1.5 se muestra parte de una estructura dividida en una serie de elementos como ejemplo de un problema dinámico con elasticidad lineal. Como se dijo anteriormente, el análisis dinámico de un sistema continuo es obviamente complicado debido a las fuerzas inerciales resultantes de los desplazamientos que varían con el tiempo así como el hecho que la masa de la estructura está distribuida a lo largo de su longitud. Debido a esto, el análisis debe ser formulado en términos de ecuaciones diferenciales parciales pues la posición a lo largo de la luz y el tiempo deben ser tomados como variables independientes. Pero si se asume que la masa de la estructura mostrada está concentrada en puntos discretos, el problema analítico

se simplifica considerablemente pues las fuerzas inerciales se desarrollan sólo en esos puntos. Por otra parte si estas masas no están completamente concentradas, pues poseen una inercia rotacional finita, se estaría considerando el desplazamiento rotacional de los puntos.

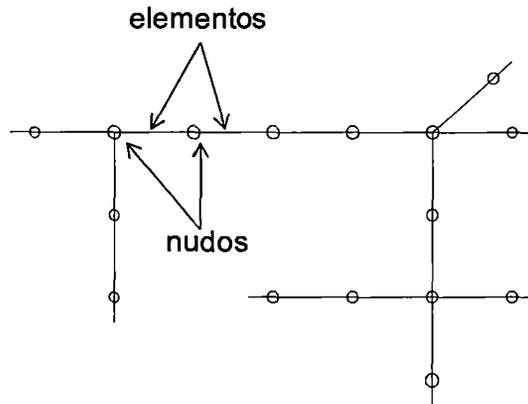


Figura 1.5 Discretización de un sistema continuo

De acuerdo a lo expresado, el Método de Elementos Finitos para elementos barra consiste en suponer la estructura dividida en una serie de elementos interconectados, de tamaño arbitrario, por puntos de unión denominados nodos. En cada nudo y en cada elemento se consideran los grados de libertad, en el caso dinámico, que representen los efectos de todas las fuerzas inerciales significantes de la estructura (Fig. 1.6).

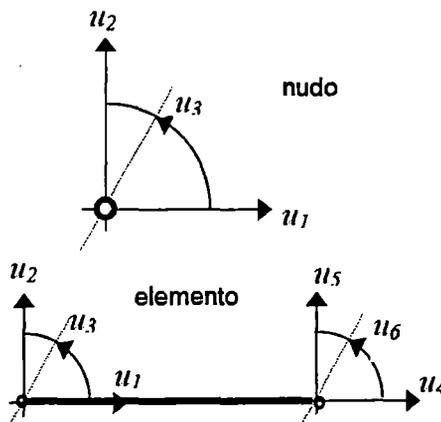


Figura 1.6 Grados de libertad considerados en una estructura plana

A lo largo del elemento se consideran distribuidas las propiedades de la barra (rigidez, amortiguamiento, inercia), así como las cargas, cuando sean distribuidas. En estos casos donde la masa está uniformemente distribuida es

preferible suponer que la deformada de la estructura se expresa como la suma de series de patrones de desplazamientos; éstos se convierten en ejes de coordenadas de desplazamiento de la estructura. Así la expresión para la deflexión dinámica de una estructura unidimensional se define en la Ec. (1.1), donde  $x$  denota los puntos de coordenadas de dicha estructura:

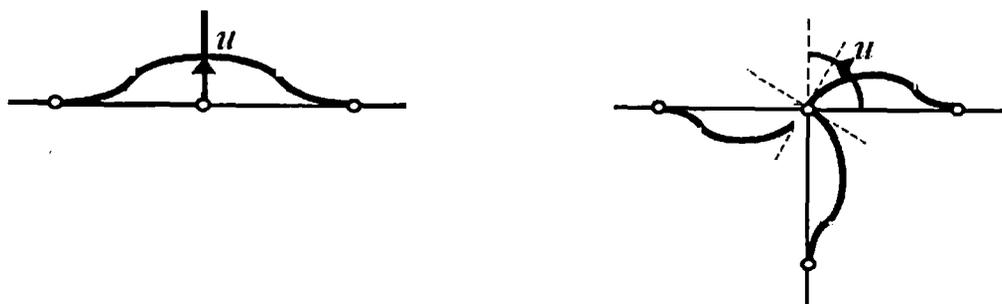
$$u(x) = \sum_n u_n N_n \quad (1.1)$$

Para cada función de desplazamiento, la forma resultante de la estructura depende las amplitudes  $u_n$ , denominadas como coordenadas generalizadas. El número de patrones de desplazamiento asumido representa el número de grados de libertad considerados en esta forma idealizada. De esta manera, el MEF no pretende reproducir en cada elemento las propiedades reales de la barra, sino que emplea en su lugar las llamadas funciones de aproximación o desplazamiento, las cuales serán las mismas en todos los problemas a resolver.

#### 1.2.1.1 Funciones de desplazamiento

Las funciones de desplazamiento son llamadas funciones de interpolación pues precisan la forma deformada mediante los desplazamientos de nodos específicos. Estas funciones se definen como la forma de desplazamiento de un miembro cuando un grado de libertad de ese miembro tiene un valor unitario y los otros son cero. Con dicha expresión, la función del desplazamiento de un sistema estructural puede ser relacionada a las funciones de desplazamiento de sus miembros componentes mediante coordenadas locales (miembro) y coordenadas globales (sistema).

Para el planteamiento de las funciones de desplazamiento, el MEF puede utilizar los trabajos virtuales, con desplazamientos virtuales unitarios como los mostrados en la Fig. 1.7, aplicados a los grados de libertad de la estructura, obteniendo así  $n$  ecuaciones para la solución del problema. Cada desplazamiento virtual sólo afecta a los elementos concurrentes al nodo correspondiente.



*Figura 1.7 Desplazamientos virtuales debidos a un desplazamiento y giro unitarios en un nudo*

En principio, cada función de desplazamiento podría ser cualquier curva la cual es internamente continua y satisface la condición geométrica impuesta por los desplazamientos nodales. Para elementos unidimensionales es conveniente usar las mismas formas que se producirían por los desplazamientos nodales en una viga uniforme (Clough y Penzien, 2003).

Przemieniecki derivó expresiones para las funciones de desplazamiento de elementos viga Timoshenko y Euler-Bernoulli. Consideremos un elemento viga plano de longitud  $l$ , donde cada nudo tiene 4 grados de libertad. El vector desplazamiento nodal  $\{e\}$  definido con respecto a los ejes del elemento se denota:

$$\{e\} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad v_1 \quad v_2]^T \quad (1.2)$$

Donde  $(\theta_1 \quad \theta_2)$  son los desplazamientos rotacionales, y  $(v_1 \quad v_2)$  son los desplazamientos transversales al eje de la viga. De acuerdo a la metodología estándar del MEF, la deformación elástica de un punto arbitrario del elemento viga se expresa como:

$$\{d\} = [N]\{e\} \quad (1.3)$$

Donde  $\{d\}$  representa el vector de deformación elástica del elemento y  $[N]$  es la matriz de funciones de desplazamiento usada para modelar las deformaciones del mismo. Se nota que las funciones de desplazamiento son espacialmente dependientes mientras que el vector de desplazamientos nodales es dependiente del tiempo. Las funciones de desplazamiento usadas para deformaciones por flexión tanto traslacionales como rotacionales son los

polinomios cúbicos de Hermite, que en adición a la continuidad, toman en cuenta efectos de deformación por cortante.

La teoría de vigas de Timoshenko se aplica cuando las dimensiones de la sección transversal de la viga no son pequeñas en comparación de su longitud. Ésta aplica a estructuras cuya vibración en flexión incluye los efectos de inercia rotacional, flexión y deformación por corte en el cálculo de las frecuencias naturales. Considerando esta teoría, se tienen las funciones de desplazamiento para un elemento viga basadas en los grados de libertad mostrados en la Fig. 1.8.

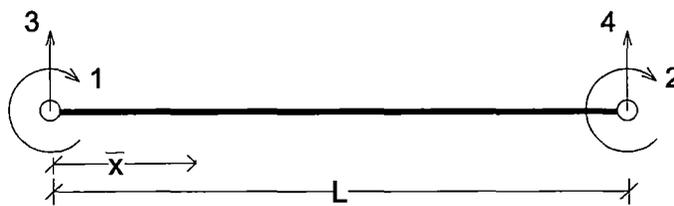


Figura 1.8 Grados de libertad considerados en un elemento viga

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{L}{1+\phi} \left[ r - r^2 \left( 2 + \frac{1}{2} \phi - r \right) + \phi r - \frac{1}{2} \phi r^* \right] \\
 N_2 &= \frac{-L}{1+\phi} \left[ \frac{1}{2} \phi + r^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \phi \right) - r^3 + \frac{1}{2} \phi (r - 1)^* \right] \quad (1.4) \\
 N_3 &= \frac{1}{1+\phi} \left[ -r^2 (3 - 2r) + 1 - \phi (1 - r)^* \right] \\
 N_4 &= \frac{1}{1+\phi} \left[ \phi + 3r^2 - 2r^3 - \phi (r - 1)^* \right]
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\phi = \frac{12EI}{G\mu AL^2} \qquad r = \frac{\bar{x}}{L} \qquad (1.5)$$

Estas funciones de desplazamiento comprenden efectos por flexión y corte, así la forma deflectada está influenciada por ambos efectos. Los términos marcados con asterisco (\*) son los desplazamientos asociados al cortante (Cheng, 2001).

### 1.3 FORMULACIÓN DE ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE SISTEMAS DE VARIOS GDL

El objetivo de un análisis dinámico es evaluar el desplazamiento a lo largo del tiempo de una estructura sujeta a cargas variables en el tiempo. En la mayoría de casos, un análisis aproximado donde se tenga un número limitado de grados

de libertad (GDL) proveerá suficiente precisión; así, el problema se reduce a determinar la variación en el tiempo de los desplazamientos de estos grados de libertad. Las expresiones matemáticas que definen los desplazamientos dinámicos se denominan ecuaciones del movimiento de la estructura, y la solución de estas ecuaciones de movimiento proporciona los desplazamientos requeridos variables en el tiempo.

La formulación de las ecuaciones del movimiento de un sistema dinámico es posiblemente la más importante, y a veces la más difícil, fase de todo el procedimiento correspondiente a un análisis dinámico.

Si las propiedades físicas del sistema son tales que su movimiento puede ser descrito por una sola coordenada y no es posible ningún otro movimiento, entonces estamos frente a un sistema con un grado de libertad y la solución de la ecuación del movimiento nos da como resultado la respuesta dinámica exacta. Por otra parte, si la estructura tiene más de un posible modo de desplazamiento y es reducida matemáticamente de forma aproximada a un sistema de un grado de libertad (SUGL) considerando su forma deformada, la solución de la ecuación del movimiento es sólo una aproximación del verdadero comportamiento dinámico de dicha estructura.

La calidad del resultado obtenido con la aproximación a un SUGL depende de algunos factores, principalmente de la distribución espacial de la estructura, además de cómo varían tanto la carga aplicada en el tiempo como las propiedades de masa y rigidez de la estructura. Si las propiedades físicas del sistema restringen la estructura a moverse más fácilmente con la forma asumida, asimismo la carga es tal que genera una respuesta significativa en esta forma; la solución dada considerando la estructura como un SUGL probablemente será una buena aproximación; de lo contrario, el comportamiento real no se asemejaría considerablemente a la respuesta hallada. Debido a esto, una de las más grandes desventajas de la aproximación de una estructura a un SUGL es la dificultad de evaluar la confiabilidad de los resultados obtenidos.

En general, un modelo de SUGL no describe adecuadamente la respuesta dinámica de una estructura. Usualmente la respuesta incluye variaciones de la forma de desplazamiento y su amplitud en el tiempo. Tal comportamiento sólo puede ser descrito en términos de más de una coordenada de desplazamiento;

por tanto, el movimiento deberá estar representado por más de un solo grado de libertad.

Para ilustrar el desarrollo de las ecuaciones del movimiento de un sistema de varios grados de libertad (SVGL), se presenta el sistema continuo mostrado en la Fig. 1.9 como un ejemplo de referencia.

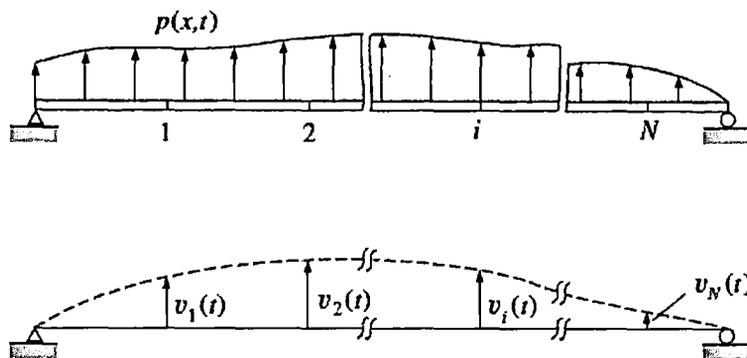


Figura 1.9 Estructura tipo viga discretizada

El movimiento de esta estructura estará definido por un conjunto de puntos discretos en la viga sobre los cuales consideraremos los desplazamientos transversales:  $v_1(t), v_2(t), \dots, v_i(t), \dots, v_n(t)$ . En principio, estos puntos se ubicarían arbitrariamente sobre la estructura; pero su ubicación debería estar asociada a características físicas específicas y se deberían distribuir a lo largo de la estructura para tener una buena definición de la deformada.

En la viga de la Fig. 1.9 se podrían asociar adicionalmente a cada punto otras componentes de desplazamiento; por ejemplo, la rotación  $dv/dx$  y el desplazamiento longitudinal podrían ser usados como grados de libertad adicionales.

La ecuación del movimiento del sistema se formula expresando el equilibrio de las fuerzas asociadas a cada grado de libertad. En general cuatro tipos de fuerzas estarán involucradas en cada punto  $i$ : la carga externa aplicada  $p_i(t)$  y las fuerzas resultantes del movimiento, que son, la inercia  $f_i^I$ , el amortiguamiento  $f_i^D$  y la elástica  $f_i^S$ . Así, se expresa el equilibrio dinámico para cada grado de libertad como:

$$f_1^I + f_1^D + f_1^S = p_1(t)$$

$$f_2^I + f_2^D + f_2^S = p_2(t) \quad (1.6)$$

⋮

$$f_n^I + f_n^D + f_n^S = p_n(t)$$

En forma matricial, se expresa:

$$F^I + F^D + F^S = P(t) \quad (1.7)$$

Esta expresión es la ecuación para un SVGL equivalente a un SUGL. Cada una de las fuerzas resistentes se expresa convenientemente mediante un apropiado conjunto de coeficientes de influencia. Por ejemplo, la componente de la fuerza elástica recuperadora en el punto  $i$  depende de las componentes de desplazamiento desarrolladas en todos los puntos de la estructura, resultando:

$$f_i^S = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \dots + k_{in}v_n \quad (1.8)$$

En esta expresión se ha considerado implícitamente que el comportamiento estructural es lineal; por tanto, se aplica el principio de superposición. Los coeficientes  $k_{ij}$  se les denominan coeficientes de influencia de rigidez, definidos como la fuerza correspondiente a la coordenada  $i$  debida a un desplazamiento unitario de la coordenada  $j$ .

En forma matricial, se expresa la matriz de fuerzas elásticas,

$$\begin{pmatrix} f_1^S \\ f_2^S \\ \vdots \\ f_i^S \\ \vdots \\ f_n^S \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

o simbólicamente,

$$F^S = K v \quad (1.10)$$

Donde la matriz de coeficientes  $K$  se denomina matriz de rigidez de la estructura y  $v$  es el vector desplazamiento representando la forma deformada de la estructura.

Si se supone que el amortiguamiento depende de la velocidad y que es de tipo viscoso, las fuerzas de amortiguamiento correspondientes a los grados de

libertad considerados se expresarían por medio de coeficientes de influencia de amortiguamiento de forma similar a las fuerzas elásticas. Por analogía de la Ec. (1.9), el conjunto completo de fuerzas de amortiguamiento es dado por:

$$\begin{pmatrix} f_1^D \\ f_2^D \\ \vdots \\ f_i^D \\ \vdots \\ f_n^D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{ni} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_i \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

En la cual,  $\dot{v}_i$  es la razón de cambio de la coordenada de desplazamiento  $i$  con respecto al tiempo (velocidad) y a los coeficientes  $c_{ij}$ , se les denomina coeficientes de influencia de amortiguamiento. Análogamente a la definición para los coeficientes de rigidez,  $c_{ij}$  es la fuerza correspondiente a la coordenada  $i$  debido a una velocidad unitaria en la coordenada  $j$ .

Simbólicamente,

$$F^D = C\dot{v} \quad (1.12)$$

Donde a la matriz  $C$  se le denomina matriz de amortiguamiento de la estructura (para los grados de libertad especificados) y  $\dot{v}$  es el vector velocidad.

Las fuerzas inerciales, debidas a la masa de la viga, se expresan similarmente por un conjunto de coeficientes de influencia denominados coeficientes de masa. Éstos representan la relación entre las aceleraciones de los grados de libertad y las fuerzas inerciales resultantes. Por analogía con la Ec. (1.9), las fuerzas inerciales se pueden expresar como:

$$\begin{pmatrix} f_1^I \\ f_2^I \\ \vdots \\ f_i^I \\ \vdots \\ f_n^I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ii} & \dots & m_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{ni} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \vdots \\ \ddot{v}_i \\ \vdots \\ \ddot{v}_n \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Donde  $\ddot{v}_i$  es la aceleración de la coordenada de desplazamiento  $i$  y los coeficientes  $m_{ij}$  son los coeficientes de influencia de masa, definidos como la fuerza correspondiente a la coordenada  $i$  debida a una aceleración unitaria de la coordenada  $j$ .

Simbólicamente, se puede escribir como:

$$F^I = M\ddot{v} \quad (1.14)$$

Donde  $M$  se denomina matriz de masa de la estructura y  $\ddot{v}$  es su vector aceleración, ambos definidos para el conjunto de coordenadas de desplazamiento especificadas.

Sustituyendo las Ecs. 1.10, 1.12 y 1.14 en la Ec. 1.7 da como resultado el equilibrio dinámico de la estructura, considerando todos los grados de libertad:

$$M\ddot{v}(t) + C\dot{v}(t) + Kv(t) = P(t) \quad (1.15)$$

Ésta es la ecuación del movimiento equivalente para un SVGL; donde cada término del SUGL está representado por una matriz. El orden de la matriz corresponde al número de grados de libertad usados para describir los desplazamientos de la estructura. Así, la Ec. (1.15) expresa las  $n$  ecuaciones del movimiento, las cuales sirven para definir la respuesta de un SVGL.

#### 1.4 PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE ELEMENTOS PRISMÁTICOS ELÁSTICOS

Como se ha visto, para la solución de la ecuación del movimiento de un problema dinámico son necesarias matrices con propiedades físicas del sistema analizado (rigidez, amortiguamiento y masa).

##### 1.4.1 Matriz de rigidez

Los coeficientes de influencia de rigidez definidos en la Ec. (1.9) representan físicamente las fuerzas desarrolladas en la estructura cuando un desplazamiento unitario es aplicado a un grado de libertad y se restringen otros desplazamientos nodales dentro de la estructura. Como se puede apreciar en la Fig. 1.10, los coeficientes de influencia de rigidez son numéricamente iguales a las fuerzas aplicadas para mantener la condición de desplazamientos especificada. Ellos son positivos cuando el sentido de la fuerza aplicada corresponde a un desplazamiento positivo y, negativos cuando éste está en el sentido contrario.

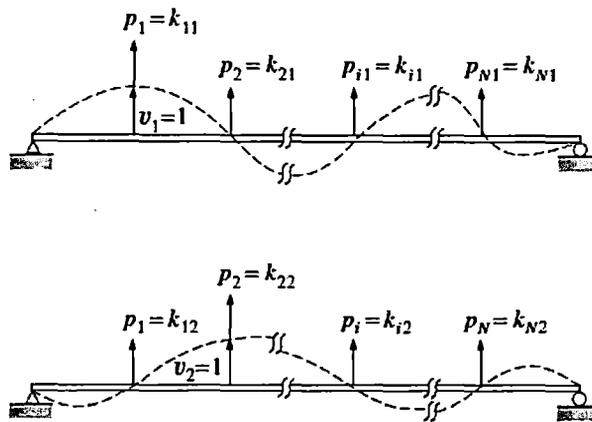


Figura 1.10 Definición de coeficientes de rigidez

Mediante la aproximación del MEF, la estructura es dividida en elementos discretos, los cuales están interconectados por un número finito de nodos. Las propiedades de la estructura completa son encontradas evaluando las propiedades de los elementos finitos individuales y superponiéndolos apropiadamente. Por tanto, el problema de definir las propiedades de rigidez de cualquier estructura se reduce básicamente a la evaluación de la rigidez de un elemento típico.

Para un elemento elástico típico tridimensional, los coeficientes de rigidez pueden formularse mediante el Teorema de la Energía como:

$$k_{ij} = \sum_q \int_V \sigma_i^q \varepsilon_j^q dV \quad (1.16)$$

Donde  $\sigma = \sigma(x)$  y  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  representan el esfuerzo y la deformación debidos a una carga unitaria, respectivamente; y el índice  $q$  denota el número de esfuerzos y sus deformaciones asociadas, tales como axial, flexión, corte y torsión. La integral se toma sobre el volumen total,  $V$ , del miembro. Esta formulación aplica a varios tipos de elementos finitos en la Mecánica Continua (Cheng, 2001).

Como desplazamiento virtual consideraremos uno de los  $u_j$  correspondientes a los GDL en los extremos del elemento, con valor  $u_j = 1$ . Con lo que, a lo largo del elemento corresponderá el desplazamiento virtual:  $u_j(x) = N_j(x)$ . En cuanto a las fuerzas internas, lo que hemos de considerar son las deformaciones virtuales correspondientes. Las deformaciones por flexión y corte para un miembro prismático Timoshenko se expresan como:

$$\varepsilon_b = \sigma/E = z/R_c = -N_b''z \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_s = N_s' \quad (1.18)$$

Reemplazando estas expresiones en la Ec. (1.16) para hallar los coeficientes de la matriz de rigidez:

$$k_{ij} = E \int_V \varepsilon_{bi} \varepsilon_{bj} dV + G \int_V \varepsilon_{si} \varepsilon_{sj} dV \quad (1.19)$$

Por tanto,

$$k_{ij} = E \int_V N_{bi}'' N_{bj}'' z^2 dV + G \int_V N_{si}' N_{sj}' dV \quad (1.20)$$

Como se mencionó, una vez evaluados los coeficientes de rigidez de cada uno de los elementos finitos en una estructura, la rigidez de la estructura completa se obtiene únicamente agregando los coeficientes de rigidez apropiadamente; esto último es llamado el método de rigidez directa. Efectivamente, cualquier coeficiente  $k_{ij}$  de la estructura completa puede ser hallado agregando los coeficientes de rigidez correspondientes a los elementos asociados con esos puntos nodales. Así, si los elementos  $a, b$  y  $c$  tienen en común el punto nodal  $i$  de la estructura total, el coeficiente de rigidez de esta estructura para este punto sería:

$$k_{ii} = k_{ii}^{(a)} + k_{ii}^{(b)} + k_{ii}^{(c)} \quad (1.21)$$

#### 1.4.2 Matriz de masa

Para realizar un análisis dinámico o de vibraciones mediante el MEF, es necesaria la matriz de masa para que trabaje en conjunto con la matriz de rigidez. Como regla general, la construcción de la matriz de masa es similar a la construcción de la matriz de rigidez, pero la diferencia notable es la posibilidad de usar una matriz de masa diagonal basada en la directa concentración de la masa.

La matriz de masa se construye considerando la contribución de los elementos finitos que forman la estructura. La construcción de la matriz de masa de los elementos individuales se evalúa a través de varios métodos. A continuación se mostrarán dos métodos para calcular la matriz de masa:

### 1.4.2.1 Matriz de masas concentradas

El procedimiento más simple para definir las propiedades de masa de cualquier estructura es suponer que la masa total está concentrada en puntos donde se definen los desplazamientos traslacionales. El procedimiento usual para definir los puntos de masa localizados en cada nodo es asumir que la estructura está dividida en segmentos. Se muestra el procedimiento descrito para la estructura mostrada en la Fig. 1.11. La masa de cada segmento se concentra en cada nodo, se distribuye la masa del segmento en esos puntos mediante la estática. La masa total concentrada en cada nodo resulta de la suma de las contribuciones de todos los elementos estructurales que llegan al nodo. En la figura se muestran los segmentos que contribuyen a la masa de cada nodo.

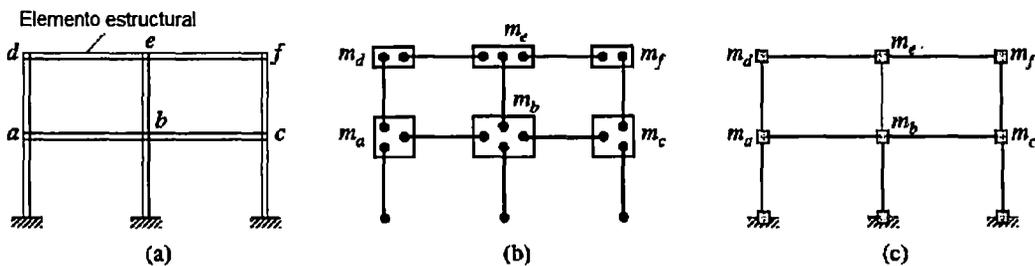


Figura 1.11 Masas concentradas en nodos estructurales

Para un sistema en el cual se definen los grados de libertad traslacionales, la matriz de masas concentradas es una matriz diagonal. En la Ec. (1.13) definimos los coeficientes:

$$m_{ii} = m_i \quad (1.22)$$

$$m_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad (1.23)$$

Los coeficientes  $m_{ij}$  tienen valor nulo pues se supone que una aceleración de cualquier punto de masa concentrada produce una fuerza inercial únicamente en dicho punto. La fuerza inercial en  $i$  debida a una aceleración unitaria del nodo  $i$  es igual a la masa concentrada en ese nodo; por ello, se tiene  $m_{ii} = m_i$ .

Si se define más de un solo grado de libertad traslacional en cada nodo, la misma masa concentrada estará asociada con cada de grado de libertad definido. Por otra parte, la masa asociada a grados de libertad rotacionales será igual a cero porque se supone que la masa está concentrada en puntos que no tienen inercial rotacional (Clough y Penzien, 2003). Así, la matriz de masas

concentradas es una matriz diagonal que incluirá ceros en la diagonal, que corresponderían a los coeficientes para los grados de libertad rotacionales.

#### 1.4.2.2 Matriz de masas consistentes

Usando el concepto de elementos finitos, es posible evaluar los coeficientes de influencia de masa para cada elemento de la estructura realizando un proceso similar al análisis de los coeficientes de la matriz de rigidez. Para el análisis dinámico y vibracional, el modelo de viga planteado por Timoshenko es más importante que el modelo Bernoulli-Euler, pues permite incluir la distorsión por cortante promedio en el cálculo de las energías cinética y de deformación al incluir una corrección para la flexibilidad transversal al corte. Además de la inercia traslacional, incluye la participación de la inercia rotacional en la energía cinética. Mediante el teorema de la energía se formulan los coeficientes de la matriz de masa como:

$$m_{ij} = \sum_q \int_V \rho(x) N_i^q N_j^q dV \quad (1.24)$$

Para un elemento viga Timoshenko, considerando las fuerzas de inercia traslacional rotacional (3):

$$[M] = \rho \int_V [N]^T [N] dV \quad (1.25)$$

En el cual:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_{a1} & N_{a2} & N_{a3} & N_{a4} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Donde  $N_1 - N_4$  son dados por las Ecs. (1.4);  $N_{a1} - N_{a4}$  son las funciones de forma en la dirección longitudinal por encima y por debajo del eje neutro de la sección transversal del elemento.

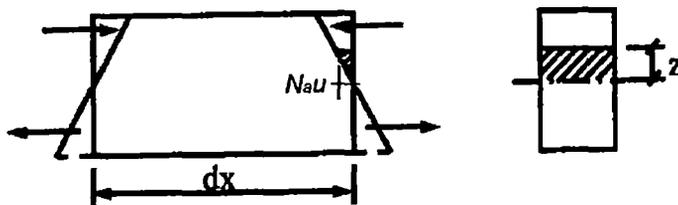


Figura 1.12 Par debido a la inercia rotacional

Se tiene en la Fig. 1.12, un diferencial de viga mostrando el desplazamiento horizontal  $N_a u$  de una fibra localizada a una distancia  $z$  medida desde el eje neutro de la sección transversal, el cual se expresa de la siguiente manera:

$$N_a u(t) = -z \frac{dN}{dx} u(t) \quad (1.27)$$

Donde  $u(t)$  representa una coordenada generalizada. Durante la vibración, el desplazamiento induce una fuerza de inercia rotacional actuando a la derecha (por debajo del eje neutro). Hay una fuerza con el mismo módulo y dirección opuesta actuando por debajo del eje neutro. Estas dos fuerzas forman un par debido a la inercia rotacional. Sustituyendo las Ecs. (1.4) en la Ec. (1.27), se pueden hallar los valores de  $N_a$ . Se debe notar que las deformaciones por corte no inducen inercia rotacional; por tanto, en la derivada de  $N$  no se incluyen los términos marcados con (\*) de las funciones de desplazamiento (Cheng, 2001).

Empleando los valores de  $N$  y  $N_a$  en la Ec. (1.25) obtenemos los coeficientes de la matriz de masa de un elemento:

$$m_{ij} = m_{ij}^t + m_{ij}^r \quad (1.28)$$

$$m_{ij} = \rho \int_V N_i N_j dV + \rho \int_V N_{ai} N_{aj} z^2 dV \quad (1.29)$$

Donde  $m_{ij}^t$  y  $m_{ij}^r$  los coeficientes correspondientes a la inercia traslacional transversal y a la inercia rotacional, respectivamente.

Cuando los coeficientes de la matriz de masa han sido evaluados de esta manera, usando las mismas funciones de desplazamiento usadas en el cálculo de la matriz de rigidez, la matriz resultante recibe el nombre de matriz de masas consistentes. Una vez evaluadas las matrices de masa de cada elemento, se ensamblan de manera similar a la matriz de rigidez.

### 1.4.3 Matriz de amortiguamiento

Los coeficientes  $c_{ij}$  de la matriz de amortiguamiento no se pueden encontrar directamente de la geometría y dimensiones de la estructura, de hecho para estructuras de varios grados de libertad se trabaja con la razón de amortiguamiento. Ésta se estima mediante datos experimentales obtenidos en estructuras similares a la que se está analizando. Pueden usarse directamente razones de amortiguamiento recomendadas para analizar estructuras linealmente elásticas con amortiguamiento clásico.

Un sistema amortiguado se considera que tiene modos clásicos cuando existe una transformación que diagonaliza las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento en forma simultánea. Esta transformación se puede realizar si la matriz de amortiguamiento es proporcional a la matriz de masa o la de rigidez, o que sea una combinación de ambas (Clough y Penzien, 2003). Para estos sistemas, las ecuaciones de movimiento quedan desacopladas cuando se transforman a modos de vibración natural de un sistema no amortiguado, y las razones de amortiguamiento estimadas son usadas directamente en cada ecuación modal.

## 2 CAPÍTULO II: GENERACIÓN DE LA FAMILIA DE ESTRUCTURAS TIPO DOMO

Para entender el comportamiento dinámico de los domos de concreto armado y debido a la extensa cantidad de domos construidos con dimensiones variables se establecerá una familia que represente la vasta cantidad de domos considerando los parámetros de los cuales depende su comportamiento estructural. Para establecer dichos parámetros, primero se presentará una revisión del comportamiento estático y dinámico de tales estructuras ante cargas axisimétricas, las cuales se distribuyen simétricamente alrededor del eje de simetría del domo (cargas de peso propio, vivas, lluvia, nieve, etc.), y cargas asimétricas.

### 2.1 COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE DOMOS DE CONCRETO ARMADO

#### 2.1.1 Comportamiento ante cargas axisimétricas

Quizás la forma geométrica más estable sea la esfera. De esto se deduce que los domos (mitad de una esfera) correctamente cimentados al terreno o anclados a una estructura de soporte como muros portantes, son estructuras muy estables. Esta forma en particular coloca enteramente a la estructura en compresión, con lo cual hace que el concreto sea el material ideal para este tipo de estructuras. Isler (2000) explicó que el comportamiento estructural de un domo es usualmente mejor que una losa plana, mediante un experimento que consistía en dos superficies delgadas de plástico con el mismo volumen de material cargadas con el mismo peso. Como resultado, Isler afirmó que las estructuras de simple o doble curvatura son mucho más eficientes que las placas planas, porque las fuerzas aplicadas pueden ser resistidas con menores deformaciones y tensiones.

La eficiencia del comportamiento autoportante explicado por Isler es una de las ventajas no solo de los domos sino de las estructuras cáscara en general. Estas estructuras, en el caso que sean delgadas, son diseñadas con el propósito de resistir a través de las fuerzas de membrana. Estas fuerzas consisten en esfuerzos de compresión, resistidos por el concreto, y esfuerzos de tensión, resistidos por el acero de refuerzo, en la dirección del plano tangente. Estos

esfuerzos se distribuyen uniformemente en todo el espesor de la cáscara. Tal estado de esfuerzos se denomina estado de esfuerzos membranales (Fig. 2.1). A pesar que la fuerza cortante y los momentos flectores y torsores están aún presentes en un caso general de carga, la eficiencia de la cáscara reside en la presencia de los esfuerzos de membrana como resistencia primaria. En el caso particular de los domos, la estructura responde a las cargas aplicadas mediante el desarrollo de esfuerzos de compresión meridionales.

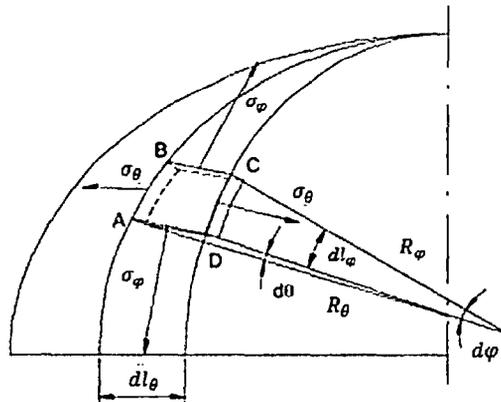


Figura 2.1 Esfuerzos membranales en un elemento cáscara de revolución

Donde  $\sigma_\varphi$  y  $\sigma_\theta$  son los esfuerzos a lo largo del meridiano y paralelo respectivamente. Los domos desarrollan además de esfuerzos meridionales de compresión, esfuerzos de membrana de compresión y tensión a lo largo de sus líneas anulares. Éstos se conocen como esfuerzos anulares, los cuales son de tensión en la base y de compresión en zonas superiores del domo. En la Fig. 2.2 se muestra el estado de esfuerzos a los cuales se encuentra sometido un domo.

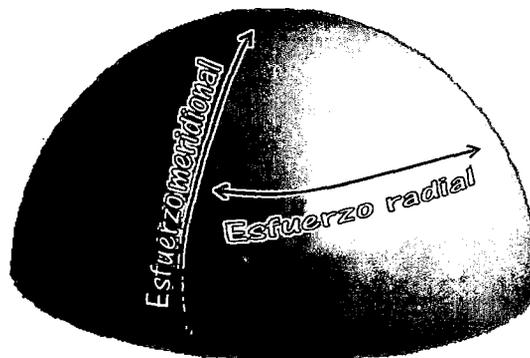
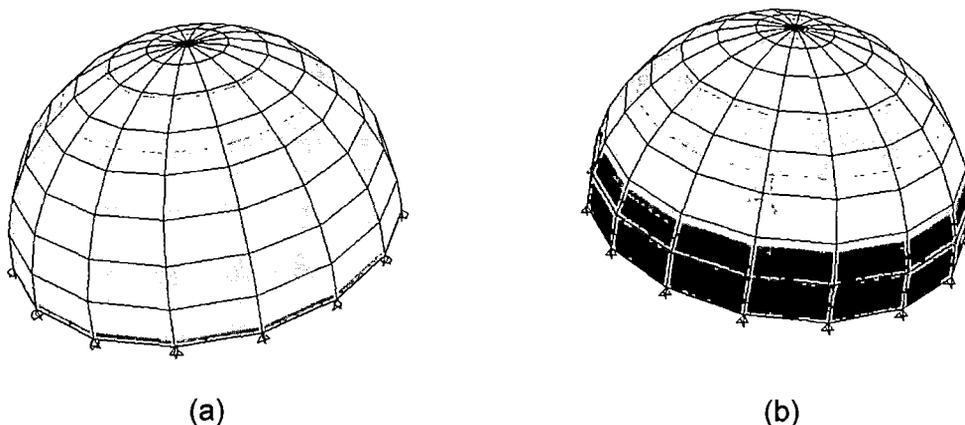


Figura 2.2 Estado membranar de esfuerzos en un domo

Sin embargo, usualmente en las cáscaras se observa que los esfuerzos membranales por si solos no pueden resistir todos los tipos de cargas,

condiciones de apoyo y geometrías. Así, en un caso general, las cáscaras experimentan flexión para resistir las cargas aplicadas. Pero, el comportamiento de flexión depende de las condiciones de carga y apoyos. Por ejemplo, si a un domo o cualquier cáscara de revolución se le impone una carga concentrada, la flexión ejerce un efecto crucial en la resistencia de la estructura, pues en este caso, la deformación por flexión se incrementa con un aumento de la carga hasta que falle la estructura. En cambio, en la unión de la estructura domo y su cimentación o cualquier otro miembro estructural como otra cáscara (un cilindro), una viga anillo, etc., la flexión se comporta de manera diferente; en este caso, ésta se propaga sólo si es necesario eliminar las discordancias entre los desplazamientos membranales o para cumplir con la estática. Como el concreto armado es un material relativamente dúctil, las deformaciones por flexión son usualmente bajas y prácticamente no influyen en la resistencia de la estructura.

En la Fig. 2.3 (a) se muestra un domo de concreto armado, el cual tiene apoyos fijos en la base restringiendo únicamente el desplazamiento tangencial y vertical, cargado transversalmente. En la Fig. 2.3 (b) se tiene las mismas características geométricas del domo y la misma carga aplicada, pero adicionalmente se le restringe el desplazamiento radial. Comparando ambas figuras, se observa la flexión adicional anular (mostrada en color magenta), cerca a los apoyos, que resulta de la restricción al desplazamiento radial del domo.



*Figura 2.3 Flexión anular adicional en un domo debida a las condiciones de borde*

Como fue mencionado anteriormente, los domos desarrollan esfuerzos tanto de compresión como tensión en su dirección anular. Este esfuerzo en compresión

en el ápice del domo decrece gradualmente a medida que se acerca al borde hasta que el esfuerzo es de tracción. Hay una línea de transición donde el esfuerzo anular es cero, la cual se encuentra en un ángulo meridional  $\varphi$  de  $51^\circ 49'$ . Para aquellos domos que no son necesariamente un hemisferio, es decir son un segmento de una esfera que subtiende un ángulo menor a  $2\varphi$ , no se desarrollan tensiones en la estructura y trabajan completamente a compresión (Ventsel y Krauthammer, 2001). Por tanto para superar el problema de tensiones anulares se suelen usar como coberturas a porciones de domos de baja altura.

Sin embargo, cuando se usan domos que representan la porción de una esfera, la estructura tiende a desplegarse hacia el exterior en los bordes discontinuos. Usualmente no es posible colocar soportes tangentes a los meridianos en el borde libre de un domo (Billington, 1965). El caso usual es colocar soportes verticales en los bordes. El análisis estático de este problema estructural se muestra en la Fig. 2.4.

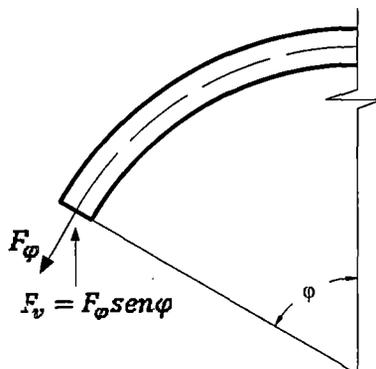
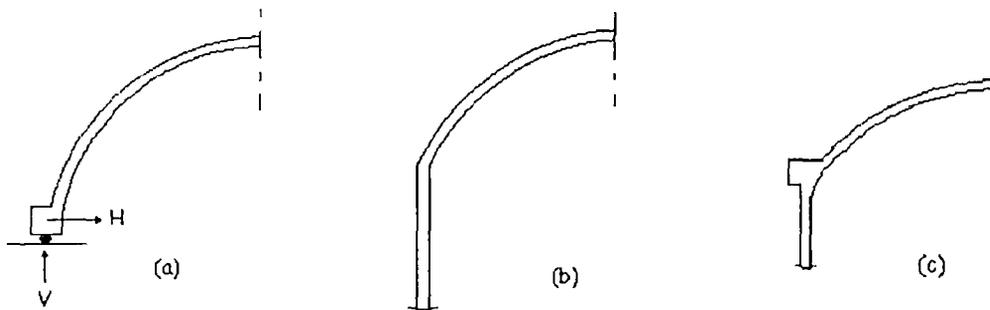


Figura 2.4 Reacciones en el borde de un domo

Los soportes verticales no pueden resistir la reacción de membrana  $F_\alpha$ . Por tanto, existe un desplazamiento horizontal en el borde del domo. En la práctica usual, a la estructura se le impone un tipo de restricción lateral. Billington considera tres tipos: una viga anillo (Fig. 2.5 (a)), muros cilíndricos continuos (Fig. 2.5 (b)) y una combinación de éstos (Fig. 2.5 (c)).



*Figura 2.5 Condiciones de apoyo en un domo para restringir el desplazamiento lateral*

El empuje de la fuerza de membrana mostrada será tomado mediante fuerzas cortantes a través de las paredes del domo y fuerzas de tracción solamente en el soporte anular.

### 2.1.2 Comportamiento ante cargas asimétricas

Principalmente las cargas asimétricas a las que estaría sometido un domo serían las cargas dinámicas de viento y sismo. En estos casos se prescinden las simplificaciones que se hacen para resolver las ecuaciones de la teoría de membrana en el caso de cargas axisimétricas.

Las cargas de viento que actúan sobre estructuras se componen de presiones en el barlovento y succiones en el sotavento. La carga es perpendicular a la superficie de la estructura. En otras realidades diferentes a nuestro país, la mayor carga de viento que podría recibir un domo correspondería a un tornado con velocidad máxima de 480 Km/h que ejercería una presión de hasta 1.95 T/m<sup>2</sup>. En la Fig. 2.6 se muestra la distribución de la carga de viento sobre un domo esférico, donde  $p$  representa la intensidad de presión de viento estáticamente equivalente.

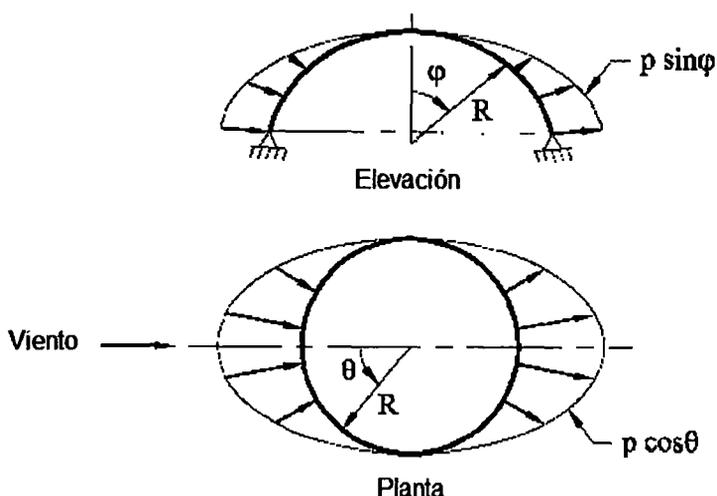


Figura 2.6 Distribución de cargas de viento sobre un domo

Resolviendo las ecuaciones correspondientes a la teoría de membrana se llega a encontrar las expresiones para las fuerzas de membrana como las fuerzas meridional, anular y cortante ( $F_\varphi$ ,  $F_\theta$  y  $S$  respectivamente) para domos hemisféricos:

$$F_\varphi = -\frac{pR}{3\text{sen}^3\varphi} [\text{sen}^2\varphi(1 + \text{sen}^2\varphi) - 2(1 - \cos\varphi)] \cos\theta \quad (2.1)$$

$$F_\theta = -\frac{pR}{3\text{sen}^3\varphi} [\text{sen}^2\varphi(2\text{sen}^2\varphi - 1) - 2(1 - \cos\varphi)] \cos\theta \quad (2.2)$$

$$S = -\frac{pR}{3\text{sen}^3\varphi} [2 - \cos\varphi(1 - \text{sen}^2\varphi)] \text{sen}\theta \quad (2.3)$$

Donde  $R$  es el radio medio del domo. De estas expresiones se deduce que las fuerzas de membrana máximas ocurren para el caso de la fuerza meridional,  $F_\varphi$ , en  $\varphi \approx \pi/4$  y  $\theta = 0, \pi$ ; para la fuerza anular,  $F_\theta$ , en  $\varphi = \pi/2$  y  $\theta = 0, \pi$ ; y para la fuerza cortante,  $S$ , en  $\theta = \pi/2$  y  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ . La Fig. 2.7 muestra la variación de  $F_\varphi$  y  $F_\theta$  a lo largo del meridiano  $\theta = 0$  y la variación de  $S$  a lo largo del meridiano  $\theta = 90^\circ$ .

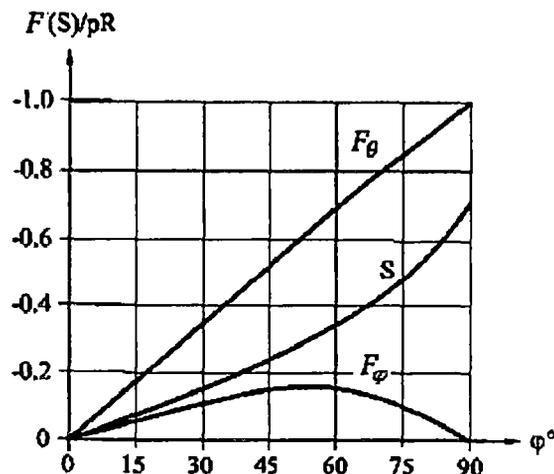


Figura 2.7 Variación de fuerzas de membrana debidas a cargas de viento a lo largo de un domo

Por otra parte, la fuerza asimétrica más fuerte que podría encontrar un domo es la fuerza sísmica. Un domo se diseña para soportar condiciones normales de carga, se necesitaría una fuerza tan grande como la de un terremoto para acercarse a la resistencia de diseño del concreto. Estructuras DOMO comparó la respuesta sísmica de dos silos de concreto armado para almacenar clínker. Uno de ellos con geometría cilíndrica y el otro de geometría esférica con idéntica capacidad de almacenamiento. Se aplicó un análisis modal espectral utilizando una aceleración de 0.12g.

En la Fig. 2.8 se muestran los valores para esfuerzos sísmicos en ambos casos. Se tiene que la tensión máxima en el silo cilíndrico es tres veces la tensión máxima en el silo domo, además esta tensión se limita a una zona muy puntual. La respuesta tan favorable del domo se debe, en primer lugar, a que es una estructura cerrada en su parte superior frente al cilindro que es una superficie abierta, con un buen comportamiento frente a cargas asimétricas. Razón que históricamente se comprueba por la supervivencia de estas estructuras desde la antigüedad.

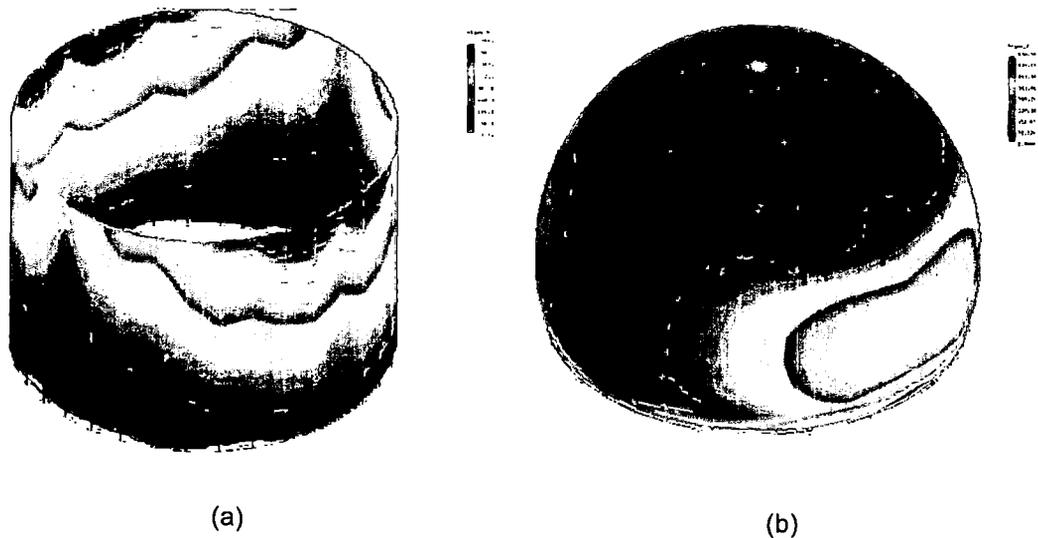


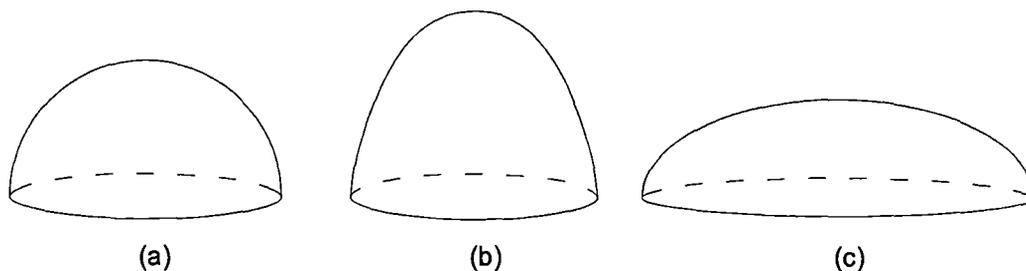
Figura 2.8 Esfuerzos debidos a cargas sísmicas en una estructura cilíndrica y un domo

## 2.2 PARÁMETROS GEOMÉTRICOS Y DINÁMICOS

Para identificar a un elemento cáscara específico se definen el espesor y la forma de la superficie de referencia. En el caso de materiales homogéneos, la práctica común utiliza la superficie media como referencia, la cual representa la geometría total de la estructura. La teoría aplicada para el análisis de estructuras cáscara depende de la relación entre el espesor y los radios de curvatura de la superficie media (en direcciones perpendiculares entre sí). Donde si el espesor es menor a un décimo del radio de curvatura se utiliza para el análisis la teoría de cáscaras delgadas. Ésta simplifica las ecuaciones del movimiento al considerar que las secciones normales a la superficie de referencia permanecen perpendiculares a ésta y no cambian su longitud después de la deformación. Pero si a la cáscara se le clasifica como gruesa, la inercia rotacional y la deformación por corte deben considerarse en el análisis vibracional de tales estructuras (Timoshenko, 1987).

Una estructura domo se clasifica según el tipo de curvatura y las condiciones de sus bordes (Leissa, 1993). De este modo, se tienen los domos esféricos que hacen referencia a una semiesfera; es decir, ambos radios de curvatura son iguales. En otros domos denominados paraboloidales, su superficie media se genera con la rotación de una parábola alrededor de su eje de simetría. Además, estas estructuras tienen uno de sus radios de curvatura infinito. Como último tipo

de domo se tiene a los domos elipsoidales que se generan con la rotación de una elipse. Asimismo, los estructura domo puede ser únicamente una parte de estos tipos mencionados que se forma con la intersección de la estructura con un plano que la corta. En la Fig. 2.9 se tienen los tres tipos de domo mencionados.



*Figura 2.9 Tipos de estructuras domo: (a) Esféricos, (b) paraboloidales y (c) elipsoidales*

Como se observa, la forma de los tipos de domo varía específicamente con la luz que cubre la estructura y su altura, así como la ecuación que gobierna la superficie media. La investigación de esta tesis se limita a estudiar los domos esféricos o también llamados cúpulas pues son las estructuras cáscaras más común, generalmente como cubierta de grandes luces. Cabe mencionar que existen domos esféricos considerados como reciente innovación denominados domos geodésicos, los cuales son estructuras espaciales reticuladas, que no se encuentran en el dominio de esta tesis.

Una vez definido específicamente la forma de domo estudiada procedemos a definir sus parámetros de los cuales depende su respuesta en el caso estático. Como se vio, el comportamiento del domo esférico se puede analizar tomando como referencia la superficie media de la estructura. En este caso, el parámetro geométrico del cual depende la respuesta estática es el radio  $R$  de dicha sección. Pero para el cálculo de los desplazamientos resultantes de cada punto a lo largo de la estructura ante tales cargas, tal parámetro no es suficiente. La Fig. 2.10 muestra un elemento diferencial de un domo esférico que tiene un espesor constante  $e$  y radio de la sección media  $R$ . En esta figura se muestran además las fuerzas por unidad de longitud de tal elemento diferencial. Aplicando la teoría de cáscaras gruesas se encuentran las fuerzas totales en este elemento diferencial, donde  $z = -e/2$  y  $z = e/2$  denotan las superficies inferior y superior del domo (Ecs. (2.4) y (2.5)).

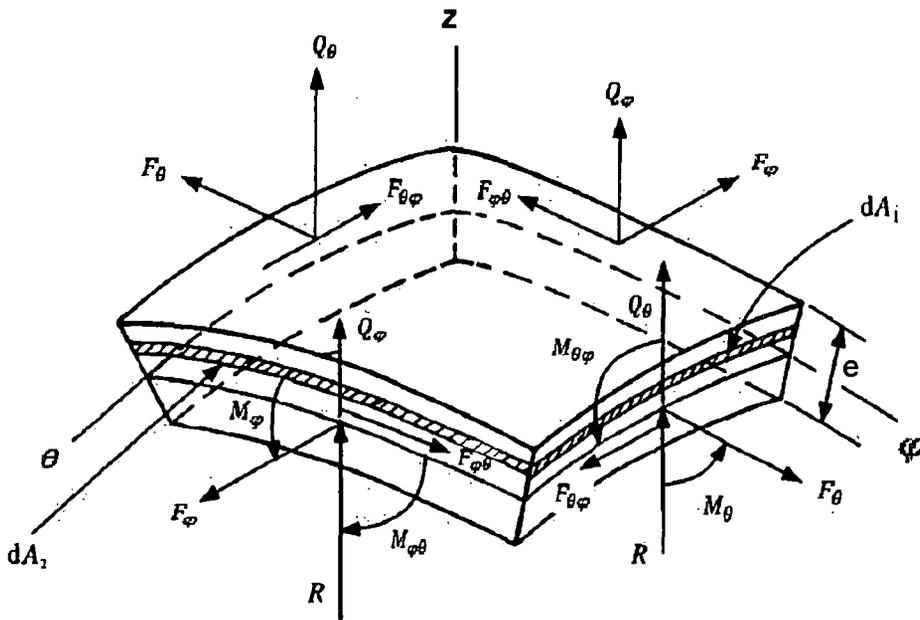


Figura 2.10 Geometría de un diferencial de domo

$$\begin{bmatrix} F_\varphi \\ F_{\varphi\theta} \\ Q_\varphi \\ F_\theta \\ F_{\theta\varphi} \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{bmatrix} \sigma_\varphi \\ \sigma_{\varphi\theta} \\ \tau_{\varphi z} \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{\theta\varphi} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} (1 + z/R) dz \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} M_\varphi \\ M_{\varphi\theta} \\ M_\theta \\ M_{\theta\varphi} \end{bmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{bmatrix} \sigma_\varphi \\ \sigma_{\varphi\theta} \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{\theta\varphi} \end{bmatrix} (1 + z/R) z dz \quad (2.5)$$

Para el caso que el domo esté cargado axisimétricamente se demuestra por simetría axial que  $M_{\varphi\theta}$ ,  $M_{\theta\varphi}$ ,  $F_{\varphi\theta}$ ,  $F_{\theta\varphi}$  y  $Q_\theta$  son cero. Asimismo, si consideramos que el domo es de pared delgada, el término  $z/R$  es mucho menor que 1 y podría obviarse para simplificar las ecuaciones.

Considerando que las leyes de Hooke se aplican a esta estructura, se plantean las ecuaciones que relacionan los esfuerzos y deformaciones unitarias en estructuras domo:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu\sigma_\theta) \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi) \quad (2.7)$$

$$\gamma_{\varphi\theta} = \gamma_{\theta\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\theta}}{G} \quad (2.8)$$

El esfuerzo normal a la superficie de referencia puede obviarse pues su influencia es pequeña en la mayoría de los casos. Sólo en una vecindad cercana a una carga concentrada alcanza magnitudes considerables. Así, estas expresiones en conjunto con las Ecs. (2.4) y (2.5) y las relaciones deformación-desplazamiento permiten resolver el problema estático de domos esféricos.

Una vez analizado el domo esférico en caso estático, se definen los parámetros dinámicos que influyen en su respuesta planteando las ecuaciones de movimiento de tales estructuras. La Ec. (2.9) presenta estas ecuaciones de movimiento resultantes de la teoría de cáscaras gruesas (como caso general de análisis) aplicadas específicamente a estas estructuras (Qatu, 2004). Éstas están basadas en los momentos, cortantes fuera y dentro del plano de la superficie y las fuerzas de membrana como se muestra en la Fig. 2.10.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\varphi}}{\partial \varphi} + (F_{\varphi} - F_{\theta}) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial F_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + Q_{\varphi} + Rq_{\varphi} &= R \left( \bar{I}_1 \ddot{u}^2 + \bar{I}_2 \ddot{\psi}_{\varphi}^2 \right) \\ \frac{\partial F_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + (F_{\varphi\theta} + F_{\theta\varphi}) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} + Q_{\theta} + Rq_{\theta} &= R \left( \bar{I}_1 \ddot{v}^2 + \bar{I}_2 \ddot{\psi}_{\theta}^2 \right) \\ -(F_{\varphi} + F_{\theta}) + \frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \varphi} + Q_{\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + Rq_n &= R(\bar{I}_1 \ddot{w}^2) \quad (2.9) \\ M_{\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - M_{\theta} \operatorname{ctg} \varphi + RQ_{\varphi} + Rm_{\varphi} &= R \left( \bar{I}_2 \ddot{u}^2 + \bar{I}_3 \ddot{\psi}_{\varphi}^2 \right) \\ \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + (M_{\varphi\theta} + M_{\theta\varphi}) \operatorname{ctg} \varphi + RQ_{\theta} + Rm_{\theta} &= R \left( \bar{I}_2 \ddot{v}^2 + \bar{I}_3 \ddot{\psi}_{\theta}^2 \right) \end{aligned}$$

Donde  $q_{\varphi}$ ,  $q_{\theta}$  y  $q_n$  representan las fuerzas externas (por unidad de longitud) aplicadas a la superficie media;  $m_{\varphi}$  y  $m_{\theta}$  representan los momentos por unidad de longitud que podrían aplicarse al domo. Además la Ec. (2.10) define los términos inerciales.

$$\begin{aligned} \bar{I}_i &= \left( I_i + \frac{2I_{i+1}}{R} + \frac{I_{i+2}}{R^2} \right) \quad i = 1, 2, 3 \\ [I_1, I_2, I_3, I_4, I_5] &= \int_{-e/2}^{e/2} \rho [1, z, z^2, z^3, z^4] dz = \rho \left[ e, 0, \frac{e^3}{12}, 0, \frac{e^5}{80} \right] \quad (2.10) \end{aligned}$$

Si bien estas ecuaciones corresponden a un movimiento dinámico forzado, para el caso de un análisis modal las expresiones pueden quedar simplificadas al

eliminar los términos que corresponden a las fuerzas externas. Además, las expresiones se simplifican aún más cuando se analiza un domo clasificado como delgado, pues los términos inerciales donde aparece el factor  $(e^2/R^2)$  pueden obviarse debido a que este término es aproximadamente cero. Asimismo, los términos correspondientes a las rotaciones de las normales a la superficie media  $\psi_\varphi$  y  $\psi_\theta$  son iguales a cero, pues en una cáscara delgada se considera que los planos perpendiculares a la superficie media permanecen planos y no giran después que se han deformado.

Tanto en ambas metodologías aplicadas se considera que el período de vibración y las formas de modo son los mismos para cada punto a lo largo del domo. De esta manera, las variaciones temporales y espaciales de la estructura se pueden separar en expresiones individuales que permiten resolver el problema y encontrar el comportamiento dinámico de estas estructuras.

En síntesis, como se ha visto en los análisis y ecuaciones presentados anteriormente, los parámetros geométricos de los cuales depende tanto el comportamiento estático y dinámico de domos esféricos delgados y gruesos son el radio de la superficie media del domo  $R$ , el espesor  $e$  (constante a lo largo de la superficie media) y el ángulo  $2\varphi$  que subtiende el domo. Por otra parte, la respuesta también depende de parámetros propios del material del domo como son el módulo de elasticidad  $E$ , la densidad  $\rho$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . La Fig. 2.11 permite visualizar los parámetros mencionados en una sección de un domo esférico arbitrario.

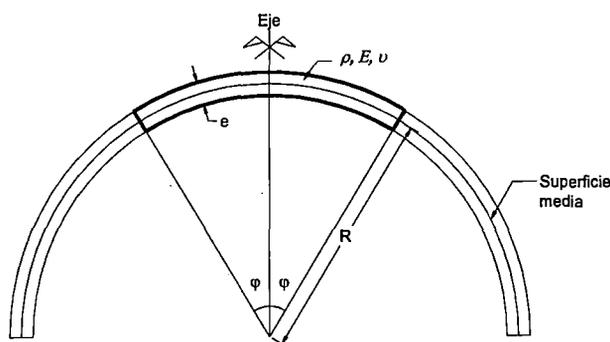


Figura 2.11 Parámetros de un domo esférico

### 2.3 FAMILIA REPRESENTATIVA DE DOMOS

Una vez definidos los parámetros de los cuales depende tanto el comportamiento estático como el dinámico de domos esféricos, se va a establecer una familia de domos que identifiquen tales características importantes con el objetivo que representen el vasto universo de tales estructuras.

Debido a que los domos trabajan básicamente a fuerzas de compresión a lo largo de su espesor, el concreto es un material idóneo para este tipo especial de estructura, pero en un inicio tenían limitaciones derivadas de los materiales, no existiendo elementos para tomar tracciones elevadas. Este problema se resolvió mediante el empleo del concreto armado, ideal para resistir compresiones y tracciones elevadas que aparecen debido a las condiciones de apoyo y fuerzas asimétricas como se ha mostrado al inicio del capítulo. Debido a esto, la familia se restringirá a domos de concreto armado, con lo cual el universo de parámetros que representan las propiedades mecánicas del material del domo se reducen a los propios del concreto armado como muestra la Tabla 2.1.

*Tabla 2.1 Propiedades mecánicas del concreto armado*

Parámetro	Símbolo	Unidad	Valor
Módulo de elasticidad	$E$	$t/m^2$	2 100 000
Densidad	$\rho$	$t.s^2/m^4$	0.245
Razón de Poisson	$\nu$	—	0.20

Fuente: Elaboración propia

Como se sabe, el módulo de elasticidad del concreto armado es variable dependiendo de la calidad del concreto, en este caso se ha considerado un concreto de  $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$  para el análisis de los domos. Como los parámetros mecánicos del material se restringen a uno solo, la familia de domos únicamente dependería de los tres parámetros geométricos mencionados. Dependiendo del ángulo que subtienden, los domos esféricos de pared delgada pueden clasificarse como domo hemisférico o domo llano o poco elevado, estos últimos son usados mayormente como cobertura de tanques de agua y subtienden ángulos menores a  $2 \times 13^\circ$ . Vlasov clasificó en este tipo de cáscara en general a aquellas que cumplieran que su altura era menor a  $1/5$  de la menor dimensión de la proyección de ésta en su plano. Así, se podría considerar que la geometría intrínseca de estos domos es idéntica a la geometría de un plano de

su proyección. La Fig. 2.12 muestra la diferencia entre ambos tipos de domos esféricos.

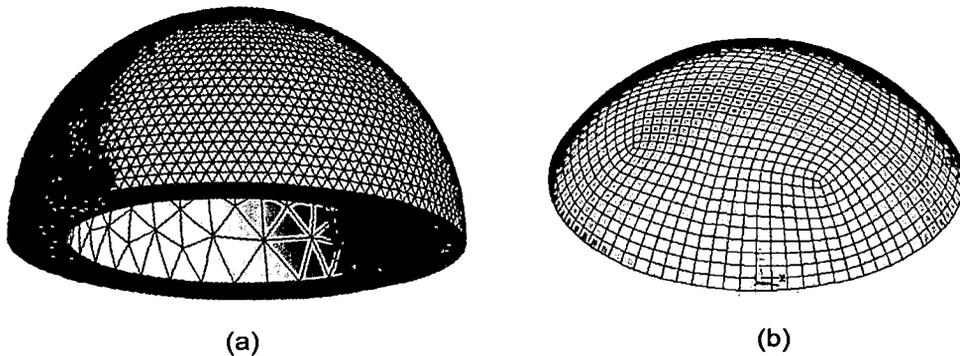


Figura 2.12 Domos esféricas: (a) Domo hemisférico, y (b) domo poco elevado

La investigación está centrada en los domos esféricos propiamente dichos, cuyo ángulo que subtenden es igual  $180^\circ$ . Por tanto, los parámetros geométricos que controlan el comportamiento de éstos son el radio de la sección media  $R$  y el espesor constante  $e$ . Como el vasto universo de domos hemisféricos genera muchas combinaciones de radios medios y espesores para abarcar a todos ellos, se plantea que existe una proporción entre el espesor y el radio medio con el objetivo de relacionar ambas cantidades y facilitar el agrupamiento de los domos. En otras palabras, el espesor estará en proporción directa del radio y su razón se denominará "esbeltez del domo" (Tabla 2.2).

Tabla 2.2 Parámetro geométrico adimensional de domos hemisféricos

Parámetro	Símbolo	Unidad	Fórmula
Esbeltez del domo	$ER$	—	Espesor/Radio

Fuente: Elaboración propia

El parámetro adimensional  $ER$  relaciona los dos parámetros geométricos y permita agrupar de manera general la vasta cantidad de domos esféricos que existen o que podrían construirse en un futuro. Los domos que tengan el mismo parámetro  $ER$  se agruparán independientemente del radio y espesor que tengan. Además este parámetro debe encontrarse dentro un rango finito para que el domo sea real. La Ec. (2.11) muestra los valores extremos del intervalo donde  $ER$  permite que un domo sea real.

$$0 < ER < 2 \quad (2.11)$$

Si bien este intervalo permite generar las características de un domo real, actualmente el intervalo estructuras diseñadas se reduce a un subconjunto del intervalo mostrado. Por ello, es importante conocer los parámetros geométricos de domos esféricos de concreto armado construidos para considerarlos dentro del rango de la familia propuesta. Monolithic Dome, empresa dedicada íntegramente al diseño y construcción de domos de concreto armado, considera como espesor mínimo 6 cm (aprox. 2.50") para domos que no cargan ningún peso encima de su estructura tales como lucernarias, nieve, etc. puesto que las normas correspondientes recomiendan 16 a 25 mm (5/8" a 1") de recubrimiento para el refuerzo. Si se toma en cuenta que tanto el refuerzo radial como el vertical sean de 3/8", con dicho espesor se cumpliría exactamente con el recubrimiento en ambas caras. Por otra parte, encontrar puntualmente el valor de espesor máximo no es posible debido a que dependiendo de las cargas sometidas y las dimensiones del domo, dicho parámetro varía para garantizar la resistencia de la estructura ante tales cargas. Si bien los valores usados actualmente varían hasta 20 cm para grandes luces, estos domos se ven fortalecidos con el uso de vigas costilla a lo largo de los meridianos del domo. Con motivos de investigar el comportamiento íntegro de domos hemisféricos tanto delgados como gruesos, se considera como espesor máximo de 2.50 m. Esta dimensión no se utiliza en el presente pero es válida para domos construidos antiguamente con otros materiales diferentes al concreto armado (roca o mampostería).

En cuanto al radio de la superficie media del domo, actualmente se construyen viviendas unifamiliares en forma de domo como la mostrada en la Fig. 1.1, en las cuales se tiene como diámetro mínimo 5.00 m. Por otro lado, se mencionó que domos hemisféricos de concreto armado son factibles hasta diámetros de 300 m.

Con toda esta información se plantean combinaciones entre radios y espesores generándose el subconjunto buscado de valores del parámetro  $ER$ . Se considera entonces como valor mínimo de la esbeltez del domo a 0.01 y como valor máximo, 0.4. De esta manera se plantean diez valores de  $ER$  dentro de este subconjunto para generar la familia de domos, la cual representará tanto domos delgados como gruesos y mediante un análisis respectivo se conocerá la tendencia del comportamiento a medida que varía el parámetro propuesto. Sin embargo, al ser un parámetro adimensional no puede ser analizado mediante

ningún método. Por tanto la necesidad de transformar tales valores en parámetros geométricos reales de la estructura se consideran diez juegos de radio medio y espesor correspondientes a cada valor del parámetro  $ER$ . La Tabla 2.3 muestra los diez domos hemisféricos considerados dentro de la familia representativa.

*Tabla 2.3 Familia representativa de domos considerada*

Nombre	Radio $R$ (m)	Espesor $e$ (m)	$ER$
D1	10.00	0.10	0.01
D2	6.00	0.20	0.03
D3	8.00	0.40	0.05
D4	10.00	1.00	0.10
D5	8.00	1.20	0.15
D6	10.00	2.00	0.20
D7	6.00	1.50	0.25
D8	8.00	2.40	0.30
D9	10.00	3.50	0.35
D10	6.00	2.50	0.42

Fuente: Elaboración propia

## 2.4 DEFINICIÓN DE MODELOS ESTRUCTURALES DE ELEMENTOS FINITOS

Una vez planteada la familia de domos, la cual representará el comportamiento únicamente del universo de estas estructuras cuyo parámetro  $ER$  se encuentra dentro del intervalo propuesto, se analizará cada uno de ellos mediante dos programas de uso comercial para el análisis de estructuras en general. El primero de ellos, muy conocido y utilizado en el cálculo de estructuras en la mayoría de oficinas de diseño del Perú, es el SAP2000. Este programa emplea el análisis matricial basado en la idealización de elementos finitos y permite resolver numéricamente problemas de una extensa variedad de estructuras. Estos problemas incluyen análisis estático y dinámico (lineal o no lineal), transferencia de calor y problemas con fluidos. El otro programa es el ANSYS, recientemente entrando en el mercado peruano pero muy usado a nivel mundial, software de simulación ingenieril para todo tipo de problemas, incluso aquellos que podrían considerarse un reto. El módulo utilizado en esta investigación es el ANSYS Mechanical, producto que ofrece la solución de problemas estructurales lineales y no lineales, y de análisis dinámicos. Este programa también utiliza el método de los elementos finitos para resolver los problemas propuestos, pero

facilita la tarea del usuario común al realizar la operación del mallado automáticamente, dejando al usuario la personalización de la malla dependiendo de las características de la estructura.

Si bien el ANSYS es un software superior al SAP2000, la utilización de uno u otro programa depende únicamente del usuario, pues usualmente el análisis de estructuras convencionales se podría realizar eficientemente tanto en SAP2000 como en ANSYS; sin embargo, algunos problemas complejos o que necesariamente tienen que ser simulados para observar la respuesta de ellos, son de dominio enteramente del ANSYS.

SAP2000 cuenta con varios tipos de elementos que permiten modelar una estructura, mediante el proceso de discretización, teniendo en cuenta su geometría, el grado de precisión de las respuestas al que se quiere llegar y el tiempo computacional que toma el programa en resolver el problema. Es así que cada uno de los domos será modelado con elementos finitos tipo FRAME, SHELL y SOLID en SAP2000 v12. En cuanto al ANSYS, fue utilizada la versión 12.1. En este programa los domos fueron modelados con elementos SOLID pues éste permite fácilmente dibujar la estructura como un sólido y luego automáticamente genera la malla.

South (2005) verificó que el método de elementos finitos en el caso de elementos SHELL, predice correctamente las respuestas dadas por la teoría de cáscaras específicamente de domos hemisféricos, no hemisféricos y truncados. Por tanto, la validez del modelo de análisis propuesto se verificará con cada modelo de elementos finitos de domo planteado. A continuación se detallará la metodología adoptada para modelar cada domo dependiendo del tipo de elemento finito considerado y el programa utilizado. En todos los casos se considerará que el domo está empotrado en la base y es de concreto armado, cuyas propiedades mecánicas están dadas en la Tabla 2.1.

#### 2.4.1 Modelo SAP2000 de elementos FRAME

Los elementos FRAME o en español elementos barra o unidimensionales o prismas mecánicos, están generalmente sometidos a un estado de tensión plana con esfuerzos grandes en la dirección de línea baricéntrica (que puede ser recta o curva). Geométricamente son alargados y generalmente su dimensión según dicha línea (altura, luz, o longitud de arco) es mucho mayor que las dimensiones

de su sección transversal, perpendicular en cada punto a la línea baricéntrica. Este elemento usa la formulación viga-columna tridimensional, la cual incluye los efectos que el elemento podría estar sometido como flexión biaxial, torsión, deformación axial y deformaciones por corte biaxial. El elemento FRAME tiene seis grados de libertad en cada nodo: tres traslacionales y tres rotacionales como muestra la Fig. 2.13. El elemento puede definirse como una línea recta conectando dos puntos. Cada elemento tiene su sistema de coordenadas locales para definir secciones y cargas, y podría ser prismático o no primático. Para definirlo es necesario ingresar la geometría de su sección transversal o simplemente las propiedades geométricas de tal sección (área total, momentos de inercia en cada eje centroidal, áreas de corte efectivo, etc.).

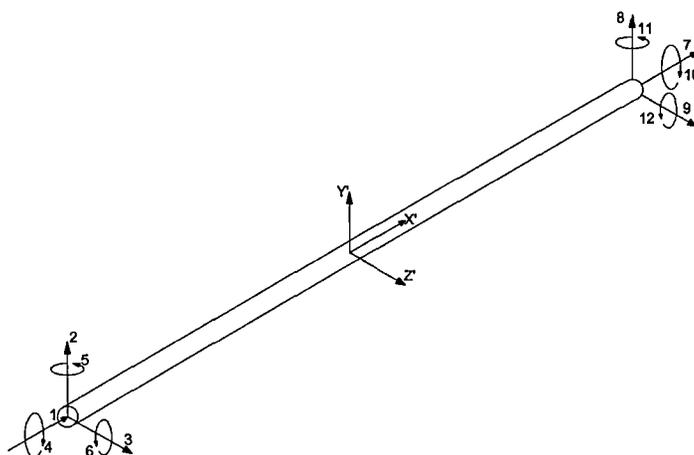


Figura 2.13 Grados de libertad en un elemento FRAME

El objetivo de esta sección es representar la totalidad del domo mediante estos elementos; por tanto, el domo será dividido por planos perpendiculares a su eje de simetría equidistantes entre sí, que conlleva a tener elementos prismáticos de sección variable e igual altura. De esta manera la estructura queda discretizada y el problema se reduce a definir la sección transversal de cada elemento FRAME, en este caso tenemos que cada elemento no tiene una sección única a lo largo de su eje. En este caso se consideró tomar las propiedades geométricas de la sección ubicada a la mitad de cada elemento, que geométricamente representa un anillo circular, con lo cual se aproximaría el elemento de sección variable a un elemento prismático de forma cilíndrica. Una vez halladas las dimensiones de esta forma geométrica, el procedimiento de ingresar la sección al programa podría realizarse de dos maneras, la primera sería ingresar directamente la

geometría de la sección y la otra sería calcular las propiedades de la misma para luego ingresar los valores calculados.

A causa que este modelo en particular se comparará directamente con el modelo propuesto en esta investigación, se optó por la segunda opción de ingreso de propiedades. En este sentido, fueron calculados e ingresados únicamente las áreas de corte efectivo y los momentos de inercia. La Fig. 2.14 muestra el procedimiento aplicado para discretizar la estructura domo en elementos FRAME de sección constante. Como se muestra, para tener una misma altura para todos los elementos se dividió el radio interior  $R_i$  en partes iguales independientemente de la cresta del domo que se considera como un elemento cilíndrico lleno de altura igual al espesor del domo. Además, para tener una mejor representación de la estructura, se dividió cada domo en 20 elementos de igual altura más un elemento correspondiente a la cresta.

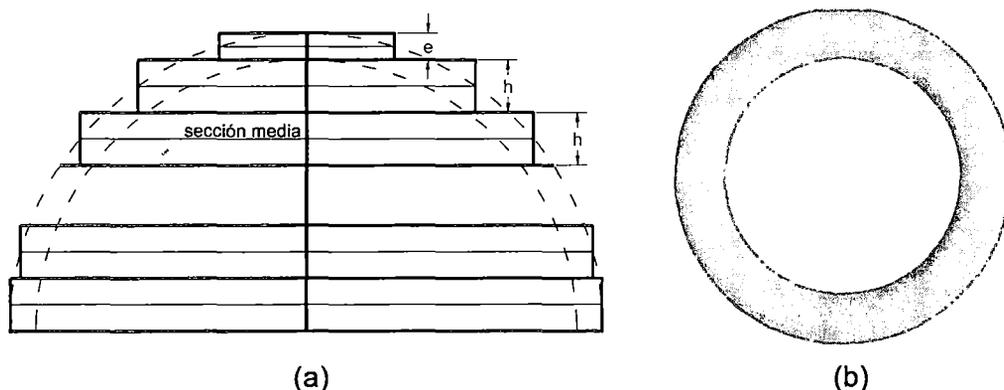


Figura 2.14 Discretización del domo: (a) Elementos FRAME, y (b) sección transversal típica

Esta investigación está centrada básicamente en el comportamiento sísmico de domos; por lo tanto, para obtener respuestas sísmicas será necesario agregarle a este modelo la masa del domo. Mediante el criterio de masas concentradas parte de ésta estará concentrada en los extremos de los elementos FRAME y su valor corresponderá a la mitad de la masa de los elementos inmediatamente superior e inferior como muestra la Fig. 2.15.

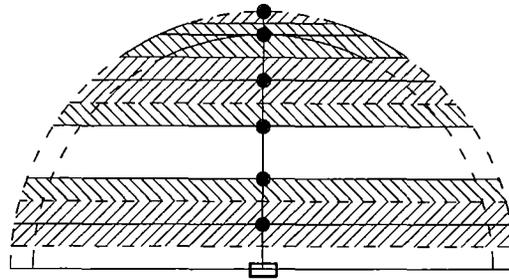


Figura 2.15 Masas concentradas en el modelo de elementos FRAME

#### 2.4.2 Modelo SAP2000 de elementos SHELL

El elemento SHELL o cáscara es un tipo de objeto área que se utiliza para modelar el comportamiento de una cáscara o placa en estructuras planas o tridimensionales. Este tipo de elemento combina tanto el comportamiento de membrana como el comportamiento a flexión explicados anteriormente y puede definirse mediante 3 o 4 nodos. El comportamiento de membrana usa una formulación isoparamétrica que incluye componentes de rigidez traslacional en el plano del elemento y una componente de rigidez rotacional normal al mismo plano. Por otra parte el comportamiento a flexión incluye dos componentes de rigidez rotacionales fuera del plano y una componente de rigidez traslacional normal al mismo. La Fig. 2.16 muestra la formación de un elemento cáscara o SHELL.

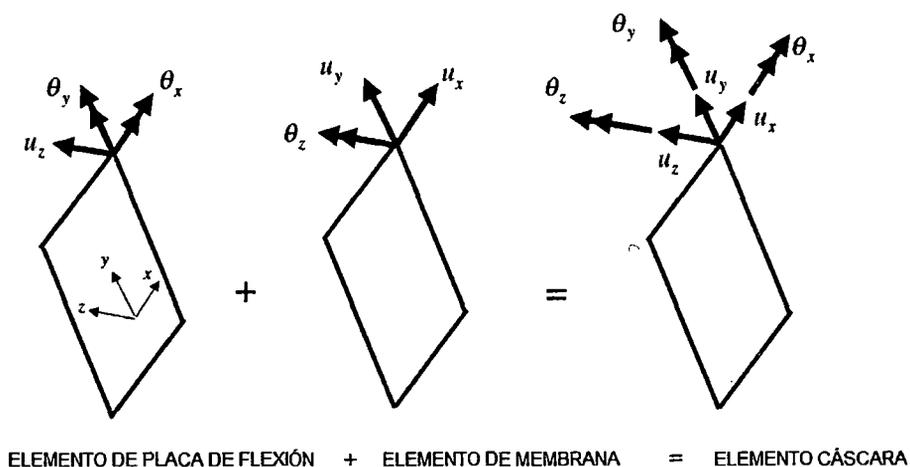


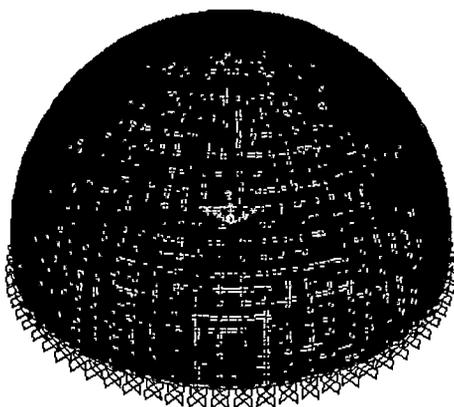
Figura 2.16 Formación de un elemento de cáscara plana

Este elemento puede ser formulado como delgado o grueso dependiendo de las condiciones del problema. En los modelos de domos se consideró para todos los

casos modelarlos con elementos SHELL thick (gruesos), los cuales incluyen deformaciones por cortante transversal. Éstas son importantes en el caso que se tengan cáscaras clasificadas como gruesas.

Para modelar la estructura domo mediante este elemento se formula la superficie media (semiesfera de radio  $R$ ) y siguiendo esta forma se generan los elementos finitos SHELL de dimensiones adecuadas al problema. Para definir estas dimensiones se seguirá la metodología aplicada en el modelo de elementos FRAME; es decir, la superficie media del domo será dividido en 20 zonas de igual altura hasta que en total se tenga como altura a  $R_i$ ; a partir de este punto se dividirá esta última zona denominada casquete esférico, mediante planos paralelos a los anteriores, en partes iguales siguiendo la forma del domo. Cada zona esférica y el casquete esférico serán divididos en 80 partes iguales cuyos 4 nodos que forman cada parte representarán los nodos del elemento SHELL cuadrilateral.

El propósito de dividir cada modelo de domo de esta manera es para conseguir una mejor comparación de respuestas del modelo que será propuesto y los modelos con diferentes tipos de elementos, pues las respuestas de cada modelo se tendrán para los mismos niveles en todos los casos y podrán compararse directamente entre ellas. La Fig. 2.17 muestra un domo modelado mediante elementos SHELL.



*Figuro 2.17 Domo modelado mediante elementos SHELL*

### 2.4.3 Modelo SAP2000 de elementos SOLID

El elemento SOLID es un elemento de ocho nodos de forma de bloque (brick) para modelar estructuras tridimensionales y sólidos (CSI, 2008). Está basado en la formulación isoparamétrica que incluye nueve funciones de forma incompatibles, que se ha demostrado mejoran el comportamiento de elementos hexaédricos tridimensionales de ocho nodos al corregir esfuerzos asociados al desarrollo de esfuerzos cortantes cuando este elemento queda sujeto a flexión pura. Este elemento cuenta con tres grados de libertad traslacionales en cada nodo y puede proveer información acerca de la variación tridimensional de los esfuerzos y deformaciones del elemento. En la Fig. 2.18 se puede apreciar al elemento SOLID.

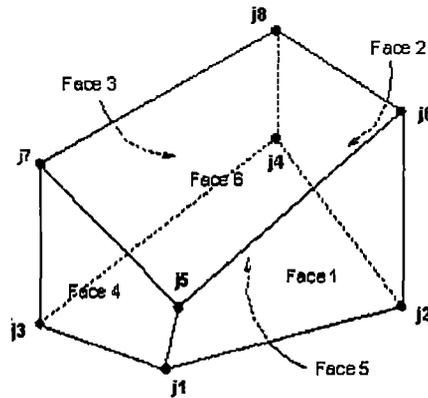


Figura 2.18 Elemento SOLID de ocho nodos

Se debe notar que no existe la necesidad de crear una superficie de referencia cuando se usan elementos sólidos. La metodología a utilizar en cuanto a la discretización del domo es la misma que en los casos anteriores para una adecuada comparación de respuestas de interés. Además de esto se cuidará que relación de aspecto (relación entre la dimensión más larga y la más corta) de cada elemento no supere el valor de 4. Posteriormente al modelado de la estructura, se utilizarán cortes transversales (Section Cuts) para obtener fuerzas resultantes en cada sección requerida del modelo. La Fig. 2.19 muestra un domo modelado mediante elementos SOLID.

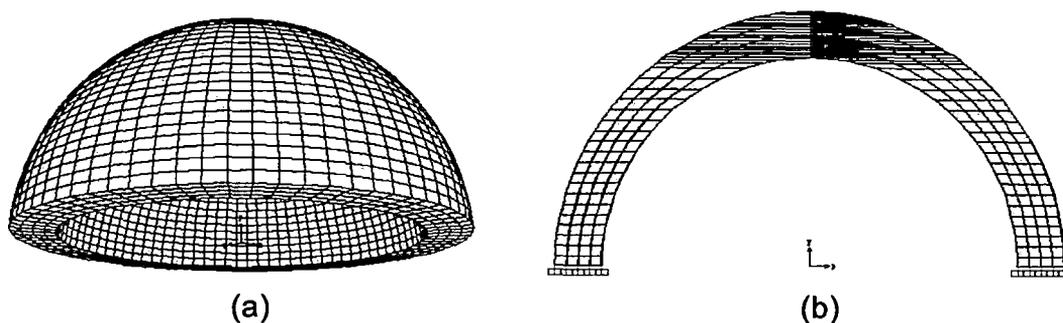


Figura 2.19 Domo modelado mediante elementos SOLID

#### 2.4.4 Modelo ANSYS con elementos sólidos

Como se mencionó, ANSYS es un software de elementos finitos que permite construir o importar modelos estructuras. El modelo discretizado se construye a partir de una geometría básica (dibujo en una, dos o tres dimensiones). Hay en general tres formas de construir un modelo discretizado:

- Construir la geometría básica y realizar el enmallado con ANSYS.
- Construir la geometría básica en un programa CAD, exportarla, y enmallarla después de importarla a ANSYS.
- Construir la geometría y realizar el enmallado en un programa CAD, e importar el modelo enmallado a ANSYS.

En este caso se eligió la primera opción, es decir todo el proceso se realizó netamente en ANSYS, el cual ofrece una interfaz gráfica sencilla que consiste en parametrizar el modelo; es decir, todo el modelo se construye en base a dimensiones que posteriormente podrían ser modificadas sin influir en el mallado para discretización. Es así que de un solo archivo puede representarse los 10 domos de la familia, únicamente variando los parámetros geométricos correspondientes.

ANSYS utiliza más de 30 tipos de elementos sólidos, cuyo uso depende de la geometría del modelo, del tipo de problema ya sea estructural, térmico, eléctrico, etc. y de los grados de libertad a considerarse por cada elemento. En este caso el programa utiliza cuando realiza el mallado, el elemento SOLID168 que es un elemento sólido tetraédrico de 10 nodos adecuado para modelar un mallado irregular en cualquier tipo de geometría. Cada nodo de este elemento tiene tres

grados de libertad traslacionales (Manual de ANSYS, 2009). La Fig. 2.20 muestra el elemento SOLID168.

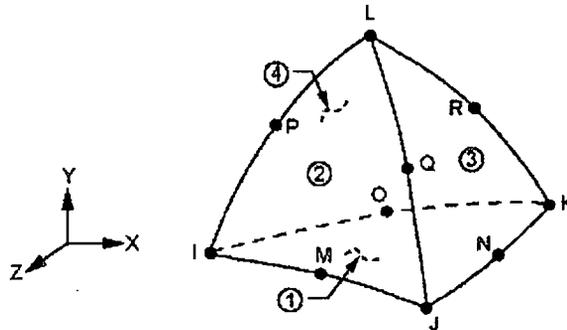


Figura 2.20 Elemento SOLID168 de ANSYS

ANSYS genera la malla adecuándose a la geometría del modelo. El programa cuenta con herramientas para mejorar la malla a criterio del usuario, como por ejemplo se podría desde colocar un tamaño máximo del elemento hasta corregir la malla en pequeñas zonas en las que por geometría compleja se crearían abundantes elementos finitos para representar tal zona adecuadamente y por tanto sería mayor el tiempo computacional para resolver el problema. El modelo de un domo en ANSYS y el mallado correspondiente se muestran en la Fig. 2.21.

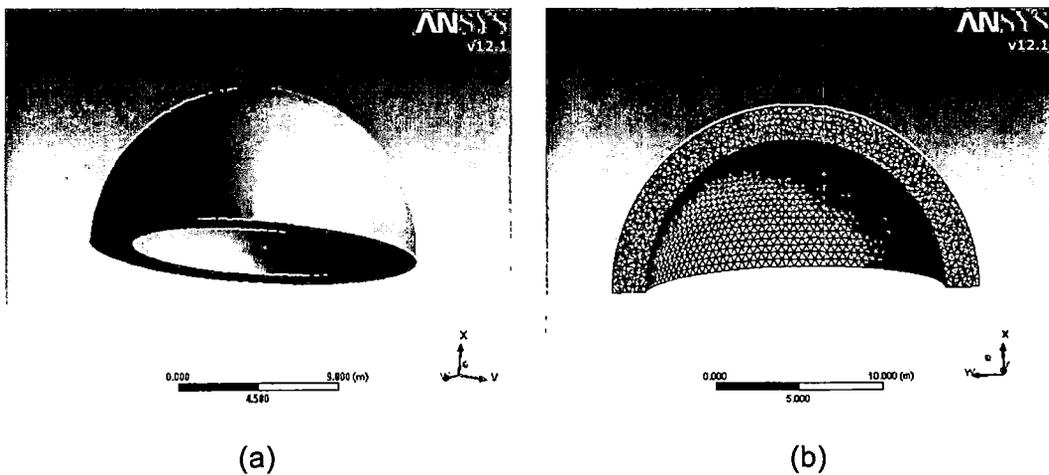


Figura 2.21 Domo en ANSYS: (a) Modelo estructural, y (b) mallado del modelo

### 3 CAPÍTULO III: MODELO ESTRUCTURAL PARAMÉTRICO

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

El problema de la evaluación de la resistencia sísmica de una estructura de la ingeniería civil representa un tema de gran valor práctico, pero al mismo tiempo el problema no es trivial. El interés sobre este problema, que se ha subestimado durante décadas, ha aumentado recientemente como consecuencia de las repetidas fallas en tales estructuras asociadas a eventos sísmicos. Mejoras en los códigos de diseño parten de nuevos y complejos problemas que son relevantes para la práctica de la ingeniería estructural. De hecho, con el fin de estimar la vulnerabilidad sísmica de una estructura existente y establecer si la estructura requiere una actualización sísmica, un ingeniero estructural requiere de herramientas adecuadas y los conocimientos suficientes. Por esta razón, en los últimos años, muchos autores desarrollaron metodologías simplificadas, basadas en el uso de modelos simplificados, para analizar el comportamiento sísmico de estructuras y para proporcionar resultados suficientemente precisos para fines de la práctica de la ingeniería. El objetivo de definir una nueva herramienta de cálculo para estimar el comportamiento sísmico de estructuras responde a simplificar la labor del diseñador y por tanto, a que se aplique en la práctica de la ingeniería actual.

Concretamente el tema de estructuras tipo cáscara, ligado a su respuesta sísmica, no ha sido tocado de una manera profunda debido a la complejidad del análisis que esto conlleva y a la escasez de tales estructuras alrededor del mundo. Específicamente, investigaciones acerca de la respuesta sísmica de domos, que son el tipo de cáscara más común utilizado debido a sus bondades estructurales y atractivo visual, han sido realizadas de manera muy puntual o el análisis se limitó al comportamiento estático y la respuesta modal de tal estructura. Incluso estos últimos temas vienen siendo tocados por los investigadores de manera muy escasa, pues las complejas condiciones de carga y geometría tridimensional hacen que la estimación de la respuesta de modelos estructurales no sea una labor trivial y por consiguiente la metodología propuesta no pueda ser aplicada en la práctica del diseño habitual. El método de elementos finitos ha sido extensivamente usado para modelar estructuras y resolver este problema. Hoy en día, las cáscaras se analizan usando elementos finitos tipo

cáscara, lo cual podría resultar en un modelo complicado para cierto tipo de ellas y con esto consumir mayor recurso computacional.

El diseño en concreto armado involucra considerar tracciones y esfuerzos cortantes que no pueden ser tomados únicamente por el concreto a menos que se tengan grandes dimensiones. Por ello, lo común en el diseño diario es que las tracciones sean tomadas por el acero de refuerzo y en el caso de estructuras cáscaras, los esfuerzos cortantes son tomados por la resistencia al corte del mismo concreto dimensionando correctamente el espesor de la estructura. Para llegar a este diseño óptimo, el ingeniero estructural calcula momentos flectores y fuerzas cortantes a lo largo de la estructura producto de las condiciones de carga a las que estaría sometida la estructura. Un procedimiento previo consiste en predimensionar la estructura, donde se establecen unas dimensiones orientadoras de las secciones transversales, que sirven de base para el cálculo de comprobación y reajuste de las dimensiones definitivas de las secciones. Tanto para la estimación de las dimensiones como para el cálculo de fuerzas en la estructura, los diseñadores siempre buscan usar un “modelo simplificado” que modele la estructura rápida y eficientemente, y les permita tener una idea preliminar del comportamiento de tal estructura y con esto plantear sus alternativas de diseño. Para este propósito y considerando las complicaciones analíticas que trae el comportamiento de domos, añadidos al incremento de la preocupación en el diseño sísmico de estructuras, se propone un modelo discreto simplificado para estimar las respuestas sísmicas de domos hemisféricos que facilite al ingeniero estructural realizar un prediseño de dicha estructura que resista tales solicitaciones. El modelo se basa en el proceso de discretización utilizando un elemento finito, el cual tiene la formulación más simple como lo es un elemento viga, que reemplazaría a los elementos cáscara comúnmente usados. Éste obtiene el carácter de modelo de elementos finitos simplificado al utilizar tal elemento de análisis para simplificar la solución al problema dinámico.

### 3.2 DEFINICIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL

La superioridad estructural de los domos como coberturas se encuentra en la rigidez y resistencia de su geometría, la cual le permite mantenerse estable sin necesidad de apoyos intermedios (como columnas). Por ello, no es extraño el ligero incremento de las construcciones de estructuras tipo domo alrededor del

mundo. Sin embargo, su uso viene siendo limitado a su vez por la complejidad de su análisis; la interacción entre su comportamiento a flexión y ante fuerzas axiales complica su análisis (Soedel, 2004). Como consecuencia de esto, aún existiendo una cantidad significativa de investigaciones analíticas sobre el tema, hay una relativa escasez de estudios conducentes específicamente a la obtención de la respuesta dinámica de domos sometidos a cargas sísmicas severas que aseguren un buen diseño y ejecución de tales estructuras.

La integridad del domo de concreto, en este caso hemisférico, depende del espesor de la pared, pues el domo al recibir las cargas (axisimétricas o asimétricas), cuyas magnitudes dependen directamente del radio medio, las transmite a través de sus paredes. De acuerdo a lo anterior, se debe tener consideración en el dimensionamiento de tales magnitudes geométricas para un correcto diseño de la estructura.

Como fue expresado, los diseñadores aplican la herramienta más simple (que no es lo mismo que la más burda) y que le tome menor tiempo de análisis, la cual represente adecuadamente las fuerzas o esfuerzos de los cuales depende el diseño óptimo. Con esta iniciativa, el modelo planteado busca generar un proceso simplificado de análisis de una estructura complicada como lo es un domo hemisférico, que simulará y predecirá el comportamiento sísmico del sistema. El proceso idealizará a la estructura de domo física mediante un modelo matemático para el cual se representarán los detalles físicos relevantes en el proceso de análisis para que el sistema sea lo más parecido a la realidad. Detalles tales como ubicación y determinación del tipo de apoyo, selección del tipo de elemento a usar y los parámetros geométricos significantes para predecir la respuesta sísmica de estas estructuras serán tomados en cuenta al momento de plantear el modelo.

La estructura real de domo tiene un número infinito de grados de libertad. Para realizar el modelamiento se tendrá como objetivo reducir el sistema a un número finito de ellos y de modo que a la vez se tenga el menor número de grados de libertad posibles mediante el proceso de discretización. Los GDL a su vez serán los suficientes con tal que representen las respuestas sísmicas de la estructura de forma adecuada.

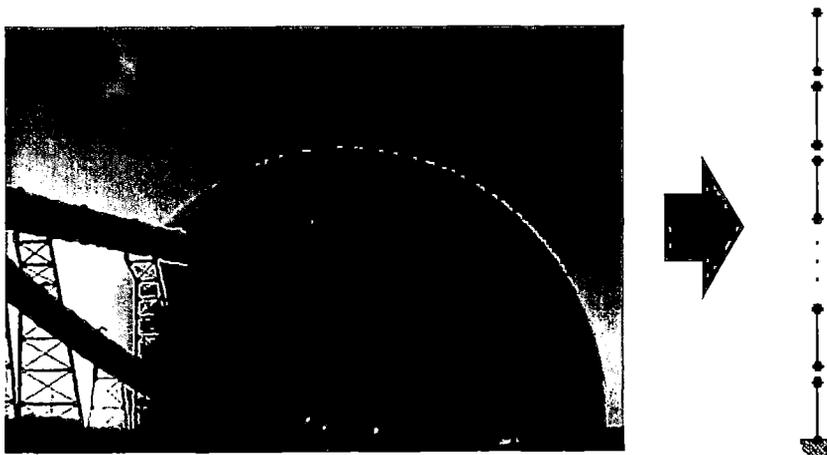
El procedimiento práctico en la actualidad para analizar este tipo de estructuras consiste en plantear la superficie media semiesférica del domo y subdividirla en componentes de geometría más simple denominados elementos finitos, los cuales son bidimensionales de tipo cáscara (Shell). Como se conoce por la metodología del MEF, la respuesta de cada elemento se expresa en términos de un número finito de grados de libertad representado por un conjunto de puntos nodales. Si bien con esta metodología y dependiendo de la cantidad de GDL considerados se consiguen respuestas aproximadas de gran validez, muchas veces dependiendo de la magnitud del problema, la simulación no converge rápidamente a la solución y termina por demorar el proceso de análisis. Problema debido en parte a las características del proceso de mallado, cuyos errores podrían deberse a la desatención de características de los elementos o ignorancia del diseñador del método, el cual requiere (en este caso de elementos finitos y otros más complicados) ciertas consideraciones al momento de discretizar como la relación de aspecto de los elementos, los grados de libertad considerados, número de nodos en cada elemento finito, etc.

Si bien el ingeniero estructural podría conocer ligeramente el método de elementos finitos, es posible que se genere un modelo complicado aplicando este tipo de elementos que implicaría la no comprensión adecuada de los resultados obtenidos y por tanto, un probable diseño pobre. De esta manera surge la iniciativa de simplificar este proceso práctico de análisis utilizando el mismo método y proceso de discretización pero empleando el elemento finito más simple (sin llegar a ser trivial) como es el elemento unidimensional tipo viga. La metodología convertiría un modelo tridimensional en uno mucho más simple para realizar un análisis sísmico, en este caso las simplificaciones serían posibles debido a la geometría y el tipo de carga aplicada que permiten reducir el análisis a un plano de simetría, el cual sería el que pasa por el eje del domo en la dirección del sismo considerado. Este modelo permitiría a la vez reducir el dominio de conocimientos del MEF por parte del diseñador facilitándole la lectura y comprensión de las respuestas obtenidas.

Obviamente la validez del modelo propuesto se tiene que demostrar mediante un análisis de sensibilidad, el cual estaría basado en respuestas señaladas como "exactas", que corresponderían a las dadas por el método de elementos finitos utilizando elementos cáscara y/o sólidos. Estas respuestas, en este caso

sísmicas, se compararían con las dadas por el modelo propuesto y se prestaría especial atención que el error relativo sea lo suficientemente pequeño para fines de diseño estructural.

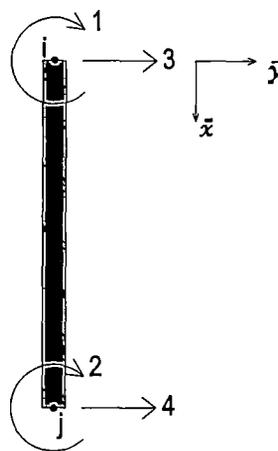
El modelo consiste en representar a la estructura continua tipo domo hemisférico como una viga vertical en voladizo (empotramiento perfecto en la base y libre en el extremo opuesto) de eje recto y de sección variable. Se considera el comportamiento elástico lineal del material y con propiedades físicas y geométricas (área, inercia, etc.) variables con la altura. Con esta forma de idealización se podría representar el domo con un solo elemento viga, pero se encontrarían respuestas alejadas de la realidad pues el MEF se basa precisamente en representar tal cuerpo por un ensamble de elementos más simples. A medida que se incrementa el número de grados de libertad, la solución del modelo discreto mejora hasta que converge a un valor donde el error de discretización es suficientemente pequeño. En síntesis, este modelo subdividirá la viga vertical que representa el domo en subelementos tipo viga más pequeños en un número tal que capture el comportamiento físico dominante del sistema donde el error de discretización sea menor a una tolerancia dada. Mediante la Fig. 3.1 se muestra la forma de idealización propuesta para simular el comportamiento sísmico de domos hemisféricos de concreto armado.



*Figura 3.1 Modelamiento de domo hemisférico mediante elementos viga*

El procedimiento a seguir para la discretización de la estructura considerando el elemento viga consiste en seccionar el domo longitudinalmente en un número determinado de tales elementos discretos, los cuales están interconectados en

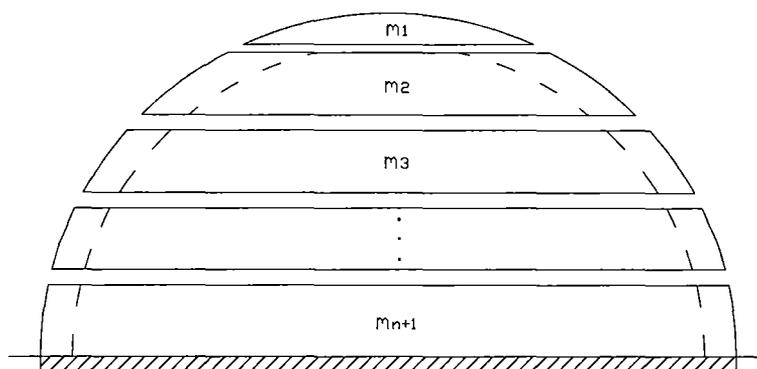
un número finito de nudos. Estos miembros estarán interconectados por variables denominadas desplazamientos nodales y fuerzas nodales, las cuales están relacionadas por las ecuaciones de rigidez del miembro. Cada elemento tendrá su sistema de coordenadas locales, con el cual podrán definirse sus propiedades geométricas necesarias para aplicar el MEF. La ubicación del eje coordenado de origen es arbitraria; en este caso se ubica en uno de los nudos extremos que forman el elemento. En tales nudos se consideran dos grados de libertad, un desplazamiento lateral y otro rotacional como se muestra en la Fig. 3.2.



*Figura 3.2 Grados de libertad considerados en un elemento típico referido a su sistema de coordenadas locales  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$*

Los dos nodos extremos se denominan  $i$  y  $j$ ; y el sistema de coordenadas locales es  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ , con origen en el nodo  $i$ . Una vez planteados los grados de libertad de los elementos finitos, surge la necesidad de definir la longitud de éstos. El método permite tener elementos interconectados de longitud arbitraria. Se tiene como recomendación colocar puntos nodales donde se tengan cargas concentradas y donde haya un cambio brusco de la sección transversal. Sin embargo, en este caso el modelo servirá para realizar un análisis sísmico, el cual se genera mediante una aceleración en la base que origina fuerzas a lo largo de la estructura de magnitud dependiente de la distribución de masas. Además, la sección transversal de la viga en volado considerada varía a lo largo de su eje siguiendo una distribución sin cambios bruscos de sección transversal. En consecuencia no se tendrá que considerar los puntos nodales recomendados y la discretización de la viga en voladizo considerada sería arbitraria. Con fines de

implementar el proceso en un lenguaje de programación se busca tener elementos de igual longitud, pues las funciones de desplazamiento a utilizar (vistas en el capítulo I) para cada elemento serían idénticas, simplificando el proceso de cómputo.



*Figura 3.3 Metodología de discretización del domo hemisférico*

En la Fig. 3.3 se muestra el proceso de discretización planteado, donde se secciona la estructura mediante planos paralelos equidistantes que generan elementos de la misma longitud, lo cual será equivalente a la división del radio interior del domo en partes iguales. El motivo de proceder de esta manera consiste en que cada elemento viga del domo discretizado tenga el mismo patrón geométrico; en otras palabras, si seccionamos al domo de la manera propuesta, cada elemento representará una zona esférica hueca, quedando un elemento adicional ubicado por encima del radio interior de forma de casquete esférico, denominado corona del domo, de altura igual al espesor del domo; para representar en su totalidad la estructura. La ventaja de proceder de esta manera reside en el menor coste computacional ya que al tener un mismo patrón geométrico fácilmente se puede reducir a un bucle único la mayor parte del cuerpo del domo, y aisladamente se programaría lo correspondiente a la corona del domo.

Es evidente que la eficacia de este y cualquier modelo está fuertemente ligada a una definición adecuada de los parámetros mecánicos de tal modelo simplificado de manera que la equivalencia entre la continuidad y el modelo discreto se cumpla. Como se vio en el capítulo anterior, los parámetros geométricos de los cuales depende la respuesta dinámica de esta clase de domo son el radio medio  $R$  y el espesor  $e$ . Pero estas magnitudes son constantes en la dirección radial del

domo y al tener un seccionamiento mediante planos paralelos a la base implica tener otros parámetros dependientes de los anteriores, con los cuales se calcularán las propiedades geométricas de cada elemento viga que son necesarias para el planteamiento del MEF.

En primer lugar, la sección transversal de un elemento viga típico (excepto la corona del domo) es un círculo hueco de radio interno y espesor variables a los cuales denominaremos  $r_i$  y  $e'$  respectivamente. Estos últimos son variables a lo largo del eje del domo y dependientes de su posición  $x$ . Considerando el sistema de coordenadas globales como se muestra en la Fig. 3.4, se plantean relaciones geométricas entre los parámetros globales de un domo y estos últimos parámetros; así como se plantea la variación de éstos en función de la posición  $x$  en las Ecs. (3.1) a (3.3).

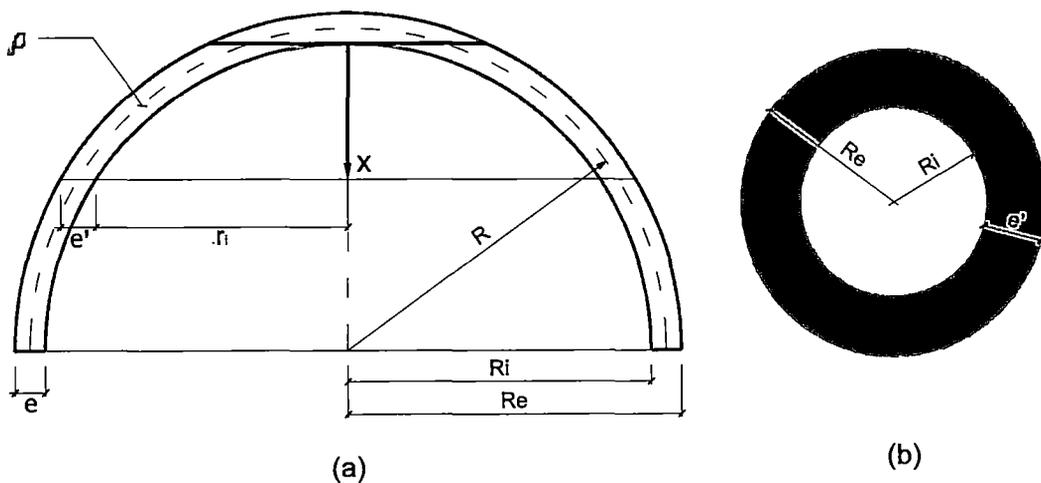


Figura 3.4 Parámetros geométricos globales y auxiliares del modelo simplificado

$$R_i = R - e/2 \quad (3.1)$$

$$r_i = \sqrt{2R_ix - x^2} \quad (3.2)$$

$$e' = \sqrt{(R_i + e)^2 - (R_i - x)^2} - \sqrt{2R_ix - x^2} \quad (3.3)$$

Se deja en claro que las Ecs. (3.1) a (3.3) son válidas únicamente para el sistema de coordenadas globales planteado y con el cual se realizarán todas las expresiones posteriores, pero el modelo simplificado es indiferente a un cambio del sistema de coordenadas globales a otra posición donde sea del interés del ingeniero.

El sistema estructural planteado tendría en total  $n + 1$  elementos, donde  $n$  es el número de elementos finitos geoméricamente equivalentes generados mediante el seccionamiento del radio interno en partes iguales, los cuales se adicionan al elemento que representa la corona del domo. De acuerdo con esto y considerando un grado de libertad traslacional y otro rotacional por cada nodo que conecta cada elemento, se consideran en total  $2(n + 1)$  grados de libertad como se muestra en la Fig. 3.5, los cuales permitirán encontrar las propiedades tales como rigidez y masa del sistema planteado.

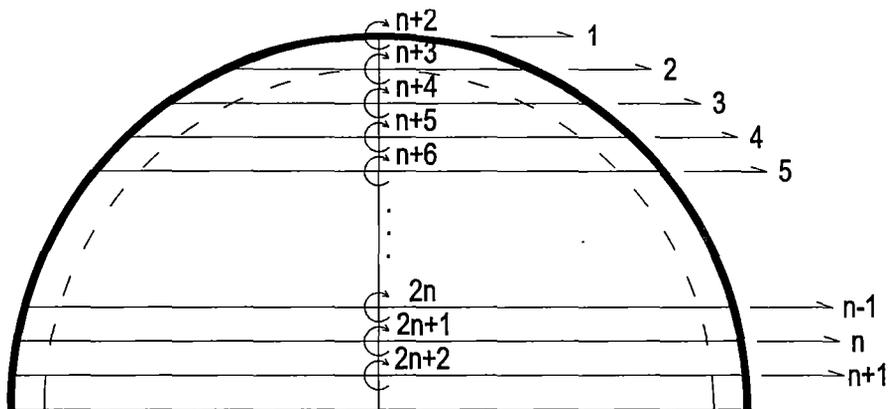


Figura 3.5 Grados de libertad del modelo planteado

El modelo planteado supone que los puntos del domo a un mismo nivel tienen el mismo desplazamiento. Este desplazamiento se representa por cada uno de los grados de libertad traslacionales. Además la sección analizada gira en torno a su eje de simetría; este giro se representará a través de los grados de libertad rotacionales. Para determinar la respuesta dinámica de este sistema estructural de varios grados de libertad se puede utilizar el procedimiento de análisis modal, donde cada modo representa una tendencia de movimiento de una estructura, la cual describe por medio de una forma y un período natural que corresponden al caso en que la estructura estuviese en vibración libre sin amortiguamiento. Se puede demostrar que después de liberar una estructura sin amortiguamiento, que ha sido forzada a adoptar inicialmente una forma igual a la de un modo de vibración, ésta seguirá vibrando libremente con la frecuencia circular del modo y manteniendo la forma modal (Bazán, 2004). El análisis modal permite calcular la forma y el período de vibración de cada modo, utilizando las masas y rigidez de la estructura. Como primer paso en el análisis sísmico del sistema estructural

planteado se encontrarán las frecuencias y las formas modales de vibración libre.

Como se vio en el primer capítulo, el factor básico que controla las propiedades de rigidez de un elemento finito individual es la variación de los desplazamientos dentro del cuerpo del elemento expresada por las funciones de desplazamiento. Claramente, la distribución de tensiones que podría desarrollarse dentro de cada elemento depende directamente de tales funciones consideradas. En este caso resultarían tensiones constantes debido a las funciones lineales planteadas. Los desplazamientos nodales que controlan las fuerzas de inercia en el análisis dinámico no son susceptibles a variaciones locales de tensiones como lo es la distribución de esfuerzos (Clough y Penzien, 2003). En consecuencia, se necesita un menor número de grados de libertad para realizar un análisis dinámico de desplazamientos adecuado. Posteriormente la distribución de esfuerzos se determinará a partir de estos desplazamientos mediante un análisis estático. Mediante el procedimiento de condensación estática, se reducirá el número de grados de libertad del modelo matemático planteado, con el objetivo de encontrar los desplazamientos nodales dinámicos.

El concepto de condensación estática se basa en considerar restricciones en el análisis de equilibrio estático. Los grados de libertad del modelo planteado se dividirán en dos categorías: aquellos donde no se desarrollan fuerzas inerciales y aquellos donde se inducen fuerzas inerciales importantes. Esto se debe a que desde el punto de vista dinámico sólo interesan los grados de libertad en los que se generan fuerzas de inercia significativa, denominados grados de libertad dinámicos. Cada grado de libertad dinámico provee una ecuación de equilibrio dinámico y la vibración resultante del sistema consiste en  $m$  de estas ecuaciones, donde  $m$  es el número total de grados de libertad dinámicos. Esta operación tiene por objeto reducir la matriz de rigidez con los términos asociados exclusivamente a las fuerzas significativas sobre la estructura. De esta manera, el propósito del proceso es la obtención de ciertos desplazamientos, con los cuales se calcularán los desplazamientos restantes, que servirán a su vez para establecer completamente las fuerzas internas. El resultado de la condensación estática es la matriz de rigidez lateral para obtener desplazamientos laterales del sistema.

La forma matricial para vibración libre no amortiguada en este caso se puede establecer como:

$$[M]_{mxm} \cdot \{\ddot{u}\} + [K_{lat}]_{mxm} \cdot \{u\} = 0 \quad (3.4)$$

Donde  $m$  en el modelo planteado sería igual a  $n + 1$ , correspondientes a los grados de libertad traslacionales  $1 \rightarrow n + 1$ . La matriz de masa de la ecuación podría ser consistente o concentrada; en este caso, para una mejor representación de las características inerciales se utilizó el criterio de masas consistentes, el cual considera el acoplamiento entre los grados de libertad rotacionales y traslacionales.

Si se supone que el movimiento en vibración libre del sistema es armónico simple, la Ec. (3.4) se puede expresar como:

$$([K_{lat}]_{mxm} - \omega_m^2 [M]_{mxm}) \{u\} = 0 \quad (3.5)$$

Donde  $\omega_m$  son las frecuencias naturales del sistema. Para propósitos de analizar respuestas dinámicas se expresa la posición desplazada del sistema en términos de las formas de modo de vibración libre. Considerando este sistema planteado, estas formas constituyen  $m$  patrones de desplazamiento, cuyas amplitudes servirían como coordenadas generalizadas. Cualquier vector desplazamiento (en este caso  $\{u\}$ ) se puede desarrollar mediante la superposición de amplitudes adecuadas de modos normales (Clough y Penzien, 2003). Así, la vibración libre de un sistema no amortiguado se describe matemáticamente por la Ec. (3.6):

$$\{u\} = \Phi \cdot \{q\} \quad (3.6)$$

Donde  $\Phi$  es la matriz de forma de modo. Reemplazando las Ecs. (3.6) en (3.5), se llega a la ecuación característica de la vibración libre, cuya solución no trivial se consigue sólo si el determinante de los coeficientes es igual a cero. Es decir se debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$([K_{lat}]_{mxm} - \omega_m^2 [M]_{mxm}) \Phi = 0 \quad (3.7)$$

$$|[K_{lat}]_{mxm} - \omega_m^2 [M]_{mxm}| = 0 \quad (3.8)$$

Esta última expresión permitirá encontrar las frecuencias naturales del domo, con lo que posteriormente, sustituyéndolas en la Ec. (3.7), se obtendrán la forma de vibrar para cada modo. A partir de las frecuencias naturales se obtienen los valores de los períodos naturales de la estructura. Se debe notar que las formas

de modo y las frecuencias naturales halladas corresponden al movimiento dinámico en la dirección considerada por los grados de libertad traslacionales propuestos. Esta acotación es relevante pues el domo al ser una estructura tridimensional tiene infinitos grados de libertad, por tanto infinitas formas de vibrar, las cuales no se limitan a la dirección considerada; sino a todas las direcciones traslacionales y rotacionales. Por tanto, será de interés en esta investigación el período de vibración fundamental correspondiente a la forma de modo en la dirección considerada, el cual consume mayor masa participativa tanto en el modelo propuesto y en un modelo de elementos finitos más complejo.

Como paso final, para representar el comportamiento sísmico del domo se aplicará un análisis modal espectral al modelo, donde los valores correspondientes a los períodos naturales servirán para obtener aceleraciones espectrales a partir de una curva de respuesta apropiada.

Una vez planteada la metodología para modelar la estructura domo hemisférico, es necesario para representar el comportamiento sísmico del modelo propuesto, hallar sus propiedades como la rigidez y la masa. Más adelante se desarrollarán las ecuaciones para las matrices de rigidez y masa de un elemento finito típico propuesto, considerando el comportamiento elástico del sistema, de acuerdo a las expresiones formuladas en el primer capítulo.

La eficacia del modelo propuesto será evaluada por medio de un análisis de sensibilidad, donde se establecerán el número de elementos necesarios para discretizar un domo comparando las respuestas de interés dadas por el modelo con respuestas dadas por los modelos de elementos finitos más complejos considerados en el capítulo anterior. Este análisis se aplicará sobre la familia 10 de domos hemisféricos propuesta y tendrá validez únicamente dentro del rango presentado del parámetro adimensional. Este proceso en su totalidad se implementará mediante una rutina en el programa MATLAB v7 (ver Anexo A), donde se encontrarán respuestas de interés descritas más adelante. Se empleó además el Toolbox StrUC únicamente para realizar el proceso de ensamble de las matrices de rigidez y masa del sistema. Con este modelo se conseguirá menor coste computacional si se compara con un modelo de elementos finitos tradicionales, y a la vez se establecerá un procedimiento práctico desde el punto de vista ingenieril que obtenga respuestas de interés que tengan un error mínimo con fines de diseño.

### 3.2.1 Hipótesis del modelo

Para realizar un análisis de la respuesta de cualquier sistema se parte de algunas simplificaciones, con las que se aborda el problema de manera más sencilla y a menudo suficiente para fines prácticos de ingeniería. Sin embargo, deben comprenderse las hipótesis iniciales de cada tipo de análisis, pues en ellas están contenidas sus limitaciones, que contribuyen a establecer sus campos de aplicación. En esta investigación se encontrará la correcta relación entre los parámetros geométricos y la respuesta sísmica de los domos mediante el modelamiento planteado de la estructura, el cual se basa en las siguientes suposiciones:

- En primer lugar, el material utilizado tanto en el modelo propuesto como en los modelos de elementos finitos creados en SAP2000 es concreto armado con propiedades mecánicas mostradas en la Tabla 2.1, el cual se considera como un material elástico donde se cumple la ley de Hooke (Ec. 3.9).

$$E = \sigma_x / \epsilon_x \quad (3.9)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal o de Young del material. Además se considera que el material es isotrópico; es decir, sus propiedades físicas no dependen de la dirección. Por tanto, el módulo de elasticidad transversal o de corte  $G$  está relacionado con el módulo de elasticidad longitudinal y el coeficiente de Poisson  $\nu$  mediante la siguiente relación:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.10)$$

Este módulo relaciona las deformaciones por corte con el esfuerzo cortante.

- La estructura presenta deformaciones pequeñas. Los problemas asociados con grandes desplazamientos o efectos de segundo orden, en otras palabras geometría no lineal, se considera que no ocurren.
- En cuanto al modelo, se considera al domo hemisférico como una viga en volado, la cual posee empotramiento perfecto en la base y está libre en el extremo opuesto.

- El modelo considera simultáneamente efectos de flexión y corte conforme al modelo de viga de Timoshenko en el plano, planteando una matriz de masa consistente que incluye los efectos de inercia rotacional de la sección transversal. El motivo de esta consideración se debe a que los elementos finitos generados al seccionar el domo de la manera expuesta son elementos viga cortos, cuya sección transversal es mucho mayor que la longitud de su eje, y en consecuencia las deformaciones debidas al corte no son despreciables.
- Existe una situación de esfuerzos en el plano; por lo tanto, no existen esfuerzos directos o cortantes fuera del plano.
- En cada punto de la viga, el desplazamiento en la dirección analizada depende únicamente de la posición  $x$  (Fig. 3.4).
- Al considerar el modelo como viga, se supone que los desplazamientos en la dirección analizada de todos los puntos del domo a un mismo nivel o posición  $x$  son iguales. Asimismo dichos puntos giran, con respecto al eje perpendicular al plano en análisis, la misma cantidad.
- El modelo brindará respuestas globales de interés y no se hallarán respuestas para una ubicación específica en las secciones transversales dentro del domo.
- La razón de amortiguamiento considerada para esta estructura es 5%. Ésta será de interés posteriormente para combinar las respuestas modales por el método CQC (Combinación cuadrática completa), el cual considera además una correlación entre los valores modales máximos.
- La aplicabilidad del método está limitada a domos hemisféricos de concreto armado cuya relación  $ER$  varía de 0.01 a 0.417.
- El método propuesto necesita ser validado en detalle por medio de simulación numérica.

### 3.2.2 Matrices estructurales del modelo propuesto

En la sección 1.4 se describió el procedimiento para encontrar las matrices estructurales de un elemento finito viga arbitrario. En esta sección se aplicará tal metodología y los parámetros geométricos auxiliares planteados en las Ecs. (3.1) a (3.3) para hallar las matrices estructurales correspondientes a los elementos viga utilizados específicamente en el modelo propuesto.

### 3.2.2.1 Matriz de rigidez del modelo domo

Como se expresó, el problema de definir las propiedades de rigidez de cualquier estructura se reduce básicamente a la evaluación de la rigidez de un elemento típico. Según la metodología propuesta se tiene dos tipos de elementos finitos viga que aparecen por la forma de discretización aplicada al domo, los cuales tienen la forma de elementos mostrados en la Fig. 3.6.

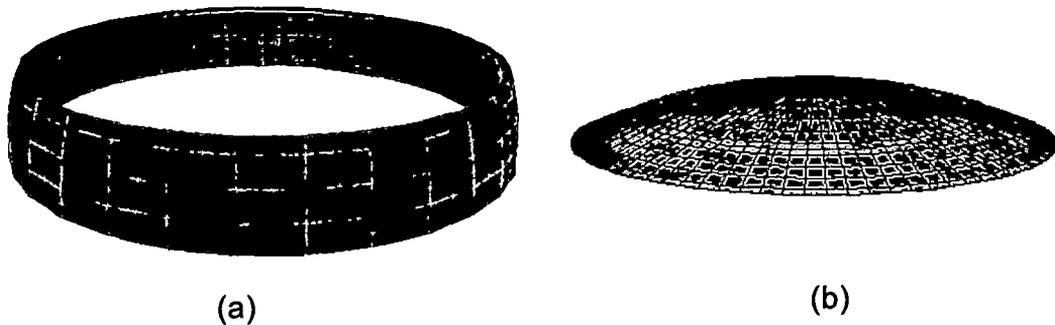


Figura 3.6 Elementos finitos tipo viga generados: (a) De forma de zona esférica hueca, y (b) de forma de casquete esférico

Un diferencial de volumen de un elemento viga arbitrario puede expresarse de acuerdo a la Ec. (3.11).

$$dV = d\bar{x} \cdot dA \quad (3.11)$$

Donde  $L$  representa la longitud total del elemento finito y  $\bar{x}$  es la dirección de análisis a lo largo del eje del elemento. En la Ec. (1.20), la  $V$  de la integral indica que se integra sobre todo el volumen del elemento y se resolvería a través de una integral triple. Esta integral se reduce si reemplazamos la Ec. (3.11) en la Ec. (1.20) como se muestra a continuación:

$$k_{ij} = E \int_0^L \int_A N''_{bi} N''_{bj} z^2 dAd\bar{x} + G \int_0^L \int_A N'_{si} N'_{sj} dAd\bar{x} \quad (3.12)$$

$$k_{ij} = E \int_0^L N''_{bi} N''_{bj} I(\bar{x}) d\bar{x} + G \int_0^L N'_{si} N'_{sj} \mu A(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.13)$$

Donde  $I(\bar{x})$  y  $\mu A(\bar{x})$  son el momento de inercia y el área efectiva de cortante respectivamente de una sección transversal en la posición  $\bar{x}$  dentro del elemento, según el sistema de coordenadas locales mostrado en la Fig. 3.2. Las ecuaciones de estas dos propiedades geométricas se establecerán en primer lugar para los elementos de forma de zona esférica hueca, las cuales serán planteadas según los parámetros geométricos auxiliares y el sistema de

coordenadas propuestos en la Fig. 3.4. Como se mencionó, la sección transversal en una posición cualquiera  $x$  dentro del domo es un círculo hueco o sección tubular, en la cual se conoce que el momento de inercia es una diferencia entre la inercia del círculo total que subtiende el radio exterior y la inercia del círculo hueco que subtiende el radio interior. Esta expresión queda desarrollada en la Ec. (3.15).

$$I(x) = \frac{1}{4}\pi \left[ \left( \sqrt{2R_i \cdot x - x^2} + e' \right)^4 - (2R_i \cdot x - x^2)^2 \right] \quad (3.14)$$

$$I(x) = \frac{1}{4}\pi(2R_i + e)^2 e^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot e \cdot x(2R_i + e)(2R_i - x) \quad (3.15)$$

De la misma forma, se puede hallar la expresión para el área efectiva de cortante de una sección transversal. Ésta se considera como una parte del área geométrica total de la sección, la cual se reduce para mantener la validez de las expresiones resultantes de la Ec. 1.16. Se demuestra que el área geométrica total es constante a lo largo del eje  $x$  para cualquier sección transversal del domo, por tanto el área de corte efectiva se expresa de la siguiente manera:

$$\mu A = \mu \cdot e \cdot (2R_i + e) \quad (3.16)$$

Donde  $\mu$  es un factor adimensional denominado factor de cortante, el cual varía dependiendo de la forma geométrica de la sección transversal analizada y es menor que la unidad. En este caso correspondería al factor de cortante de una sección tubular, el cual será tocado especialmente en la siguiente sección.

Por otra parte, las propiedades geométricas para el elemento finito de forma de casquete esférico se plantean conforme a su sistema de coordenadas locales teniendo en cuenta que la sección transversal típica de este elemento es un círculo de radio variable, en el cual se conoce que  $\mu = 0.90$ .

$$I_c(\bar{x}) = \frac{1}{4}\pi[(R_i + e)^2 - (R_i + e - \bar{x})^2]^2 \quad (3.17)$$

$$\mu A_c(\bar{x}) = 0.90\pi[(R_i + e)^2 - (R_i + e - \bar{x})^2] \quad (3.18)$$

Reemplazando las Ecs. (3.15), (3.16), (3.17) y (3.18) en la Ec. (3.13) se pueden encontrar los coeficientes de rigidez de cada elemento finito viga propuesto. Sin embargo, en el caso de los elementos viga de forma de zona esférica, el momento de inercia de una sección transversal típica se ha planteado con respecto al sistema de coordenadas ubicado según la Fig. 3.4; por lo tanto, para

llevar esta expresión al sistema de coordenadas locales de cada elemento generado, será necesario realizar únicamente una traslación paralela de ejes coordenados. Debido a que cada elemento será de la misma longitud, definimos el parámetro geométrico  $H$ , que equivale a la altura de un elemento viga discretizado de la manera propuesta:

$$H = R_i/n \quad (3.19)$$

Esto facilitará la programación computacional del método, en el cual el valor de  $x$  en coordenadas globales se reemplazará por el valor mostrado en la Ec. (3.20), convirtiendo la Ec. (3.13) en una ecuación genérica para todos los elementos viga de forma de zona esférica hueca.

$$x = \bar{x} + (i - 1)H \quad (3.20)$$

Donde  $i$  es un número entero que varía desde 1 hasta  $n$ . Una vez encontradas las matrices de rigidez de todos los elementos finitos que conforman el domo se procede a ensamblar la correspondiente matriz de rigidez de la estructura siguiendo el orden de grados de libertad ilustrados en la Fig. 3.5. Posteriormente se aplica el proceso de condensación estática a esta matriz, para hallar la matriz de rigidez lateral, como se detalla a continuación.

Se divide la matriz de rigidez en submatrices correspondientes a los grados de libertad traslacionales y rotacionales, entonces la Ec. (1.9) se puede escribir en forma particionada:

$$\begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t\alpha} \\ k_{\alpha t} & k_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ v_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_t^S \\ f_\alpha^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_t^S \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Donde  $v_t$  representa las traslaciones y  $v_\alpha$ , las rotaciones; con los subíndices correspondientes para identificar los coeficientes de las submatrices de rigidez. Ahora, si ninguno de los vectores de fuerza que actúa en la estructura incluye cualquier componente rotacional, es evidente que las fuerzas elásticas rotacionales se anulan; es decir,  $f_\alpha^S = 0$ . Cuando esta restricción estática se introduce en la Ec. (3.21), es posible expresar los desplazamientos rotacionales en función de los términos traslacionales por medio de la segunda ecuación matricial,

$$v_\alpha = -k_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot k_{\alpha t} \cdot v_t \quad (3.22)$$

Sustituyendo esta ecuación en la primera ecuación matricial de la Ec. (3.21), se encuentra la expresión para la matriz de rigidez lateral de la estructura.

$$K_{lat} = k_{tt} - k_{t\alpha} \cdot k_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot k_{\alpha t} \quad (3.23)$$

Esta matriz tiene  $n + 1 \times n + 1$  coeficientes de rigidez en el modelo simplificado planteado.

- *Área efectiva de cortante*

Como se ha visto en la sección anterior, en el cálculo de los coeficientes de rigidez aparece el término  $\mu A$  denominado área efectiva de cortante. Debido a la suposición de un esfuerzo y deformación cortante constantes a través de la sección transversal de la viga, se necesita un factor de corrección por cortante en las ecuaciones de la viga de Timoshenko. Si la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de una sección transversal de un elemento viga, la deformación por distorsión de la sección sería también constante, tal como se muestra en la Fig. 3.7 (a), donde  $V_y$  es la fuerza cortante en la dirección  $y$  actuando en la sección.

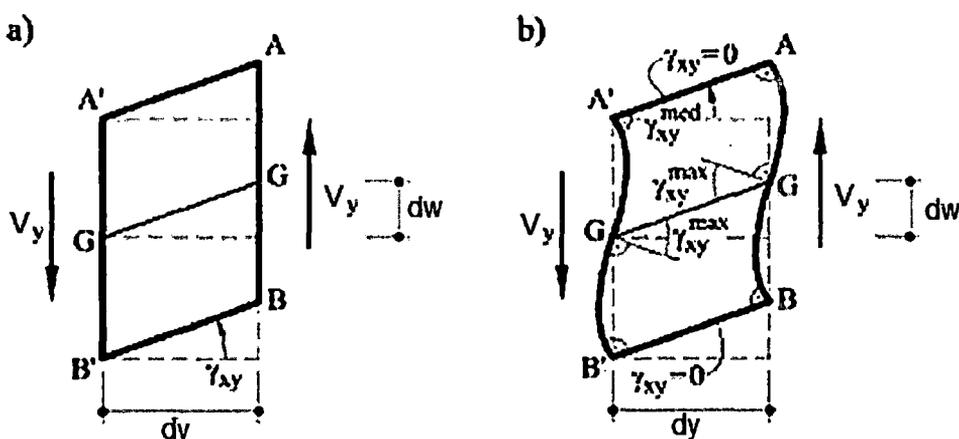


Figura 3.7 Deformación de una fibra debida a un esfuerzo cortante: (a) Teoría elemental, y (b) teoría de Collignon

Sin embargo, si el esfuerzo cortante varía en la sección de acuerdo con la fórmula de Collignon- Jourawski, resulta que las distorsiones angulares  $\gamma_{xy}$  también varían por una expresión análoga y, por esta razón, la sección no permanece plana, sino que sufre una deformación fuera de su plano, tal como se muestra en la Fig. 3.7 (b). A este efecto se le denomina alabeo de la sección (Cervera, 2002). En particular, para secciones rectangulares o circulares, en la

fibra media GG' se da el esfuerzo cortante máximo y, por tanto, la distorsión máxima  $\gamma_{xy}^{max}$ .

Si la viga es de sección constante y el esfuerzo cortante es uniforme, el alabeo será igual para todas las secciones. En esa situación, la deformación por esfuerzo cortante no implica variación de longitud de las fibras, y las expresiones para los esfuerzos normales obtenidos al estudiar flexión pura, suponiendo que las secciones permanecen planas, siguen siendo válidas. Aunque las secciones sometidas a esfuerzo cortante sufran alabeo, se evalúa el valor medio de la distorsión en la fibra, definido a partir del movimiento transversal relativo de una sección respecto a otra infinitamente próxima (Fig. 3.7), es decir:

$$\gamma_{xy}^{med} = \frac{dw}{dy} \quad (3.24)$$

Se denomina área efectiva de cortante según de una sección en la dirección de análisis al área equivalente sobre la que un cortante de tal dirección, distribuido uniformemente, produciría la misma distorsión media que en la sección real (Cervera, 2002). Así, la ecuación correspondiente a esta distorsión para un elemento del modelo propuesto en la dirección  $\bar{y}$  se puede:

$$\gamma_{xy}^{med} = \frac{V_{\bar{y}}}{G\mu_{\bar{y}}A} \quad (3.25)$$

Donde  $\mu_{\bar{y}}A$  es el área efectiva de cortante en la dirección  $\bar{y}$ . Al factor adimensional  $\mu_{\bar{y}}$  se le denomina factor de cortante según el eje  $y$ , que en este caso se le designa simplemente como  $\mu$  porque se tiene una sola dirección de análisis. Determinar este coeficiente no tiene un único procedimiento de cálculo; es decir, hay más de una respuesta pero existen valores ya determinados y ampliamente aceptados. El área efectiva de cortante se calcula mediante fórmulas empíricas, consideraciones estáticas o métodos energéticos. Utilizando estos últimos, se tiene la fórmula largamente utilizada de la Resistencia de Materiales:

$$\mu_{\bar{y}}A = \frac{I_z^2}{\int_A \left(\frac{Q(y)}{b(y)}\right)^2 dA} \quad (3.26)$$

Donde  $Q(y)$  es el momento estático del área transversal del elemento y  $b(y)$  es el ancho variable de la sección. En este caso, como se ha visto la sección transversal del elemento finito viga de forma zona esférica hueca es una sección

anillo o tubular. Aplicando la Ec. (3.26) se encontró el valor del factor de cortante  $\mu$  para este tipo sección cuyo procedimiento de cálculo se detalla en el Anexo C.

$$\beta = \frac{R_i}{R_e} \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{4}{27\pi} \frac{1}{(1-\beta^2)(1+\beta^2)^2} \left[ 3(3-2\beta^2)(1+4\beta^2) \text{sen}^{-1} \beta - \frac{3}{2}\pi\beta^2(3\beta^2-2)(4+\beta^2) + \beta\sqrt{1-\beta^2}(13+2\beta^2)(3-2\beta^2) + \frac{15}{2}\pi - 15 \text{sen}^{-1} \beta - \beta\sqrt{1-\beta^2}(33-26\beta^2+8\beta^4) \right] \quad (3.28)$$

Por tanto, el factor de cortante es una función del parámetro adimensional  $\beta$ . La representación gráfica de esta función se muestra en la Fig. 3.8 donde se aprecia la variación de  $\mu$ , cuyo dominio es  $[0,1 >$ .

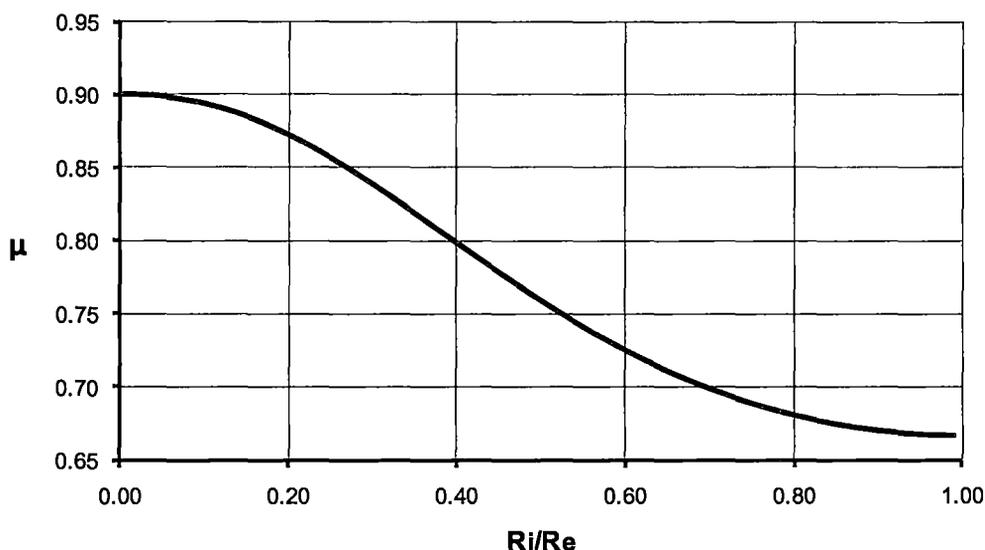


Figura 3.8 Variación del factor de cortante

Es de importancia notar que el factor de cortante varía con respecto a la posición  $x$  dentro del domo, influyendo en la formulación de las funciones de desplazamiento respectivas. Para optimizar la programación computacional del método, la función del factor de cortante se aproximó a un polinomio de sexto grado cuyo factor de correlación del ajuste es muy cercano a la unidad.

$$\mu = 1.524\beta^6 - 4.879\beta^5 + 5.358\beta^4 - 1.684\beta^3 - 0.557\beta^2 + 0.005\beta + 0.900 \quad (3.29)$$

### 3.2.2.2 Matriz de masa del domo

En la sección 1.4.2, dos niveles diferentes de aproximación fueron considerados para la evaluación de las propiedades de masa de una estructura: una aproximación elemental tomando en cuenta sólo los grados de libertad traslacionales y una aproximación de masa consistente, la cual toma en cuenta tanto los desplazamientos rotacionales como traslacionales. Si bien la aproximación elemental es mucho más fácil de implementar, el enfoque consistente lleva a una mayor precisión en los resultados. La principal ventaja de este procedimiento es que todos los aportes de energía a la respuesta de la estructura se evalúan de manera consistente, lo que permite llegar a ciertas conclusiones con respecto a los límites en la frecuencia de vibración (Clough y Penzien, 2003). Por tanto, para una mejor representación de las características inerciales de la estructura se emplea el criterio de masas consistentes.

Si reemplazamos la Ec. (3.11) en la Ec. (1.29), se reduce la integral triple planteada para un elemento viga:

$$m_{ij} = \rho \int_0^L N_i N_j A(\bar{x}) d\bar{x} + \rho \int_0^L N_{ai} N_{aj} I(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.30)$$

Se hallan las correspondientes matrices de masa consistente tanto para los elementos finitos viga de forma de zona esférica hueca como para el elemento que representa la corona del domo. De igual manera que para la optimización del proceso computacional aplicado a la matriz de rigidez de cada elemento, se utiliza la Ec. (3.20) para transformar la Ec. (3.13) en una ecuación genérica para todos los elementos viga de forma de zona esférica hueca.

## 4 CAPÍTULO IV: ANÁLISIS SÍSMICO DE LOS MODELOS ESTRUCTURALES

### 4.1 INTRODUCCIÓN

Una carga dinámica que podría aplicarse a un sistema estructural podría venir de un rango amplio de mecanismos o escenarios. De las cuantiosas fuentes de carga externa que se considerarían en el diseño de una estructura; la más importante, hablando en términos de su potencial de generar consecuencias desastrosas, es el movimiento sísmico.

El grado de importancia de la carga sísmica en cualquier parte del mundo está relacionado a su probable intensidad y su probabilidad de ocurrencia. El Perú al encontrarse dentro del Cinturón de Fuego, el cual concentra algunas de las zonas de subducción más importantes del mundo, presenta una intensa actividad sísmica, por lo cual es de suma importancia considerar la magnitud de la fuerza sísmica aplicada dentro del diseño de cualquier estructura a construirse dentro en el país. Estructuras especiales como chimeneas, torres de alta tensión, silos, etc. se construyen a menudo en nuestro país; dentro de este tipo de estructuras se encuentran los domos hemisféricos o de gran luz de concreto armado. Si bien las fuerzas dinámicas sobre éstos generalmente no controlan el diseño, se debe tener en cuenta que en áreas propensas a movimientos sísmicos severos del suelo, estas fuerzas pueden ser relevantes. Sin embargo, el comportamiento de estas estructuras bajo cargas sísmicas no ha sido muy estudiado debido a la escasez de éstas alrededor del mundo.

Estudios correspondientes a la respuesta sísmica de edificios se han realizado extensivamente durante muchos años, y consecuentemente la mayoría de códigos y normas tienen métodos de diseño válidos. No obstante, como se ha expresado a las estructuras cáscara le han dedicado un número mucho menor de investigaciones y por tanto las normativas disponibles para los diseñadores son mucho menos. Como resultado de esto, las normas establecidas para edificaciones son a menudo extrapoladas para utilizarlas sobre estas estructuras especiales, lo cual puede llevar a errores en el diseño. Debido a la variedad de formas de tales estructuras, formular una normativa de diseño sísmico para abarcar todos los tipos de cáscaras respondería a tener estudios del comportamiento sísmico de cada una de ellas, los cuales no se tienen

extensamente realizados. Los domos son la estructura cáscara más utilizada y la más eficiente; pero, debido a que se han dedicado muy pocos estudios al análisis sísmico de domos de gran luz, ningún método estático se ha adoptado para el análisis y posterior diseño de estas estructuras.

Ante la falta de investigaciones sobre el comportamiento sísmico de domos de gran luz, el presente capítulo mostrará un entendimiento de la magnitud y distribución de las fuerzas generadas en la estructura mediante la aplicación de un análisis modal espectral, el cual está basado en un espectro de diseño que representa el promedio de la envolvente de espectros respuesta de diversos sismos, con algunas consideraciones adicionales expuestas en los códigos de diseño. Esto permitirá generar un método de análisis sísmico de domos de concreto armado que sirva como un primer paso para la generación de una normativa de diseño propia, así como también para la realización de una correcta evaluación de la vulnerabilidad sísmica de tales estructuras.

## 4.2 SOLICITACIONES SÍSMICAS

Para lograr un buen diseño sísmico se debe realizar indispensablemente un análisis sísmico adecuado, el cual permitirá determinar los efectos que la sollicitación aplicada demande a la estructura. La respuesta de incluso la estructura más simple es un análisis dinámico complejo pues existen muchas variables para predecir con un grado de certeza la respuesta ante un sismo desconocido futuro. El criterio de diseño práctico en la actualidad parte de simplificaciones que transforman el fenómeno sísmico complejo en fuerzas equivalentes aplicadas dentro del rango elástico de la estructura.

A diferencia de las edificaciones, los domos tienen un único sistema estructural en el cual depositan su seguridad estructural tanto para sollicitaciones gravitacionales como sísmicas. Un aspecto importante para el análisis sísmico es la interacción suelo-estructura pues el movimiento sísmico se propaga en la superficie como un movimiento del terreno ante el cual, la estructura responde de manera diferente. Este aspecto es muy complicado de evaluar y sólo si se requiriera realizar un análisis riguroso se debe introducir este efecto en dicho análisis. Para propósitos de diseño, es suficiente y relativamente conservador considerar que la estructura está empotrada en la base.

Las simplificaciones a las que recurre la práctica de la ingeniería sísmica actual permiten establecer un criterio de diseño y, mediante un entendimiento de la estructura, aplicar este criterio consistentemente tomando en cuenta los detalles. Desde el punto de vista práctico, la resistencia sísmica que se obtiene consistentemente dentro del rango elástico, usando fuerzas estáticas equivalentes para proporcionar una envolvente simulada de fuerzas, cortantes y momentos dinámicos, es probablemente de mayor importancia que la obtenida por soluciones analíticas complejas (Rinne, 1970).

Para el diseño sísmico de cualquier estructura, la sollicitación sísmica se define por la norma local correspondiente y se expresa por medio de un espectro de diseño. Los efectos que se desean determinar en este caso son las fuerzas y deformaciones resultantes de la carga sísmica. Los códigos de diseño plantean, considerando que el análisis estructural se hace sobre la base de un supuesto comportamiento dentro del rango elástico, dos métodos de análisis: uno estático y otro dinámico. El primero es una alternativa simplificada para el análisis aplicado mayormente a edificios que se ajustan a determinadas hipótesis de comportamiento y tipos de estructuración. Por otra parte, si bien la norma peruana formula los criterios de diseño sísmico específicamente para edificaciones mediante un análisis dinámico, éste contempla una aplicación más generalizada pues considera las características o propiedades dinámicas de una estructura, en la determinación de cualquier efecto sísmico sobre ésta que desee calcularse.

Muchas veces es difícil resolver en forma cerrada la ecuación del movimiento planteada en la sección 1.3 para un sistema de varios grados de libertad. Existen diversos métodos propuestos para buscar su solución. Cada método tiene ventajas y desventajas, de acuerdo al tipo de estructura y la carga. En primer lugar se tiene el método de solución más completo para el análisis dinámico, en el cual las ecuaciones se resuelven para cada punto de tiempo, el cual se va incrementando por un intervalo finito. Otro método consiste en resolver simultáneamente  $q$  ecuaciones del movimiento en el dominio de frecuencias; para esto, las fuerzas externas  $P(t)$  se expresan en una expansión de términos de series de Fourier. Un tercer método es la superposición modal, el cual es el método más usado y efectivo para el análisis sísmico de sistemas estructurales lineales. Este método parte que desde el

punto de vista matemático un movimiento vibracional complejo de una estructura se puede representar por la superposición de los patrones de movimiento de sus modos naturales de vibración. En otras palabras, es necesario evaluar la respuesta de cada modo y luego superponer la influencia de los distintos modos. Una ventaja importante del método es que generalmente solo un número relativamente pequeño de modos (usualmente los primeros) tiene influencia significativa en la respuesta de la estructura y esto permite simplificar el análisis.

Durante un movimiento sísmico no existe una fuerza directamente aplicada a la estructura; por tanto, si se supone que  $v$  es el vector de GDL de desplazamientos laterales de la estructura, la Ec. (1.15) se puede expresar como:

$$M\ddot{v}_r + C\dot{v}_r + Kv_r = P(t) = -MB\ddot{v}_g(t) \quad (4.1)$$

Donde  $v_r$  es el vector de desplazamiento relativo de la estructura dado por  $v - v_g$ ,  $\ddot{v}_g$  es la aceleración del suelo y  $B$  es el vector de influencia de aceleración de la base del sistema representado por unos en la dirección de los GDL  $v$ , y ceros en las posiciones restantes. El vector de fuerzas  $P(t)$  puede tener diferentes variaciones en el tiempo, por definición del método para sistemas lineales elásticos:

$$P_i(t) = \Phi_i^T P(t) = \Phi_i^T MB\ddot{v}_g(t) \quad (4.2)$$

Cuando se compara la ecuación resultante con la correspondiente a la excitación sísmica de un SUGL dada por la Ec. (4.3), surge que ambas expresiones presentan una correspondencia directa en todos sus términos salvo el denominado factor de participación modal (Ec. (4.4)), el cual muestra la contribución de cada modo en la respuesta de la estructura.

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega\dot{v}(t) + \omega^2v(t) = -\ddot{v}_g(t) \quad (4.3)$$

$$\Gamma_i = \frac{\Phi_i^T MB}{\Phi_i^T M \Phi_i} \quad (4.4)$$

El método más usado para el diseño sísmico de estructuras, el cual es un caso particular del método de superposición modal, es el método de superposición modal espectral. Este método implica el cálculo solamente de los valores máximos de desplazamientos y aceleraciones en cada modo usando un espectro de diseño (Chopra, 1995). Este método será planteado para encontrar las

respuestas sísmicas máximas de domos de gran luz, cuya aplicación al modelo propuesto se describirá a continuación.

#### 4.2.1 Superposición modal espectral

Este método consiste en un análisis dinámico elástico de una estructura que utiliza la respuesta dinámica máxima de todos los modos que tienen una contribución importante a la respuesta estructural total. Las respuestas modales máximas se calculan utilizando las ordenadas de un espectro de respuesta apropiado que correspondan a los períodos modales. La contribución máxima de cada modo se combina de manera estadística para obtener una respuesta estructural total aproximada.

Esta metodología se aplicará a cada uno de los modelos de la familia de domos propuesta en el Capítulo 2. La implementación de este análisis fue elaborada mediante una rutina creada en MATLAB v7 y se muestra en el Anexo B. Una vez obtenidas las propiedades dinámicas de cada modelo (matriz de modos de vibración y las respectivas frecuencias angulares), es necesario para la aplicación del método plantear un espectro de respuesta adecuado. En este caso se considerará el espectro inelástico de pseudo-aceleraciones de la Norma Peruana de Diseño Sismorresistente E.030 considerando un factor de reducción sísmica establecido para este tipo de estructuras. Un mismo espectro se aplicará a cada domo para comparar las respuestas halladas con las mismas condiciones de carga sísmica. Las respuestas que se tomarán en cuenta en este análisis sísmico serán desplazamientos, fuerzas cortantes y momentos flectores.

La respuesta sísmica más probable de cada acción descrita se calculará por la combinación de los respectivos valores máximos mediante la combinación cuadrática completa (CQC) y la combinación que propone la Norma peruana E0.30, la cual consiste:

$$r = 0.25 \sum_{i=1}^q |r_i| + 0.75 \sqrt{\sum_{i=1}^q r_i^2} \quad (4.5)$$

El método CQC es un método relativamente nuevo de combinación modal que según sus iniciadores es la más precisa (Wilson, 2002). Éste está basado en la teoría de vibraciones aleatoria y toma en cuenta el acoplamiento estadístico entre modos estrechamente espaciados causados por el amortiguamiento. Este último factor se consideró para el análisis como 5% del amortiguamiento crítico,

el cual es recomendado para estructuras de concreto armado según Newmark (Ver Anexo D); además este valor está implícito en el espectro de diseño de la norma peruana. El valor máximo de un modo considerado se estima mediante la doble suma:

$$\Psi_k = \sqrt{\sum_i \sum_j \Psi_{ki} \gamma_{ij} \Psi_{kj}} \quad (4.6)$$

Donde  $\Psi_{ki}$  es la respuesta modal asociada al modo  $i$ , y  $\gamma_{ij}$  es el coeficiente de correlación modal con amortiguamiento constante dado por:

$$\gamma_{ij} = \frac{8\xi^2(1+\mathcal{F})\mathcal{F}^{3/2}}{(1-\mathcal{F}^2)^2 + 4\xi^2\mathcal{F}(1+\mathcal{F})^2} \quad (4.7)$$

Donde  $\mathcal{F} = \omega_i/\omega_j$  y debe ser menor o igual a 1. Esta combinación modal también fue implementada en lenguaje MATLAB dentro del script realizado para el análisis modal espectral.

#### 4.2.1.1 Espectro de diseño

En primer lugar, un espectro de respuesta es una herramienta que se utiliza comúnmente en el diseño de estructuras para las que se supone un comportamiento lineal. Si bien no refleja la respuesta de la estructura en el tiempo durante un movimiento sísmico, resume la respuesta máxima (aceleración, velocidad, desplazamiento) de cualquier sistema de un grado de libertad sometido a un sismo particular, como función de los períodos o frecuencias naturales del sistema para cada razón de amortiguamiento dada.

Con fines de diseño, los espectros de respuesta de varios sismos diferentes se combinan en un espectro elástico de respuesta. Este espectro se ajusta de acuerdo a los tipos de suelo y se escala de acuerdo a la aceleración máxima de diseño. El espectro de diseño de la norma peruana E0.30 establece las condiciones mínimas para el diseño de edificaciones. En este caso, el domo es una estructura especial con la que se tomarán algunas consideraciones adicionales propias de estas estructuras para aplicar dicha Norma. Este espectro se planteará en una dirección horizontal y se generará combinando los factores de sitio mostrados en la Tabla 4.1. Se supone que los domos de la familia se encuentran en la costa peruana y estarán cimentados sobre un suelo intermedio; además se utilizarán como cubierta de un coliseo.

*Tabla 4.1 Factores de sitio usados en el espectro de diseño*

PARÁMETRO DE ZONA		PARÁMETRO DE USO		PARÁMETRO DE SUELO		
ZONA	Z	CATEGORÍA	U	SUELO	S	Tp (s)
3	0.4	B	1.3	S2	1.2	0.6

Fuente: Elaboración propia

El factor de amplificación sísmica es variable con respecto al período de la estructura. La filosofía de diseño de esta Norma permite a las estructuras incurrir en el rango de desplazamientos inelásticos ante la ocurrencia de un sismo, lo que conlleva a proporcionarle una menor resistencia lateral a la estructura conforme mayor sea su deformación plástica. Por tanto, se contempla en la Norma la reducción de las fuerzas sísmicas requeridas para mantener a la estructura en su rango elástico de comportamiento durante el sismo de diseño por medio del factor (R). Los valores establecidos por la presente Norma son válidos para edificaciones con los sistemas estructurales mencionados en la misma. En este caso, el domo al ser una estructura muy diferente a las edificaciones estructuralmente hablando, merece un factor de reducción sísmica que defina la correspondiente capacidad de resistencia lateral. Los valores de (R) se determinan por observaciones pasadas del comportamiento en estructuras similares ante sismos severos; se sustentan también en valores desarrollados por procedimientos obtenidos con los llamados Principio de Igual Desplazamiento y Principio de Igual Energía. Así, se tomará como valor (R) el propuesto por el ASCE standard 7-05 Minimum design loads for buildings and other structures en su capítulo 15 (Seismic design requirements for nonbuilding structures). En el Anexo E se muestra la tabla correspondiente a los factores de reducción sísmica para estructuras diferentes a edificios, donde el domo a analizar pertenecería a Estructuras de acero y concreto armado en volado con masa distribuida; donde se incluyen las chimeneas, silos y tanques; que no son similares a edificaciones, a las cuales les corresponde un valor de (R) igual a 3. Este valor es usual en estructuras rígidas y con poca ductilidad.

Para la dirección horizontal analizada (en el caso de los modelos de elementos finitos SHELL y SOLID se consideró la dirección global X) se utilizará el espectro inelástico de pseudo-aceleraciones definido en la Fig. 4.1.

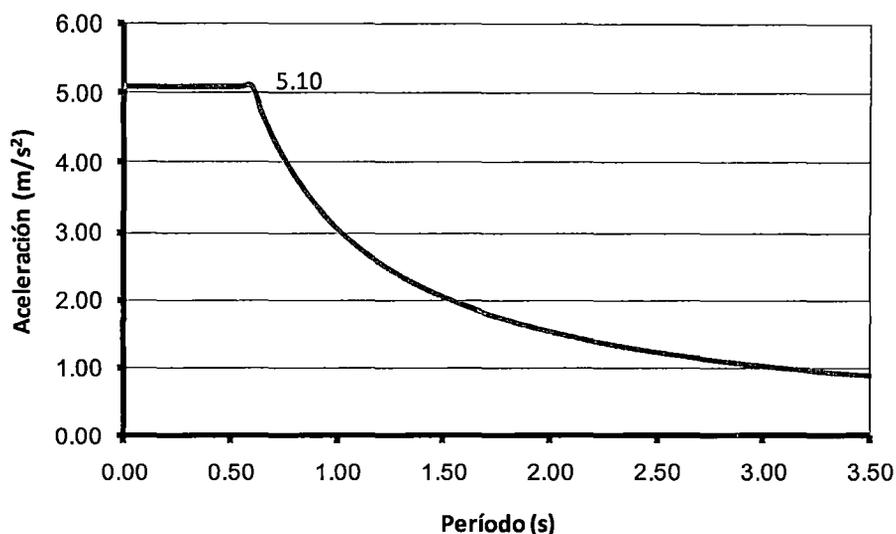


Figura 4.1 Espectro inelástico de pseudo-aceleraciones aplicado a los domos

Donde la aceleración máxima corresponde a 0.52g.

La Norma E.030 requiere que la suma de las masas participativas de los modos tomados en cuenta sea como mínimo el 90% de la masa de la estructura. Esto se verificó en todos los modelos de elementos finitos creados. En el modelo propuesto se consideró la participación de todos los modos en las respuestas de interés; el número depende de la cantidad de elementos a la cual se subdividió el sistema.

### 4.3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Es frecuente en el ambiente de la ingeniería estructural encontrar la mejor solución a un problema específico, donde el concepto de “mejor” se entiende como aquella que genera un comportamiento óptimo. Para ello realiza un análisis de sensibilidad que involucra la relación entre las variables de diseño y la respuesta estructural.

Es de interés de esta investigación calcular las sensibilidades de las respuestas sísmicas específicamente a la variación del número de elementos finitos considerados en el análisis. Para ello se realizó un análisis de sensibilidad con el propósito de definir cuántos elementos era necesario discretizar la estructura. Como se explicó en la sección 3.2, el modelo propuesto tiene  $n + 1$  elementos discretos. Para el análisis de sensibilidad se varió el parámetro  $n$  en 5, 10, 15 y 20, lo que hacía que un domo de la familia planteada sea representado por modelos que tenían 6, 11, 16 y 21 elementos discretos. A cada modelo

resultante se le analizó mediante una superposición modal espectral con el espectro planteado en la sección anterior, almacenando en una base de datos las respuestas sísmicas de interés mencionadas (período fundamental, desplazamientos, fuerzas cortantes y momentos flectores). Luego se realizó el mismo análisis a los modelos refinados de elementos finitos y se almacenaron las mismas respuestas de cada uno de ellos. Los momentos flectores y fuerzas cortantes fueron calculados por el programa correspondiente como la suma de las fuerzas en todos los nudos de una sección transversal dada. Para realizar esta suma, cada fuerza y momento nodal considerado se transforma a una posición en la cual las fuerzas se sumarán y, al sistema de coordenadas local especificado cuando se definió la sección. Cuando todas las fuerzas se han transformado a la posición apropiada y al sistema de coordenadas, simplemente se suman y el programa reporta la fuerza total. Los desplazamientos fueron tomados en el plano de simetría del modelo refinado de domo. Para una sección transversal dada se tomó como desplazamiento sísmico al promedio de los desplazamientos nodales que se encuentran dentro del plano de simetría y al mismo nivel de dicha sección.

Las respuestas de los modelos refinados se compararon con las respectivas respuestas dadas por los modelos simplificados. Debido a que tales respuestas se pueden encontrar para cualquier punto dentro de la altura del domo, el análisis de sensibilidad se simplificó comparando únicamente las siguientes respuestas sísmicas de interés: el desplazamiento en el extremo libre del domo, la fuerza cortante y momento flector en la base y el período fundamental de la estructura. Como se mencionó en la sección anterior, las respuestas sísmicas fueron estimadas tanto con la combinación cuadrática completa como con la combinación modal recomendada por la Norma E.030. A continuación se tienen las tablas de comparación de respuestas sísmicas estimadas por la combinación CQC empleando diferentes números de elementos discretos en los modelos simplificados. En el Anexo F se muestran las tablas de comparación correspondientes a las respuestas sísmicas estimadas por la combinación recomendada por la Norma E.030.

Tabla 4.2 Comparación del período fundamental de vibración empleando un número diferente de elementos discretos

D1: ER=0.01

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS					
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error				
5	0.02694	0.02734	%Error	0.03648	%Error	0.03662	%Error	0.03624	%Error				
10	0.02721									1.47%	26.16%	26.44%	25.67%
15	0.02728									0.47%	25.41%	25.69%	24.92%
20	0.02731									0.22%	25.23%	25.51%	24.73%

D2: ER=0.03

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS					
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error				
5	0.01617	0.01638	%Error	0.02137	%Error	0.02143	%Error	0.02132	%Error				
10	0.01636									1.27%	24.34%	24.54%	24.16%
15	0.01638									0.08%	23.44%	23.64%	23.25%
20	0.01642									0.00%	23.37%	23.57%	23.18%

D3: ER=0.05

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS					
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error				
5	0.02163	0.02184	%Error	0.02815	%Error	0.02818	%Error	0.02812	%Error				
10	0.02182									0.94%	23.15%	23.25%	23.08%
15	0.02183									0.07%	22.48%	22.57%	22.41%
20	0.02183									0.02%	22.44%	22.53%	22.37%

D4: ER=0.10

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS					
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error				
5	0.02714	0.02724	%Error	0.03396	%Error	0.03402	%Error	0.03397	%Error				
10	0.02722									0.35%	20.07%	20.21%	20.09%
15	0.02723									0.07%	19.85%	19.98%	19.86%
20	0.02724									0.03%	19.81%	19.95%	19.83%

D5:  $ER=0.15$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error
		T (s)	%Error	T (s)	%Error	T (s)	%Error		
5	0.02167	0.02173	0.29%	0.02628	17.55%	0.02635	17.78%	0.02634	17.75%
10	0.02171		0.08%		17.38%		17.61%		17.58%
15	0.02172		0.05%		17.35%		17.58%		17.55%
20	0.02172		0.03%		17.34%		17.57%		17.54%

D6:  $ER=0.20$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error
		T (s)	%Error	T (s)	%Error	T (s)	%Error		
5	0.02699	0.02707	0.29%	0.03181	15.16%	0.03193	15.48%	0.03194	15.49%
10	0.02704		0.12%		15.01%		15.33%		15.34%
15	0.02705		0.08%		14.98%		15.30%		15.32%
20	0.02705		0.07%		14.97%		15.29%		15.30%

D7:  $ER=0.25$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error
		T (s)	%Error	T (s)	%Error	T (s)	%Error		
5	0.01613	0.01618	0.33%	0.01850	12.83%	0.01859	13.24%	0.01860	13.29%
10	0.01615		0.17%		12.70%		13.11%		13.15%
15	0.01616		0.15%		12.67%		13.08%		13.13%
20	0.01616		0.14%		12.66%		13.07%		13.12%

D8:  $ER=0.30$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error
		T (s)	%Error	T (s)	%Error	T (s)	%Error		
5	0.02140	0.02149	0.40%	0.02397	10.71%	0.02412	11.26%	0.02417	11.46%
10	0.02143		0.27%		10.59%		11.14%		11.34%
15	0.02143		0.24%		10.56%		11.11%		11.32%
20	0.02144		0.23%		10.56%		11.11%		11.31%

D9:  $ER=0.35$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	T (s)	FRAME		SHELL		SOLID		T (s)	%Error
		T (s)	%Error	T (s)	%Error	T (s)	%Error		
5	0.02661	0.02675	0.51%	0.02919	8.84%	0.02943	9.57%	0.02953	9.90%
10	0.02664		0.39%		8.74%		9.46%		9.79%
15	0.02665		0.37%		8.71%		9.44%		9.77%
20	0.02665		0.36%		8.70%		9.43%		9.76%

D10:  $ER=0.42$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
		FRAME		SHELL		SOLID			
n	T (s)	T (s)	%Error						
5	0.01585	0.01597	0.76%	0.01701	6.82%	0.01720	7.86%	0.01726	8.20%
10	0.01586		0.66%		6.73%		7.77%		8.11%
15	0.01587		0.64%		6.71%		7.75%		8.09%
20	0.01587		0.63%		6.71%		7.75%		8.08%

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.3 Comparación del desplazamiento elástico máximo probable en el ápice del domo empleando un número diferente de elementos discretos

D1:  $ER=0.01$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
		FRAME		SHELL		SOLID			
n	D (m)	D (m)	%Error						
5	1.170E-04	1.280E-04	8.58%	2.230E-04	47.52%	2.250E-04	47.99%	2.173E-04	46.14%
10	1.243E-04		2.91%		44.27%		44.77%		42.80%
15	1.264E-04		1.28%		43.34%		43.84%		41.84%
20	1.273E-04		0.54%		42.91%		43.42%		41.40%

D2:  $ER=0.03$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
		FRAME		SHELL		SOLID			
n	D (m)	D (m)	%Error						
5	4.251E-05	4.600E-05	7.58%	7.600E-05	44.06%	7.600E-05	44.06%	7.442E-05	42.87%
10	4.575E-05		0.55%		39.81%		39.81%		38.53%
15	4.602E-05		-0.05%		39.44%		39.44%		38.16%
20	4.611E-05		-0.23%		39.34%		39.34%		38.05%

D3:  $ER=0.05$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
		FRAME		SHELL		SOLID			
n	D (m)	D (m)	%Error						
5	7.751E-05	8.200E-05	5.48%	1.310E-04	40.84%	1.310E-04	40.84%	1.292E-04	40.00%
10	8.157E-05		0.52%		37.73%		37.73%		36.85%
15	8.181E-05		0.23%		37.55%		37.55%		36.67%
20	8.187E-05		0.15%		37.50%		37.50%		36.62%

D4:  $ER=0.10$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	D (m)	FRAME		SHELL		SOLID		D (m)	%Error
		D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error		
5	1.252E-04	1.280E-04	2.17%	1.920E-04	34.78%	1.890E-04	33.75%	1.860E-04	32.66%
10	1.271E-04		0.73%		33.82%		32.77%		31.67%
15	1.273E-04		0.53%		33.69%		32.63%		31.53%
20	1.274E-04		0.46%		33.64%		32.59%		31.48%

D5:  $ER=0.15$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	D (m)	FRAME		SHELL		SOLID		D (m)	%Error
		D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error		
5	7.991E-05	8.200E-05	2.55%	1.160E-04	31.11%	1.130E-04	29.28%	1.105E-04	27.66%
10	8.079E-05		1.48%		30.35%		28.50%		26.87%
15	8.094E-05		1.29%		30.22%		28.37%		26.73%
20	8.100E-05		1.22%		30.18%		28.32%		26.68%

D6:  $ER=0.20$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	D (m)	FRAME		SHELL		SOLID		D (m)	%Error
		D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error		
5	1.240E-04	1.290E-04	3.91%	1.740E-04	28.76%	1.650E-04	24.87%	1.618E-04	23.39%
10	1.252E-04		2.95%		28.05%		24.12%		22.62%
15	1.254E-04		2.78%		27.92%		23.99%		22.48%
20	1.255E-04		2.71%		27.87%		23.94%		22.44%

D7:  $ER=0.25$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	D (m)	FRAME		SHELL		SOLID		D (m)	%Error
		D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error		
5	4.424E-05	4.600E-05	3.84%	5.900E-05	25.03%	5.700E-05	22.39%	5.526E-05	19.95%
10	4.465E-05		2.93%		24.32%		21.67%		19.20%
15	4.473E-05		2.77%		24.19%		21.54%		19.06%
20	4.475E-05		2.72%		24.15%		21.49%		19.02%

D8:  $ER=0.30$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	D (m)	FRAME		SHELL		SOLID		D (m)	%Error
		D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error		
5	7.789E-05	8.300E-05	6.16%	1.010E-04	22.88%	9.700E-05	19.70%	9.354E-05	16.73%
10	7.857E-05		5.34%		22.21%		19.00%		16.00%
15	7.870E-05		5.19%		22.08%		18.87%		15.87%
20	7.874E-05		5.13%		22.04%		18.83%		15.82%

D9:  $ER=0.35$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	D (m)	FRAME		SHELL		SOLID		D (m)	%Error
		D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error		
5	1.205E-04	1.300E-04	7.33%	1.510E-04	20.22%	1.470E-04	18.05%	1.420E-04	15.16%
10	1.215E-04		6.57%		19.56%		17.37%		14.46%
15	1.216E-04		6.43%		19.44%		17.25%		14.33%
20	1.217E-04		6.38%		19.40%		17.21%		14.29%

D10:  $ER=0.42$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000						ANSYS	
n	D (m)	FRAME		SHELL		SOLID		D (m)	%Error
		D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error		
5	4.277E-05	4.800E-05	10.90%	5.200E-05	17.76%	5.200E-05	17.76%	4.979E-05	14.10%
10	4.309E-05		10.23%		17.14%		17.14%		13.46%
15	4.315E-05		10.11%		17.03%		17.03%		13.34%
20	4.317E-05		10.07%		16.99%		16.99%		13.30%

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.4 Comparación de la fuerza cortante en la base del domo empleando un número diferente de elementos discretos

D1:  $ER=0.01$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
n	V (Tn)	FRAME		SHELL		SOLID	
		V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	61.294	62.882	2.53%	64.058	4.31%	64.483	4.95%
10	62.465		0.66%		2.49%		3.13%
15	62.749		0.21%		2.04%		2.69%
20	62.833		0.08%		1.91%		2.56%

D2:  $ER=0.03$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
n	V (Tn)	FRAME		SHELL		SOLID	
		V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	44.161	45.202	2.30%	44.519	0.81%	44.955	1.77%
10	44.961		0.53%		-0.99%		-0.01%
15	45.164		0.08%		-1.45%		-0.47%
20	45.167		0.08%		-1.45%		-0.47%

D3:  $ER=0.05$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	156.750	160.851	2.55%	155.690	-0.68%	156.279	-0.30%
10	159.880		0.60%		-2.69%		-2.30%
15	160.630		0.14%		-3.17%		-2.78%
20	160.910		-0.04%		-3.35%		-2.96%

D4:  $ER=0.10$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	611.330	629.044	2.82%	588.382	-3.90%	589.591	-3.69%
10	625.550		0.56%		-6.32%		-6.10%
15	628.410		0.10%		-6.80%		-6.58%
20	629.450		-0.06%		-6.98%		-6.76%

D5:  $ER=0.15$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	470.920	484.018	2.71%	444.908	-5.85%	446.148	-5.55%
10	481.580		0.50%		-8.24%		-7.94%
15	483.690		0.07%		-8.72%		-8.41%
20	484.440		-0.09%		-8.89%		-8.58%

D6:  $ER=0.20$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	1231.400	1263.346	2.53%	1152.469	-6.85%	1156.628	-6.46%
10	1258.000		0.42%		-9.16%		-8.76%
15	1263.200		0.01%		-9.61%		-9.21%
20	1265.100		-0.14%		-9.77%		-9.38%

D7:  $ER=0.25$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	334.050	341.953	2.31%	311.162	-7.36%	313.164	-6.67%
10	340.920		0.30%		-9.56%		-8.86%
15	342.280		-0.10%		-10.00%		-9.30%
20	342.760		-0.24%		-10.15%		-9.45%

D8:  $ER=0.30$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	955.290	975.314	2.05%	884.729	-7.98%	897.034	-6.49%
10	973.960		0.14%		-10.09%		-8.58%
15	977.630		-0.24%		-10.50%		-8.98%
20	978.950		-0.37%		-10.65%		-9.13%

D9:  $ER=0.35$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	2189.800	2227.650	1.70%	2029.044	-7.92%	2067.360	-5.92%
10	2230.300		-0.12%		-9.92%		-7.88%
15	2238.200		-0.47%		-10.31%		-8.26%
20	2241.100		-0.60%		-10.45%		-8.40%

D10:  $ER=0.42$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	568.060	574.155	1.06%	525.960	-8.00%	539.004	-5.39%
10	577.790		-0.63%		-9.85%		-7.20%
15	579.690		-0.96%		-10.22%		-7.55%
20	580.380		-1.08%		-10.35%		-7.68%

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.5 Comparación del momento flector en la base del domo empleando un número diferente de elementos discretos

D1: ER=0.01

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	382.910	402.623	4.90%	394.557	2.95%	399.042	4.04%
10	395.620		1.74%		-0.27%		0.86%
15	399.380		0.81%		-1.22%		-0.08%
20	400.970		0.41%		-1.63%		-0.48%

D2: ER=0.03

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	165.980	173.482	4.32%	162.627	-2.06%	164.647	-0.81%
10	172.770		0.41%		-6.24%		-4.93%
15	173.440		0.02%		-6.65%		-5.34%
20	173.860		-0.22%		-6.91%		-5.60%

D3: ER=0.05

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	796.350	823.051	3.24%	756.251	-5.30%	760.584	-4.70%
10	820.450		0.32%		-8.49%		-7.87%
15	822.350		0.09%		-8.74%		-8.12%
20	822.920		0.02%		-8.82%		-8.20%

D4: ER=0.10

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	3961.800	4024.476	1.56%	3575.050	-10.82%	3600.733	-10.03%
10	4009.000		0.38%		-12.14%		-11.34%
15	4016.400		0.20%		-12.35%		-11.54%
20	4019.000		0.14%		-12.42%		-11.62%

D5:  $ER=0.15$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	2441.200	2478.803	1.52%	2168.072	-12.60%	2197.232	-11.10%
10	2465.200		0.55%		-13.70%		-12.20%
15	2469.500		0.38%		-13.90%		-12.39%
20	2471.000		0.31%		-13.97%		-12.46%

D6:  $ER=0.20$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	7963.000	8097.355	1.66%	7134.754	-11.61%	7269.463	-9.54%
10	8036.100		0.76%		-12.63%		-10.55%
15	8049.500		0.59%		-12.82%		-10.73%
20	8054.200		0.53%		-12.89%		-10.79%

D7:  $ER=0.25$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	1293.200	1317.713	1.86%	1173.445	-10.21%	1208.202	-7.04%
10	1304.400		1.01%		-11.16%		-7.96%
15	1306.500		0.85%		-11.34%		-8.14%
20	1307.200		0.80%		-11.40%		-8.19%

D8:  $ER=0.30$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	4919.600	5026.181	2.12%	4483.692	-9.72%	4700.534	-4.66%
10	4960.000		1.32%		-10.62%		-5.52%
15	4967.500		1.17%		-10.79%		-5.68%
20	4970.100		1.12%		-10.85%		-5.73%

D9:  $ER=0.35$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	14063.000	14412.980	2.43%	12910.522	-8.93%	13756.288	-2.23%
10	14173.000		1.67%		-9.78%		-3.03%
15	14193.000		1.53%		-9.93%		-3.17%
20	14200.000		1.48%		-9.99%		-3.23%

D10:  $ER=0.42$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error	Mf (Tn-m)	%Error
5	2182.200	2247.407	2.90%	2023.150	-7.86%	2209.234	1.22%
10	2197.900		2.20%		-8.64%		0.51%
15	2200.800		2.07%		-8.78%		0.38%
20	2201.800		2.03%		-8.83%		0.34%

Fuente: Elaboración propia

Se nota que todas las respuestas dinámicas que proporciona el modelo simplificado convergen rápidamente pues los errores relativos obtenidos son menores que el 1%, acercándose a cero conforme se discretiza el modelo en 20 elementos discretos.

Del análisis realizado se nota que los errores en el período fundamental del modelo simplificado con respecto a modelos más refinados se reducen a medida que se incrementa la relación  $ER$ ; en otras palabras, el modelo predice de una mejor manera el valor "exacto" de este parámetro dinámico a medida que se incrementa el espesor del domo, dejando constante el radio del mismo.

El modelo propuesto predice adecuadamente tanto la fuerza cortante como el momento flector en la base. Éste arroja errores de las correspondientes respuestas que no exceden el 15% de la solución "exacta" dada por los modelos de elementos finitos refinados, el cual es un error máximo apropiado para fines de diseño estructural. La gran mayoría de estos errores son por exceso, lo que lleva a decir que el modelo simplificado llevaría a un diseño conservador dentro del rango permisible.

En el caso de desplazamientos laterales, la Norma E0.30 especifica que estos valores del análisis elástico tienen que ser multiplicados por 0.75(R) para estimar

los desplazamientos inelásticos, pero como este último factor se multiplica tanto a los desplazamientos del modelo propuesto como a los desplazamientos de los modelos refinados, por facilidad se compararon ambas respuestas sin considerar el factor mencionado. En esta respuesta específicamente, el modelo no predice el desplazamiento sísmico en el ápice del domo, pero la tendencia es a acercarse a la respuesta "exacta" a medida que aumenta el número de elementos discretos y la relación  $ER$  es mayor.

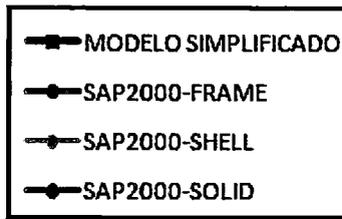
Debido a que sea cual sea la relación  $ER$  y la respuesta analizadas, esta última converge completamente cuando se tienen 20 elementos discretos más uno que corresponde a la corona. Por tanto, se recomienda realizar el análisis sísmico del domo con este número de elementos finitos tipo viga ya que el error cometido cuando se evalúan las fuerzas cortantes y momentos flectores no excede el 15%. Esto demuestra que el modelo adoptado, además de su sencilla implementación, ofrece una adecuada precisión en las respuestas dinámicas mencionadas.

#### 4.4 RESPUESTAS DE INTERÉS

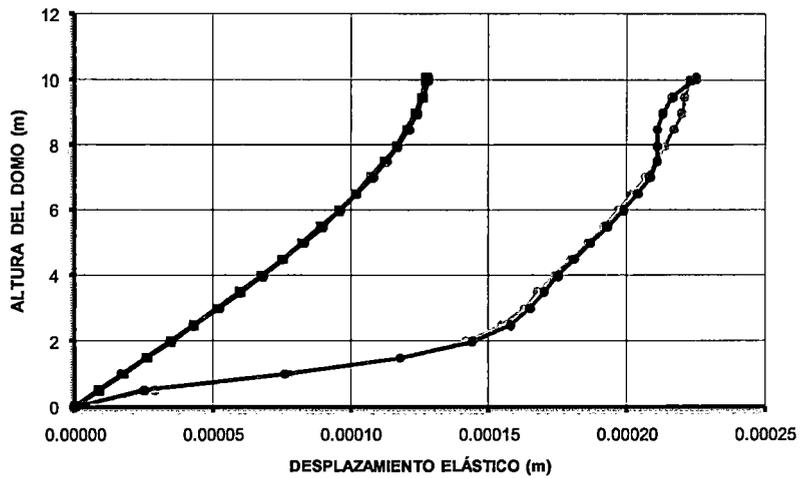
Como se mencionó las respuestas de interés en esta investigación son el período fundamental, desplazamientos laterales, fuerzas cortantes y momentos flectores. Mediante la aplicación de la combinación modal se buscan los valores máximos probables de estas respuestas. Por otra parte en la sección anterior se determinó el número de elementos discretos adecuados para realizar el análisis sísmico de una estructura domo de gran luz; con este parámetro definido se procedió a comparar las respuestas dadas por el modelo propuesto y las correspondientes a los modelos refinados, a lo largo de la altura total del domo.

Como se muestra en la Tabla 4.2, el domo al ser una estructura muy rígida tiene un período fundamental de vibración muy bajo, lo que genera que las aceleraciones espectrales para cada modo de vibración tengan un mismo valor pues las ordenadas correspondientes a los períodos de todos los modos se sitúan en la plataforma del espectro. Esto simplifica la rutina de programación al considerar solo una aceleración espectral, en este caso la máxima, para realizar la superposición modal espectral.

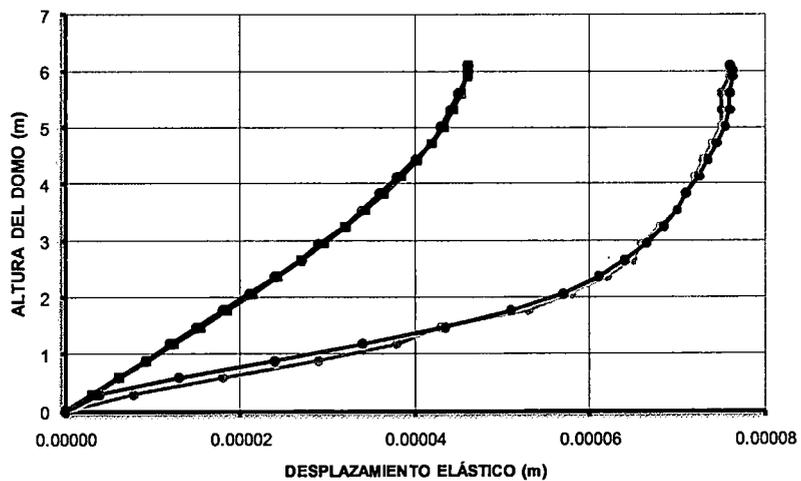
Las Figs. 4.2 a 4.4 muestran la variación de los desplazamientos, fuerzas cortantes y momentos flectores a lo largo de la altura del domo.

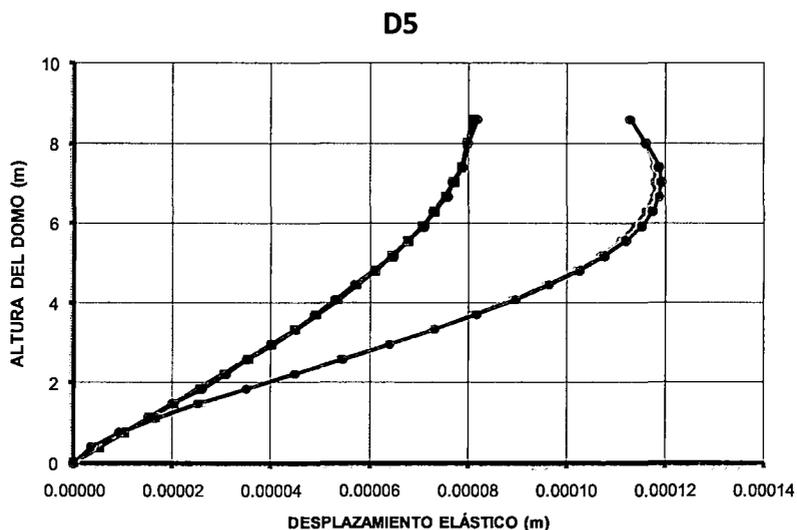
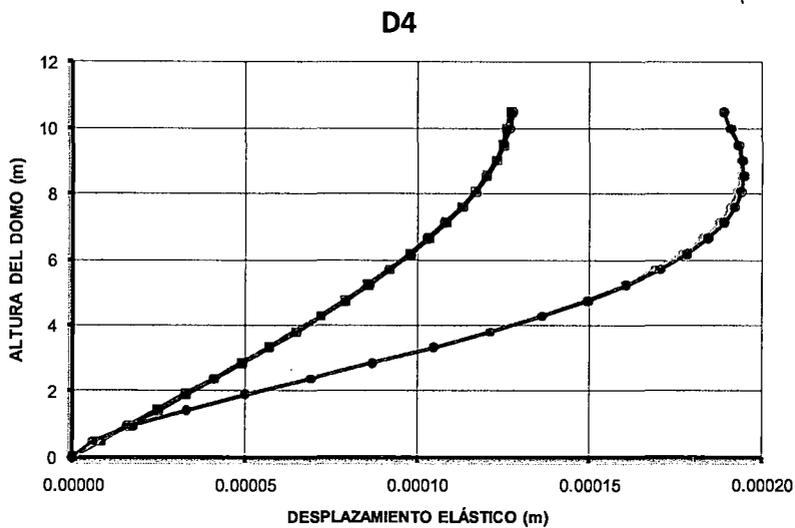
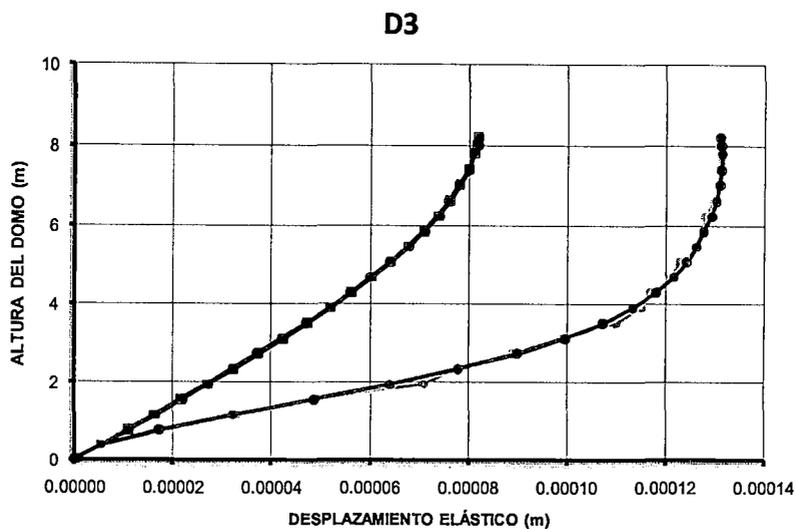


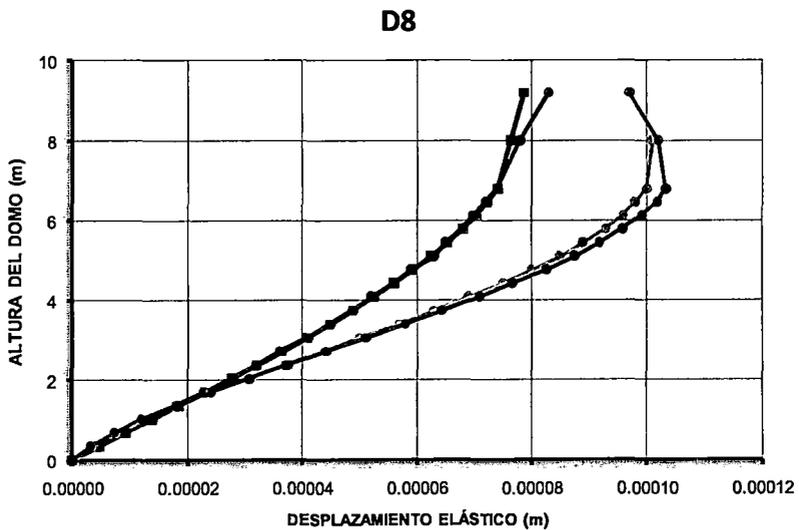
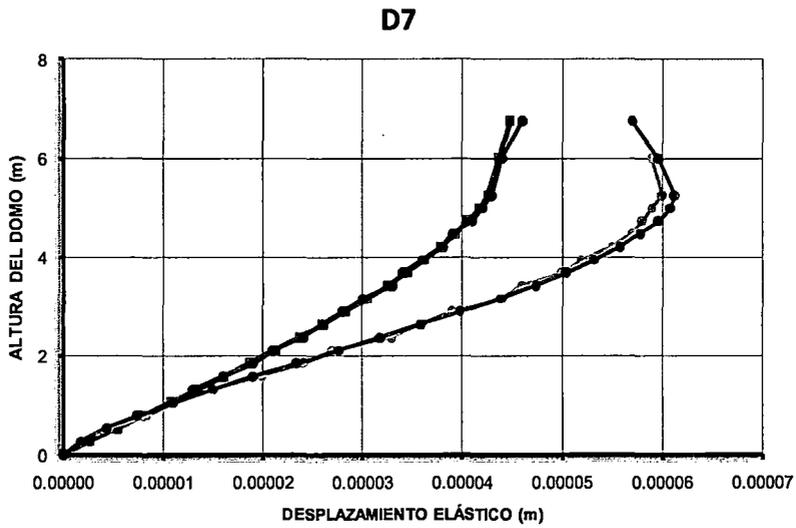
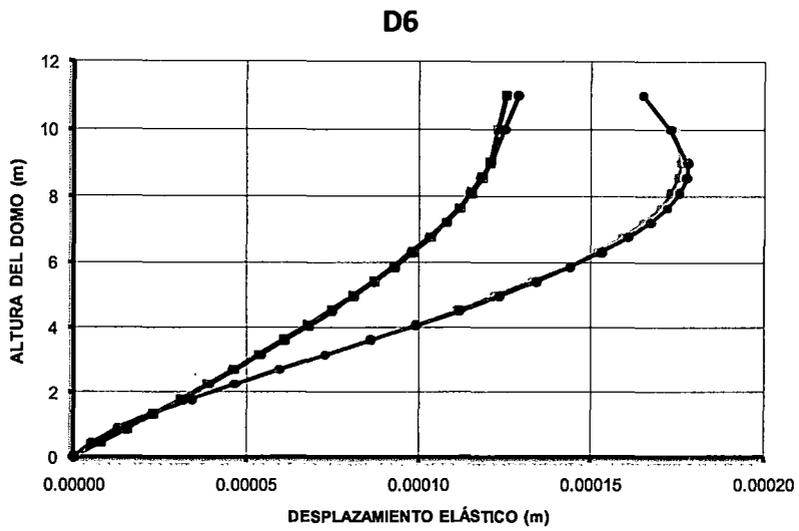
D1

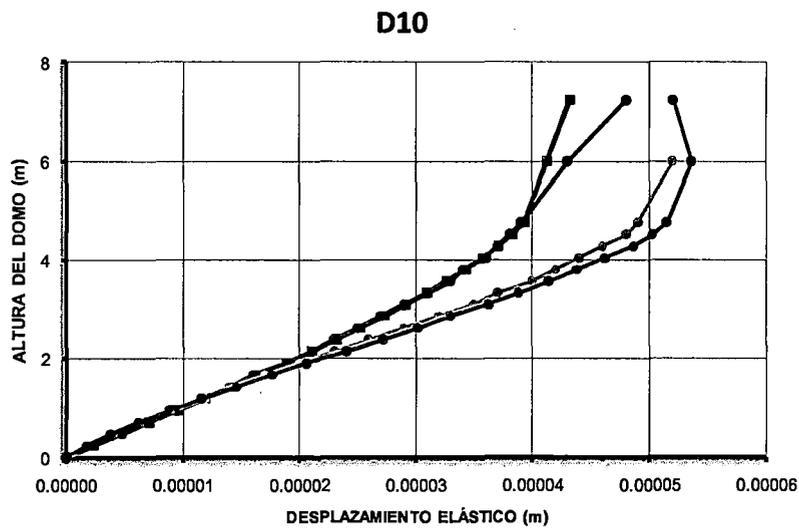
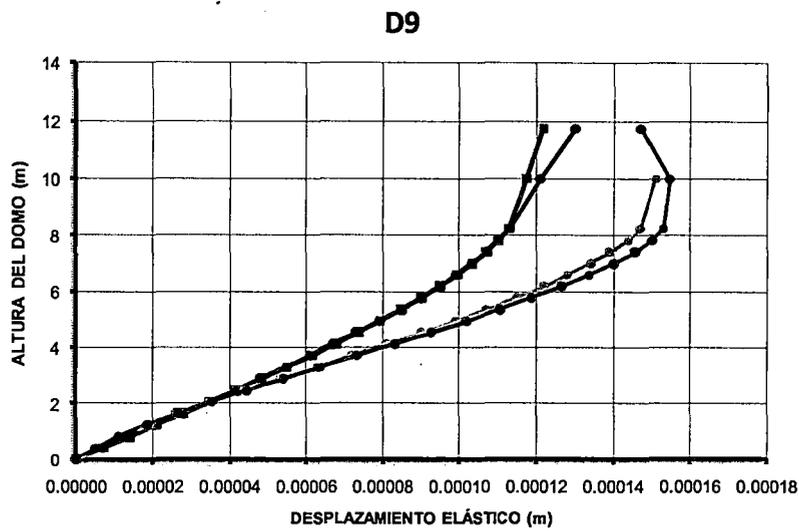


D2



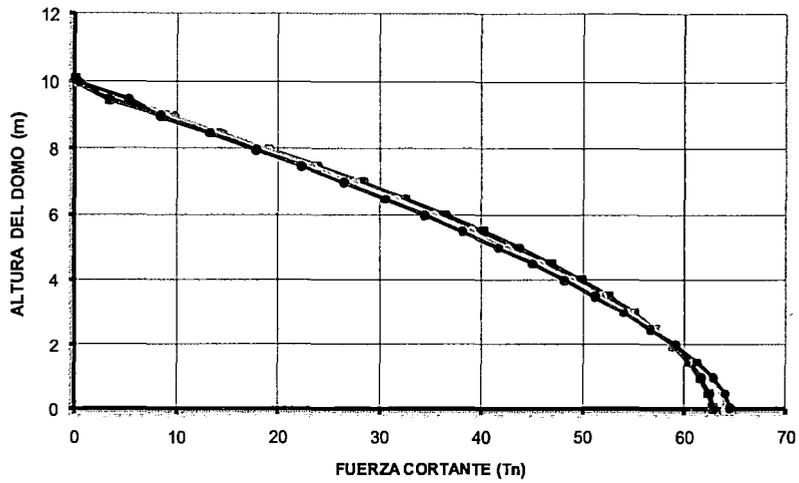




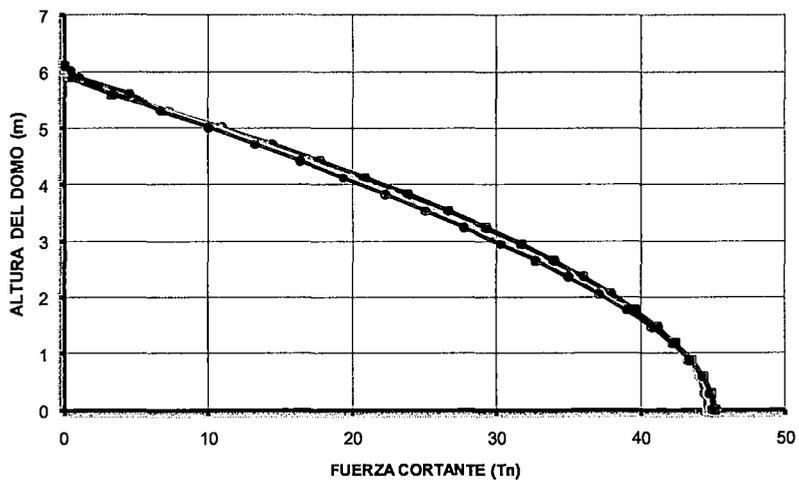


*Figura 4.2 Desplazamientos laterales elásticos máximos en la familia de domos de gran luz*

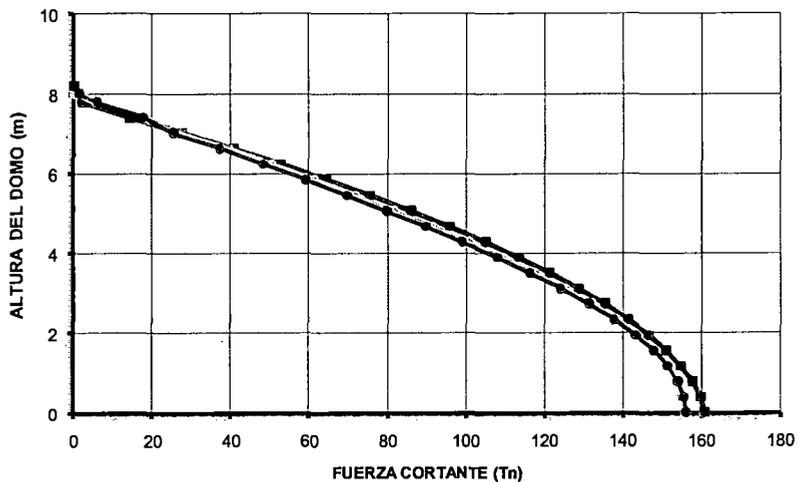
D1



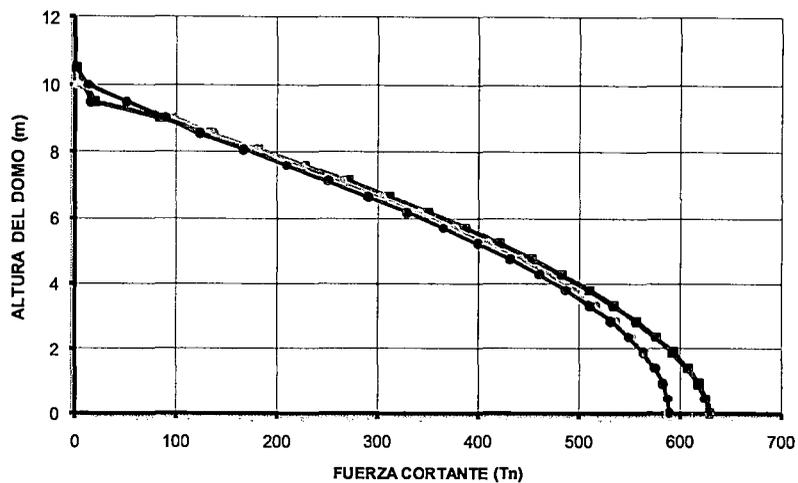
D2



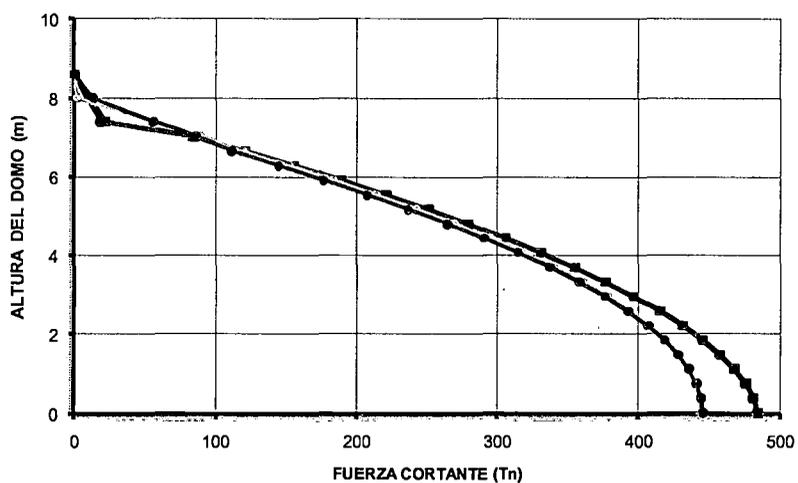
D3



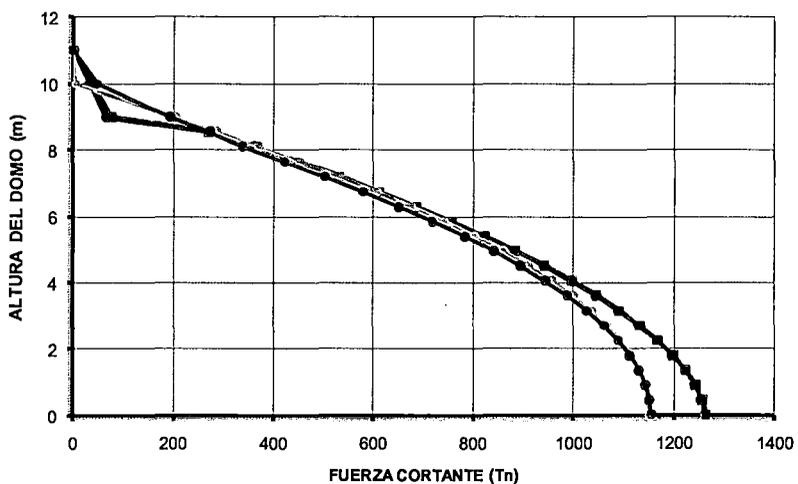
D4



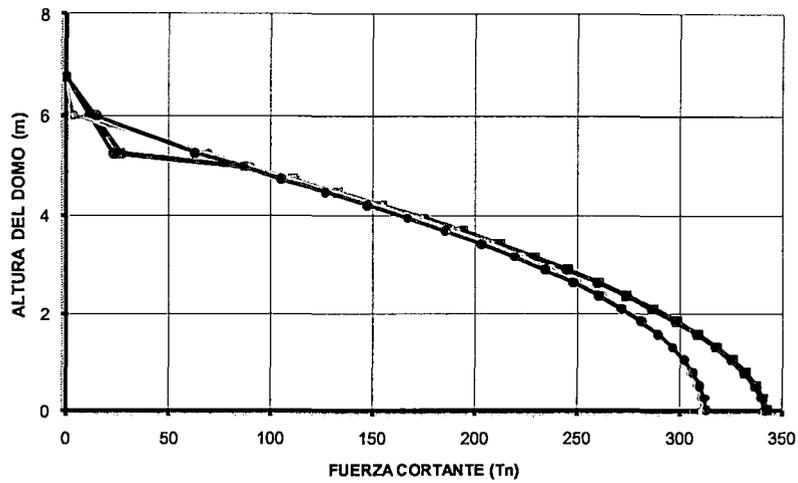
D5



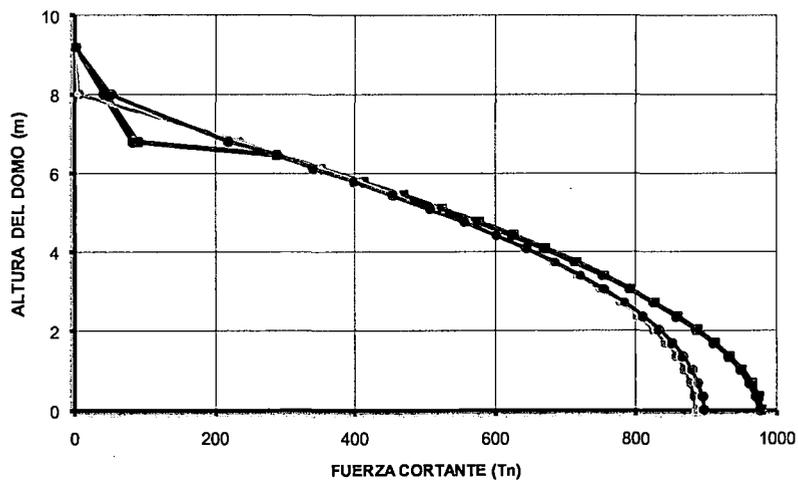
D6



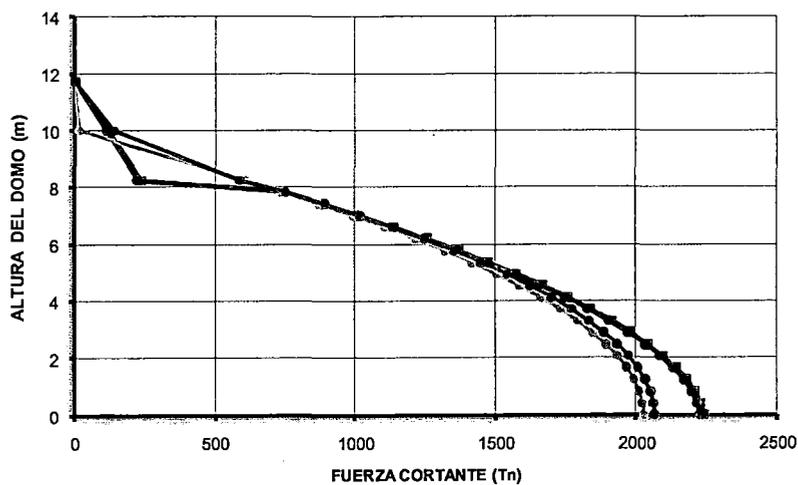
**D7**



**D8**



**D9**



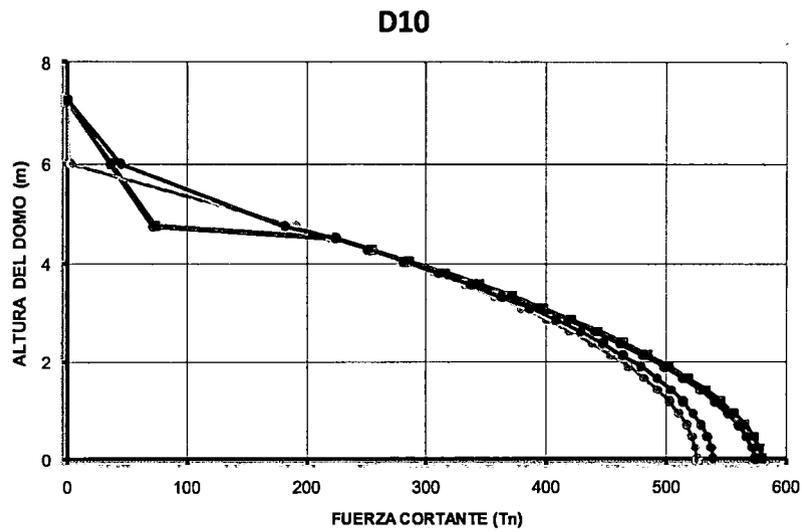
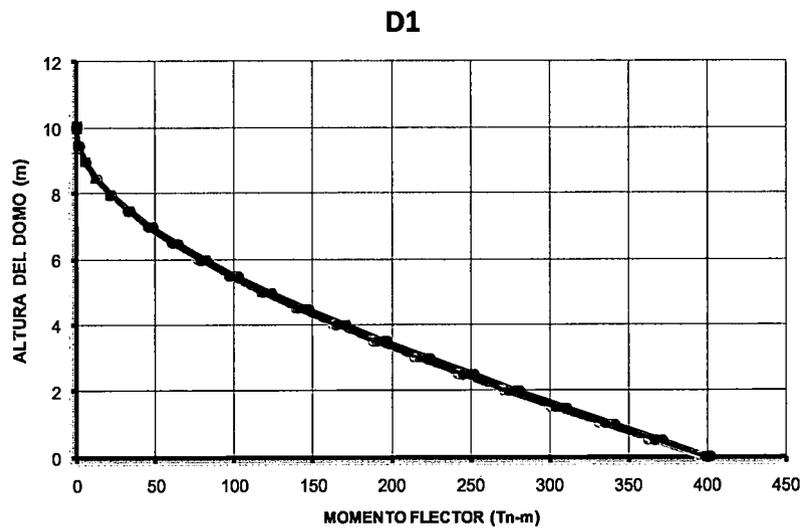
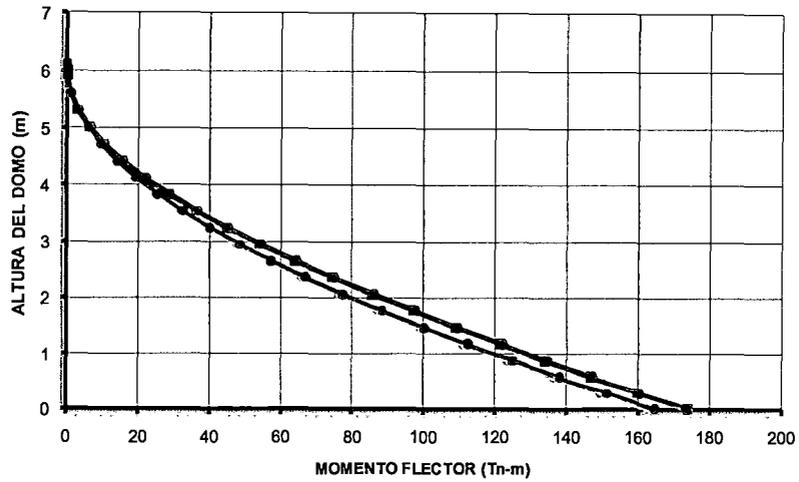


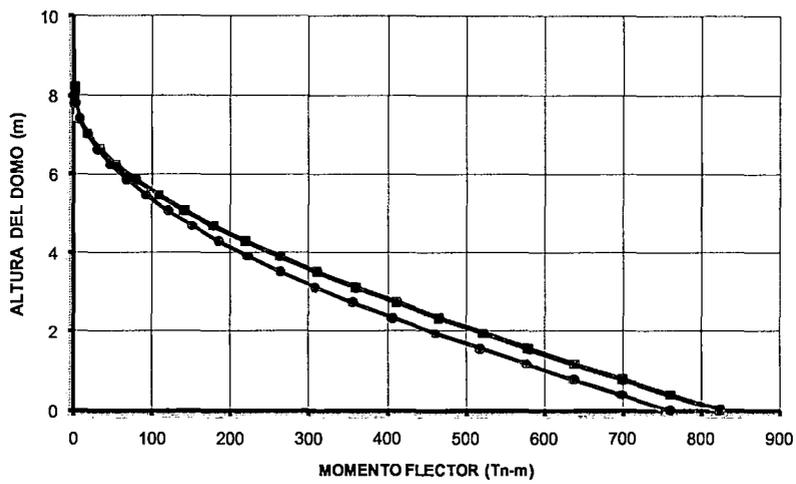
Figura 4.3 Fuerzas cortantes máximas probables en la familia de domos de gran luz



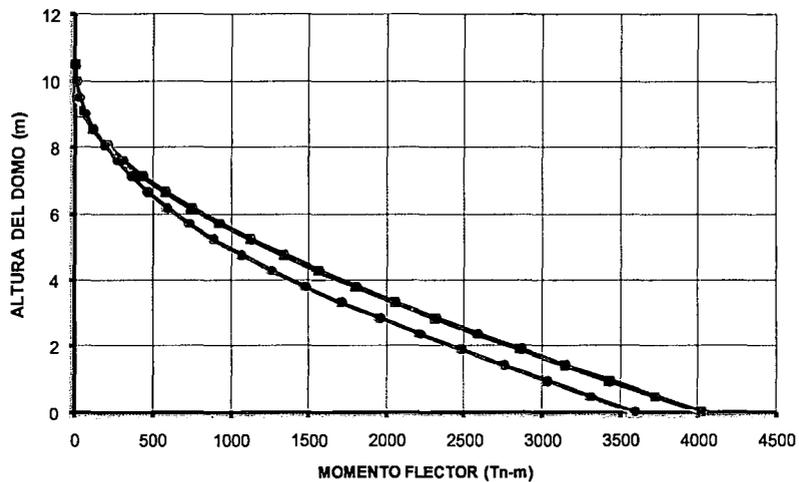
D2



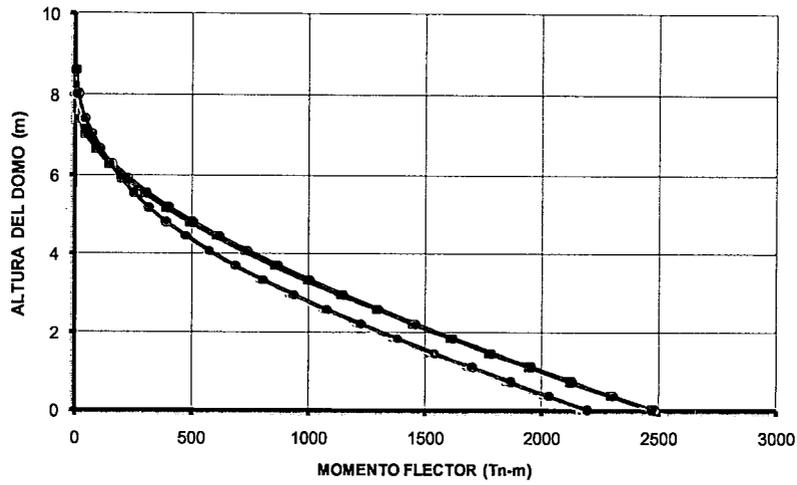
D3



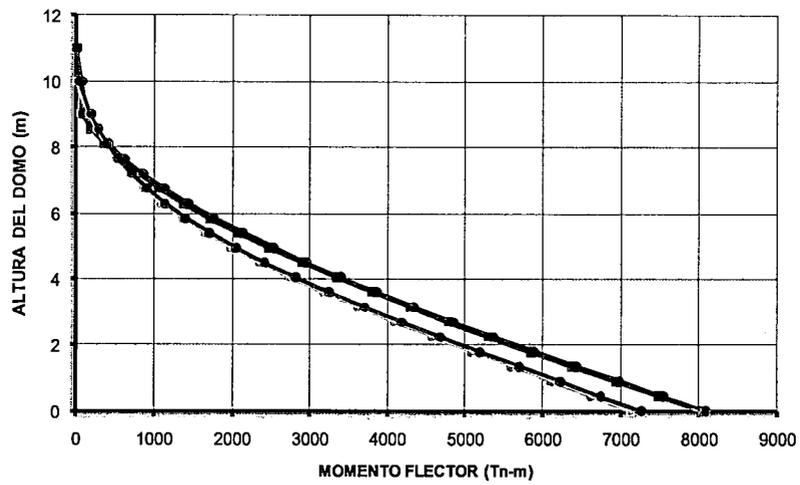
D4



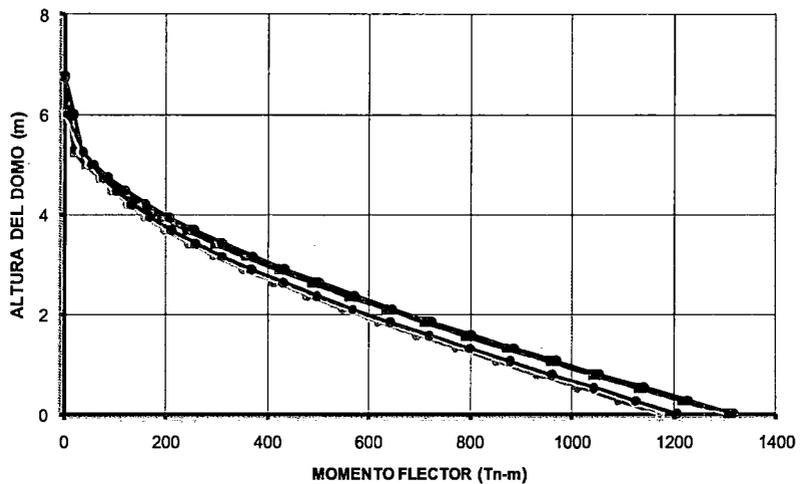
D5



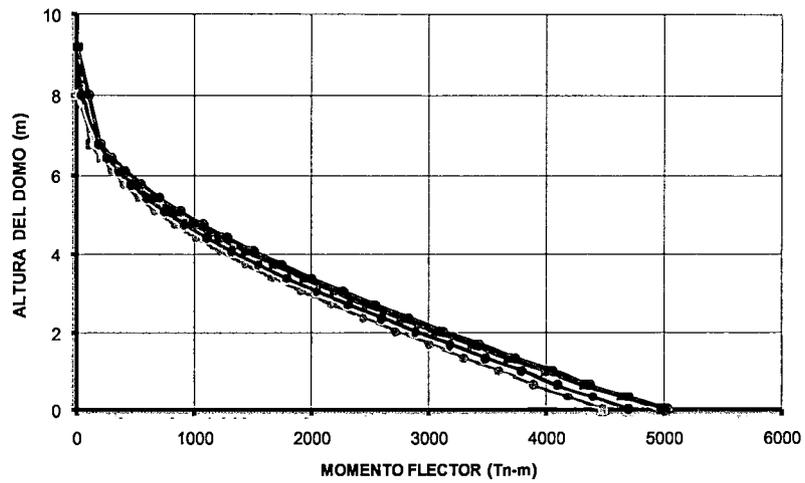
D6



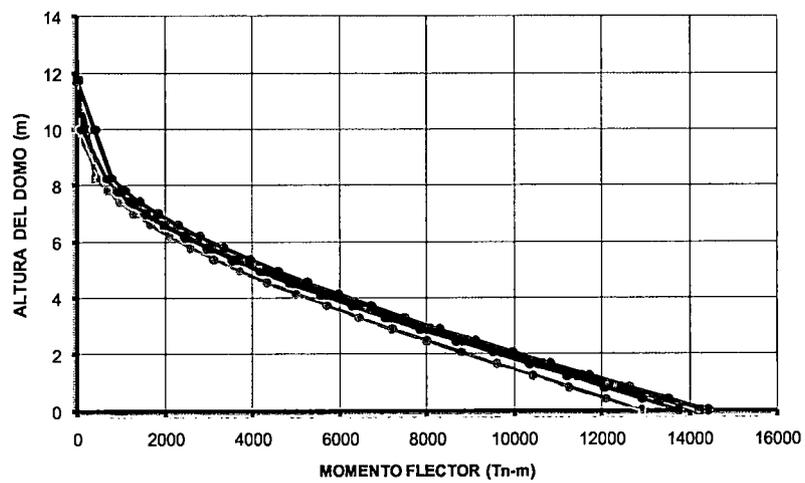
D7

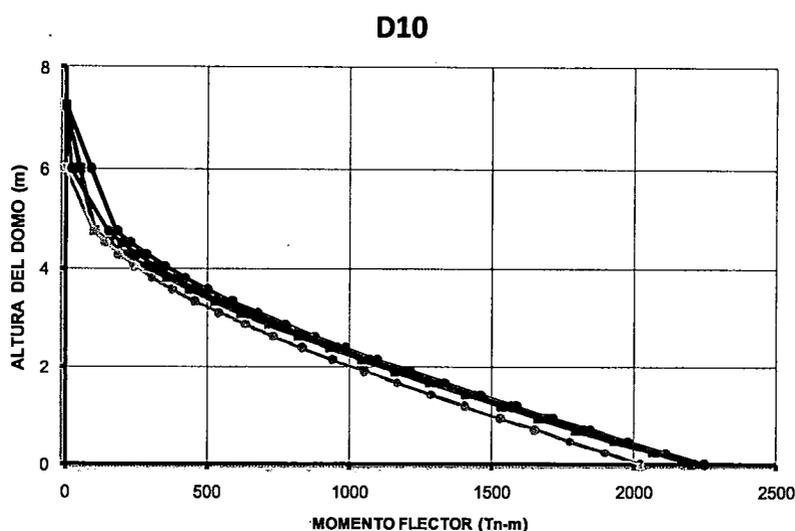


### D8



### D9





*Figura 4.4 Momentos flectores máximos en la familia de domos de gran luz*

Tanto el modelo simplificado como el modelo de elementos FRAME tienen valores similares en todas las curvas a excepción de zonas puntuales en cada respuesta de interés, pues como se nota ambas curvas se superponen en todos los casos. Esto quiere decir que la representación del domo dividido en 20 partes podría simplificarse aún más, ya no resolviendo una integral para hallar las propiedades estructurales sino simplemente colocando las correspondientes a un elemento cilíndrico hueco, presentado en el capítulo 2. La implementación de esto es lejanamente más sencilla. Sin embargo, representar el domo de la manera expuesta para una cantidad menor de elementos discretos no asegura la convergencia del método de forma tan rápida como la conseguida con los elementos de forma zona esférica hueca, ya que en esta manera se está considerando la curvatura propia de cada elemento en el proceso de integración.

Como se nota, el modelo simplificado no representa correctamente el desplazamiento elástico máximo probable de los domos. Pero a medida que el domo aumenta su relación  $ER$ , tanto la curva de desplazamientos del modelo como la curva dada por los elementos finitos refinados se superponen en la región correspondiente al primer tercio de la altura total del domo. Se observa además que el desplazamiento máximo no se presenta en el ápice del domo sino en la zona cercana a la parte inferior de la corona. La ubicación "exacta" del desplazamiento máximo se muestra en las imágenes de los modelos realizados en ANSYS en el Anexo G.

A diferencia de los desplazamientos, las fuerzas cortantes y momentos flectores muestran una representación adecuada a lo largo de la altura del domo, teniéndose como error máximo relativo entre el modelo simplificado y modelo de elementos refinado, el dado en la sección anterior para las respuestas halladas la base del domo. En otras palabras, como máximo se conseguirán los errores hallados anteriormente, a lo largo de toda la altura, representando al domo con la metodología propuesta. Estos errores se irán reduciendo a medida que nos alejamos de la base.

Adicionalmente, el modelo simplificado representa casi perfectamente las fuerzas cortantes y momentos flectores a lo largo de la altura de los domos D1 y D2, los cuales tienen las menores relaciones  $ER$ ; pues como se observa las correspondientes curvas dadas por el modelo simplificado se superponen a las curvas "exactas".

## 5 CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se demuestra que el modelo adoptado, además de su sencilla implementación, ofrece una adecuada precisión en las respuestas sísmicas usualmente utilizadas en el diseño estructural, como son los momentos flectores y fuerzas cortantes. Sin embargo, no es así para el caso del período fundamental y para los desplazamientos elásticos sísmicos. En la primera parte del presente capítulo se calibrarán las respuestas dadas para estos dos últimos mediante una función correctiva. Posteriormente, teniendo estas respuestas "precisas" y con el propósito de proveer una herramienta simple para el análisis sísmico de domos hemisféricos de concreto armado, se plantea un método simplificado que permitirá estimar tales respuestas reemplazando los parámetros geométricos correspondientes a un domo de gran luz cualquiera en expresiones halladas para cada respuesta sísmica.

La razón de establecer tales expresiones para cada una de las respuestas sísmicas halladas fue con el objetivo de brindar una estimación rápida y eficiente. En el presente, el diseñador estructural busca metodologías que le faciliten el proceso de diseño diario con el fin de optimizar su tiempo. El modelo simplificado le permite tanto reducir las complicaciones que genera el entendimiento de modelos de elementos Shell por un modelo de elementos más simples (elementos finitos viga); así como también el consumo de menores recursos computacionales en el análisis sísmico del tipo de domos considerado. Sin embargo, el diseñador siempre quiere usar expresiones que le permitan realizar un diseño rápido y seguro. De esta manera, en el caso que se realice un análisis sísmico de domos de concreto armado de gran luz, el diseñador podrá apoyarse en estas expresiones confiablemente.

### 5.2 MODELO ADIMENSIONAL

El primer paso en establecer un método simplificado que permita obtener el período fundamental de vibración, desplazamientos laterales, fuerzas cortantes y momentos flectores a través de un conjunto de ecuaciones, consiste en transformar las respuestas halladas previamente en respuestas adimensionales

que multiplicadas por factores dimensionales, se transformen en sus correspondientes respuestas reales.

Existe una gran variedad de configuraciones de los domos de gran luz de concreto armado, cuyos parámetros geométricos fueron planteados en el capítulo 2, los cuales son el radio medio ( $R$ ) y el espesor ( $e$ ); además se tienen los factores dependientes del material de la estructura: el módulo de elasticidad y la densidad. En este caso en particular el material utilizado es el concreto armado, donde el concreto podría tener resistencias a la compresión variables generando módulos de elasticidad dependientes de tales valores. Por tanto, un domo de gran luz en particular tiene 2 parámetros geométricos y 2 parámetros dependientes del material estructural. Debido a la variedad de domos que genera la combinación de una vasta cantidad de valores para cada uno de estos parámetros conviene transformar las respuestas reales en respuestas adimensionales dependientes del parámetro adimensional  $ER$ , las cuales serán multiplicadas por factores dimensionales apropiados para cada respuesta. De esta manera se reduciría considerablemente el número de domos a analizar pues únicamente se tendría un parámetro geométrico adimensional ( $ER$ ), donde un solo valor de este parámetro representaría a la gran variedad de pares (radio medio, espesor) cuya relación  $ER$  es la misma.

En cuanto a los factores dimensionales, éstos fueron hallados repitiendo el mismo procedimiento realizado en la rutina de MATLAB pero tomando como parámetros a variables literales. Como resultado se encontró que para cada respuesta en particular existe un factor constante para un domo en particular, independiente de la correspondiente respuesta adimensional hallada anteriormente. La Tabla 5.1 contiene los factores que transforman la respuesta adimensional a una real, para cada una de las respuestas.

Tabla 5.1 Factores de transformación de respuestas

Respuesta	Factor de Transformación
Periodo fundamental de vibración	$\sqrt{\frac{\rho}{E}} \left( R + \frac{e}{2} \right)$
Desplazamiento elástico máximo	$\frac{\rho}{E} \left( R + \frac{e}{2} \right)^2$
Fuerza cortante máxima	$\rho \left( R + \frac{e}{2} \right)^3$
Momento flector máximo	$\rho \left( R + \frac{e}{2} \right)^4$

Fuente: Elaboración propia

Como se nota, el factor  $\left( R + \frac{e}{2} \right)$  el cual corresponde a la altura total del domo, es el factor más importante pues todos los parámetros están en función de él. Según la configuración de los factores hallados, el método simplificado se extiende para cualquier tipo de concreto armado y no solamente a los correspondientes a las propiedades dadas en la Tabla 2.1, con la excepción que el módulo de Poisson tiene un valor constante considerado de 0.20. Este parámetro varía entre 0.15 a 0.20 para concreto, siendo este último el valor usualmente considerado.

### 5.3 MÉTODO SIMPLIFICADO PARA EVALUAR RESPUESTAS SÍSMICAS

Para el método simplificado se consideraron las respuestas modales producto de la combinación modal CQC. El procedimiento para generar tal método consiste en considerar las respuestas reales como un producto de respuestas adimensionales por factores dimensionales permite reducir el número de factores de los cuales dependen dichas respuestas. Una vez obtenidos dichos factores dimensionales se continúa con el proceso para generar el método simplificado previamente descrito, solamente analizando las respuestas adimensionales. Éstas serían el resultado de la simple división de las respuestas reales entre sus respectivos factores dimensionales.

Además de los factores encontrados en la sección anterior; todas las respuestas, a excepción del período fundamental, dependen además del factor denominado  $\eta$  en la Ec. (5.1), el cual representa la pseudoaceleración espectral y el valor de la plataforma del espectro correspondiente. Ésta es constante para todos los modos de cualquier domo de concreto armado debido a que, como se ha visto,

su período fundamental es muy bajo haciendo que el período fundamental y los demás períodos inherentes a la estructura estén en el rango de la plataforma del espectro. En síntesis,  $\eta$  multiplicará a los factores de transformación para desplazamiento elástico máximo, fuerza cortante y momento flector. Tal factor no fue colocado en la Tabla 5.1 pues un domo no depende físicamente de ese valor, sino que este valor aparece en el análisis sísmico.

$$\eta = \frac{ZUCS}{(R)} \quad (5.1)$$

La idea principal para lograr el método simplificado es establecer una relación entre los valores de cada una de las respuestas adimensionales y su correspondiente ubicación dentro de la altura total del domo (específicamente hablando de los desplazamientos elásticos, fuerzas cortantes y momentos flectores). Esta relación será planteada mediante un ajuste de curvas para cada respuesta. Para esto se grafican las respuestas adimensionales versus la altura; obteniéndose gráficas, las cuales son múltiplo de las Figs. 4.2 a 4.4. Pero como se puede notar, no es posible agrupar las curvas en una sola que represente un domo arbitrario que tenga una relación  $ER$  dada, independientemente de la dimensión del radio medio y espesor. Esto debido a que la altura del domo depende directamente del radio medio y el espesor, y las gráficas tienen diferentes valores para cada uno de ellos. Para facilitar el proceso de ajuste, se divide cada posición dentro de la altura del domo entre el valor total de la altura, en este caso es  $(R + e/2)$ . Con esto último se consigue tener los valores correspondientes a las posiciones a lo largo de la altura, relativos a la altura total. Lo único que se tendría que considerar al aplicar lo último es simplemente un cambio de variable en el dominio de la función que se va a hallar. En otras palabras, el valor de la respuesta adimensional (cualquiera de las tres mencionadas) estaría en función del parámetro  $\chi$  (Ec. (5.2)).

$$\chi = \frac{h}{(R+e/2)} \quad (5.2)$$

Donde  $h$  es una posición arbitraria a lo largo de la altura total del domo. De la misma manera se podría aplicar este mismo artificio para convertir cada respuesta adimensional en una relación unitaria. El proceso sería el mismo; es decir, las respuestas dadas para cada posición de la altura se dividirán entre sus respectivos valores máximos, obteniéndose como valor máximo entre todas las

relaciones a la unidad. Al proceder de esta manera todas las curvas correspondientes a cada domo de la familia quedan normalizadas y pueden graficarse juntas en un solo gráfico donde los extremos de los ejes coordenados son la unidad.

De esta manera, el proceso de ajuste de una curva de las respuestas sísmicas (con excepción del período fundamental) se puede resumir de la manera mostrada en la Fig. 5.1.

$$\text{Respuesta real} = \left( \text{Factor de corrección} \right) \left( \text{Valor máximo adimensional} \times \text{Respuesta adimensional normalizada} \right)$$

Figura 5.1 Esquema resumen de una respuesta sísmica

Como ya se tienen los factores de transformación, lo que faltaría es ajustar la curva normalizada hallada para cada respuesta en especial, a una función que se aproxime a la forma particular de la curva. Para tal ajuste se utilizó el algoritmo de Levenberg-Marquard, el cual proporciona una solución numérica al problema de minimizar una función, por lo general no lineal, en un espacio de parámetros de la función. En otras palabras, el algoritmo es una extensión del método de mínimos cuadrados, en este caso orientado al ajuste de curvas no lineales. Este algoritmo se aplicó tanto para el ajuste de las curvas normalizadas para cada domo, así como también el ajuste de valores de respuesta adimensional máximos en función del parámetro  $ER$ .

El proceso de ajuste de cada curva normalizada se realizó con el software LAB Fit versión 7.2.48 y consistió; en primer lugar, en plantear una función que tenga la forma de la curva en cuestión donde tanto el dominio como el rango pertenecían al mismo intervalo  $[0,1]$ . Una vez planteada la función con tendencia similar a la curva en cuestión, se procedió a encontrar, por cada domo, los parámetros adicionales a la variable independiente (en este caso  $\chi$ ) de la forma literal de la función. Esto fue posible gracias al algoritmo mencionado que hace que sea mínima la suma de cuadrados de las desviaciones entre la función de ajuste y la respuesta exacta.

Al tenerse 10 curvas normalizadas ajustadas, se tendrán 10 valores de cada parámetro literal de la función de ajuste. Para terminar con el ajuste de la curva normalizada se grafican los 10 valores de cada parámetro literal que hubiese versus la relación  $ER$  correspondiente a cada curva normalizada, y se ajustan los

puntos aplicando el mismo procedimiento anterior. Así se consiguió una expresión general que represente cualquier curva normalizada dependiendo únicamente del parámetro  $ER$ .

El último paso en el ajuste de respuestas sísmicas es el ajuste de máximos adimensionales en función del factor adimensional  $ER$ . El procedimiento al ser el mismo utilizado en el ajuste de los parámetros literales, también se realizó con el ayuda del software LAB Fit. En síntesis, el método simplificado necesita como inputs parámetros geométricos (radio medio y espesor), parámetros mecánicos (densidad y módulo de elasticidad del concreto armado) y el parámetro sísmico ( $\eta$ ) para estimar una respuesta sísmica particular en una posición arbitraria a lo largo de la altura del domo. La forma como se planteó el ajuste de la curva real de una respuesta en particular fue simplemente ajustar por separado tanto la curva de respuestas normalizada, la cual representa la variación de dicha respuesta a lo largo del domo; así como también, la máxima respuesta adimensional. Dependiendo del parámetro  $ER$ , el producto de estas dos funciones nos da como resultado la variación de la respuesta adimensional de cualquier domo que tenga dicho parámetro adimensional. Finalmente, para convertir las respuestas adimensionales en respuestas reales sísmicas, este producto de funciones se multiplica por el factor de corrección correspondiente.

En las siguientes secciones se detallará el procedimiento de ajuste de cada respuesta adimensional en particular, denominando cada una de ellas como Función seguido del nombre de la respuesta real.

### 5.3.1 Función Período Fundamental

Como se observa en la Tabla 4.2 los períodos fundamentales dados por el modelo simplificado no predicen adecuadamente tal respuesta para relaciones  $ER$  menores que 0.25. Por tanto, tales respuestas necesitan ser corregidas por una función correctiva.

Una vez convertidas las respuestas dadas por el modelo simplificado en adimensionales se grafican en el eje de las ordenadas versus su respectivo parámetro adimensional  $ER$  en el eje de las abscisas. La Fig. 5.2 muestra la tendencia lineal de las respuestas adimensionales dadas por el modelo simplificado. La curva generada se ajustó en el software LAB Fit donde la ecuación de ajuste es la Ec. (5.3).

$$FFP' = A.(ER) + B \quad (5.3)$$

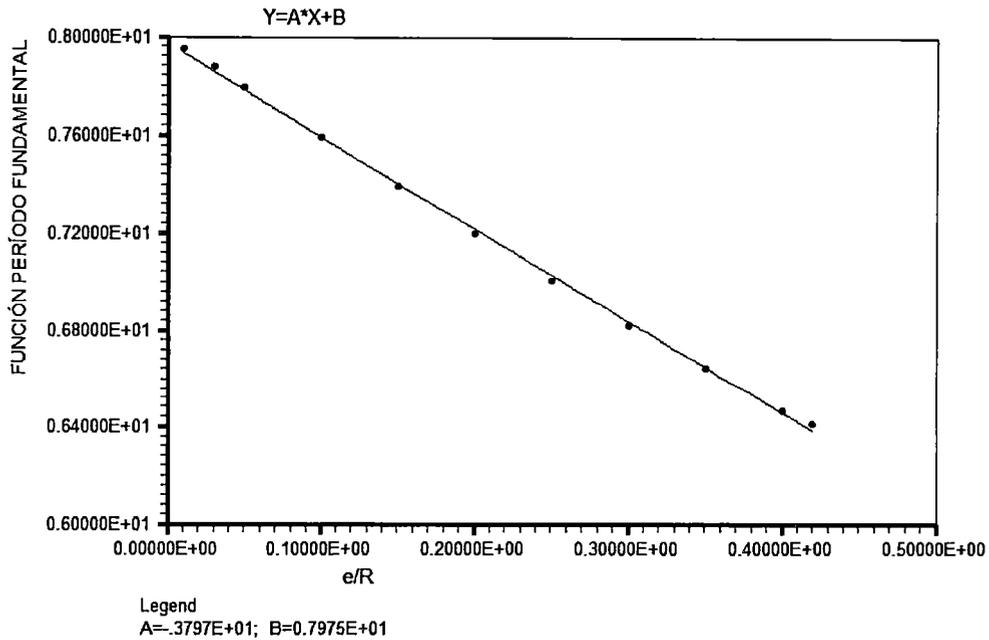


Figura 5.2 Curva de ajuste de la Función Período fundamental dado por el modelo simplificado

En la parte inferior la Fig. 5.2 se muestran los valores ajustados para los parámetros literales A y B. La Fig. 5.3 muestra la tendencia de la función correctiva para el período fundamental, donde la ecuación de ajuste tiene la forma de la Ec. (5.4).

$$FFP_{\text{corrección}} = A.10^{B(ER)} \quad (5.4)$$

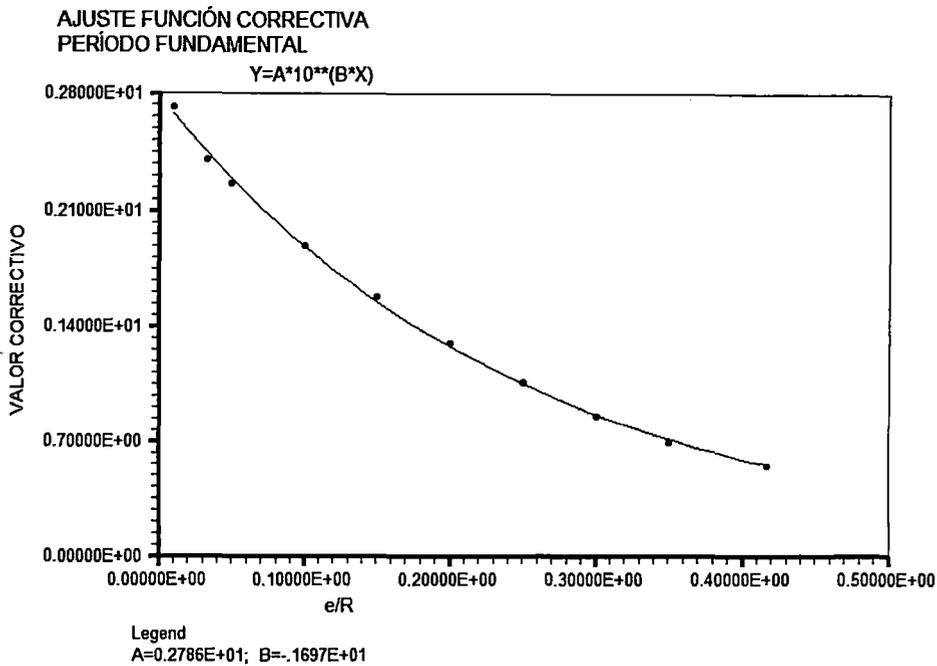


Figura 5.3 Curva de corrección de la Función Período Fundamental

De esta manera, si sumamos ambas expresiones halladas se obtiene la Función período fundamental corregida, la cual se muestra en la Ec. (5.5).

$$FFP = 2.786(10^{-1.697ER} - 1.363ER + 2.863) \quad (5.5)$$

La información correspondiente a los factores de correlación que se obtienen como resultado de los ajustes realizados se muestra en el Anexo H. La Ec. (5.5) multiplicada por el correspondiente factor de corrección nos da la ecuación que daría el período fundamental de vibración para un domo de concreto armado cualquiera (Ec. (5.6)). La Tabla 5.2 muestra la comparación entre las respuestas denominadas reales (las cuales corresponden a los períodos fundamentales dados por el programa ANSYS) y las respuestas calculadas por la Ec. (5.6) para todos los domos de la familia.

$$T_{fundamental} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \left( R + \frac{e}{2} \right) [2.786(10^{-1.697ER} - 1.363ER + 2.863)] \quad (5.6)$$

**Tabla 5.2 Comparación de períodos fundamentales entre las respuestas reales y las calculadas por el método simplificado**

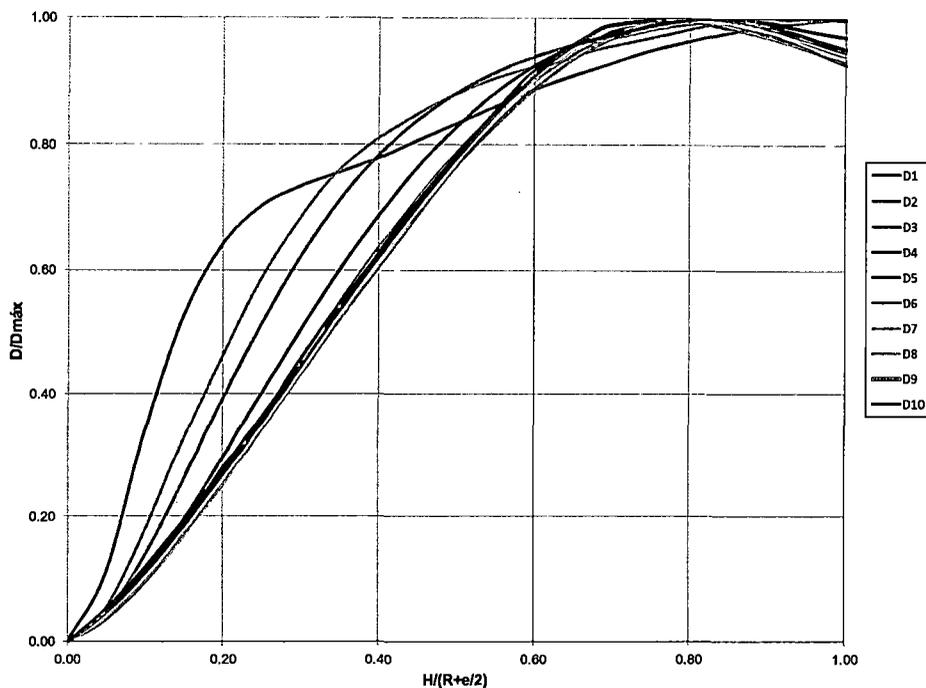
Domo	ER	Factor corrección	Función adimensional	Período calculado	Período real	%Error
D1	0.01	0.00343	10.61627	0.03644	0.03624	-0.55%
D2	0.03	0.00208	10.29420	0.02145	0.02132	-0.60%
D3	0.05	0.00280	10.07671	0.02822	0.02812	-0.37%
D4	0.10	0.00359	9.48017	0.03400	0.03397	-0.10%
D5	0.15	0.00294	8.95580	0.02631	0.02634	0.13%
D6	0.20	0.00376	8.49081	0.03190	0.03194	0.11%
D7	0.25	0.00231	8.07464	0.01862	0.01860	-0.11%
D8	0.30	0.00314	7.69864	0.02419	0.02417	-0.09%
D9	0.35	0.00401	7.35568	0.02952	0.02953	0.04%
D10	0.42	0.00248	6.93980	0.01719	0.01726	0.45%

Fuente: Elaboración propia

Como se aprecia en esta última tabla, los errores conseguidos con la Ec. (5.6) son menores al 1% para todos los domos de la familia, lo cual confirma la adecuada precisión del método simplificado para el caso del período fundamental.

### 5.3.2 Función Desplazamiento Sísmico Máximo Probable

Como se ha expresado, la función desplazamiento sísmico máximo probable es el producto de dos factores, uno es el máximo desplazamiento adimensional y el otro es la función desplazamiento normalizada. Este último caso se tiene 10 curvas normalizadas correspondientes a las 10 relaciones *ER* consideradas en la familia de domos. La Fig. 5.4 muestra las diez curvas normalizadas dadas por domos modelados por elementos SOLID en SAP2000, donde el eje de abscisas es el valor correspondiente a  $\chi$ , el cual será considerado como la variable independiente en el proceso de ajuste de tales curvas.



*Figura 5.4 Curvas normalizadas correspondientes a desplazamientos sísmicos máximos probables*

Cada curva será ajustada a la función literal de la forma:

$$FFD = \frac{A\chi}{1+B\chi+C\chi^2} \quad (5.7)$$

El criterio aplicado para llegar a la forma de la Ec. (5.7) fue, en este caso, que la curva pase necesariamente por el punto (0,0) y se evaluó el patrón resultante que siguen las curvas para definir la función de ajuste. La información correspondiente al ajuste de cada curva se puede apreciar en el Anexo H. Lo más resaltante de las curvas mostradas es que el punto de máximo desplazamiento no se encuentra necesariamente en el ápice del domo, sino generalmente se encuentra en la zona inferior del elemento de forma de casquete esférico como se puede apreciar en las imágenes del Anexo G, correspondientes al desplazamiento sísmico máximo en el plano de simetría en la dirección del sismo, de todos los domos de la familia, dado por el programa ANSYS. Esto quiere decir que el domo se deforma en mayor magnitud al nivel del plano paralelo a la base en el nivel inferior de la corona del domo.

Debido a que se ajustaron las 10 curvas siguiendo la Ec. (5.7) se obtuvieron 10 valores correspondientes a las variables A, B y C. Cada una de estas variables fue a su vez ajustada mediante una función dependiente del parámetro

adimensional  $ER$ . Con estos ajustes se termina el ajuste general de la curva normalizada correspondiente al desplazamiento sísmico adimensional. La Tabla 5.3 muestra los valores tabulados para cada uno de las variables literales A, B y C.

Tabla 5.3 Valores A, B y C correspondientes al ajuste de la curva normalizada de desplazamiento sísmico

$ER$	A	B	C
0.010	5.301	4.035	0.289
0.033	2.505	1.079	1.453
0.050	1.900	-0.613	1.567
0.100	1.252	-1.273	1.585
0.150	1.050	-1.448	1.562
0.200	0.972	-1.523	1.566
0.250	0.961	-1.527	1.557
0.300	0.989	-1.511	1.560
0.350	1.031	-1.458	1.541
0.417	1.093	-1.364	1.496

Fuente: Elaboración propia

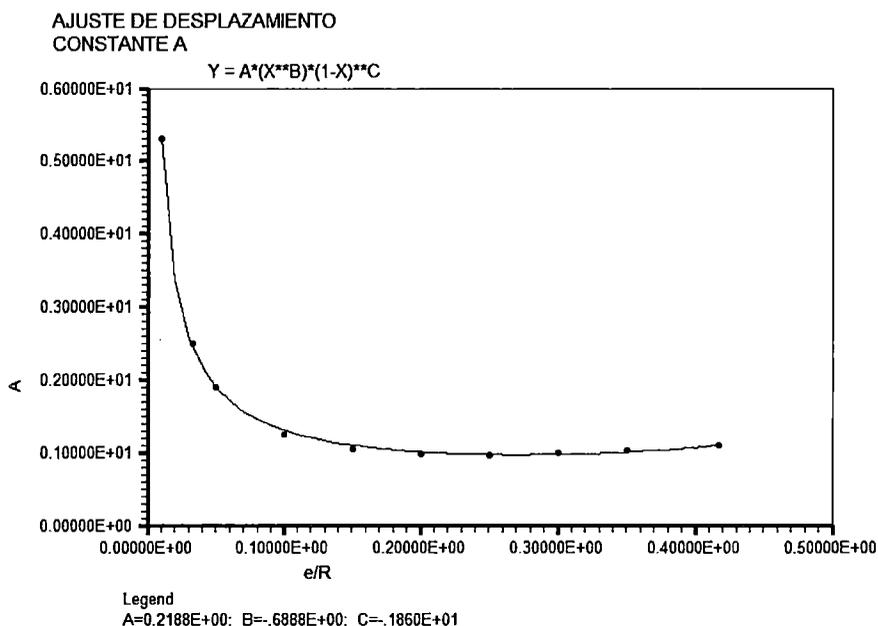


Figura 5.5 Ajuste de la variable A correspondiente a la curva normalizada de desplazamientos sísmicos

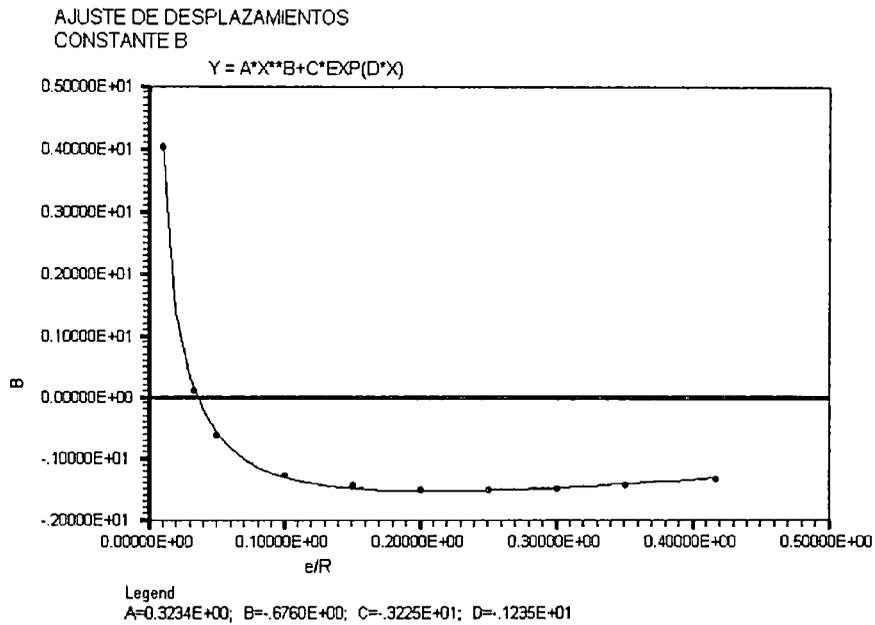


Figura 5.6 Ajuste de la variable B correspondiente a la curva normalizada de desplazamientos sísmicos

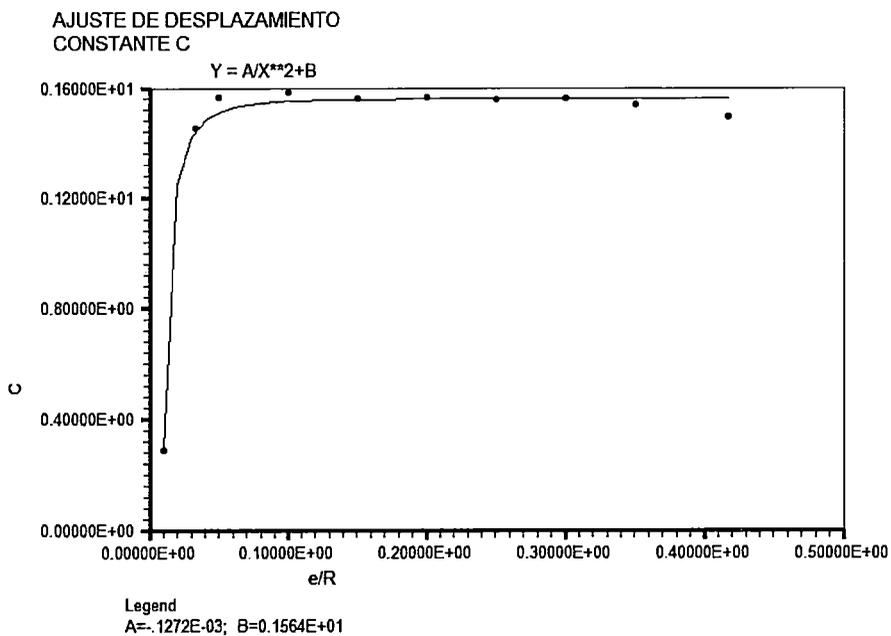


Figura 5.7 Ajuste de la variable C correspondiente a la curva normalizada de desplazamientos sísmicos

Según las Figs. 5.5 a 5.7 se obtienen las expresiones correspondientes a las variables A, B y C; las cuales son las Ecs. (5.8), donde el subíndice "d" indica que las expresiones son relativas al desplazamiento.

$$A_d = 0.219ER^{-0.689}(1 - ER)^{-1.860}$$

$$B_d = 3.225(0.100ER^{-0.676} - 10^{-0.536ER}) \quad (5.8)$$

$$C_d = -\frac{1.272}{ER^2} 10^{-4} + 1.564$$

Reemplazando estas expresiones en la Ec. (5.7) se obtiene la ecuación general de la curva normalizada para desplazamientos sísmicos adimensionales, para cualquier valor del parámetro *ER*.

Por otra parte, los valores máximos adimensionales del desplazamiento fueron ajustados también en función del parámetro adimensional *ER*. La Tabla 5.4 muestra los valores de los máximos desplazamientos adimensionales y la Fig. 5.8 muestra la curva de ajuste correspondiente.

Tabla 5.4 Máximos desplazamientos adimensionales

<i>ER</i>	<i>F<sub>d</sub></i> máx
0.010	36.720
0.033	33.815
0.050	32.212
0.100	29.125
0.150	26.611
0.200	24.233
0.250	22.149
0.300	20.102
0.350	18.458
0.417	16.809

Fuente: Elaboración propia

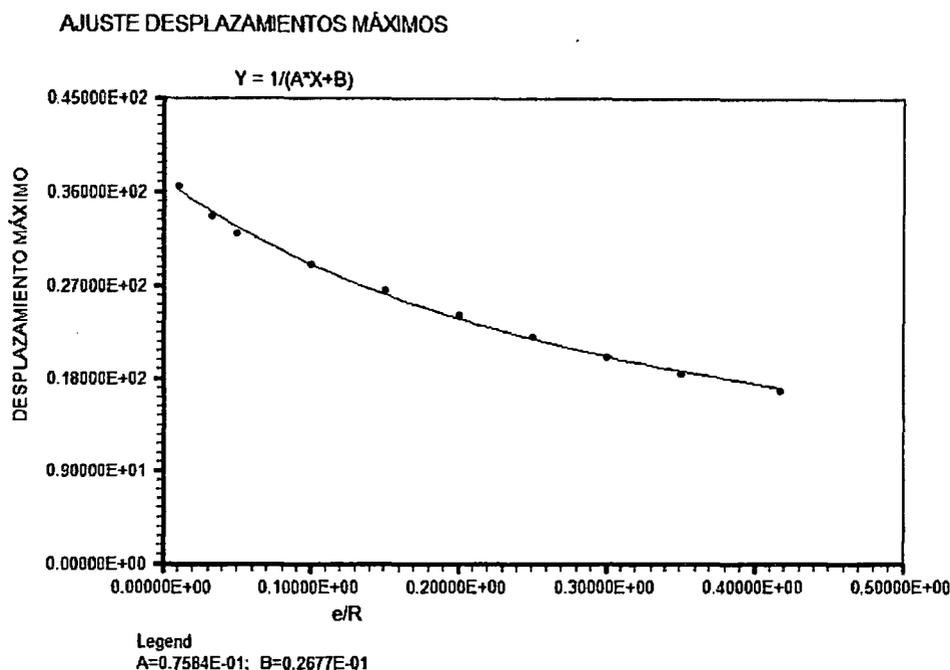


Figura 5.8 Curva de ajuste de máximos desplazamientos adimensionales

La Ec (5.9) muestra la expresión que representa la variación de los desplazamientos máximos adimensionales en función del parámetro adimensional  $ER$ .

$$Fd_{m\acute{a}x} = \frac{1}{0.076ER + 0.027} \quad (5.9)$$

El producto de las Ecs. (5.7) y (5.9) genera la ecuación correspondiente a la curva de desplazamientos adimensionales, que a su vez si esta expresión se multiplica por el factor de corrección correspondiente, da como resultado la expresión que estima el desplazamiento sísmico máximo probable en cualquier posición dentro de la altura del domo. Reduciendo dicha expresión se encuentra la Ec. (5.10).

$$D = \frac{\rho}{E} \left( R + \frac{e}{2} \right)^2 \left[ \eta \frac{1}{0.076ER + 0.027} \frac{(0.219ER^{1.311}(1-ER)^{-1.860})\chi}{ER^2 + 3.225ER^2(0.100ER^{-0.676} - 10^{-0.536ER})\chi + (-1.272 \cdot 10^{-4} + 1.564 ER^2)\chi^2} \right] \quad (5.10)$$

Como se expresó;  $h$ , que es la posición donde se quiere estimar el desplazamiento sísmico y que tiene un valor igual a 0 en la base del domo, se encuentra presente dentro del factor  $\chi$ . Usualmente es de interés del diseñador estructural el valor máximo de alguna respuesta que influye en el diseño de la estructura; en este caso, el máximo desplazamiento sería necesario para

compararlo con alguna tolerancia por alguna normativa o por razones relacionadas a elementos no estructurales dentro de la estructura. Es por ello que la Ec. (5.10) será reducida específicamente para encontrar el máximo desplazamiento sísmico que ocurriría en el domo. Como fue mencionado, el desplazamiento máximo ocurriría en un plano paralelo a la base que está en una posición cercana a la parte inferior de la corona del domo, para todos los casos. Hallando el valor que maximiza la Ec. (5.10) y reemplazándolo en la misma, tal ecuación se reduce a la Ec. (5.11).

$$D_{m\acute{a}x} = \frac{\rho}{E} \left( R + \frac{e}{2} \right)^2 \left[ \eta \frac{1}{0.076ER+0.027} \frac{0.219ER^{2.311}(1-ER)^{-1.860}}{3.225ER(0.100ER^{-0.676}-10^{-0.536ER})+2\sqrt{1.564ER^2-1.272.10^{-4}}} \right] \quad (5.11)$$

$$D_{h=R+e/2} = \frac{\rho}{E} \left( R + \frac{e}{2} \right)^2 \left[ \eta \frac{1}{0.076ER+0.027} \frac{0.219ER^{1.311}(1-ER)^{-1.860}}{ER^2(2.564+3.225(0.100ER^{-0.676}-10^{-0.536ER}))^{-1.272.10^{-4}}} \right] \quad (5.12)$$

Además de la Ec. (5.11) se muestra también la Ec. (5.12) que estima el desplazamiento sísmico máximo probable del punto del domo con mayor altura con respecto a la base, únicamente reemplazando  $\chi = 1$  en la Ec. (5.10). Cabe resaltar que estas curvas estimarán el desplazamiento elástico de la sección ubicada en el plano de simetría del domo, si se quisiese obtener el desplazamiento inelástico máximo probable, la Norma E.030 recomienda multiplicar los resultados obtenidos del análisis lineal y elástico con las solicitaciones sísmicas reducidas, por  $0.75(R)$ . Por tanto, para hallar correspondiente desplazamiento sísmico inelástico únicamente se multiplican las Ecs. (5.10), (5.11) y (5.12) por  $0.75(R)$  (en este caso  $(R)=3$ ).

Por último, para verificar la validez de la Ec. (5.11) se muestra la Tabla 5.5 donde se comparan los máximos desplazamientos elásticos reales (en este caso se tomaron los valores dados por ANSYS) y sus correspondientes valores calculados por el método simplificado. La Tabla mencionada muestra que los errores relativos calculados no superan el 12% para todos los domos de la familia.

Tabla 5.5 Comparación de valores de máximos desplazamientos sísmicos dados por la Ec. (5.11) y valores reales

Domo	ER	Desplz. Máx. calculado	Desplz. Máx. real	%Error
D1	0.01	2.290E-04	2.181E-04	-5.02%
D2	0.03	7.369E-05	7.505E-05	1.81%
D3	0.05	1.346E-04	1.307E-04	-3.00%
D4	0.10	2.155E-04	1.950E-04	-10.52%
D5	0.15	1.308E-04	1.203E-04	-8.76%
D6	0.20	1.871E-04	1.814E-04	-3.12%
D7	0.25	6.133E-05	6.285E-05	2.42%
D8	0.30	1.006E-04	1.078E-04	6.69%
D9	0.35	1.482E-04	1.624E-04	8.71%
D10	0.42	5.144E-05	5.550E-05	7.31%

Fuente: Elaboración propia

### 5.3.3 Función Fuerza Cortante Sísmica

Para el ajuste de estas curvas se aplicará exactamente la misma metodología aplicada para el ajuste de los desplazamientos sísmicos. En primer lugar se ajustaron las curvas de cortantes normalizadas de las respuestas dadas por el modelo simplificado, las cuales se muestran en la Fig. 5.9. Cada curva mostrada corresponde a cada uno de los 10 parámetros adimensionales  $ER$  de la familia de domos propuesta; así como en el caso de la respuesta anterior, cada curva representa en sí a una infinidad de domos cuyo parámetro  $ER$  es el mismo.

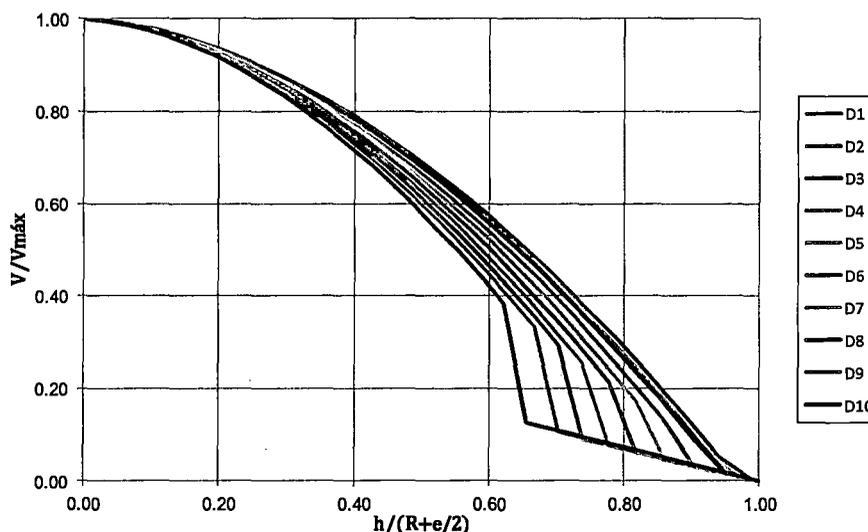


Figura 5.9 Curvas normalizadas correspondientes a fuerzas cortantes sísmicas elásticas

El criterio tomado para encontrar la mejor curva de ajuste fue que dicha curva pase necesariamente por los puntos (0,1) y (1,0), esto haría que se mantenga en su mismo valor la altura total del domo y el valor máximo de fuerzas cortantes. Luego se buscó una curva que tenga un patrón similar a las curvas normalizadas. De esta manera todas las curvas normalizadas fueron ajustadas a funciones de la forma de la Ec. (5.13).

$$FFV = \frac{1-x}{1-x+Ax^2} \quad (5.13)$$

A diferencia del caso anterior, se tiene solamente una variable literal: A, cuyos valores correspondientes a los 10 ajustes efectuados se muestran en la Tabla 5.6.

*Tabla 5.6 Valores de la variable A correspondiente al ajuste de la curva normalizada de fuerzas cortantes sísmicas elásticas*

<i>ER</i>	<i>A<sub>v</sub></i>
0.010	0.849
0.033	0.896
0.050	0.921
0.100	1.015
0.150	1.111
0.200	1.207
0.250	1.303
0.300	1.400
0.350	1.498
0.417	1.633

Fuente: Elaboración propia

De la misma manera aplicada para la respuesta anterior, esta variable fue ajustada a una función que depende del parámetro adimensional *ER*. La Fig 5.10 muestra la curva de ajuste de la variable A correspondiente a las fuerzas cortantes y la Ec. (5.14) muestra la función resultante, donde el subíndice "V" indica que la variable corresponde a la función normalizada de cortantes.

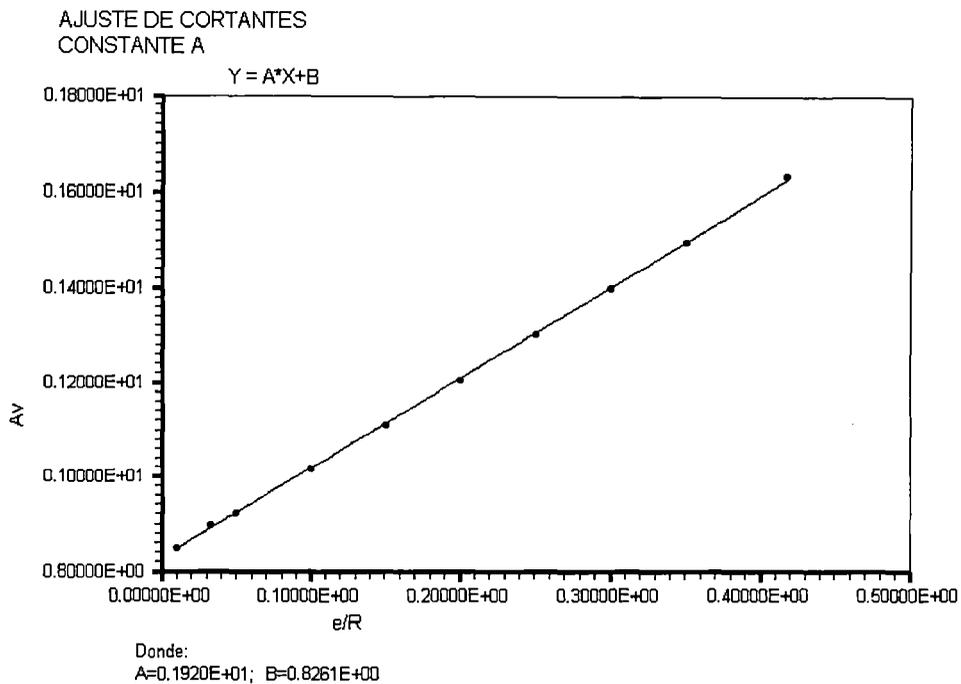


Figura 5.10 Ajuste de la variable A correspondiente a la curva normalizada de fuerzas cortantes sísmicas elásticas

$$A_V = 1.920ER + 0.826 \quad (5.14)$$

Reemplazando esta ecuación en la Ec. (5.13) se obtiene la curva general normalizada de cortantes sísmicos, la cual dará la tendencia de fuerzas cortantes en un domo con un factor  $ER$  dado. Para completar el ajuste de la curva adimensional de cortantes se procedió a ajustar los valores máximos adimensionales mostrados en la Tabla 5.7, los cuales dependen del parámetro  $ER$ . Cabe mencionar que esta curva necesariamente tiene que pasar por el eje de coordenadas debido a que para una relación  $ER = 0$ , el cortante forzosamente tiene que ser 0. La Fig. 5.11 muestra la curva de ajuste de dichos valores cuya ecuación corresponde a la Ec. (5.15).

Tabla 5.7 Máximas fuerzas cortantes adimensionales

ER	Fv.máx
0.000	0.000
0.010	0.486
0.033	1.562
0.050	2.291
0.100	4.268
0.150	5.978
0.200	7.461
0.250	8.748
0.300	9.868
0.350	10.844
0.417	11.954

Fuente: Elaboración propia

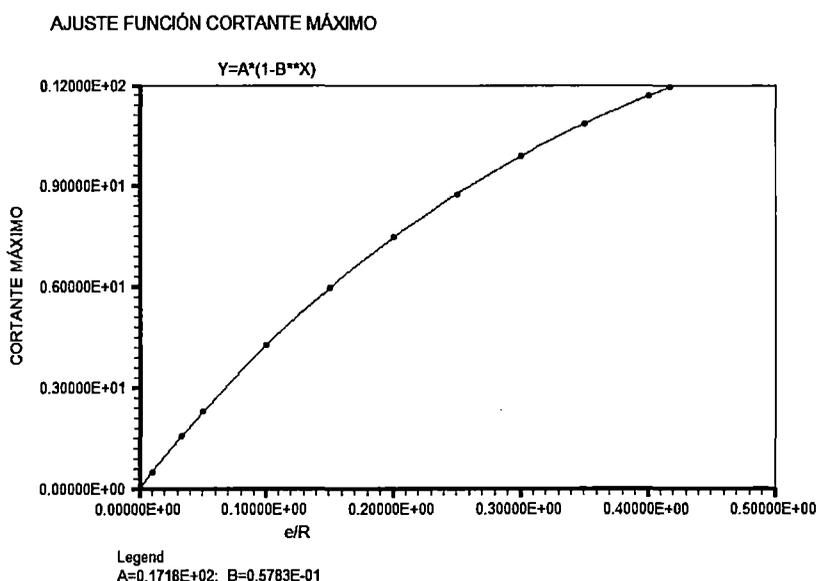


Figura 5.11 Curva de ajuste de máximas fuerzas cortantes adimensionales

$$FV_{máx} = 17.183(1 - 10^{-1.238ER}) \quad (5.15)$$

El producto de las Ec. (5.13) y (5.15) da el valor de la respuesta adimensional que corresponde a fuerzas cortantes. Para transformar esta respuesta en una respuesta real, se multiplica al producto anterior con el factor de corrección correspondiente. En consecuencia se obtiene la expresión que estima las fuerzas cortantes elásticas sísmicas a lo largo de la altura total del domo (Ec. (5.16)).

$$V = \rho \left( R + \frac{e}{2} \right)^3 \left[ \eta 17.183(1 - 10^{-1.238ER}) \frac{1-\chi}{1-\chi+(1.920ER+0.826)\chi^2} \right] \quad (5.16)$$

Debido a que usualmente en el diseño estructural se buscan las máximas solicitaciones para que la estructura resista éstas, la Ec. (5.16) se puede reducir a la Ec. (5.17), la cual calcula la máxima fuerza cortante elástica que podría generarse en un domo en un evento sísmico. Como se puede apreciar en las Figs. 4.3, la fuerza cortante máxima se genera en la base del domo.

$$V_{m\acute{a}x} = \rho \left( R + \frac{e}{2} \right)^3 [\eta 17.183(1 - 10^{-1.238ER})] \quad (5.17)$$

Por último, al igual que en los casos anteriores, para verificar la validez de la Ec. (5.17) se muestra la Tabla 5.8 donde se comparan las fuerzas cortantes elásticas máximas reales (en este caso se tomaron los valores dados por SAP2000 - SOLID) y sus correspondientes valores calculados por el método simplificado. La Tabla mencionada muestra que los errores relativos calculados no superan el 10% para todos los domos de la familia.

*Tabla 5.8 Comparación de valores de cortantes sísmicos elásticos dados por la Ec. (5.17) y los valores reales*

Domo	ER	V máximo calculado	V máximo real	%Error
D1	0.010	62.45	64.48	3.15%
D2	0.033	45.04	44.95	-0.19%
D3	0.050	160.34	156.28	-2.60%
D4	0.100	628.55	589.59	-6.61%
D5	0.150	484.45	446.15	-8.58%
D6	0.200	1266.13	1156.63	-9.47%
D7	0.250	343.13	313.16	-9.57%
D8	0.300	979.81	897.03	-9.23%
D9	0.350	2241.83	2067.36	-8.44%
D10	0.417	579.86	539.00	-7.58%

Fuente: Elaboración propia

#### 5.3.4 Función Momento Flector Sísmico

Finalmente, el proceso aplicado para el ajuste de la Función Momento Flector es exactamente el mismo que el aplicado para todas las respuestas anteriores; en este caso, los criterios para buscar la función que ajusta la curva normalizada fueron los mismos para el caso de las fuerzas cortantes. La Fig. 5.12 muestra las

10 curvas de momentos normalizados, las cuales fueron ajustadas mediante la Ec. (5.18) que tiene forma literal.

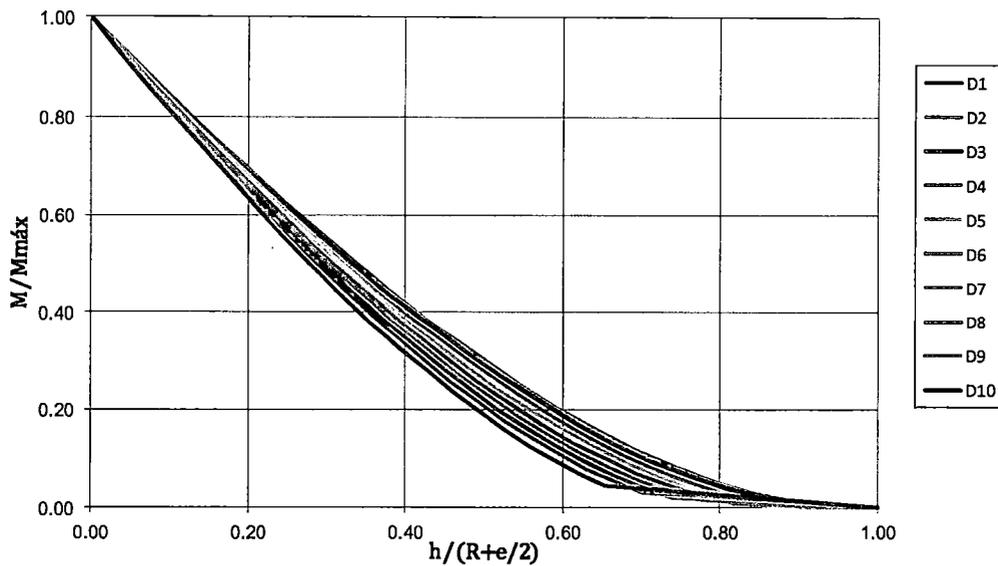


Figura 5.12 Curvas normalizadas correspondientes a momentos flectores sísmicos elásticos

$$FFM = (A + 2)^{(1-\chi)} - 1 + A(\chi - 1) \quad (5.18)$$

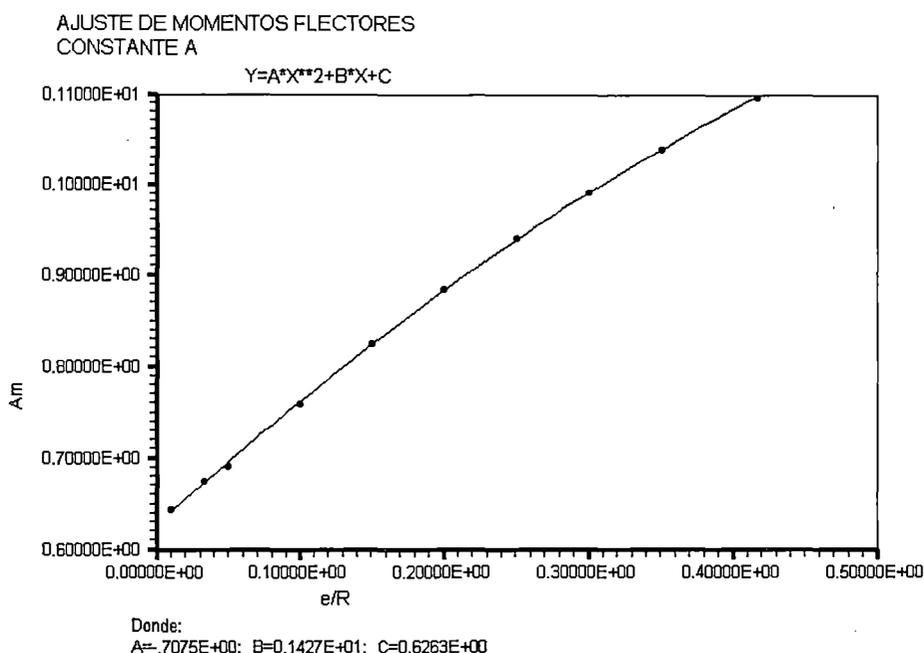
Como el caso de cortantes, se tiene solamente una variable literal: A, cuyos valores correspondientes a los 10 ajustes efectuados se muestran en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9 Valores de la variable A correspondiente al ajuste de la curva normalizada de momentos flectores sísmicos elásticos

ER	Am
0.010	0.644
0.033	0.675
0.050	0.691
0.100	0.760
0.150	0.825
0.200	0.884
0.250	0.940
0.300	0.991
0.350	1.039
0.417	1.097

Fuente: Elaboración propia

De la misma manera aplicada para las respuestas anteriores, esta variable fue ajustada a una función que depende del parámetro adimensional  $ER$ . La Fig. 5.13 muestra la curva de ajuste de la variable  $A$  correspondiente a las fuerzas cortantes y la Ec. (5.19) muestra la función resultante, donde el subíndice "M" indica que la variable corresponde a la función normalizada de momentos.



*Figura 5.13 Ajuste de la variable A correspondiente a la curva normalizada de momentos flectores sísmicos elásticos*

$$A_M = -0.706\chi^2 + 1.427\chi + 0.626 \quad (5.19)$$

Una vez más la curva general normalizada, en este caso de momentos flectores sísmicos, se obtiene al reemplazar la Ec. (5.19) en la Ec. (5.18), la cual dará la tendencia del momento flector en un domo con un factor  $ER$  dado. Para completar el ajuste de la curva adimensional de momentos se procedió a ajustar los valores máximos adimensionales mostrados en la Tabla 5.10, los cuales dependen del parámetro  $ER$ . La Fig. 5.14 muestra la curva de ajuste de dichos valores cuya ecuación corresponde a la Ec. (5.20).

Tabla 5.10 Máximos momentos flectores adimensionales

ER	FFM
0.000	0.000
0.010	0.309
0.033	0.980
0.050	1.429
0.100	2.595
0.150	3.546
0.200	4.318
0.250	4.943
0.300	5.446
0.350	5.847
0.417	6.255

Fuente: Elaboración propia

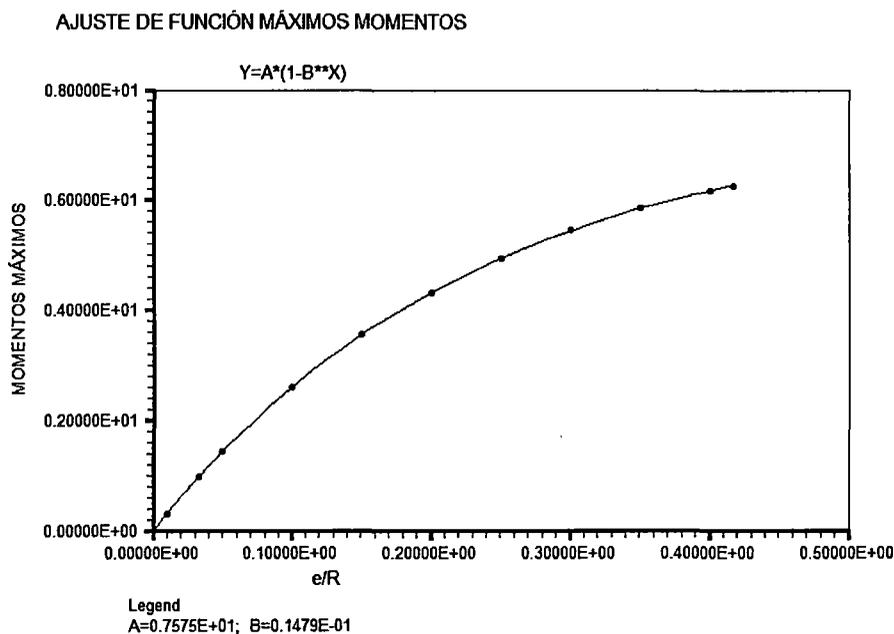


Figura 5.14 Curva de ajuste de máximos momentos flectores adimensionales

$$FM_{m\acute{a}x} = 7.575(1 - 10^{-1.830ER}) \quad (5.20)$$

Como en los casos anteriores, el producto de las Ecs. (5.18) y (5.20) da el valor de la respuesta adimensional, en este caso corresponde a momentos flectores. Para transformar esta respuesta en real, se multiplica al producto anterior con el factor de corrección correspondiente. En consecuencia se obtiene la expresión que estima los momentos flectores elásticos sísmicos a lo largo de la altura total del domo (Ec. (5.21)).

$$M = \rho \left( R + \frac{e}{2} \right)^4 \left[ \eta 7.575(1 - 10^{-1.830ER}) \left( (-0.706\chi^2 + 1.427\chi + 2.626)^{(1-\chi)} - 1 + (-0.706\chi^2 + 1.427\chi + 0.626)(\chi - 1) \right) \right] \quad (5.21)$$

Debido a la razón mencionada en el caso anterior, la Ec. (5.21) se puede reducir a la Ec. (5.22), la cual calcula el máximo momento flector elástico que podría generarse en un domo en un evento sísmico. Como se puede apreciar en las Figs. 4.4, el momento flector máximo se genera en la base del domo.

$$M_{\max} = \rho \left( R + \frac{e}{2} \right)^4 \left[ \eta 7.575(1 - 10^{-1.830ER}) \right] \quad (5.22)$$

Por último, al igual que en los casos anteriores, para verificar la validez de la Ec. (5.22) se muestra la Tabla 5.11 donde se comparan los momentos flectores elásticos máximos reales (en este caso se tomaron también los valores dados por SAP2000 - SOLID) y sus correspondientes valores calculados por el método simplificado. La Tabla mencionada muestra que los errores relativos calculados no superan el 15% para todos los domos de la familia.

Tabla 5.11 Comparación de valores de momentos sísmicos elásticos dados por la Ec. (5.22) y los valores reales

Domo	ER	M máximo calculado	M máximo real	%Error
D1	0.010	406.22	399.04	-1.80%
D2	0.033	175.10	164.65	-6.35%
D3	0.050	828.89	760.58	-8.98%
D4	0.100	4033.52	3600.73	-12.02%
D5	0.150	2473.20	2197.23	-12.56%
D6	0.200	8046.30	7269.46	-10.69%
D7	0.250	1304.74	1208.20	-7.99%
D8	0.300	4960.58	4700.53	-5.53%
D9	0.350	14185.92	13756.29	-3.12%
D10	0.417	2205.58	2209.23	0.17%

Fuente: Elaboración propia

#### 5.4 VALIDACIÓN DEL MÉTODO

La validación de un método es un requisito importante en la práctica, pues permite garantizar la eficacia de las respuestas que el método predice para cualquier estructura cuyos parámetros estén dentro de un rango establecido; en este caso, tales respuestas servirán para realizar un correcto diseño estructural. Validación de un método es la confirmación mediante el suministro de evidencia

objetiva de que se han cumplido los requisitos para una utilización o aplicación específica prevista de tal método. En el método simplificado propuesto la evidencia sería un análisis comparativo entre las respuestas denominadas "reales" con las respuestas dadas por el método y el requisito que deberían cumplir tales respuestas es que los errores relativos no superen el 15%, el cual es un valor admisible para el diseño estructural.

La validación del método permitirá demostrar que el método es adecuado para el propósito que persigue, en este caso, estimar respuestas para realizar un diseño apropiado. Es importante determinar el resultado correcto y ser capaz de demostrar que es correcto. Para ello se realizó un análisis comparativo en la sección anterior que comprobó que el método simplificado estima correctamente cada una de las respuestas. En síntesis se concluye que el método permite obtener errores en la estimación de las respuestas sísmicas que no superan el 15% para todos los casos estudiados.

A manera de reforzar aún más la conclusión dada se presenta un análisis comparativo de las respuestas sísmicas estimadas por el método de tres domos de concreto armado diferentes a cualquiera de la familia presentada; es decir, considerando el parámetro  $ER$  diferente a los dados para cualquier domo que pertenecía a la familia. Debido a que los domos de concreto armado en la actualidad son esbeltos, se verificó el método simplificado priorizando que los domos adicionales tengan el parámetro  $ER$  bajo. Las características de los domos adicionales se presentan en la Tabla 5.12.

Tabla 5.12 Características geométricas de los domos adicionales

Domo	Radio	Espesor	ER
D11	6.00	0.09	0.015
D12	5.00	0.10	0.020
D13	4.00	0.28	0.070

Fuente: Elaboración propia

Las propiedades mecánicas del concreto de estos domos fueron las mismas que las consideradas para la familia propuesta (Tabla 2.1). Podría haberse utilizado cualquier valor para estos parámetros que correspondan a un concreto armado arbitrario pues el método no se restringe únicamente a los valores considerados, ya que como se vio en la sección anterior, simplemente se reemplazan tales valores en las ecuaciones del método.

La Tabla 5.13 muestra los errores relativos entre las respuestas sísmicas dadas por el método simplificado (período fundamental, desplazamiento máximo, fuerza cortante y momento flector) y las respuestas "reales" proporcionadas por los modelos de elementos SOLID hechos en SAP2000.

Tabla 5.13 Validación de las Ecs. (5.6), (5.11), (5.17) y (5.22)

		D11	D12	D13
Tf (s)	Real	0.01804	0.01377	0.02176
	Ec. (5.6)	0.01807	0.01390	0.02177
	%Error	-0.14%	-0.97%	-0.05%
Dmáx (m)	Real	5.400E-05	3.100E-05	7.833E-05
	Ec. (5.11)	5.053E-05	3.169E-05	7.393E-05
	%Error	6.42%	-2.23%	5.63%
Vmáx (Tn)	Real	15.709	26.443	20.507
	Ec. (5.17)	15.624	28.099	20.241
	%Error	0.54%	-6.26%	1.30%
Mmáx (Tn-m)	Real	48.115	63.549	75.599
	Ec. (5.22)	50.727	72.417	78.930
	%Error	-5.43%	-13.96%	-4.41%

Fuente: Elaboración propia

Como se puede apreciar en la Tabla 5.13, los errores nos superan el 15% para todas las respuestas dadas y todos los casos adicionales estudiados. En consecuencia, está comprobada la validez del método y éste puede emplearse para estimar las respuestas sísmicas elásticas para cualquier domo de concreto armado cuyo parámetro adimensional  $ER$  pertenezca al intervalo [0.01, 0.40].

## CONCLUSIONES

1. Usualmente los domos de concreto armado se construyen con luces que están en el rango de 30 m a 60 m; sin embargo, es factible construirlos hasta luces de 300 m.
2. La eficiencia estructural de un elemento cáscara reside en la presencia de los esfuerzos de membrana como resistencia primaria, a pesar que esté sometido también a acciones tales como fuerzas cortantes y momentos flectores y torsores.
3. Ante cargas axisimétricas, los domos desarrollan esfuerzos tanto de compresión como tensión en su dirección anular y sólo de compresión en la dirección meridional.
4. Una estructura domo se clasifica según el tipo de curvatura, de este modo existen tres tipos de domo en general que vienen siendo utilizados a nivel mundial, los domos hemisféricos, los domos parabólicos y los domos elipsoidales.
5. El empuje de la fuerza de membrana en domos de baja altura es resistido mediante fuerzas cortantes a través de las paredes del domo y solamente por fuerzas de tracción en el soporte anular que se le coloque.
6. Los domos de concreto armado se comportan mejor que una estructura cilíndrica ante sollicitaciones sísmicas; pues al ser una estructura cerrada, las tensiones de respuesta resultantes en el domo son tres veces menores que las obtenidas en el cilindro y se ciñen solamente a una zona puntual.
7. Los parámetros geométricos de los cuales depende el comportamiento estático y dinámico de domos esféricos son el radio de la superficie media del domo  $R$ , el espesor  $e$  (constante a lo largo de la superficie media) y el ángulo  $2\varphi$  que subtiende el domo.
8. Las propiedades físicas y mecánicas del material del domo que influyen en la respuesta elástica de éste son el módulo de elasticidad  $E$ , la densidad  $\rho$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ .
9. Como las deformaciones por cortante son relevantes, se necesita una correcta determinación del factor de cortante; en este caso de secciones

- tubulares. Este factor varía desde 0.667 hasta 0.90 para secciones circulares llenas.
10. Los momentos flectores y fuerzas cortantes que estima el modelo simplificado son los correspondientes a los que actúan en la totalidad de la sección de análisis; es decir, en la sección que corresponde a una altura dada.
  11. La integridad del domo hemisférico de concreto armado depende del espesor de la pared, pues el domo al recibir las cargas, cuyas magnitudes dependen directamente del radio medio, las transmite a través de sus paredes.
  12. La distribución de tensiones resultante del modelo simplificado es constante a lo largo de cada elemento finito pues éstas dependen directamente de las funciones de desplazamiento consideradas, las cuales son lineales.
  13. Desde el punto de vista dinámico, para el correspondiente análisis sólo interesan las respuestas dadas por los grados de libertad en los que se generen fuerzas de inercia significativa, a los cuales se les denomina grados de libertad dinámicos.
  14. El factor de reducción de fuerzas sísmicas que podría emplearse en un análisis modal espectral correspondiente a un domo de concreto armado y puede considerarse ingenierilmente adecuado es 3.
  15. Los domos de concreto armado son estructuras muy rígidas, como consecuencia de esto se tiene que la pseudoaceleración sísmica para cada modo participante es la misma. En otras palabras, los períodos de vibración de cada modo son muy bajos que ubicados en el espectro correspondiente, todos se quedan dentro la plataforma de tal espectro; correspondiéndole a cada modo la misma pseudoaceleración.
  16. El factor de amplificación de aceleraciones de la respuesta estructural (C) para el caso de un domo de concreto armado, según la NTP E.030 resulta para todos los casos un valor único igual a 2.5.
  17. Al considerar al domo como una viga en voladizo, las deformaciones por cortante son relevantes para este tipo de estructura, debido a que los esfuerzos cortantes generan un alabeo considerable para vigas denominadas "de gran peralte".

18. En este caso, la combinación de la NTP E.030 da mayores resultados en todas las respuestas que la CQC. Los errores obtenidos comparando respuestas combinadas por la primera combinación son similares a los conseguidos comparando con las respuestas obtenidas por CQC.
19. El error máximo relativo en las fuerzas cortantes y momentos flectores dados por el modelo simplificado y las respuestas reales se encuentra en la base del domo. Tal error se va reduciendo a medida que nos acercamos al ápice.
20. El modelo simplificado permite encontrar errores en las respuestas sísmicas elásticas, tales como fuerzas cortantes y momento flector, que no superan el 15% para todos los casos estudiados.
21. Las respuestas sísmicas dadas por el modelo simplificado convergen rápidamente a medida que se aumenta el número de elementos discretos. Así, se nota que se obtienen errores relativos adecuados en las respuestas tanto para 5 elementos discretos como para 20 elementos, donde la precisión que se consigue al dividir la estructura en más partes es mínima.
22. Debido a que las curvas de las respuestas sísmicas son casi iguales tanto para el modelo simplificado dividido en 20 partes como para el modelo FRAME - SAP2000, la metodología podría simplificarse aún más considerando a cada elemento discreto con una sección tubular constante en todo el eje en lugar de sección tubular variable, pues las integrales serían reemplazadas por valores constantes conocidos.
23. El modelo simplificado no representa correctamente el desplazamiento sísmico ni el período fundamental de vibración, pues la suposición que se hace en el modelo es que todos los puntos que pertenecen a un mismo plano paralelo a la base se desplazan la misma cantidad, simulando la suposición de diafragma rígido. Debido a esto es que el modelo estima desplazamientos sísmicos y períodos fundamentales menores a los "reales" pues el sistema estructural modelado es más rígido que el real.
24. El máximo desplazamiento sísmico de un domo de concreto armado no se produce en el punto de mayor altura del mismo sino en un plano cercano a la parte inferior de la corona del domo, en un punto cercano al eje de simetría de la estructura.
25. A medida que la relación  $ER$  aumenta, los desplazamientos dados por el modelo simplificado se acercan a la respuesta "exacta", esto sucede debido

- a que mientras el domo se hace más grueso, su comportamiento es similar al supuesto que los puntos a un mismo nivel se comportan como un diafragma rígido.
26. Buenos resultados se obtienen en la estimación de momentos flectores y fuerzas cortantes elásticos sísmicos de domos de concreto armado modelando la estructura empleando estas consideraciones: Criterio de masas consistentes, efectos de deformaciones por corte y una discretización en 20 elementos.
  27. Es posible realizar un análisis paramétrico de un domo, encontrando factores dividiendo las respuestas sísmicas halladas en respuestas adimensionales que simplemente multiplicadas por factores de corrección dimensionales, permiten hallar las correspondientes respuestas reales. Esto facilita el proceso de formación de ecuaciones que simplifiquen la estimación de las respuestas.
  28. El método simplificado produce errores relativos en todas las respuestas sísmicas máximas que no superan el 15% tanto para todos los casos de la familia representativa como para los domos adicionales estudiados.

## RECOMENDACIONES

1. Con el objetivo de evaluar la vulnerabilidad sísmica de estructuras que cuenten con domos de gran luz en la parte superior de ellas, se recomienda analizar la interacción domo - estructura.
2. Estudiar el comportamiento sísmico de domos paraboloidales y elipsoidales mediante un análisis paramétrico que considere la altura y la luz variable de tales estructuras.
3. Considerar dentro del modelo una función que permita obtener la variación del desplazamiento sísmico dentro de cada sección transversal generada en el seccionamiento del domo, esto permitirá evitar la consideración de diafragma rígido transversal.
4. El análisis realizado puede extenderse a estudiar la respuesta sísmica de los diferentes tipos de domos mediante un análisis tiempo-historia utilizando varios registros.

## BIBLIOGRAFÍA

*Abdalla, J.A. & Mohammed, A.S. (2008).* Dynamic characteristics of large reinforced concrete domes. The 14<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering. China.

*Aguiar, R. (2006).* "Dinámica de estructuras con MATLAB". Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Superior Politécnica del Ejército. Ecuador.

*Ameen, H.A. (2010).* The impact of diameter, number of ribs, percentage of steel, compressive strength and cover thickness on the large concrete dome. American Journal of Scientific and Industrial Research.

*ANSYS (2009).* ANSYS Mechanical. ANSYS, Inc. Licencia MWH Perú S.A.

*ASCE (2006).* Minimum Design Loads for Building and Other Structures. ASCE/SEI 7-05.

*Barrera, R. & Fernández-Dávila, V.I. (2010).* Modelo simplificado para evaluar las características dinámicas de estructuras de concreto armado tipo domo. XXXIV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, San Juan, Argentina.

*Bazoune, A. & Khulief, Y.A. (2003).* Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element. Journal of Sound and Vibration, 259(2), 473-480.

*Billington, D.P. (1965).* "Thin Shell Concrete Structures". McGraw-Hill, Inc.

*Buchanan, G.R. & Rich, B.S. (2002).* Effect of boundary conditions on free vibration thick isotropic spherical shells. Journal of Vibration and Control; 8; 389.

*Campillo, R. (2002).* "Introducción a MATLAB". Facultad de Ingeniería. Universidad Veracruzana. Veracruz-México.

*Carrión, L. & Dünner, R. (1999).* Análisis y Diseño Sísmico de Chimeneas Industriales. Memoria para obtener el Título de Ingeniero Civil en Obras Civiles – Universidad Central de Chile. Chile.

*Casado, M.C. (2006).* Manual básico de MATLAB. Servicios Informáticos UCM.

*Cervera, M. (2001).* "Mecánica de estructuras - Resistencia de materiales". 2da edición. Ediciones UPC. España.

*Cheng, F. (2001).* "Matrix Analysis of structural dynamics". Marcel Dekker Inc. USA.

*Chopra, A.K. (1995).* "Dynamics of structures". Prentice Hall Inc. USA.

*Clough, R. & Penzien, J. (2003).* "Dynamics of structures". Computers and Structures Inc. USA.

*Cortínez, V.H. & Rossi, R.E. (1996).* Consideraciones del efecto de corte en la dinámica de vigas abiertas de pared delgada. *Mecánica Computacional Vol. XVI.* Tucumán, Argentina.

*Domotech (2011).* <http://www.domotech.com>.

*Estructuras domo (2011).* <http://www.estructurasdomo.com>.

*Felippa, C.A. (2004).* "Introduction to finite element methods". University of Colorado. USA.

*Isler, H. (2000).* The engineer's contribution to contemporary Architecture. 1<sup>st</sup> edition. Thomas Stelford Publishing. USA.

*Lab FIT (2011).* Curve Fitting Software.

*Leissa, A.W. (1993).* "Vibration of Shells". The Acoustical Society of America.

*Meyer, C. & Sheer, M.H. (2005)* Do concrete shells deserve another look? *Concrete International*, pp 43-50.

*Monolithic (2011).* <http://www.monolithic.com>.

*Orosz, I. (1970).* Simplified method for calculating shear deflections of beams. U.S.D.A. Forest Service research note.

*Pollack, M.A. & Veccio, F.J. (1994).* Reinforced concrete shells elements subjected to bending and membrane loads. Technical paper. *ACI Structural Journal*.

*Qatu, M. (2004).* "Vibration of laminated shells and plates". Elsevier.

*Rajan, S. (2009).* Free Vibration of laminated composite cross-ply spherical panels. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Estructural – National Institute of Technology Rourkela. India.

*Rinne, J. E. (1970).* "Design of earthquake resistant structures: Towers and chimneys". R. L. Wingel. Chap. 20.

*SAP2000 (2008).* Structural Analysis Program, Computers and Structures, Inc. Berkeley, CA. Licencia UNI.

*SENCICO (2003).* Reglamento Nacional de Edificaciones. Norma Técnica E.030 Diseño Sismorresistente. Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento. Perú.

*Sezer, H. (2006).* Structural assessment of Guastavino domes. Tesis de maestría en ingeniería arquitectural – Pennsylvania State University. USA.

*Shingu, K. et all (2004).* A study on damping characteristic of shell and spatial structures – Damping ratios of a cylindrical shell. The 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering. Vancouver, Canada.

*Soedel, W. (2004).* "Vibration of shells and plates". 3<sup>rd</sup> edition. Marcel Dekker, Inc. USA.

*South, N. (2005).* A finite element analysis of the monolithic dome. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Estructural – Idaho State University. USA.

*Timoshenko, S. (1957).* "Resistencia de materiales". ESPASA-CALPE. España.

*Timoshenko, S. (1987).* "Theory of plates and shells". 2nd edition. McGraw-Hill, Inc.

*Vásquez, J. (2007).* Toolbox StrUC v2. Manual de uso. Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica. Escuela de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago. Chile.

*Ventsel, E., Krauthammer, T. (2001).* "Thin plates and shells". Marcel Dekker Inc. USA.

*Wilson, E. (2009).* "Análisis estático y dinámico de estructuras". 1ra edición. Editora Búho. República Dominicana.

*Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L. (2000).* "The Finite Element Method". Volume 2. 5ta edición. Butterworth-Heinemann.

## ANEXOS

## ANEXO A

### RUTINA ELABORADA EN LENGUAJE MATLAB PARA EL ANÁLISIS MODAL DE DOMOS DE GRAN LUZ

Esta rutina permite encontrar las matrices de rigidez lateral, matriz de masas consistentes, las frecuencias angulares y las formas de modo de un domo hemisférico cualquiera. Esta rutina es indiferente a las propiedades del material utilizado.

```
%===== ANÁLISIS MODAL DE DOMOS DE GRAN LUZ =====
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%| RONNIE FERNANDO BARRERA PÉREZ
%| FIC - UNI
%| -----
%| PROGRAMA      : Modaldomo.m
%| UNIDADES     : Ton - m
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;
R=input('Radio interno del domo=');
e=input('Espesor del domo=');
Ef=input('Módulo de elasticidad del material=');
v=input('Módulo de Poisson=');
n=input('número de segmentos a dividir la zona esférica=');
L=R/n;
syms x H k;
G=Ef/(2*(1+v));
% MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL
=====

% -----Análisis de elementos discretos - Zona esférica-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

I=0.25*pi*(2*R+e)^2*e^2+0.5*pi*e*(x+H)*(2*R+e)*(2*R-(x+H));
A=pi*(e^2+2*R*e);
%-----Cálculo de factores de corte de elementos discretos-----
for m=2:n+1
    a(m)=(2*m-3)*L/2;
    rm(m)=sqrt(2*R*a(m)-(a(m))^2);
    ee(m)=sqrt((R+e)^2-(R-a(m))^2); %rm(m)+e'
    rr(m)=rm(m)/ee(m);
```

```

FF(m)=1.5239*rr(m)^6-4.8793*rr(m)^5+5.3585*rr(m)^4-
1.6844*rr(m)^3-0.5569*rr(m)^2+0.0051*rr(m)+0.8999;
end
%-Formación de las matrices de rigidez de los elementos discretos-
for w=2:n+1
    syms x;
    L=R/n;
    phi=24*(1+v)*I/(FF(w)*A*L^2);
    yb(1)=L/(1+phi)*(x/L-(x/L)^2*(2+.5*phi-x/L)+phi*x/L);
    yb(2)=-L/(1+phi)*(.5*phi+(x/L)^2*(1-.5*phi)-(x/L)^3);
    yb(3)=1/(1+phi)*(-(x/L)^2*(3-2*(x/L))+1);
    yb(4)=1/(1+phi)*(phi+3*(x/L)^2-2*(x/L)^3);
    ys(1)=L/(1+phi)*(-.5*phi*x/L);
    ys(2)=-L/(1+phi)*(.5*phi*x/L-.5*phi);
    ys(3)=1/(1+phi)*(phi*(1-x/L));
    ys(4)=1/(1+phi)*(phi*(x/L-1));
    for i=1:4
        for j=1:4
            k(i,j,w)=int(diff(yb(i),2)*diff(yb(j),2)*I)+1/(2*(1+v)
                )*FF(w)*A*int(diff(ys(i))*diff(ys(j))));
        end
    end
    end
    x=0;
    H=(w-2)*L;
    ko(:,:,w)=eval(k(:,:,w));
    x=L;
    k1(:,:,w)=eval(k(:,:,w));
    kttotal(:,:,w)=k1(:,:,w)-ko(:,:,w);
    clear x L;
end

% -----Análisis de elemento discreto - Casquete esférico-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear x L;
syms x k;
L=e;
Ip=0.25*pi*((R+e)^2-(R+e-x)^2)^2;
Ap=pi*((R+e)^2-(R+e-x)^2);
pkip=12*Ef*Ip/(G*.9*Ap*L^2);

```

```

ybc(1)=L/(1+phip)*(x/L-(x/L)^2*(2+.5*phip-x/L)+phip*x/L);
ybc(2)=-L/(1+phip)*(.5*phip+(x/L)^2*(1-.5*phip)-(x/L)^3);
ybc(3)=1/(1+phip)*(-(x/L)^2*(3-2*(x/L))+1);
ybc(4)=1/(1+phip)*(phip+3*(x/L)^2-2*(x/L)^3);
ybc(1)=L/(1+phip)*(-.5*phip*x/L);
ybc(2)=-L/(1+phip)*(.5*phip*x/L-.5*phip);
ybc(3)=1/(1+phip)*(phip*(1-x/L));
ybc(4)=1/(1+phip)*(phip*(x/L-1));
    for i=1:4
        for j=1:4
            k(i,j,1)=int(diff(ybc(i),2)*diff(ybc(j),2)*Ip)+1/(2*(1
+v))*int(diff(ybc(i))*diff(ybc(j))*Ap);
        end
    end
    end
x=0.1*L;
koo(:, :)=eval(k(:, :));
x=L;
k11(:, :)=eval(k(:, :));
ktotal(:, :, 1)=k11(:, :)-koo(:, :);

% ----- Creación de la tabla de colocación -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fila3=[1:n+1];
fila4=[2:n+1];
fila1=[n+2:2*n+2];
fila2=[n+3:2*n+2];
fila4(1,n+1)=0;
fila2(1,n+1)=0;
Tablec=zeros(4,n+1);
Tablec(1,:)=fila1;
Tablec(2,:)=fila2;
Tablec(3,:)=fila3;
Tablec(4,:)=fila4;
Tablecoloc=Tablec';

% ----- Inicialización de la Matriz de rigidez del domo -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

krig=IniStiff(Tablecoloc);

```

```

% Adición de las matrices de rigidez de los elementos componentes
a la matriz de rigidez del domo -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for q=1:n+1
    krig=AddStiff(krig,ktotal(:, :, q), Tablecoloc, q);
end
krig=Ef*krig;
HH= [1:n+1];
klat=StatCond(krig, HH);
klat
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% MATRIZ DE MASAS CONSISTENTES
=====
% -----Análisis de elementos discretos - Zona esférica-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

syms Mt;
for w=2:n+1
    for i=1:4
        for j=1:4
            Mt(i, j, w)=p*A*int((yb(i)+ys(i))*(yb(j)+ys(j)));
            Mr(i, j, w)=p*int(diff(yb(i))*diff(yb(j)))*I;
        end
    end
    end
    x=0;
    H=(w-2)*L;
    mo(:, :, w)=eval(Mt(:, :, w));
    mro(:, :, w)=eval(Mr(:, :, w));
    x=L;
    m1(:, :, w)=eval(Mt(:, :, w));
    mr1(:, :, w)=eval(Mr(:, :, w));
    Mtotal(:, :, w)=m1(:, :, w)-mo(:, :, w);
    Mtotalr(:, :, w)=mr1(:, :, w)-mro(:, :, w);
end

% -----Análisis de elemento discreto - Casquete esférico-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear x L;

```

```

syms x k;
L=e;
for i=1:4
    for j=1:4
        Mt(i,j,1)=p*int((ybc(i)+ysc(i))*(ybc(j)+ysc(j))*Ap);
        %Matriz de masa correspondiente a la inercia transversal
        Mr(i,j,1)=p*int(diff(ybc(i))*diff(ybc(j))*Ip);
        %Matriz de masa correspondiente a la inercia rotacional
    end
end
x=0;
moo(:,:,1)=eval(Mt(:,:,1));
mroo(:,:,1)=eval(Mr(:,:,1));
x=L;
m11(:,:,1)=eval(Mt(:,:,1));
mr11(:,:,1)=eval(Mr(:,:,1));
Mtotal(:,:,1)=m11(:,:,1)-moo(:,:,1);
Mtotalr(:,:,1)=mr11(:,:,1)-mroo(:,:,1);

%--- Inicialización de las Matrices de masa correspondientes a la
inercia transversal y rotacional del domo -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Mtf=IniStiff(Tablecoloc);
Mrf=IniStiff(Tablecoloc);

%-- Adición de las matrices de masa de los elementos componentes a
la matriz de masa del domo -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for q=1:n+1
    Mtf=AddStiff(Mtf,Mtotal(:,:,q),Tablecoloc,q);
    Mrf=AddStiff(Mrf,Mtotalr(:,:,q),Tablecoloc,q);
end
Mtf;
Mrf;
Mmasaf=Mtf+Mrf;

%----- Solución al problema de vectores propios -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[VP wc]=eig(klat,Mmasaf);
% VP      : Matriz de formas de modo

```

```
% wc      : Frecuencias angulares de los modos elevadas al cuadrado
%----- Porcentaje de Masas participativas -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A=diag(VP'*Mmasaf*ones(n+1,n+1));
A=A.*A;
B=diag(VP'*Mmasaf*VP);
Mi=A./B;
Masatotal=(diag(Mmasaf*ones(n+1,n+1)))'*ones(n+1,1);
permasa=Mi/Masatotal;
permasa %Vector de porcentajes de masa participativa de cada modo
```

## ANEXO B

### RUTINA ELABORADA EN LENGUAJE MATLAB PARA EL ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL

Esta rutina permite encontrar las respuestas sísmicas elásticas máximas probables (desplazamientos, fuerzas cortantes y momentos flectores) para una estructura rígida considerando el espectro de la NTP E.030 (por simplificación para el caso de domos se consideró que todos los períodos de vibración caen dentro de la plataforma del espectro). Las reglas de combinación utilizadas son la regla CQC y la combinación de la norma peruana.

```
%===== ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL =====  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%| RONNIE FERNANDO BARRERA PÉREZ  
%| FIC - UNI  
%|-----  
%| PROGRAMA : Analmodalspectral.m  
%| UNIDADES : Ton - m  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
VP=input('Matriz de vectores propios=');  
wc=input('Matriz de frecuencias angulares (al cuadrado)=');  
Sa=input('ZUCS/R del espectro de aceleraciones=');  
m=length(wc);  
  
%----- Ordenando las frecuencias de vibración -----  
for i=1:m  
    for j=1:m  
        if wc(i,i)>wc(j,j)  
            else  
                a=VP(:,i);  
                b=wc(i,i);  
                VP(:,i)=VP(:,j);  
                wc(i,i)=wc(j,j);  
                VP(:,j)=a;  
                wc(j,j)=b;  
            end  
        end  
    end  
end
```

```

%----- Vector de influencia de aceleración de la base -----
for i=1:m
    II(i,1)=1;
end
%----- Normalización de las formas de modo -----
% for i=1:m
    DD(i)=sqrt(VP(:,i)'*Mmasaf*VP(:,i));
    VPN(:,i)=VP(:,i)/DD(i);
end
F=VPN'*Mmasaf*II;          %Factor de participación modal
for i=1:m
    T(i)=2*pi/sqrt(wc(i,i)); %Períodos de vibración
    Sd(i)=Sa*9.81/(wc(i,i));
    yf(:,i)=Sd(i)*F(i)*VPN(:,i);
end
%GIROS
=====
r=length(krig);
tet=-inv(krig(r/2+1:r,r/2+1:r))*krig(r/2+1:r,1:r/2)*yf;
%----- Combinación modal (0.75SRSS + 0.25ABS) -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DESPLAZAMIENTOS
=====
for i=1:m
    SRSS(i)=0;
    ABSO(i)=0;
    for j=1:m
        SRSS(i)=SRSS(i)+yf(i,j)^2;
        ABSO(i)=ABSO(i)+abs(yf(i,j));
    end
end
SRSS=sqrt(SRSS);
yff=0.25*ABSO+0.75*SRSS;
yff=yff';
yff

```

%MOMENTOS Y CORTANTES

=====

```
for i=1:m+1
    SRSSV(i)=0;
    ABSOV(i)=0;
    SRSSM(i)=0;
    ABSOM(i)=0;
    for j=1:m
        SRSSV(i)=SRSSV(i)+Vcorte(i,j)^2;
        ABSOV(i)=ABSOV(i)+abs(Vcorte(i,j));
        SRSSM(i)=SRSSM(i)+Mflector(i,j)^2;
        ABSOM(i)=ABSOM(i)+abs(Mflector(i,j));
    end
end
SRSSV=sqrt(SRSSV);
Vsf=0.25*ABSOV+0.75*SRSSV;
Vsf=Vsf';
Vsf
SRSSM=sqrt(SRSSM);
Mfof=0.25*ABSOM+0.75*SRSSM;
Mfof=Mfof';
Mfof

%----- Complete Quadratic Combination -----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

B=input('Damping ratio=');
for i=1:m
    wf(i)=sqrt(wc(i,i));
end
for i=1:m
    for j=1:m
        C(i,j)=(8*B*sqrt(wf(i)*wf(j))*B*(wf(i)+wf(j))*wf(i)*wf(j)
        )/((wf(i)^2-
        wf(j)^2)^2+4*B^2*wf(i)*wf(j)*(wf(i)^2+wf(j)^2)+8*B^2*wf(i)
        )^2*wf(j)^2);
    end
end
end
```

% DESPLAZAMIENTOS

=====

```
for k=1:m
```

```
CQCy(k)=0;
end
for k=1:m
    for i=1:m
        for j=1:m
            CQCy(k)=CQCy(k)+C(i,j)*yf(k,i)*yf(k,j);
        end
    end
end
for k=1:m
    ycqc(k)=sqrt(CQCy(k));
end
ycqc
%MOMENTOS Y CORTANTES
=====
for k=1:m+1
    CQCV(k)=0;
    CQCM(k)=0;
end
for k=1:m+1
    for i=1:m
        for j=1:m
            CQCV(k)=CQCV(k)+C(i,j)*Vcorte(k,i)*Vcorte(k,j);
            CQCM(k)=CQCM(k)+C(i,j)*Mflector(k,i)*Mflector(k,j);
        end
    end
end
for k=1:m+1
    Vcqc(k)=sqrt(CQCV(k));
    Mcqc(k)=sqrt(CQCM(k));
end
ycqc=ycqc';
Vcqc=Vcqc';
Mcqc=Mcqc';
Vcqc
Mcqc
```

## ANEXO C

### FACTOR DE CORTE PARA SECCIONES CIRCULARES HUECAS

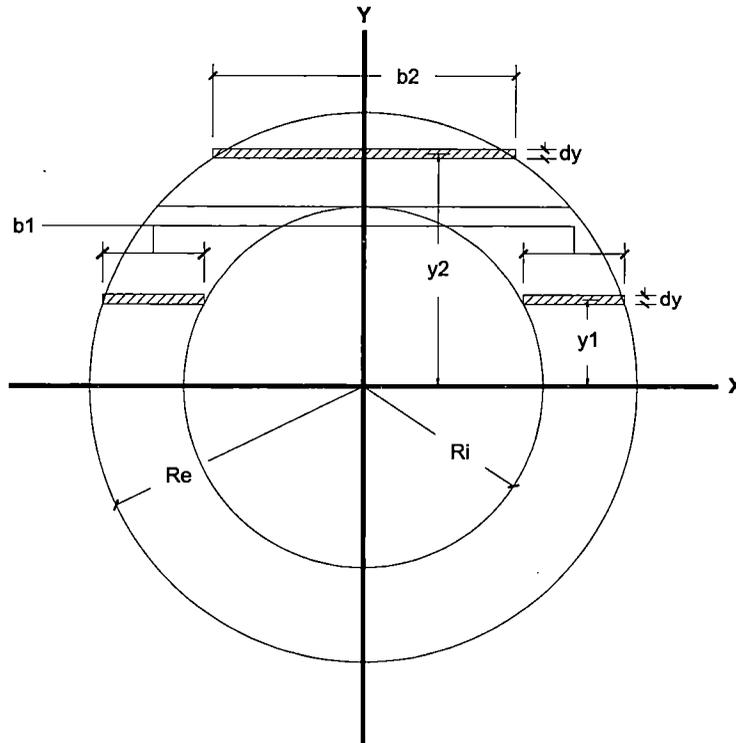


Figura C-1 Sección circular hueca mostrando diferenciales de área

Las ecuaciones de las circunferencias externa e interna según la Fig. C-1:

$$x^2 + y^2 = R_e^2 \quad \longrightarrow \quad x = \sqrt{R_e^2 - y^2} \quad (C-1)$$

$$x^2 + y^2 = R_i^2 \quad \longrightarrow \quad x = \sqrt{R_i^2 - y^2} \quad (C-2)$$

Entonces  $b_1$  y  $b_2$ :

$$b_1 = 2 \left( \sqrt{R_e^2 - y^2} - \sqrt{R_i^2 - y^2} \right) \quad (C-3)$$

$$b_2 = 2\sqrt{R_e^2 - y^2} \quad (C-4)$$

La sección circular hueca tiene dos zonas de integración para definir los momentos estáticos de área y los anchos variables. Los diferenciales de área de cada zona se muestran en las Ecs. (C-5) y (C-6).

$$dA_1 = b_1 dy \quad (C-5)$$

$$dA_2 = b_2 dy \quad (C-6)$$

Debido a que tal sección tiene dos ejes de simetría, se plantea según la Ec. (3.26):

$$\frac{1}{\mu} = \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{2A}{I^2} \left( \int_0^{R_i} \frac{Q_1^2}{b_1} dy + \int_{R_i}^{R_e} \frac{Q_2^2}{b_2} dy \right) \quad (C-7)$$

Para determinar  $\kappa_1$ , los límites de la integral se extienden hasta el elemento superior (corona del círculo); por tanto, se debe incluir el momento estático de sólo ese elemento.

$$Q_1 = \int_{R_i}^{R_e} y b_2 dy + \int_y^{R_i} y b_1 dy, \quad 0 \leq y \leq R_i \quad (C-8)$$

$$Q_2 = \int_y^{R_e} y b_2 dy, \quad R_i \leq y \quad (C-9)$$

Resolviendo las Ecs (C-8) y (C-9) se obtiene:

$$Q_1 = \frac{2}{3} \left[ (R_e^2 - y^2)^{3/2} - (R_i^2 - y^2)^{3/2} \right] \quad (C-10)$$

$$Q_2 = \frac{2}{3} (R_e^2 - y^2)^{3/2} \quad (C-11)$$

Entonces:

$$\kappa_1 = \frac{2A}{I^2} \left( \int_{R_i}^{R_e} \frac{\left( \frac{2}{3} \left[ (R_e^2 - y^2)^{3/2} - (R_i^2 - y^2)^{3/2} \right] \right)^2}{2 \left( \sqrt{R_e^2 - y^2} - \sqrt{R_i^2 - y^2} \right)} dy \right)$$

$$\kappa_1 = \frac{2A}{I^2} \frac{2}{216} \left( 3R_e^2(3R_e^2 - 2R_i^2)(R_e^2 + 4R_i^2) \tan^{-1} \frac{R_i}{\sqrt{R_e^2 - R_i^2}} - 3R_i^2(3R_i^2 - 2R_e^2)(R_i^2 + 4R_e^2) \frac{\pi}{2} + R_i \sqrt{R_e^2 - R_i^2} (13R_e^2 + 2R_i^2)(3R_e^2 - 2R_i^2) \right) \quad (C-12)$$

$$\kappa_2 = \frac{2A}{I^2} \left( \int_{R_i}^{R_e} \frac{\left( \frac{2}{3} (R_e^2 - y^2)^{3/2} \right)^2}{2 \sqrt{R_e^2 - y^2}} dy \right)$$

$$\kappa_2 = \frac{2A}{I^2} \frac{2}{216} \left( 15R_e^6 \frac{\pi}{2} - 15R_e^6 \tan^{-1} \frac{R_i}{\sqrt{R_e^2 - R_i^2}} - R_i \sqrt{R_e^2 - R_i^2} (33R_e^4 - 26R_e^2 R_i^2 + 8R_i^4) \right) \quad (C-13)$$

$$\frac{2A}{I^2} = \frac{32}{\pi} \frac{1}{(R_e^2 - R_i^2)(R_e^2 + R_i^2)^2} \quad (C-14)$$

Finalmente reemplazando las Ecs. (C-12) a (C-14) en Ec. (C-7) y tomando que

$$\beta = \frac{R_i}{R_e}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{4}{27\pi} \frac{1}{(1-\beta^2)(1+\beta^2)^2} \left[ 3(3-2\beta^2)(1+4\beta^2) \sin^{-1} \beta - \frac{3}{2} \pi \beta^2 (3\beta^2 - 2)(4 + \beta^2) + \beta \sqrt{1-\beta^2} (13 + 2\beta^2)(3 - 2\beta^2) + \frac{15}{2} \pi - 15 \sin^{-1} \beta - \beta \sqrt{1-\beta^2} (33 - 26\beta^2 + 8\beta^4) \right]$$

## ANEXO D

### VALORES DE AMORTIGUAMIENTO RECOMENDADOS

Stress Level	Type and Condition of Structure	Damping Ratio (%)
Working stress, no more than about $\frac{1}{2}$ yield point	Welded steel, prestressed concrete, well-reinforced concrete (only slight cracking)	2-3
	Reinforced concrete with considerable cracking	3-5
	Bolted and/or riveted steel, wood structures with nailed or bolted joints	5-7
At or just below yield point	Welded steel, prestressed concrete (without complete loss in prestress)	5-7
	Prestressed concrete with no prestress left	7-10
	Reinforced concrete	7-10
	Bolted and/or riveted steel, wood structures with bolted joints	10-15
	Wood structures with nailed joints	15-20

Source: N. M. Newmark, and W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, Calif., 1982.

## ANEXO E

### FACTORES DE REDUCCIÓN SÍSMICA PARA ESTRUCTURAS DIFERENTES A EDIFICACIONES

Nonbuilding Structure Type	Detailing Requirements <sup>F</sup>	R	$\Omega_2$	$C_u$	STRUCTURAL SYSTEM AND HEIGHT LIMITS (m) <sup>A</sup>					
					A & B	C	D	E	F	
Elevated tanks, vessels, bins, or hoppers: On symmetrically braced legs (not similar to buildings)	15.7.10	3	2 <sup>b</sup>	2.5	NL	NL	160	100	100	
On unbraced legs or asymmetrically braced legs (not similar to buildings)	15.7.10	2	2 <sup>b</sup>	2.5	NL	NL	100	60	60	
Single pedestal or skirt supported										
- welded steel	15.7.10	2	2 <sup>b</sup>	2	NL	NL	NL	NL	NL	
- welded steel with special detailing	15.7.10 and 15.7.10.3 a and b	3	2 <sup>b</sup>	2	NL	NL	NL	NL	NL	
- prestressed or reinforced concrete	15.7.10	2	2 <sup>b</sup>	2	NL	NL	NL	NL	NL	
- prestressed or reinforced concrete with special detailing	15.7.10 and 14.2.3.6	3	2 <sup>b</sup>	2	NL	NL	NL	NL	NL	
Horizontal, skid-plate supported welded steel vessels	15.7.14	3	2 <sup>b</sup>	2.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Tanks or vessels supported on structural towers similar to buildings	15.5.3	Use values for the appropriate structure type in the categories for building frame systems and moment-resisting frame systems listed in Table 15.4.1.								
Flat-bottom ground-supported tanks: Steel or fiber-reinforced plastic: Mechanically anchored	15.7	3	2 <sup>b</sup>	2.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Self-anchored		2.5	2 <sup>b</sup>	2	NL	NL	NL	NL	NL	
Reinforced or prestressed concrete: reinforced nonsliding base		2	2 <sup>b</sup>	2	NL	NL	NL	NL	NL	
anchored flexible base		3.25	2 <sup>b</sup>	2	NL	NL	NL	NL	NL	
manufactured and unconstrained flexible base		1.5	1.5 <sup>b</sup>	1.5	NL	NL	NL	NL	NL	
All other	1.5	1.5 <sup>b</sup>	1.5	NL	NL	NL	NL	NL		
Cast-in-place concrete silos, stacks, and chimneys having walls continuous to the foundation	15.6.2	3	1.75	3	NL	NL	NL	NL	NL	
All other reinforced masonry structures not similar to buildings	14.4.1	3	2	2.5	NL	NL	NL	50	50	
All other nonreinforced masonry structures not similar to buildings	14.4.1	1.25	2	1.5	NL	NL	50	50	50	
All other steel and reinforced concrete distributed mass cantilever structures not covered herein including stacks, chimneys, silos, and skirt-supported vertical vessels that are not similar to buildings	15.6.2 15.7.10 and 15.7.10.5 a and b	3	2	2.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Trussed towers (freestanding or guyed), guyed stacks and chimneys	15.6.2	3	2	2.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Cooling towers										
Concrete or steel		3.5	1.75	3	NL	NL	NL	NL	NL	
Wood frames		3.5	3	3	NL	NL	NL	50	50	
Telecommunication towers	15.6.6									
Tower: Steel		3	1.5	3	NL	NL	NL	NL	NL	
Pole: Steel		1.5	1.5	1.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Wood		1.5	1.5	1.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Concrete		1.5	1.5	1.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Frame: Steel		3	1.5	1.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Wood		1.5	1.5	1.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Concrete		2	1.5	1.5	NL	NL	NL	NL	NL	
Amusement structures and monuments	15.6.3	2	2	2	NL	NL	NL	NL	NL	
Inverted pendulum type structures (except elevated tanks, vessels, bins, and hoppers)	12.2.3.3	2	2	2	NL	NL	NL	NL	NL	
Signs and billboards		3.5	1.75	3	NL	NL	NL	NL	NL	
All other self-supporting structures, tanks, or vessels not covered above or by reference standards that are similar to buildings		1.25	2	2.5	NL	NL	50	50	50	

<sup>A</sup>NL = no limit and NP = not permitted. Heights shall be measured from the base.

<sup>B</sup>See Section 15.7.3a for the application of the overstrength factors,  $\Omega_2$ , for tank and vessels.

<sup>F</sup>If a section is not indicated in the Detailing Requirements column, no specific detailing requirements apply.

<sup>G</sup>For the purpose of height limit determination, the height of the structure shall be taken as the height to the top of the structural frame making up the primary seismic force-resisting system.

## ANEXO F

### TABLAS DE COMPARACIÓN DE RESPUESTAS SÍSMICAS MÁXIMAS SEGÚN LA COMBINACIÓN NTP E.030

A continuación se presentan las tablas de comparación de las correspondientes respuestas sísmicas (desplazamientos, fuerzas cortantes y momentos flectores) halladas mediante la combinación modal recomendada por la NTP E.030, la cual se muestra en la Ec. (4.5).

Tabla F-1 Comparación del desplazamiento elástico máximo probable en el ápice del domo empleando un número diferente de elementos discretos calculado mediante la combinación NTP E.030

D1:  $ER=0.01$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	1.178E-04	1.300E-04	9.39%	2.250E-04	47.65%	2.280E-04	48.34%
10	1.256E-04		3.39%		44.18%		44.92%
15	1.279E-04		1.62%		43.16%		43.91%
20	1.290E-04		0.81%		42.69%		43.44%

D2:  $ER=0.03$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	4.281E-05	4.700E-05	8.91%	7.700E-05	44.40%	7.800E-05	45.11%
10	4.631E-05		1.47%		39.86%		40.63%
15	4.662E-05		0.80%		39.45%		40.23%
20	4.671E-05		0.62%		39.34%		40.12%

D3:  $ER=0.05$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	7.816E-05	8.300E-05	5.83%	1.330E-04	41.24%	1.330E-04	41.24%
10	8.259E-05		0.49%		37.90%		37.90%
15	8.288E-05		0.15%		37.69%		37.69%
20	8.296E-05		0.05%		37.62%		37.62%

D4:  $ER=0.10$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	1.265E-04	1.300E-04	2.68%	1.960E-04	35.45%	1.920E-04	34.11%
10	1.286E-04		1.05%		34.37%		33.00%
15	1.290E-04		0.79%		34.20%		32.83%
20	1.291E-04		0.70%		34.14%		32.77%

D5:  $ER=0.15$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	8.074E-05	8.300E-05	2.72%	1.180E-04	31.57%	1.150E-04	29.79%
10	8.179E-05		1.46%		30.69%		28.88%
15	8.199E-05		1.22%		30.52%		28.71%
20	8.206E-05		1.13%		30.46%		28.65%

D6:  $ER=0.20$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	1.252E-04	1.310E-04	4.40%	1.750E-04	28.43%	1.680E-04	25.45%
10	1.267E-04		3.25%		27.58%		24.56%
15	1.270E-04		3.03%		27.41%		24.39%
20	1.271E-04		2.95%		27.35%		24.33%

D7:  $ER=0.25$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	4.469E-05	4.700E-05	4.91%	6.100E-05	26.73%	5.800E-05	22.94%
10	4.520E-05		3.84%		25.91%		22.08%
15	4.530E-05		3.63%		25.75%		21.91%
20	4.533E-05		3.55%		25.69%		21.84%

D8: ER=0.30

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	7.870E-05	8.400E-05	6.32%	1.030E-04	23.60%	1.000E-04	21.31%
10	7.953E-05		5.32%		22.78%		20.47%
15	7.970E-05		5.12%		22.62%		20.30%
20	7.976E-05		5.05%		22.57%		20.24%

D9: ER=0.35

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	1.217E-04	1.330E-04	8.47%	1.550E-04	21.46%	1.510E-04	19.38%
10	1.230E-04		7.56%		20.68%		18.58%
15	1.232E-04		7.38%		20.52%		18.42%
20	1.233E-04		7.32%		20.47%		18.36%

D10: ER=0.42

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	D (m)	D (m)	%Error	D (m)	%Error	D (m)	%Error
5	4.322E-05	4.900E-05	11.79%	5.400E-05	19.96%	5.400E-05	19.96%
10	4.362E-05		10.98%		19.22%		19.22%
15	4.370E-05		10.82%		19.07%		19.07%
20	4.373E-05		10.76%		19.02%		19.02%

Tabla F-2 Comparación de la fuerza cortante en la base del domo empleando un número diferente de elementos discretos calculada mediante la combinación NTP E.030

D1: ER=0.01

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	62.970	66.208	4.89%	65.064	3.22%	65.892	4.43%
10	65.118		1.65%		-0.08%		1.17%
15	65.769		0.66%		-1.08%		0.19%
20	66.045		0.25%		-1.51%		-0.23%

D2: ER=0.03

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	45.384	47.594	4.64%	46.435	2.26%	46.665	2.75%
10	46.894		1.47%		-0.99%		-0.49%
15	47.350		0.51%		-1.97%		-1.47%
20	47.482		0.23%		-2.25%		-1.75%

D3: ER=0.05

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	161.220	169.362	4.81%	161.952	0.45%	163.126	1.17%
10	166.780		1.52%		-2.98%		-2.24%
15	168.420		0.56%		-3.99%		-3.25%
20	169.160		0.12%		-4.45%		-3.70%

D4: ER=0.10

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	629.780	662.215	4.90%	621.021	-1.41%	623.861	-0.95%
10	652.710		1.44%		-5.10%		-4.62%
15	658.930		0.50%		-6.10%		-5.62%
20	661.750		0.07%		-6.56%		-6.07%

D5: ER=0.15

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	485.390	509.516	4.74%	472.934	-2.63%	474.459	-2.30%
10	502.560		1.37%		-6.26%		-5.92%
15	507.180		0.46%		-7.24%		-6.90%
20	509.280		0.05%		-7.69%		-7.34%

D6: ER=0.20

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	1269.700	1329.852	4.52%	1220.810	-4.00%	1222.408	-3.87%
10	1312.900		1.27%		-7.54%		-7.40%
15	1324.500		0.40%		-8.49%		-8.35%
20	1329.800		0.00%		-8.93%		-8.79%

D7: ER=0.25

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	344.550	359.956	4.28%	332.257	-3.70%	334.040	-3.15%
10	355.800		1.15%		-7.09%		-6.51%
15	358.850		0.31%		-8.00%		-7.43%
20	360.230		-0.08%		-8.42%		-7.84%

D8: ER=0.30

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	985.580	1026.769	4.01%	945.212	-4.27%	956.000	-3.09%
10	1016.400		1.01%		-7.53%		-6.32%
15	1024.800		0.19%		-8.42%		-7.20%
20	1028.600		-0.18%		-8.82%		-7.59%

D9: ER=0.35

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	2259.700	2345.805	3.67%	2158.232	-4.70%	2178.424	-3.73%
10	2327.300		0.79%		-7.83%		-6.83%
15	2345.700		0.00%		-8.69%		-7.68%
20	2354.100		-0.35%		-9.08%		-8.06%

D10: ER=0.42

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	V (Tn)	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error	V (Tn)	%Error
5	586.330	605.021	3.09%	560.280	-4.65%	572.554	-2.41%
10	602.830		0.36%		-7.59%		-5.29%
15	607.320		-0.38%		-8.40%		-6.07%
20	609.370		-0.72%		-8.76%		-6.43%

Tabla F-3 Comparación del momento flector en la base del domo empleando un número diferente de elementos discretos calculado mediante la combinación NTP E.030

D1: ER=0.01

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	385.330	406.695	5.25%	412.210	6.52%	419.458	8.14%
10	399.020		1.89%		3.20%		4.87%
15	403.120		0.88%		2.21%		3.90%
20	404.880		0.45%		1.78%		3.48%

D2: ER=0.03

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	167.070	175.242	4.66%	175.198	4.64%	175.926	5.03%
10	174.370		0.50%		0.47%		0.88%
15	175.140		0.06%		0.03%		0.45%
20	175.580		-0.19%		-0.22%		0.20%

D3: ER=0.05

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	802.070	831.439	3.53%	817.677	1.91%	819.157	2.09%
10	828.170		0.39%		-1.28%		-1.10%
15	830.430		0.12%		-1.56%		-1.38%
20	831.150		0.03%		-1.65%		-1.46%

D4: ER=0.10

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	3993.500	4066.643	1.80%	3910.490	-2.12%	3950.077	-1.10%
10	4047.300		0.48%		-3.50%		-2.46%
15	4056.500		0.25%		-3.73%		-2.69%
20	4059.800		0.17%		-3.82%		-2.78%

D5: ER=0.15

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	2461.100	2505.493	1.77%	2325.163	-5.85%	2369.115	-3.88%
10	2489.100		0.65%		-7.05%		-5.06%
15	2494.600		0.43%		-7.29%		-5.30%
20	2496.600		0.35%		-7.37%		-5.38%

D6: ER=0.20

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	8028.900	8186.892	1.93%	7745.322	-3.66%	7895.357	-1.69%
10	8115.900		0.87%		-4.78%		-2.79%
15	8133.100		0.66%		-5.01%		-3.01%
20	8139.400		0.58%		-5.09%		-3.09%

D7: ER=0.25

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	1304.200	1332.656	2.14%	1301.642	-0.20%	1345.100	3.04%
10	1317.700		1.12%		-1.23%		2.04%
15	1320.400		0.92%		-1.44%		1.84%
20	1321.400		0.84%		-1.52%		1.76%

D8:  $ER=0.30$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	4962.500	5083.112	2.37%	4954.577	-0.16%	5191.370	4.41%
10	5011.800		1.40%		-1.15%		3.46%
15	5021.600		1.21%		-1.35%		3.27%
20	5025.100		1.14%		-1.42%		3.20%

D9:  $ER=0.35$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	14190.000	14584.042	2.70%	13979.367	-1.51%	14680.434	3.34%
10	14325.000		1.78%		-2.47%		2.42%
15	14351.000		1.60%		-2.66%		2.24%
20	14361.000		1.53%		-2.73%		2.18%

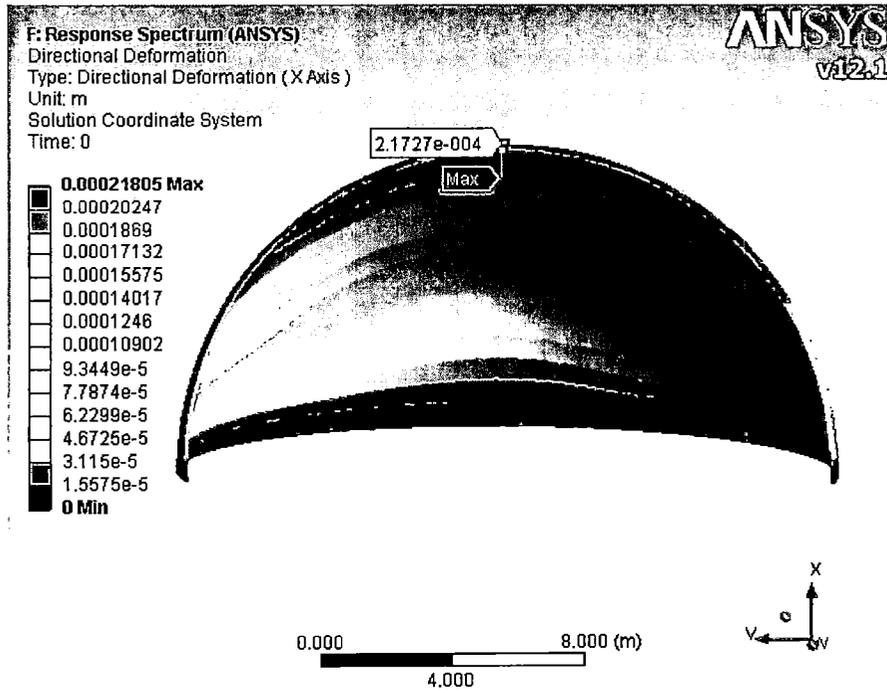
D10:  $ER=0.42$

MODELO SIMPLIFICADO		SAP2000					
		FRAME		SHELL		SOLID	
n	Mf (Tn-m)	Mf (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error	M (Tn-m)	%Error
5	2203.000	2274.690	3.15%	2142.646	-2.82%	2317.901	4.96%
10	2222.400		2.30%		-3.72%		4.12%
15	2226.200		2.13%		-3.90%		3.96%
20	2227.600		2.07%		-3.96%		3.90%

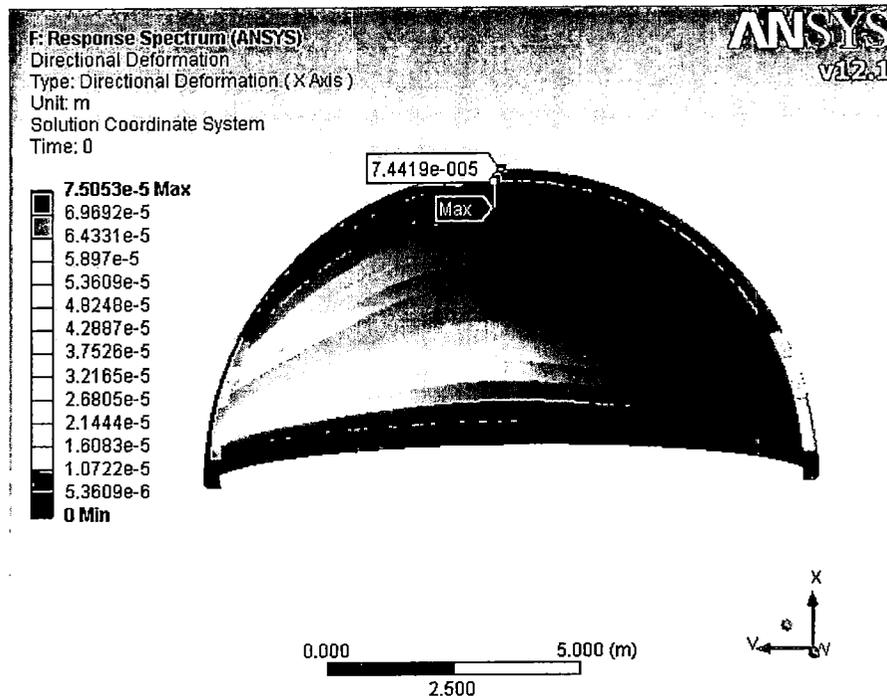
### ANEXO G

### IMÁGENES DE MODELOS SAP2000 Y ANSYS

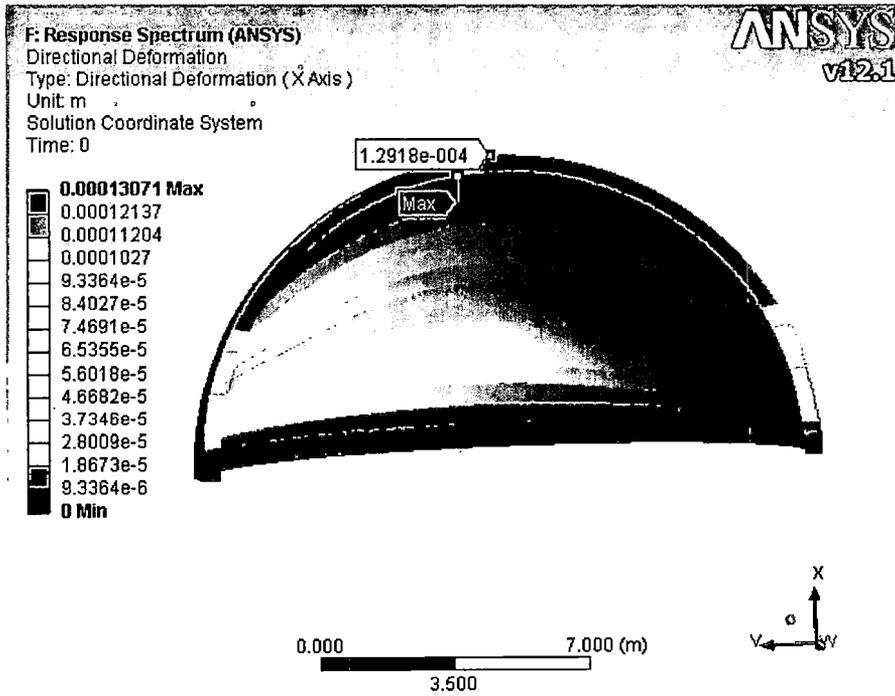
D1:  $ER=0.01$



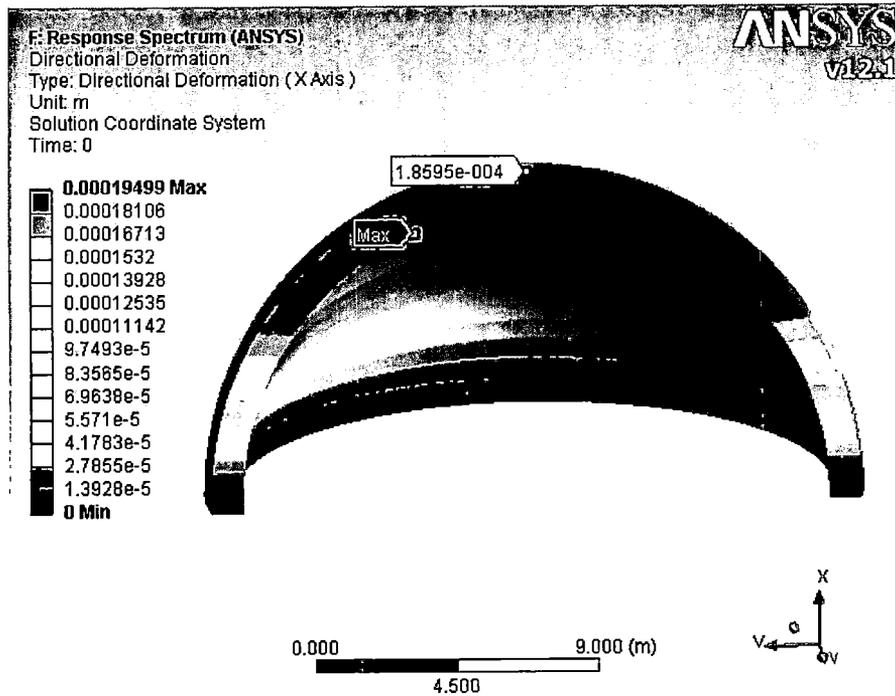
D2:  $ER=0.03$



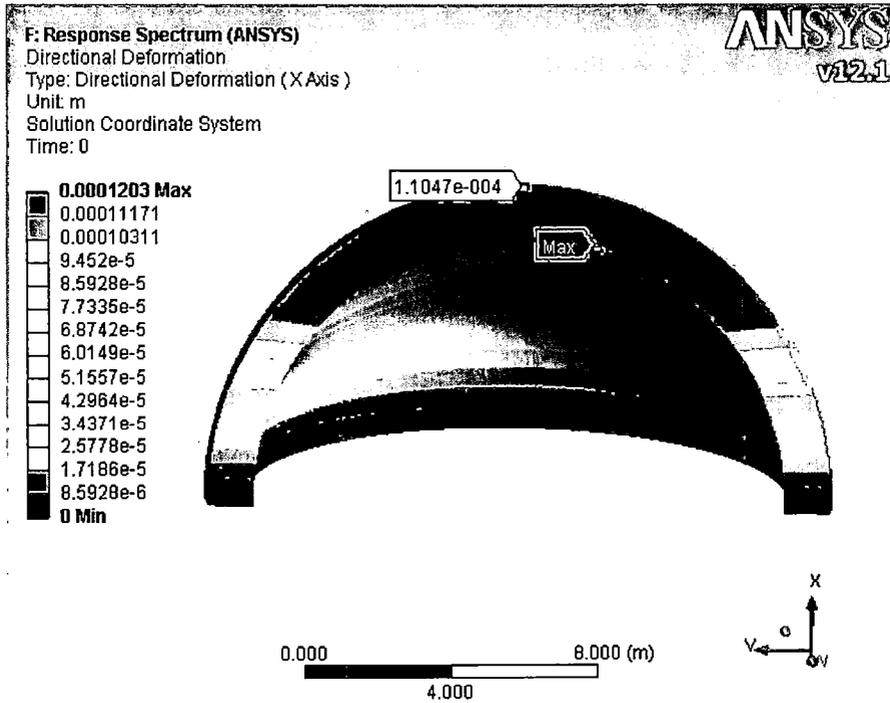
D3:  $ER=0.05$



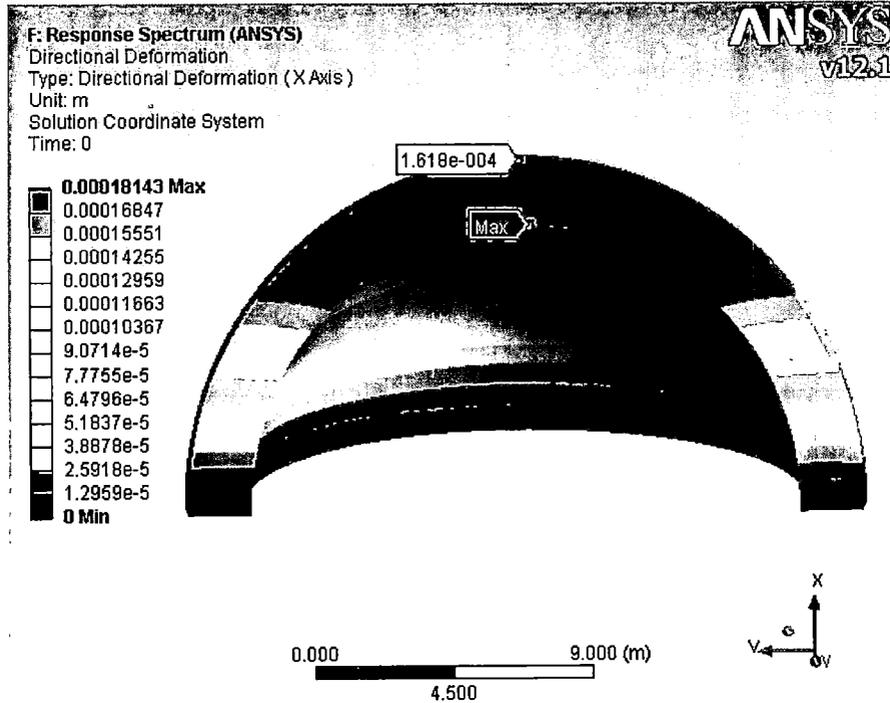
D4:  $ER=0.10$



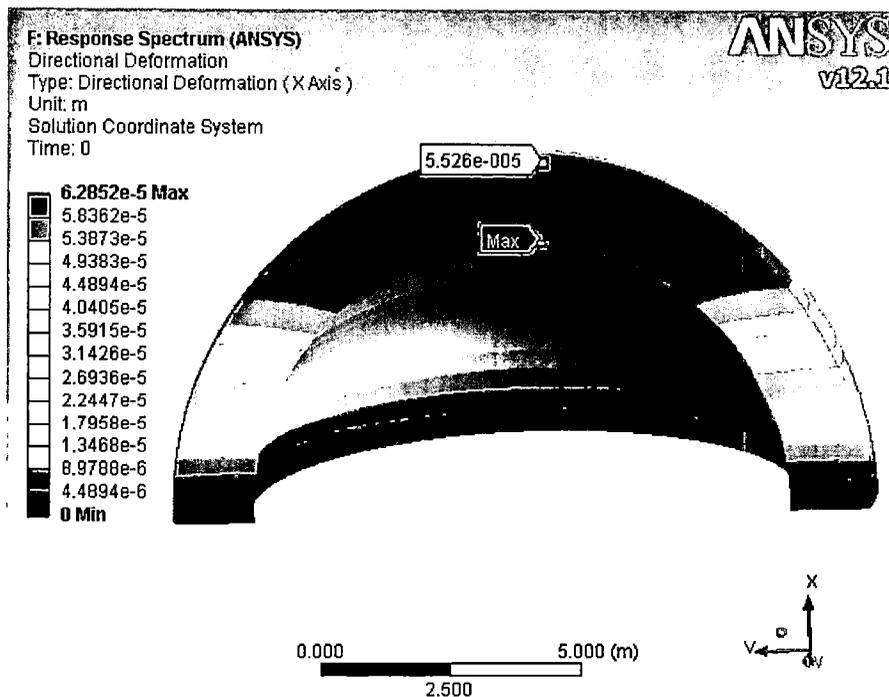
D5:  $ER=0.15$



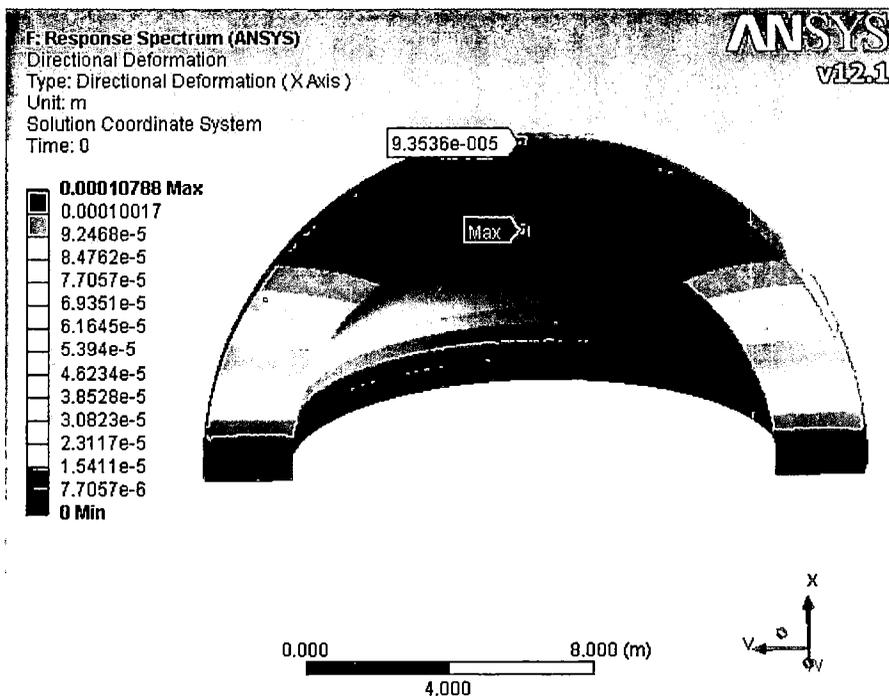
D6:  $ER=0.20$



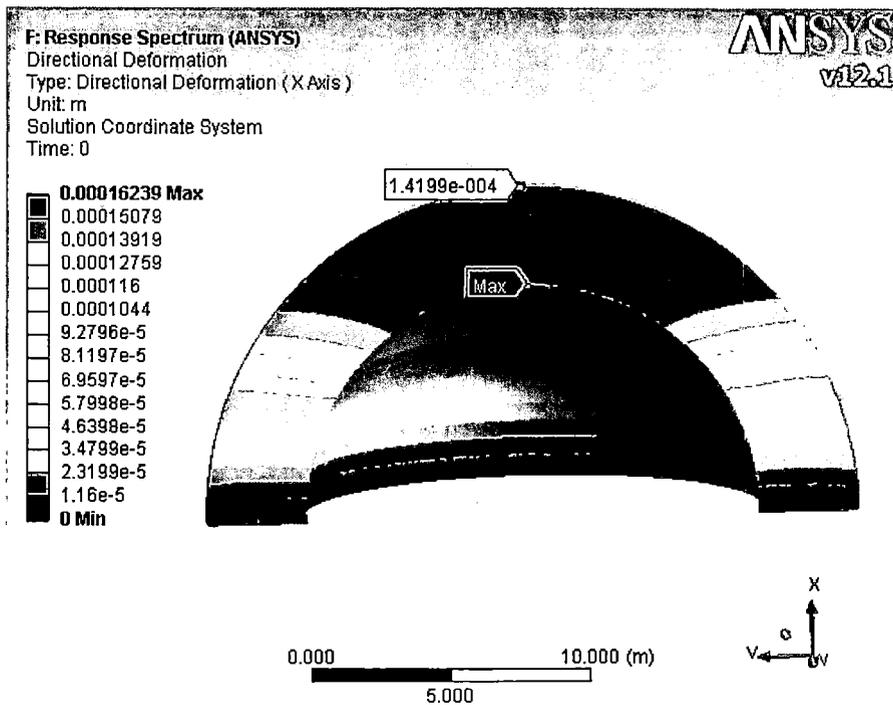
D7:  $ER=0.25$



D8:  $ER=0.30$



D9:  $ER=0.35$



D10:  $ER=0.42$

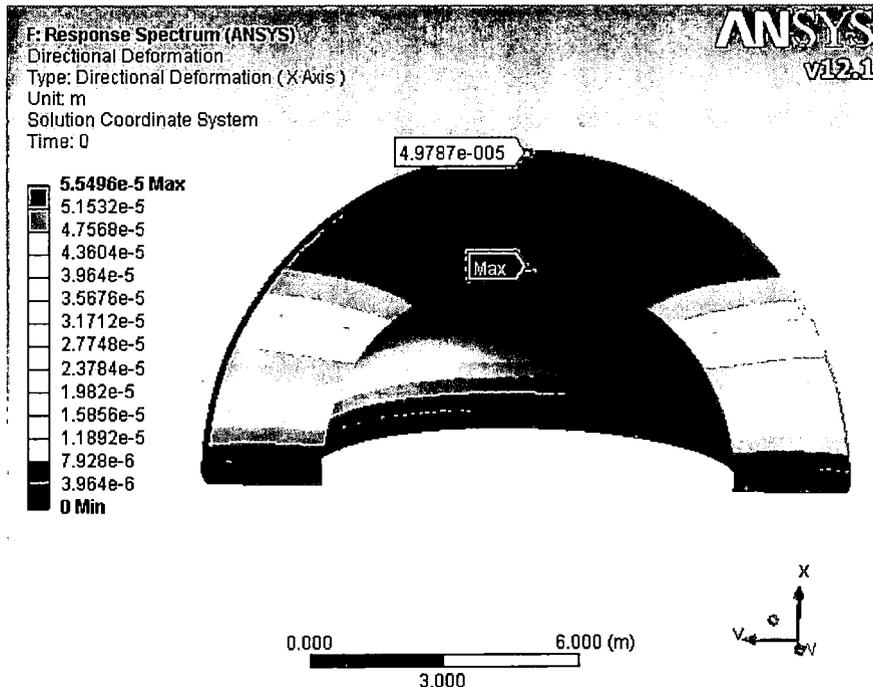
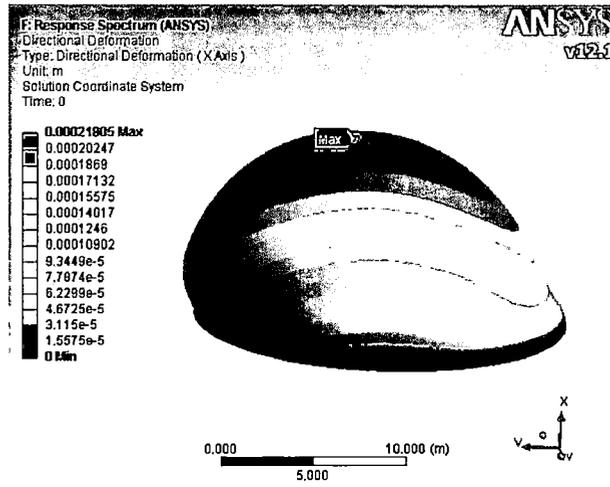
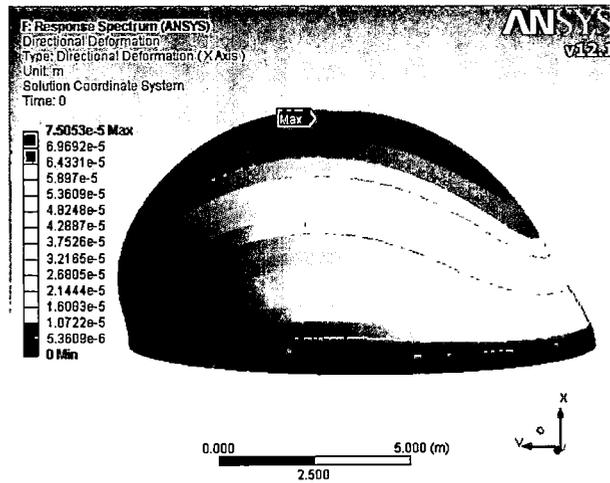


Figura G-1 Desplazamientos sísmicos máximos y en el ápice del domo calculados mediante CQC – Modelos ANSYS

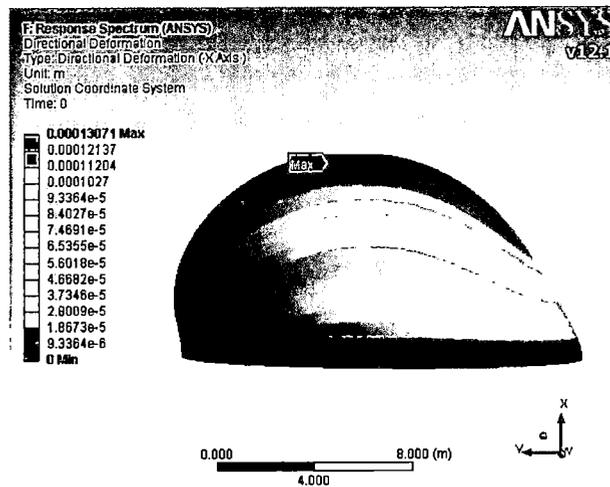
D1:  $ER=0.01$



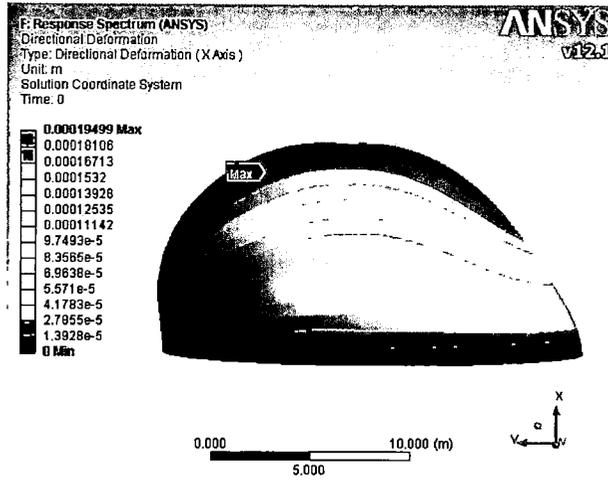
D2:  $ER=0.03$



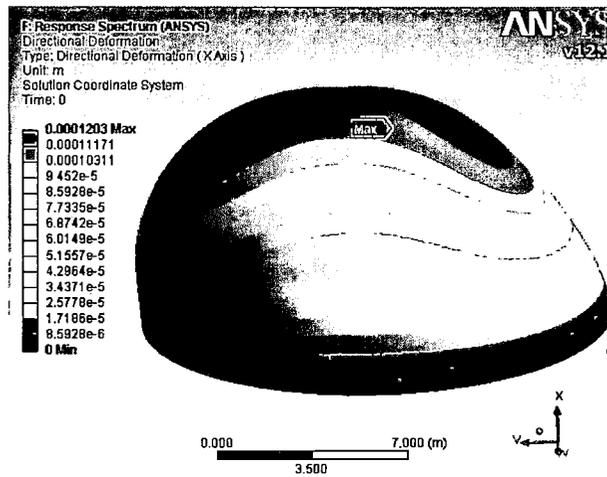
D3:  $ER=0.05$



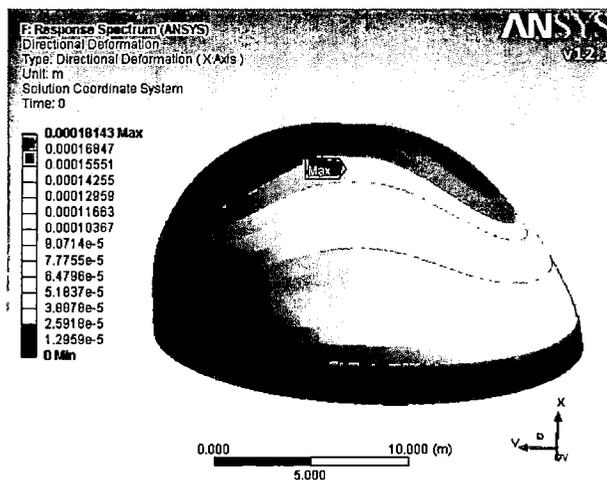
D4:  $ER=0.10$



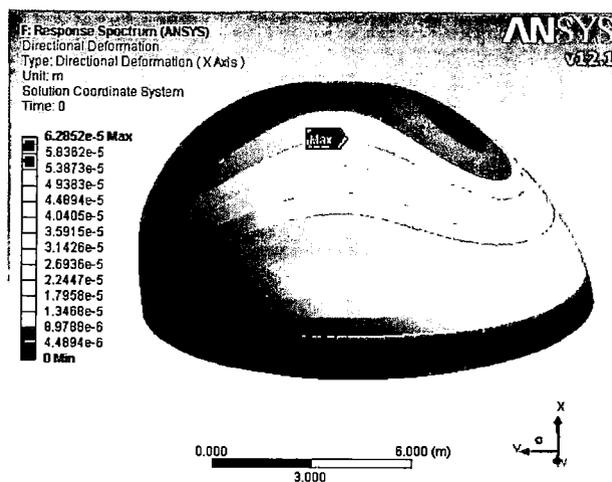
D5:  $ER=0.15$



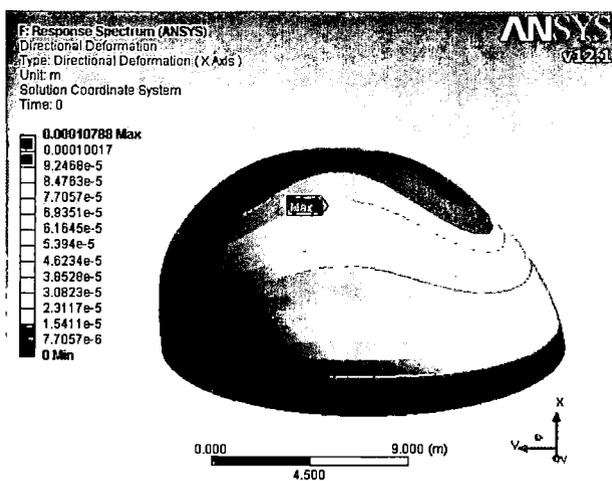
D6:  $ER=0.20$



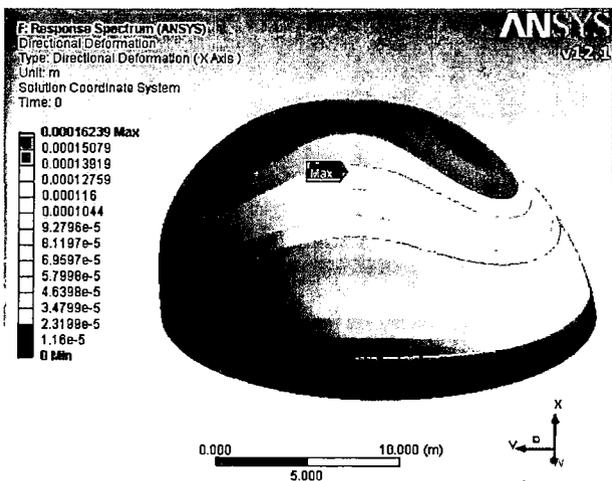
D7:  $ER=0.25$



D8:  $ER=0.30$



D9:  $ER=0.35$



D10:  $ER=0.42$

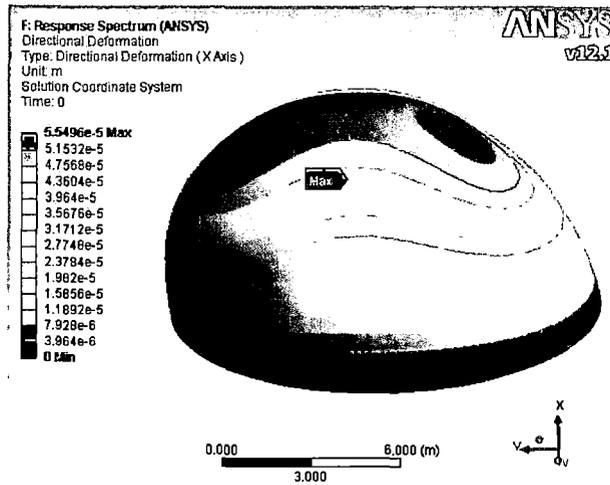
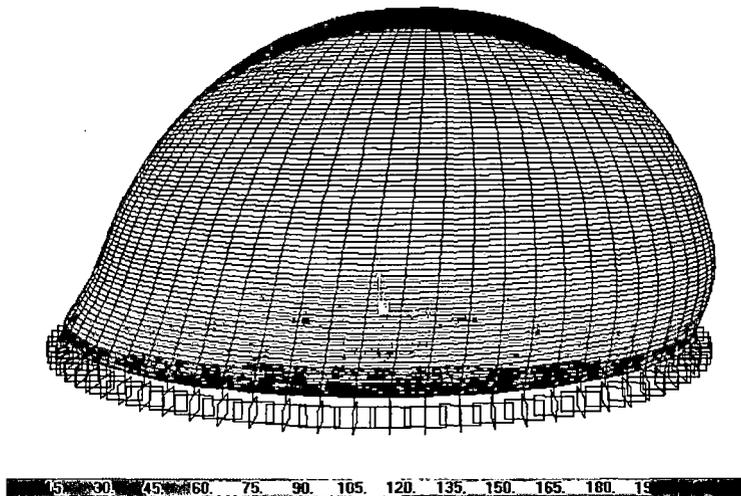
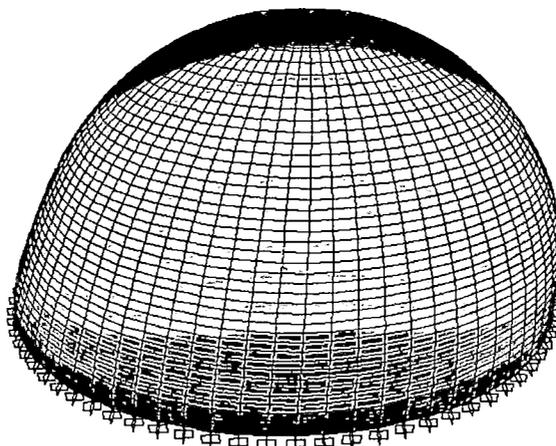


Figura G-2 Deformada sísmica en la dirección del sismo calculada mediante CQC – Modelos ANSYS

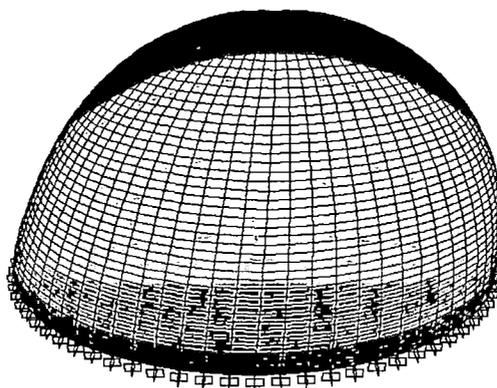
D1:  $ER=0.01$



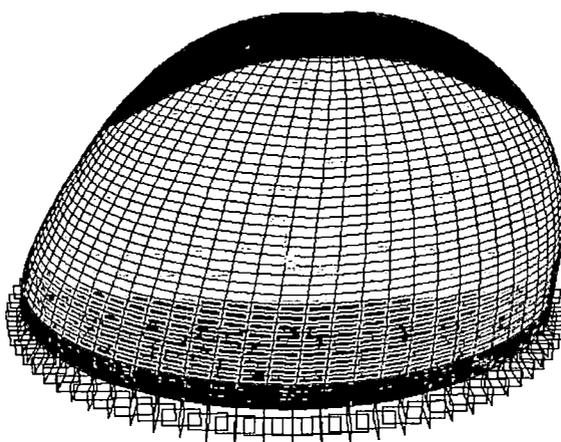
D2:  $ER=0.03$



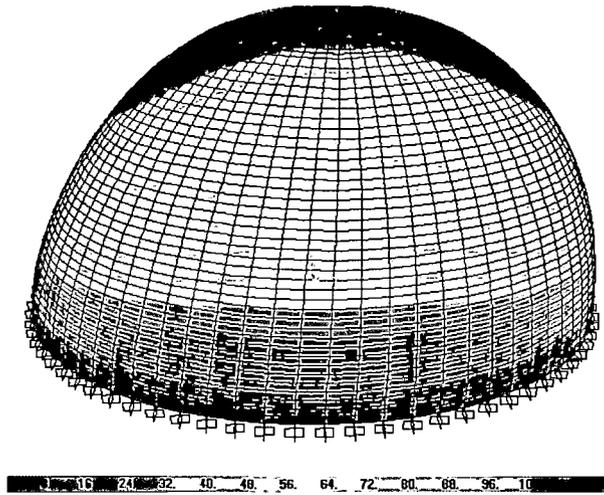
D3:  $ER=0.05$



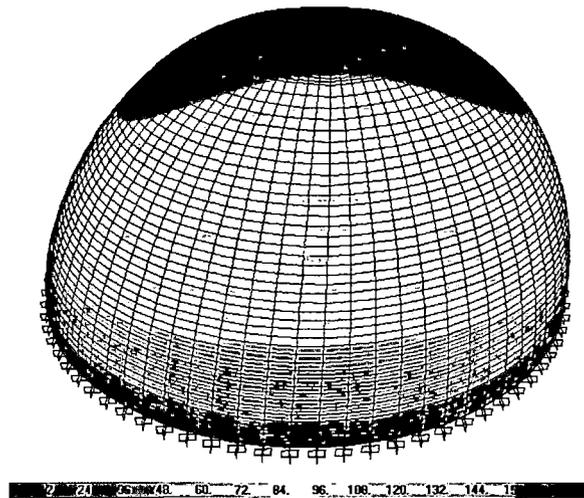
D4:  $ER=0.10$



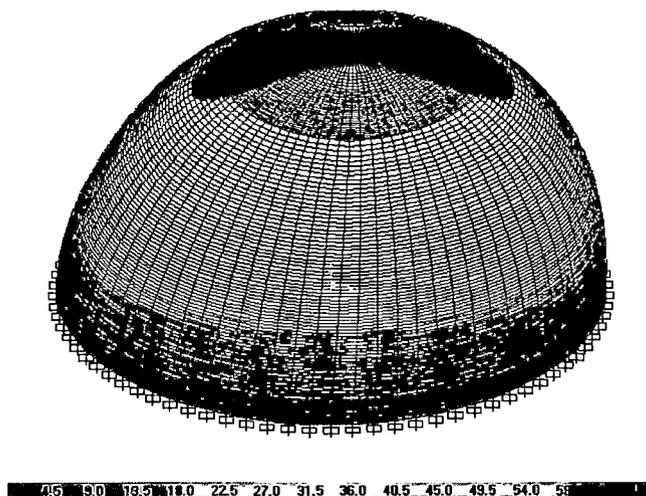
D5:  $ER=0.15$



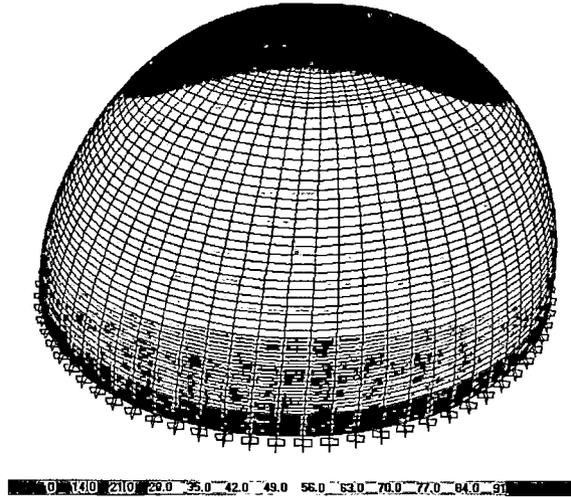
D6:  $ER=0.20$



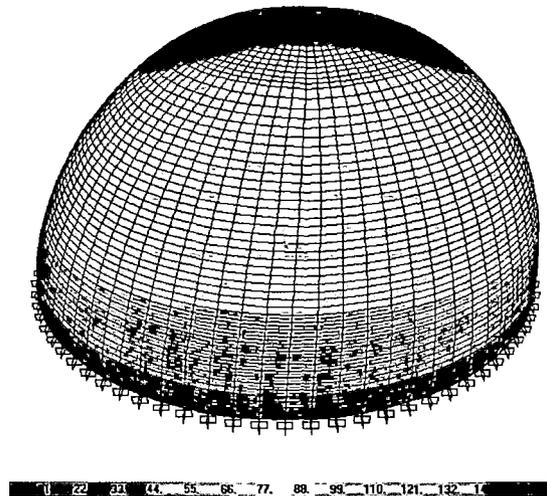
D7:  $ER=0.25$



D8:  $ER=0.30$



D9:  $ER=0.35$



D10:  $ER=0.42$

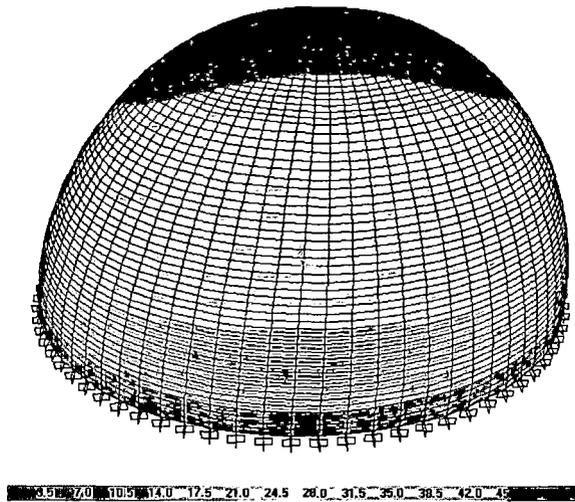
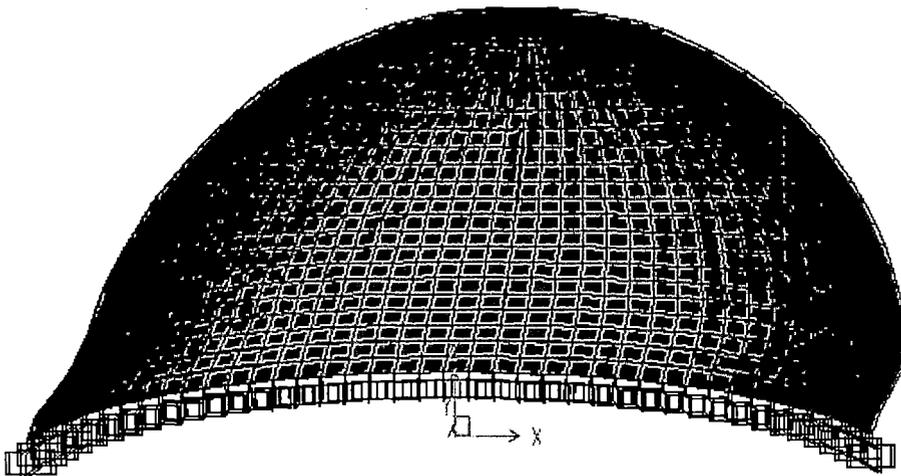
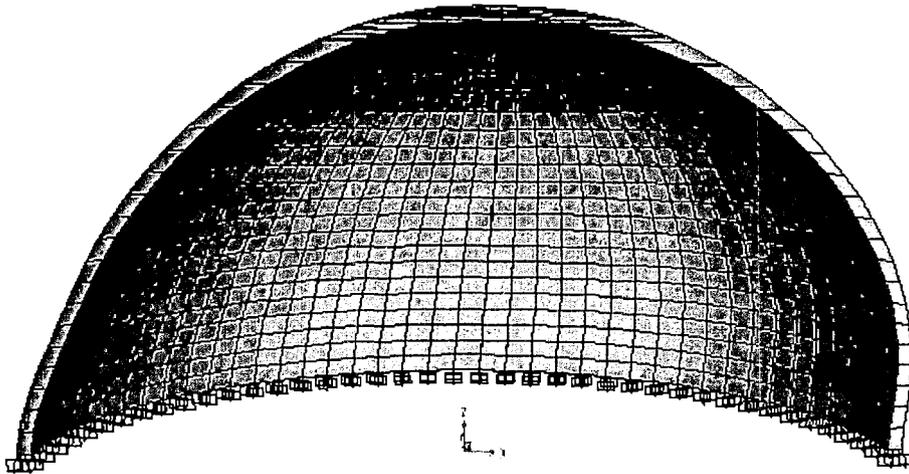


Figura G-3 Deformada sísmica en la dirección del sismo calculada mediante  
CQC – Modelos SAP2000 - SHELL

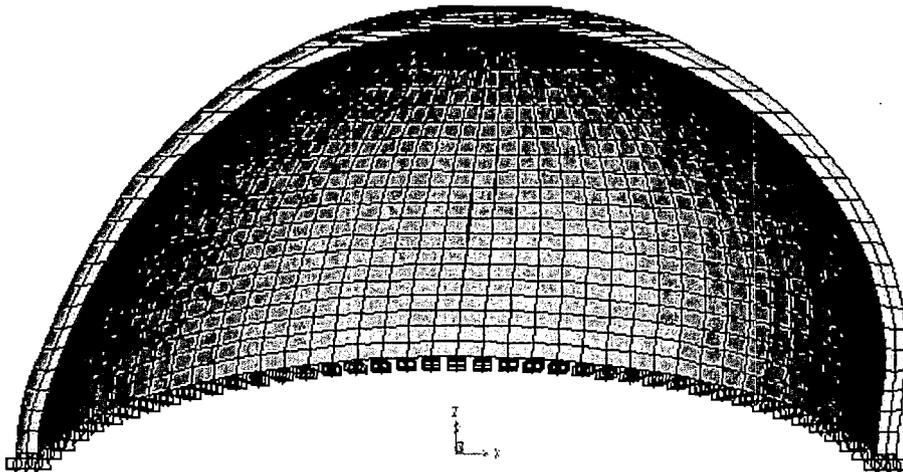
D1:  $ER=0.01$



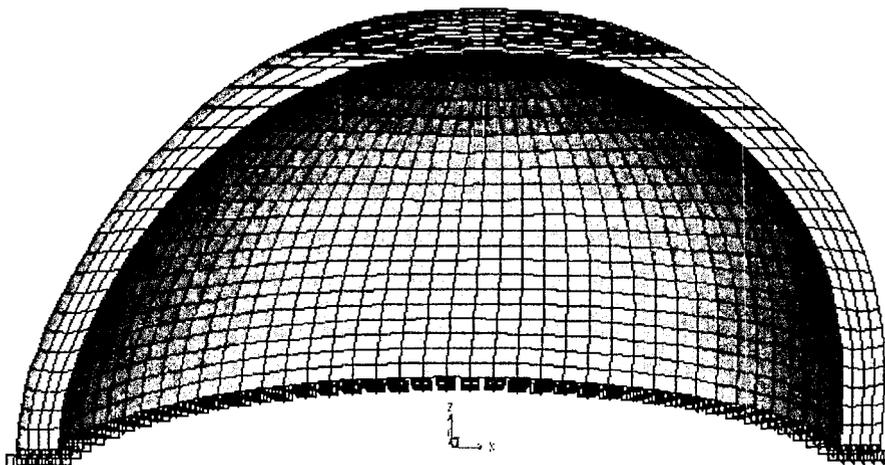
D2:  $ER=0.03$



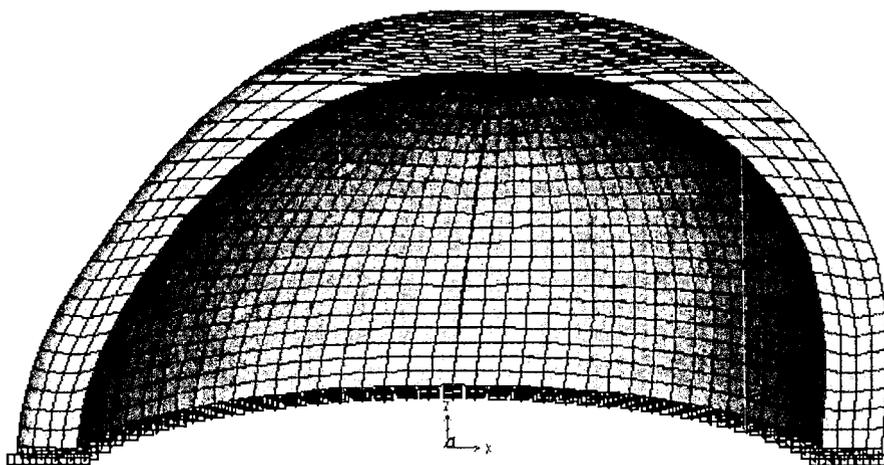
D3:  $ER=0.05$



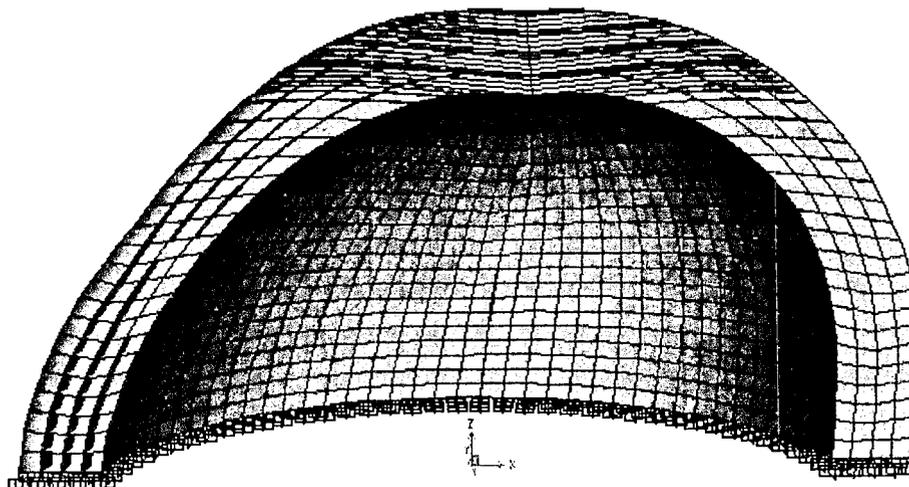
D4:  $ER=0.10$



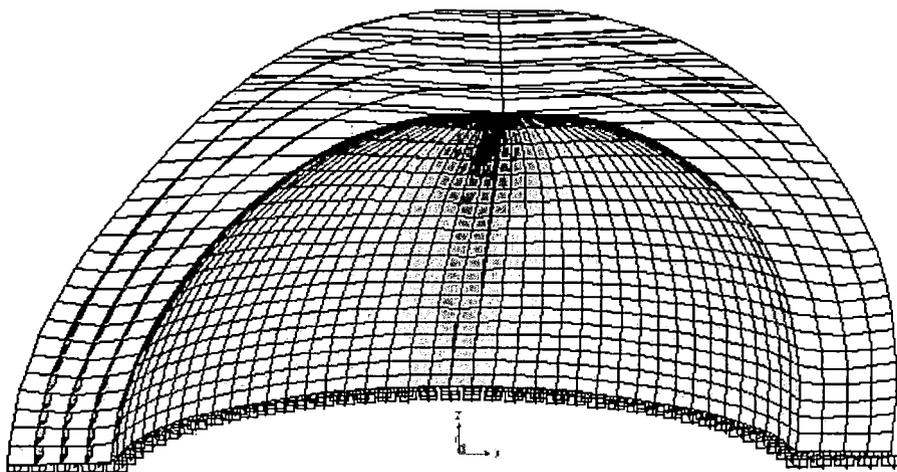
D5:  $ER=0.15$



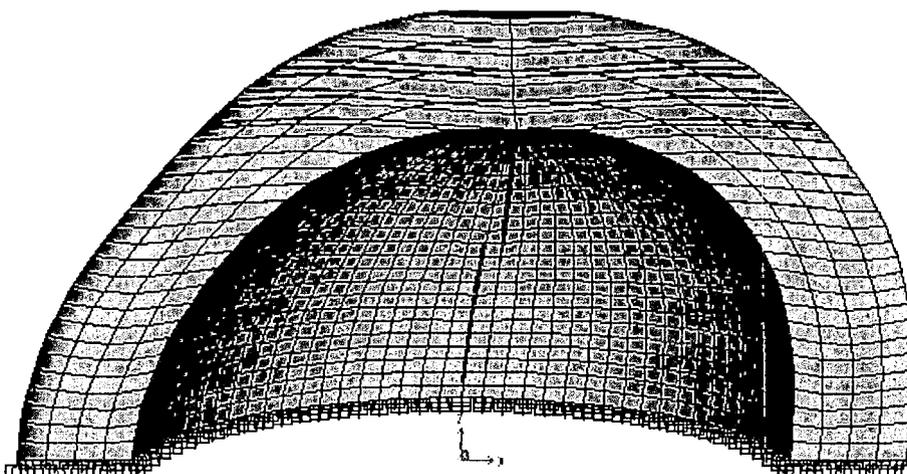
D6:  $ER=0.20$



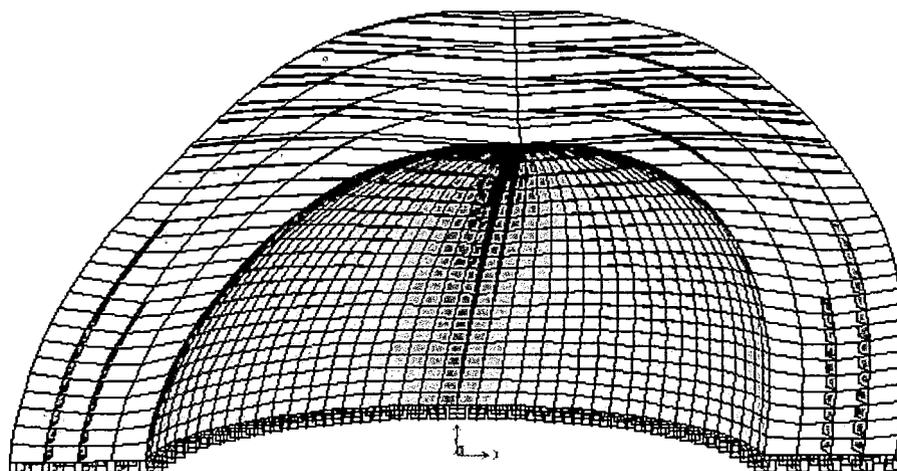
D7:  $ER=0.25$



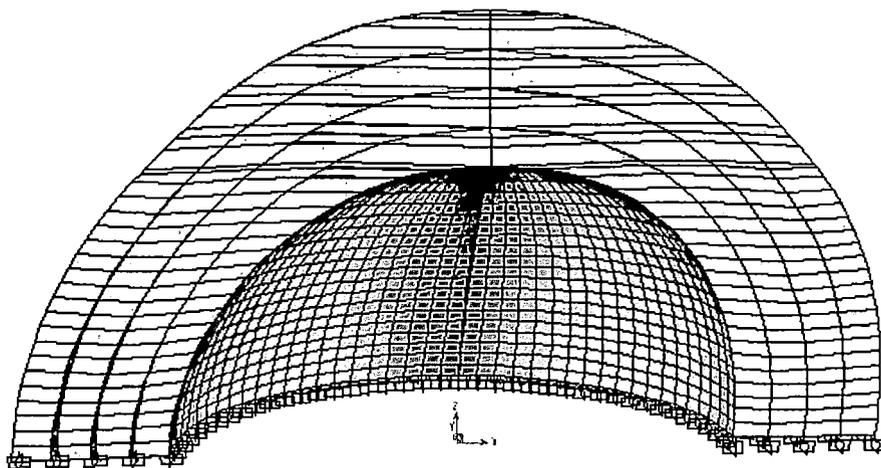
D8:  $ER=0.30$



D9:  $ER=0.35$



D10:  $ER=0.42$



*Figura G-4 Deformada sísmica en la dirección del sismo calculada mediante  
CQC – Modelos SAP2000 – SOLID*

## ANEXO H

### AJUSTE DE CURVAS Y RESULTADOS DE CORRELACIÓN

Se presenta las curvas de ajuste de cada respuesta sísmica (desplazamientos, fuerzas cortantes y momentos flectores) para cada uno de los domos de la familia. Además se presenta la evaluación de cada ajuste realizado mediante el coeficiente de correlación, el cual es la medida usual del grado de correlación que se basa en una muestra de  $n$  pares de observaciones. Si la correlación es fuerte,  $r$  será cercano a 1. Si  $r=1$ , significa que existe un ajuste perfecto.

#### Ajustes relacionados a los períodos fundamentales

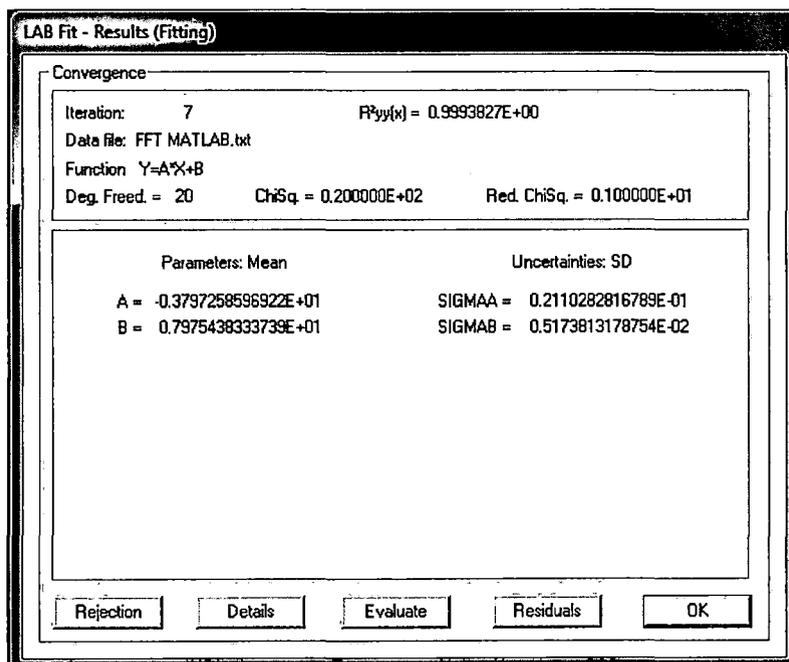


Figura H-1 Resultados de correlación del ajuste de la Función período fundamental

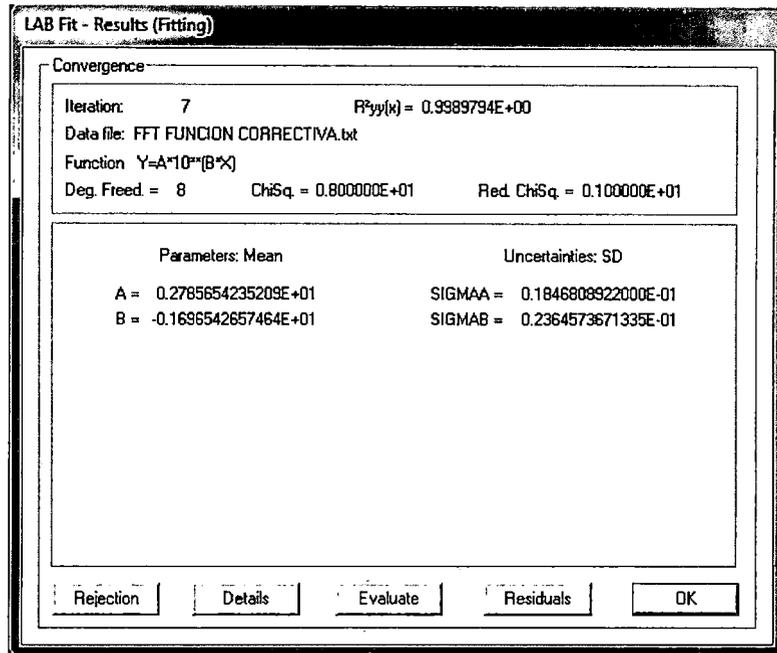
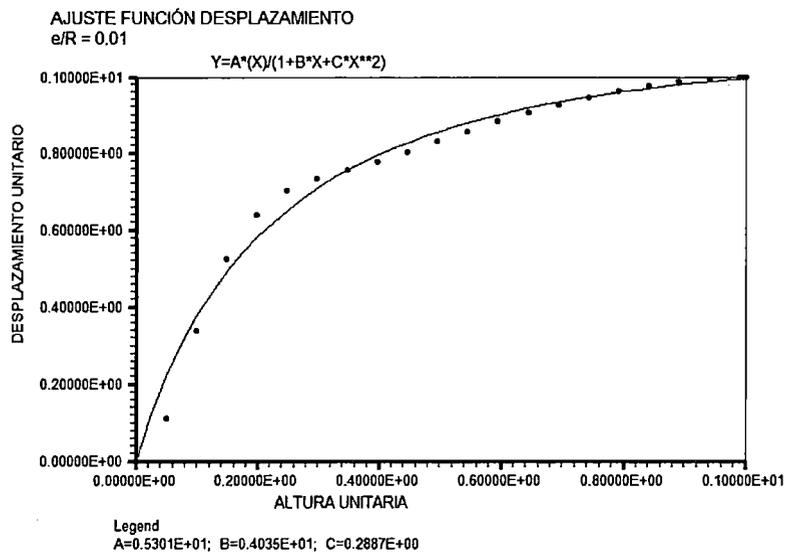
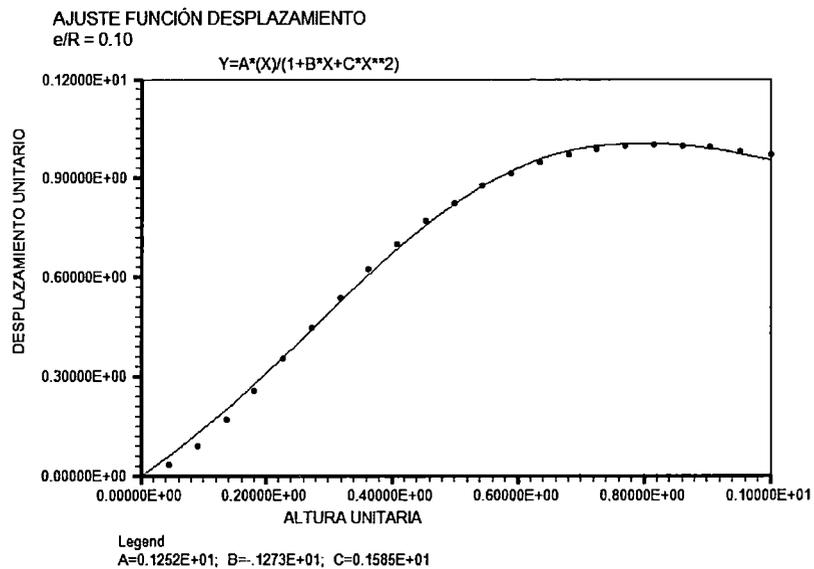
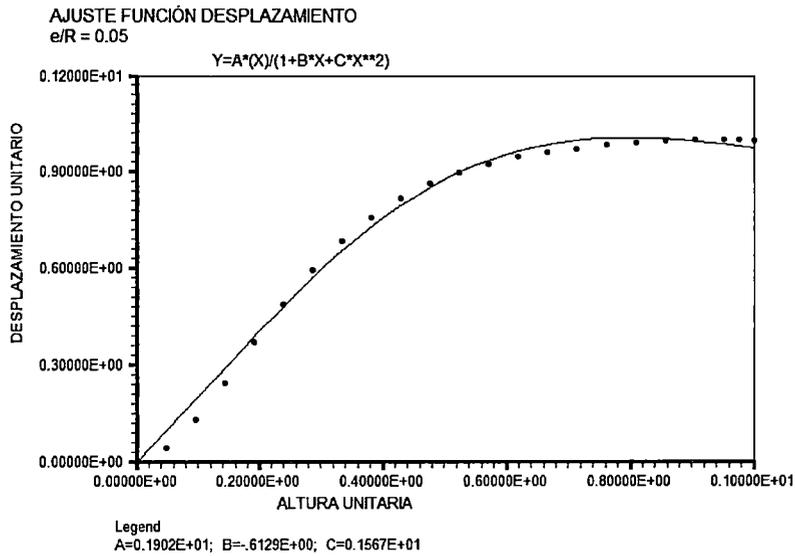
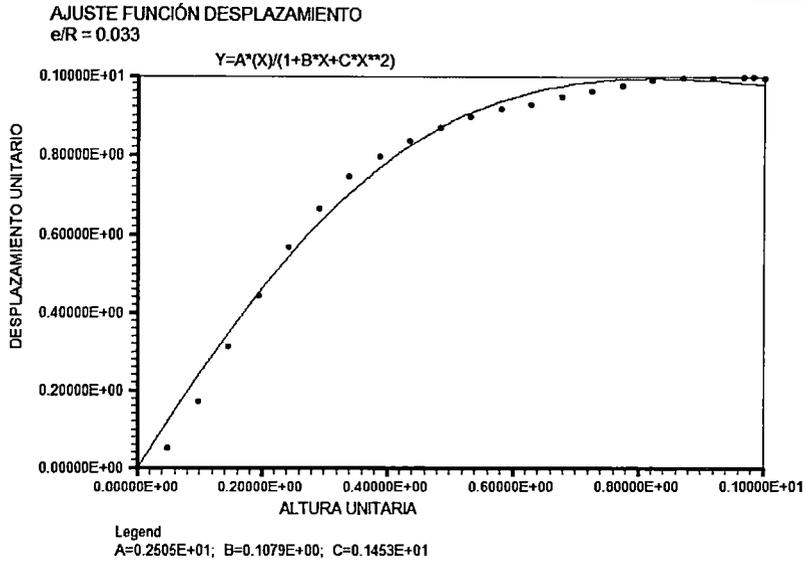
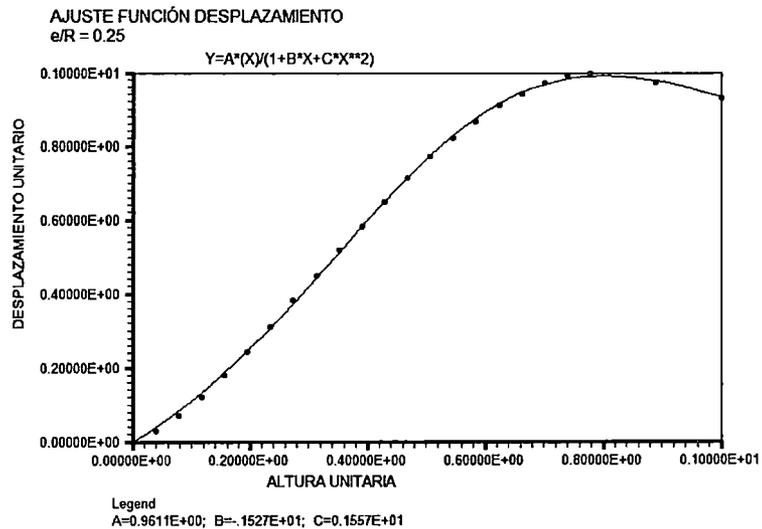
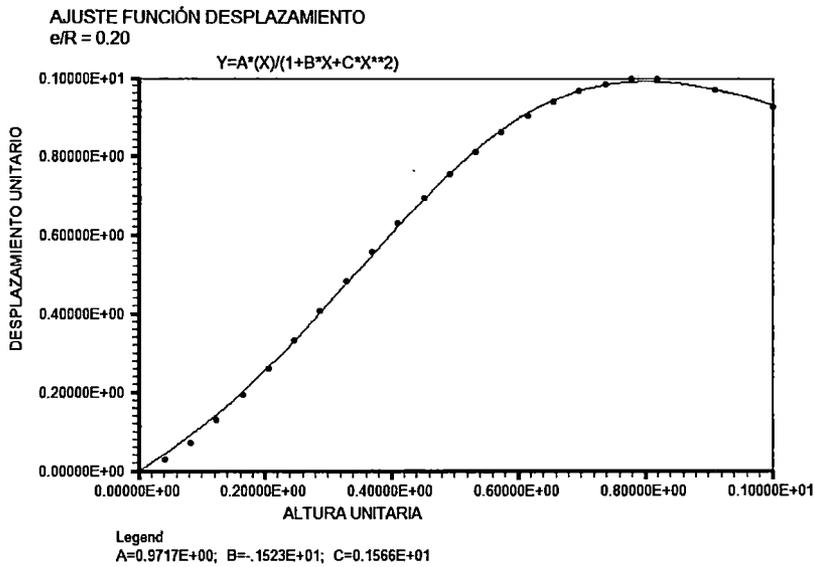
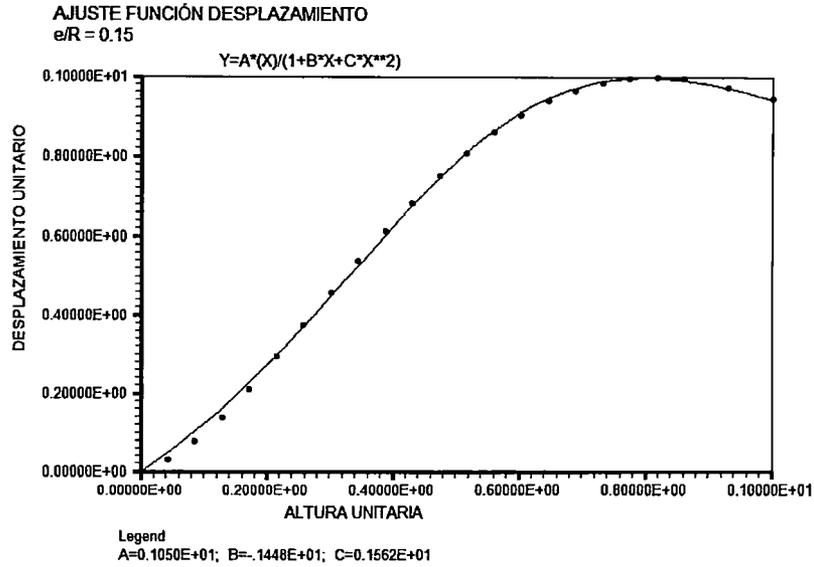


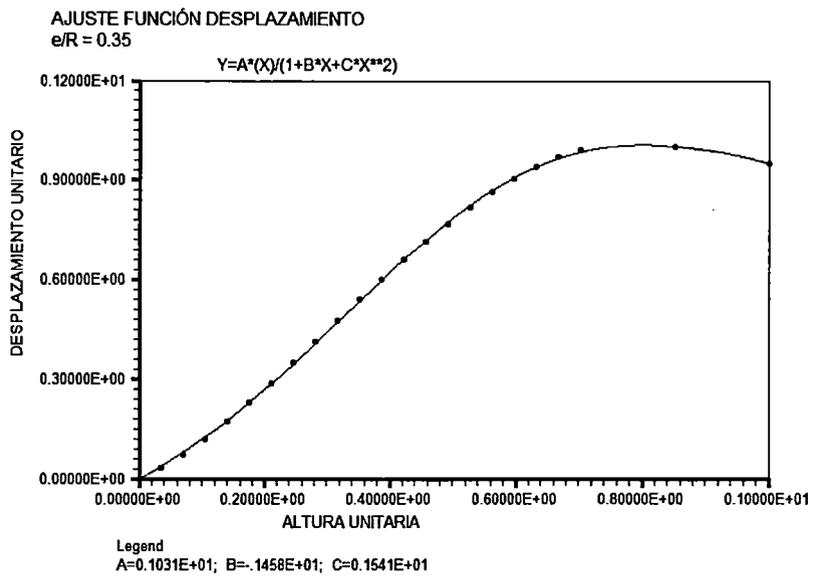
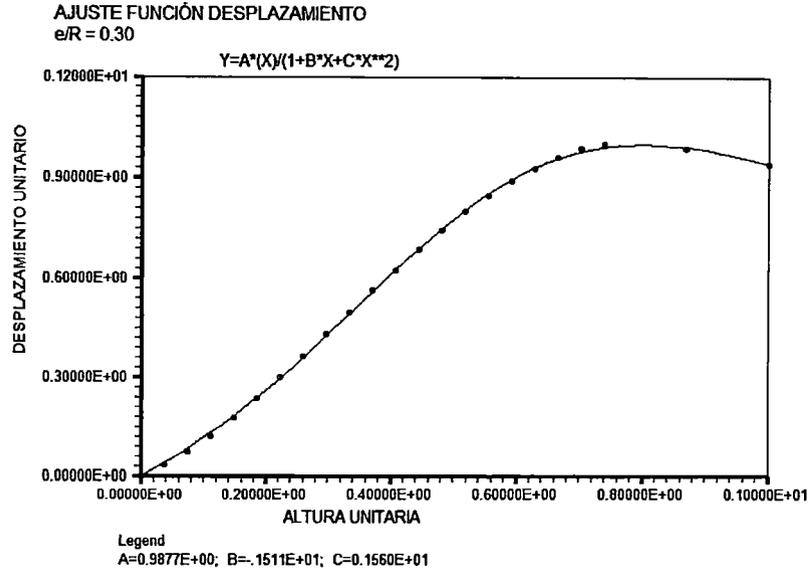
Figura H-2 Resultados de correlación del ajuste de la Función de corrección del período fundamental

### Ajustes relacionados a los desplazamientos sísmicos









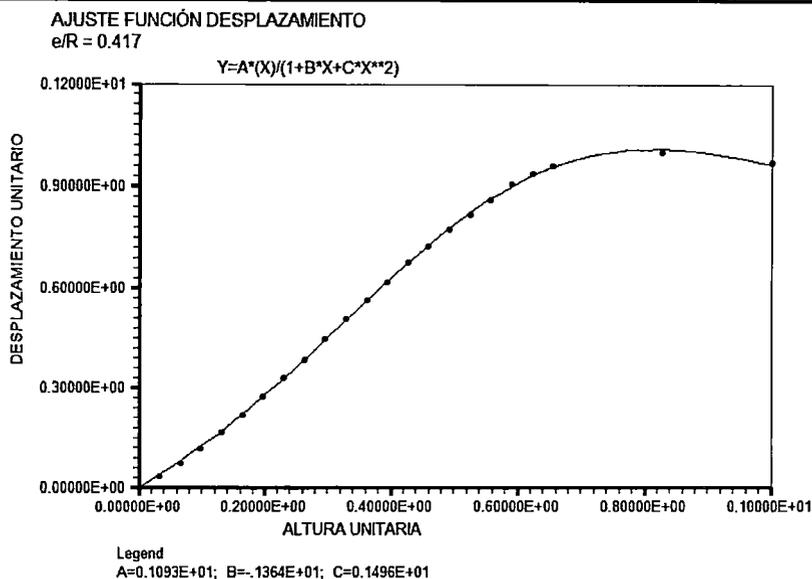
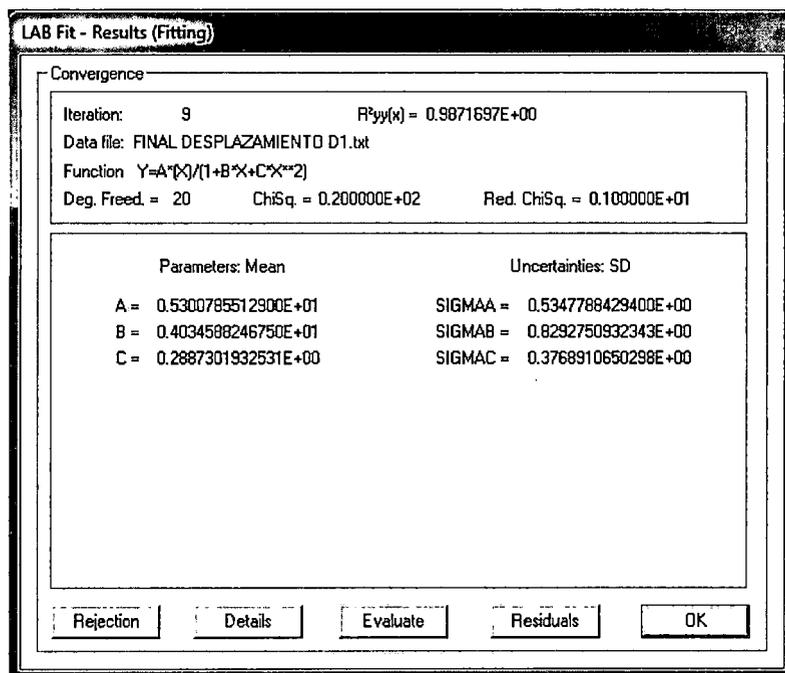
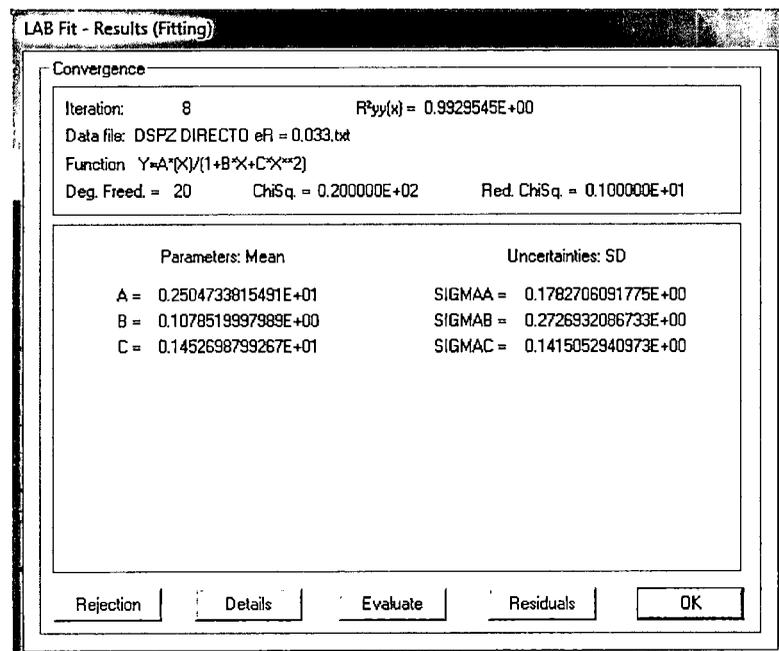
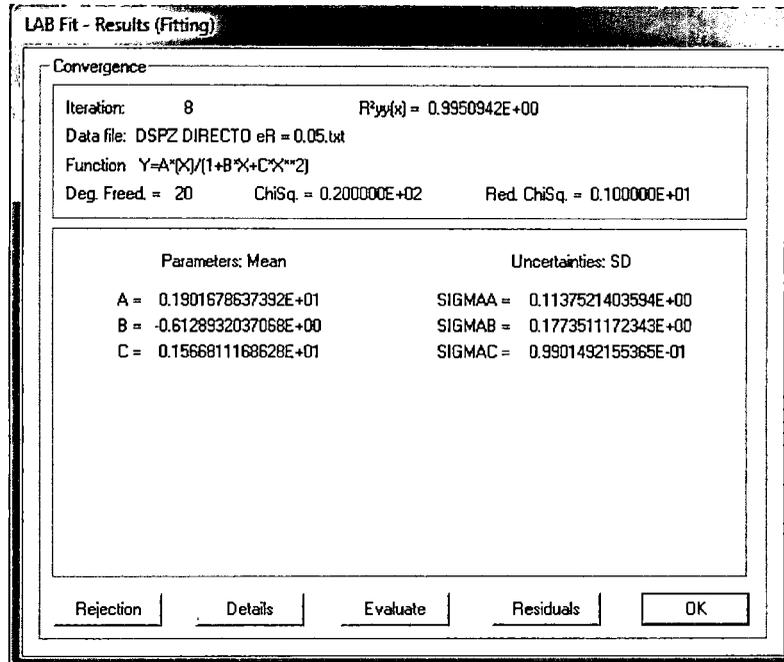
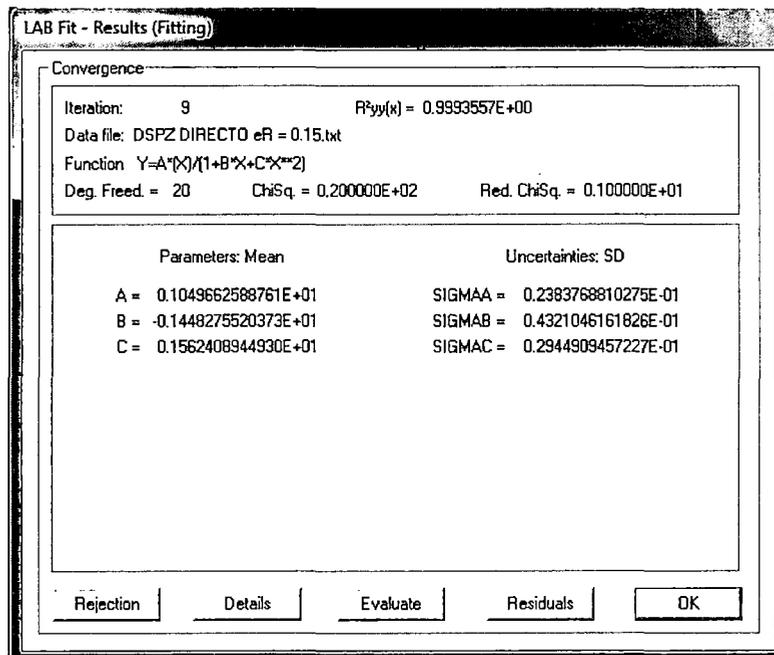
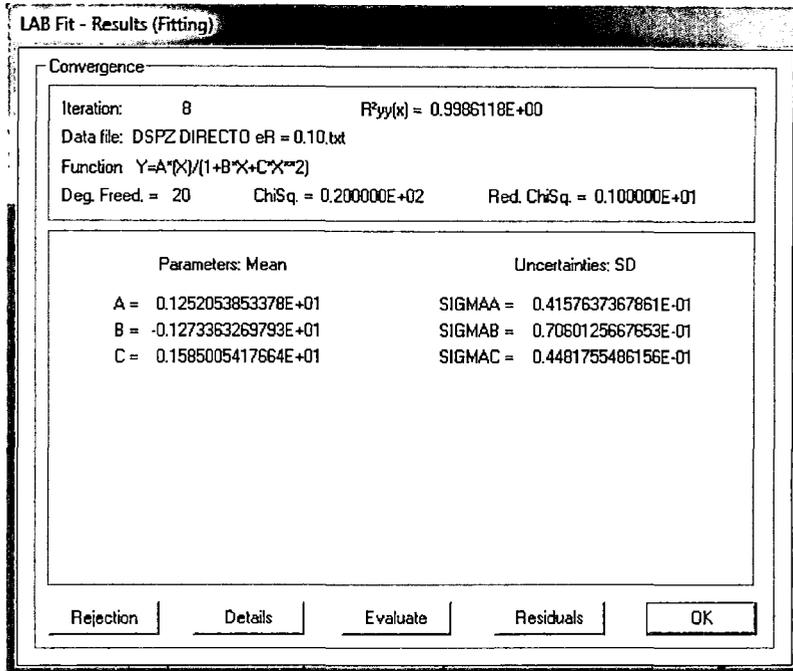
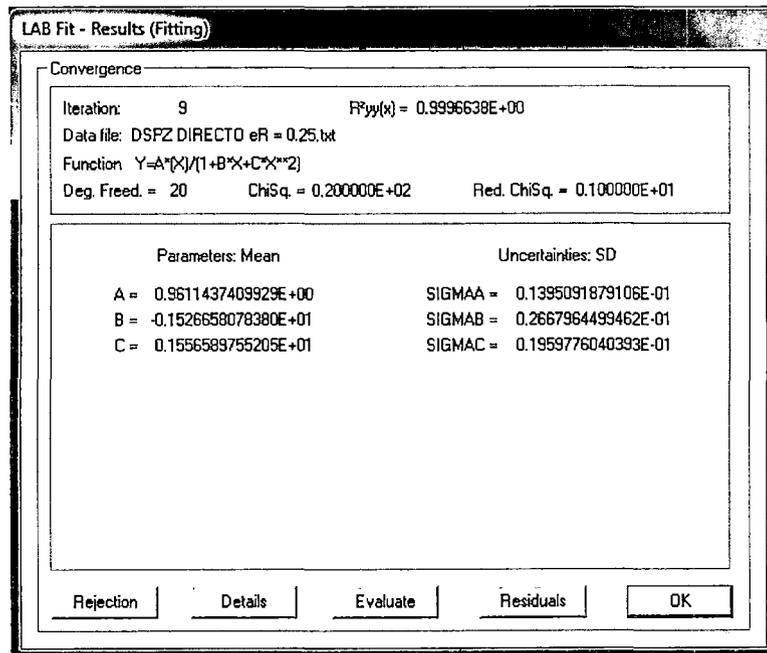
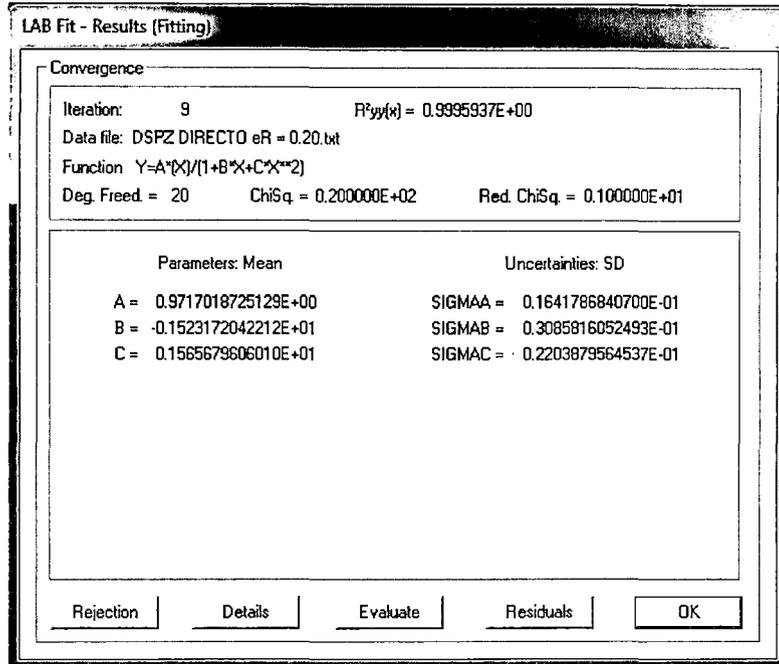


Figura H-3 Ajustes de curvas de desplazamientos unitarios









**LAB Fit - Results (Fitting)**

**Convergence**

Iteration: 9  $R^2_{yy}(x) = 0.9997826E+00$   
 Data file: DSPZ DIRECTO eR = 0.30.txt  
 Function  $Y=A*(X)/(1+B*X+C*X^2)$   
 Deg. Freed. = 20 ChiSq. = 0.200000E+02 Red. ChiSq. = 0.100000E+01

Parameters: Mean		Uncertainties: SD	
A =	0.9876569688780E+00	SIGMAA =	0.1115035485040E-01
B =	-0.1510921840850E+01	SIGMAB =	0.2125299649816E-01
C =	0.1560280269099E+01	SIGMAC =	0.1586221173677E-01

Rejection    Details    Evaluate    Residuals    OK

**LAB Fit - Results (Fitting)**

**Convergence**

Iteration: 9  $R^2_{yy}(x) = 0.9998454E+00$   
 Data file: DSPZ DIRECTO eR = 0.35.txt  
 Function  $Y=A*(X)/(1+B*X+C*X^2)$   
 Deg. Freed. = 20 ChiSq. = 0.200000E+02 Red. ChiSq. = 0.100000E+01

Parameters: Mean		Uncertainties: SD	
A =	0.1031490181357E+01	SIGMAA =	0.9503437022610E-02
B =	-0.1458003476421E+01	SIGMAB =	0.1809718870198E-01
C =	0.1541444083561E+01	SIGMAC =	0.1354186095892E-01

Rejection    Details    Evaluate    Residuals    OK

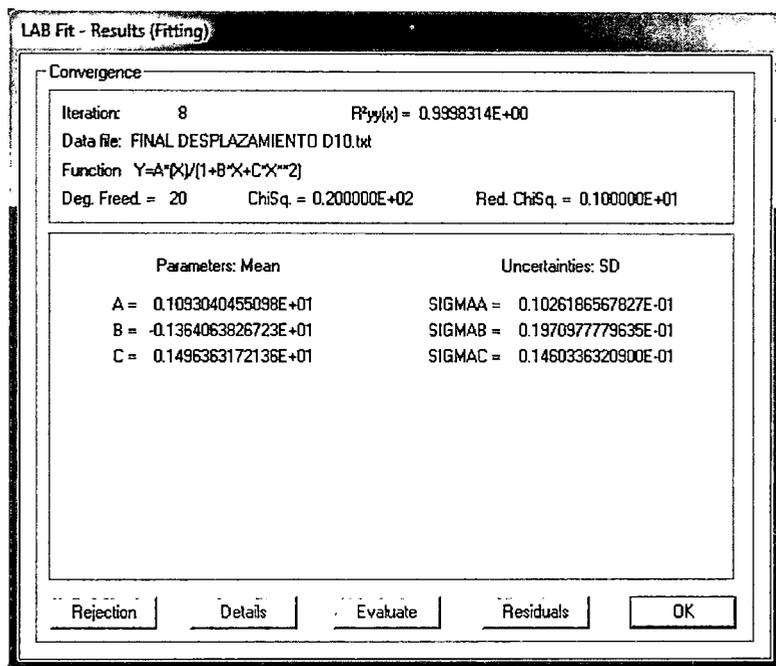
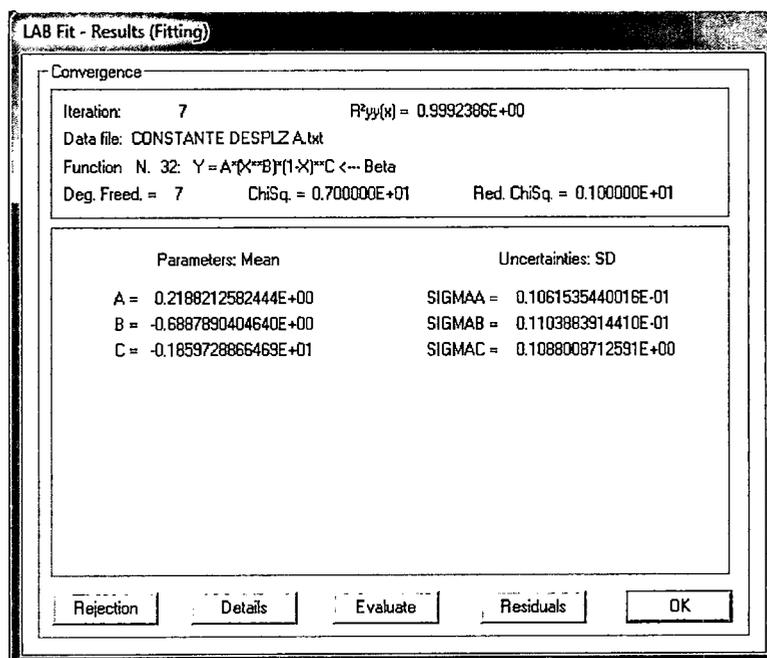


Figura H-4 Resultados de correlación del ajuste de la Función desplazamiento elástico unitario



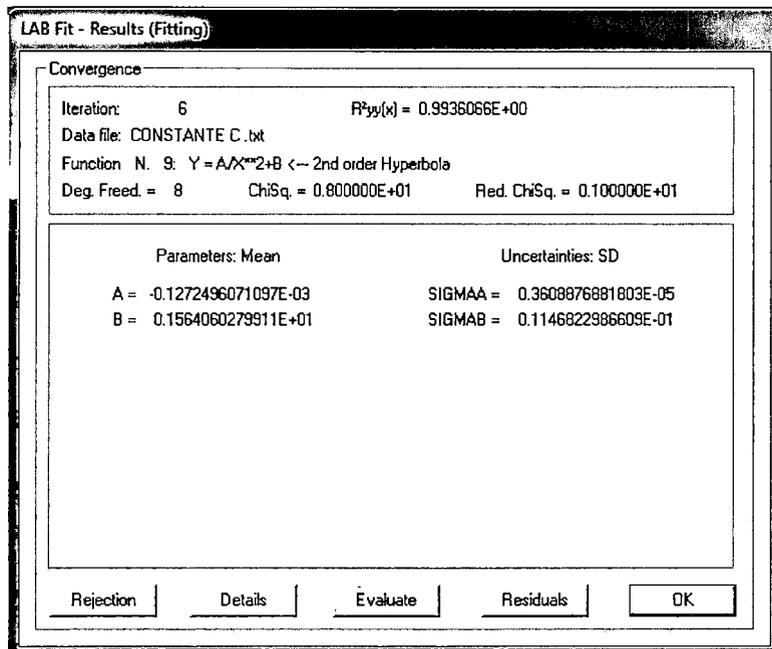
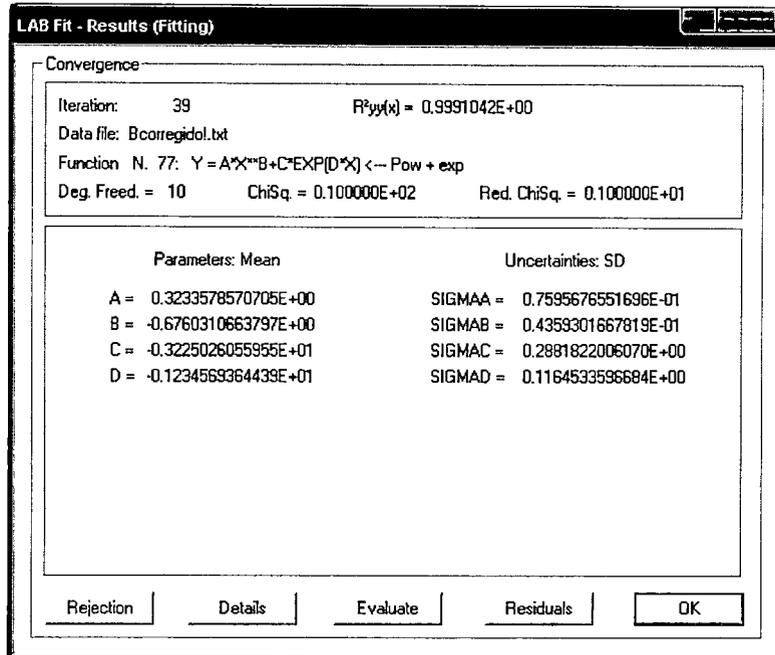


Figura H-5 Resultados de correlación del ajuste de las variables literales A, B y C para el desplazamiento unitario

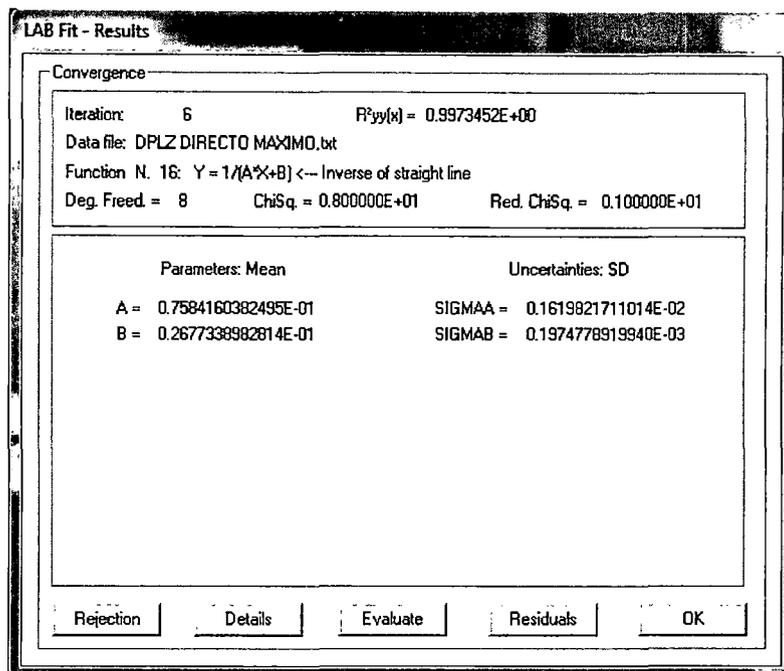
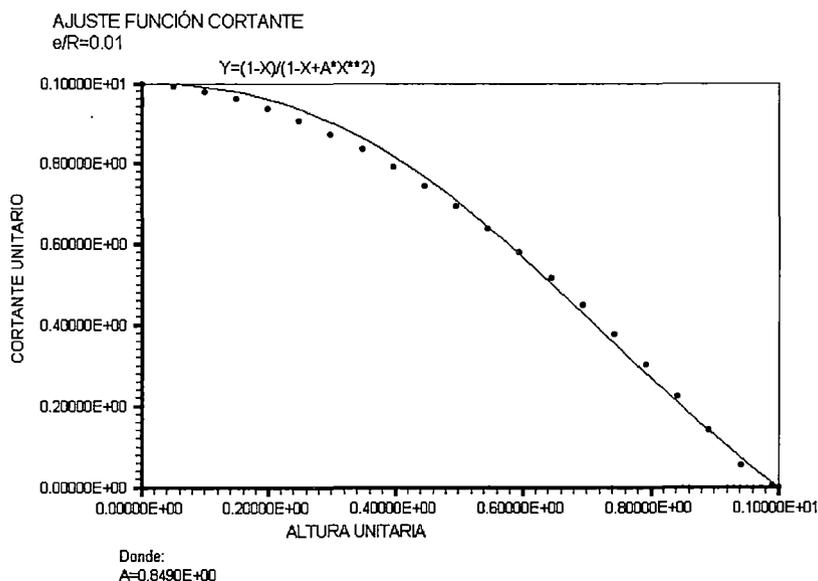
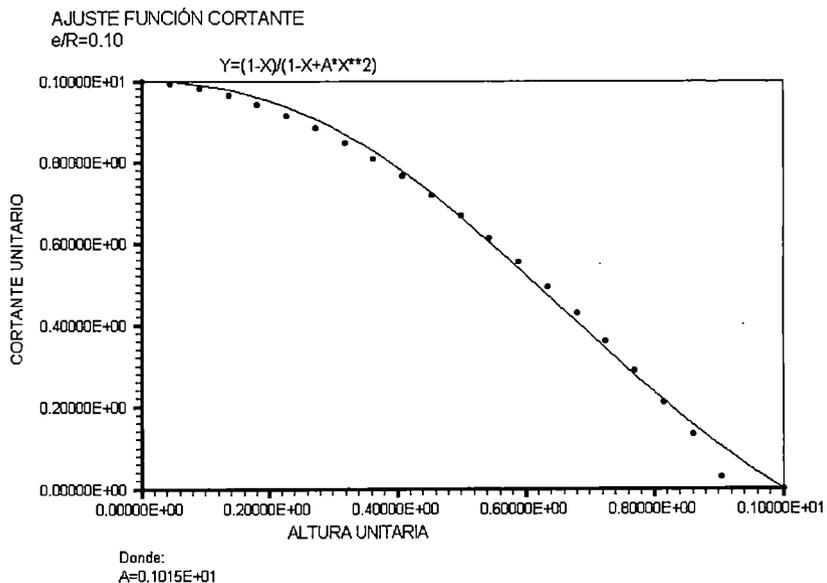
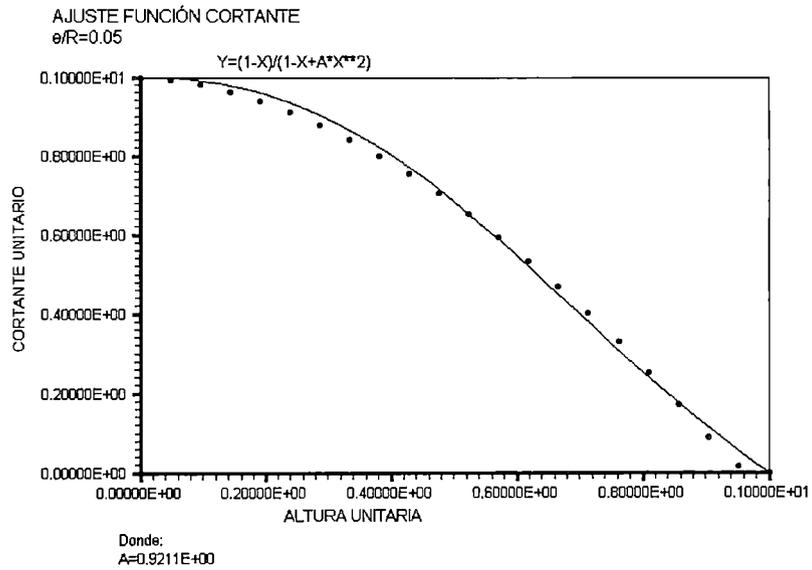
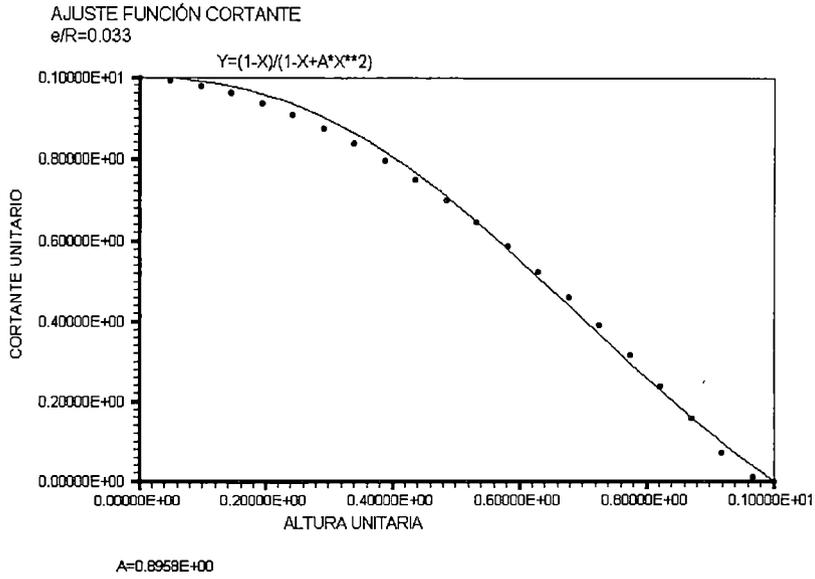
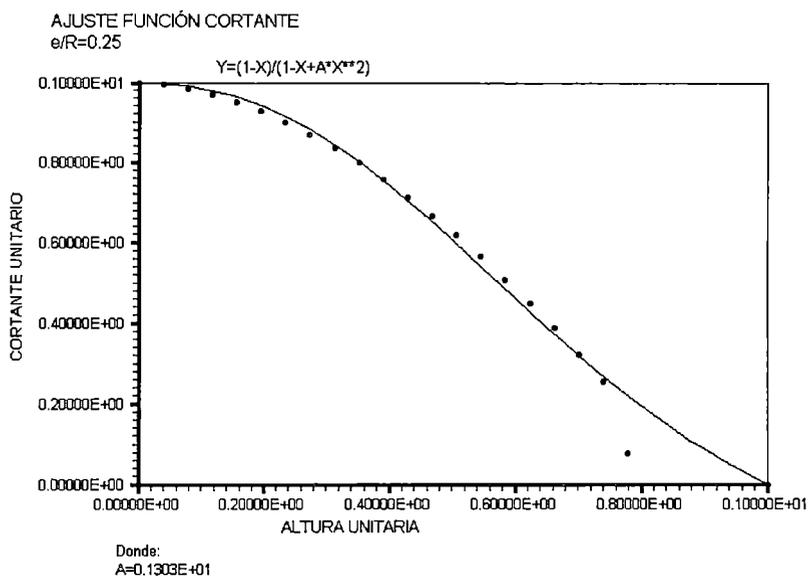
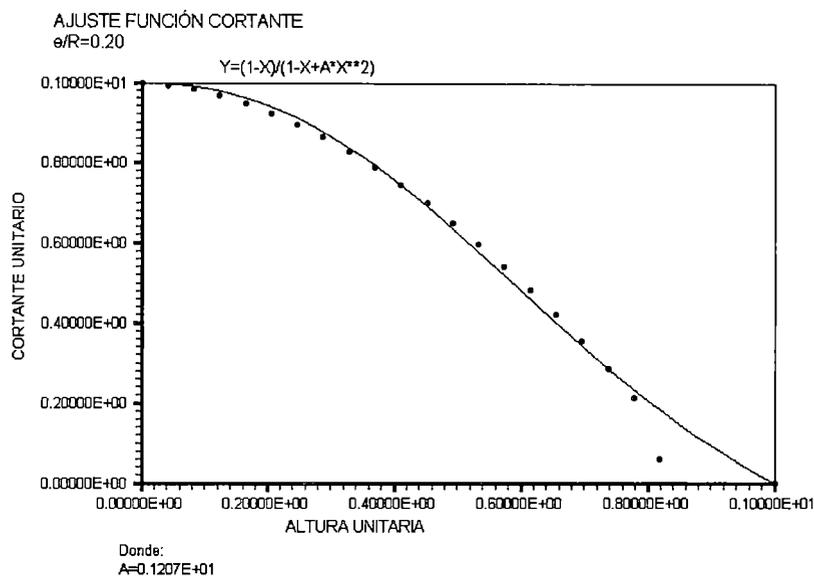
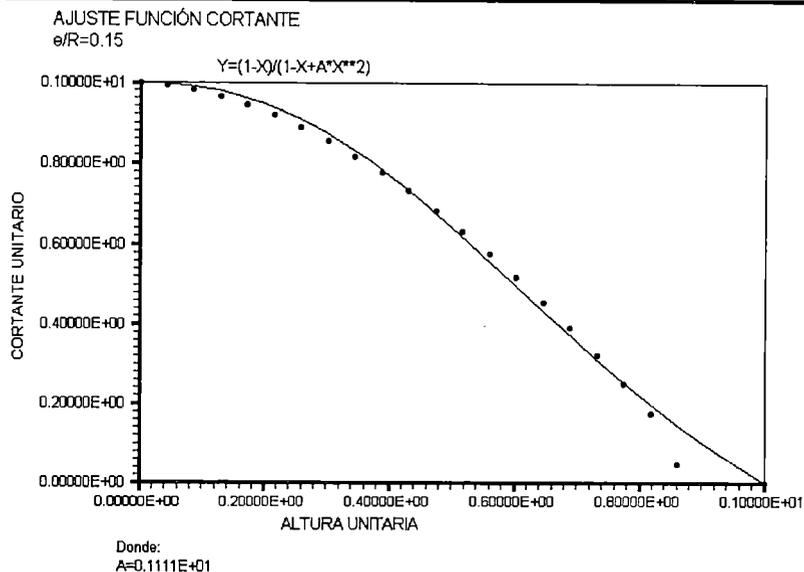


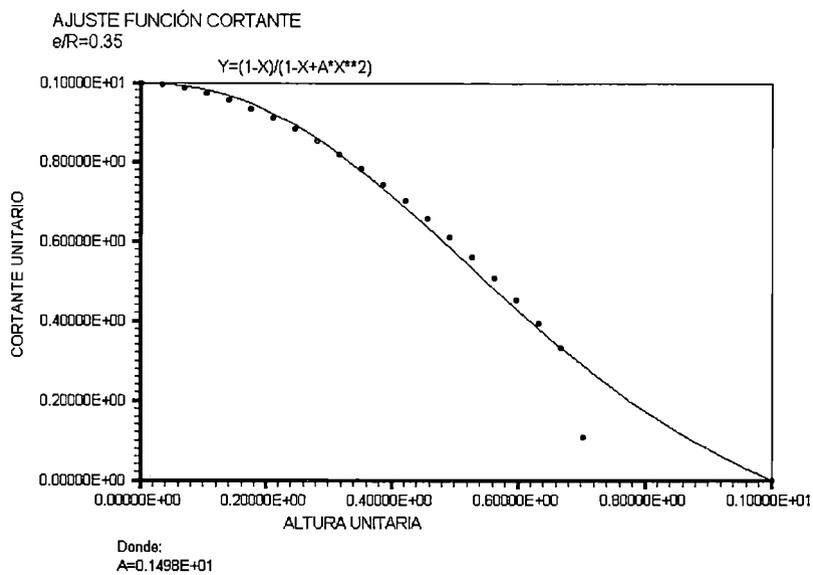
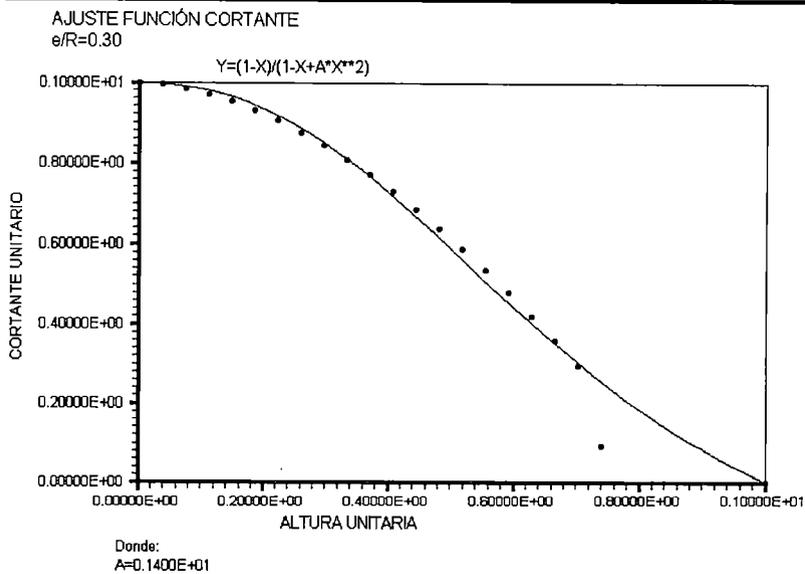
Figura H-6 Resultados de correlación del ajuste de los máximos desplazamientos adimensionales

### Ajustes relacionados a las fuerzas cortantes sísmicas









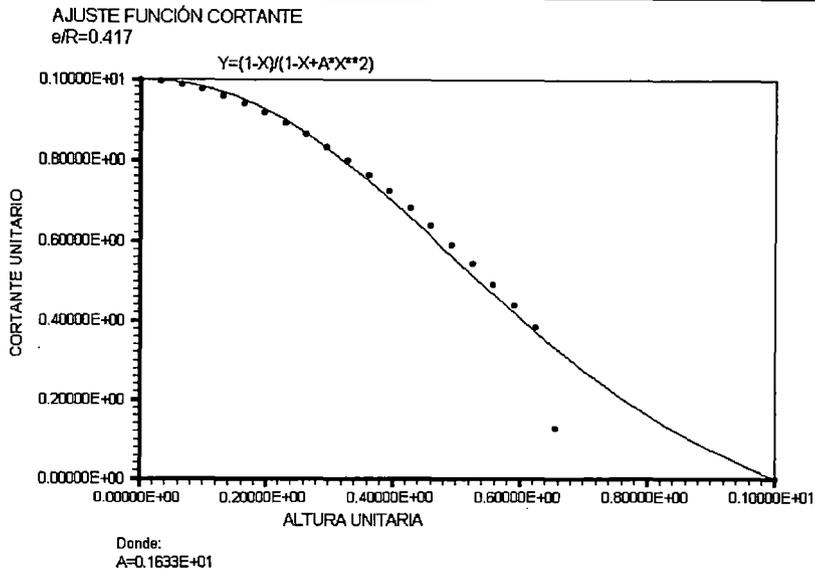
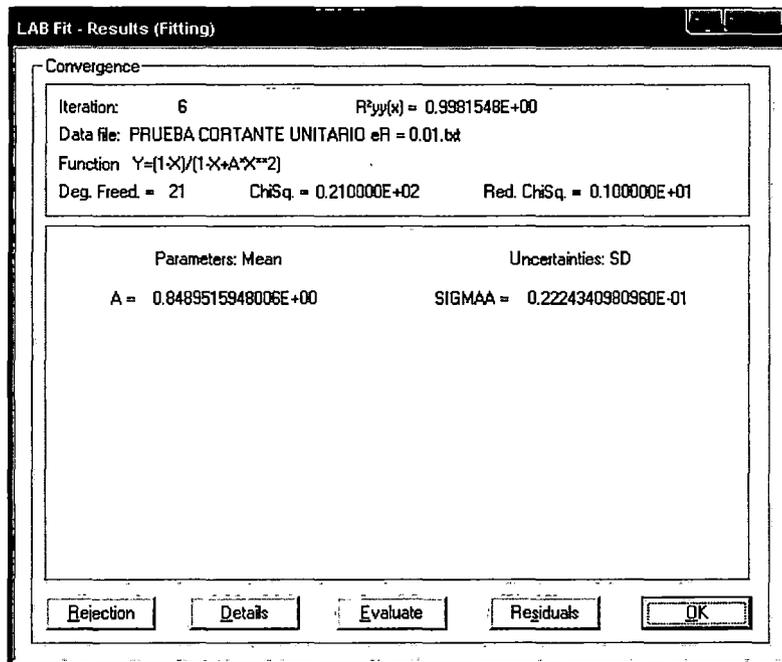
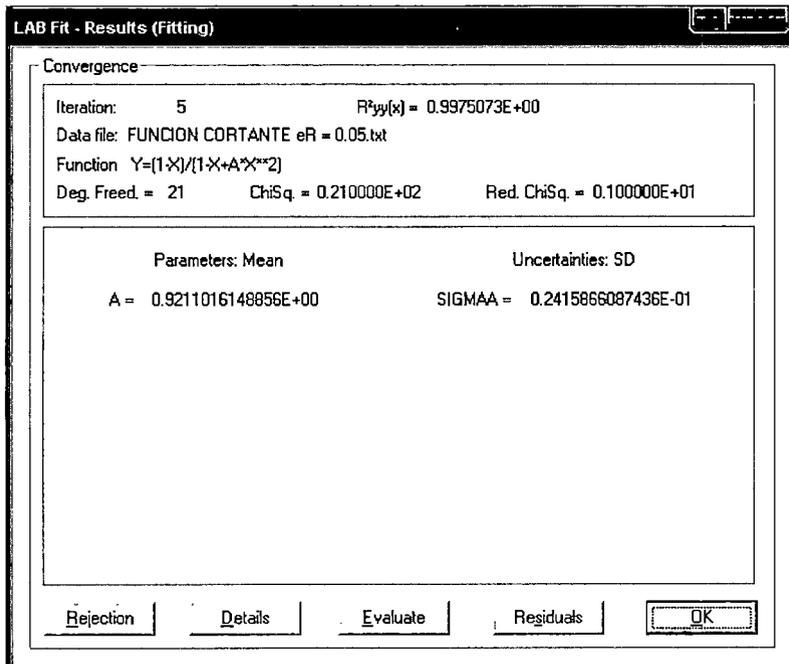
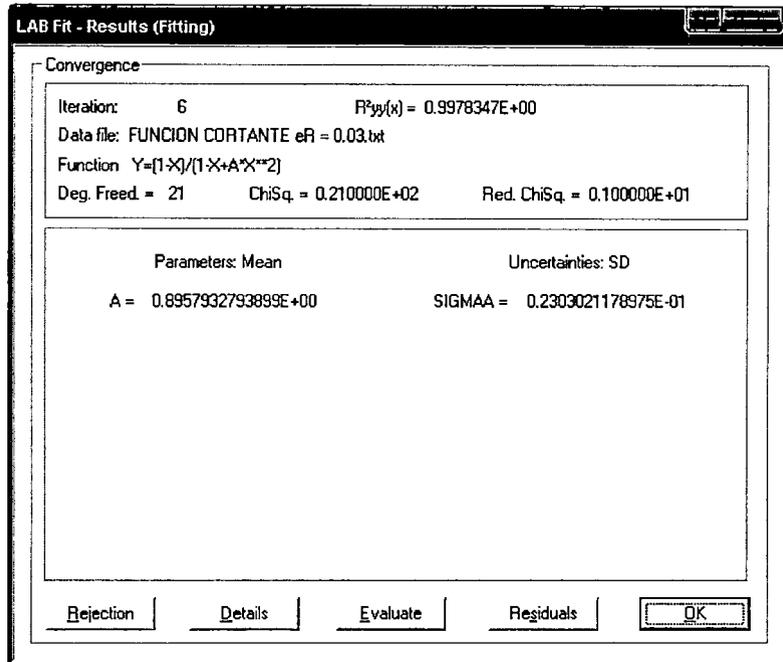
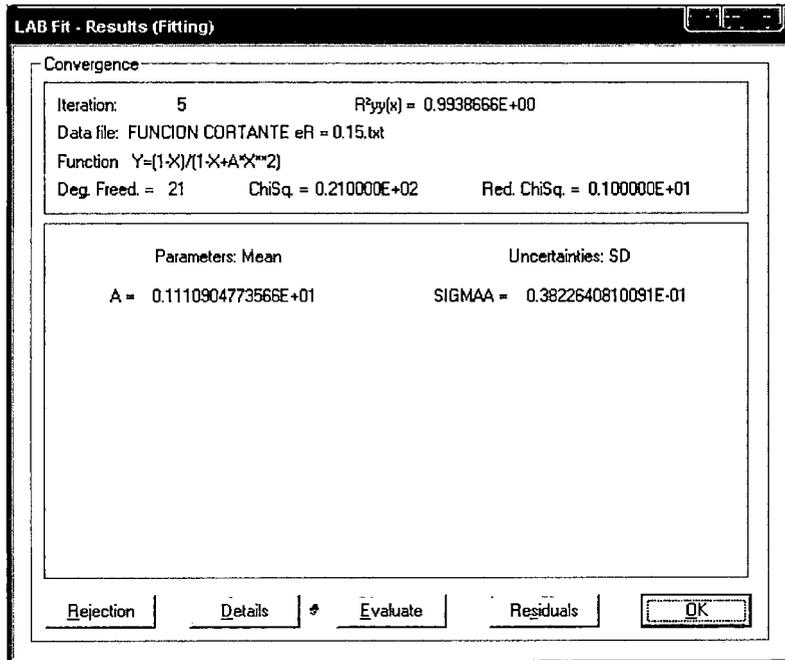
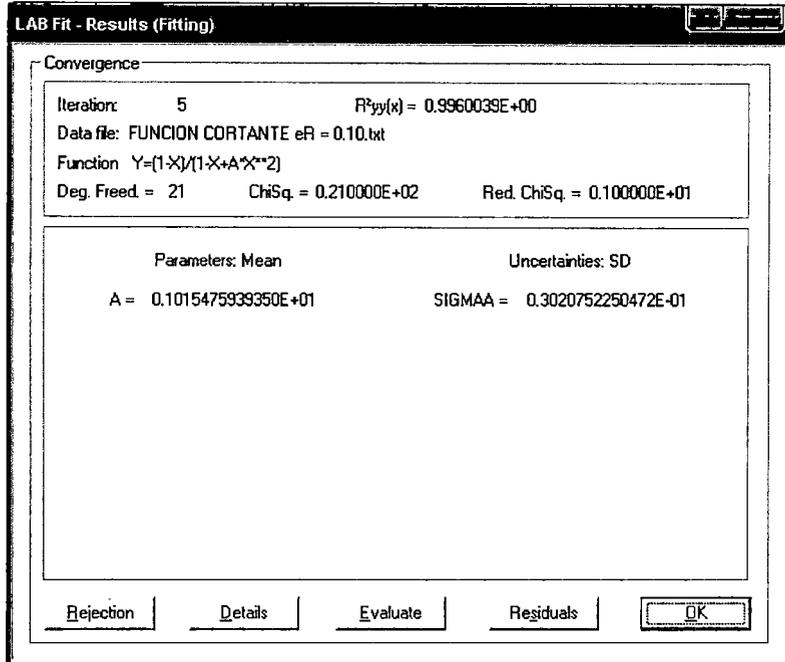
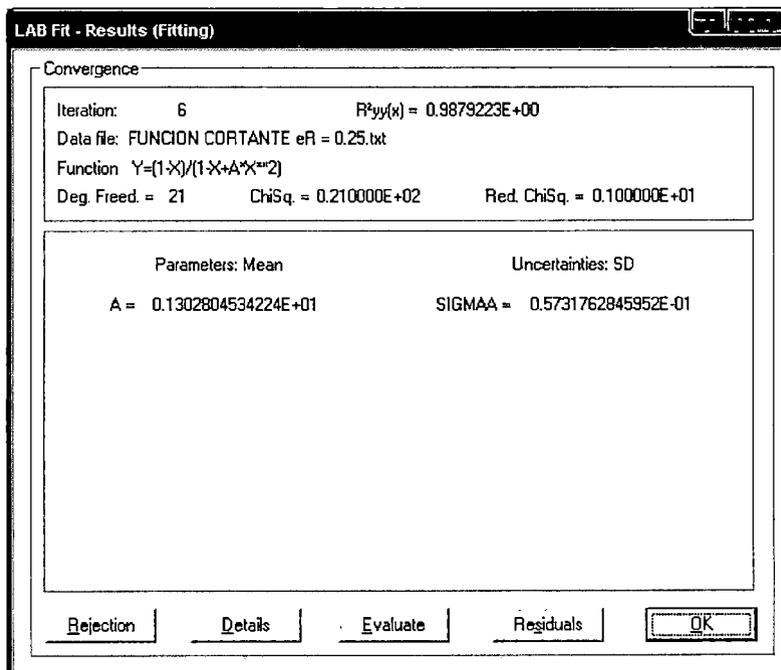
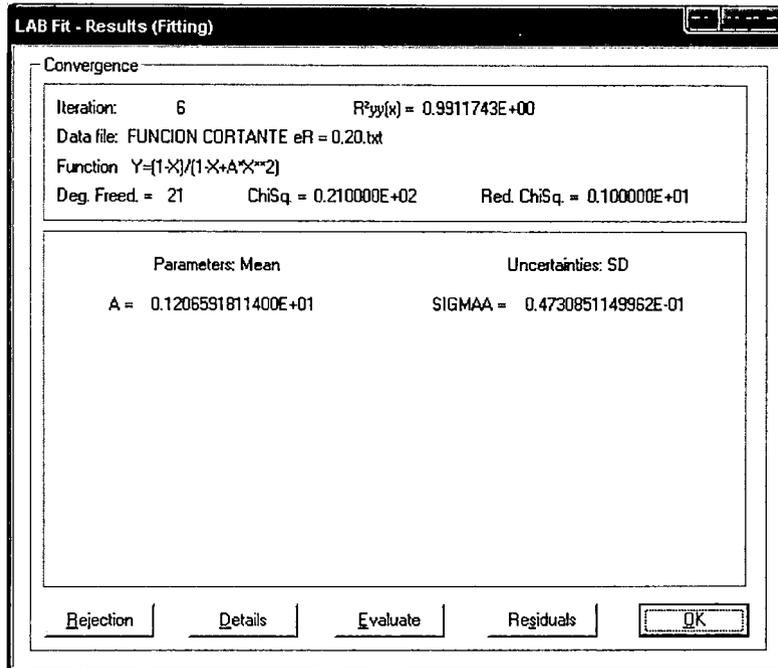


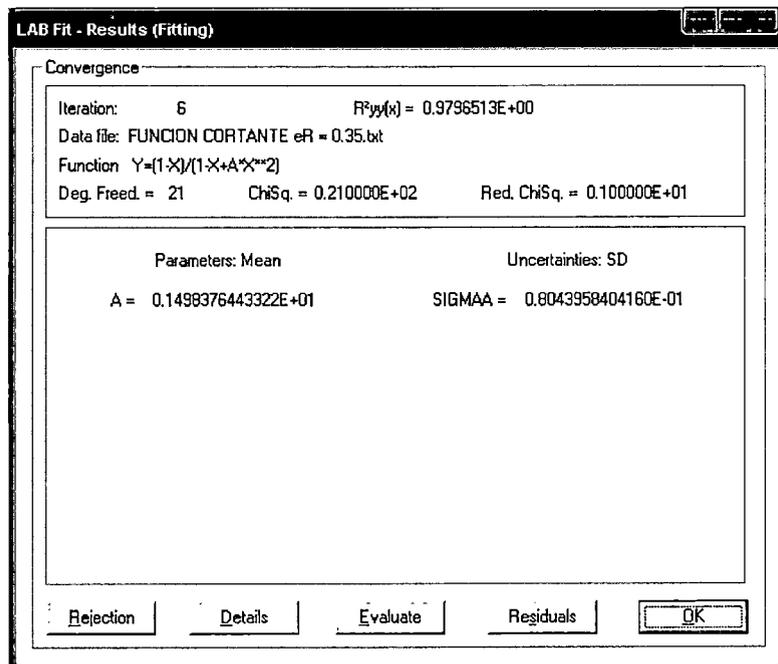
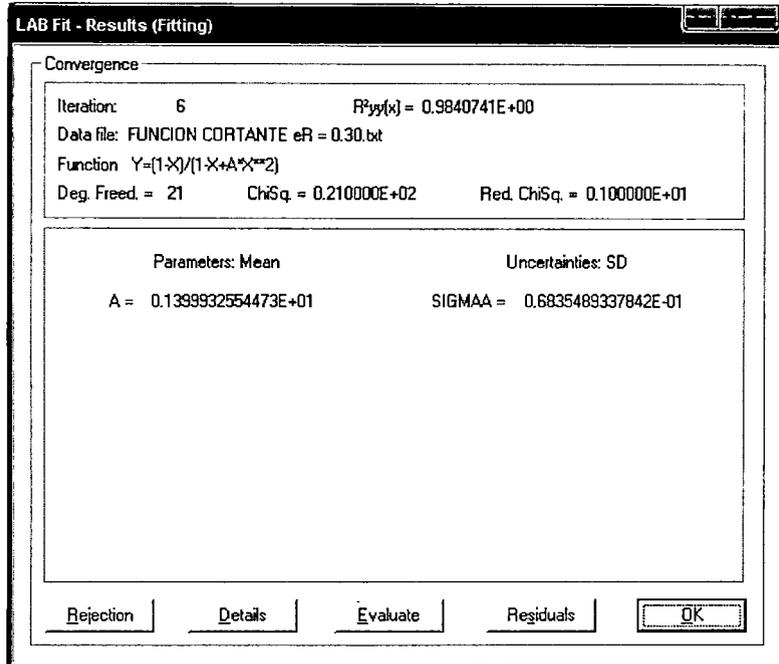
Figura H-7 Ajustes de curvas de fuerzas cortantes sísmicas unitarias











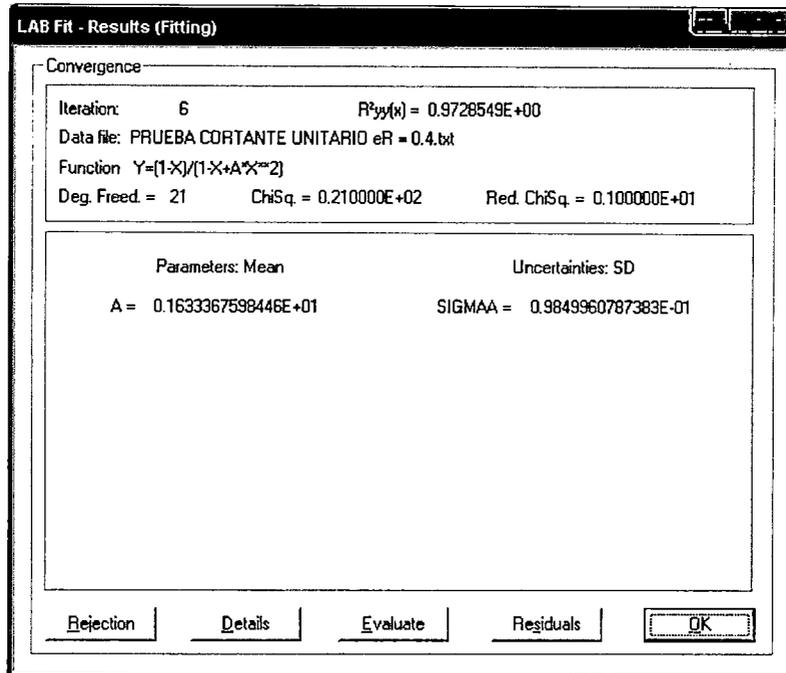


Figura H-8 Resultados de correlación del ajuste de la Función fuerza cortante unitaria

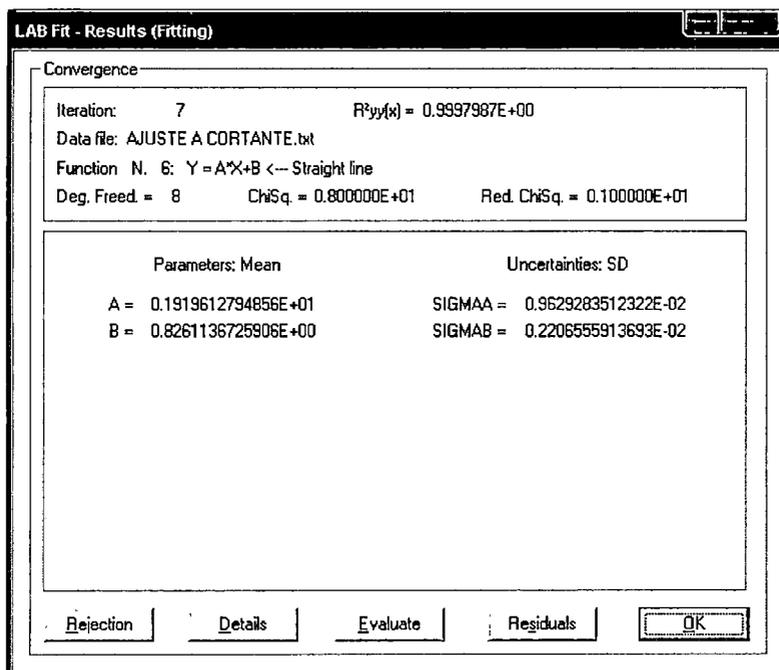


Figura H-9 Resultados de correlación del ajuste de la variable literal A para la Función fuerza cortante unitaria

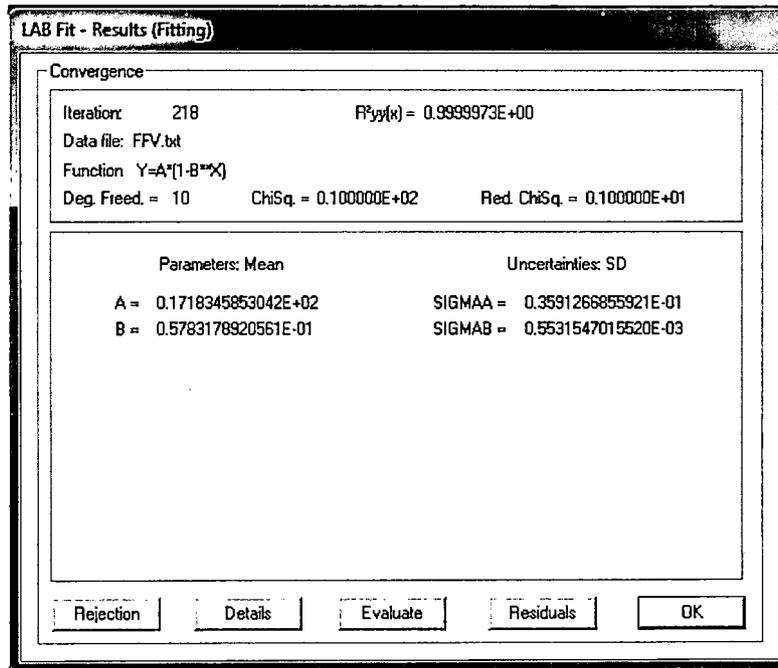
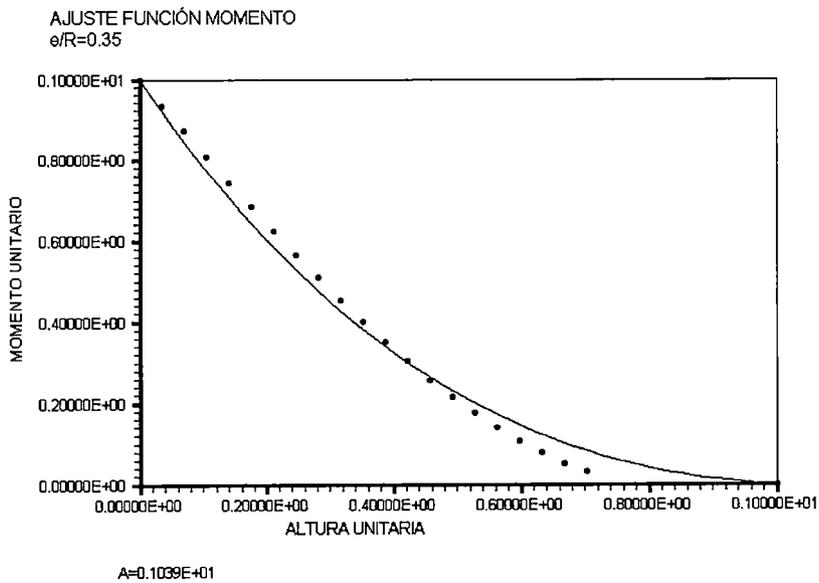
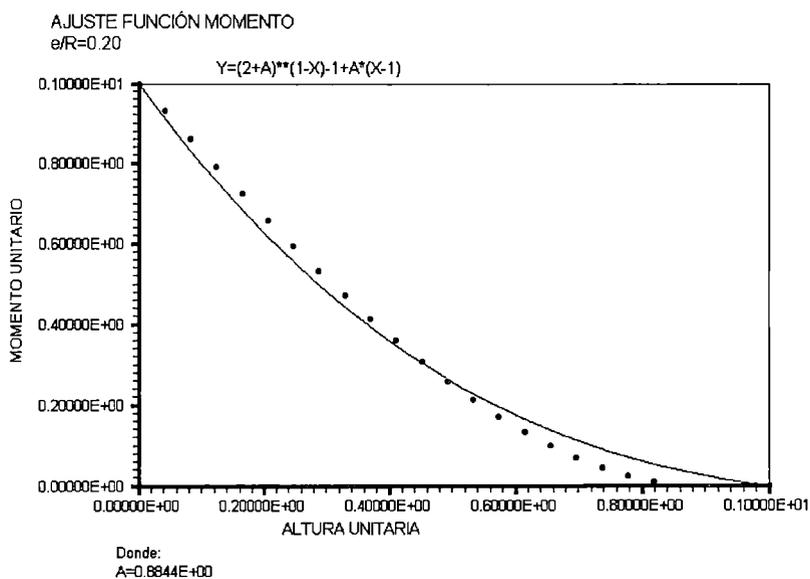
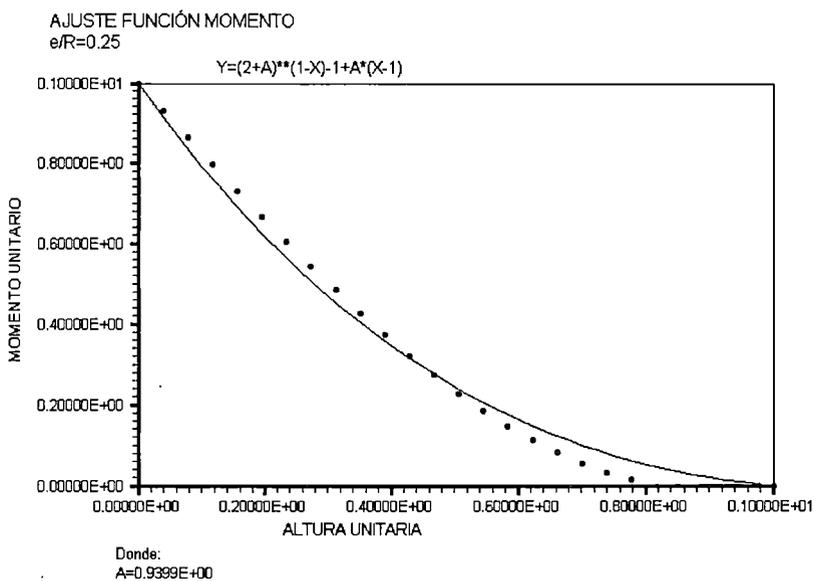
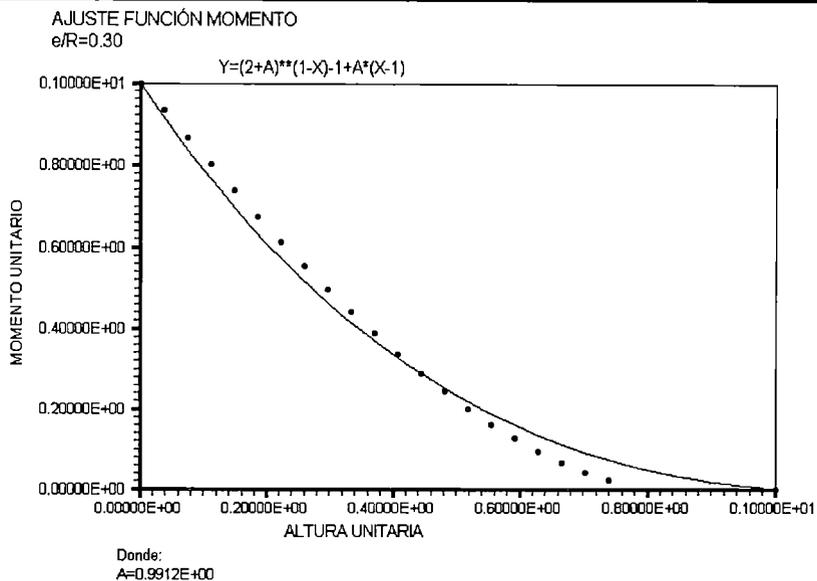
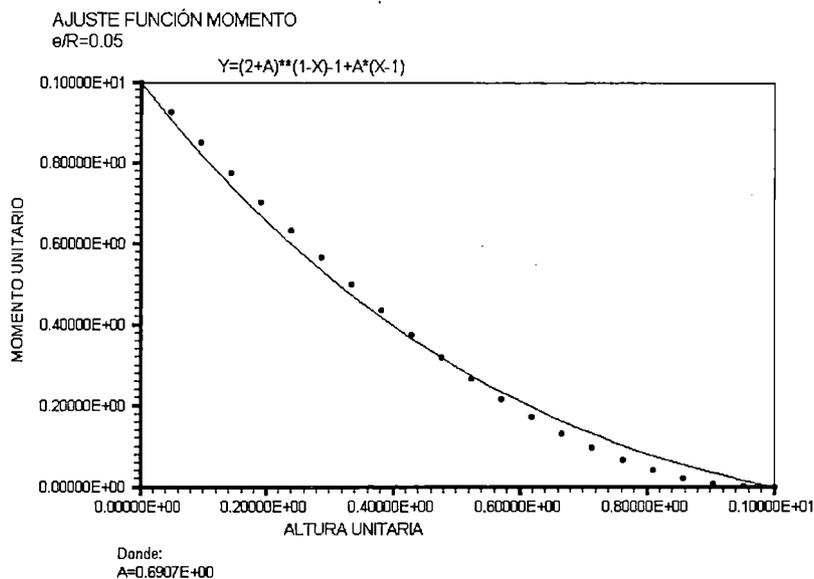
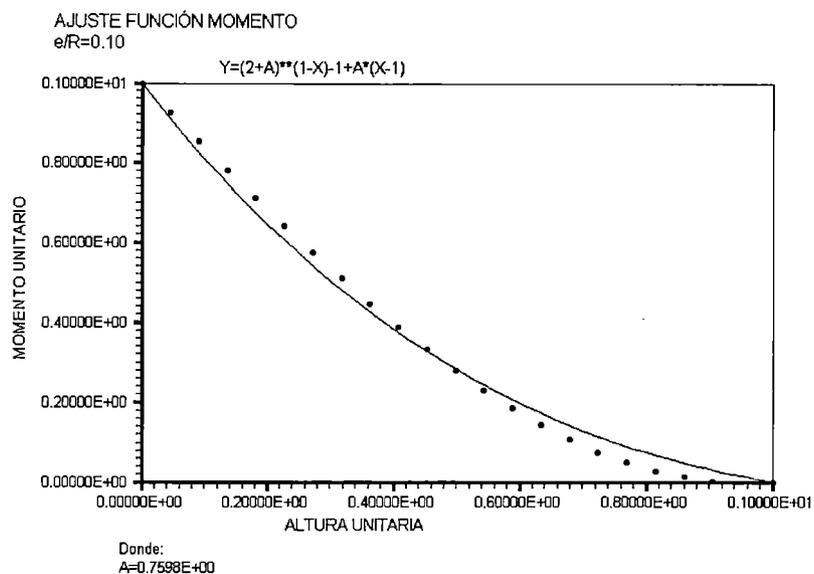
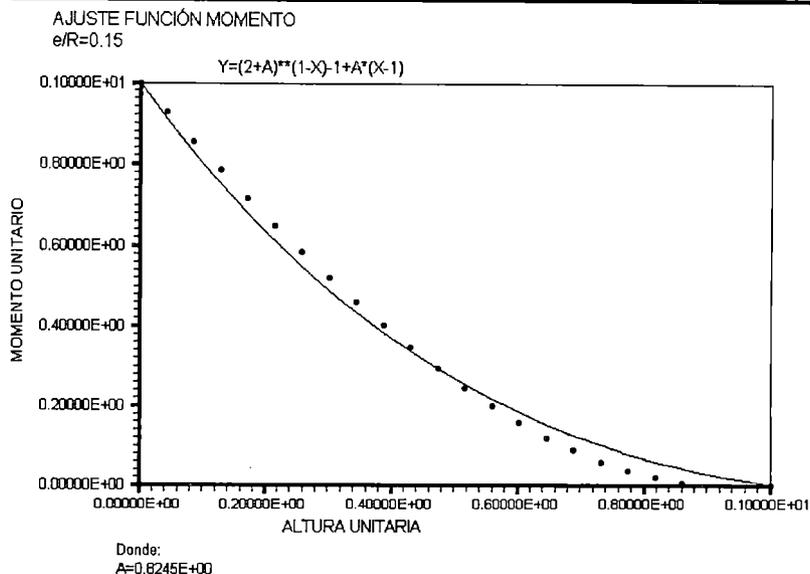


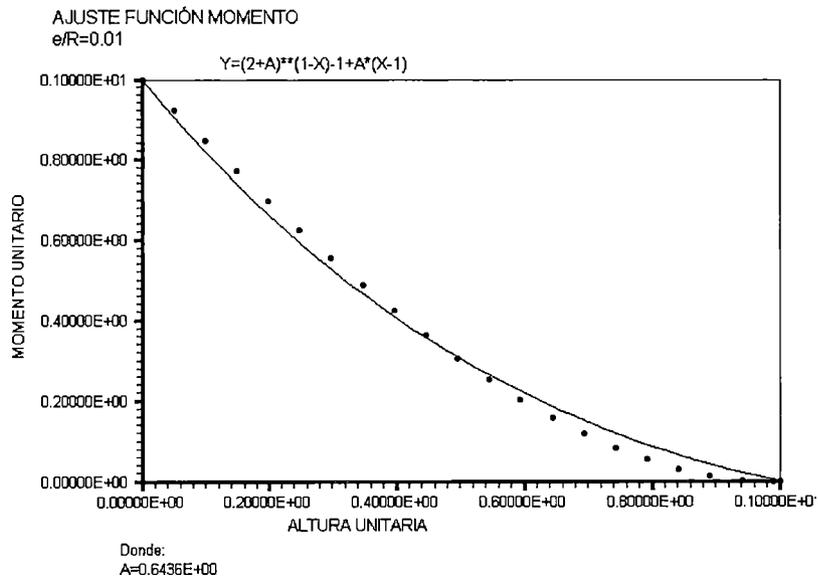
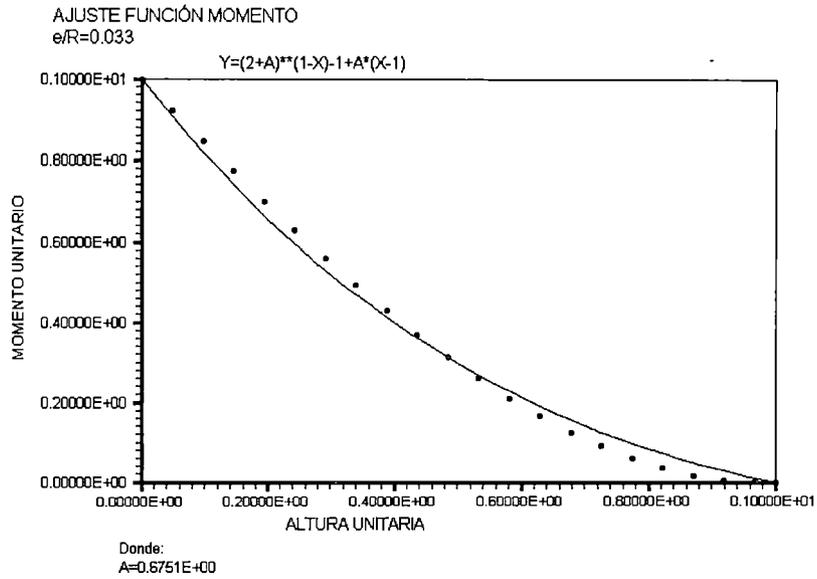
Figura H-10 Resultados de correlación del ajuste de máximas fuerzas cortantes  
 adimensionales

**Ajustes relacionados a los momentos flectores sísmicos**









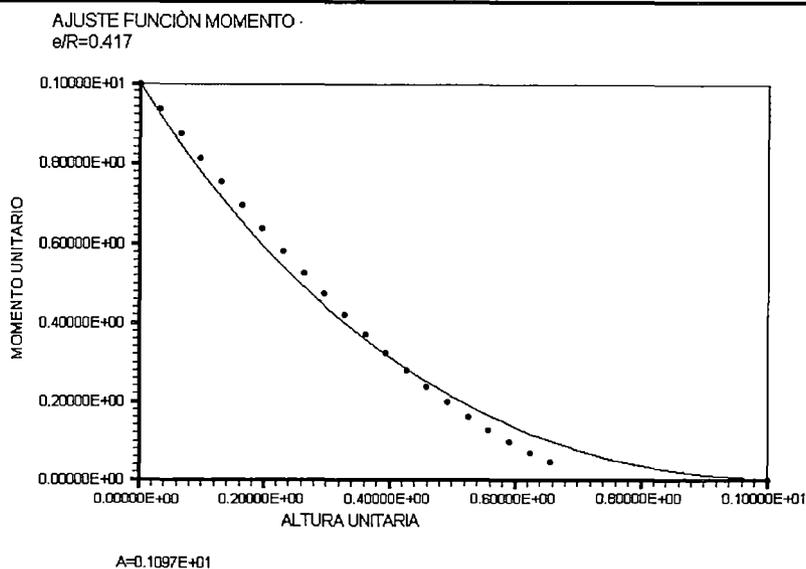
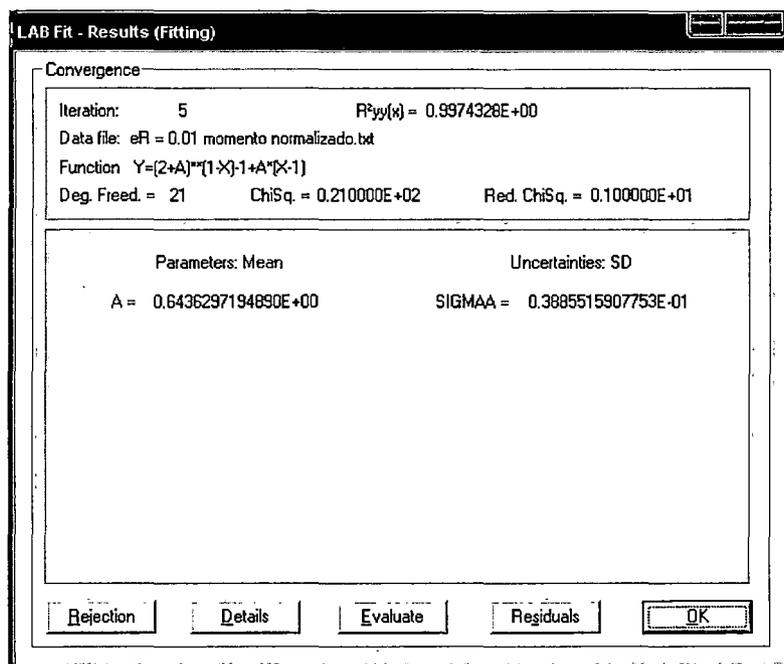
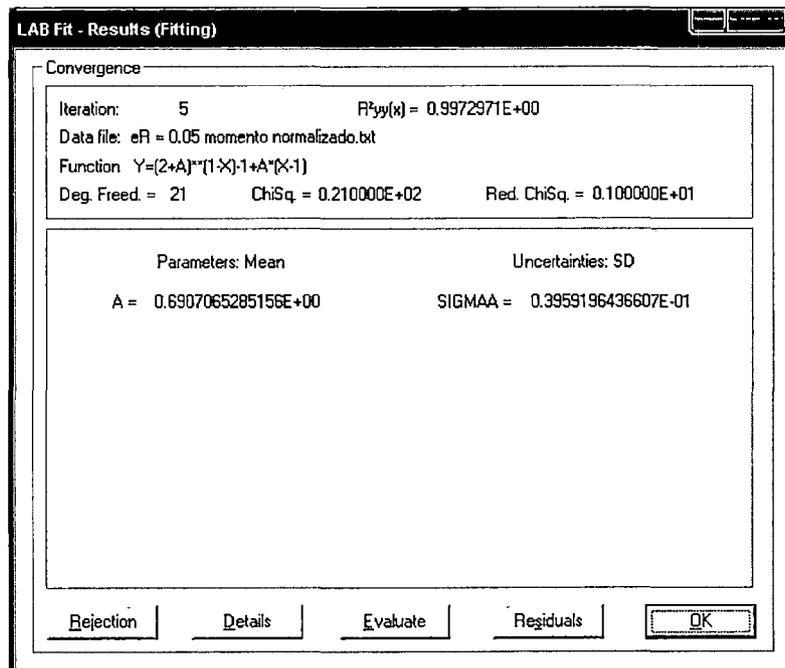
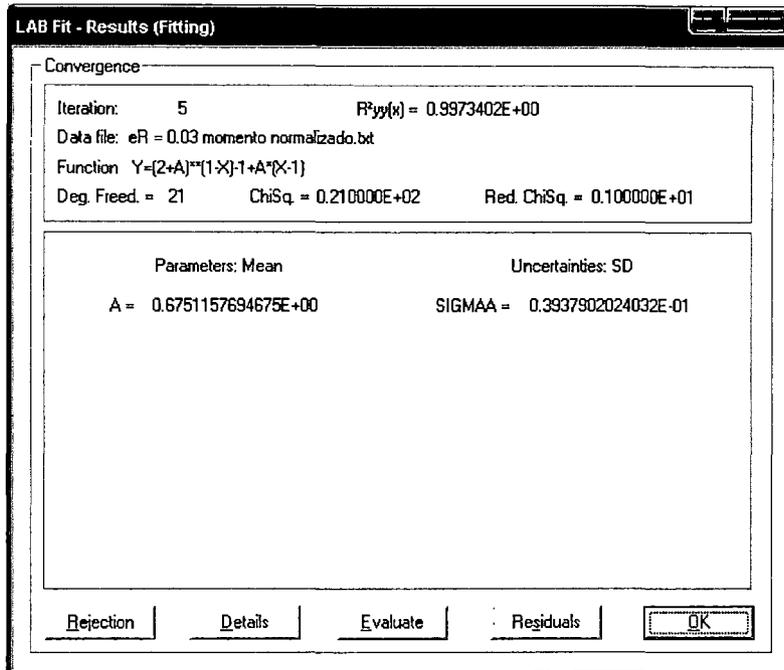
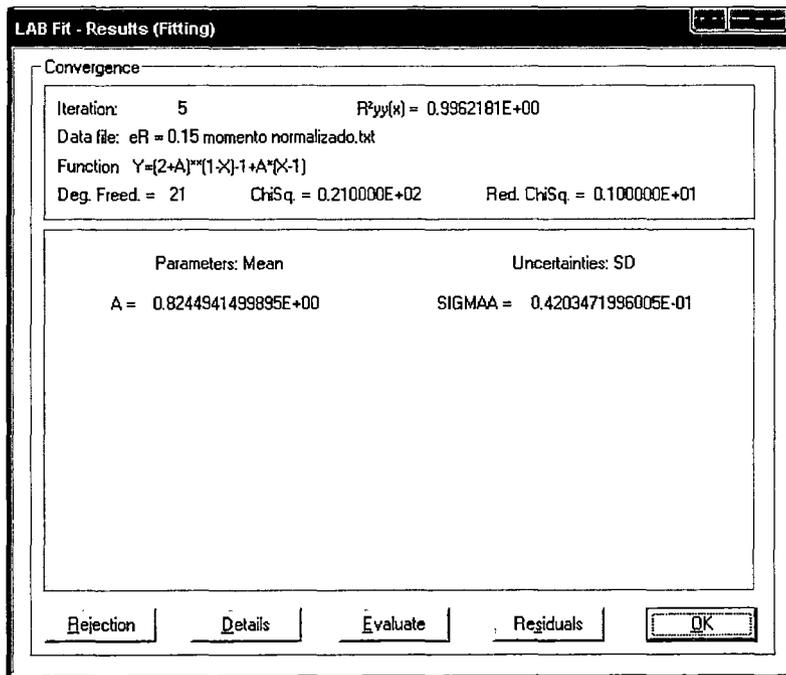
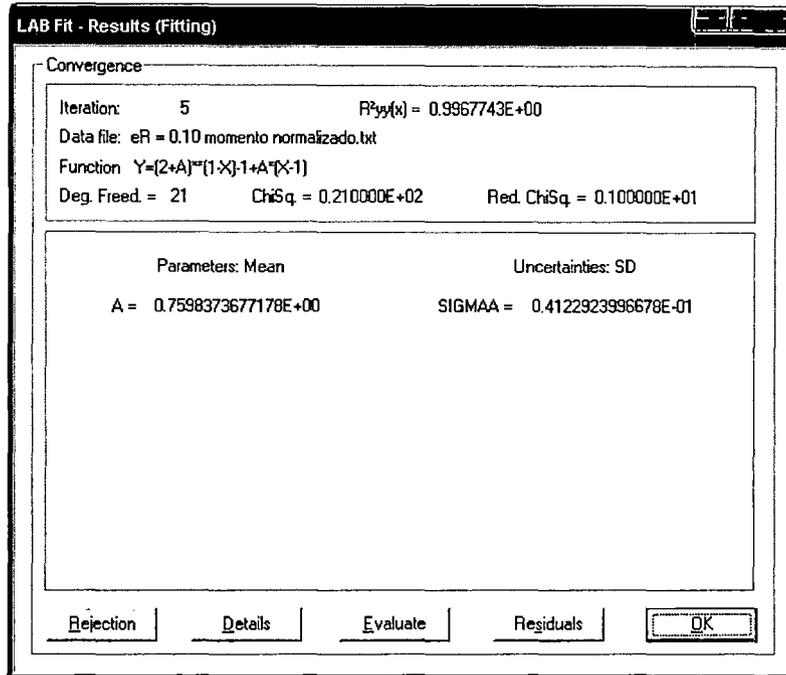
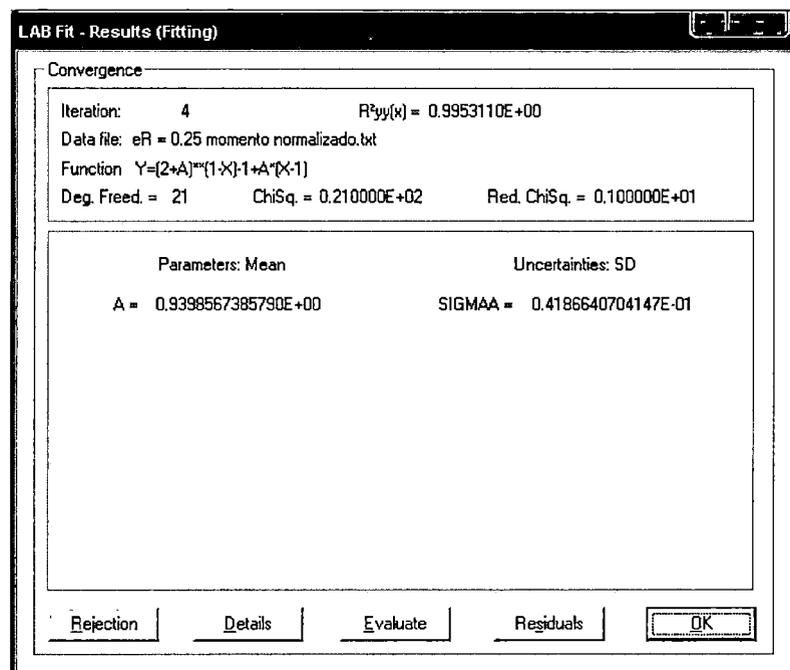
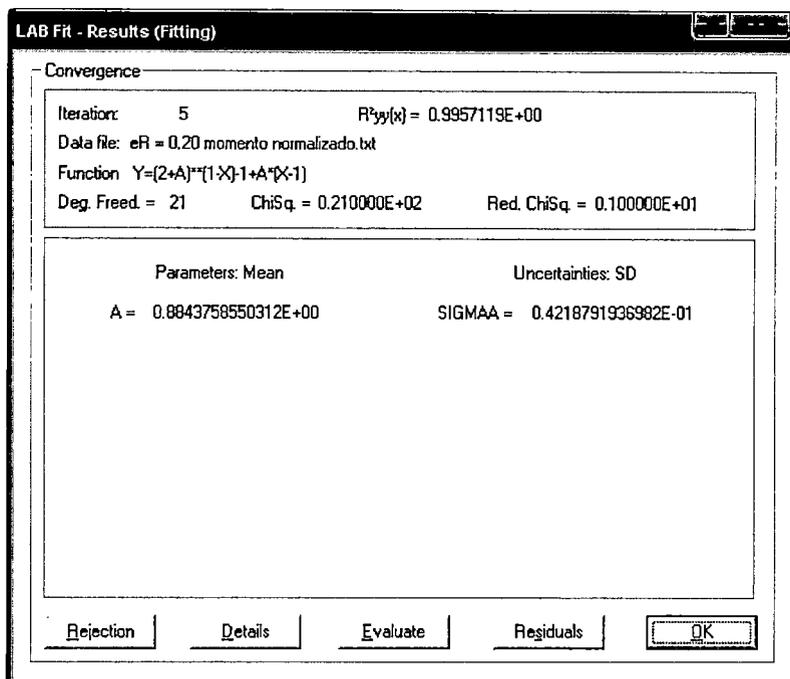


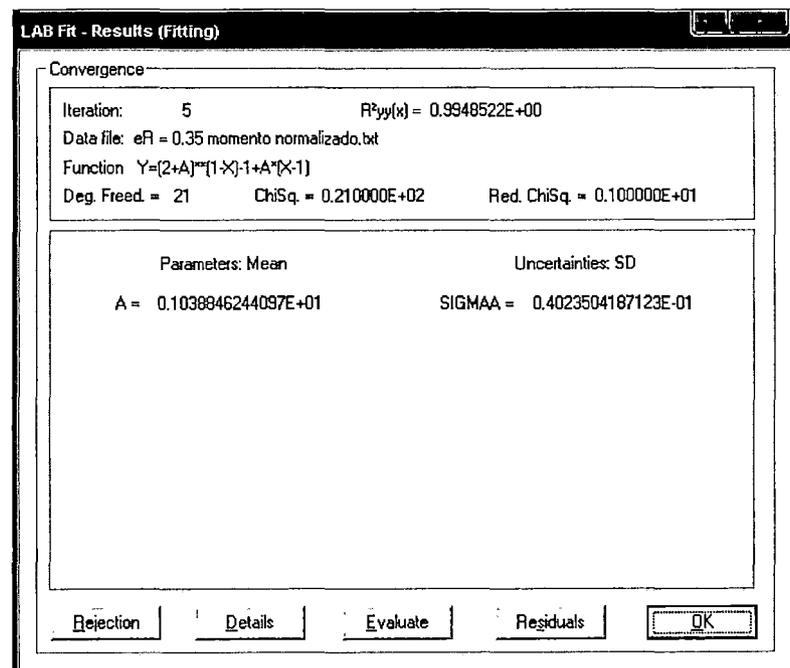
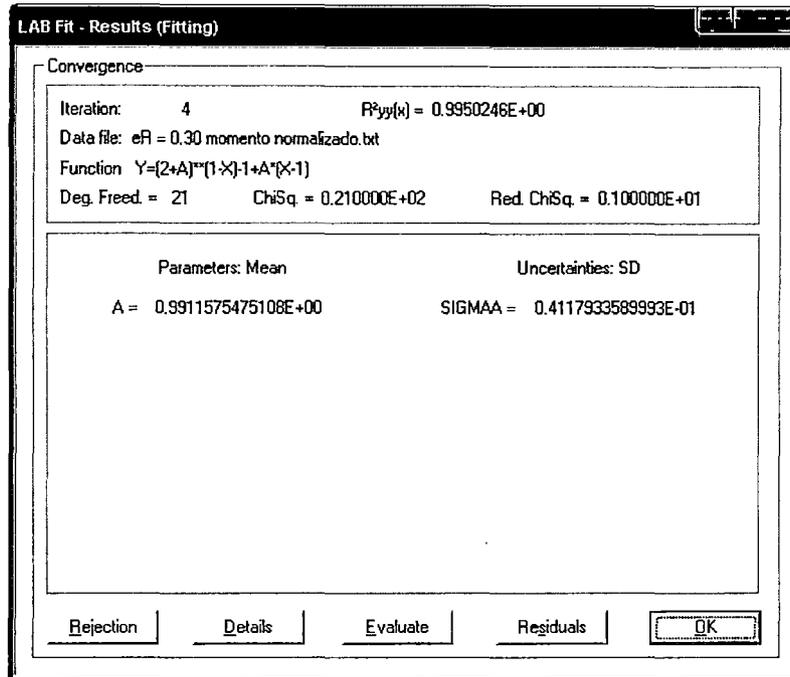
Figura H-11 Ajustes de curvas de momentos flectores unitarios











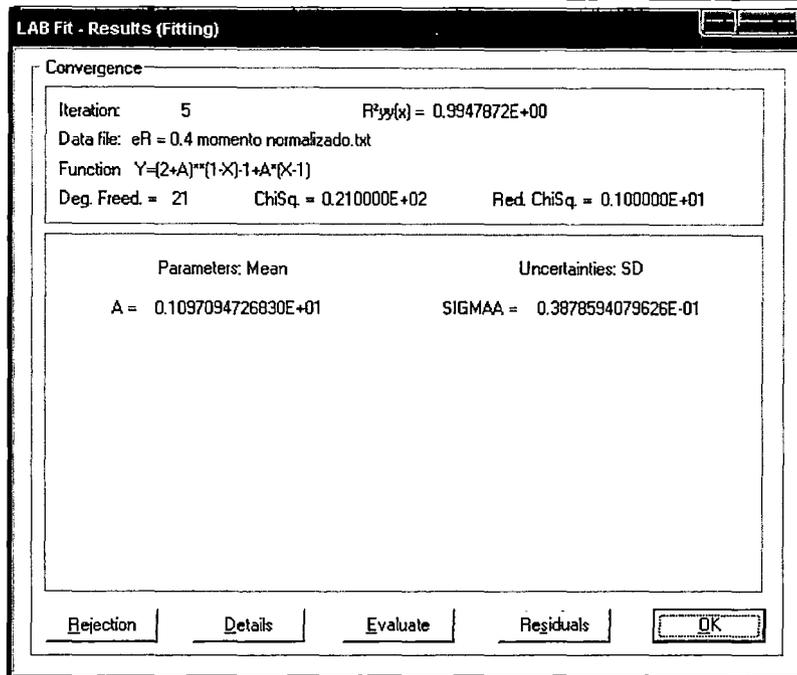


Figura H-12 Resultados de correlación del ajuste de la Función momento flector unitario

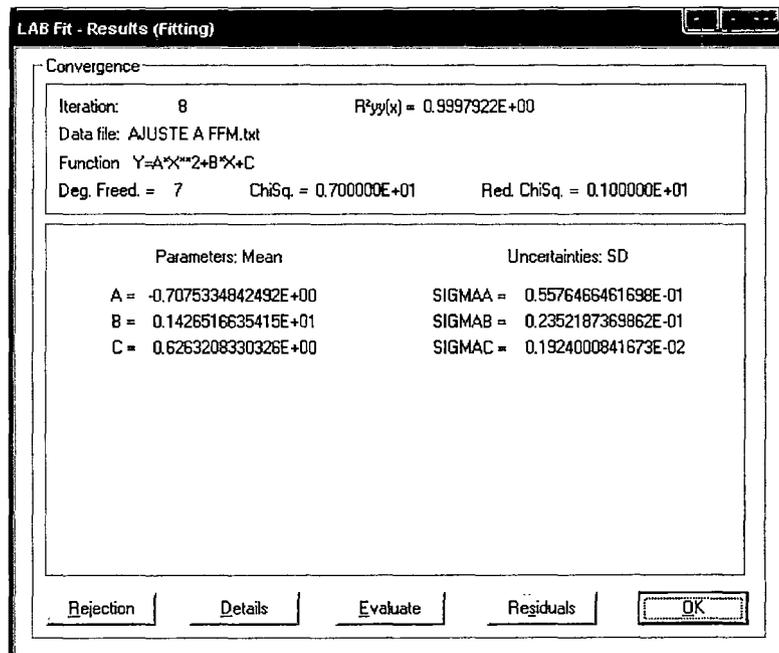


Figura H-13 Resultados de correlación del ajuste de la variable literal A para la Función momento flector unitario

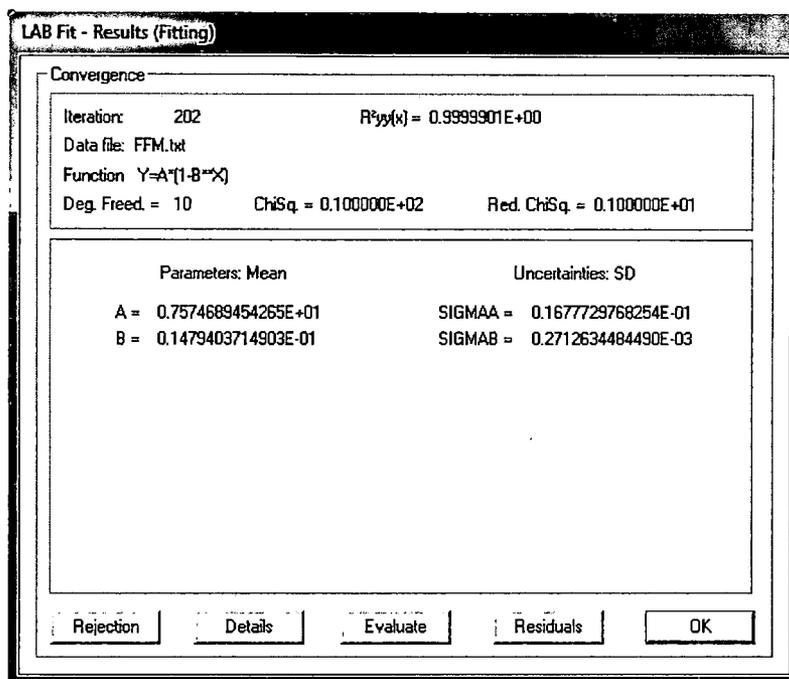


Figura H-14 Resultados de correlación del ajuste de los máximos momentos flectores adimensionales