

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**



**RESPUESTA INELASTICA DE PORTICOS  
PLANOS BAJO SOLICITACION SISMICA**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:**

**INGENIERO CIVIL**

**LEONARDO FLORES GONZALEZ**

**LIMA-PERU**

**2004**

**Digitalizado por:**

**Consortio Digital del  
Conocimiento MebLatam,  
Hemisferio y Dalse**

Dedico este trabajo a mi  
Madre, por su compañía,  
amistad y aliento constante.

## **Agradecimientos**

Agradezco al Doctor Javier Piqué del Pozo, por la asesoría y revisión del presente trabajo, al Doctor Gonzalo Vásquez Chicata por sus consejos y sugerencias. En general a todas las personas que de una u otra forma colaboraron en la elaboración de este estudio.

# Sumario

En el presente estudio se hace una revisión del análisis inelástico de estructuras de concreto armado, se comentan algunas limitaciones y consideraciones de este análisis. Se presenta conceptos de energía para el control de la estabilidad numérica en algoritmos de análisis dinámicos inelásticos y se comenta sobre la formulación de la matriz de rigidez del elemento viga-columna; esta matriz incluye un modelo de penetración de fluencia, para considerar la plasticidad a lo largo del elemento.

Asimismo, se utiliza el análisis estático inelástico, para determinar las propiedades de fluencia globales de pórticos de concreto armado; se incluyen análisis dinámicos inelásticos para determinar factores de reducción de fuerzas tanto a nivel local como nivel global, considerando la influencia de la longitud de vano en cada pórtico. Se analiza la influencia de los modelos histéresis en la respuesta dinámica de los pórticos.

Se incluyen apéndices donde se encuentran algunas demostraciones de temas vinculados a la solución de algoritmos de análisis inelásticos, así como complementos teóricos de cada capítulo.

# Indice

Dedicatoria	i
Agradecimientos	ii
Sumario	iii
Indice	iv

## Capítulo I Introducción

1.1	Generalidades	1
1.2	Objetivos de la investigación	2
1.3	Revisión de trabajos anteriores	3
1.4	Organización de la tesis	7

## Capítulo II Ductilidad y Modelos Inelásticos

2.1	Generalidades	9
2.2	Conceptos Básicos	10
2.3	Modelos para el análisis estructural	17
2.3.1	Modelos simplificados	17
2.3.2	Modelos de plasticidad concentrada	18
2.3.3	Modelo multi-resortes generalizado o de Takizawa	20
2.3.4	Modelos de elementos finitos	21
2.3.5	Modelos de fibra	21
2.4	Modelos de histerésis	22
2.4.1	Modelo Bilineal	23
2.4.2	Modelo de rigidez degradante de Clough	24
2.4.3	Modelo de rigidez degradante de Takeda	25
2.4.4	Modelo Ramberg-Osgood	28
2.4.5	Modelo Trilineal degradante	29

2.4.6	Modelo de histéresis de Park	30
2.4.7	Modelo de histéresis suavizado	31
2.4.8	Modelo de Kelvin	32
2.4.9	Modelo de Maxwell	32

## Capítulo III Limitaciones y consideraciones sobre el análisis elástico e inelástico

3.1	Consideraciones sobre el análisis elástico tiempo-historia	36
3.1.1	Relación entre el operador de Green y la Integral de Duhamel	37
3.2	Consideraciones sobre el análisis estático inelástico	38
3.3	Consideraciones sobre el análisis inelástico tiempo-historia	39
3.3.1	Linealización	40
3.3.2	Estabilidad	41
3.3.2.1	Estabilidad de la solución de una ecuación diferencial	42
3.3.2.2	Comentarios sobre algunos trabajos de estabilidad	43
3.3.2.3	Aproximación mediante soluciones de ecuaciones en diferencias	45
3.3.2.4	Estabilidad numérica	45
3.3.2.5	Estabilidad por energía	46
3.3.2.6	Resumen	48

## Capítulo IV Fundamento teórico del modelo utilizado

4.1	Hipótesis básicas del modelo utilizado	50
4.2	Formulación de la matriz de rigidez local de cada elemento	51
4.3	Matriz de rigidez de piso	57
4.4	Matriz de rigidez de la estructura	58
4.5	Cálculo de las curvaturas	58
4.6	Método de determinación de la fuerza de corrección	58
4.6.1	Incrementos de fuerza	59
4.6.2	Desbalance del equilibrio	61
4.7	Análisis Incremental	62

4.8	Análisis estático inelástico con fuerzas laterales	63
4.8.1	Método Lineal	63
4.8.2	Método de la Potencia	64
4.8.3	Método Modal Adaptativo	65
4.9	Análisis de valores y vectores propios	66
4.10	Matriz de amortiguamiento de la estructura	67
4.11	Análisis dinámico inelástico	68
4.12	Balance de energía	70

## Capítulo V Propiedades de los pórticos propuestos para el estudio de la respuesta inelástica

5.1	Definición de pórticos	71
5.2	Metodología para la definición de pórticos	76
5.3	Registros sísmicos considerados	76
5.4	Propiedades inelásticas de los pórticos	78
5.4.1	Métodos para la obtención de las curvas esqueléticas de vigas	78
5.4.2	Determinación del momento de agrietamiento en las columnas	79
5.4.3	Valores de las propiedades inelásticas de los pórticos	80

## Capítulo VI Estudio de la Respuesta Inelástica

6.1	Análisis elástico tiempo-historia	87
6.1.1	Resumen del análisis tiempo-historia-vigas	87
6.1.2	Resumen del análisis tiempo-historia-columnas	89
6.1.3	Resumen de las aceleraciones y desplazamientos de cada piso	89
6.1.4	Resumen de desplazamientos de entrepiso y fuerzas cortantes de piso	92
6.2	Análisis estático no lineal	98
6.2.1	Resultados del análisis en vigas	98
6.2.2	Resultados del análisis en columnas	101
6.2.3	Desplazamiento de entrepiso versus fuerza cortante de cada piso	102
6.2.4	Desplazamiento del último piso versus la fuerza cortante en la base	108

6.2.5	Puntos de fluencia de cada piso y de cada pórtico	109
6.2.6	Mecanismos de falla	111
6.3	Análisis inelástico tiempo-historia	113
6.3.1	Resumen del análisis tiempo-historia-vigas	113
6.3.2	Resumen del análisis tiempo-historia-columns	116
6.3.3	Resumen de las aceleraciones y desplazamientos de cada piso	117
6.3.4	Resumen de los desplazamientos de entrepiso y fuerzas cortantes de piso	124
6.3.5	Resumen de las ductilidades de cada elemento	132
6.3.6	Factores R de los elementos	134
6.3.7	Relaciones entre los desplazamientos y aceleraciones	135
6.3.8	Ductilidades requeridas por piso en cada pórtico	136
6.3.9	Factores R por piso	136
6.3.10	Factores R globales	137
6.3.11	Lugares donde ocurrieron rótulas plásticas	138
6.3.12	Intervalos de tiempo donde ocurrieron rótulas plásticas	140

## Capítulo VII Conclusiones y Recomendaciones

7.1	Conclusiones	141
7.1.1	Análisis dinámico elástico	141
7.1.2	Análisis estático inelástico	142
7.1.3	Análisis dinámico inelástico	143
7.2	Recomendaciones	145

<b>Bibliografía</b>		146
---------------------	--	-----

## Apéndices

<b>Apéndice A</b>	Diagrama de flujo del programa Curvatura	153
<b>Apéndice B</b>	Deducción del operador de Green	154
<b>Apéndice C</b>	Estabilidad del método de Newmark	159
<b>Apéndice D</b>	Definiciones y Teoremas	163



<b>Apéndice E</b>	Modelo de penetración de fluencia	167
<b>Apéndice F</b>	Cálculo de curvaturas con IDARC	169
<b>Apéndice G</b>	Validación de datos del programa CURVATURA	172
<b>Apéndice H</b>	Breve descripción de las rutinas principales de IDARC	173
<b>Apéndice I</b>	Pseudo-código de rutinas de histéresis	174
<b>Apéndice J</b>	Diagrama de dependencias de IDARC	177
<b>Apéndice K</b>	Comentarios sobre algunos programas de análisis inelástico	178
<b>Apéndice L</b>	Programa generador de reportes y programa de simulación	180
<b>Apéndice M</b>	Mecanismos de falla del análisis inelástico tiempo historia	182
<b>Apéndice N</b>	Superficies tiempo historia	191

# Capítulo I

## Introducción

### 1.1 Generalidades

La norma peruana de diseño sísmico considera un análisis elástico para la determinación de las fuerzas de diseño de los elementos estructurales, utilizando para esto factores de carga y seguridad, con los valores del análisis elástico se procede al diseño de las secciones de los elementos de concreto armado, usando el método de la rotura, con el que se calculan los momentos últimos considerando que las secciones de concreto dejan de estar en el rango elástico; es decir, se hace un análisis elástico y un diseño inelástico. De esta manera los códigos de diseño sismo-resistente proponen una forma simplificada de evaluar las fuerzas a las que estaría sometida la estructura durante un sismo severo; reducen también la fuerza sísmica, para considerar la disipación de energía que una estructura presenta durante un evento sísmico; sin embargo, no consideran en forma explícita algunos parámetros que influyen en el comportamiento inelástico de la estructura, como el período fundamental y la disipación de energía que puede ocurrir en ésta, debido a la ductilidad con la que están dotados sus elementos estructurales.

Una estructura de concreto armado presenta inevitablemente un comportamiento inelástico durante un sismo severo; por lo que es necesario un monitoreo del comportamiento global de la estructura y local de los elementos, sobre todo si se emplea un programa de análisis inelástico paso a paso, ya que podrían existir elementos que han excedido su capacidad de ductilidad o se ha producido un mecanismo de falla en la estructura.

Es conveniente ver también la influencia de los modelos de histéresis en el comportamiento tanto global como local de la estructura, ya que de ellos depende la disipación de energía; estudiar la influencia en el comportamiento inelástico de parámetros como por ejemplo el período fundamental de una estructura durante la excitación sísmica.

No está demás indicar que una estructura deberá tener un comportamiento dúctil frente a un sismo con el fin de evitar el colapso de la misma y salvaguardar la vida humana. Con tal motivo es necesario diseñar adecuadamente los elementos cercanos a los lugares donde probablemente ocurran rótulas plásticas, de manera que éstos puedan presentar un comportamiento elástico todo el tiempo, distinguir las regiones inelásticas y elásticas de la estructura; es importante el detallado para la construcción de las regiones plásticas de la estructura.

Los modelos matemáticos para el estudio de la respuesta inelástica de un pórtico durante un movimiento sísmico, son el resultado de numerosos experimentos, ellos resaltan los aspectos más importantes del fenómeno físico; sin embargo, se comenta poco acerca de la formalización de estos modelos, no se indica mucho acerca de los errores numéricos o de método que cometemos al tratar de resolverlos y las situaciones en que no se pueden resolver en forma analítica; por esta razón es importante la formalización del modelo, para poder predecir comportamientos similares a la realidad. Es indispensable que se comprueben las hipótesis asumidas para la elaboración del modelo y conozcamos también sus limitaciones.

## **1.2 Objetivos de la investigación**

Los objetivos de esta investigación son los siguientes:

- Estudio de la influencia del período fundamental de la estructura en la respuesta estática y dinámica inelástica.
- Evaluación de momentos flectores y ductilidades últimas de pórticos de concreto armado, obtenidos de análisis dinámicos inelásticos y análisis dinámicos elásticos.
- Comparación de las fuerzas cortantes y desplazamientos de entrepiso, obtenidos de un análisis dinámico inelástico y de un análisis dinámico elástico.
- Generalización de la integral de Duhamel a través del operador de Green.

- Revisión de conceptos utilizados en el modelamiento matemático del análisis inelástico.

### **1.3 Revisión de trabajos anteriores**

En lo que sigue se presenta un resumen de diferentes trabajos realizados anteriormente, cuyo contenido está relacionado a la respuesta inelástica de pórticos de concreto armado.

Como dato histórico se sabe que la respuesta inelástica de pórticos de concreto armado comenzó a ser estudiada a mediados del siglo XX, se considera el precursor de estos métodos a Newmark, pues introduce soluciones numéricas que más adelante con el advenimiento de los ordenadores alcanzaron un notable desarrollo.

Entre los trabajos más destacables, tenemos el estudio de un sistema de un grado de libertad con comportamiento elastoplástico sometido al sismo del Centro realizado por Penzien [1960] (50), en este trabajo se analiza la influencia que tiene el período fundamental de la estructura, la resistencia última y el amortiguamiento en la respuesta inelástica del sistema.

Veletsos y Newmark [1960] (73), realizan un estudio de sistemas de un grado de libertad sometidos al registro del Centro (1940).

Un trabajo destacable es el realizado por Clough, Benuska y Wilson (1965) (15), en el que se estudia el comportamiento de ciertos parámetros como el período fundamental, la ductilidad de diseño y la altura en la respuesta inelástica de edificios, se concluye que el parámetro más importante es el período fundamental de la estructura, sobre todo en las respuestas máximas de desplazamientos de piso y esfuerzos de los elementos.

En 1966 Clough y Benuska (14), estudian el comportamiento no lineal de edificios, evalúan los requerimientos de ductilidad de los elementos de un edificio

alto sometido a un sismo severo, se estudia también los parámetros que afectan la distribución de ductilidad en los elementos.

Kanaan y Powell (32), desarrollan en 1973 el programa DRAIN2D que resuelve casos generales de pórticos planos sometidos a sismos, en este programa se utiliza el concepto de ductilidad por rotación, el programa considera el cambio de la fuerza axial en las columnas durante un sismo utilizando superficies de fluencia.

En 1981 Shunsuke Otani (45), estudia el efecto de diferentes valores de rigidez y el de modelos de histéresis, sobre la respuesta sísmica de sistemas de un grado de libertad.

En los años 1990-1991 Silvana Cominetti (21,22), bajo la dirección de Ernesto Cruz estudian la influencia de diferentes parámetros tales como el efecto de la distribución en altura de masas y rigideces, los criterios de diseño, etc., en la respuesta inelástica de pórticos planos, llegando a la conclusión de que una disminución de masas y rigideces en altura genera aumentos de las demandas de ductilidad en las vigas de pisos inferiores y una disminución en las vigas de los pisos superiores.

En 1991 Fabio Taucer Enrico Spacone y Filip C. Filippou (66), desarrollan un elemento fibra (viga-columna) para el análisis de la respuesta sísmica de estructuras de concreto armado, la mejora que presenta este elemento es que la relación entre el momento de fluencia y la fuerza axial puede ser establecida por integración de las fuerzas axiales de las fibras.

Más tarde en 1992 Kanaan, Powell y Filippou (55), desarrollan el programa DRAIN-2DX, una versión parecida al DRAIN-2D para PC, en este se agregan propiedades inelásticas a nudos de conexión, persiste el problema de no entregar ductilidades.

En 1992 José Valdivia Núñez (70), presenta un procedimiento de Análisis dinámico inelástico paso a paso usando un sistema equivalente de un grado de

libertad, verifica la validez del modelo comparando los resultados con los programas DRAIN-2D y FRIEDA.

Gonzalo Vásquez en 1992 (72), realiza un trabajo de análisis inelástico de estructuras aporticadas, en el cual estudia espectros de diseño inelástico tipo Newmark y propone espectros de diseño inelástico para el Perú, igualmente hace un estudio de la influencia de parámetros tales como la duración del sismo, las cargas de gravedad, el nivel de aceleración, el modelo de la viga en la respuesta inelástica de pórticos planos, concluyendo que las cargas de gravedad contribuyen a una respuesta menor en los desplazamientos y una diferente respuesta local en los pisos superiores de los pórticos estudiados, utiliza los programas INDRA, DRAIN y FRIEDA.

En 1993 Peter Linde (37), realiza un estudio de placas y muros de concreto armado orientado al desarrollo de un macromodelo, el cual puede simular el comportamiento no lineal de un panel.

En 1994 Keh-Chyuan Tsai y Jeng-Wei Li (68), desarrollan una versión del programa DRAIN llamada DRAIN-2D+, en el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Taiwán, el programa incluye métodos de integración implícita en el análisis estático inelástico, la integración de la ecuación diferencial de movimiento la trabaja con métodos de predicción y corrección que mejoran el algoritmo de Newmark, este método permite una reducción sustancial en el tiempo de ejecución del programa cuando la rigidez global de la estructura no varía mucho. Así se han venido desarrollando diferentes versiones del DRAIN (DRAIN-3DX), estas últimas en la Universidad de California en Berkeley.

En 1996 A.M. Reinhorn, R.E. Valles-Mattox y S.K. Kunnath (57), efectúan un estudio de evaluación del daño sísmico de un edificio típico en los Estados Unidos, se desarrolla una metodología unificada que puede ser utilizada en varios tipos de edificios y en diferentes regiones geográficas. Se estudia la respuesta de edificios de concreto armado no dúctiles y edificios de albañilería no reforzada.

En 1996 R. E. Valles, A. M. Reinhorn, S. K. Kunnath, C. Li, and A. Madan (71), desarrollan el programa IDARC en el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Buffalo, el programa entrega las respuestas a nivel de ductilidades por curvaturas y utiliza un modelo de histéresis llamado el de los tres parámetros de Park, con el cual se pueden reproducir modelos orientados al vértice, modelos bilineales y trilineales, lo que es una notable mejora sobre el programa DRAIN-2DX; sin embargo, considera que la carga axial que actúa en las columnas permanece constante, lo que no resulta del todo cierto.

En la 7ª Conferencia Mundial de Ingeniería Antisísmica, se presentan varios trabajos relacionados con el estudio del comportamiento inelástico, resaltando el trabajo de Zhiqian y Shuzhen (75), quienes estudian la respuesta elastoplástica de edificios de varios pisos con comportamiento de viga de corte, para esto hacen variar el período fundamental de la estructura y someten a la estructura a diversas excitaciones sísmicas.

Eduardo A. Fierro y Cyntia L. Perry (23), realizan un trabajo para establecer un método confiable que relacione la resistencia de diseño con la demanda de ductilidad, establecen relaciones de daño contra ductilidad; el estudio se lleva a cabo con la ayuda de sistemas de un grado de libertad de diferentes períodos de vibración y diferentes valores de amortiguamiento crítico, así como diferentes registros sísmicos, para esto utilizan el programa NONLIN; una conclusión importante es que las estructuras con períodos largos son menos sensibles a las características de un movimiento sísmico que las estructuras de período corto.

Así mismo existe información de [UBC-1994] (69), para edificaciones de concreto armado, en éstas se da importancia al detallado de las regiones plásticas de la estructura, sobre todo se dan conceptos que garanticen un diseño con características dúctiles.

Existen criterios para determinar las curvas del comportamiento del material tanto para vigas como para columnas, así como determinar una posible longitud de plastificación [ATC-40] (2).

## 1.4 Organización de la tesis

En el Capítulo II, se presentan conceptos básicos del análisis inelástico de estructuras, algunos modelos estructurales así como un resumen de modelos de histéresis, se indican los algoritmos para la obtención de las relaciones fuerza-deformación unitaria de las secciones de los elementos de concreto armado.

En el Capítulo III, se comenta acerca de consideraciones y algunas limitaciones del análisis elástico tiempo historia, el análisis inelástico estático y dinámico, se indican y comentan algunos teoremas útiles para formalizar los procesos de linealización y estabilidad de las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento inelástico, se comenta sobre algunos trabajos destacables en la formalización de los modelos inelásticos, se dan conceptos de energía de ingreso y energía total de un sistema dinámico.

El Capítulo IV, trata del desarrollo del modelo matemático que utiliza el programa IDARC, se describe el método de análisis inelástico tiempo-historia, se comenta sobre el desbalance de fuerza que se produce en cada evento debido a la no linealidad del material.

En el Capítulo V, se define el juego de pórticos que se utiliza para el estudio de la respuesta inelástica, se indica la forma en que fueron diseñados y se entregan las propiedades inelásticas de las secciones, así como los períodos fundamentales de los pórticos en estudio.

En el Capítulo VI, se realiza el análisis estático inelástico para determinar las propiedades de fluencia globales de los pórticos, se comparan los resultados del análisis inelástico tiempo-historia y el análisis elástico tiempo-historia, se elaboran tablas de las fuerzas cortantes y desplazamientos máximos de entrepiso, se comenta sobre los mecanismos de falla y diagramas de histéresis a nivel de piso y a nivel de cada elemento.



En el Capítulo VII, se entregan las principales conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

En la parte final se elabora un conjunto de apéndices, que sirven de soporte teórico a los temas desarrollados en los capítulos del presente trabajo.

# Capítulo II

## Ductilidad y Modelos Inelásticos

### 2.1 Generalidades

El objetivo de estudiar la respuesta inelástica de una estructura ocasionada por un sismo severo o cargas laterales mediante un análisis no lineal (sin considerar efectos de segundo orden), es diferenciar en la misma las regiones que pueden presentar un comportamiento elástico de las que presentan un comportamiento inelástico, para dotar éstas últimas del refuerzo necesario que haga posible el comportamiento dúctil tanto a nivel local como a nivel global.

Para identificar las regiones con comportamiento inelástico, se divide a la estructura en elementos menores (vigas, columnas, placas), estos elementos cambian del estado elástico al inelástico de acuerdo a las curvas del comportamiento del material; para saber si los elementos se encuentran en el estado elástico o inelástico, se definen puntos que son el límite de ambos estados, estos son los llamados puntos de fluencia y agrietamiento; para cuantificar el grado de inelasticidad alcanzado por un elemento se definen los factores de ductilidad.

El comportamiento de una estructura se estudia a nivel local (comportamiento de los elementos de la misma) y a nivel global (comportamiento de un piso o toda la estructura en conjunto); el comportamiento global se refleja en la matriz de rigidez de la estructura, en un análisis estático inelástico el modelo que se resuelve es:

$$K(x) = f \dots (2.1.1) \text{ donde } K : R^n \rightarrow R^n \wedge x \in R^n$$

para un análisis dinámico inelástico el modelo a resolver es:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \dots (2.1.2) \text{ donde } M, C, K : R^n \rightarrow R^n \wedge x \in R^n.$$

En ambos modelos  $K$  tiene un comportamiento no lineal, éste se debe al comportamiento no lineal local (vigas, columnas); el comportamiento no lineal local se define a partir de las curvas del material del acero y concreto; con ayuda de estas curvas se obtienen las relaciones momento-curvatura de las secciones de cada uno de los elementos. En el caso del análisis estático inelástico, el comportamiento tanto local como global puede ser representado por curvas bilineales, trilineales, etc.; a diferencia del caso estático el comportamiento dinámico inelástico presenta cambios de dirección en el moviendo lateral, para esto con ayuda de las relaciones momento-curvatura de los elementos y reglas de descarga de estas relaciones, se define el comportamiento histerético de las secciones de los elementos, el área encerrada en cada lazo de histéresis representa la energía disipada, existen diversos modelos de histéresis para representar el comportamiento de carga y descarga.

## 2.2 Conceptos Básicos

### a. Ductilidad

Propiedad de los materiales de sufrir deformaciones en el rango inelástico sin pérdida significativa de su resistencia. El factor que cuantifica esta propiedad se llama **factor de ductilidad**, este factor se define como la relación entre la deformación última y la deformación de fluencia.

En las estructuras es necesario medir la ductilidad tanto en forma local (elementos de concreto armado) como a nivel global (ductilidad de cada piso). Con tal motivo existen varias definiciones para los factores de ductilidad.

### b. Factor de Ductilidad por desplazamiento

Se mide con la relación  $\mu = \frac{\Delta_{m\acute{a}x}}{\Delta_y} \dots (2.2.1)$ , donde  $\Delta_{m\acute{a}x}$  es el desplazamiento máximo de piso y  $\Delta_y$  el desplazamiento de fluencia del piso, este criterio es útil para medir la ductilidad global.

### c. Factor de Ductilidad por Curvatura

Mide la relación  $\mu = \frac{\varphi_u}{\varphi_y} \dots (2.2.2)$ , la curvatura es  $\varphi = \frac{1}{R} \dots (2.2.3)$ , donde

$R$  es el radio de curvatura,  $\varphi_u$  curvatura última y  $\varphi_y$  la curvatura de fluencia.

En general, la rigidez inicial en vigas se puede considerar  $EI = \frac{M}{\varphi} \dots (2.2.4)$ , que es la ecuación diferencial de la elástica, para concreto

armado se deduce la siguiente expresión  $\varphi = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} \dots (2.2.5)$ . Debido a la aparición de grietas a lo largo del elemento estructural, la altura del eje neutro no se mantiene constante (por las incursiones del mismo en el rango inelástico), por consiguiente la curvatura varía a lo largo del elemento. En el presente trabajo se determinó la relación momento curvatura con ayuda del programa **CURVATURA** (elaborado en Visual Foxpro), desarrollado para este estudio siguiendo la secuencia de cálculo propuesta en (48).

Pasos a seguir:

1. Ingresar  $\Delta\varepsilon_{cm}$  y  $\varepsilon_{cm}$  inicial,  $\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cm} \frac{kd - d_i}{kd}$ ,  $S_i = f_{si} A_{si}$  y  $C_c = \alpha f'_c bkd$ .

$$2. \quad \alpha = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c}{f'_c \varepsilon_{cm}}, \quad f_c = \begin{cases} f'_c \left( \frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) & \text{si } 0 \leq \varepsilon_c \leq 0.002 \\ f'_c (1 - 100(\varepsilon_c - \varepsilon_0)) & \text{si } 0.002 < \varepsilon_c \leq 0.003 \end{cases}$$

$$3. \quad \gamma = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c f_c d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c}$$

$$4. \quad P = C_c + \sum_{i=1}^n S_i, \quad M = C_c \left( \frac{h}{2} - \gamma kd \right) + \sum_{i=1}^n S_i \left( \frac{h}{2} - d_i \right) \text{ y } \varphi = \frac{\varepsilon_{cm}}{kd}$$

5. Incrementar  $\varepsilon_{cm} = \varepsilon_{cm} + \Delta\varepsilon_{cm}$ , repetir 2, 3 y 4 hasta que  $\varepsilon_{cm} > 0.003$ .

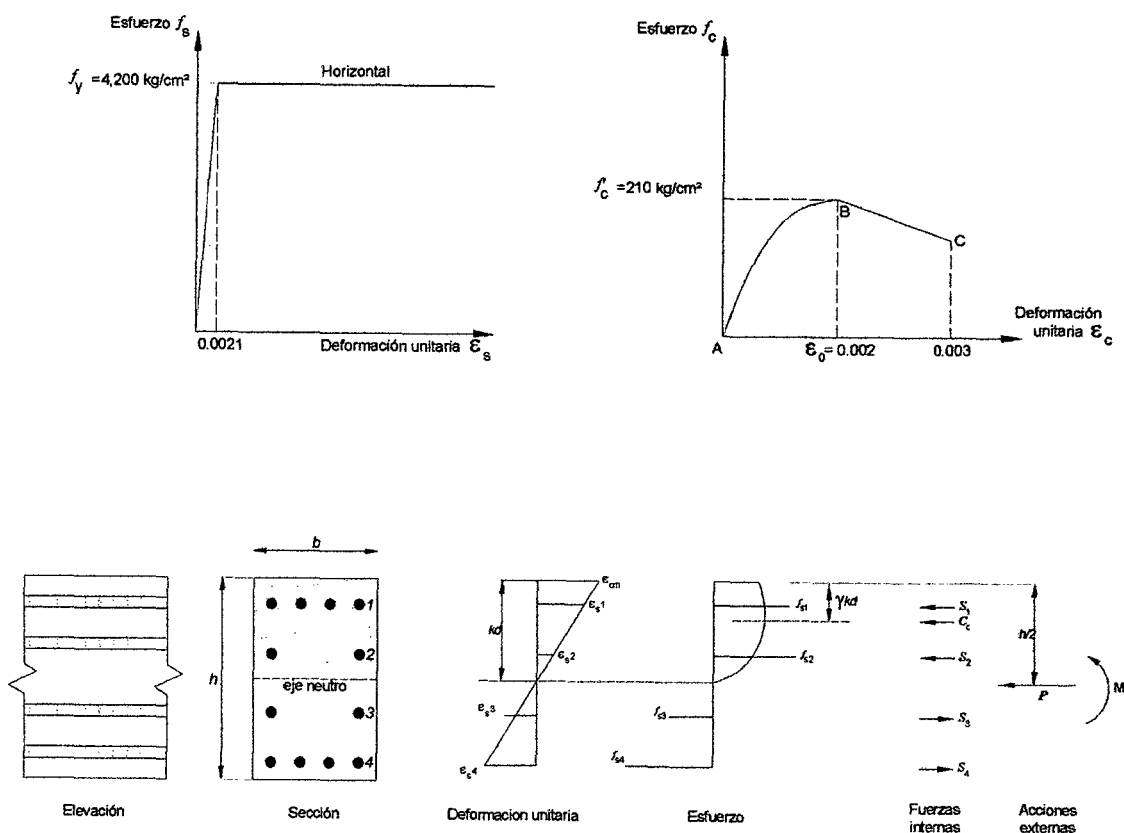


Figura 2.2 Esfuerzos y deformaciones de una sección de concreto armado

La deformación unitaria de la  $i$ -ésima fila de aceros es  $\varepsilon_{si}$ ,  $\varepsilon_c$  es la deformación unitaria del concreto,  $\varepsilon_{cm}$  es la deformación unitaria del concreto en la fibra extrema,  $d$  el peralte del elemento de concreto,  $f_{si}$  el esfuerzo de la  $i$ -ésima fila de aceros,  $kd$  la ubicación del eje neutro,  $f'_c$  es la resistencia máxima del concreto,  $f_c$  es la resistencia del concreto debida a  $\varepsilon_c$ ,  $\varphi$  es la curvatura,  $P$  y  $M$  son la fuerza axial y el momento flector del elemento de concreto armado.

Para otros detalles del programa ver apéndice A. El paso 4 del algoritmo anterior indica que las curvaturas dependen del nivel de carga axial, este hecho puede ser tratado con el uso de superficies de interacción para el análisis inelástico (11, 32, 53, 54).

#### d. Factor Ductilidad por momentos

Es una consecuencia de la ductilidad por curvatura, se utiliza en programas de análisis inelástico donde los modelos son Bilineales. Dado  $\mu = 1 + \frac{\varphi - \varphi_y}{\varphi_y} \dots (2.2.6)$ ,

si el diagrama es Trilineal se tiene la siguiente ecuación:

$$\mu = 1 + \frac{(M - M_y)/(TP)}{M_y/(PP)} = 1 + \frac{M - M_y}{\rho M_y} \dots (2.2.7), \quad \text{donde } \rho = \frac{TP}{PP}; \quad TP, PP \text{ se}$$

refieren a la tercera y primera pendiente, la intersección de la primera línea con la tercera línea de la curva del material, es la **fluencia aparente** (72).

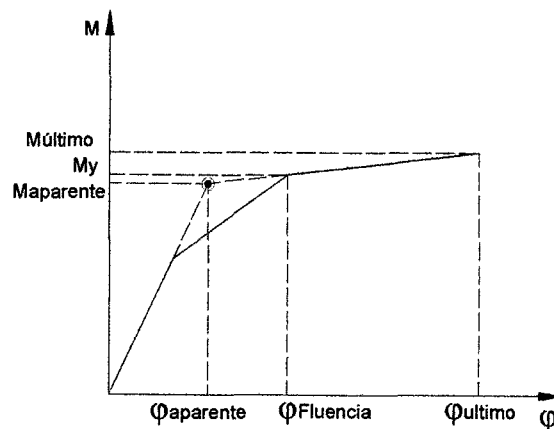


Figura 2.3 Fluencia aparente

#### e. Factor de Ductilidad por rotación

Se utiliza en programas que no indican relación momento-curvatura (DRAIN-2DX, SAP2000 por ejemplo), el factor de ductilidad se define de la siguiente manera

$$\mu = 1 + \frac{\theta_{plástico}}{\theta_y} \dots (2.2.8), \quad \text{existen expresiones y estudios al respecto, por ejemplo}$$

(22) propone el cálculo de dicho factor para vigas, en el presente capítulo se propone una fórmula para columnas, en ambos casos se supone doble curvatura de los elementos estructurales y las expresiones se obtienen a partir de las ecuaciones del método de pendiente deflexión. Este factor de ductilidad es limitado ya que no necesariamente será un único  $\theta_y$  el giro de fluencia de una sección, éste dependerá

de la distribución de fuerzas en la estructura, por lo que se recomienda tomar un valor promedio con fines de medida; notar que las fórmulas deducidas de la misma manera que en (22), no indican que pasaría si la curvatura es simple, triple, etc.

Existen otros factores para medir las ductilidades como por ejemplo la ductilidad de rotación acumulada  $\mu = \frac{\theta_{acumulado}}{\theta_y} \dots (2.2.9)$ , donde el giro será acumulado, este factor puede dar una idea de la cantidad de veces que la sección incursiona en el rango inelástico (53).

#### **f. Sobre la rotación de fluencia ( $\theta_y$ )**

Las vigas pueden ser modeladas con modelos de rótulas plásticas concentradas, modelos de plasticidad distribuida, u otros modelos que pueden representar el comportamiento de éstas por carga lateral o sismo.

Las relaciones monotónicas carga-deformación pueden estar de acuerdo a la relación generalizada mostrada en la figura (2.4). Valores en los puntos B, C, y E pueden ser deducidos en base a resultados experimentales o análisis inelástico. Las propiedades del comportamiento en flexión de las rótulas plásticas pueden ser definidas por tablas (2), éstas recomiendan valores para los parámetros a, b, c, d y e.

Las columnas pueden ser modeladas con modelos de rótulas plásticas puntuales, modelos fibra, u otros modelos de manera similar a las vigas teniendo en cuenta la carga axial, se recomienda modelos fibra (32, 54).

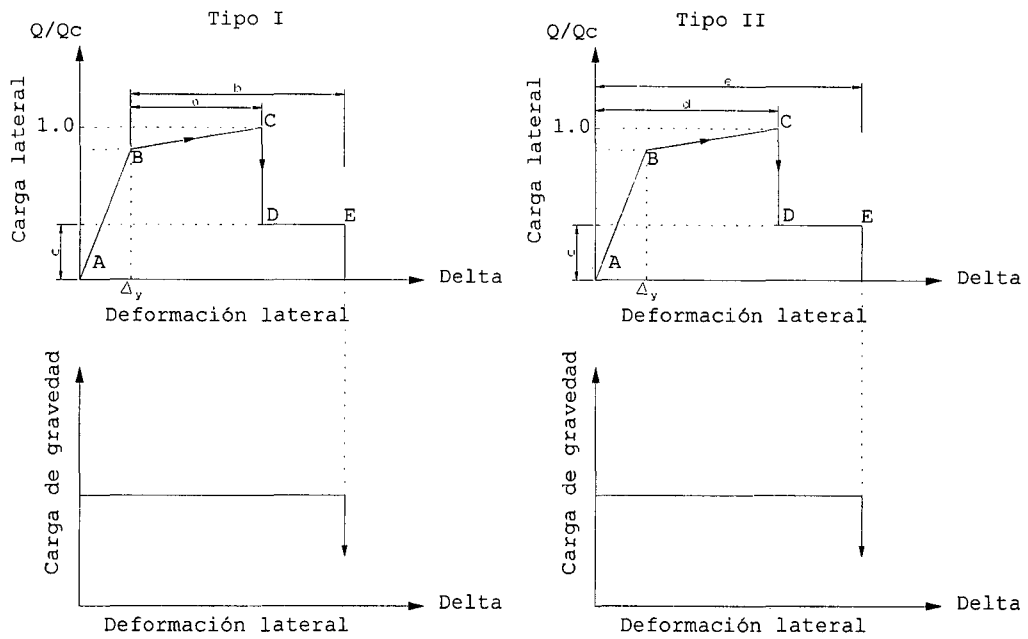


Figura 2.4 Relaciones fuerza-deformación propuestas por ATC-40

**g. Obtención del giro de fluencia**

Se supone que la estructura está sometida a cargas laterales. La suposición de cargas laterales indica que los elementos tendrán curvatura doble:

$$\theta = \frac{ML}{6EI} \dots (2.2.10)$$

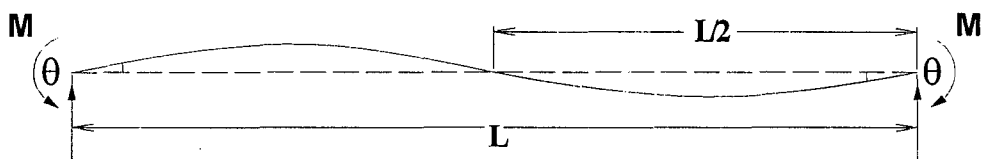


Figura 2.5 Doble Curvatura

donde:

L = longitud del elemento.

EI = rigidez de flexión de la sección.



Cuando recién se alcanza la fluencia en los extremos,  $\theta = \theta_y$  y  $M = M_y$ , donde  $M_y$  es el momento de fluencia. El giro de fluencia es  $\theta_y = \frac{\varphi \cdot l}{6} \dots (2.2.11)$ .

Una rotación adicional en los extremos del elemento impone rotación plástica  $\theta_p = (\varphi_u - \varphi_y)l_p \dots (2.2.12)$ .

De acuerdo a las ecuaciones de pendiente-deflexión se tiene:

$$M_a = \frac{2EI}{L} \cdot (2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L}) \dots (2.2.13) \quad \text{y} \quad M_b = \frac{2EI}{L} \cdot (2\theta_b + \theta_a - \frac{3\Delta}{L}) \dots (2.2.14)$$

entonces  $\frac{M_a}{M_b} = K_1 \dots (2.2.15)$  y  $\frac{\Delta}{L \cdot (\theta_a + \theta_b)} = K_2 \dots (2.2.16)$ .

Si la fluencia ocurre en **a**,  $M_a = M_y$  entonces:

$$\frac{2EI}{L} \cdot \left\{ 2\theta_y + \theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right\} = M_y \dots (2.2.17), \quad \frac{2EI}{L} \cdot \left\{ 2\theta_b + \theta_y - \frac{3\Delta}{L} \right\} = \frac{M_y}{K_1} \dots (2.2.18),$$

luego se puede obtener las siguientes relaciones:

$$2\theta_y + \theta_b - 3K_2(\theta_y + \theta_b) = \frac{LM_y}{2EI} \dots (2.2.19)$$

$$\theta_y + 2 \cdot \theta_b - 3K_2(\theta_y + \theta_b) = \frac{LM_y}{2EIK_1} \dots (2.2.20)$$

de donde se tiene el sistema: 
$$\begin{bmatrix} 2-3K_2 & 1-3K_2 \\ 1-3K_2 & 2-3K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_y \\ \theta_b \end{bmatrix} = \frac{M_y L}{2EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ K_1 \end{bmatrix} \dots (2.2.21),$$

resolviendo el sistema se tiene:

$$\theta_y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3K_2 \\ 1/K_1 & 2-3K_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-3K_2 & 1-3K_2 \\ 1-3K_2 & 2-3K_2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{M_y L}{2EI} \dots (2.2.22)$$

desarrollando la expresión tanto para vigas ( $K_1 = 1$  y  $K_2 = 0$ ) como para columnas,

tenemos que  $\theta_y = \frac{ML}{6EI} \dots (2.2.23)$  indica el giro de fluencia en el caso de vigas y la

expresión 
$$\theta_y = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\left( 2 - 3K_2 - \frac{1 - 3K_2}{K_1} \right)}{(2 - 3K_2)^2 - (1 - 3K_2)^2} \right] \frac{ML}{EI} \dots (2.2.24)$$
 indica el giro de

fluencia para columnas.

Para obtener mejores valores se puede ver el giro de fluencia en varios pórticos y tomar un promedio, (2.2.23) y (2.2.24) son útiles siempre y cuando los elementos analizados presenten doble curvatura.

### 2.3 Modelos para el análisis estructural

Para el estudio de la respuesta dinámica de una estructura de varios pisos, se utilizan modelos simplificados de la misma con el fin de obtener un modelo matemático que pueda ser estudiado con las técnicas de análisis numérico conocidas. La selección adecuada de un modelo, dependerá del grado de exactitud que se requiera en la respuesta dinámica.

Cronológicamente se sabe que los modelos que primero aparecieron son los modelos de plasticidad concentrada. Finalmente hoy en día se tiene modelos de no linealidad distribuida, modelos de fibra y elementos finitos.

#### 2.3.1 Modelos simplificados

Conocidos también como modelos tipo cortante. El **modelo de corte** sustituye el ensamblaje de los elementos (vigas, columnas) en un sólo elemento que será la rigidez lateral del piso, si se trata de un pórtico bidimensional se tendrá solo un grado de libertad por piso y en un modelo tridimensional tres grados de libertad por piso.

Existen otros modelos como el **modelo de corte flexión** (útil para pórticos de mucha rigidez y poca masa), el modelo Piqué-Roesset (70, 72).

### **2.3.2 Modelos de plasticidad concentrada**

Estos modelos concentran el comportamiento inelástico de los elementos en los extremos, no consideran la longitud de plastificación del elemento y representan las rótulas de los elementos como resortes localizados en sus extremos. Dependiendo de su formulación se considerará uno o varios resortes que estarán conectados en serie o en paralelo. En general la estructura es discretizada en varios elementos (vigas columnas, placas, etc.); en los lugares donde se formen rótulas plásticas, éstas girarán como rótulas simples pero mantendrán el momento de fluencia constante, esta rótula se produce en los lugares donde el momento flector excede el momento de fluencia de la sección.

Generalmente la curva esquelética de la sección de un elemento de concreto armado es modelada en forma bilineal o trilineal; es importante la construcción de las gráficas momento-curvatura o momento-rotación; teniendo en cuenta que la fuerza axial es importante en la determinación de los diagramas momento-curvatura, existen algoritmos de superficies de fluencia; sin embargo, se puede desprestigiar este efecto en edificios de poca altura, incluyendo fuerzas axiales en las columnas (por acción de cargas muertas y vivas), para mantener un nivel uniforme de carga axial. Dentro de estos modelos se tiene:

#### **a. Modelo de componentes paralelas o doble componente**

En 1967 fue introducido el modelo de Clough y Jhonston (16, 17), que es una relación bilineal momento-rotación. Este modelo consiste de dos elementos paralelos, uno elastoplástico (perfectamente plástico que representa la fluencia) y otro perfectamente elástico que representa la segunda pendiente, la matriz de rigidez del elemento es la suma de ambas componentes.

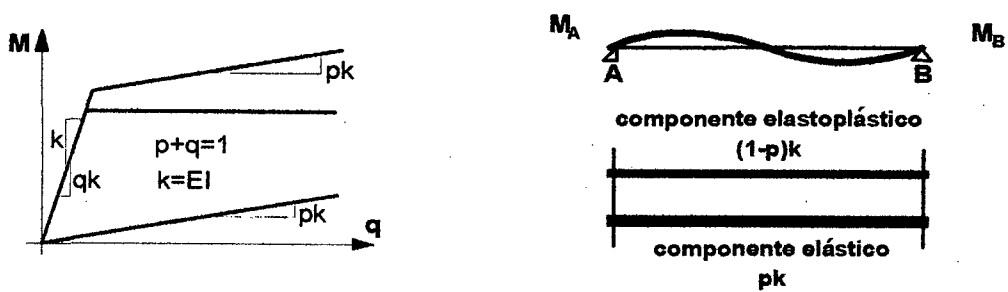


Figura 2.6 Modelo de componentes paralelas

**b. Modelo de una componente**

Fue planteado por Giberson en 1967 (28), y considera que el elemento tiene una componente elástica que constituye el centro del elemento y dos componentes inelásticas que constituyen los extremos del elemento. Para modelar las componentes inelásticas del elemento se utilizan relaciones histeréticas bilineales, trilineales, etc., (ver sección 2.4).

En general los modelos de una componente, trabajan bajo la hipótesis de un resorte inelástico fijo en los extremos del elemento, con flexibilidad rotacional  $f_i$ , conocidas estas flexibilidades en los extremos de los elementos, se puede encontrar la matriz de rigidez del elemento incluyendo los efectos inelásticos de los resortes.

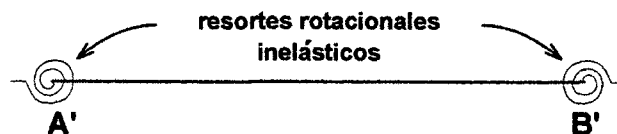


Figura 2.7 Modelo de una componente

Para una mejor explicación de estos métodos revisar (46, 72).

**c. Modelo de triple componente**

Modelo que consiste de una componente lineal y 2 elastoplásticas que actúan en paralelo, estos modelos toman en cuenta el efecto de fisuración del elemento (70).

**d. Modelos de rigidez variable**

La rigidez del elemento se supone variable. Dentro de estos modelos se encuentra el modelo **parabólico** propuesto por Takizawa (1960) (65), supone distribución parabólica de la flexibilidad. Estos modelos tratan de capturar el comportamiento inelástico a lo largo del elemento es decir consideran longitudes de penetración.

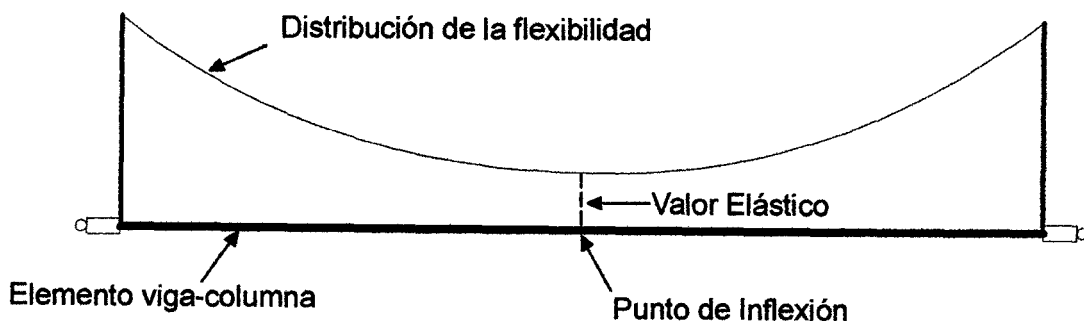


Figura 2.8 Modelo de flexibilidad distribuida

**2.3.3 Modelo multi-resortes generalizado o de Takizawa**

Generaliza el modelo de Clough a un comportamiento multilineal, da información más precisa sobre los elementos de concreto armado, en general en estos modelos, los elementos están divididos en varios elementos cuyos resortes están en serie y cada sub elemento tiene sus propias propiedades de histéresis.

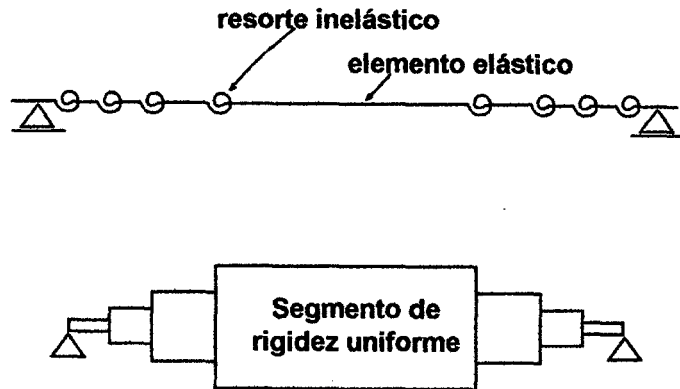


Figura 2.9 Modelo multi-resortes y Modelo de Takayanagi

Adicionalmente Takayanagi y Schnobrich (64), consideraron un elemento dividido en pequeños elementos, cada elemento presenta una rigidez flexionante uniforme, que varía con la historia de sus deformaciones, se puede tomar en cuenta el comportamiento inelástico local, dividiendo en más elementos las zonas con comportamiento inelástico.

#### 2.3.4 Modelos de elementos finitos

Estos modelos idealizan el comportamiento del elemento subdividiendo el mismo en elementos menores los cuales tendrán un comportamiento inelástico, el ensamblaje de éstos en matrices genera la matriz de todo el conjunto, se estudia los materiales a nivel de esfuerzos y deformaciones, las leyes plásticas con la teoría de Von Misses. Para mayor detalle (6, 77).

#### 2.3.5 Modelos de fibra

Son los modelos más precisos para elementos de concreto armado (32, 55, 66), dentro de éstos, destacan los modelos de fibra basados en flexibilidad, en estos modelos cada elemento es dividido en fibras longitudinales, previamente el elemento (viga o columna) ha sido discretizado. La relación constitutiva de la sección (diagrama momento curvatura por ejemplo) no está definida, pero ésta se obtiene por integración de las respuestas de las fibras, de la misma forma la rigidez de cada

elemento se obtiene también por integración a lo largo del elemento (segmentos cuyas propiedades fueron calculadas a nivel de la sección).

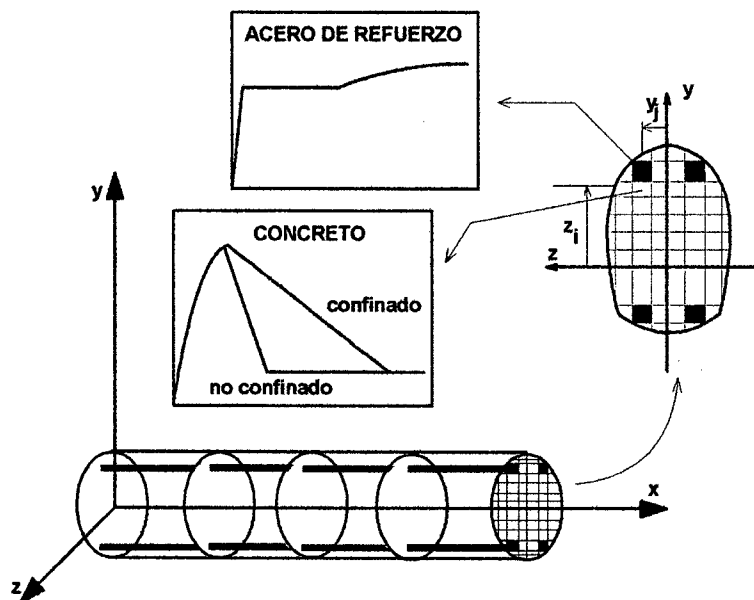


Figura 2.10 Modelo de fibra

## 2.4 Modelos de histéresis

Estos modelos fueron desarrollados para predecir la no linealidad que pudiera presentar el material, sirven para estudiar el comportamiento por flexión de las secciones de pórticos de concreto armado; sin embargo, hoy en día existen modelos no lineales, para predecir la influencia de los esfuerzos de corte (micromodelos y macromodelos), en vigas peraltadas y placas (37). El comportamiento histerético de elementos de concreto armado sometidos a flexión, tiene generalmente las siguientes características:

1. La rigidez cambia debido al agrietamiento del concreto y la fluencia del refuerzo longitudinal.
2. Los ciclos posteriores de histéresis presentan rigideces menores y algunos notablemente menores que el primer ciclo.
3. El comportamiento histerético ciclo a ciclo disipa menos energía.

4. El comportamiento histerético depende de la excitación sísmica.

Básicamente un modelo de histéresis debe representar estas características, sin embargo dependiendo del grado de exactitud que uno requiera en un análisis, se pueden hacer hipótesis simplificadoras, de tal manera que no se considere por ejemplo la degradación de la rigidez del concreto o despreciar el efecto de deslizamiento, con tales fines existen muchos modelos histeréticos que representan la no linealidad del material.

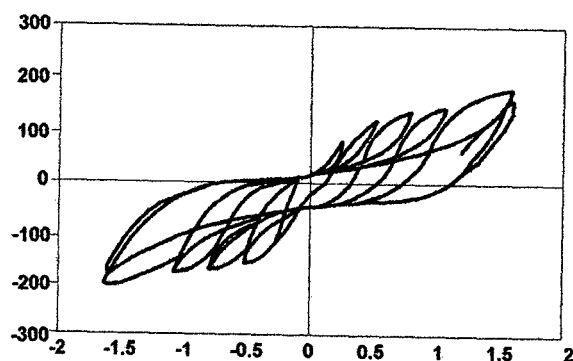


Figura 2.11 Comportamiento histerético

A continuación se describen los principales modelos de histéresis:

#### 2.4.1 Modelo Bilineal

Modelo utilizado en los primeros análisis dinámicos inelásticos (mitad del siglo XX), sobre todo en modelos de histéresis elásticos perfectamente plásticos (73), por ser el más simple. El modelo está compuesto de 2 líneas, la primera indica las propiedades elásticas del elemento estructural, la segunda pendiente (un porcentaje de la primera) indica el comportamiento inelástico del material.

Este modelo no representa la degradación de resistencia de los elementos estructurales en los diferentes ciclos de carga y descarga; no es el adecuado para un análisis muy refinado de elementos de concreto armado. Es posible incluir degradación de rigidez en el modelo Bilineal después de la fluencia para cada ciclo de carga y descarga. Ver (41).



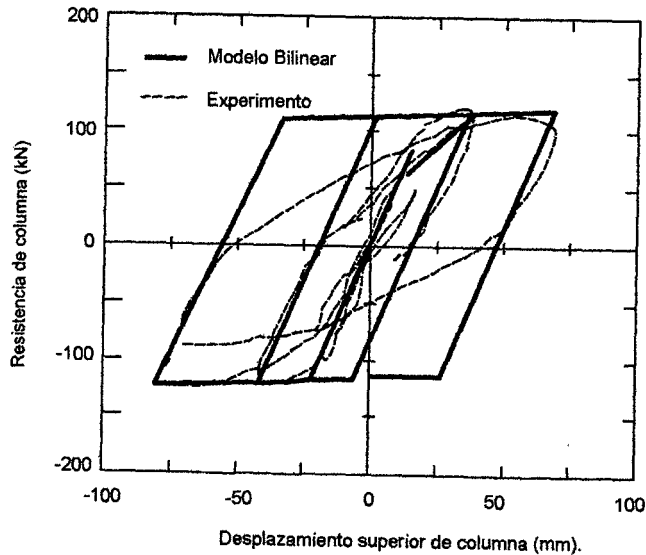


Figura 2.12 Modelo de histéresis Bilineal

Cuando se considere la degradación de la rigidez sobre todo en modelos de concreto armado, se puede usar la regla de Nielsen e Imbeault:

$$K_r = K_y \left( \frac{D_m}{D_y} \right)^{-\alpha} \dots (2.4.1).$$

$\alpha$  = Parámetro de degradación de la rigidez de descarga ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

$K_y$  = Rigidez inicial elástica.

$D_m$  = Máxima ductilidad o desplazamiento alcanzado en un ciclo de carga positivo o negativo.

$D_y$  = Desplazamiento o ductilidad de fluencia alcanzada por el elemento.

Una desventaja del modelo Bilineal es que no disipa energía sino hasta que se alcanza el estado de fluencia.

#### 2.4.2 Modelo de rigidez degradante de Clough

Este es un modelo cualitativo para el estudio de elementos de concreto armado (48), fue desarrollado por Clough en 1966 (17), quién incorporó la degradación de rigidez en el modelo elastoplástico; durante el proceso de carga el punto de respuesta

se dirige a la máxima respuesta anterior, en la descarga la pendiente permanece paralela a la pendiente elástica. Esta modificación mejoró la capacidad para simular el comportamiento a flexión de los elementos de concreto; este modelo absorbe menos energía por ciclo que el modelo elastoplástico.

Clough concluye que este modelo en comparación con el modelo elastoplástico, no cambia significativamente la demanda de ductilidad de los elementos de concreto armado, en estructuras con períodos mayores a 0.6 seg.; el modelo de rigidez degradante requiere ductilidades significativamente mayores para estructuras de período corto y la forma de respuesta contra el tiempo de los modelos de rigidez degradante, es diferente a las formas de respuesta de un modelo elastoplástico.

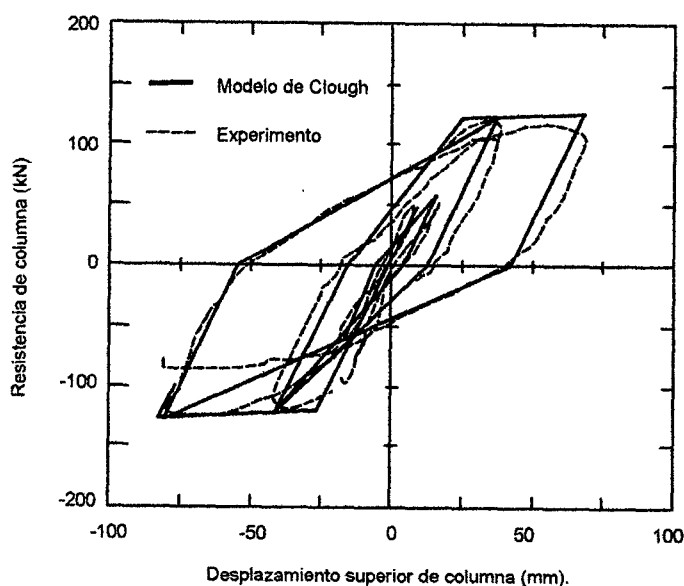


Figura 2.13 Modelo de rigidez degradante de Clough

La fórmula de degradación de rigidez de este modelo es la misma que la del modelo Bilineal.

### 2.4.3 Modelo de rigidez degradante de Takeda

Modelo desarrollado por Takeda (1970), en base a observaciones experimentales; este modelo incluye cambios en la rigidez por flexión, agrietamiento, fluencia y características de la segunda pendiente; la rigidez de

descarga es reducida por una función exponencial, que es función de la máxima respuesta previa alcanzada; Takeda preparó un conjunto de reglas de descarga para cada ciclo de histéresis, esto constituye una mejora frente al modelo de Clough. Este modelo es útil para el estudio de elementos de concreto armado donde la rigidez por flexión no considera efectos de corte, existen modelos simplificados del modelo de Takeda, para más información (11, 44, 75).

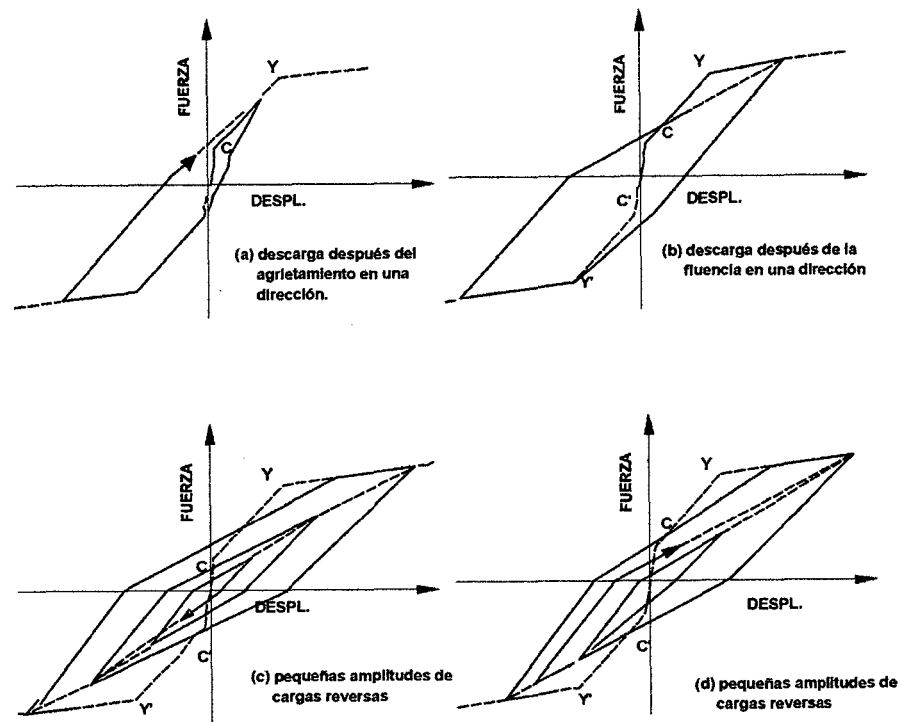


Figura 2.14 Reglas de histéresis del modelo de Takeda

La fórmula de degradación de rigidez en el modelo de Takeda es:

$$K_r = \frac{F_c + F_y}{D_c + D_y} \left( \frac{D_m}{D_y} \right)^{-\alpha} \dots (2.4.2), \text{ Donde:}$$

$F$  = indica el nivel de fuerza.

$D$  = nivel de desplazamiento o curvatura.

$c$  = indica nivel de agrietamiento.

$y$  = indica nivel de fluencia.

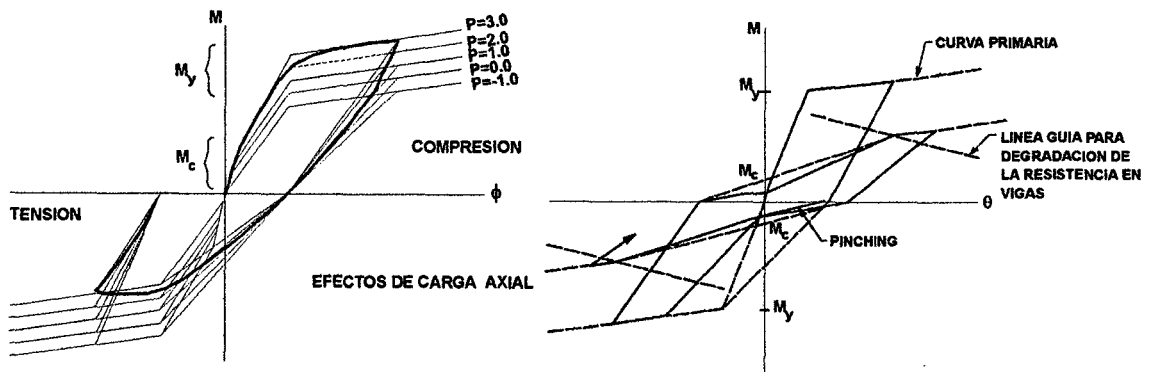


Figura 2.15 Modelos Takeda-Takayanagi (Takayanagi y Schnobrich 1976)

El refuerzo en un elemento estructural, se desliza principalmente por dos razones: si el elemento es corto y debido a que la resistencia del elemento estructural se degrada, este efecto fue introducido por Takayanagi (46).

Existen modelos modificados de Takeda como el modelo de Otani y Sozen (44), que considera la adherencia entre el concreto y el refuerzo; otro modelo es el Sina, que incluye el efecto pinching (se presenta una rigidez incremental muy pequeña en el origen seguida de un aumento brusco de la rigidez), este modelo produce mayores desplazamientos en comparación a otros modelos.

En la siguiente página se presenta un gráfico del modelo Sina, en este gráfico se puede apreciar el incremento de rigidez del modelo.

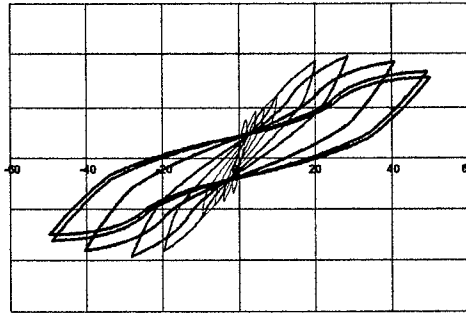


Figura 2.16 Modelo Sina

#### 2.4.4 Modelo Ramberg-Osgood

Este modelo es una relación esfuerzo-deformación para acero, fue desarrollado por Ramberg-Osgood en 1943 (45, 46), la ecuación para el estado de carga del modelo es la siguiente:

$$\frac{D}{D_y} = \frac{F}{F_y} \left( 1 + \eta \left| \frac{F}{F_y} \right|^{\gamma-1} \right) \dots (2.4.3)$$

donde  $\gamma$  es el exponente del modelo y  $\eta$  es el parámetro de Jennings. El módulo de tangente inicial es  $(f_y / D_y)$

El exponente  $\gamma$  es una transición del estado lineal elástico al elastoplástico, es decir  $1 \leq \gamma \leq \infty$ , donde 1 indica el comportamiento elástico e infinito el comportamiento elastoplástico. Si se considera  $(D_0, f_0)$ , la ecuación para el estado

de descarga está dada por la fórmula 
$$\frac{D - D_0}{2D_y} = \frac{F - F_0}{2F_y} \left( 1 + \eta \left| \frac{F - F_0}{2F_y} \right|^{\gamma-1} \right) \dots (2.4.4);$$

se puede encontrar la resistencia en cada punto, resolviendo las ecuaciones de carga y descarga con el método de Newton-Raphson, recomendamos el método propuesto en (33).

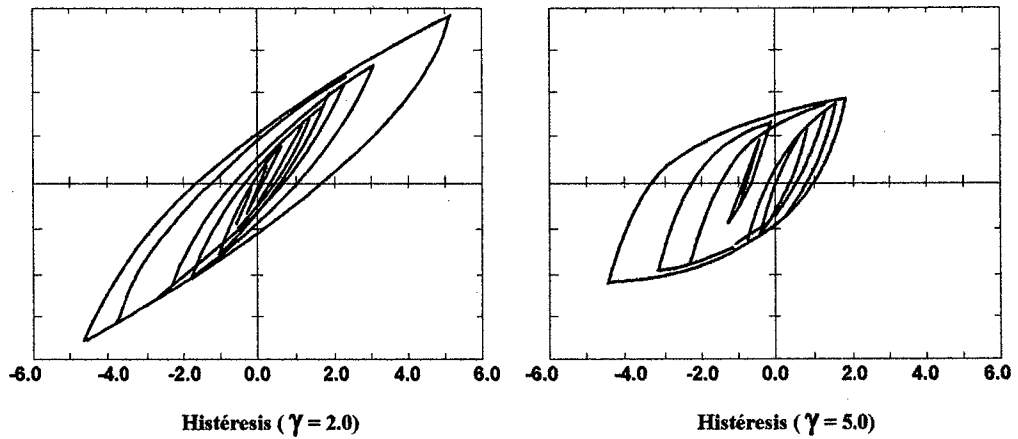


Figura 2.17 Parámetros de Ramberg-Osgood

### 2.4.5 Modelo Trilineal degradante

Modelo desarrollado en Japón (Fukada 1969); toma en cuenta el agrietamiento y la fluencia del material, una vez alcanzado el punto de fluencia se comporta como el modelo Bilineal. El punto de descarga se trata como el nuevo punto de fluencia, la rigidez de descarga correspondiente al pre y post agrietamiento es reducida proporcionalmente para que se llegue a tener un comportamiento bilineal entre los nuevos puntos de fluencia (positivo y negativo).

Una de las principales características de este modelo es que la rigidez se degrada con el incremento de los máximos desplazamientos o curvaturas mas allá de la fluencia, la energía de disipación por histéresis es mayor en el primer ciclo después de la fluencia y llega a ser uniforme en los siguientes ciclos de histéresis, la energía es proporcional a la amplitud del desplazamiento y el índice de disipación de energía por histéresis es constante e independiente del desplazamiento después de la fluencia.

El modelo Trilineal degradante puede incluir las características del endurecimiento por deformación (segunda pendiente). El ancho de un ciclo de histéresis es sensible al cambio del punto de agrietamiento (45, 46).

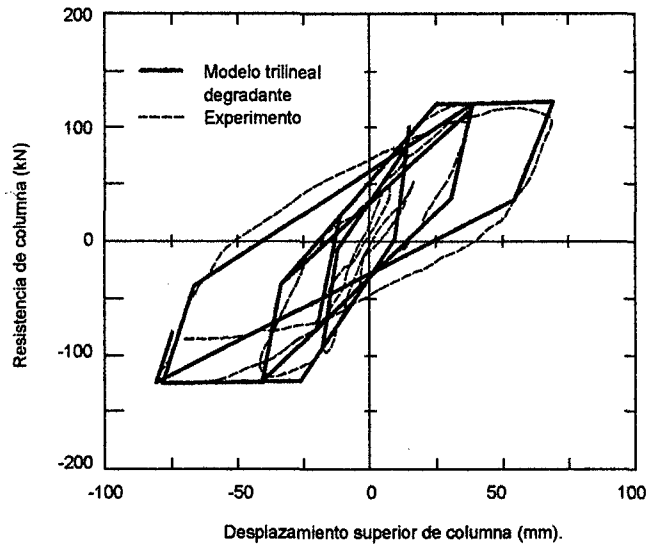


Fig 2.18 Modelo Trilineal degradante

### 2.4.6 Modelo de histéresis de Park

Propuesto por Park Y. J. en 1987 (47) como parte del programa IDARC; este modelo incluye degradación de rigidez, degradación de resistencia, efecto Slip-lock y una envolvente trilineal monotónica; en realidad el modelo es lineal en cada tramo. El comportamiento histérico del elemento y sus cambios de un estado lineal a otro dependen de la historia de las deformaciones; a continuación se presentan gráficos de parámetros que influyen en el comportamiento de este modelo:

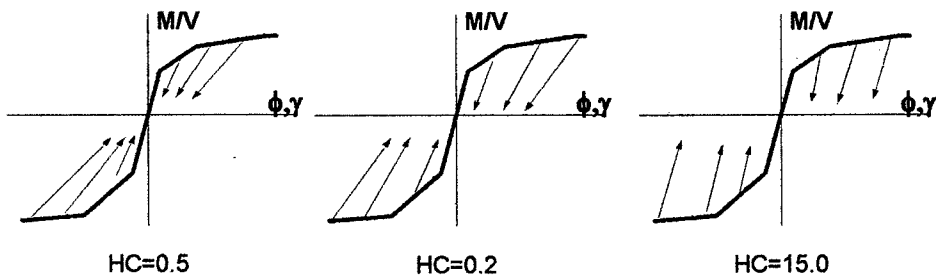


Figura 2.19 Parámetro de degradación de rigidez

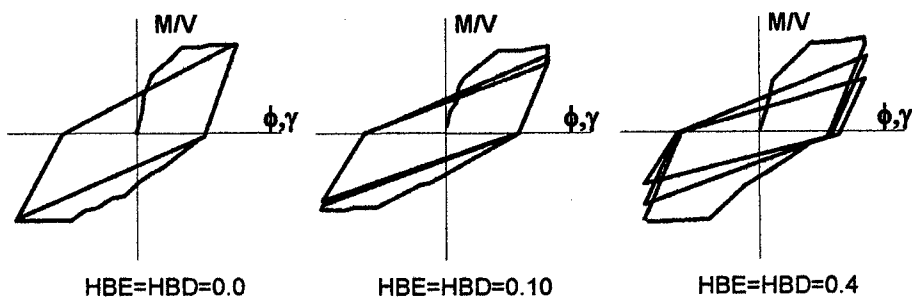


Figura 2.20 Parámetro de degradación de la resistencia

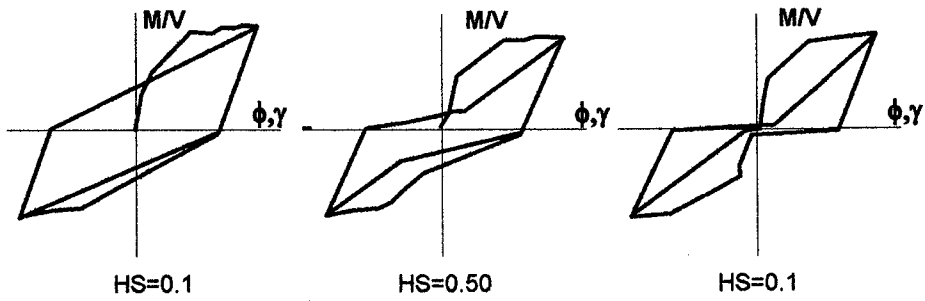


Figura 2.21 Parámetro de control de deslizamiento

con los parámetros arriba mencionados se construyen modelos de histéresis como el de Clough y el modelo Trilineal.

#### 2.4.7 Modelo de histéresis suavizado

Este modelo de histéresis se ha utilizado para la respuesta de amortiguadores por fricción y paneles (casos de placas); considera degradación de rigidez, resistencia y efecto pinching, está basado en el modelo de Wen-Bouc (4). Para una formulación mas detallada de este modelo ver (71).

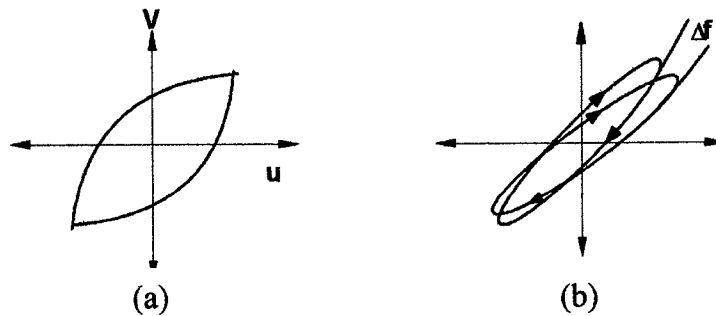


Figura 2.22 (a) Modelo de Wen-Bouc y (b) degradación de rigidez y resistencia

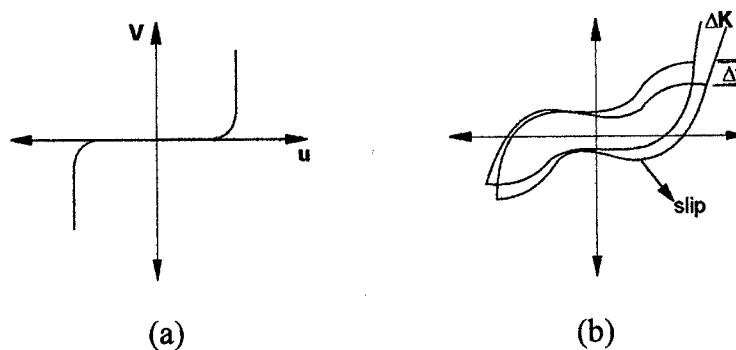


Figura 2.23 (a) Modelo Slip-Lock y (b) modelo integrado en IDARC



### 2.4.8 Modelo de Kelvin

Los amortiguadores viscosos pueden ser modelados usando el modelo de Kelvin. Este modelo incluye la contribución de la rigidez de cada elemento y un amortiguamiento lineal viscoso.

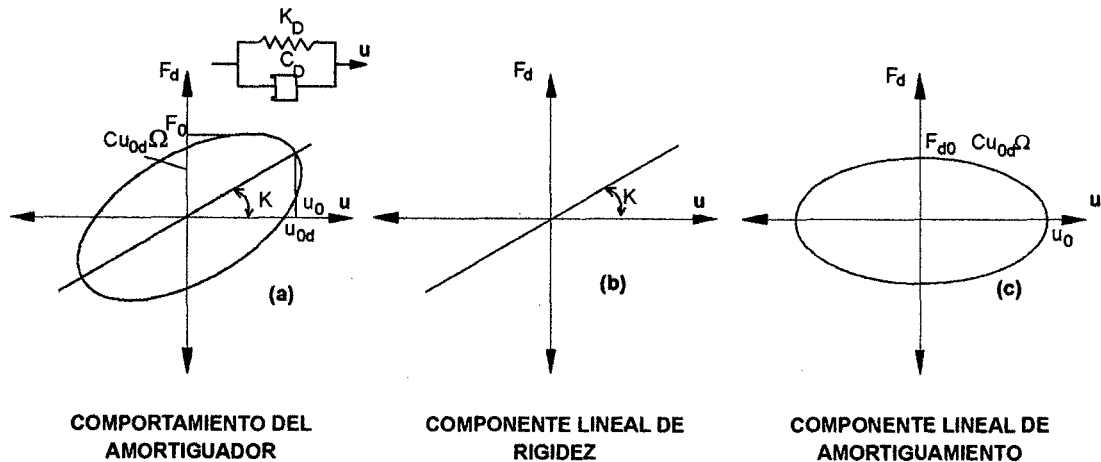


Figura 2.24 Modelo de Kelvin

La relación fuerza desplazamiento de Kelvin viene dada por  $F_d(t) = Ku(t) + Cu(t) \dots (2.4.5)$ , donde  $u(t), \dot{u}(t)$  representan el desplazamiento y la velocidad relativa del amortiguador,  $K$  es la matriz de rigidez del amortiguador y  $C$  es la matriz de coeficientes de amortiguamiento.

Existen muchas hipótesis acerca de la respuesta del amortiguador, se puede considerar por ejemplo una respuesta armónica (19).

### 2.4.9 Modelo de Maxwell

Este modelo se utiliza cuando el amortiguador muestra una fuerte dependencia de la frecuencia; es adecuado para representar amortiguamiento de fluido viscoso, el modelo consiste de un amortiguador y un resorte conectados en serie, como se indica en la figura 2.25, donde  $K_D$  es la rigidez para una frecuencia muy grande,  $C_D$  es una constante de amortiguamiento que no toma en cuenta la

frecuencia. Este modelo puede ser expresado mediante transformadas de Fourier para ser resuelto, ver (71).

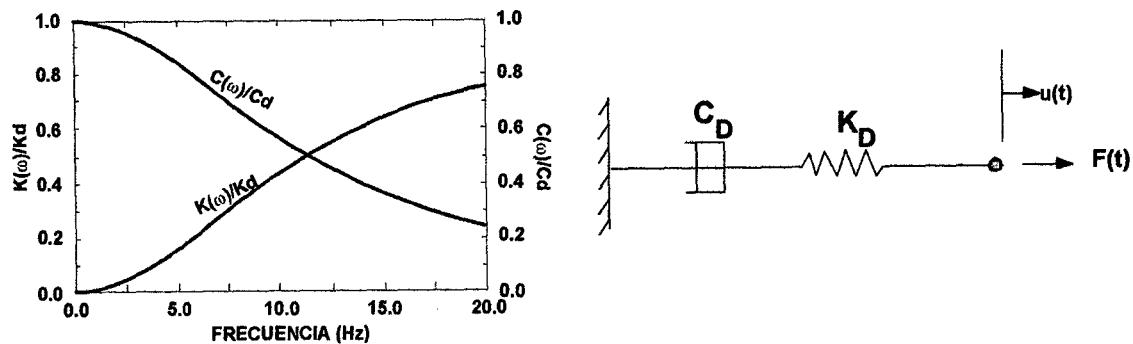


Figura 2.25 Modelo de Maxwell para dispositivos de amortiguamiento

## Capítulo III

# Limitaciones y consideraciones sobre el análisis elástico e inelástico

En el estudio de la respuesta dinámica o estática de una estructura, cuando la matriz de rigidez de la misma mantiene sus propiedades constantes durante el tiempo o paso de solución, el análisis se denomina lineal y cuando las propiedades de la matriz de rigidez de la estructura cambian con el tiempo o paso de solución, el análisis se denomina no lineal. Existen dos fuentes de no linealidad, una es por el cambio de las propiedades del material y la otra por efectos de segundo orden; ambas formas de no linealidad conducen a un sistema de ecuaciones no lineales tanto en un análisis estático como en un análisis dinámico (en un análisis dinámico el problema consiste en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales).

En un análisis estático inelástico existen diferentes métodos para resolver el problema (Incrementales, Newton, Cuasi-Newton, Mixtos (7, 24, 60, 77)), todos estos métodos consideran que la estructura mantiene sus propiedades lineales durante un paso o incremento de fuerzas (desplazamientos), es decir son lineales paso a paso; de alguna manera estamos linealizando la función de rigidez (34), este argumento es válido en los análisis estáticos dado que la función de rigidez es derivable en todos sus puntos, salvo en los puntos de fluencia. Este último problema, se puede resolver utilizando curvas del material derivables en todo su dominio.

En un análisis dinámico existen problemas cuando la función de rigidez presenta un comportamiento no lineal, existen preguntas que uno se puede hacer al tratar de resolver el modelo matemático de un análisis dinámico como: ¿en qué condiciones es aceptable linealizar la función de rigidez de una ecuación diferencial?, ¿qué condiciones debe cumplir una ecuación en diferencias, para que su solución sea convergente a la solución de una ecuación diferencial? En lo que viene del presente capítulo, se trata de responder estas preguntas.

Las preguntas del párrafo anterior, conducen a temas de convergencia y estabilidad del modelo matemático que se necesita resolver (sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias); en adelante el estudio de la estabilidad está referido a la estabilidad de la solución de las ecuaciones diferenciales o en diferencias que se mencionen, no nos referimos a la estabilidad de la estructura, salvo en lo referente a mecanismos de falla. El estudio de la estabilidad de una estructura involucra dos temas importantes, efectos de segundo orden y teoría de Bifurcación, que no forman parte de la presente investigación; desde luego las ecuaciones diferenciales para este problema son también no lineales y más complejas, para la formalización de este tema se puede ver (6,35).

En lo referente al análisis dinámico lineal, se puede decir que se está en condiciones de presentar la solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales, si este análisis presenta matrices (masa, rigidez y amortiguamiento) que mantienen propiedades constantes durante el tiempo, además existe numerosa bibliografía para el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales, los métodos para ensamblar las matrices (rigidez, etc.) y algoritmos para la solución dinámica en el tiempo (5, 8, 12, 13, 20, 40, 51, 59, 76).

Para deducir la integral de Duhamel sin el uso de distribuciones como Delta de Dirac, se utiliza el operador de Green, el uso de este operador presenta una forma de deducción general para dicha integral. El operador de Green es parte básica de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales (18, 30, 34), sobre todo en problemas de valor inicial; sin embargo, su relación con la integral de Duhamel es comentada por primera vez en este trabajo, el uso de este operador puede ayudar a generalizar la integral de Duhamel para sistemas de varios grados de libertad (se viene trabajando en esta generalización, para presentarla en una investigación posterior).

### 3.1 Consideraciones sobre el análisis elástico tiempo-historia

Para resolver la ecuación diferencial de un análisis elástico tiempo-historia, se procede de forma similar que para un análisis inelástico tiempo-historia, con la consideración que la matriz de rigidez de los elementos y de la estructura son constantes (desde un punto de vista matemático son transformaciones lineales, ver (26)), la ecuación típica es:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + C\dot{x} + f(x) &= -m\mu_g(t) \dots(3.1.1) \\ y(x_0) &= y_0 \quad \dot{y}(x_0) = y_1 \end{aligned}$$

donde  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n / f(x) = Kx$ ; se sabe que la solución general homogénea es una combinación lineal de  $x_h = \sum_{k=1}^n c_k y_k e^{\mu t}$ , donde  $c_k$  son parámetros de integración,  $y_k$  vectores linealmente independientes que pertenecen a  $\mathfrak{R}^n$  y  $\mu$  son constantes reales diferentes o complejas conjugadas; en los casos que  $\mu$  se encuentre repetido, se utilizará la forma de construcción general (52).

El problema de valores iniciales con  $M$ ,  $C$  y  $K$  matrices constantes tiene solución única (18, 34, 61); La solución particular del sistema se puede resolver utilizando el método de variación de parámetros (34); se debe notar que la integral de Duhamel entrega la solución particular del problema de valores iniciales (ver 3.1.1).

Desde un punto de vista teórico, existen métodos para encontrar la solución analítica del problema de valores iniciales con matrices constantes (18, 31, 52); sin embargo, si se desea encontrar ésta mediante métodos numéricos, se puede utilizar una ecuación en diferencias lineal (se utilizan métodos implícitos como por ejemplo el algoritmo de Newmark o explícitos como el método de las diferencias centrales, ver (6, 20, 29)), la única condición que deben cumplir estos métodos para que las sucesiones de puntos que generan, sean convergentes a la solución de la ecuación diferencial, es que sean estables; para comentarios sobre esto ver (58, 67).

### 3.1.1 Relación entre el operador de Green y la Integral de Duhamel

Ya que se viene realizando un análisis dinámico, sería útil indicar la relación que existe entre el operador de Green y la integral de Duhamel, porque a pesar de que el operador de Green es un caso general de la integral de Duhamel, no se encuentra bibliografía que comente esta relación específicamente; esta relación da ciertas ventajas, entrega un marco teórico más sólido que su deducción con la función Delta de Dirac (que en realidad es el límite de una sucesión de funciones), permite la generalización de esta integral a sistemas de varios grados de libertad y facilita el estudio cualitativo de la respuesta sísmica.

El problema clásico esta vez se abordará de una manera general, utilizando la integral de Green (ver apéndice B). La forma con la que se deduce esta integral es general, incluso funciona para coeficientes variables, se podría aplicar a otros ejemplos de vibración con los coeficientes de rigidez y amortiguamiento como funciones del tiempo. Veamos el caso clásico de los coeficientes constantes, para esto considerar que la ecuación diferencial  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Ff(t) \dots (3.1.2)$ , donde  $m, c, k, F$  son constantes, satisface el problema de valores iniciales  $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$ ; tomar en cuenta las siguientes consideraciones:  $w^2 = \frac{k}{m}$ ,  $2\beta w = \frac{c}{m}$  y  $\beta < 1$  para considerar un movimiento vibratorio. Por lo tanto la ecuación diferencial equivalente es  $\ddot{x} + 2\beta w\dot{x} + w^2x = \frac{F}{m}f(t) \dots (3.1.3)$ , la ecuación diferencial homogénea es  $\ddot{x} + 2\beta w\dot{x} + w^2x = 0 \dots (3.1.4)$ , ésta tiene como solución solución general:

$$x_H = c_1 e^{-2\beta w t} \cos(w_D t) + c_2 e^{-2\beta w t} \text{sen}(w_D t) \dots (3.1.5), \text{ donde } w_D = w\sqrt{1 - \beta^2}.$$

La solución particular puede encontrarse utilizando el operador de Green:

$$x_p = \frac{F}{m} \int_{t_0}^t \left\{ \begin{array}{cc} \left| \begin{array}{cc} e^{-2\beta w u} \cos(w_D u) & e^{-2\beta w u} \text{sen}(w_D u) \\ e^{-2\beta w t} \cos(w_D t) & e^{-2\beta w t} \text{sen}(w_D t) \end{array} \right| & \\ \frac{e^{-2\beta w u} \cos(w_D u)}{e^{-2\beta w t} \cos(w_D t)} & \frac{e^{-2\beta w u} \text{sen}(w_D u)}{e^{-2\beta w t} \text{sen}(w_D t)} \\ -2\beta w e^{-2\beta w u} \cos(w_D u) - w_D e^{-2\beta w u} \text{sen}(w_D u) & -2\beta w e^{-2\beta w u} \text{sen}(w_D u) + w_D e^{-2\beta w u} \cos(w_D u) \end{array} \right\} f(u) du \dots (3.1.6)$$

que simplificando se tiene  $x_p = \frac{F}{w_D m} \int_{t_0}^t e^{2\beta w(t-u)} \text{sen}[w_D(t-u)] f(u) du \dots (3.1.7)$ , si

consideramos  $t_0 = 0$  se obtiene  $x_p = \frac{F}{w_D m} \int_0^t e^{2\beta w(t-u)} \text{sen}[w_D(t-u)] f(u) du \dots (3.1.8)$

que es la integral de Duhamel. En este punto ya se ve una ventaja en el proceso de Green al ver que se puede tomar un tiempo inicial diferente de cero. Si utilizamos este proceso para un sistema de ecuaciones diferenciales, el proceso de Green se muestra ya superior; en general Duhamel es un caso particular de Green y no es un método que ayude a generalizar, por el contrario el método de Green puede ser extendido a problemas de ecuaciones diferenciales con derivadas parciales.

Si las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$  son constantes y simétricas, se puede aprovechar la ortogonalidad de los vectores propios  $\phi$  del problema  $K\phi = \lambda M\phi$ , para diagonalizar el sistema de ecuaciones diferenciales  $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -m\mu_g(t)$  y utilizar luego la integral de Duhamel de un solo grado de libertad para el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado.

### 3.2 Consideraciones sobre el análisis estático inelástico

En general el análisis estático inelástico se resuelve linealizando los sistemas de ecuaciones no lineales, es decir se linealiza la función de rigidez en cada paso o incremento de carga lateral; para esto utilizamos métodos iterativos como el de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales y métodos incrementales que dividen los incrementos de fuerza en un gran número de pasos; sin embargo, si se utilizan métodos iterativos es necesario que la función sea derivable en cada uno de sus puntos, es decir que su matriz jacobiana exista en cada uno de sus puntos, entonces en los puntos de fluencia (agrietamiento), existen errores que pueden ser minimizados realizando más iteraciones o entregando curvas del material derivables en todos los puntos; los métodos incrementales dividen los incrementos de fuerza o desplazamiento en un gran número, con la esperanza de que en cada intervalo el problema sea lineal y si fuera necesario entregan una fuerza de corrección al final o inicio de cada paso, son útiles por su fácil programación y optimización del tiempo

de trabajo computacional, aunque no necesariamente van del lado de la convergencia, para una mejor explicación ver (24, 77). Los Teoremas que formalizan este procedimiento se encuentran en (3.3.1); para una verificación práctica sobre el número de pasos necesarios se puede utilizar el test de la parcela (76).

Existen teoremas que utilizan métodos de energía para aproximar los mecanismos de falla, ver apéndice D y sus respectivas demostraciones se pueden encontrar en (38,39), estos teoremas dan una idea de la máxima carga admisible, pero no indican la secuencia de formación de rótulas plásticas ni el mecanismo de falla producido por una específica distribución de cargas.

### **3.3 Consideraciones sobre el análisis inelástico tiempo-historia**

La ecuación diferencial  $M\ddot{x} + C(\dot{x}, t) + K(x, t) = f(t) \dots (3.3.1)$  es la más importante en la presente investigación, por lo que a continuación se discutirá acerca de su solución y aproximación de la misma mediante una ecuación en diferencias, algunos de los teoremas mencionados serán probados en forma breve (sobre todo si estos no se encuentran en la literatura de libros de Ingeniería) y en otros se indicará la referencia donde se puede encontrar información acerca de su interpretación y demostración.

El término  $K(x, t)$  de la ecuación es una función no lineal que representa las fuerzas internas de la matriz de rigidez de la estructura, los procesos típicos utilizados en Ingeniería para resolver este problema son los algoritmos explícitos e implícitos de integración, ambos métodos aproximan a la solución de la ecuación diferencial mediante una sucesión de puntos, esta sucesión de puntos es solución de una ecuación en diferencias. En cada intervalo de tiempo se considera constante la matriz de rigidez de la estructura; sin embargo, no se especifica que condiciones debe cumplir una función para ser linealizada, o cuando la solución de una ecuación en diferencias está próxima a la ecuación diferencial en estudio.



### 3.3.1 Linealización

El concepto de linealización esta basado en la existencia de una transformación lineal  $L$  que aproxime a una función  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  en la vecindad de un punto  $X_0 \in \mathfrak{R}^n$ . Desde un punto de vista ingenieril, el método de la matriz de rigidez tangente es el utilizado para la linealización de  $K(x, t)$ , con este método se calcula la matriz de rigidez instantánea de la estructura y se asume que para pequeños incrementos de tiempo ésta es constante. Para la formalización del término de linealización se tiene la siguiente definición:

**Definición:** Sea  $f : \Omega \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  y  $X_0 \in \Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ . Entonces se dice que una función  $L = L(X)$  es una aproximación lineal a  $f$  en  $X_0$ , si  $L$  es lineal sobre  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  y si:

$$\lim_{\|X - X_0\| \rightarrow 0} \frac{[f(X) - f(X_0)] - [L(X) - L(X_0)]}{\|X - X_0\|} = 0 \dots (3.3.2)$$

no se pierde generalidad si se considera que  $X_0 = 0$  y  $f(0) = 0$ , ya que inicialmente el sistema se encuentra en reposo con lo que nuestra definición resulta:

$$\lim_{\|X\| \rightarrow 0} \frac{[f(X)] - [L(X)]}{\|X\|} = 0 \dots (3.3.3a) \text{ que equivale a}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; X \in \Omega; \|X\| < \delta \Rightarrow \|f(X) - L(X)\| < \varepsilon \dots (3.3.3b)$$

la aproximación lineal  $L$  de  $f$  es única (ver apéndice C), otro concepto que ayuda a entender la linealización es el siguiente Teorema:

**Teorema:** Sea  $f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))$ , donde sus primeras derivadas son continuas en  $\Omega$ , sea  $f_i : \Omega \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ . Entonces  $f$  tiene una aproximación lineal en todo punto  $X_0$  de  $\Omega$ , y la matriz de aproximación es:

$$J(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{bmatrix} \dots (3.3.4)$$

para una demostración de esta propiedad ver (34, 62).

La definición anterior en combinación con el teorema, indican que la matriz jacobiana es esa transformación lineal, físicamente la matriz jacobiana es la matriz de rigidez tangente de la estructura, lo único que se requiere es que la función  $f$  sea derivable en los puntos en estudio, pueden existir problemas en los puntos que no tengan derivada (punto de fluencia, punto de agrietamiento, etc.).

De esta manera si se realiza un análisis estático inelástico, son suficientes las condiciones mencionadas anteriormente para formalizar los procedimientos iterativos e incrementales que utilizan la matriz de rigidez tangente.

Sin embargo, se debe de tener más cuidado para formalizar el problema cuando se resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales, las soluciones de éstas deben de ser estables para poder definir una región, o ellas tender a una solución de la ecuación diferencial; de esta manera se define una región que contiene a las soluciones de la ecuación diferencial no lineal, en la que se verifica que la matriz jacobiana existe y que el problema lineal tiene un comportamiento local igual al problema no lineal; si esto sucede se procede a una solución numérica de la ecuación diferencial, existen numerosos intentos para el estudio de la estabilidad de la ecuación diferencial; sin embargo, antes de explicar este problema se define el concepto de estabilidad, para una definición en detalle de estos conceptos se puede ver (61, 74).

### 3.3.2 Estabilidad

En ecuaciones no lineales, la estabilidad de las soluciones es un problema de gran interés y lo podemos dividir en dos grupos: la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial y la estabilidad numérica del problema, en el primer problema

bajo ciertas hipótesis de condiciones iniciales próximas (ver teorema de existencia y unicidad (34)), las soluciones se mantienen lo suficientemente próximas en el intervalo considerado; pero en muchas aplicaciones como problemas de vibración es importante saber si las soluciones se mantienen lo suficientemente próximas en un intervalo de tiempo infinito, es decir saber si las soluciones son **estables**.

### 3.3.2.1 Estabilidad de la solución de una ecuación diferencial

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{x} = f(x, t) \dots (3.3.5)$  que satisface las condiciones de existencia de sus soluciones, además  $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $f: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

**Definición:** Una solución de  $\dot{x} = f(x, t)$ , para el problema de valores iniciales  $x(t_0, x^0)$  definida para  $t \in [0, \infty)$  se llama estable, si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 /$  todas las soluciones de  $x(t, t_0, y)$  con  $\|y - x^0\| < \delta$ , están definidas para  $t \in [0, \infty)$  y además se cumple  $\|x(t, t_0, y) - x(t, t_0, x^0)\| < \varepsilon \dots (3.3.6) \quad \forall \varepsilon > 0$ . Si además se cumple que:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, y) - x(t, t_0, x^0)\| = 0 \dots (3.3.7)$  para  $\|y - x^0\| < \delta$ , entonces se dice que  $x(t, t_0, x^0)$  es asintóticamente estable.

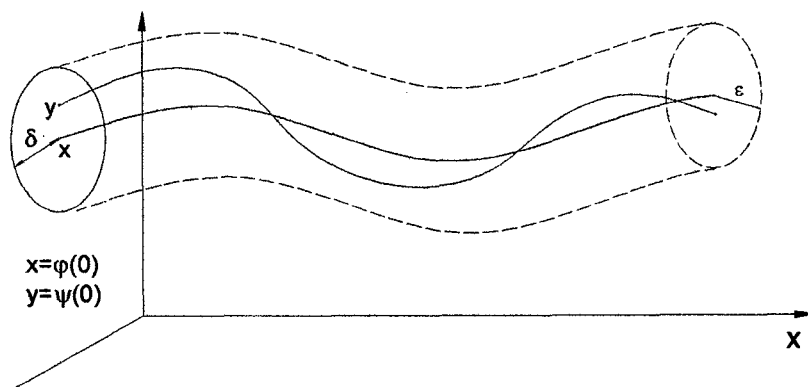


Figura 3.1 Estabilidad de la solución de una ecuación diferencial

De esta forma si la solución de una ecuación diferencial es estable, podremos determinar la región donde se encuentra la solución y ver si el comportamiento local

lineal es parecido al comportamiento local no lineal; se puede ver que el estudio de la estabilidad de las soluciones de (3.3.5), es equivalente al estudio de estabilidad de la solución  $z(t) \equiv 0$  de  $z = \tilde{f}(z, t) \dots (3.3.8)$ , donde  $z = x - x(t, t_0, x^0) \dots (3.3.9)$ , si  $x = x(t, t_0, x^0)$  estamos hablando de  $z(t) \equiv 0$ ; con tal motivo se estudian teoremas acerca de si la solución trivial de (3.3.8) es estable o asintóticamente estable, ver (31, 61).

La definición anterior conduce al estudio de la estabilidad de Liapunov (18, 30, 31, 34, 61) de sistemas autónomos y no autónomos, ver (3, 10, 35); este es un estudio riguroso del problema donde se definen funciones de Liapunov y métodos que tratan de estudiar la estabilidad de las soluciones de  $\dot{x} = f(x, t)$ ; en el apéndice D se indican algunos teoremas referidos a la estabilidad de sistemas lineales y no lineales.

Sin embargo, se puede decir que las soluciones de una ecuación diferencial que representan los desplazamientos laterales de un edificio, son estables si están cerca de su solución trivial, de no ser así tendríamos desplazamientos que podrían producir fallas del material o puntos de bifurcación; los puntos de bifurcación juegan un papel importante en el estudio de la no linealidad geométrica.

### 3.3.2.2 Comentarios sobre algunos trabajos de estabilidad

Existen muchas investigaciones referidas al estudio de sistemas no autónomos de la forma  $\dot{x} = f(x, t)$ , todas ellas indican una condición que debe de cumplir el sistema linealizado, lo que indica que aun falta mucho para formalizar y generar una mejor teoría para sistemas no lineales; sin embargo, algunas de ellas pueden ser útiles sobre todo para recalcar las limitaciones de lo que venimos haciendo hasta hoy, entre estos trabajos destacan:

Imaz C., Vorel Z. (31), define funciones de Liapunov e indica teoremas acerca de la estabilidad de la solución  $x(t) \equiv 0$ , un resultado destacable es que sistemas  $\dot{x} = f(x, t)$  se pueden linealizar a  $\dot{x} = Ax + g(x, t)$ , si  $A$  es una matriz real

constante de orden  $n$  cuyos valores propios tienen parte real negativa y  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua tal que  $g(t,0) = 0$ ; además si  $\frac{|g(t,x)|}{\|x\|} \rightarrow 0$  con  $\|x\| \rightarrow 0$ , la solución trivial es asintóticamente estable.

Avramescu C. (3), el trabajo trata del comportamiento asintóticamente estable de sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomos de la forma  $\dot{x} = f(x,t)$ , donde  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , el sistema cumple con las condiciones de existencia de la solución; utiliza un tipo de funciones de Liapunov llamadas funciones guía y entrega una condición de suficiencia para que una solución de  $\dot{x} = f(x,t)$  sea acotada por una función definida positiva  $h(t)$  de la forma  $\|x\| \leq kh(t)$ , donde  $k > 0$ ,  $\|\cdot\|$  indica la norma de  $x$ .

Caraballo T. (10), el trabajo comenta sobre algunos resultados del comportamiento asintótico de algunas soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, en (10) se prueban propiedades generales de decrecimiento exponencial de las soluciones de ecuaciones diferenciales con el uso de funciones de Liapunov; se hace un estudio de sistemas lineales y no lineales perturbados, que son importantes para el estudio de la linealización de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, se habla de la estabilidad del sistema original y en que casos esta estabilidad se transfiere al sistema perturbado; los teoremas de este punto se pueden leer en el apéndice D. El principal mérito de este trabajo es que se establece una teoría general de decrecimiento de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomos, pero no se comenta sobre la rapidez de este decrecimiento.

Las demostraciones de estos trabajos, se encuentran en las respectivas referencias bibliográficas. Debemos agregar que si se conoce la región donde se encuentran las soluciones de las ecuaciones diferenciales, se puede ver si existe un comportamiento local similar de la forma linealizada y el problema no lineal original.

### 3.3.2.3 Aproximación mediante soluciones de ecuaciones en diferencias

Si una ecuación diferencial tiene soluciones estables, significa que podemos tener idea del comportamiento de la misma; sin embargo, se necesita cuantificar la respuesta, para esto se aproximan las soluciones de la ecuación diferencial mediante soluciones de ecuaciones en diferencias, éstas últimas deben de ser consistentes y estables numéricamente para ser convergentes, existen teoremas como el teorema fundamental de convergencia (58), que establece que las soluciones de una sucesión de operadores lineales convergen a la solución de una ecuación diferencial con solución única, sólo si las aproximaciones son estables. El enunciado del teorema lo encontramos en el apéndice D.

En cada paso se aproxima a la ecuación diferencial, mediante una ecuación en diferencias lineal, ésta en los intervalos donde se discretiza el tiempo tiene solución única; los integradores en diferencias explícitos (diferencias centrales) e implícitos (Newmark) tienen que ser consistentes, es decir cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  el límite de la ecuación en diferencias es la ecuación diferencial; esto último se basa en el teorema de Lax (58, 67) que dice: dado un problema de valores iniciales y una aproximación en diferencias finitas consistente aproximada al problema de valores iniciales, es necesario y suficiente que la aproximación en diferencias cumpla con la condición de estabilidad (numérica), para que sea convergente; además existen autores (67), que indican que para la estabilidad es necesario estudiar únicamente la ecuación en diferencias homogénea.

### 3.3.2.4 Estabilidad numérica

La estabilidad numérica estudia la influencia de la acumulación de errores en cada paso de integración (36, 58, 67), los casos en que esta acumulación de errores afecta las soluciones de las ecuaciones en diferencias y hace que los procesos de integración sean divergentes; al ser una condición necesaria y suficiente la estabilidad en los métodos de integración, es de interés en el presente trabajo el estudio de la estabilidad del método de Newmark (ver apéndice C para la demostración de su estabilidad), de esta manera se cuenta con una justificación

analítica de los resultados que obtendremos en capítulos posteriores, el programa IDARC utiliza el algoritmo de integración de Newmark, en el presente trabajo se considera que  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0.25$ . Un resumen acerca de la estabilidad numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias útiles en Ingeniería Civil se puede encontrar en (27).

Al resolver una ecuación en diferencias con el algoritmo de Newmark, se puede controlar la estabilidad de dos maneras:

1. Controlando el tamaño de  $\Delta t$ , se deduce que si el incremento de tiempo es

$$\Delta t \leq \frac{2\xi_j}{(\gamma - 0.5)w_j} \dots (3.3.10), \text{ el método de Newmark es incondicionalmente}$$

estable;  $\xi_j$ ,  $w_j$ ,  $\gamma$  son la fracción de amortiguamiento crítico de *j-ésimo* modo de vibración del pórtico, la frecuencia angular del *j-ésimo* modo de vibración del pórtico y un parámetro que vale 0.5 respectivamente.

2. Si la suma de la energía cinética y la energía interna del sistema tiende a un valor constante, el método de Newmark es estable; este último criterio se comenta a continuación, porque es útil para encontrar errores durante los pasos de integración (balance de energía).

### 3.3.2.5 Estabilidad por energía

El concepto de estabilidad por energía, está ligado al concepto de balance de energía, ya que en un proceso numérico estable la suma de las energías tiende a un valor constante. Existen investigaciones recientes (6), en las que se prueba la estabilidad numérica de un sistema homogéneo, si la energía es una función definida positiva decreciente; matemáticamente la energía interna (6) la define como una norma de los desplazamientos. Si a la ecuación diferencial  $Ma + f_{int} = f_{ext} \dots (3.3.11)$ , se le multiplica por el vector  $v^T$  (vector de velocidad traspuesta) y se la integra con respecto al tiempo se obtiene la ecuación de balance de

energía  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} v^T M v dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Delta d^T f_{int} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Delta d^T f_{ext} dt \dots (3.3.12)$ , donde la primera,

segunda y tercera integral, indican los incrementos de las energías cinética, interna y externa respectivamente; si se desea saber el valor de la energía cinética en el tiempo

$t_n$  se puede integrar la siguiente expresión:  $W_{cinética} = \int_0^{t_n} v^T M v dt \dots (3.3.13)$ ,

considerando  $v_0 = 0$  porque el pórtico se encuentra inicialmente en reposo,

obtenemos  $W_{cinética} = \frac{1}{2} v_n^T M v_n \dots (3.3.14)$ .

Para el estudio de la estabilidad del método de Newmark, utilizando energía se tiene la siguiente ecuación:

$$W^{n+1} = W_{cinética}^{n+1} + W_{int}^{n+1} \dots (3.3.15)$$

de donde  $W_{int}^{n+1} = W_{int}^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Delta d^T f_{int} dt \dots (3.3.16)$ , en esta integral se utiliza la regla del

trapecio y se obtiene:  $W_{int}^{n+1} = W_{int}^n + \frac{1}{2} \Delta d^T (f_{int}^n + f_{int}^{n+1}) \dots (3.3.17)$ ; los integradores para el método de Newmark con  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$  son:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2} (a_n + a_{n+1}) \dots (3.3.18)$$

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{4} (a_n + a_{n+1}) \dots (3.3.19)$$

si utilizamos (3.3.18) y reemplazamos en (3.3.14) tenemos:

$$W_{cinética}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ v_n + \frac{\Delta t}{2} (a_n + a_{n+1}) \right\}^T M \left\{ v_n + \frac{\Delta t}{2} (a_n + a_{n+1}) \right\} \dots (3.3.20)$$

$$W_{cinética}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ V_n \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4} (a_n + a_{n+1}) - \frac{v_n \Delta t}{2} \right\} M \left\{ v_n + \frac{\Delta t}{2} (a_n + a_{n+1}) \right\} \dots (3.3.21)$$

de (3.3.19) y (3.3.21) tenemos:

$$W_{cinética}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \Delta d - \frac{v_n \Delta t}{2} \right\}^T M \left\{ v_n + \frac{\Delta t}{2} (a_n + a_{n+1}) \right\} \dots (3.3.22)$$

desarrollando esta última expresión tenemos:



$$W_{cinética}^{n+1} = \frac{\Delta d^T}{\Delta t} M v_n - \frac{1}{2} v_n^T M v_n + \frac{1}{2} \Delta d^T M (a_{n+1} + a_n) - \frac{1}{4} \Delta t v_n^T M (a_{n+1} + a_n) \dots (3.3.23)$$

reemplazando (3.3.18) en (3.3.23):

$$W_{cinética}^{n+1} = \frac{\Delta d^T}{\Delta t} M v_n - \frac{1}{2} v_n^T M v_n + \frac{1}{2} \Delta d^T M (a_{n+1} + a_n) - \frac{1}{2} v_n^T M \Delta v \dots (3.3.24)$$

cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , de (3.3.18) resulta  $\Delta v \rightarrow 0$ , de (3.3.19) resulta  $\frac{\Delta d^T}{\Delta t} \rightarrow v_n$  y de

(3.3.24) se tiene:

$$W_{cinética}^{n+1} = \frac{v_n^T M v_n}{2} + \frac{1}{2} \Delta d^T M (a_{n+1} + a_n) \dots (3.3.25)$$

si sumamos (3.3.17) y (3.3.25) tenemos:

$$W^{n+1} = W^n + \frac{1}{2} \Delta d^T (M a_n + f_{int}^n + M a_{n+1} + f_{int}^{n+1}) \dots (3.3.26)$$

si  $f_{ext} = 0$  en (3.3.11), sea  $r = M a + f_{int} \dots (3.3.27)$  el vector error, el vector error en

un paso  $k$  es  $r^k = M a_k + f_{int}^k \dots (3.3.28)$ , reemplazando (3.3.28) en (3.3.26):

$$W^{n+1} = W^n + \frac{1}{2} \Delta d^T (r^n + r^{n+1}) \dots (3.3.29)$$

de (3.3.29), podemos comentar que si el proceso es convergente en cada paso, el vector error tiende a cero es decir  $r^n \rightarrow 0$ , luego  $W^{n+1} \rightarrow W^n$ , lo que implica que la energía tiende a un valor constante, esto hace ver que la energía es una función contractiva (ver (33,62)).

### 3.3.2.6 Resumen

Todo lo comentado líneas arriba se puede resumir en la figura (3.2). Previamente se debe decir, que el pórtico en estudio se ha discretizado en forma geométrica para obtener un modelo matemático, que es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, luego se estudia la estabilidad de la ecuación diferencial y se procede a la linealización y discretización de la misma en el tiempo, a continuación se utiliza un integrador consistente y numéricamente estable (puede ser el de Newmark o cualquier otro integrador), para garantizar la convergencia de la solución de la ecuación en diferencias a la solución de la ecuación diferencial.

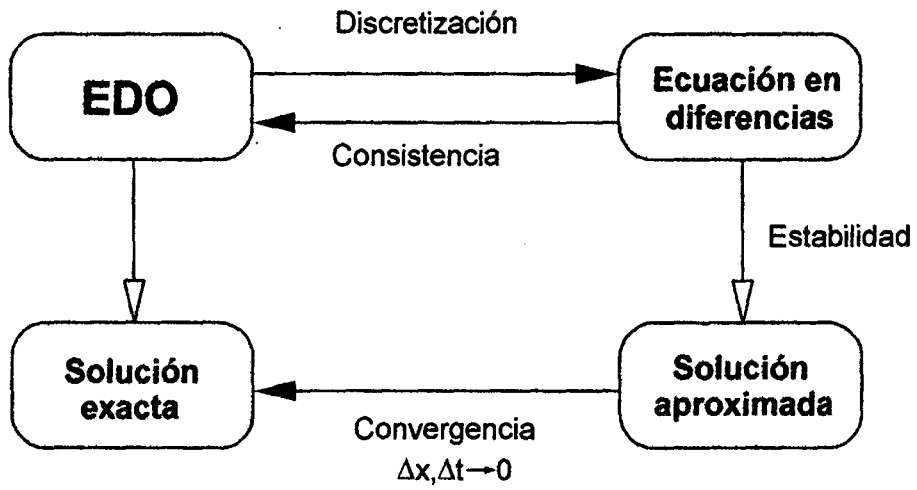


Figura 3.2 Diagrama de solución del modelo matemático del análisis dinámico inelástico de una estructura

# Capítulo IV

## Fundamento teórico del modelo utilizado

En el presente capítulo se exponen la formulación de la matriz de rigidez local del elemento (el modelo que se utilizó fue de una componente con plasticidad extendida, es decir se trata de representar el comportamiento inelástico a lo largo del elemento); se comenta en forma breve el ensamble de la matriz de rigidez de la estructura; se explican los patrones del perfil de cargas laterales del análisis estático inelástico (Pushover). Se indican los algoritmos utilizados.

### 4.1 Hipótesis básicas del modelo utilizado

Para la formulación de la matriz de rigidez global del modelo se consideran las siguientes hipótesis básicas:

- La fuerza axial aplicada a cada sección se considera constante, esta hipótesis se justifica porque se trabaja con pórticos de poca altura.
- El esfuerzo de tensión del concreto es despreciado más allá del punto de agrietamiento.
- Se consideran constantes los efectos de corte en la formulación de la matriz de rigidez local del elemento (se da mayor importancia a los efectos de flexión).
- Se asume que los pórticos están conectados a la estructura mediante un diafragma rígido, por lo que es necesario sólo un grado de libertad por piso.
- Se desprecian los efectos torsionales, ya que se considera cada pórtico dentro de un plano vertical.
- Los pórticos serán discretizados en elementos vigas y elementos columnas.

## 4.2 Formulación de la matriz de rigidez local de cada elemento

Los elementos vigas y columnas tienen la misma formulación, aunque se desprecian los efectos de fuerza axial en la vigas; las reglas de histéresis adoptadas en la presente investigación son bilineal y el modelo de tres parámetros (47), comentados en el capítulo II.

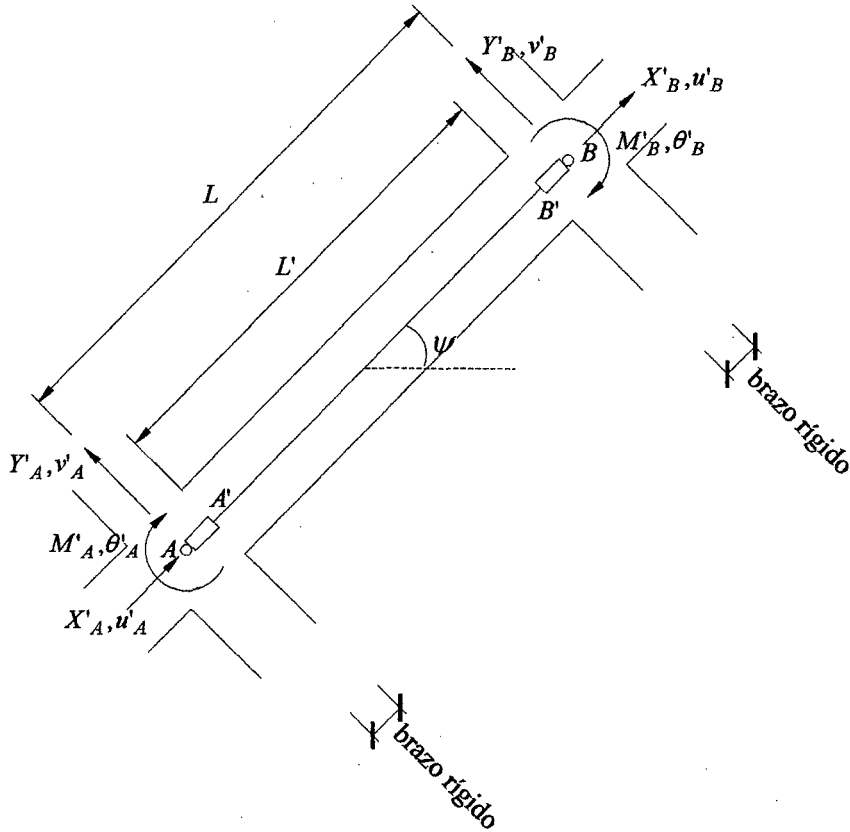


Figura 4.1 Elemento Viga-Columna

La matriz de rigidez local de la luz libre del elemento de la figura es:

$$\begin{bmatrix} M'_A \\ M'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{A'A'} & k_{A'B'} \\ k_{B'A'} & k_{B'B'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta'_A \\ \theta'_B \end{bmatrix} \dots (4.2.1) \quad M' = K' \theta' \dots (4.2.2)$$

De acuerdo al principio de energía complementaria (25), se tiene que la matriz de flexibilidad es:

$$f = \int_l Z_1^T E^{-1} Z_1^T dl + \int_l Z_2^T G^{-1} Z_2^T dl \dots (4.2.3)$$

$$\text{donde: } Z_1^T = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L'} \\ \frac{x}{L'} \\ -\frac{x}{L'} \end{bmatrix} \dots (4.2.4) \quad \wedge \quad Z_2^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L'} \\ \frac{1}{L'} \\ -\frac{1}{L'} \end{bmatrix} \dots (4.2.5)$$

$E^{-1} \wedge G^{-1}$  son las funciones de flexibilidad por flexión y por corte.

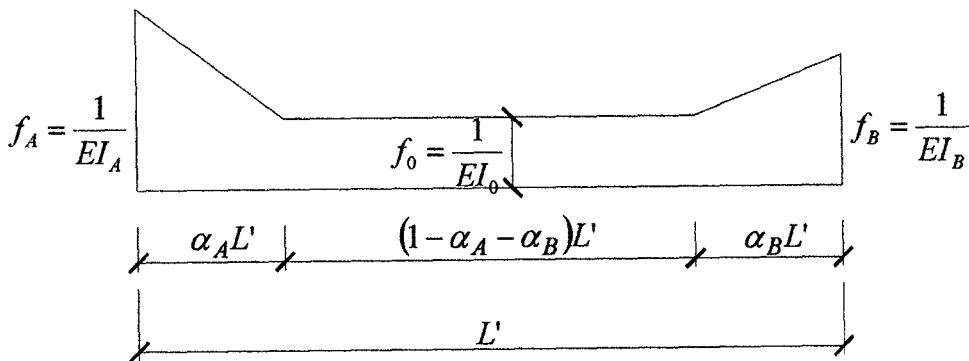


Figura 4.2 Función de flexibilidad

Del Gráfico 4.2 las funciones de flexibilidad resultan:

$$E^{-1} = \begin{cases} \frac{x}{\alpha_A L'} \left[ \frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI_A} \right] + \frac{1}{EI_A} & 0 \leq x < \alpha_A L' \\ \frac{1}{EI_0} & \alpha_A L' \leq x < (1 - \alpha_B) L' \dots (4.2.6) \\ \frac{(L' - x)}{\alpha_B L'} \left[ \frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI_B} \right] + \frac{1}{EI_B} & (1 - \alpha_B) L' \leq x \leq L' \end{cases}$$

$$G^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{GA_s} & 0 \leq x \leq L' \dots (4.2.7) \end{cases}$$

Donde  $L'$  es la luz libre del elemento,  $A_s$  es el área de corte de la sección,  $G$  el módulo de corte,  $E$  el módulo de Young,  $I_A$  e  $I_B$  son los momentos de inercia en las secciones de los extremos del elemento (son los mismos valores en los extremos de la luz libre),  $\alpha_A$  y  $\alpha_B$  son los coeficientes de penetración de fluencia; estos últimos coeficientes, indican las proporciones del elemento donde los momentos flectores son mayores que los momentos de agrietamiento de los extremos del

elemento, cuando un elemento viga o columna experimenta un comportamiento inelástico, la grietas y la fluencia tienden a extenderse a lo largo de la longitud del elemento, resultando una distribución de curvaturas como la que se indica en la siguiente figura, los factores de penetración de fluencia dependen del tipo curvatura (simple o doble), ver apéndice E.

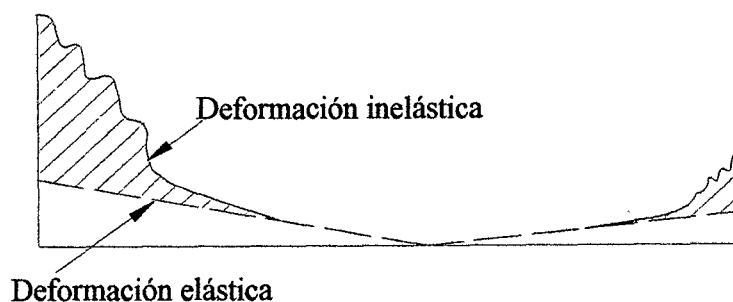


Figura 4.3 Distribución de curvaturas

Con la distribución de curvaturas se construye la función de flexibilidad y con esta función la matriz de flexibilidad  $f$ .

$$f = \begin{bmatrix} f_{A'A'} & f_{A'B'} \\ f_{B'A'} & f_{B'B'} \end{bmatrix} \dots (4.2.8)$$

Los coeficientes se calculan integrando la expresión (4.2.3), así por ejemplo:

$$I_1 = L' \int_0^{\alpha_A} (1-\varepsilon)^2 \left( \frac{\varepsilon}{\alpha_A} \left( \frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI_A} \right) + \frac{1}{EI_A} \right) d\varepsilon \dots (4.2.9a)$$

$$I_1 = L' \left[ \left( \frac{6\alpha_A - 8\alpha_A^2 + 3\alpha_A^3}{12} \right) \left( \frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI_A} \right) - \frac{(1-\alpha_A)^3}{3EI_A} + \frac{1}{3EI_A} \right] \dots (4.2.9b)$$

$$I_2 = L \int_{\alpha_A}^{-\alpha_B} (1-\varepsilon)^2 \frac{1}{EI_0} d\varepsilon = L' \left[ \frac{(1-\alpha_A)^3 - \alpha_B^3}{3EI_0} \right] \dots (4.2.10)$$

$$I_3 = L' \int_{-\alpha_B}^{\alpha_A} (1-\varepsilon)^2 \left( -\frac{\varepsilon}{\alpha_B} \left( \frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI_B} \right) + \frac{1}{EI_B} \right) d\varepsilon = L' \left[ \frac{\alpha_B^3}{3EI_B} + \frac{\alpha_B^3}{12} \left( \frac{1}{EI_B} - \frac{1}{EI_0} \right) \right] \dots (4.2.11)$$

de donde:

$$f_{A'A'} = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{1}{GA_s L'} \int_0^1 \varepsilon d\varepsilon \dots (4.2.12a)$$

$$f_{A'A'} = \frac{L'}{12} \left[ \frac{4}{EI_0} + \left( \frac{1}{EI_A} - \frac{1}{EI_0} \right) (6\alpha_A - 4\alpha_A^2 + \alpha_A^3) + \alpha_B^3 \left( \frac{1}{EI_B} - \frac{1}{EI_0} \right) \right] + \frac{1}{GA_s L'} \dots (4.2.12b)$$

integrando los demás coeficientes de manera similar a  $f_{A'A'}$  se tiene:

$$f_{A'B'} = f_{B'A'} = \frac{L}{12} \left[ -\frac{2}{EI_0} - \left( \frac{1}{EI_A} - \frac{1}{EI_0} \right) (2\alpha_A^2 - \alpha_A^3) - (2\alpha_B^2 - \alpha_B^3) \left( \frac{1}{EI_B} - \frac{1}{EI_0} \right) \right] + \frac{1}{GA_s L'} \dots (4.2.13)$$

$$f_{B'B'} = \frac{L}{12} \left[ \frac{4}{EI_0} + \left( \frac{1}{EI_B} - \frac{1}{EI_0} \right) (6\alpha_B - 4\alpha_B^2 + \alpha_B^3) + \alpha_A^3 \left( \frac{1}{EI_A} - \frac{1}{EI_0} \right) \right] + \frac{1}{GA_s L'} \dots (4.2.14)$$

si se toma la inversa a (4.2.8), se obtiene la matriz de rigidez del elemento:

$$K' = \begin{bmatrix} k_{A'A'} & k_{A'B'} \\ k_{B'A'} & k_{B'B'} \end{bmatrix} \dots (4.2.15)$$

los coeficientes de la matriz de rigidez son:

$$k_{A'A'} = \frac{12EI_0EI_AEI_B}{D_{el}L'} (f'_{B'B'}GA_sL'^2 + 12EI_0EI_AEI_B) \dots (4.2.16)$$

$$k_{A'B'} = k_{B'A'} = \frac{12EI_0EI_AEI_B}{D_{el}L'} (f'_{A'B'}GA_sL'^2 + 12EI_0EI_AEI_B) \dots (4.2.17)$$

$$k_{B'B'} = \frac{12EI_0EI_AEI_B}{D_{el}L'} (f'_{A'A'}GA_sL'^2 + 12EI_0EI_AEI_B) \dots (4.2.18)$$

donde:

$$D_{el} = GA_s L^2 (f'_{A'A'} f'_{B'B'} - f'^2_{A'B'}) + 12EI_0 EI_A EI_B (f'_{A'A'} + f'_{B'B'} - f'_{A'B'}) \dots (4.2.19)$$

$$f'_{A'A'} = 4EI_A EI_B + (EI_0 - EI_A) EI_B (6\alpha_A - 4\alpha_A^2 + \alpha_A^3) + (EI_0 - EI_B) EI_A \alpha_B^3 \dots (4.2.20)$$

$$f'_{A'B'} = -2EI_A EI_B - (EI_0 - EI_A) EI_B (2\alpha_A^2 - \alpha_A^3) - (EI_0 - EI_B) EI_A (2\alpha_B^2 - \alpha_B^3) \dots (4.2.21)$$

$$f'_{B'B'} = 4EI_A EI_B + (EI_0 - EI_A) EI_B \alpha_A^3 + (EI_0 - EI_B) EI_A (6\alpha_B - 4\alpha_B^2 + \alpha_B^3) \dots (4.2.22)$$

La ecuación (4.2.15) es la matriz de rigidez de la luz libre del elemento, para tener la matriz de rigidez del elemento de eje a eje procedemos de la siguiente manera:

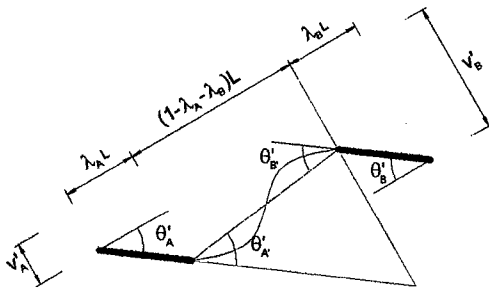


Figura 4.4a Brazos rígidos

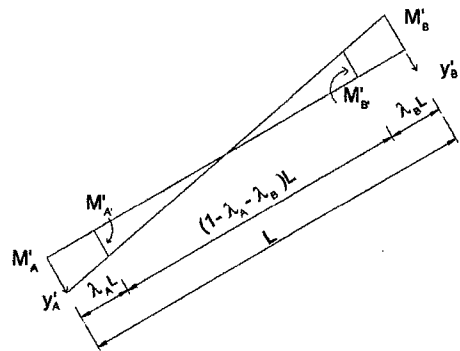


Figura 4.4b Distribución de momentos

de la figura 4.4a se obtienen las siguientes relaciones:

$$M'_{A'} = \frac{1 - \lambda_B}{1 - \lambda_A - \lambda_B} M'_{A'} + \frac{\lambda_A}{1 - \lambda_A - \lambda_B} M'_{B'} \dots (4.2.23)$$

$$M'_{B'} = \frac{\lambda_B}{1 - \lambda_A - \lambda_B} M'_{A'} + \frac{1 - \lambda_A}{1 - \lambda_A - \lambda_B} M'_{B'} \dots (4.2.24)$$

expresadas matricialmente se tiene:

$$\begin{bmatrix} M'_{A'} \\ M'_{B'} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \lambda_A - \lambda_B} \begin{bmatrix} 1 - \lambda_B & \lambda_A \\ \lambda_B & 1 - \lambda_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_{A'} \\ M'_{B'} \end{bmatrix} \dots (4.2.25a)$$

$$\begin{bmatrix} M'_{A'} \\ M'_{B'} \end{bmatrix} = \tilde{P} \begin{bmatrix} M'_{A'} \\ M'_{B'} \end{bmatrix} \dots (4.2.25b)$$



donde:

$$\tilde{P} = \frac{1}{1 - \lambda_A - \lambda_B} \begin{bmatrix} 1 - \lambda_B & \lambda_A \\ \lambda_B & 1 - \lambda_A \end{bmatrix} \dots (4.2.26)$$

si se suman las expresiones (4.2.23) y (4.2.24) se tiene como resultado:

$$\frac{M'_{A'} + M'_{B'}}{L} = \frac{M'_{A'} + M'_{B'}}{L(1 - \lambda_A - \lambda_B)} \dots (4.2.27)$$

además del gráfico 4.4b se puede deducir:

$$Y'_{A'} = \frac{M'_{A'} + M'_{B'}}{L} = \frac{M'_{A'} + M'_{B'}}{L(1 - \lambda_A - \lambda_B)} \dots (4.2.28) \text{ y } Y'_{B'} = -Y'_{A'} \dots (4.2.29)$$

reagrupando las ecuaciones (4.2.27), (4.2.28) y (4.2.29) se tiene:

$$\begin{bmatrix} Y'_{A'} \\ M'_{A'} \\ Y'_{B'} \\ M'_{B'} \end{bmatrix} = Re \begin{bmatrix} M'_{A'} \\ M'_{B'} \end{bmatrix} \dots (4.2.30), \text{ donde } Re = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \dots (4.2.31)$$

del gráfico 4.4a, se puede deducir la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \theta'_{A'} \\ \theta'_{B'} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \lambda_A - \lambda_B} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 1 - \lambda_B & -\frac{1}{L} & \lambda_B \\ \frac{1}{L} & \lambda_A & -\frac{1}{L} & 1 - \lambda_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_{A'} \\ \theta'_{A'} \\ v'_{B'} \\ \theta'_{B'} \end{bmatrix} \dots (4.2.32a)$$

$$\begin{bmatrix} \theta'_{A'} \\ \theta'_{B'} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \lambda_A - \lambda_B} \begin{bmatrix} 1 - \lambda_B & \lambda_B \\ \lambda_A & 1 - \lambda_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_{A'} \\ \theta'_{A'} \\ v'_{B'} \\ \theta'_{B'} \end{bmatrix} \dots (4.2.32b)$$

$$\begin{bmatrix} \theta'_{A'} \\ \theta'_{B'} \end{bmatrix} = \tilde{P}^T Re^T \begin{bmatrix} v'_{A'} \\ \theta'_{A'} \\ v'_{B'} \\ \theta'_{B'} \end{bmatrix} \dots (4.2.32c)$$

sustituyendo (4.2.1), (4.2.25b), (4.2.32c) en (4.2.30) se tiene:

$$\begin{bmatrix} Y'_A \\ M'_A \\ Y'_B \\ M'_B \end{bmatrix} = Re\tilde{P}K'\tilde{P}^T Re^T \begin{bmatrix} v'_A \\ \theta'_A \\ v'_B \\ \theta'_B \end{bmatrix} \dots (4.2.33)$$

de (4.2.33), se tiene que la matriz de rigidez local del elemento viga-columna es  $K_{el} = Re\tilde{P}K'\tilde{P}^T Re^T \dots (4.2.34)$ , la matriz de rigidez global del elemento es  $K_{eg} = T^T K_{el} T \dots (4.2.35)$ , donde  $T$  es la matriz de transformación:

$$T = \begin{bmatrix} -\text{sen}\psi & \text{cos}\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\psi & \text{cos}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (4.2.36)$$

La matriz de rigidez de fuerza axial, está desacoplada de (4.2.36), esta es

$$\begin{bmatrix} X'_A \\ X'_B \end{bmatrix} = K_{el} \begin{bmatrix} u'_A \\ u'_B \end{bmatrix} \dots (4.2.37), \text{ donde } K_{el} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dots (4.2.38), \text{ la matriz global}$$

del elemento es de la forma de la matriz (4.2.35), donde:

$$T = \begin{bmatrix} \text{cos}\psi & \text{sen}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{cos}\psi & \text{sen}\psi \end{bmatrix} \dots (3.2.39)$$

### 4.3 Matriz de rigidez de piso

El programa ensambla los elementos a nivel de cada piso, considerando un grado de libertad horizontal por piso (se realiza una condensación estática), utiliza un algoritmo similar al método de tridiagonalización de Clough; se aprovecha el hecho de que las matrices sean simétricas y banda para almacenar los elementos en columnas, de manera que cada columna contenga los elementos de cada diagonal de la matriz banda.

#### 4.4 Matriz de rigidez de la estructura

Para la obtención de la matriz de rigidez global de la estructura, se procede a un ensamblaje de la matriz de piso (considerando compatibilidad de fuerzas y desplazamientos), esta matriz será recalculada únicamente si en algún paso un elemento cambia en rigidez (se produce agrietamiento, fluencia o descarga).

#### 4.5 Cálculo de las curvaturas

Las curvaturas se obtienen de dos maneras con IDARC, la primera es definiendo las curvas del comportamiento del material, ya sea con ayuda de un programa para el cálculo de éstas o utilizando fórmulas del ACI (código similar), la otra forma es con la secuencia iterativa propuesta por Kunnath (ver apéndice F). En el presente trabajo se encontraron las curvas del comportamiento del material con ayuda del programa CURVATURA.

#### 4.6 Método de determinación de la fuerza de corrección

Para resolver el sistema de ecuaciones que se presenta en el análisis estático inelástico y el análisis inelástico Tiempo-historia, por incursiones de los elementos de la estructura en el rango inelástico (existe un comportamiento no lineal en la matriz de rigidez tangente de la estructura), se pueden utilizar los siguientes métodos:

- De manera iterativa utilizando algoritmos de Newton a Cuasi-Newton (62), este método es mejor dado que se itera con la ayuda de las relaciones de histéresis de cada elemento hasta encontrar el equilibrio de fuerzas, sin embargo, demanda mayor esfuerzo computacional y la función ( $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ) debe cumplir con las condiciones del teorema de Newton-Kantorovich para asegurar la convergencia, de estas condiciones la más importante es que la función sea derivable en todos sus puntos; definitivamente existen problemas con los puntos de fluencia, agrietamiento y descarga si se utilizan modelos bilineales o trilineales, una forma de corregir el problema es discretizar más los incrementos de tiempo en el caso del análisis inelástico tiempo-historia, incrementar el número de pasos del

vector incremento de fuerzas o desplazamientos en el caso del análisis estático inelástico, con la esperanza de minimizar el error; se recomienda que los modelos utilizados para este método sean derivables en todos sus puntos.

- Otra forma, es mediante la determinación de un vector de fuerzas de corrección en cada paso o incremento de tiempo, para poder aminorar el error producido por este método, se recomienda un incremento de tiempo muy pequeño o un gran número de pasos; este método fue desarrollado Powell (32) y es útil cuando los modelos de histéresis son bilineales o trilineales, ya que en estos casos el número de iteraciones es reducido (una iteración muchas veces).

#### 4.6.1 Incrementos de fuerza

En los incrementos de tiempo o número de pasos se calculan los desplazamientos nodales, razón por la cual es necesario determinar los incrementos de fuerza debido a estos desplazamientos (de acuerdo a las curvas de comportamiento del material de cada elemento). Si se consideran las relaciones momento curvatura de cada elemento, como una serie de tramos rectos y se supone que al inicio de un incremento de tiempo o paso el comportamiento será lineal, se calculan con estas propiedades los incrementos de fuerza o desplazamientos de todos los elementos de la estructura; las correcciones del incremento de fuerza ocurren cuando la curva de material de un elemento cambia de un tramo recto a otro (agrietamiento, fluencia o descarga), durante un paso o incremento de tiempo (estos cambios de pendiente se llaman eventos); se calcula la fuerza de desbalance de la siguiente manera:

1. Hacer  $i = 1, \Delta \eta_i = 0, \Delta V_0 = \Delta V, \Delta SNL = 0$ .
2.  $\Delta V_i = \Delta V_{i-1}$ .
3. Con el estado actual de cada elemento determinar  $\Delta S_i = f(\Delta V_i)$ .
4. Verificar si ocurre descarga, si no hacer  $\eta_i = \frac{S_{yi} - S_i}{\Delta S_i}$ .

5. Si  $\eta_i < 1$  indica la ocurrencia de un evento, en caso que  $\eta_i \geq 1$  hacer  $\eta_i = 1$ , (indica que no ocurrió un evento).
6.  $\Delta SNL = \Delta SNL + \eta_i \Delta S_i$ .
7. Si  $\eta_i < 1$ ,  $\Delta V_i = (1 - \eta_i) \Delta V_i, i = i + 1$ , repetir (2,3,4,5,6,7); si  $n_i = 1$  terminar.

Considerar que  $i$  es el contador de sub-eventos durante un paso o incremento de tiempo,  $\Delta V$  incremento de paso o de tiempo,  $\eta_i$  es el factor de proporcionalidad de cada evento,  $\Delta SNL$  incremento de fuerza no lineal,  $S_{yi}$  fuerza que indica cambio de pendiente en cada elemento (agrietamiento y fluencia).

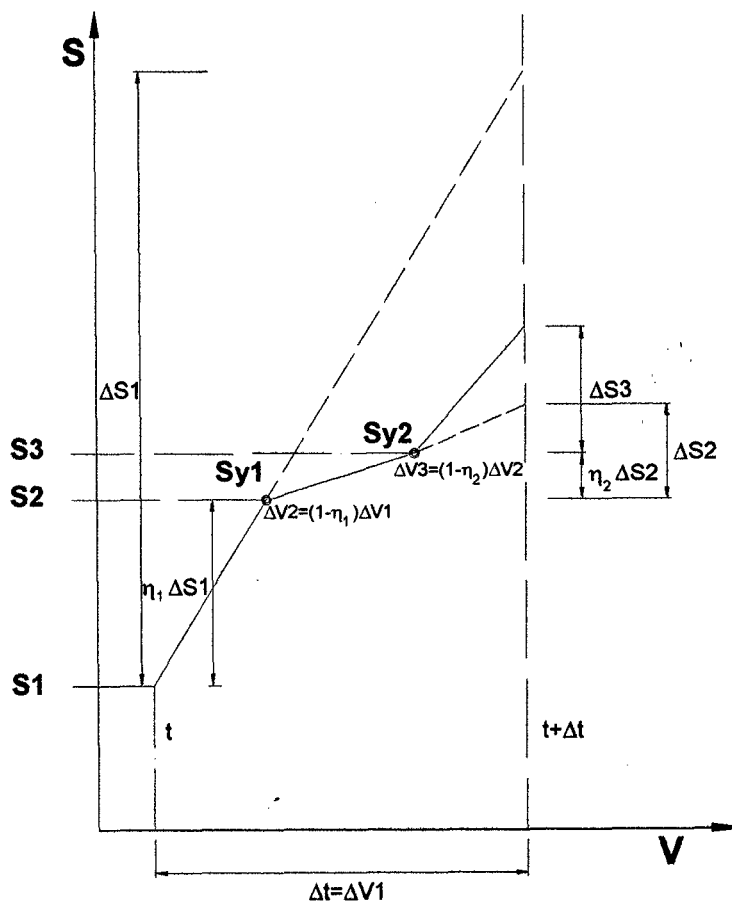


Figura 4.5 Incrementos de fuerza en sub-eventos

#### 4.6.2 Desbalance del equilibrio

Cuando se produce un paso o incremento de tiempo, si no ocurren eventos en los elementos la suposición de un comportamiento lineal es correcta y el cálculo efectuado no se modifica, Pero si ocurren eventos en algún elemento, en un grupo de elementos o en todos los elementos, existirá un desbalance de fuerzas que es igual a:

$$\Delta S_u = \Delta SL - \Delta SNL \dots (4.6.1)$$

Donde  $\Delta S_u$  es la fuerza de desbalance en el elemento,  $\Delta SL$  es el incremento de fuerza lineal en el elemento. En base a las fuerzas de desbalance de cada elemento, se calcula el vector de fuerzas de desbalance global de la estructura  $\Delta F_u$ ; al final de cada paso el equilibrio se satisface es decir:

$$F_m + F_c + F_{kant} = P \dots (4.6.2)$$

Donde  $F_m$  es el vector de fuerzas inerciales,  $F_c$  es el vector de Fuerzas de amortiguamiento,  $F_{kant}$  es el vector de fuerzas de rigideces considerando las propiedades al inicio del paso, debido a la ocurrencia de eventos, se calcula  $\Delta F_u$  por el método del incremento de fuerzas de manera que  $K_{fin} \Delta u = \Delta F_{kfin}$ , donde  $K_{fin}$  es la matriz de rigidez tangente al final de paso,  $\Delta u$  es el vector de desplazamientos producidos durante el paso, como ocurren generalmente eventos durante un paso o incremento de tiempo, el vector de fuerzas de rigideces es  $F_{kfin} = F_{kant} - \Delta F_u$ , luego el equilibrio de fuerzas al final de cada paso es:

$$F_m + F_c + F_{kfin} = P - \Delta F_u \dots (4.6.3)$$

## 4.7 Análisis Incremental

El método incremental es utilizado por IDARC, se basa en la división de la carga generalizada total  $P$  que solicita la estructura (Carga necesaria para llevar al colapso en el caso de análisis estático inelástico, expresada como fracción del peso de la estructura) en  $n$  porciones  $\Delta P_i$ , cada una de estas cargas se aplica en cada paso o incremento de tiempo. Para cada  $\Delta P_i$  este método admite que el comportamiento de la estructura es lineal,  $K_{t,i}$  es la matriz de rigidez tangente de la estructura correspondiente a las características materiales y geométricas al comienzo de cada paso  $i$ ,  $\Delta u_i$  es el vector incremento de desplazamientos en el paso  $i$ . En general, el análisis del comportamiento inelástico se reduce a la concatenación de los resultados obtenidos en el análisis de una serie de  $n$  comportamientos lineales discretos de la estructura.

Así, el vector de carga generalizado total se representa de la siguiente manera:

$$P = P_0 + \sum_{j=1}^n \Delta P_j \cdots (4.7.1). \text{ Donde } P_0 \text{ representa el vector de carga inicial; al final de}$$

cada paso  $i$ , la carga que actúa en la estructura es (4.7.1), con su correspondiente

$$\text{vector de desplazamientos } u = u_0 + \sum_{j=1}^i \Delta u_j \cdots (4.7.2). \text{ De esta manera, la matriz de}$$

rigidez de la estructura del paso  $j$  es función de  $(u_{j-1}, P_{j-1})$ :

$$K_{t,j} = K_{t,j}(u_{j-1}, P_{j-1}) \cdots (4.7.3)$$

y por tanto la correspondiente ecuación de equilibrio será:

$$\Delta P_j = K_{t,j} \Delta u_j \cdots (4.7.4)$$

Evidentemente, cuanto mayor sea el número de partes en que se divida la carga total, será mayor la exactitud en el análisis inelástico.

## 4.8 Análisis estático inelástico con fuerzas laterales

Conocido también como Pushover, es un método para predecir la respuesta inelástica de una estructura y también determinar las propiedades de fluencia de cada pórtico. El programa IDARC efectúa un análisis Pushover utilizando diferentes distribuciones de fuerzas laterales, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$K_t \Delta u = \Delta F - \Delta F_u \dots (4.8.1)$$

donde  $K_t$  es la matriz de rigidez tangente durante un paso y  $\Delta u$  es el vector de desplazamientos de la estructura,  $\Delta F_u$  es el vector de corrección de fuerzas al final del paso anterior; IDARC realiza este tipo de análisis utilizando un incremento de fuerzas o desplazamientos, cada uno de estos procesos se diferencia porque se define un perfil de incremento de fuerzas o un perfil de incremento de desplazamientos, un problema del análisis estático inelástico es que se desconoce la forma del incremento de fuerzas o desplazamientos para el siguiente paso, razón por la cual se debe suponer un perfil del incremento de fuerzas o desplazamientos (los incrementos se producen en cada paso); los métodos de distribución del perfil de cargas o desplazamientos utilizados en el presente trabajo son los siguientes:

- Método Lineal.
- Método de la Potencia.
- Método Modal Adaptativo.

### 4.8.1 Método Lineal

Utiliza una distribución triangular invertida de cargas laterales, ha sido utilizado para construir códigos de diseño Sismo-Resistente, considera que la estructura tiene una distribución lineal en altura del vector de fuerzas. El incremento de fuerza en cada paso  $i$  es calculado según:



$$\Delta F_i = \frac{W_i h_i}{\sum_{l=1}^N W_l h_l} \Delta V_b \dots (4.8.2)$$

Donde  $W_i$  y  $h_i$ , son el peso y la elevación del piso,  $\Delta V_b$  es el incremento del cortante de la base en el edificio.

#### 4.8.2 Método de la Potencia

Conocido también con el nombre del método de la Potencia generalizada, ya no considera una variación lineal del vector incremento de fuerzas de cada piso; tiene como objetivo considerar diferentes formas de deformación y la influencia de los modos de vibración superiores en la respuesta sísmica de la estructura. El incremento de fuerza de cada piso esta dado por:

$$\Delta F_i = \frac{W_i h^k}{\sum_{l=1}^N W_l h^k} \Delta V_b \dots (4.8.3)$$

donde  $k$  es el parámetro que controla la forma de la distribución de fuerzas y puede calcularse con el siguiente criterio:

$$k = \begin{cases} 1 + \frac{T - 0.5}{2} & \text{si } \text{seg} < T < 2.5 \text{seg} \dots (4.8.4) \\ 2.0 & \text{si } T \geq 2.5 \text{ seg} \end{cases}$$

donde  $T$  es el período de la estructura que se analiza; se puede observar de (4.8.3) que tiene una distribución de fuerzas exponenciales, incrementándose éstas a medida que se incrementa la altura de piso, si es que el peso de cada piso es similar (como en el caso del presente estudio); si  $k = 1$  se trata del método Lineal.

### 4.8.3 Método Modal Adaptativo

Será llamado método Modal a partir de ahora. Este tipo de distribución del perfil de incrementos laterales difiere significativamente de los demás, deduce sus ecuaciones de un análisis dinámico tratando de poner énfasis en que la distribución de fuerzas en cada piso no varía de una forma constante, de tal manera que la respuesta se parezca a la de un análisis dinámico inelástico. Normalmente se toma una forma invertida de distribución de fuerzas o desplazamientos en los análisis estáticos inelásticos, dado que las primeras formas de vibración son así, sobre todo cuando se realizan análisis dinámicos elásticos, pero no necesariamente ocurre esto en los análisis dinámicos inelásticos, en general el método Modal fue desarrollado para capturar los cambios en la distribución de fuerzas o desplazamientos laterales que se pueden presentar en un análisis dinámico inelástico, para esto consideran las formas de modo instantáneas de la matriz de rigidez tangente en cada paso. La distribución de fuerzas laterales se determina de dos formas, la primera es si se considera sólo el modo de vibración principal:

$$\Delta F_i = \frac{W_i \Phi_n}{\sum_{i=1}^n W_i \Phi_n} V_b - F_i^{anterior} \dots (4.8.5)$$

donde  $\Phi_n$  es la primera forma de modo en el piso  $i$ ,  $V_b$  es el cortante de la base de la estructura y  $F_i^{anterior}$  es la fuerza en el piso  $i$  del paso anterior, la segunda forma considera más modos de vibración y utiliza la combinación modal SRSS.

$$\Delta F_i = \frac{W_i \left[ \sum_{j=1}^{nm} (\Phi_{ij} \Gamma_j)^2 \right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^n W_i \left[ \sum_{j=1}^{nm} (\Phi_{ij} \Gamma_j)^2 \right]^{1/2}} V_b - F_i^{anterior} \dots (4.8.6)$$

donde  $\Phi_{ij}$  es el valor del modo  $j$  en el piso  $i$ ,  $\Gamma_j$  es el factor de participación modal del modo  $j$ ,  $V_b$  es el cortante de la base y  $F_i^{anterior}$  es la fuerza del piso  $i$  en el paso anterior.

La idea en este método, es encontrar un perfil de fuerzas  $f_i$ , a partir de un perfil de desplazamientos modales  $\psi_i$  (ese perfil puede ser (4.8.6));  $f_i$  y  $\psi_i$  están relacionados por  $K_{ti}\psi_i = f_i \dots$ (4.8.7), donde  $K_{ti}$  es la matriz de rigidez tangente de la estructura en el paso  $i$ .

Si se resuelve el problema de valores y vectores propios  $K_{ti}\phi = \lambda M\phi \dots$ (4.8.8) donde  $\lambda = w^2$ , considerando una aproximación modal  $\psi_i$  en base a los vectores propios  $\phi$ , se cumple que  $w^2\psi_i^T M\psi_i = \psi_i^T K_{ti}\psi_i \dots$ (4.8.9), si  $M^* = \psi_i^T M\psi_i \dots$ (4.8.10) y  $K^* = \psi_i^T K_{ti}\psi_i \dots$ (4.8.11); al ser  $\psi_i$  una aproximación modal de los vectores propios, se cumple que  $K_{ti}\psi_i \approx w^2 M\psi_i \dots$ (4.8.12), donde  $w = \sqrt{K^*/M^*} \dots$ (4.8.13), de esta manera el perfil de fuerzas para el siguiente paso es:

$$f_{i+1} = w^2 M\psi_i \dots(4.8.14)$$

donde  $f_{i+1}$  depende de las masas y de las formas de vibración de la matriz de rigidez tangente.

#### 4.9 Análisis de valores y vectores propios

El problema consiste en resolver la ecuación clásica de vectores y valores propios  $K_D\phi = w^2 M_D\phi \dots$ (4.9.1) . Donde  $K_D$  es la matriz de rigidez lateral condensada,  $M_D$  es la matriz diagonal de masa de la estructura,  $w$  la frecuencia natural de la estructura y  $\phi$  el correspondiente vector propio, esta ecuación entrega un número de vectores propios igual al número de pisos de la estructura; se debe tener en cuenta que se aprovecha la simetría de las matrices  $M_D$  y  $K_D$ .

#### 4.10 Matriz de amortiguamiento de la estructura

El programa IDARC utiliza el amortiguamiento de Rayleigh, para esto representa a la matriz de amortiguamiento como una combinación lineal de la matriz de masa de la estructura y la matriz de rigidez tangente de la estructura:

$$C = \alpha_M M + \alpha_K K_t \dots (4.10.1)$$

Por las propiedades de simetría y ortogonalidad de las matrices  $M$  y  $K$ , si multiplicamos a la ecuación anterior por la traspuesta de la matriz modal por la izquierda y por la matriz modal por la derecha, se tiene una matriz  $C^*$  diagonalizada donde:

$$C_j^* = \Phi_j^T C \Phi_j \dots (4.10.2), \quad M_j^* = \Phi_j^T M \Phi_j \dots (4.10.3), \quad K_j^* = \Phi_j^T K_t \Phi_j \dots (4.10.4)$$

$\Phi_j$  es el  $j$ -ésimo modo de vibración de la estructura; de (4.10.2), (4.10.3), (4.10.3) y (4.10.1) se tiene:

$$C_j^* = \alpha_M M_j^* + \alpha_K K_j^* \dots (4.10.5)$$

para sistemas desacoplados se puede considerar:

$$C_j^* = 2\xi_j w_j M_j^* \dots (4.10.6), \quad y \quad K_j^* = w_j^2 M_j^* \dots (4.10.7)$$

donde  $\xi_j$  es la proporción de amortiguamiento crítico del  $j$ -ésimo modo; reemplazando estas dos últimas expresiones en (4.10.5) se tiene:

$$\xi_j = \frac{\alpha_M}{2w_j} + \frac{\alpha_K w_j}{2} \dots (4.10.8)$$

Considerando la frecuencia natural de vibración del modo  $i$  y la frecuencia natural de vibración del modo  $j$  se tiene:

$$\alpha_M = \frac{2w_i w_j (\xi_i w_j - \xi_j w_i)}{w_j^2 - w_i^2} \dots (4.10.9), \quad \alpha_K = \frac{2(\xi_j w_j - \xi_i w_i)}{w_j^2 - w_i^2} \dots (4.10.10)$$

Si se considera que el amortiguamiento es sólo proporcional a la masa se tiene  $\alpha_K = 0$  y  $\alpha_M = 2\xi_i w_i \dots (4.10.11)$ ; en caso que el amortiguamiento sea proporcional a la rigidez se tiene que  $\alpha_M = 0$  y  $\alpha_K = \frac{2\xi_i}{w_i} \dots (4.10.12)$ ; por otro lado si se considera que las proporciones de amortiguamiento crítico son iguales para cada modo se tiene:

$$\alpha_M = \frac{2\xi w_i w_j}{w_i + w_j} \dots (4.10.13), \quad \alpha_K = \frac{2\xi}{w_i + w_j} \dots (4.10.14)$$

Para el presente trabajo se consideró que el amortiguamiento proporcional a la masa y a la rigidez utilizan la frecuencia angular del primer modo de vibración, en el caso de amortiguamiento tipo Rayleigh se utilizan los dos primeros modos de vibración.

#### 4.11 Análisis dinámico inelástico

El programa IDARC aproxima el sistema de ecuaciones diferenciales lineales, en cada incremento de tiempo (ver capítulo 3), mediante el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias lineales:

$$M\Delta u + C\Delta \dot{u} + K_1 u = -m\Delta x_{gh} + \Delta F_{err} \dots (4.11.1)$$

Donde  $M, C, K$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez (todas ellas simétricas),  $m$  es el vector de masas,  $\Delta x_{gh}$  es el incremento de aceleración en

la dirección horizontal y  $\Delta F_{err}$  es el vector de fuerzas desbalanceadas de la estructura. El método utilizado es el de Newmark-Beta, que tiene las propiedades estudiadas en el capítulo anterior, los integradores que utiliza son:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t((1-\gamma)\dot{u}_t + \gamma\dot{u}_{t+\Delta t}) \dots (4.11.2)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + (\Delta t)\dot{u}_t + (\Delta t)^2((0.5-\beta)\ddot{u}_t + \beta\ddot{u}_{t+\Delta t}) \dots (4.11.3)$$

Donde los valores de  $\gamma, \beta$  son parámetros que indican si la función de aceleración es constante o tiene una variación lineal durante el incremento de tiempo, en el caso de aceleración constante estos parámetros toman los valores de 0.5 y 0.25 respectivamente; en el caso de variación lineal de la aceleración  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = \frac{1}{6}$ .

Si reemplazamos los integradores (4.11.2) y (4.11.3) en (4.11.1), obtenemos el algoritmo de Newmark:

### Algoritmo de Newmark

1. Indicar los parámetros  $\gamma, \beta$ , calcular  $K, M$  y  $C$  iniciales, seleccionar  $\Delta t$  y el vector de fuerzas externas iniciales  $F_0$ . Hacer  $i = 0$ .

2. Indicar las condiciones iniciales  $(u_0, \dot{u}_0)$ , encontrar:

$$a = \frac{1}{\beta\Delta t}M + \frac{\gamma}{\beta}C, b = \frac{1}{2\beta}M + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)C \text{ y } u_0 = M^{-1}(F_0 - C\dot{u}_0 - Ku_0).$$

3. Actualizar  $C, a, b$  y  $K_{i_t}$  en casos no lineales. Hacer  $K_{D_i} = K_{i_t} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}M + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}C$ .

3.1 Hacer  $\Delta F_{D_i} = -m\Delta x_{gh_i} + \Delta F_{err} + a\dot{u}_t + bu_t$  si se utiliza método de desbalance de fuerzas.

3.2 Hacer  $\Delta F_{D_i} = -m\Delta x_{gh(t)} + a\dot{u}_t + bu_t$  si se utiliza método de Newton.

4. Resolver  $K_{D_i}\Delta u_i = \Delta F_{D_i}$ . Hacer  $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$ .

5. Hacer  $\Delta \dot{u}_{i+1} = \Delta t(1 - \frac{\gamma}{2\beta})\dot{u}_{i+1} - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u_{i+1}$ ,  $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i$ .
6. Hacer  $\Delta u_i = \frac{1}{\gamma\Delta t}\Delta \dot{u}_i - \frac{1}{\gamma}u_i$ ,  $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$ .
7. Hacer  $i = i+1$ , repetir el algoritmo desde el paso 3 hasta 7.

#### 4.12 Balance de energía

El programa realiza el cálculo de la energía disipada en cada lazo de histéresis, con la finalidad de determinar coeficientes de daño; las rutinas donde realiza estos cálculos son Bilinear y Monlin3 (ver apéndice H). Para el cálculo de expresiones de energía ver (1).

El balance de energía es un proceso que indica que la energía de entrada al sistema es igual a la suma de las energías cinética, amortiguamiento e histéresis; el no cumplimiento de este principio, es un indicativo de que existen errores en el análisis dinámico realizado.

Un integrador es estable (como los integradores del método de Newmark para valores de  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ ), si en cada paso de integración la energía tiende a un valor constante, ver capítulo III acápite 3.3.2.5.

# Capítulo V

## Propiedades de los pórticos propuestos para el estudio de la respuesta inelástica

### 5.1 Definición de pórticos

Para el siguiente estudio se consideran tres pórticos de concreto armado de cuatro pisos con las siguientes características comunes: el primer piso tiene una altura de 3.2m y el resto de pisos de 2.5m.

Los pórticos fueron extraídos de estructuras tridimensionales en las cuales se tuvo cuidado de que cumplieran los requisitos de la Norma E.030 (42, 43). Se consideraron las siguientes características del concreto para los tres pórticos:

$$f'c = 210 \text{ kg/cm}^2, E_c = 217\,000 \text{ kg/cm}^2, G_c = 86\,800 \text{ kg/cm}^2, \mu = 0.25$$

Las fases para la obtención de las estructuras fueron las siguientes:

#### 1° Predimensionamiento de las estructuras

Se comenzó por el predimensionamiento de las vigas cuyo peralte se encuentra entre la décima y doceava parte de la longitud libre de la viga, el ancho de las mismas se calculó  $b = 1.2 \frac{\text{ancho tributario}}{20} \dots (5.1.1)$ . Considerando si las

columnas eran centrales o laterales estas se predimensionaron con las siguientes

fórmulas:  $b \cdot d = \frac{1.25 \cdot PA}{0.25 f'c} \dots (5.1.2)$  y  $b \cdot d = \frac{1.3 \cdot PA}{0.3 f'c} \dots (5.1.3)$  respectivamente,

donde  $d$  es el peralte efectivo de la columna y  $PA$  es el peso acumulado de la columna hasta ese nivel. Las placas fueron predimensionadas con la fórmula

$\text{espesor} = \frac{\text{altura de piso}}{25} \dots (5.1.4)$ , si el resultado era menor que 20cm se tomaba



20cm o 25cm, en este trabajo se tomó 25cm, el espesor de la losa se predimensiona con la fórmula  $espesor = \frac{luz\ libre}{25} \dots (5.1.5)$ , redondeando por exceso este resultado al múltiplo de 5 más próximo, en este trabajo se tomó un espesor de 20cm.

## 2° Análisis de las estructuras

Para determinar los efectos de las cargas muertas, vivas y de sismo, se llevó a cabo un análisis estático equivalente y un análisis modal espectral, el modelo fue pseudo tridimensional y se realizó con ayuda de los programas A3e, A3s y SAP2000. Se consideró que las estructuras tendrían uso de oficinas.

Para la elaboración del espectro de aceleraciones se consideró  $Z=0.4$  (factor de zona),  $S=1$  (factor de suelo),  $U=1$  (factor de uso),  $T_p=0.4$  (parámetro del período del suelo),  $C = 2.5 \cdot \left( \frac{T_p}{T} \right) \dots (5.1.6)$ ,  $C \leq 2.5$ ,  $T$  es el período de la estructura. La

aceleración espectral se considera  $S_a = \frac{ZUSC}{R} g \dots (5.1.7)$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $R$  el factor de reducción, se consideró  $R=8$ .

Se considera un modelo de cortante simple para el análisis dinámico, con la hipótesis de losa rígida, las masas efectivas son las que corresponden a las cargas muertas mas el 25% de la carga viva, se supone que el sismo actúa horizontalmente en el plano del pórtico, se considera el 100% de brazo rígido en las vigas y el 80% de las inercias correspondientes a las secciones brutas de las vigas y columnas, para tomar en cuenta los efectos de agrietamiento.

Se tomó en cuenta que el 80% del cortante basal del análisis estático era menor o igual al cortante basal correspondiente al análisis dinámico, en caso contrario se escalarían los resultados hasta obtener un cortante basal igual al 80% del cortante estático, se hizo un control de distorsiones y giros de las estructuras analizadas considerando que  $(\Delta_i / h_i) \cdot 0.75R \leq 0.007 \dots (5.1.8)$ , donde  $\Delta_i$  es el desplazamiento de entrepiso y  $h_i$  la altura de entrepiso, asimismo el desplazamiento

relativo máximo entre dos pisos consecutivos no excedió 1.75 veces el desplazamiento relativo de los centros de masas.

En adelante al pórtico cuya longitud de vano es de 4m. se llamará (p4), al pórtico cuya longitud de vano es de 6m. (p6), y al pórtico cuya longitud de vano es de 8m. (p8). De acuerdo a esto se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 5.1  
Períodos y formas de modo de cada pórtico

pórtico	Períodos y formas de modo				
	modo	1	2	3	4
4	Periodo (seg.)	0.253	0.058	0.026	0.016
	Forma 1	0.278	0.194	-0.125	0.064
	Forma 2	0.199	-0.080	0.217	-0.195
	Modal 3	0.118	-0.231	0.031	0.250
	Modal 4	0.047	-0.178	-0.249	-0.155
	% masas efectivas	76.770	18.72	3.99	0.52
6	modo	1	2	3	4
	Periodo (seg.)	0.315	0.068	0.030	0.019
	Forma 1	0.240	0.165	-0.106	0.054
	Forma 2	0.170	-0.073	0.187	-0.166
	Modal 3	0.099	-0.201	0.022	0.215
	Modal 4	0.039	-0.152	-0.217	-0.137
% masas efectivas	76.010	19.36	4.08	0.54	
8	modo	1	2	3	4
	Periodo (seg.)	0.342	0.076	0.033	0.021
	Forma 1	0.212	0.147	-0.094	0.047
	Forma 2	0.150	-0.063	0.166	-0.146
	Modal 3	0.089	-0.177	0.019	0.189
	Modal 4	0.035	-0.134	-0.192	-0.123
% masas efectivas	76.520	18.91	4.02	0.55	

Tabla 5.2  
Desplazamientos y desplazamientos de entepiso de cada pórtico

pórtico	Nivel	desplazamiento (m)	desp. ent. (m)
4	4	0.00213	0.00062
	3	0.00152	0.00062
	2	0.00092	0.00055
	1	0.00037	0.00037
6	4	0.00335	0.00100
	3	0.00236	0.00099
	2	0.00140	0.00084
	1	0.00056	0.00056
8	4	0.00396	0.00117
	3	0.00281	0.00117
	2	0.00167	0.00100
	1	0.00067	0.00067

### 3° Diseño de los elementos estructurales

Para el diseño se tomaron en cuenta la superposición de los efectos de cargas muertas, cargas vivas y cargas sísmicas. Se utilizaron las combinaciones propuestas por la norma peruana (Norma de Cargas E.060). Se diseñó utilizando el método de la rotura para calcular las áreas de los aceros a lo largo del elemento, se trató de uniformizar el refuerzo de cada nivel; con la finalidad de conseguir que los pórticos sean dúctiles (9), se tomaron en cuenta las siguientes recomendaciones para el diseño:

- Las vigas deben de tener un refuerzo continuo a lo largo de su longitud libre constituido por dos barras con un área de acero no menor de  $\frac{1}{4}$  de la máxima requerida en los nudos.
- El momento resistente positivo en la cara del nudo, no será menor que  $\frac{1}{3}$  del momento negativo en la misma cara del nudo.
- El área de acero negativo en el centro de luz siempre será mayor o igual que  $\frac{1}{4}$  del área de acero negativo en el nudo o el acero mínimo.
- El área de acero positivo en el centro de luz siempre será mayor o igual que la tercera parte del área de acero continuo a lo largo de la viga o mayor o igual a la cuarta parte del área de acero positivo en el nudo.
- La cuantía mínima es  $14/f_y \dots (5.1.9)$ . De acuerdo a estas recomendaciones, los resultados obtenidos fueron:

Tabla 5.3

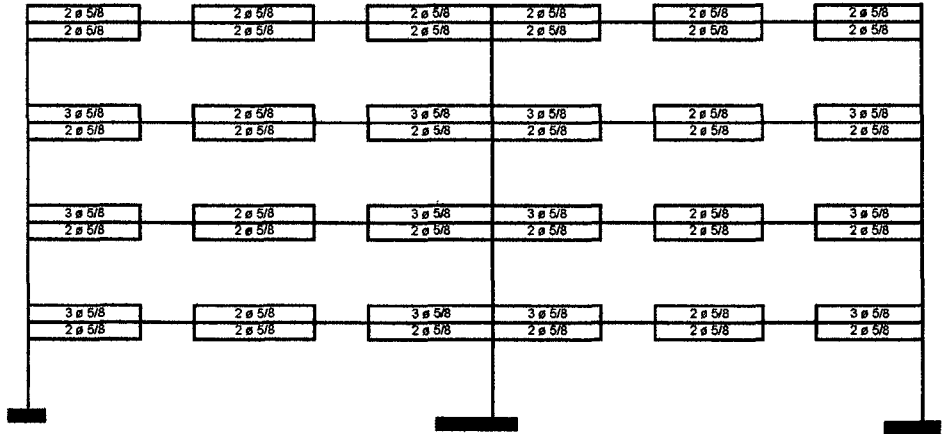
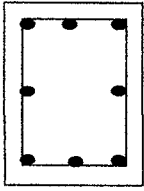
Dimensiones de los elementos de cada pórtico

PORTICO	NIVEL	VIGAS	COLUMNAS
P4	1-4	25 cm. x 40 cm.	30 cm. x 50 cm.
P6	1-4	30 cm. x 50 cm.	40 cm. x 50 cm.
P8	1-4	30 cm. x 70 cm.	30 cm. x 60 cm. 30 cm. x 70 cm.

PORTICO DE CUATRO PISOS Y 4 METROS DE LONGITUD DE VANOS

$P_{min}$	6.40
$P_b$	0.0216
$0.75P_b$	0.0162
$p-p' < 0.5P_b$	0.0108

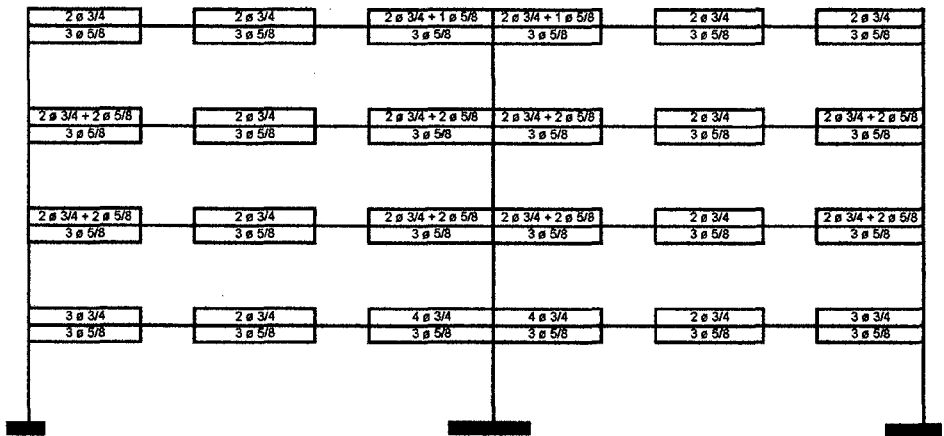
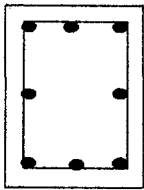
Columna 8  $\varnothing$  3/4



PORTICO DE CUATRO PISOS Y 6 METROS DE LONGITUD DE VANOS

$P_{min}$	6.40
$P_b$	0.0216
$0.75P_b$	0.0162
$p-p' < 0.5P_b$	0.0108

Columna 8  $\varnothing$  3/4



PORTICO DE CUATRO PISOS Y 8 METROS DE LONGITUD DE VANOS

$P_{min}$	6.40
$P_b$	0.0216
$0.75P_b$	0.0162
$p-p' < 0.5P_b$	0.0108

Columna 8  $\varnothing$  3/4

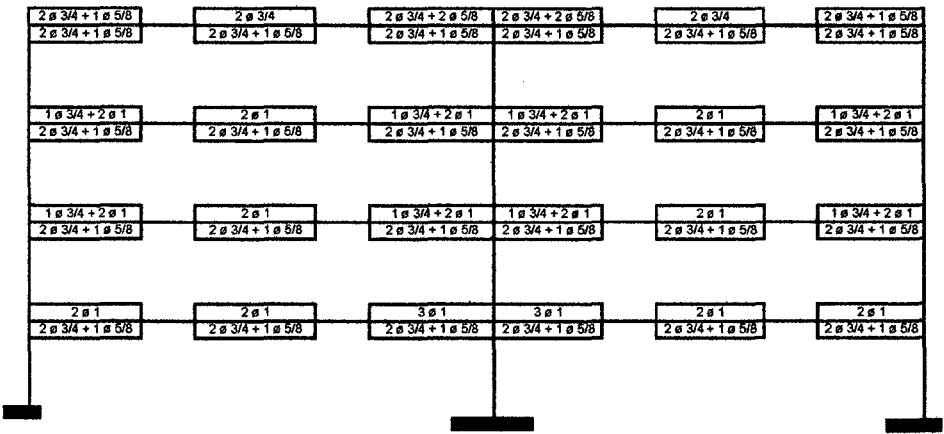
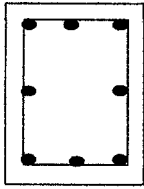


Figura 5.1 Distribución de refuerzos de acero en los pórticos

## 5.2 Metodología para la definición de pórticos

Se considera constante la dimensión paralela al eje Y, se hace variar la longitud de los vanos en la dirección X ( $L$ ), con el fin de tener estructuras de diferentes periodos para el estudio; se escogió una estructura simétrica para apreciar el efecto de la longitud de los vanos en la formación de los mecanismos de falla.

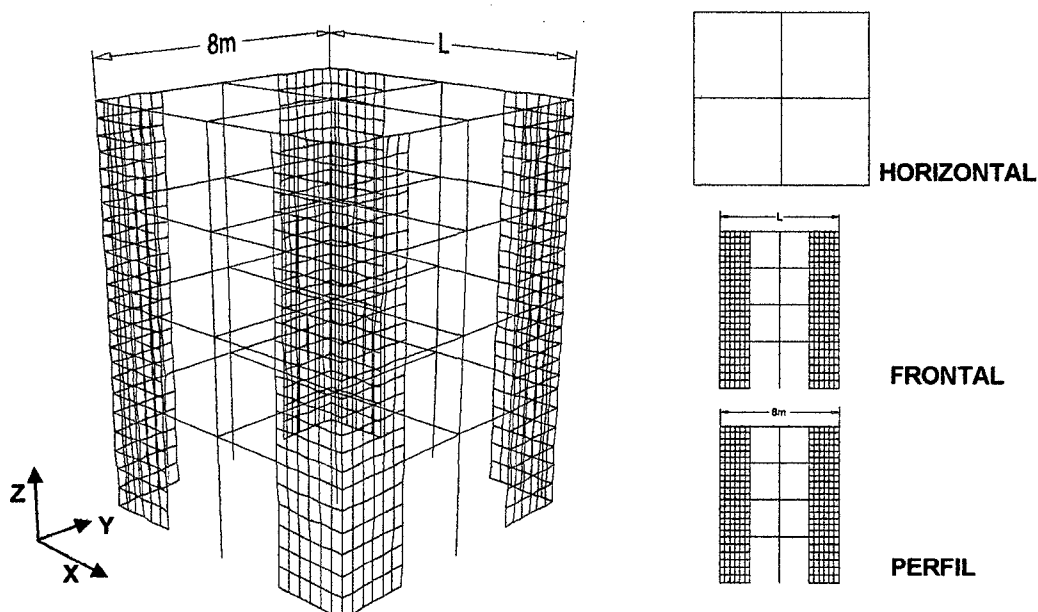


Figura 5.2 Forma de la Estructura

## 5.3 Registros sísmicos considerados

Se consideraron 3 registros sísmicos, para llevar a cabo el análisis dinámico elástico e inelástico tiempo-historia.

- Sismo Lima-Perú, 15 de Octubre de 1966 (OCT-66), Componente N08E, aceleración máxima 269.3 gals.
- Sismo Lima-Perú, 31 de Mayo de 1970 (MAY-70), Componente N82W, aceleración máxima 104.82 gals.

- Sismo Lima-Perú, 10 de Octubre de 1974 (OCT-74), Componente N82W, aceleración máxima 192.5 gals.

Para el estudio del análisis dinámico se trabajó con el registro sísmico completo. Hoy en día existen métodos para construir registros sísmicos con mayores valores de aceleración en base a réplicas menores, que cumplan con las leyes de la Geofísica (56), sin embargo se tomará en cuenta un escalamiento simple de los registros anteriores a 400, 600 y 800 gals (se puede considerar 400 gals una aceleración de diseño para el Perú, sin embargo 600 gals también es un valor a considerar, ambos valores de aceleración presentan normalmente períodos de retorno menores de 1000 años, 800 gals es un valor extremo que se utilizará sólo con fines comparativos).

Figuras 5.3a y 5.3b Registros de aceleraciones unitarias de 1974 y 1970

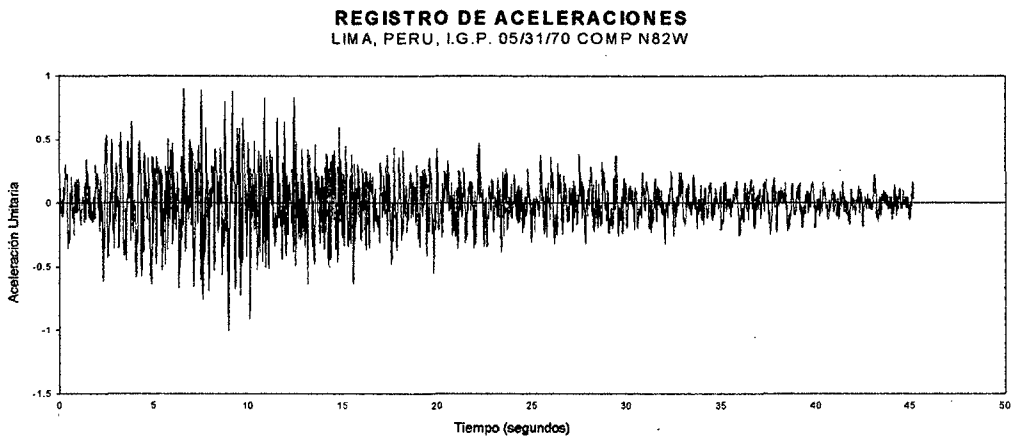
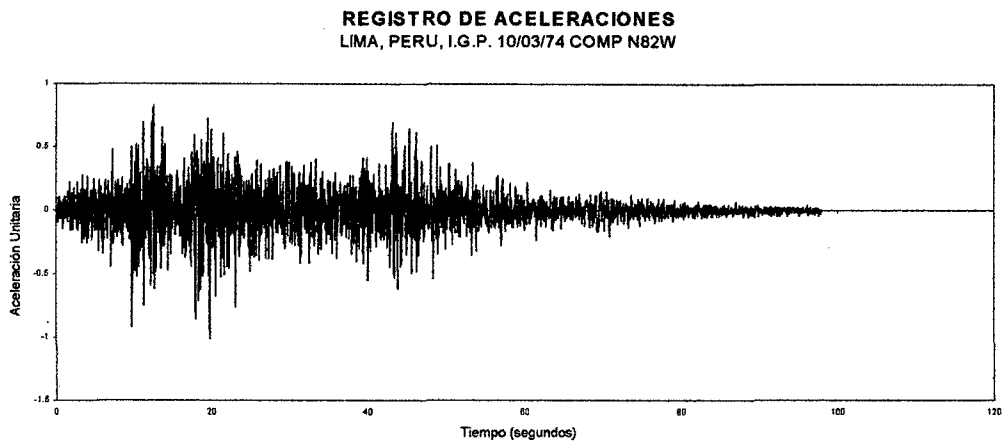
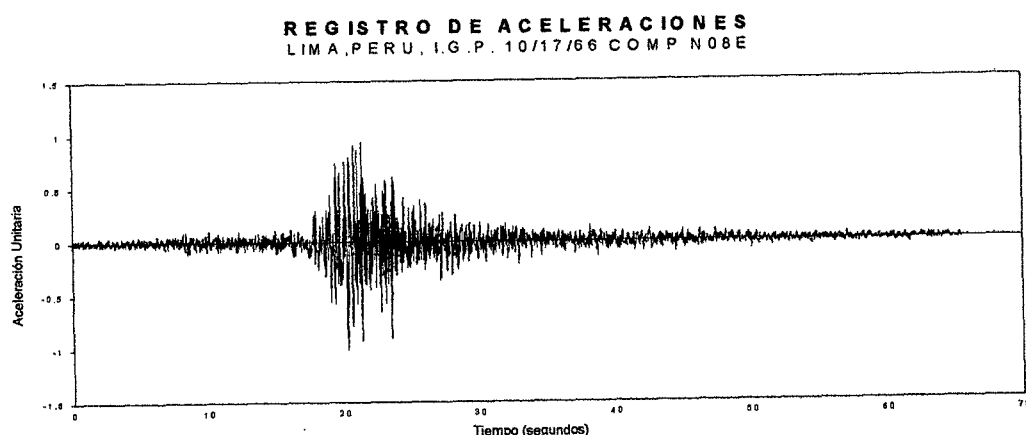


Figura 5.3c Registro de aceleración unitaria de 1966



## 5.4 Propiedades inelásticas de los pórticos

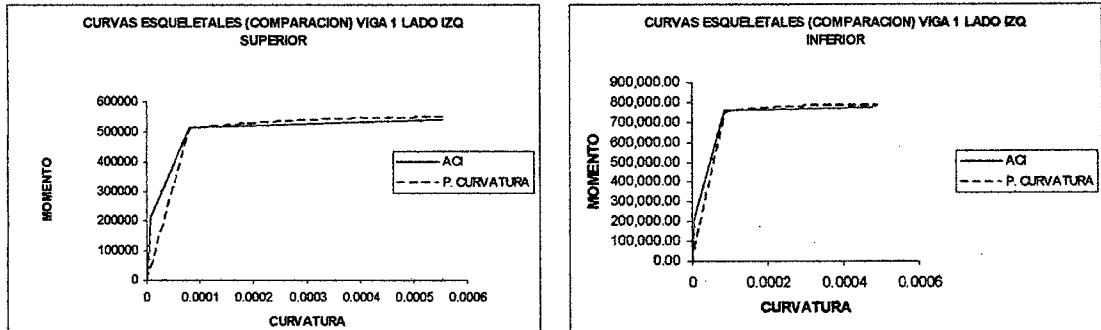
Las propiedades inelásticas (puntos de agrietamiento, fluencia y ruptura) serán calculadas con el algoritmo propuesto en (48), se construirá una curva trilineal del material y se definirá la fluencia aparente (72) para ser utilizada en modelos bilineales. Se considera que la sección falla cuando el concreto alcanza un desplazamiento unitario máximo (0.003).

### 5.4.1 Métodos para la obtención de las curvas esqueléticas de vigas

Para la obtención de los puntos de agrietamiento, fluencia y ruptura, el algoritmo de (48) es adecuado para el programa IDARC (ver sección 2.2), con ayuda del programa CURVATURA (apéndice A), se llevó a cabo el cálculo de los puntos fluencia y ruptura, para la validación de los resultados del programa CURVATURA se compararon sus resultados con los métodos del ACI (48) y las fórmulas para determinar los momentos de fluencia de SUGANO (63).

En la siguiente figura las unidades de los momentos flectores se encuentran en Kg-cm y las curvaturas en  $\text{cm}^{-1}$ .

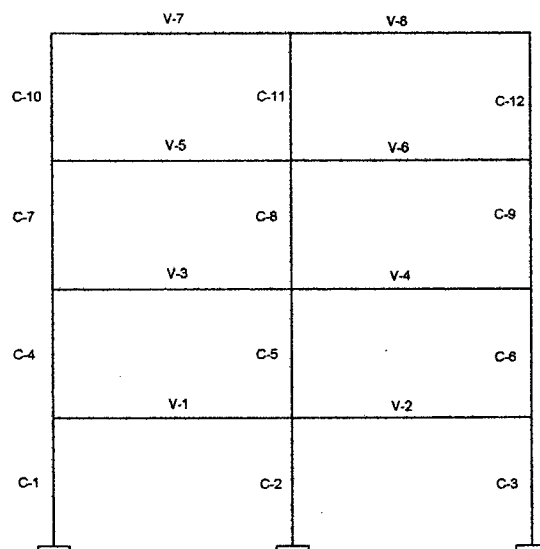
Figura 5.4 Curvas esqueléticas del pórtico 4



### 5.4.2 Determinación del momento de agrietamiento en las columnas

Existen diversas fórmulas para estimar el momento y la curvatura de agrietamiento (70, 72), se optó por la fórmula  $M_{cr} = \left( 2\sqrt{f'c} + \frac{P}{bh} \right) \frac{I}{y} \dots (5.4.1)$ , ésta conduce a  $M_{cr} = 2\sqrt{f'c}Ze + \frac{Ph}{6} \dots (5.4.2)$ ,  $Z_e$  es el módulo elástico de la sección,  $h$  el peralte y  $P$  fuerza axial, (5.4.2) es similar a  $M_{cr} = 1.8\sqrt{f'c}Ze + \frac{Ph}{6} \dots (5.4.3) (63)$ .

Figura 5.5 Identificación de los elementos de cada pórtico





### 5.4.3 Valores de las propiedades inelásticas de los pórticos

Las propiedades inelásticas determinadas por el programa CURVATURA se utilizan en los análisis estático y dinámico inelástico; en las columnas se considera que la fuerza axial permanece constante, esta hipótesis se debe a que utilizamos pórticos de poca altura, a continuación se indican algunas gráficas de las curvas esqueléticas obtenidas con el programa.

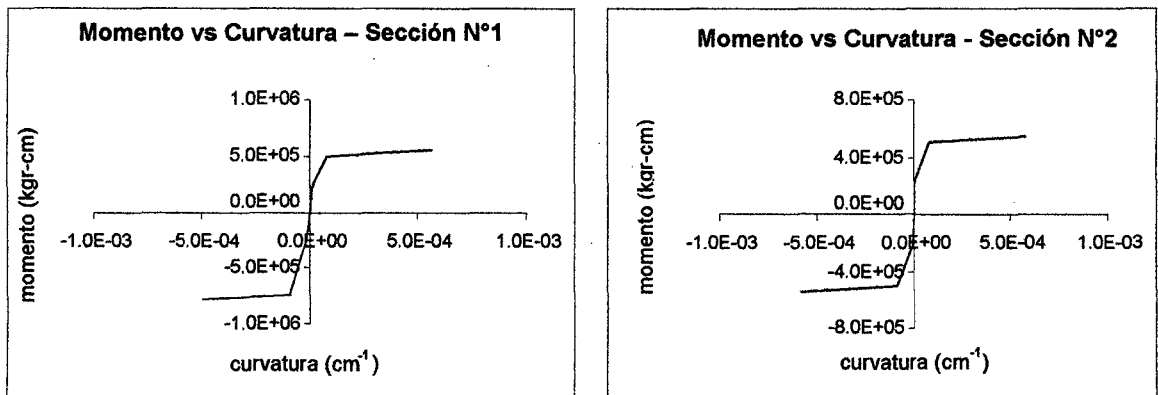


Figura 5.6a y 5.6b Diagramas Momento-Curvatura de las secciones 1 y 2 de p4

En las siguientes páginas se entregan las propiedades inelásticas de las vigas y columnas de p4, p6 y p8.

Tabla 5.4 PORTICO 4-VIGAS

SISTEMA: Kg/cm

Sección	Tipo	Mcr	$\phi_{cr}$	My	$\phi_y$	Mu	$\phi_u$	C. Ductilidad por momentos
1	SUP	213,999.38	0.0000074	502,346.72	8.15886E-05	546,701.01	0.000564556	32.90
1	INF	218,554.83	0.0000076	737,375.40	8.78067E-05	783,745.00	0.000489913	19.41
2	SUP	211,701.78	0.0000073	502,493.81	8.20625E-05	545,570.50	0.000582826	33.94

SISTEMA: Kg/cm

Sección	Tipo	1ª pendiente	3ª Pendiente	Ratio	% 3º/1ª	C. Ductilidad trilineal	Fluencia Aparente	
							My	$\phi_y$
1	SUP	28,933,333.333.33	91,837,124.18	0.003	0.32	6.92	496,429.57	1.71577E-05
1	INF	28,933,333.333.33	115,316,890.74	0.004	0.40	5.58	730,169.93	2.52359E-05
2	SUP	28,933,333.333.33	86,022,026.25	0.003	0.30	7.10	496,912.00	1.71744E-05

SISTEMA: kN/mm

Sección	Tipo	Mcr	$\phi_{cr}$	My	$\phi_y$	Mu	$\phi_u$	C. Ductilidad por momentos
1	SUP	20,993.34	7.3962920E-07	49,280.21	8.1588597E-06	53,631.37	5.6455553E-05	32.87
1	INF	21,440.23	7.5537385E-07	72,336.53	8.7806716E-06	76,885.38	4.8991263E-05	19.39
2	SUP	20,767.95	7.3168819E-07	49,294.64	8.2062470E-06	53,520.47	5.8282596E-05	33.90

SISTEMA: kN/mm

Sección	Tipo	1ª pendiente	3ª Pendiente	Ratio	% 3º/1ª	C. Ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente	
							My	$\phi_y$
1	SUP	28,354,666.666.67	90,092,218.82	0.00	0.32	6.92	48,699.74	1.71577E-06
1	INF	28,354,666.666.67	113,125,869.82	0.00	0.40	5.58	71,628.69	2.52359E-06
2	SUP	28,354,666.666.67	84,387,607.75	0.00	0.30	7.10	48,747.07	1.71744E-06

Figura 5.7 Distribución de tipos de sección en pórtico 4 (vigas)

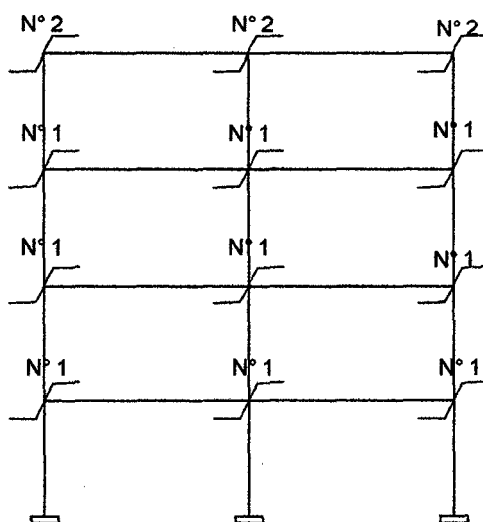


Tabla 5.5 PORTICO 6-VIGAS

SISTEMA: Kg/cm

Sección	Tipo	Mcr	$\varphi_{cr}$	My	$\varphi_y$	Mu	$\varphi_u$	C. Ductilidad por momentos
1	SUP	407,886.74	6.01492E-06	980,864.92	6.20571E-05	1,048,092.52	5.243E-04	36.50
1	INF	416,182.32	6.13725E-06	1,391,537.33	6.66258E-05	1,468,845.54	4.473E-04	21.95
2	SUP	412,829.44	6.08781E-06	986,075.18	6.18911E-05	1,048,386.99	5.199E-04	35.99
2	INF	430,332.33	6.34591E-06	1,826,069.47	7.06625E-05	1,923,193.19	3.715E-04	13.90
3	SUP	409,841.12	6.04374E-06	994,444.62	6.27281E-05	1,048,222.11	5.224E-04	35.82
3	INF	421,705.16	6.21869E-06	1,575,791.31	6.88395E-05	1,646,673.09	4.160E-04	18.01
4	SUP	406,309.84	5.99167E-06	969,873.07	6.15154E-05	1,047,971.81	5.260E-04	37.08
4	INF	411,793.13	6.07253E-06	1,251,039.87	6.51298E-05	1,327,244.95	4.739E-04	25.87

SISTEMA: Kg/cm

Sección	Tipo	1° pendiente	3° Pendiente	Ratio	% 3°/1°	C. Ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente	
							My	$\varphi_y$
1	SUP	67,812,500,000	145,447,156	0.002145	0.21	8.45	973,927.82	1.4362E-05
1	INF	67,812,500,000	203,059,694	0.002994	0.30	6.71	1,382,147.06	2.0382E-05
2	SUP	67,812,500,000	136,051,749	0.002006	0.20	8.40	979,620.19	1.4446E-05
2	INF	67,812,500,000	322,839,117	0.004761	0.48	5.26	1,811,882.78	2.6719E-05
3	SUP	67,812,500,000	117,003,456	0.001725	0.17	8.33	988,811.31	1.4582E-05
3	INF	67,812,500,000	204,195,440	0.003011	0.30	6.04	1,566,451.47	2.3100E-05
4	SUP	67,812,500,000	168,123,393	0.002479	0.25	8.55	961,915.71	1.4185E-05
4	INF	67,812,500,000	186,422,161	0.002749	0.27	7.28	1,242,313.46	1.8320E-05

SISTEMA: kN/mm

Sección	Tipo	Mcr	$\varphi_{cr}$	My	$\varphi_y$	Mu	$\varphi_u$	C. Ductilidad por momentos
1	SUP	40,788.67	5.9006362E-07	98,086.49	6.0877993E-06	104,809.25	5.1430919E-05	35.16
1	INF	41,618.23	6.0206431E-07	139,153.73	6.5359897E-06	146,884.55	4.3884296E-05	21.15
2	SUP	41,282.94	5.9721390E-07	98,607.52	6.0715218E-06	104,838.70	5.1001396E-05	34.66
2	INF	43,033.23	6.2253421E-07	182,606.95	6.9319940E-06	192,319.32	3.6444642E-05	13.41
3	SUP	40,984.11	5.9289090E-07	99,444.46	6.1536222E-06	104,822.21	5.1242648E-05	34.50
3	INF	42,170.52	6.1005384E-07	157,579.13	6.7531517E-06	164,667.31	4.0806326E-05	17.36
4	SUP	40,630.98	5.8778242E-07	96,987.31	6.0346615E-06	104,797.18	5.1605278E-05	35.71
4	INF	41,179.31	5.9571474E-07	125,103.99	6.3892306E-06	132,724.50	4.6490252E-05	24.92

SISTEMA: kN/mm

Sección	Tipo	1° pendiente	3° Pendiente	Ratio	% 3°/1°	C. Ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente	
							My	$\varphi_y$
1	SUP	66,500,000,000	148,264,176	0.00223	0.22	8.448195457	97,392.78	1.40892E-06
1	INF	66,500,000,000	206,992,553	0.00311	0.31	6.714254246	138,214.71	1.99946E-06
2	SUP	66,500,000,000	138,686,798	0.00209	0.21	8.400101043	97,962.02	1.41715E-06
2	INF	66,500,000,000	329,091,853	0.00495	0.49	5.257454271	181,188.28	2.62113E-06
3	SUP	66,500,000,000	119,269,578	0.00179	0.18	8.327233306	98,881.13	1.43045E-06
3	INF	66,500,000,000	208,150,295	0.00313	0.31	6.042560272	156,645.15	2.26608E-06
4	SUP	66,500,000,000	171,379,606	0.00258	0.26	8.551478601	96,191.57	1.39154E-06
4	INF	66,500,000,000	190,032,784	0.00286	0.29	7.276345857	124,231.35	1.79718E-06

Figura 5.8 Distribución de tipos de sección en pórtico 6 (vigas)

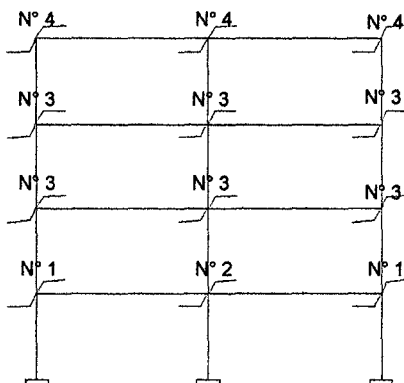


Tabla 5.6 PORTICO 8-VIGAS

SISTEMA: Kg/cm

Sección	Tipo	Mcr	$\phi_{cr}$	My	$\phi_y$	Mu	$\phi_u$	C. Ductilidad por momentos
1	SUP	805,797.15	4.3304E-06	1,860,777.831	4.15974E-05	1971151.735	4.810E-04	48.31
1	INF	817,903.23	4.3955E-06	2,431,945.885	4.38206E-05	2572611.583	4.147E-04	31.88
2	SUP	821,373.59	4.4141E-06	1,856,058.260	4.08404E-05	1970890.543	4.857E-04	48.91
2	INF	859,025.71	4.6165E-06	3,618,921.919	4.79205E-05	3796549.492	3.102E-04	16.04
3	SUP	814,618.61	4.3778E-06	1,868,607.107	4.13894E-05	1970988.181	4.840E-04	48.38
3	INF	840,889.62	4.5190E-06	3,113,733.627	4.63428E-05	3263895.591	3.519E-04	21.13
4	SUP	797,855.23	4.2878E-06	1,856,189.380	4.18657E-05	1971345.021	4.774E-04	48.08
5	SUP	804,299.90	4.3224E-06	1,849,230.224	4.14025E-05	1971184.202	4.804E-04	48.57
5	INF	814,077.74	4.3749E-06	2,329,807.278	4.35955E-05	2457999.475	4.260E-04	34.18

SISTEMA: Kg/cm

Sección	Tipo	1ª pendiente	3ª Pendiente	Ratio	% 3º/1ª	C. Ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente	
							My	$\phi_y$
1	SUP	186,077,500,000	251,184,325	0.00135	0.13	11.5635047	1,852,830.34	9.957E-06
1	INF	186,077,500,000	379,318,403	0.00204	0.20	9.4626390	2,420,257.61	1.301E-05
2	SUP	186,077,500,000	258,104,392	0.00139	0.14	11.8937923	1,848,080.62	9.932E-06
2	INF	186,077,500,000	677,218,564	0.00364	0.36	6.4734408	3,599,569.72	1.934E-05
3	SUP	186,077,500,000	231,313,704	0.00124	0.12	11.6937207	1,861,347.01	1.000E-05
3	INF	186,077,500,000	491,488,926	0.00264	0.26	7.5927098	3,099,142.46	1.666E-05
4	SUP	186,077,500,000	264,408,470	0.00142	0.14	11.4028261	1,847,745.28	9.930E-06
5	SUP	186,077,500,000	277,794,580	0.00149	0.15	11.6034137	1,840,476.48	9.891E-06
5	INF	186,077,500,000	335,193,071	0.00180	0.18	9.7725370	2,319,372.41	1.246E-05

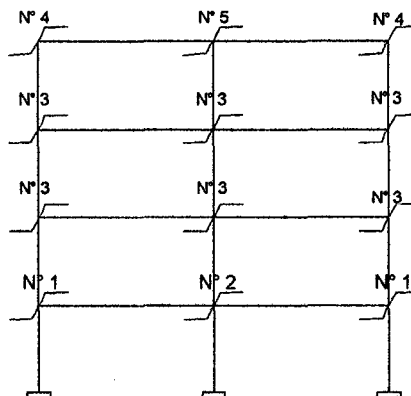
SISTEMA: kN/mm

Sección	Tipo	Mcr	$\phi_{cr}$	My	$\phi_y$	Mu	$\phi_u$	C. Ductilidad por momentos
1	SUP	80,579.71	4.2481601E-07	186,077.78	4.0807017E-06	197,115.17	4.7187213E-05	46.64
1	INF	81,790.32	4.3119833E-07	243,194.59	4.2988024E-06	257,261.16	4.0678015E-05	30.79
2	SUP	82,137.36	4.3302790E-07	185,605.83	4.0064389E-06	197,089.05	4.7651752E-05	47.22
2	INF	85,902.57	4.5287809E-07	361,892.19	4.7009985E-06	379,654.95	3.0431635E-05	15.51
3	SUP	81,461.86	4.2946668E-07	186,860.71	4.0603034E-06	197,098.82	4.7480054E-05	46.72
3	INF	84,088.96	4.4331675E-07	311,373.36	4.5462284E-06	326,389.56	3.4518193E-05	20.42
4	SUP	79,785.52	4.2062903E-07	185,618.94	4.1070274E-06	197,134.50	4.6831719E-05	46.42
5	SUP	80,429.99	4.2402666E-07	184,923.02	4.0615846E-06	197,118.42	4.7128247E-05	46.90
5	INF	81,407.77	4.2918153E-07	232,980.73	4.2767154E-06	245,799.95	4.1794360E-05	33.01

SISTEMA: kN/mm

Sección	Tipo	1ª pendiente	3ª Pendiente	Ratio	% 3º/1ª	C. Ductilidad trilineal	Fluencia Aparente	
							My	$\phi_y$
1	SUP	183,000,000,000	256,049,261	0.001	0.14	11.5635047	185,283.03	9.76812E-07
1	INF	183,000,000,000	386,665,039	0.002	0.21	9.4626390	242,025.76	1.27596E-06
2	SUP	183,000,000,000	263,103,355	0.001	0.14	11.8937923	184,808.06	9.74308E-07
2	INF	183,000,000,000	690,334,927	0.004	0.38	6.4734408	359,956.97	1.89769E-06
3	SUP	183,000,000,000	235,793,786	0.001	0.13	11.6937207	186,134.70	9.81302E-07
3	INF	183,000,000,000	501,008,080	0.003	0.27	7.5927098	309,914.25	1.63387E-06
4	SUP	183,000,000,000	269,529,531	0.001	0.15	11.4028261	184,774.53	9.74131E-07
5	SUP	183,000,000,000	283,174,903	0.002	0.15	11.6034137	184,047.65	9.70299E-07
5	INF	183,000,000,000	341,685,088	0.002	0.19	9.7725370	231,937.24	1.22277E-06

Figura 5.9 Distribución de tipos de sección en pórtico 8 (vigas)



A continuación se indican los tipos de secciones de las columnas en los pórticos p4, p6 y p8.

Figura 5.10 Tipos de sección en las columnas de p4, p6 y p8

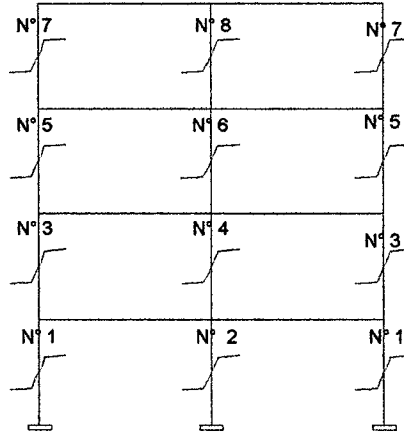


Tabla 5.7 PORTICO 4-COLUMNAS

SISTEMA: Kg/cm

Seccion	$\phi_{cr}$	Mcr	$\phi_y$	My	$\phi_u$	Mu	1ª pendiente
1	7.92412E-06	537,354.31	6.7302E-05	1,965,217.140	2.7813E-04	2,018,286.38	67,812,500.000
3	7.08670E-06	480,566.81	6.7892E-05	1,849,081.526	3.1023E-04	1,898,787.94	67,812,500.000
5	6.26079E-06	424,560.14	7.0540E-05	1,729,840.132	3.4779E-04	1,775,295.64	67,812,500.000
7	5.42661E-06	367,991.81	7.4538E-05	1,604,851.639	3.9277E-04	1,645,474.68	67,812,500.000
2	1.05549E-05	715,751.81	6.2572E-05	2,173,094.850	2.0370E-04	2,343,366.99	67,812,500.000
4	8.96396E-06	607,868.48	6.6373E-05	2,100,729.411	2.4515E-04	2,157,943.02	67,812,500.000
6	7.44285E-06	504,718.48	6.7865E-05	1,899,129.902	2.9590E-04	1,950,344.34	67,812,500.000
8	5.93809E-06	402,676.81	7.2069E-05	1,682,621.223	3.6429E-04	1,725,645.06	67,812,500.000

SISTEMA: Kg/cm

Seccion	3ª Pendiente	Ratio	% 3º/1ª	C. de ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente		C. de ductilidad por momentos
					My	$\phi_y$	
1	251,717,868.83	0.00371	0.37	4.133	1,955,534.93	2.8837E-05	9.64
3	205,115,671.45	0.00302	0.30	4.569	1,840,723.60	2.7144E-05	11.43
5	163,953,872.23	0.00242	0.24	4.930	1,722,439.18	2.5400E-05	13.69
7	127,653,369.71	0.00188	0.19	5.269	1,598,345.37	2.3570E-05	16.66
2	1,206,524,084.21	0.01779	1.78	3.255	2,135,596.84	3.1493E-05	6.47
4	320,025,966.33	0.00472	0.47	3.694	2,089,348.56	3.0811E-05	7.96
6	224,590,448.19	0.00331	0.33	4.360	1,890,148.12	2.7873E-05	10.62
8	147,231,843.28	0.00217	0.22	5.055	1,675,648.54	2.4710E-05	14.74

SISTEMA: kN/mm

Seccion	$\phi_{cr}$	Mcr	$\phi_y$	My	$\phi_u$	Mu	1ª pendiente
1	7.9241E-07	52,714.46	6.73019E-06	192,787.801	2.7813E-05	197,993.89	66,524,062,500
3	7.0867E-07	47,143.60	6.78917E-06	181,394.898	3.1023E-05	186,271.10	66,524,062,500
5	6.2608E-07	41,649.35	7.05405E-06	169,697.317	3.4779E-05	174,156.50	66,524,062,500
7	5.4266E-07	36,100.00	7.45383E-06	157,435.946	3.9277E-05	161,421.07	66,524,062,500
2	1.0555E-06	70,215.25	6.25720E-06	213,180.605	2.0370E-05	229,884.30	66,524,062,500
4	8.9640E-07	59,631.90	6.63729E-06	206,081.555	2.4515E-05	211,694.21	66,524,062,500
6	7.4429E-07	49,512.88	6.78650E-06	186,304.643	2.9590E-05	191,328.78	66,524,062,500
8	5.9381E-07	39,502.60	7.20686E-06	165,065.142	3.6429E-05	169,285.78	66,524,062,500

SISTEMA: kN/mm

Seccion	3ª Pendiente	Ratio	% 3º/1ª	C. de ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente		C. de ductilidad por momentos
					My	$\phi_y$	
1	246,935,229.33	0.003711969	0.371196857	4.132575013	191,837.98	2.8837E-06	9.64
3	201,218,473.69	0.003024747	0.302474723	4.569413722	180,574.98	2.7144E-06	11.43
5	160,838,748.66	0.002417753	0.241775295	4.930307706	168,971.28	2.5400E-06	13.69
7	125,227,955.69	0.001882446	0.1882446	5.269339119	156,797.68	2.3570E-06	16.66
2	1,183,600,126.61	0.01779206	1.779206023	3.255419207	209,502.05	3.1493E-06	6.47
4	313,945,472.97	0.004719277	0.471927692	3.69353792	204,965.09	3.0811E-06	7.96
6	220,323,229.67	0.003311933	0.331193288	4.360125955	185,423.53	2.7873E-06	10.62
8	144,434,438.26	0.002171161	0.217116082	5.054726247	164,381.12	2.4710E-06	14.74

Tabla 5.8 PORTICO 6-COLUMNAS

SISTEMA: Kg/cm

Seccion	$\phi_{cr}$	Mcr	$\phi_y$	My	$\phi_u$	Mu	1ª pendiente
1	8.31663E-06	751,962.14	6.92E-05	2,719,267.18	2.889E-04	2,792,615.20	90,416,666,666.67
3	7.37058E-06	666,422.97	6.95E-05	2,541,877.38	3.267E-04	2,608,117.92	90,416,666,666.67
5	6.43912E-06	582,203.80	7.03E-05	2,358,291.88	3.714E-04	2,417,733.65	90,416,666,666.67
7	5.50256E-06	497,522.97	7.21E-05	2,168,255.58	4.248E-04	2,218,809.25	90,416,666,666.67
2	1.16205E-05	1,050,691.30	6.68E-05	3,158,442.14	1.989E-04	3,320,800.03	90,416,666,666.67
4	9.75898E-06	882,374.64	6.86E-05	2,972,380.04	2.431E-04	3,054,381.78	90,416,666,666.67
6	7.96101E-06	719,807.97	6.88E-05	2,653,360.15	3.023E-04	2,724,382.86	90,416,666,666.67
8	6.17341E-06	558,178.80	7.08E-05	2,304,356.95	3.856E-04	2,362,001.50	90,416,666,666.67

SISTEMA: Kg/cm

Seccion	3ª Pendiente	Ratio	% 3ª/1ª	C. de ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente		C. de ductilidad por momentos
					My	$\phi_y$	
1	333,855,881.49	3.69E-03	0.37	4.1732	2,706,144.68	2.993E-05	9.65
3	257,517,984.36	2.85E-03	0.28	4.7008	2,531,187.58	2.799E-05	11.67
5	197,467,105.31	2.18E-03	0.22	5.2799	2,349,534.44	2.599E-05	14.29
7	143,333,506.00	1.59E-03	0.16	5.8887	2,161,340.97	2.390E-05	17.77
2	1,228,280,129.81	1.36E-02	1.36	2.9802	3,118,818.07	3.449E-05	5.77
4	469,886,117.62	5.20E-03	0.52	3.5443	2,955,509.83	3.269E-05	7.44
6	304,175,660.48	3.36E-03	0.34	4.3917	2,641,305.89	2.921E-05	10.35
8	183,113,075.20	2.03E-03	0.20	5.4463	2,296,042.45	2.539E-05	15.18

SISTEMA: kN/mm

Seccion	$\phi_{cr}$	Mcr	$\phi_y$	My	$\phi_u$	Mu	1ª pendiente
1	8.31663E-07	73,767.49	6.92E-06	266,760.11	2.88935E-05	273,955.55	88,698,750,000.00
3	7.37058E-07	65,376.09	6.95E-06	249,358.17	3.26732E-05	255,856.37	88,698,750,000.00
5	6.43912E-07	57,114.19	7.03E-06	231,348.43	3.71356E-05	237,179.67	88,698,750,000.00
7	5.50256E-07	48,807.00	7.21E-06	212,705.87	4.24845E-05	217,665.19	88,698,750,000.00
2	1.16205E-06	103,072.82	6.68E-06	309,843.17	1.98937E-05	325,770.48	88,698,750,000.00
4	9.75898E-07	86,560.95	6.86E-06	291,590.48	2.43104E-05	299,634.85	88,698,750,000.00
6	7.96101E-07	70,613.16	6.88E-06	260,294.63	3.02334E-05	267,261.96	88,698,750,000.00
8	6.17341E-07	54,757.34	7.08E-06	226,057.42	3.85603E-05	231,712.35	88,698,750,000.00

SISTEMA: kN/mm

Seccion	3ª Pendiente	Ratio	% 3ª/1ª	C. de ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente		C. de ductilidad por momentos
					My	$\phi_y$	
1	327,512,619.74	3.69E-03	0.369	4.1732	265,472.79	2.99E-06	9.65
3	252,625,142.65	2.85E-03	0.285	4.7008	248,309.50	2.80E-06	11.67
5	193,715,230.31	2.18E-03	0.218	5.2799	230,489.33	2.60E-06	14.29
7	140,610,169.39	1.59E-03	0.159	5.8887	212,027.55	2.39E-06	17.77
2	1,204,942,807.34	1.36E-02	1.358	2.9802	305,956.05	3.45E-06	5.77
4	460,958,281.38	5.20E-03	0.520	3.5443	289,935.51	3.27E-06	7.44
6	298,396,322.93	3.36E-03	0.336	4.3917	259,112.11	2.92E-06	10.35
8	179,633,926.77	2.03E-03	0.203	5.4463	225,241.76	2.54E-06	15.18

Tabla 5.9 PORTICO 8-COLUMNAS

SISTEMA: Kg/cm

Seccion	$\phi_{cr}$	Mcr	$\phi_y$	My	$\phi_u$	Mu	1ª pendiente
1	8.2314E-06	964,560.61	5.87853E-05	3,533,003.22	1.959E-04	3,608,239.38	1.17E+11
3	7.1018E-06	832,190.61	5.84142E-05	3,253,692.66	2.360E-04	3,358,046.20	1.17E+11
5	5.9738E-06	700,015.61	5.89593E-05	2,979,640.46	2.825E-04	3,070,538.05	1.17E+11
7	4.8395E-06	567,095.61	5.99075E-05	2,685,622.93	3.439E-04	2,760,897.12	1.17E+11
2	9.9780E-06	1,856,673.05	3.58465E-05	4,580,769.39	1.213E-04	5,170,960.18	1.86E+11
4	8.1994E-06	1,525,724.71	3.07362E-05	4,005,184.94	1.446E-04	4,859,918.73	1.86E+11
6	6.4784E-06	1,205,486.38	4.77824E-05	4,181,907.53	1.984E-04	4,313,142.07	1.86E+11
8	4.7668E-06	886,986.38	4.81752E-05	3,497,637.35	2.899E-04	3,614,822.01	1.86E+11

SISTEMA: Kg/cm

Seccion	3ª Pendiente	Ratio	% 3º/1ª	C. de ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente		C. de ductilidad por momentos
					My	$\phi_y$	
1	548,873,440.11	4.684E-03	0.468	3.3318	3,517,212.25	3.0015E-05	6.53
3	587,701,711.14	5.015E-03	0.502	4.0397	3,235,590.22	2.7612E-05	8.55
5	406,656,522.29	3.470E-03	0.347	4.7912	2,965,957.23	2.5311E-05	11.16
7	265,074,093.15	2.262E-03	0.226	5.7402	2,675,795.95	2.2835E-05	15.06
2	6,905,129,055.54	3.711E-02	3.711	3.3844	4,500,243.79	2.4185E-05	5.02
4	7,507,524,493.05	4.035E-02	4.035	4.7041	3,933,118.85	2.1137E-05	6.84
6	871,097,923.90	4.681E-03	0.468	4.1529	4,159,757.76	2.2355E-05	8.88
8	484,874,058.42	2.606E-03	0.261	6.0167	3,483,355.26	1.8720E-05	15.48

SISTEMA: kN/mm

Seccion	$\phi_{cr}$	Mcr	$\phi_y$	My	$\phi_u$	Mu	1ª pendiente
1	8.2314E-07	94,623.40	5.87853E-06	346,587.62	1.9586E-05	353,968.28	1.14954E+11
3	7.1018E-07	81,637.90	5.84142E-06	319,187.25	2.3598E-05	329,424.33	1.14954E+11
5	5.9738E-07	68,671.53	5.89593E-06	292,302.73	2.8248E-05	301,219.78	1.14954E+11
7	4.8395E-07	55,632.08	5.99075E-06	263,459.61	3.4388E-05	270,844.01	1.14954E+11
2	9.9780E-07	182,139.63	3.58465E-06	449,373.48	1.2132E-05	507,271.19	1.82542E+11
4	8.1994E-07	149,673.59	3.07362E-06	392,908.64	1.4459E-05	476,758.03	1.82542E+11
6	6.4784E-07	118,258.21	4.77824E-06	410,245.13	1.9844E-05	423,119.24	1.82542E+11
8	4.7668E-07	87,013.36	4.81752E-06	343,118.22	2.8986E-05	354,614.04	1.82542E+11

SISTEMA: kN/mm

Seccion	3ª Pendiente	Ratio	% 3º/1ª	C. de ductilidad por curvatura	Fluencia Aparente		C. de ductilidad por momentos
					My	$\phi_y$	
1	538,444,844.74	4.68E-03	0.468	3.3318	345,038.52	3.00155E-06	6.53
3	576,535,378.63	5.02E-03	0.502	4.0397	317,411.40	2.76121E-06	8.55
5	398,930,048.37	3.47E-03	0.347	4.7912	290,960.40	2.53111E-06	11.16
7	260,037,685.38	2.26E-03	0.226	5.7402	262,495.58	2.28349E-06	15.06
2	6,773,931,603.49	3.71E-02	3.711	3.3844	441,473.92	2.41848E-06	5.02
4	7,364,881,527.68	4.03E-02	4.035	4.7041	385,838.96	2.1137E-06	6.84
6	854,547,063.34	4.68E-03	0.468	4.1529	408,072.24	2.2355E-06	8.88
8	475,661,451.31	2.61E-03	0.261	6.0167	341,717.15	1.87199E-06	15.48

# Capítulo VI

## Estudio de la Respuesta Inelástica

### 6.1 Análisis elástico tiempo-historia

Para comparar la respuesta inelástica global y local de los pórticos definidos en el capítulo anterior, se realizan diversos análisis elásticos tiempo-historia, utilizando registros sísmicos (indicados también en el capítulo anterior) escalados a diferentes niveles de aceleración. En el presente capítulo, cuando no se indique la unidad de medida de la aceleración en una tabla, se debe tener en cuenta que la unidad de medida es  $\text{cm}/\text{seg}^2$ .

#### 6.1.1 Resumen del análisis tiempo-historia-vigas

Con la finalidad de tomar en cuenta la degradación de rigidez en los pórticos, debido a las diferentes incursiones en el rango inelástico, se buscó un tipo de amortiguamiento apropiado, con tal motivo se compararon los resultados del análisis elástico tiempo-historia con los siguientes tipos de amortiguamiento: Rayleigh, Rigidez y Masas (se tomó como patrón de comparación el amortiguamiento de Rayleigh). Existen curvas de aproximación de estos tipos de amortiguamiento (24).

A continuación se muestra una tabla de comparación de los momentos flectores en las vigas:

Tabla 6.1 Diferencias en los momentos flectores, debidas al tipo de amortiguamiento

Pórtico	Pisos	Masa-Rayleigh	Rigidez-Rayleigh
		diferencia en momentos	diferencia en momentos
4	1-2	0.01%-03.67%	0.06%-02.19%
	3-4	0.03%-12.01%	0.03%-06.28%
6	1-2	0.66%-04.14%	0.14%-0.30%
	3-4	4.47%-14.42%	0.39%-12.07%
8	1-2	0.27%-06.69%	0.30%-4.38%
	3-4	0.75%-21.66%	0.84%-13.15%



Se puede decir que en los dos primeros niveles, los momentos flectores y las curvaturas de los pórticos con amortiguamiento por Rigidez, Masas y Rayleigh, tienen valores más próximos que en los dos últimos niveles; en el rango elástico los momentos y las curvaturas son proporcionales, por tanto su porcentaje de variación será el mismo; se puede ver en la tabla anterior una mejor aproximación entre los resultados de los pórticos que utilizan amortiguamiento por Rigidez y Rayleigh.

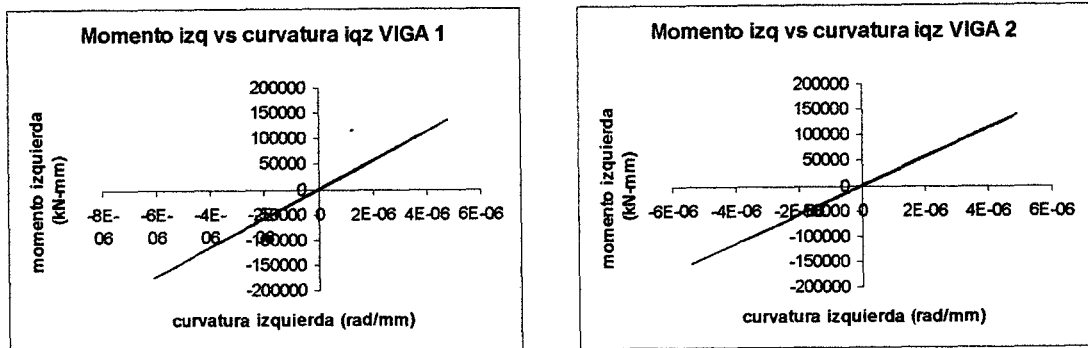


Figura 6.1 Comportamiento típico de vigas en el análisis elástico tiempo-historia, Pórtico 4 sismo 66 aceleración 600 gals

Se presenta una tabla resumida de los resultados de la viga 1, analizada con los tres tipos de amortiguamiento.

Tabla 6.2 Resultados de la viga 1 de p4 con el registro sísmico de 1966

Pórtico	Sismo	Acel	viga	Amortigua miento	Momento Izquierda (kN-mm)				Momento Derecha (kN-mm)			
					máximo	$\phi$ (rad/mm)	mínimo	$\phi$ (rad/mm)	máximo	$\phi$ (rad/mm)	mínimo	$\phi$ (rad/mm)
4	66	600	1	MASA	138,297.0	4.872E-06	-174,663.0	-6.154E-06	166,046.0	5.850E-06	-130,454.0	-4.596E-06
				RIGIDEZ	136,258.0	4.801E-06	-173,239.0	-6.103E-06	164,702.0	5.803E-06	-128,549.0	-4.529E-06
				RAYLEIGH	137,814.0	4.855E-06	-174,260.0	-6.139E-06	165,667.0	5.837E-06	-130,002.0	-4.580E-06
6	66	600	1	MASA	333,723.0	5.017E-06	-379,474.0	-5.704E-06	360,587.0	5.420E-06	-315,780.0	-4.747E-06
				RIGIDEZ	336,619.0	5.060E-06	-373,068.0	-5.608E-06	354,772.0	5.333E-06	-318,894.0	-4.794E-06
				RAYLEIGH	331,299.0	4.980E-06	-375,399.0	-5.643E-06	357,077.0	5.368E-06	-313,527.0	-4.713E-06
8	66	600	1	MASA	908,094.0	4.975E-06	-950,139.0	-5.205E-06	934,343.0	5.119E-06	-890,452.0	-4.878E-06
				RIGIDEZ	886,889.0	4.859E-06	-973,098.0	-5.331E-06	956,556.0	5.240E-06	-869,796.0	-4.765E-06
				RAYLEIGH	898,917.0	4.924E-06	-967,278.0	-5.299E-06	950,961.0	5.210E-06	-881,528.0	-4.829E-06

### 6.1.2 Resumen del análisis tiempo-historia-columnas

Las variaciones de los momentos flectores y curvaturas al hacer la comparación Masa-Rayleigh se encuentran entre 0.01%-13.29% en los dos primeros niveles y entre 0.08%-37% en los dos últimos niveles, en la comparación Rigidez-Rayleigh las variaciones se encuentran entre 0.01%-9.58% en los dos primeros niveles y 0.06%-19.92% en los dos últimos pisos; sin embargo, nuevamente los pórticos con amortiguamientos de Rigidez y Rayleigh presentan resultados más próximos.

A continuación se presenta una tabla de resumen que contiene la columna 1, analizada con los 3 tipos de amortiguamiento.

Tabla 6.3 Resultados de la columna 1 de p4 con el registro sísmico de 1966

Pórtico	Sismo	Acel	columna	Amortiguamiento	Momento Superior (kN-mm)				Momento Inferior (kN-mm)			
					máximo	$\varphi$ (rad/mm)	mínimo	$\varphi$ (rad/mm)	máximo	$\varphi$ (rad/mm)	mínimo	$\varphi$ (rad/mm)
4	66	600	1	MASA	96,081.9	1.444E-06	-81,180.2	-1.220E-06	204,562.0	3.075E-06	-239,716.0	-3.603E-06
				RIGIDEZ	94,991.7	1.428E-06	-78,517.3	-1.180E-06	200,178.0	3.009E-06	-237,415.0	-3.569E-06
				RAYLEIGH	95,663.1	1.438E-06	-80,664.0	-1.213E-06	203,641.0	3.061E-06	-238,954.0	-3.592E-06
6	66	600	1	MASA	233,260.0	2.630E-06	-209,172.0	-2.358E-06	481,710.0	5.431E-06	-530,218.0	-5.978E-06
				RIGIDEZ	198,179.0	2.234E-06	-182,102.0	-2.053E-06	449,563.0	5.068E-06	-485,422.0	-5.473E-06
				RAYLEIGH	218,717.0	2.466E-06	-189,322.0	-2.134E-06	460,642.0	5.193E-06	-509,544.0	-5.745E-06
8	66	600	1	MASA	486,537.0	4.232E-06	-496,258.0	-4.317E-06	946,312.0	8.232E-06	-947,357.0	-8.241E-06
				RIGIDEZ	450,643.0	3.920E-06	-437,509.0	-3.806E-06	891,500.0	7.755E-06	-932,511.0	-8.112E-06
				RAYLEIGH	453,059.0	3.941E-06	-451,554.0	-3.928E-06	910,439.0	7.920E-06	-915,293.0	-7.962E-06

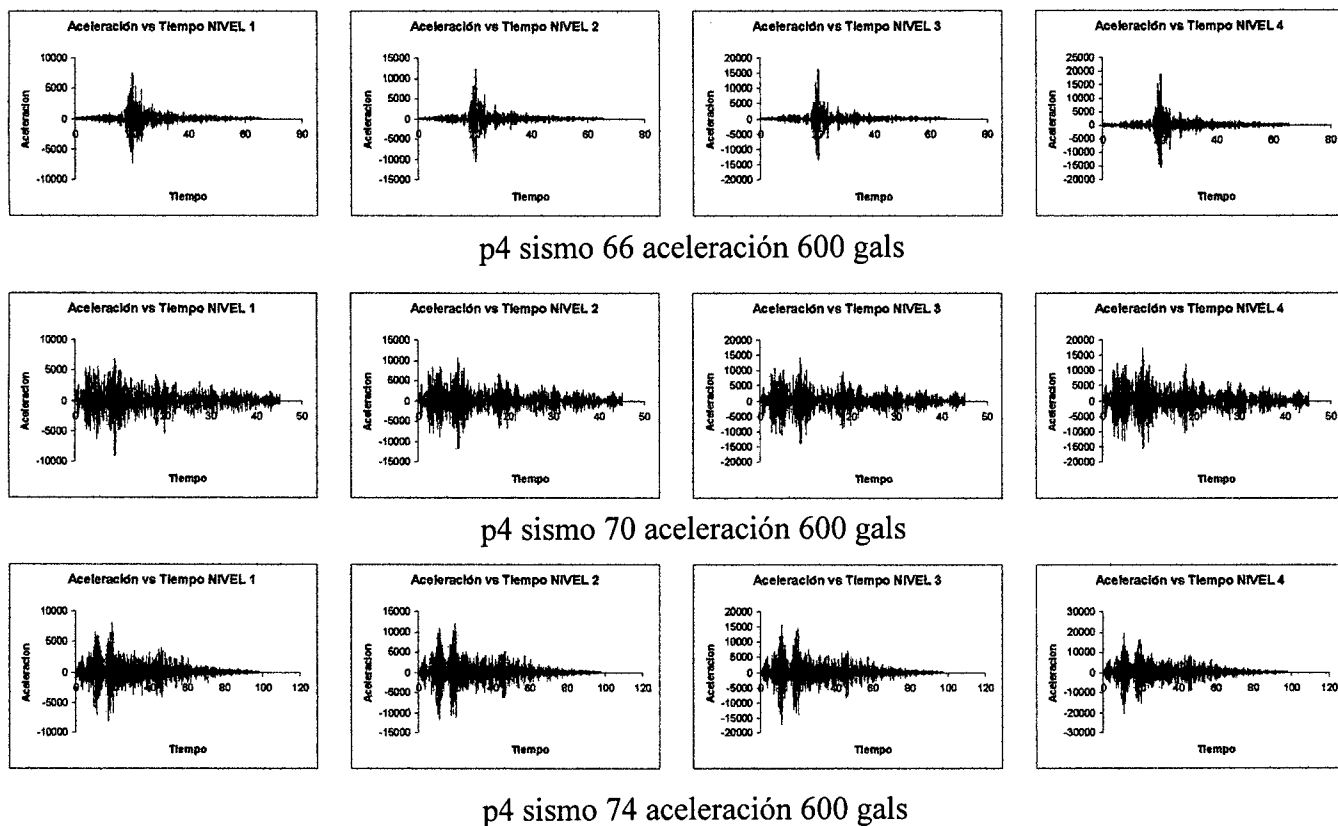
### 6.1.3 Resumen de las aceleraciones y desplazamientos de cada piso

De los resultados de los análisis elásticos tiempo-historia efectuados a los pórticos p4, p6 y p8, se puede decir que en las comparaciones Masa-Rayleigh, las variaciones en aceleración del primer y segundo nivel están entre 0.11%-45.42% y en los dos últimos niveles entre 0.01%-23.13%, para Rigidez-Rayleigh nuevamente los valores obtenidos son más próximos y se encuentran entre 0.0%-24.73% en los dos primeros niveles y entre 0.1%-15% en los dos últimos niveles.

En cuanto a desplazamientos, la diferencia del amortiguamiento no es importante, variando entre 0.08%-5.83% para Masa-Rayleigh, siendo esta diferencia menor a medida que se sube de nivel, y en comparaciones Rigidez-Rayleigh las

variaciones están entre 0.01%-3.44%, se puede afirmar que el amortiguamiento influye más en el nivel de aceleración que en el nivel de desplazamiento.

Figura 6.2 Aceleraciones con amortiguamiento tipo rigidez



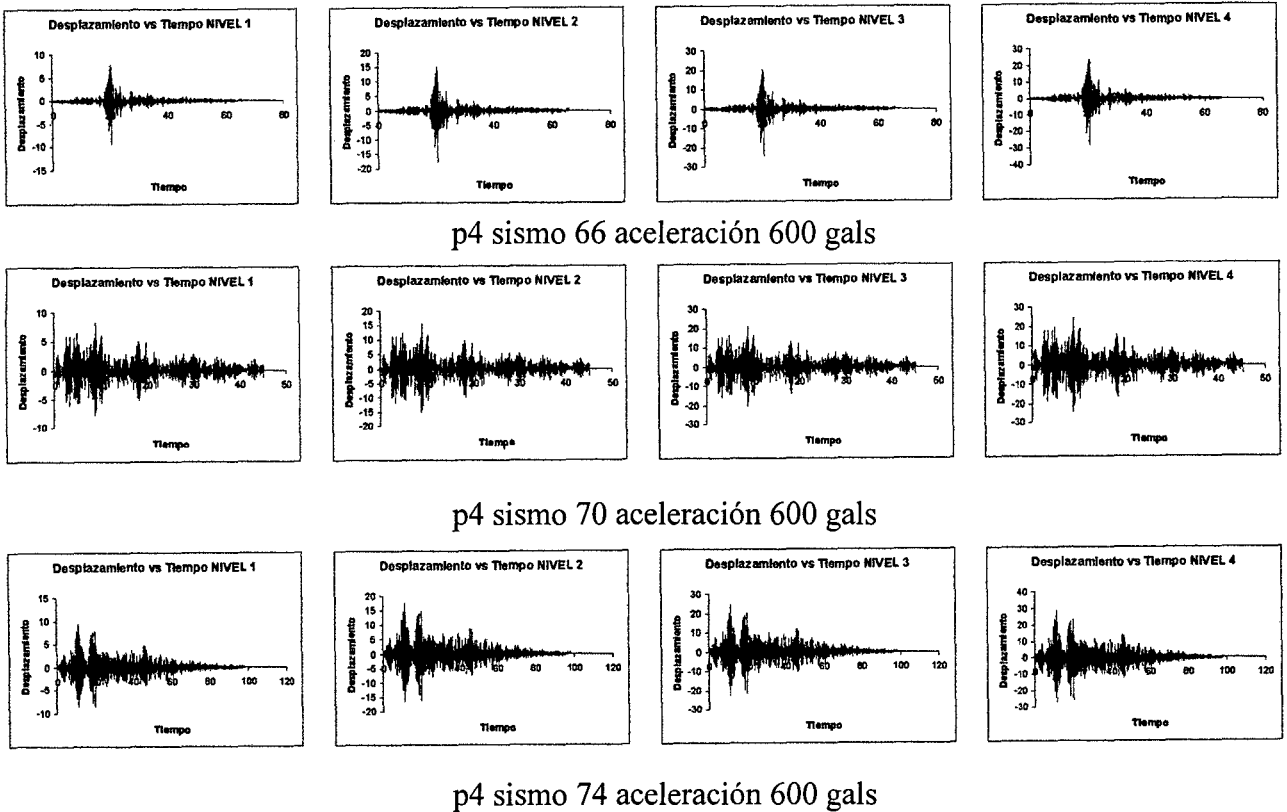
En la figura anterior se aprecia la similitud entre la forma del registro sísmico utilizado y la forma de la aceleración de cada piso, ésta es una característica del análisis elástico tiempo-historia, también se puede observar que existe una amplificación de la onda de un piso inferior a un piso superior (ver superficies tiempo-historia en el apéndice N).

Con el fin de ilustrar numéricamente las diferencias de los valores de aceleraciones y desplazamientos al utilizar uno u otro amortiguamiento, se entrega una tabla en la siguiente página, esta tabla muestra la tendencia en los análisis realizados.

Tabla 6.4 Aceleraciones y desplazamientos del primer nivel en p4, p6 y p8

Pórtico	Sismo	Acel	nivel	Amortiguamiento	Aceleración (mm/seg <sup>2</sup> )		Desplazamiento (mm)	
					máxima	mínima	máximo	mínimo
4	66	600	1	MASA	8,986.1	-7,453.1	8.02	-9.37
4	66	600	1	RIGIDEZ	7,476.0	-7,209.0	7.87	-9.29
4	66	600	1	RAYLEIGH	7,147.2	-7,376.5	7.99	-9.35
6	66	600	1	MASA	14,172.0	-13,236.0	13.58	-14.89
6	66	600	1	RIGIDEZ	8,976.2	-8,298.2	13.12	-14.04
6	66	600	1	RAYLEIGH	11,925.0	-10,402.0	13.21	-14.42
8	66	600	1	MASA	14,281.0	-15,093.0	18.63	-18.87
8	66	600	1	RIGIDEZ	8,478.4	-8,743.8	18.03	-18.97
8	66	600	1	RAYLEIGH	10,202.0	-11,237.0	18.35	-18.72

Figura 6.3 Desplazamientos con amortiguamiento tipo rigidez



De la misma manera que en la figura 6.2 se puede observar una amplificación de los valores de los desplazamientos de un piso inferior a un piso superior, los desplazamientos también presentan una forma similar al registro sísmico utilizado.

En general, los desplazamientos son mayores a medida que se sube de nivel; en todos los casos los mayores desplazamientos están en p8 luego en p6 y finalmente en p4, ver gráficos siguientes:

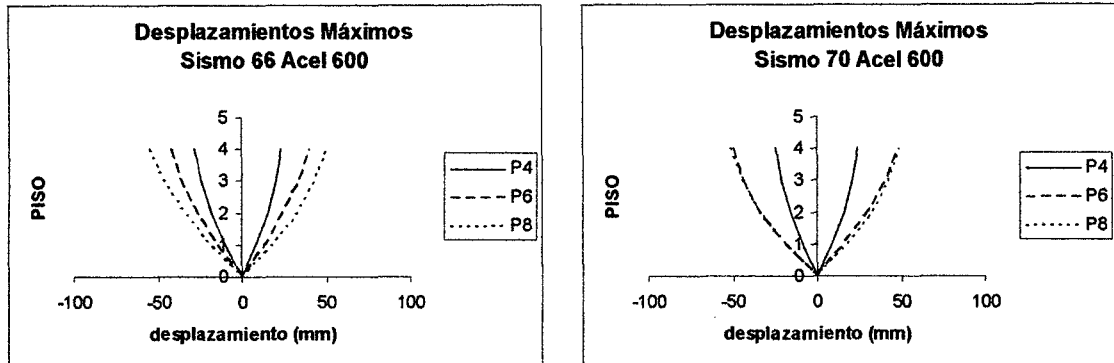


Figura 6.4 Desplazamientos producidos con los registros sísmicos de 1966 y 1970

#### 6.1.4 Resumen de desplazamientos de entrepiso y fuerzas cortantes de piso

Como resultado de los análisis elásticos tiempo-historia realizados, se tienen las siguientes tablas (diferencias expresadas en porcentaje) de desplazamientos de entrepiso y fuerzas cortantes.

Tabla 6.5a Desplazamientos de entrepiso

Pórtico	Dif. de desp. de entrepiso	
	Masa-Rayleigh	Rigidez-Rayleigh
4	0.07%-7.94%	0.03%-3.94%
6	0.05%-11.61%	0.30%-8.37%
8	0.06%-19.67%	0.38%-10.22%

Tabla 6.5b Fuerzas cortantes de entrepiso

Pórtico	Diferencia de fuerzas cortantes	
	Masa-Rayleigh	Rigidez-Rayleigh
4	0.00%-4.50%	0.08%-4.31%
6	0.03%-16.19%	0.16%-14.01%
8	0.17%-22.03%	0.35%-14.11%

Se puede observar que los resultados de los desplazamientos de entrepiso entre los pórticos con amortiguamientos de Rayleigh y Rigidez son más próximos,

las tablas 6.5a y 6.5b indican mejor aproximación entre los modelos Rigidez y Rayleigh, sin embargo las cortantes obtenidas con los tres tipos de amortiguamiento, tienen el mismo orden de magnitud.

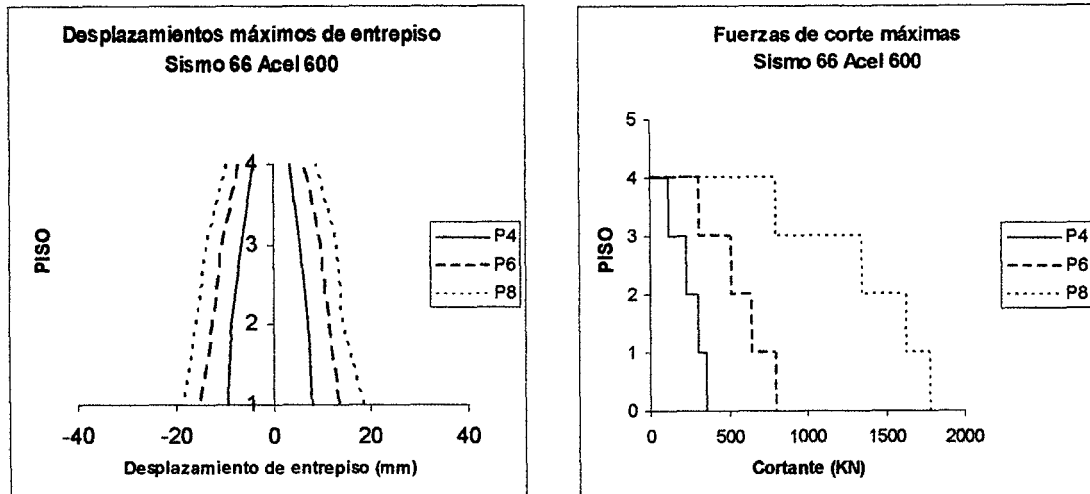


Figura 6.5 Tendencia del comportamiento de los desplazamientos de entrepiso y fuerzas cortantes en el análisis elástico tiempo-historia

Tabla 6.6 Tendencia seguida en los cálculos al comparar fuerzas de corte y desplazamientos de entrepiso

Pórtico	Sismo	Accl	Amortig	Piso 1			Piso 2			Piso 3			Piso 4		
				Desp.ent. (mm)		corte (kN)	Desp.ent. (mm)		corte (kN)	Desp.ent. (mm)		corte (kN)	Desp.ent. (mm)		corte (kN)
				derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda	
4	74	600	MASA	-8.894	9.196	351.3	-7.948	8.506	314.0	-6.456	6.820	242.8	-4.197	4.387	133.5
4	74	600	RIGIDEZ	-8.595	9.236	352.1	-7.884	8.447	311.8	-6.245	6.674	235.9	-3.975	4.242	127.3
4	74	600	RAYLEIGH	-8.721	9.189	348.3	-7.933	8.492	313.6	-6.400	6.801	241.9	-4.137	4.373	133.0
6	74	600	MASA	-14.478	13.372	743.8	-13.395	11.991	688.5	-10.970	9.504	560.0	-7.174	6.290	323.0
6	74	600	RIGIDEZ	-15.008	13.779	787.9	-13.346	11.931	687.2	-10.345	9.253	514.3	-6.458	5.869	275.8
6	74	600	RAYLEIGH	-14.920	13.539	779.7	-13.386	11.975	688.3	-10.523	9.292	526.7	-6.654	5.902	288.6
8	74	600	MASA	-16.300	15.739	1549.3	-13.289	12.158	1362.3	-10.272	8.999	1053.5	-6.396	5.816	583.9
8	74	600	RIGIDEZ	-16.519	15.354	1583.9	-13.220	12.078	1355.8	-9.939	8.912	1005.9	-6.042	5.370	537.4
8	74	600	RAYLEIGH	-16.385	15.516	1563.9	-13.272	12.147	1360.6	-10.162	9.148	1037.1	-6.281	5.659	569.1

De acuerdo a los análisis realizados con los diferentes tipos de amortiguamiento, podemos afirmar que los resultados con amortiguamiento tipo Rayleigh y tipo Rigidez, están más próximos en los pórticos analizados; para el análisis de los pórticos en el rango inelástico se utilizará el amortiguamiento por Rigidez debido a las siguientes ventajas:

- Sus resultados se aproximan a los resultados de un análisis con amortiguamiento tipo Rayleigh.
- Permite apreciar de mejor manera el amortiguamiento por histéresis en los pórticos analizados, ya que no toma en cuenta el porcentaje de amortiguamiento por masas y considera la degradación en rigidez de la estructura.
- Contribuye a la estabilidad del método de integración utilizado en el análisis inelástico tiempo-historia, cuando las aceleraciones son superiores a 600gals.

De alguna manera estos resultados son corroborados por investigaciones realizadas por Otani (45). A continuación se indican las tablas que servirán para comparar los resultados elásticos con resultados inelásticos en forma global, los resultados del análisis elástico tiempo-historia también fueron utilizados para comparar el comportamiento local de los elementos de cada pórtico, sin embargo no se entregan estas tablas por el gran volumen de información que contienen. Los valores de aceleración y desplazamiento en las tablas que se presentan a continuación se encuentran en mm/seg<sup>2</sup> y mm respectivamente.

Tabla 6.7a Aceleraciones y desplazamientos máximos y mínimos de cada piso

AMORTIGUAMIENTO: RIGIDEZ

Pórtico	Sismo	Acel	nivel	Aceleración		Desplazamiento	
				máxima	mínima	máximo	mínimo
4	66	400	1	3,979.3	-4,617.1	4.05	-5.26
			2	7,008.4	-6,189.2	7.70	-10.15
			3	9,675.9	-7,317.1	11.13	-14.52
			4	11,670.0	-9,497.8	13.74	-17.82
4	66	600	1	7,476.0	-7,209.0	7.87	-9.29
			2	12,280.0	-10,602.0	14.91	-17.64
			3	16,358.0	-13,705.0	20.35	-24.12
			4	18,883.0	-15,822.0	23.77	-28.20
4	66	800	1	9,968.4	-9,612.4	10.50	-12.38
			2	16,373.0	-14,136.0	19.88	-23.52
			3	21,812.0	-18,274.0	27.13	-32.17
			4	25,178.0	-21,097.0	31.69	-37.60
4	70	400	1	4,563.4	-6,058.7	5.53	-5.20
			2	7,106.8	-7,953.2	10.35	-9.99
			3	9,434.3	-9,457.3	13.98	-13.78
			4	11,598.0	-10,417.0	16.22	-16.21
4	70	600	1	6,845.7	-9,088.8	8.30	-7.80
			2	10,661.0	-11,931.0	15.52	-14.98
			3	14,153.0	-14,187.0	20.97	-20.68
			4	17,398.0	-15,626.0	24.33	-24.31
4	70	800	1	9,128.0	-12,119.0	11.06	-10.41
			2	14,215.0	-15,908.0	20.70	-19.97
			3	18,871.0	-18,917.0	27.96	-27.57
			4	23,198.0	-20,836.0	32.44	-32.42
4	74	400	1	5,363.7	-5,350.9	6.16	-5.73
			2	8,069.1	-7,763.6	11.79	-10.99
			3	10,577.0	-11,348.0	16.24	-15.15
			4	12,854.0	-13,793.0	19.06	-17.80
4	74	600	1	8,046.2	-8,027.0	9.24	-8.59
			2	12,105.0	-11,646.0	17.68	-16.48
			3	15,867.0	-17,023.0	24.36	-22.72
			4	19,282.0	-20,691.0	28.60	-26.70
4	74	800	1	10,729.0	-10,703.0	12.32	-11.46
			2	16,140.0	-15,529.0	23.58	-21.97
			3	21,157.0	-22,698.0	32.48	-30.30
			4	25,710.0	-27,589.0	38.13	-35.60
6	66	400	1	5,983.6	-5,531.7	8.74	-9.36
			2	8,268.2	-7,488.7	16.50	-17.58
			3	9,774.2	-9,258.1	22.46	-24.04
			4	11,579.0	-10,886.0	26.12	-28.10
6	66	600	1	8,976.2	-8,298.2	13.12	-14.04
			2	12,403.0	-11,234.0	24.76	-26.37
			3	14,663.0	-13,888.0	33.69	-36.07
			4	17,371.0	-16,330.0	39.18	-42.15
6	66	800	1	11,969.0	-11,065.0	17.49	-18.73
			2	16,539.0	-14,979.0	33.01	-35.16
			3	19,551.0	-18,519.0	44.92	-48.09
			4	23,162.0	-21,774.0	52.25	-56.20
6	70	400	1	5,973.5	-5,552.8	10.50	-11.30
			2	8,739.2	-8,582.1	19.89	-21.37
			3	11,675.0	-10,829.0	27.22	-29.15
			4	13,683.0	-13,243.0	31.82	-34.00
6	70	600	1	8,961.0	-8,329.8	15.75	-16.95
			2	13,110.0	-12,874.0	29.84	-32.05
			3	17,515.0	-16,245.0	40.83	-43.73
			4	20,526.0	-19,867.0	47.73	-51.00
6	70	800	1	11,949.0	-11,107.0	21.00	-22.60
			2	17,481.0	-17,166.0	39.79	-42.73
			3	23,354.0	-21,661.0	54.45	-58.31
			4	27,369.0	-26,490.0	63.65	-68.00



Tabla 6.7b Aceleraciones y desplazamientos máximos y mínimos de cada piso

AMORTIGUAMIENTO: RIGIDEZ

Pórtico	Sismo	Acel	nivel	Aceleración		Desplazamiento	
				máxima	mínima	máximo	mínimo
6	74	400	1	4,752.0	-5,406.0	9.19	-10.01
			2	7,662.5	-7,455.3	17.14	-18.90
			3	10,287.0	-9,232.1	23.12	-25.80
			4	12,267.0	-11,387.0	26.77	-30.10
6	74	600	1	7,128.5	-8,109.6	13.78	-15.01
			2	11,495.0	-11,184.0	25.71	-28.35
			3	15,432.0	-13,849.0	34.68	-38.70
			4	18,402.0	-17,082.0	40.16	-45.16
6	74	800	1	9,505.1	-10,813.0	18.37	-20.01
			2	15,327.0	-14,912.0	34.28	-37.81
			3	20,577.0	-18,466.0	46.25	-51.60
			4	24,537.0	-22,776.0	53.55	-60.21
8	66	400	1	5,651.8	-5,828.7	12.02	-12.65
			2	8,351.3	-8,537.8	21.55	-23.02
			3	11,343.0	-10,376.0	28.58	-30.99
			4	14,015.0	-13,142.0	32.77	-35.88
8	66	600	1	8,478.4	-8,743.8	18.03	-18.97
			2	12,528.0	-12,808.0	32.33	-34.53
			3	17,016.0	-15,565.0	42.88	-46.48
			4	21,025.0	-19,714.0	49.16	-53.82
8	66	800	1	11,305.0	-11,659.0	24.03	-25.30
			2	16,705.0	-17,078.0	43.11	-46.05
			3	22,689.0	-20,754.0	57.18	-61.98
			4	28,034.0	-26,287.0	65.55	-71.76
8	70	400	1	5,747.6	-4,964.1	11.88	-12.30
			2	8,389.4	-8,408.6	21.50	-22.16
			3	10,390.0	-10,412.0	28.74	-29.53
			4	12,105.0	-12,362.0	33.10	-33.99
8	70	600	1	8,622.1	-7,446.8	17.82	-18.45
			2	12,585.0	-12,614.0	32.26	-33.24
			3	15,586.0	-15,620.0	43.12	-44.31
			4	18,158.0	-18,545.0	49.66	-50.99
8	70	800	1	11,497.0	-9,929.5	23.76	-24.61
			2	16,781.0	-16,819.0	43.01	-44.32
			3	20,782.0	-20,827.0	57.49	-59.08
			4	24,212.0	-24,727.0	66.21	-67.99
8	74	400	1	4,777.7	-5,420.0	10.24	-11.01
			2	7,144.0	-7,436.5	18.29	-19.83
			3	9,334.6	-8,581.6	24.19	-26.45
			4	10,932.0	-10,151.0	27.70	-30.48
8	74	600	1	7,167.2	-8,130.6	15.35	-16.52
			2	10,717.0	-11,156.0	27.43	-29.74
			3	14,003.0	-12,873.0	36.29	-39.68
			4	16,399.0	-15,228.0	41.56	-45.72
8	74	800	1	9,556.7	-10,841.0	20.47	-22.03
			2	14,290.0	-14,875.0	36.58	-39.65
			3	18,671.0	-17,165.0	48.39	-52.91
			4	21,867.0	-20,305.0	55.41	-60.96

Tabla 6.8

RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO Y FUERZAS CORTANTES DE CADA PISO  
AMORTIGUAMIENTO: RIGIDEZ

Sismo	Acel	Pórtico	Piso 1			Piso 2			Piso 3			Piso 4		
			Desp. Ent. (mm)		corte (kN)	Desp. Ent. (mm)		corte (kN)	Desp. Ent. (mm)		corte (kN)	Desp. Ent. (mm)		corte (kN)
			derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda	
66	400	4	-5.258	4.046	201.0	-4.890	3.766	167.5	-4.368	3.428	156.0	-3.304	2.618	121.4
		6	-9.361	8.744	495.4	-8.294	7.760	427.3	-6.465	5.951	322.3	-4.054	3.768	174.9
		8	-12.646	12.016	1196.3	-10.373	9.534	1075.2	-7.966	7.287	819.6	-4.972	4.629	456.3
	600	4	-9.287	7.874	357.4	-8.352	7.033	307.2	-6.484	5.442	227.1	-4.072	3.418	120.5
		6	-14.043	13.117	743.2	-12.442	11.641	641.0	-9.699	8.927	483.5	-6.082	5.652	262.4
		8	-18.971	18.025	1794.6	-15.561	14.302	1612.9	-11.950	10.931	1229.5	-7.458	6.943	684.5
	800	4	-12.384	10.498	476.6	-11.137	9.377	409.6	-8.646	7.256	302.8	-5.430	4.558	160.7
		6	-18.725	17.490	990.9	-16.590	15.522	854.8	-12.932	11.903	644.7	-8.110	7.537	349.9
		8	-25.296	24.034	2392.9	-20.749	19.070	2150.6	-15.934	14.575	1639.4	-9.944	9.258	912.7
70	400	4	-5.203	5.530	216.7	-4.782	4.818	176.7	-3.799	3.631	134.6	-2.423	2.239	73.0
		6	-11.300	10.497	592.5	-10.064	9.393	519.6	-7.789	7.330	387.1	-4.844	4.600	205.9
		8	-12.301	11.881	1178.2	-9.854	9.622	1014.7	-7.379	7.280	745.8	-4.456	4.483	403.5
	600	4	-7.805	8.296	325.0	-7.174	7.228	265.1	-5.698	5.447	202.0	-3.635	3.359	109.5
		6	-16.952	15.747	888.8	-15.097	14.091	779.5	-11.684	10.996	580.7	-7.267	6.900	308.9
		8	-18.453	17.822	1767.4	-14.783	14.434	1522.1	-11.069	10.920	1118.8	-6.685	6.725	605.3
	800	4	-10.406	11.062	433.4	-9.566	9.638	353.5	-7.598	7.263	269.3	-4.846	4.479	146.0
		6	-22.604	20.997	1185.1	-20.131	18.789	1039.3	-15.579	14.661	774.3	-9.690	9.201	411.9
		8	-24.606	23.764	2356.7	-19.711	19.246	2029.6	-14.759	14.561	1491.8	-8.914	8.967	807.1
74	400	4	-5.729	6.157	234.7	-5.255	5.631	207.9	-4.163	4.449	157.3	-2.650	2.828	84.9
		6	-10.005	9.186	525.2	-8.897	7.953	458.1	-6.896	6.168	342.9	-4.305	3.913	183.9
		8	-11.012	10.235	1055.9	-8.813	8.051	903.8	-6.626	5.941	670.6	-4.028	3.580	358.3
	600	4	-8.595	9.236	352.1	-7.884	8.447	311.8	-6.245	6.674	235.9	-3.975	4.242	127.3
		6	-15.008	13.779	787.9	-13.346	11.931	687.2	-10.345	9.253	514.3	-6.458	5.869	275.8
		8	-16.519	15.354	1583.9	-13.220	12.078	1355.8	-9.939	8.912	1005.9	-6.042	5.370	537.4
	800	4	-11.460	12.315	469.4	-10.512	11.263	415.8	-8.326	8.899	314.6	-5.300	5.656	169.7
		6	-20.012	18.373	1050.6	-17.796	15.908	916.2	-13.794	12.337	685.8	-8.610	7.826	367.8
		8	-22.026	20.473	2112.0	-17.628	16.104	1807.9	-13.253	11.884	1341.3	-8.057	7.161	716.6

## 6.2 Análisis estático no lineal

Con el objetivo de tener valores de fluencia (para los desplazamientos de entrepiso y fuerzas cortantes de cada piso) se realizó un análisis estático inelástico de fuerzas laterales; se compararon los valores de momentos flectores, curvaturas, etc., calculados utilizando un modelo de histéresis Bilineal en los elementos de un pórtico, contra los valores calculados utilizando un modelo de histéresis Trilineal en los elementos del mismo pórtico. El criterio de parada, es detener el análisis en el instante que uno de los elementos llegue a su capacidad de ductilidad máxima, la idea de este criterio es considerar a la estructura como un todo, ya que podrían existir pisos que no han llegado a su capacidad final; para verificar si se presentaron mecanismos de falla de traslación de columnas, traslación lateral de vigas, así como verificar que no se ha producido un mecanismo de falla en algún piso de la estructura, se procede a dibujar la secuencia de formación de rótulas plásticas; para validar el orden de magnitud de los resultados del análisis estático inelástico con distribución de fuerzas Lineal (triangular invertida), se realizan diferentes distribuciones de cargas laterales (Potencia y Modal).

### 6.2.1 Resultados del análisis en vigas

Para observar la influencia del modelo utilizado en las vigas (Bilineal o Trilineal), sobre los momentos flectores y curvaturas, se realizan comparaciones utilizando una distribución de cargas Lineal.

Tabla 6.9 Variación promedio entre modelos Bilineal y Trilineal, distribución de cargas Lineal

Pórtico	Pisos	TRILINEAL-BILINEAL	
		momentos (%)	curvatura (%)
4	1-2	1	15
	3-4	1	25
6	1-2	1	29
	3	1	42
	4	11	NO HAY FLUENCIA
8	1-2	1	34
	3-4	1	NO HAY FLUENCIA

Los porcentajes de variación de los requerimientos de ductilidad por curvatura y los porcentajes de variación de las curvaturas coinciden, razón por la cual éstas últimas pueden utilizarse para determinar los porcentajes de variación de los requerimientos de ductilidad por curvaturas. En las vigas que no alcanzan la fluencia, el porcentaje de variación en los resultados es mayor, debido a las diferentes redistribuciones de momentos flectores en los pórticos.

Figura 6.6 Fluencia en vigas del pórtico 4 – modelo Trilineal

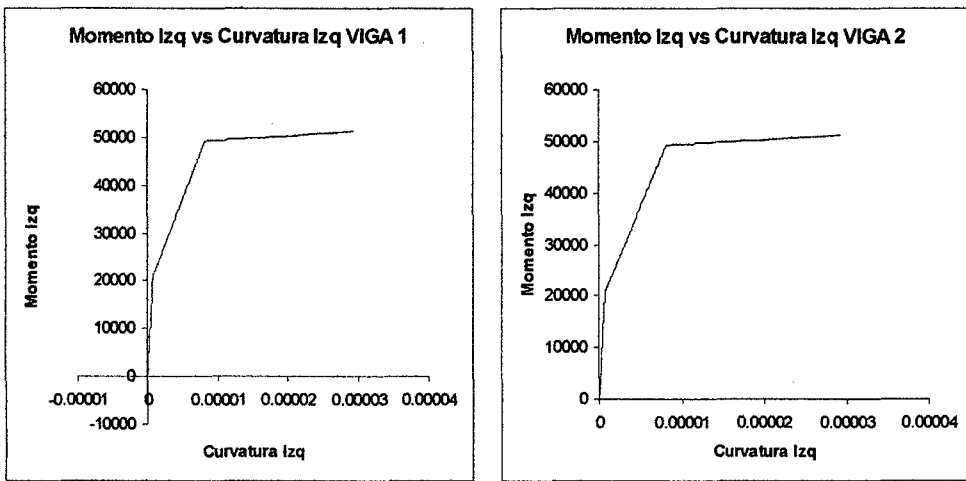
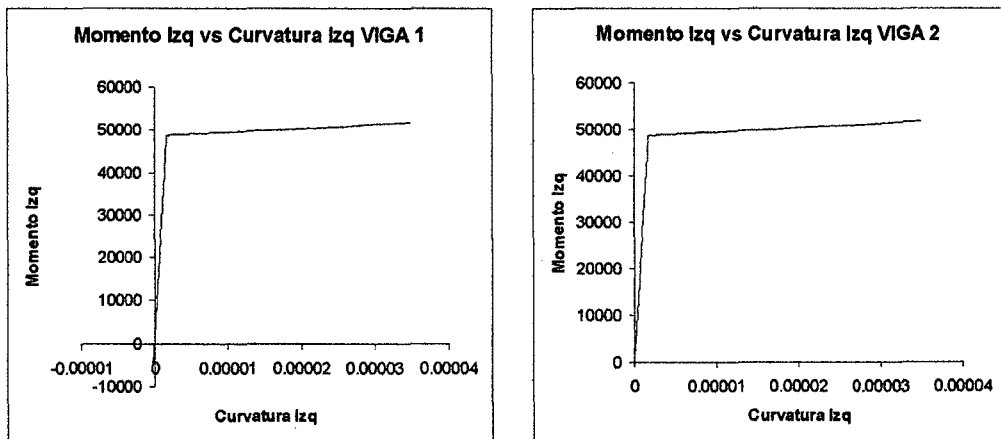


Figura 6.7 Fluencia en vigas del pórtico 4 – modelo Bilineal



En los gráficos anteriores, los momentos flectores se encuentran en kN-mm y las curvaturas rad/mm, estos gráficos indican el comportamiento inelástico en las secciones de los extremos de las vigas (1 y 2), para modelos Trilineal y Bilineal.

La siguiente tabla muestra los máximos requerimientos de ductilidad en las vigas de cada pórtico:

Tabla 6.10 Requerimientos de ductilidad por curvatura

Pórtico	BILINEAL	TRILINEAL
	req. de duct. max en vigas	req. de duct. max en vigas
4	4.29	3.6
6	3.5	2.53
8	1.77	2.7

Los resultados de la tabla indican menor requerimiento de ductilidad en el pórtico 8, esto se debe al criterio de parada utilizado en el análisis, un criterio más apropiado se consigue con un análisis inelástico tiempo-historia. A continuación se entregan las tablas de fluencia del pórtico p4 para un modelo Trilineal.

Tabla 6.11 Pórtico 4, modelo Trilineal, en las secciones izquierdas de las vigas

VIGA	Resultados del Análisis		Valores de Fluencia		Requerimiento de Ductilidad
	curvatura (rad/mm)	momento (kN-mm)	curvatura (rad/mm)	momento (kN-mm)	
1	2.9405E-05	51,209.40	8.1589E-06	49,280.21	3.6040E+00
2	2.9335E-05	51,203.10	8.1589E-06	49,280.21	3.5955E+00
3	2.8916E-05	51,165.00	8.1589E-06	49,280.21	3.5441E+00
4	2.9172E-05	51,188.30	8.1589E-06	49,280.21	3.5755E+00
5	2.4814E-05	50,792.60	8.1589E-06	49,280.21	3.0414E+00
6	2.5422E-05	50,847.80	8.1589E-06	49,280.21	3.1159E+00
7	2.0621E-05	50,351.40	8.2062E-06	49,294.64	2.5128E+00
8	2.0067E-05	50,304.30	8.2062E-06	49,294.64	2.4453E+00

Tabla 6.12 Pórtico 4, modelo Trilineal, en las secciones derechas de las vigas

VIGA	Resultados del Análisis		Valores de Fluencia		Requerimiento de Ductilidad
	curvatura (rad/mm)	momento (kN-mm)	curvatura (rad/mm)	momento (kN-mm)	
1	-3.2872E-05	-75,070.40	8.7807E-06	-72,336.53	3.7436E+00
2	-3.3462E-05	-75,137.40	8.7807E-06	-72,336.53	3.8108E+00
3	-3.2529E-05	-75,031.60	8.7807E-06	-72,336.53	3.7046E+00
4	-3.3495E-05	-75,141.20	8.7807E-06	-72,336.53	3.8146E+00
5	-2.9659E-05	-74,705.80	8.7807E-06	-72,336.53	3.3778E+00
6	-3.0532E-05	-74,804.90	8.7807E-06	-72,336.53	3.4772E+00
7	-2.7479E-05	-50,935.10	8.2062E-06	49,294.64	3.3485E+00
8	-2.8853E-05	-51,052.20	8.2062E-06	49,294.64	3.5160E+00

## 6.2.2 Resultados del análisis en columnas

En cuanto a columnas interesa saber las diferencias en el comportamiento inelástico, debido a utilizar un modelo Bilineal o un modelo Trilineal en los elementos de un pórtico; en los pórticos p4, p6 y p8 los momentos flectores obtenidos varían en 5% (promedio) en el primer nivel, incrementándose esta diferencia en los niveles superiores, ya que no existe fluencia en estos elementos (por redistribuciones de momentos flectores diferentes); en general podemos afirmar que las rótulas se presentaron en la base de las columnas del primer nivel; en cuanto a curvaturas las diferencias son de 19%, 33% y 42% en p4, p6 y p8 respectivamente, a continuación se entregan gráficos del comportamiento característico de las columnas.

Figura 6.8 Fluencia en columnas del pórtico 6 - Trilineal

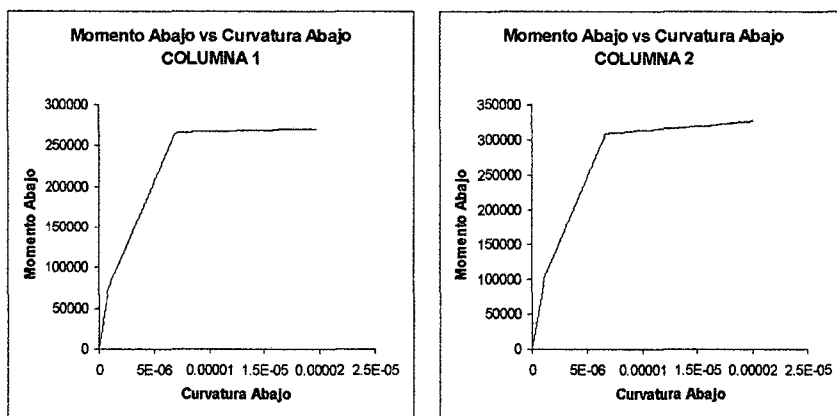
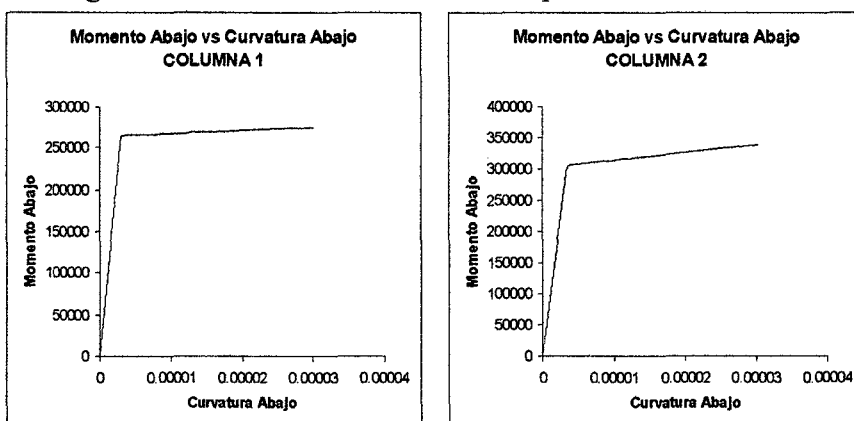


Figura 6.9 Fluencia en columnas del pórtico 6 - Bilineal



Los momentos flectores de los gráficos anteriores se encuentran en kN-mm y las curvaturas rad/mm.

Los requerimientos máximos de ductilidad para modelos Trilineal y Bilineal son 3.67, 4.53 en p4; 3, 4.52 en p6 y 3.52, 6.1 en p8. A continuación se entregan las tablas de curvaturas y momentos flectores máximos de ambos modelos, en las secciones de la base de las columnas del primer nivel.

Tabla 6.13 Secciones inferiores de las columnas del primer nivel, modelo Trilineal

PORTICO	COLUMNA	Resultados del Análisis		Valores de Fluencia		Requerimiento de Ductilidad
		curvatura (rad/mm)	momento (kN-mm)	curvatura (rad/mm)	momento (kN-mm)	
p4	1	2.2892E-05	196,776.00	6.7302E-06	192,787.80	3.4014E+00
	2	2.2998E-05	232,990.00	6.2572E-06	213,180.61	3.6755E+00
	3	2.3100E-05	196,827.00	6.7302E-06	192,787.80	3.4323E+00
p6	1	1.9703E-05	270,942.00	6.9200E-06	266,760.11	2.8473E+00
	2	2.0041E-05	325,942.00	6.6800E-06	309,843.17	3.0002E+00
	3	1.9909E-05	271,009.00	6.9200E-06	266,760.11	2.8771E+00
p8	1	1.1995E-05	349,880.00	5.8785E-06	346,587.62	2.0404E+00
	2	1.2639E-05	510,708.00	3.5847E-06	449,373.48	3.5260E+00
	3	1.2075E-05	349,924.00	5.8785E-06	346,587.62	2.0541E+00

Tabla 6.14 Secciones inferiores de las columnas del primer nivel, modelo Bilineal

PORTICO	COLUMNA	Resultados del Análisis		Valores de Fluencia		Requerimiento de Ductilidad
		curvatura (rad/mm)	momento (kN-mm)	curvatura (rad/mm)	momento (kN-mm)	
p4	1	2.8540E-05	198,169.00	6.7302E-06	192,787.80	4.2405E+00
	2	2.8383E-05	239,362.00	6.2572E-06	213,180.61	4.5361E+00
	3	2.8648E-05	198,196.00	6.7302E-06	192,787.80	4.2567E+00
p6	1	3.0071E-05	274,335.00	6.9200E-06	266,760.11	4.3455E+00
	2	3.0197E-05	338,174.00	6.6800E-06	309,843.17	4.5204E+00
	3	3.0203E-05	274,378.00	6.9200E-06	266,760.11	4.3646E+00
p8	1	2.1439E-05	354,958.00	5.8785E-06	346,587.62	3.6470E+00
	2	2.1888E-05	573,339.00	3.5847E-06	449,373.48	6.1060E+00
	3	2.1471E-05	354,975.00	5.8785E-06	346,587.62	3.6525E+00

### 6.2.3 Desplazamiento de entrepiso versus fuerza cortante de cada piso

El principal objetivo del método de análisis estático inelástico es determinar las propiedades globales inelásticas de cada pórtico, para esto se utiliza una distribución de fuerzas triangular invertida Lineal y se verifican sus resultados comparándolos con otros métodos de diferentes distribuciones de fuerzas laterales,

si el orden de magnitud de estas comparaciones es el mismo, se pueden considerar confiables los resultados con distribución de fuerzas Lineal.

Tabla 6.15 Variación promedio de la fuerza cortante y el desplazamiento de entrepiso

Método	Pórtico	TRILINEAL-BILINEAL	
		corte (%)	Desp. entrep. (%)
LINEAL	4	1.2	17.51
	6	3.8	31.27
	8	9.82	39.29
MODAL	4	8.52	19
	6	18.32	35
	8	9.09	35
POTENCIA	4	1.95	25
	6	2.09	40
	8	7.28	31

Para una descripción cualitativa de la influencia del método utilizado, en cada modelo, se entregan los siguientes gráficos:

Figura 6.10 Relación fuerza cortante - desplazamiento de entrepiso (p4) Trilineal

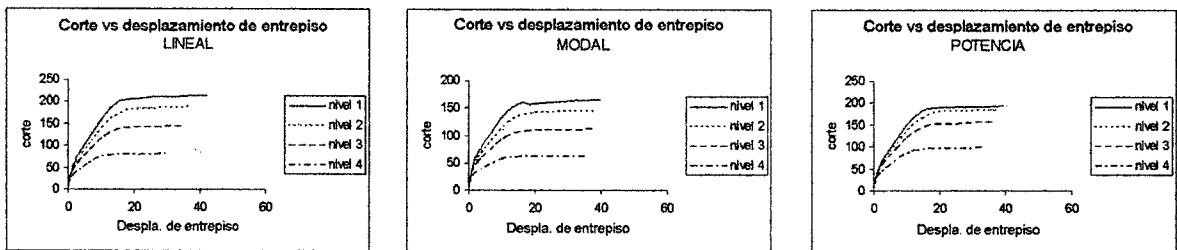


Figura 6.11 Relación fuerza cortante - desplazamiento de entrepiso (p4) Bilineal

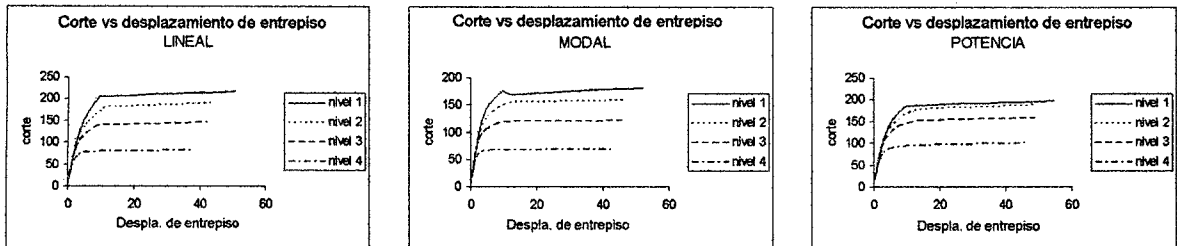


Figura 6.12 Relación fuerza cortante - desplazamiento de entrepiso (p6) Trilineal

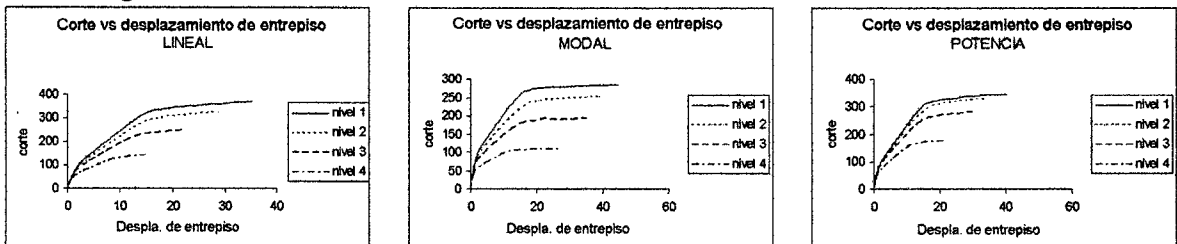




Figura 6.13 Relación fuerza cortante - desplazamiento de entrepiso (p6) Bilineal

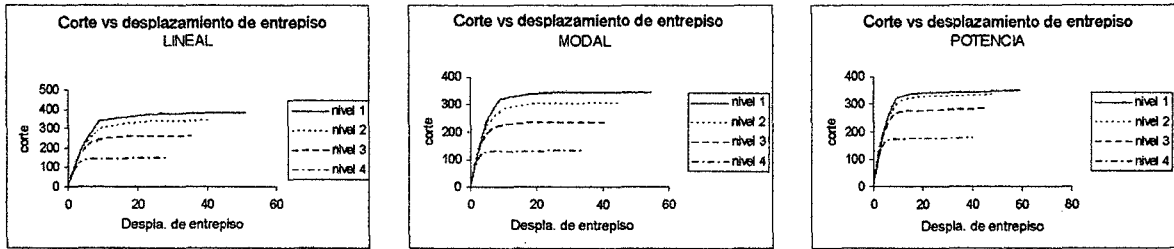


Figura 6.14 Relación fuerza cortante - desplazamiento de entrepiso (p8) Trilineal

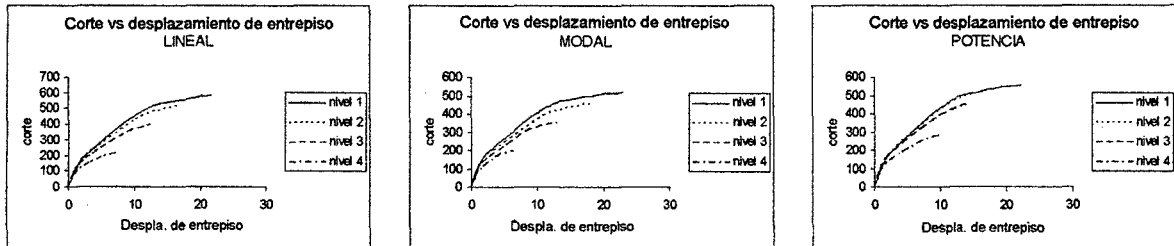
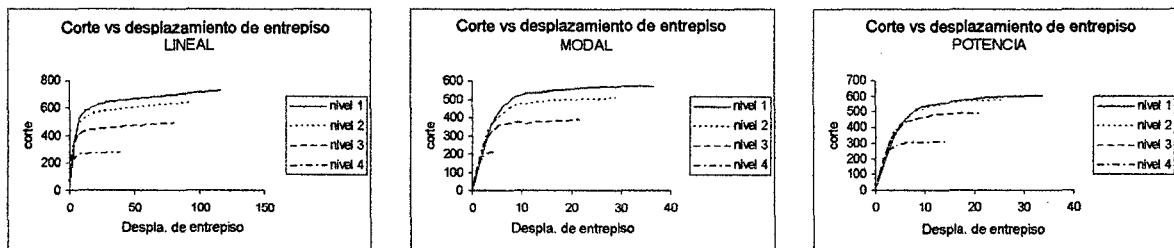


Figura 6.15 Relación fuerza cortante - desplazamiento de entrepiso (p8) Bilineal



Los porcentajes de variación promedio de fuerza de corte y desplazamiento de entrepiso, obtenidos al utilizar modelos Bilineales y Trilineales en las secciones de los elementos, se incrementan conforme aumenta el nivel de un pórtico. Este aumento se da en los resultados obtenidos con cualquiera de los métodos (Lineal, Modal y Potencia), en la mayoría de los niveles.

Si se comparan los resultados obtenidos con cada método (al utilizar modelos Bilineales y Trilineales en las secciones de los elementos de cada pórtico), se encuentra que los valores de las fuerzas de corte de cada nivel obtenidos con los métodos de la Potencia y Lineal, son más próximos cuando el modelo es Trilineal, sin embargo existe bastante proximidad entre los desplazamientos de entrepiso obtenidos con cada uno de estos métodos (con ambos modelos), en la mayoría de los niveles.

El método Lineal es el que da la mayor fuerza de corte en la base, pero no necesariamente la mayor fuerza cortante en los demás niveles.

A continuación se entregan resultados de comparación de ambos modelos, se debe notar que los mayores desplazamientos de entrepiso y fuerzas de corte se encuentran con un modelo Bilineal.

Tablas 6.16, 6.17 y 6.18 Desplazamientos de entrepiso y fuerzas cortantes de piso máximos, debidos a utilizar modelos Trilineales en las secciones de los elementos

**PORTICO 4: RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO Y CORTANTES DE PISO**

Métodos	Piso 1		Piso 2		Piso 3		Piso 4	
	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)
Lineal	42.13	214.54	37.35	187.43	34.82	143.71	29.60	80.57
Modal	40.02	165.72	38.08	144.10	37.74	111.01	35.59	62.24
Potencia	39.32	193.98	37.21	184.25	36.77	155.97	32.95	97.44

**PORTICO 6: RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO Y CORTANTES DE PISO**

Métodos	Piso 1		Piso 2		Piso 3		Piso 4	
	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)
Lineal	35.42	371.08	28.87	325.30	22.67	249.12	14.71	139.54
Modal	33.10	283.19	30.19	248.24	26.05	190.12	18.56	107.36
Potencia	35.63	344.22	30.87	327.26	26.49	276.98	18.79	172.91

**PORTICO 8: RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO Y CORTANTES DE PISO**

Métodos	Piso 1		Piso 2		Piso 3		Piso 4	
	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)
Lineal	21.68	587.03	16.67	515.50	12.44	394.75	7.68	221.03
Modal	23.06	519.14	18.65	448.75	12.90	349.10	6.29	195.47
Potencia	22.37	559.08	18.35	531.89	14.71	450.13	9.81	280.92

Tablas 6.19, 6.20 y 6.21 Desplazamientos de entrepiso y cortantes de piso máximos, debidos a utilizar modelos Bilineales en las secciones de los elementos

**PORTICO 4: RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO Y CORTANTES DE PISO**

Métodos	Piso 1		Piso 2		Piso 3		Piso 4	
	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)
Lineal	51.08	217.11	44.22	189.88	42.13	145.45	38.28	81.54
Modal	52.36	181.14	47.13	158.42	46.02	121.35	42.91	68.03
Potencia	55.04	197.84	48.99	187.91	48.66	159.07	45.86	99.37

**PORTICO 6: RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO Y CORTANTES DE PISO**

Métodos	Piso 1		Piso 2		Piso 3		Piso 4	
	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)
Lineal	51.54	385.73	41.00	338.14	35.36	258.96	28.95	145.05
Modal	55.04	346.66	45.54	303.90	40.81	232.73	34.44	130.36
Potencia	59.20	351.55	49.16	334.22	45.80	282.87	40.34	176.59

**PORTICO 8: RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO Y CORTANTES DE PISO**

Métodos	Piso 1		Piso 2		Piso 3		Piso 4	
	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)	Desp. Ent. (mm)	Corte (kN)
Lineal	35.72	650.92	26.39	571.61	18.30	437.71	5.28	245.09
Modal	36.63	571.05	29.05	501.47	21.54	384.00	4.63	215.02
Potencia	33.77	603.00	26.34	573.68	21.07	485.50	14.17	303.00

Se pueden ver también los siguientes gráficos de fuerzas cortantes en cada piso.

**Figura 6.16 Fuerzas cortantes - modelo Trilineal**

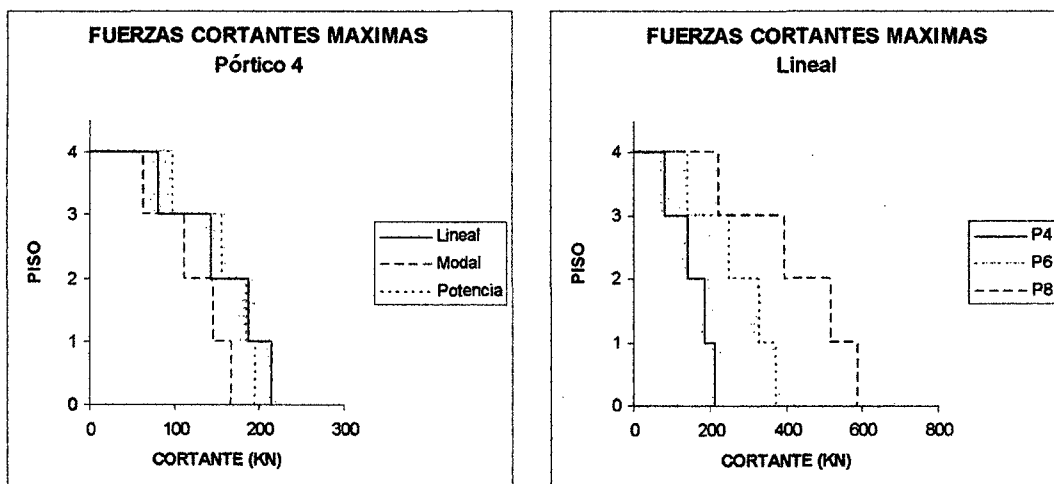
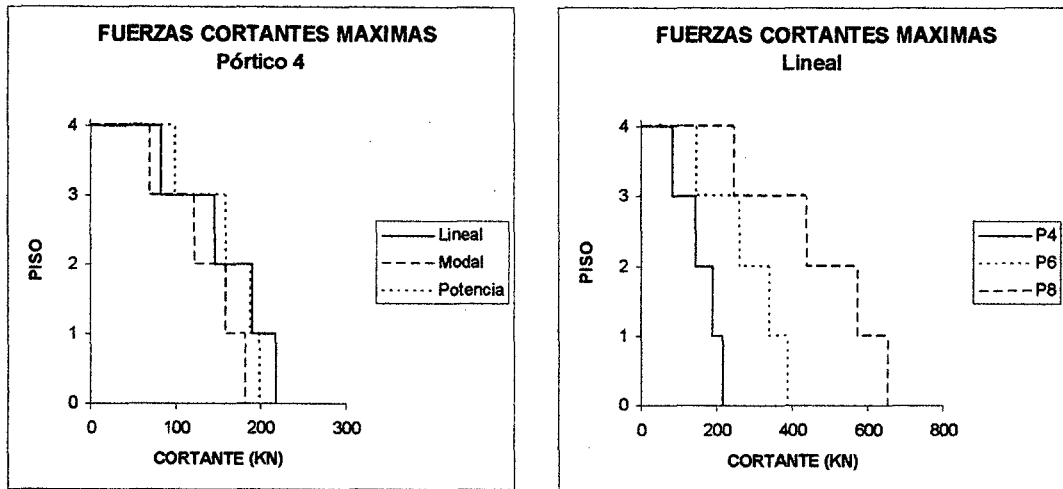


Figura 6.17 Fuerzas cortantes - modelo Bilineal



A continuación se muestran gráficos de los desplazamientos de entrepiso en cada nivel, para un modelo Bilineal y para un modelo Trilineal; se han escogido los gráficos de manera que representen la tendencia del comportamiento en el análisis estático inelástico.

Figura 6.18 Desplazamientos de entrepiso - modelo Trilineal

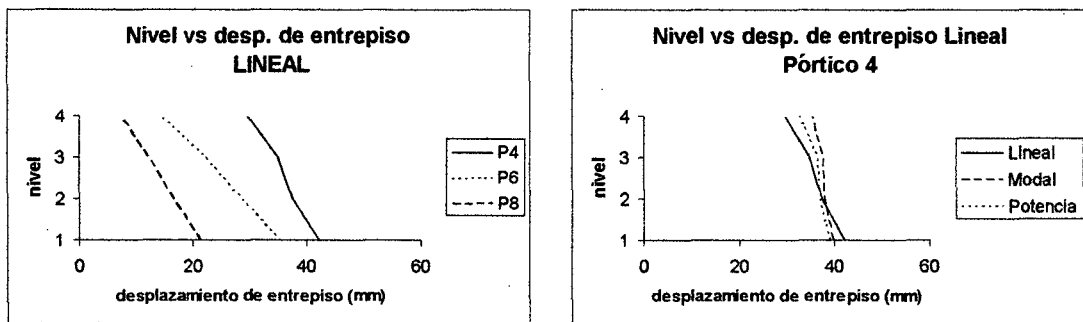
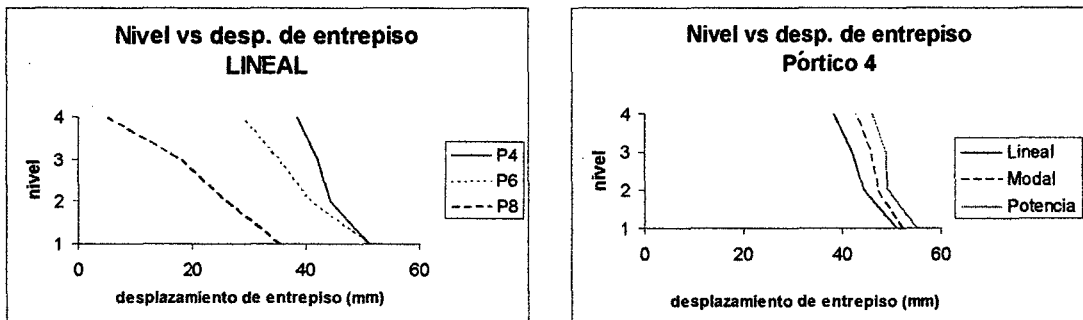


Figura 6.19 Desplazamientos de entrepiso – modelo Bilineal



## 6.2.4 Desplazamiento del último piso versus la fuerza cortante en la base

Para calcular la ductilidad global de la estructura, se relacionaron los valores de la fuerza cortante de la base versus el desplazamiento del último nivel, para cada método, dando prioridad a partir de ahora a la distribución de fuerzas Lineal; a continuación se entregan gráficos representativos de la tendencia del comportamiento presentado; se puede ver que p4 presenta mayor ductilidad global que p6 y p8.

Figura 6.20 Modelo Trilineal

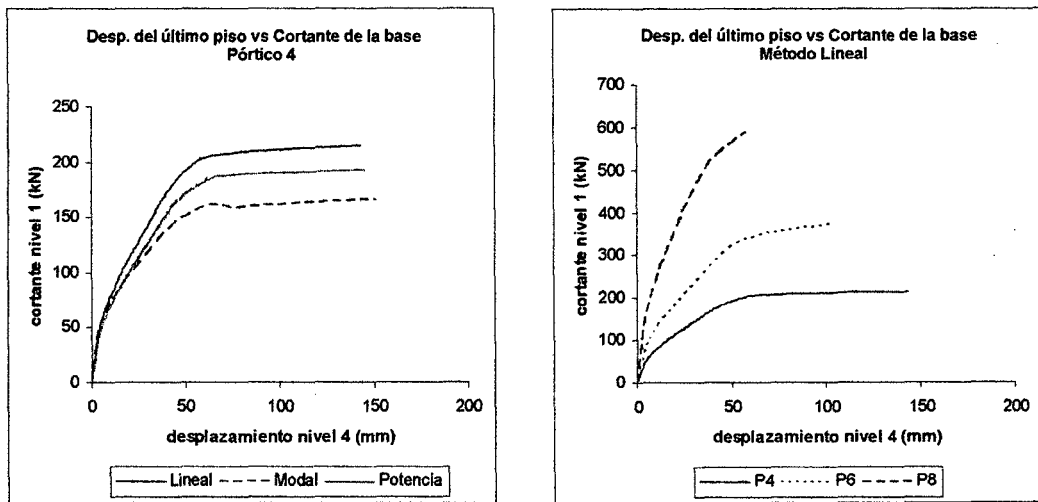
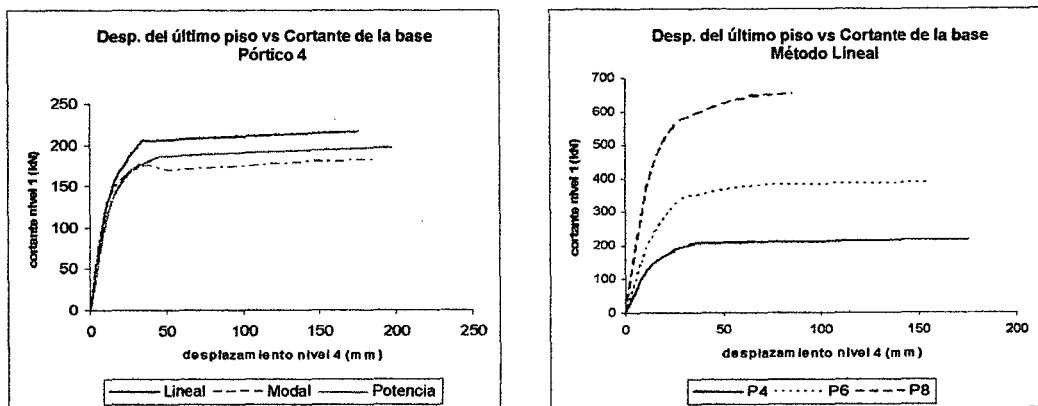


Figura 6.21 Modelo Bilineal



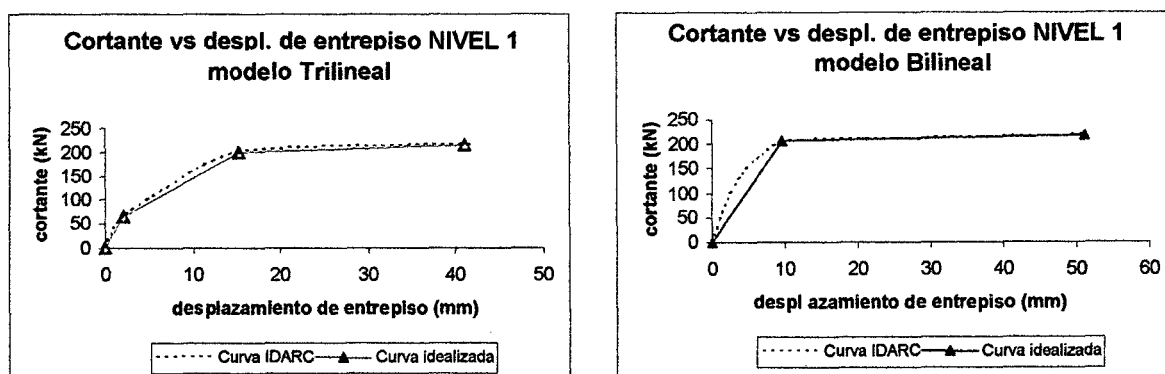
## 6.2.5 Puntos de fluencia de cada piso y de cada pórtico

Los pasos para obtener los puntos de fluencia de cada piso y de cada pórtico son los siguientes:

- Con las relaciones fuerza cortante vs. desplazamiento de entrepiso, se procede a encontrar los posibles puntos de quiebre.
- Los puntos de quiebre, siguen una relación Bilineal o Trilineal según el modelo escogido.
- Para la ductilidad global, se realizan gráficos de la fuerza cortante en la base vs. el desplazamiento del último piso en cada pórtico.
- Las curvas idealizadas para la ductilidad global de la estructura, presentan áreas similares a las calculadas con el programa IDARC.

A continuación se entregan gráficos que ilustran la obtención de los puntos de fluencia y agrietamiento de cada pórtico.

Figura 6.22 Puntos de agrietamiento y fluencia del primer nivel



Las propiedades de fluencia de cada pórtico, para cada modelo se entregan en las siguientes tablas:

Tabla 6.22 Propiedades de fluencia por nivel, modelo Bilineal

pórtico	piso	$\phi_y$ (mm)	Fy (kN)	$\phi_u$ (mm)	Fu (kN)
4	1	9.6603	205.48	51.08	217.11
	2	11.246	179.76	44.218	189.88
	3	9.0634	137.7	42.128	145.45
	4	5.3089	77.193	38.284	81.535
6	1	9.1071	339.34	51.544	385.73
	2	9.4866	299.62	41.002	338.14
	3	7.0292	229.46	35.358	258.96
	4	3.8774	128.52	28.947	145.05
8	1	8.0059	534.94	35.72	650.92
	2	6.9005	469.91	26.39	571.61
	3	4.5817	357.15	18.3	437.71
	4	2.5942	205.99	5.28	245.09

Tabla 6.23 Propiedades de fluencia globales, modelo Bilineal

pórtico	$\phi_y$ (mm)	Fy (kN)	$\phi_u$ (mm)	Fu (kN)
4	35.279	205.48	175.71	217.11
6	30.814	341.87	156.85	385.73
8	20.668	519.14	85.689	650.92

Tabla 6.24 Propiedades de fluencia por nivel, modelo Trilineal

pórtico	piso	$\phi_y$ (mm)	Fy (kN)	$\phi_u$ (mm)	Fu (kN)	$\phi_u$ (mm)	Fu (kN)
4	1	2.1233	64.233	15.279	200.41	42.130	214.54
	2	1.8982	52.806	15.879	174.07	37.352	187.43
	3	1.8225	45.614	14.165	133.4	34.822	143.71
	4	1.8628	33.289	10.708	75.745	29.602	80.57
6	1	2.6249	112.3	15.433	327.14	35.424	371.08
	2	2.361	96.305	15.422	288.92	28.866	325.3
	3	1.9197	77.032	13.176	222.9	22.665	249.12
	4	1.4729	51.409	9.3013	126.69	14.707	139.54
8	1	2.1797	183.7	12.843	518.33	21.683	587.03
	2	1.8945	164.82	11.573	459.39	16.669	515.5
	3	1.493	134.27	9.2454	354.47	12.436	394.75
	4	1.1408	88.713	5.2696	190.96	7.6815	221.03

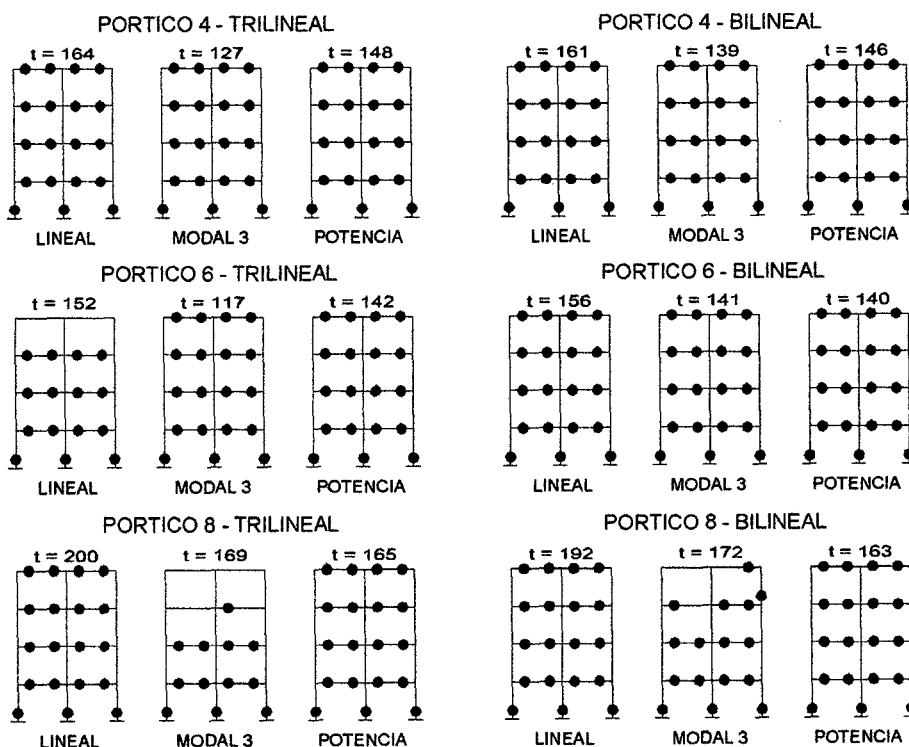
Tabla 6.25 Propiedades de fluencia globales, modelo Bilineal

pórtico	$\phi_{cr}$ (mm)	F <sub>cr</sub> (kN)	$\phi_y$ (mm)	F <sub>y</sub> (kN)	$\phi_u$ (mm)	F <sub>u</sub> (kN)
4	7.859	69.141	55.283	198.64	143.91	214.54
6	8.094	112.3	53.994	330.35	101.66	371.08
8	6.7588	195.42	37.47	507.16	58.496	587.03

### 6.2.6 Mecanismos de falla

Se hizo un seguimiento de los mecanismos de falla para verificar que no se presenten colapsos locales (pisos), en cuanto a los mecanismos obtenidos en p4 con ambos modelos, se puede ver que son los mismos, sin importar el método utilizado, en p6 y p8 la tendencia es la misma salvo algunas diferencias con el método Lineal para un modelo Trilineal en p6 y con el método Modal para modelos Bilineal y Trilineal en p8. Se puede decir que el elemento que gobierna el diseño, es la columna central del primer piso (en todos los pórticos). Una redistribución de aceros en las columnas y vigas del primer nivel, podría hacer que los pórticos sean más dúctiles.

Figura 6.23 Mecanismos de falla finales





En cuanto a la secuencia de formación de rótulas plásticas se observa que éstas viajan del primer nivel hacia el último nivel en las vigas y únicamente hay rótulas plásticas en las columnas del primer nivel; para un modelo Bilineal se tomó la fluencia aparente como patrón de comparación, ya que el comportamiento inelástico comienza a partir de la segunda pendiente.

Figura 6.24 Secuencia de formación de rótulas plásticas con un modelo Trilineal y distribución de fuerzas Lineal

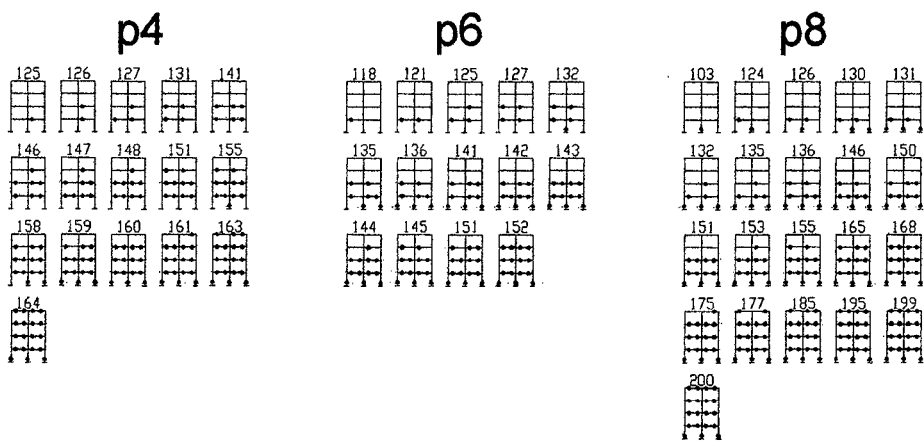
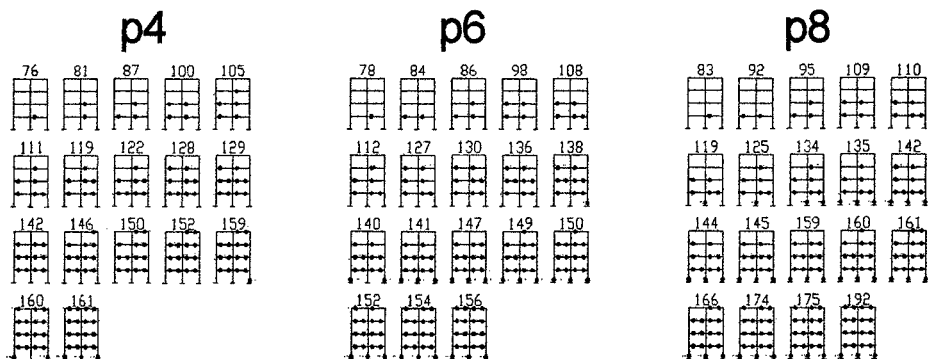


Figura 6.25 Secuencia de formación de rótulas plásticas con un modelo Bilineal y distribución de fuerzas Lineal



### 6.3 Análisis inelástico tiempo-historia

El método de corrección de fuerzas, usado en la ecuación en diferencias, para encontrar la solución de un análisis tiempo-historia, no presenta la misma estabilidad cuando se utilizan modelos Bilineales o Trilineales, lo que obliga a llevar a cabo análisis utilizando diferentes modelos de fluencia en las secciones de los elementos.

Un análisis inelástico esta más próximo a la realidad, ya que inevitablemente los elementos de un pórtico, presentan un comportamiento de este tipo cuando están sometidos a un sismo severo, sin embargo, un análisis de este tipo presenta diferentes inconvenientes que hacen difícil llevarlo a la práctica; para poder realizar un análisis elástico con alto grado de confiabilidad, es necesario establecer relaciones con los resultados de un análisis inelástico.

#### 6.3.1 Resumen del análisis tiempo-historia-vigas

Para comparar, la diferencia entre los resultados obtenidos del análisis inelástico tiempo-historia, al utilizar diferentes modelos en las secciones de los elementos (Bilineal, Clough y Trilineal), se toma como patrón de comparación los resultados del análisis con un modelo Bilineal; estos resultados se pueden apreciar en la siguiente tabla:

Tabla 6.26 Variación de momentos flectores

nivel	bilineal-clough momento %	bilineal-trilineal momento %
1	1	4-19
2	1	4-19
3	1	15-32
4	6-10	15-32

Los resultados de las curvaturas varían entre 8%-34% y 14%-45% para Bilineal-Clough y Bilineal-Trilineal; sin embargo, si se comparan sólo los elementos que entraron en fluencia con los modelos Bilineal y Clough, las diferencias se encuentran entre 8%-13%. Las diferencias entre las curvaturas resultan más

acentuadas entre estos tres modelos, porque los modelos Trilineales no presentan el mismo punto de fluencia que los modelos Bilineales, produciéndose por esto diferentes redistribuciones de momentos en los diferentes elementos de los pórticos.

En este trabajo se tomó el criterio de fluencia aparente en los modelos Bilineales, para considerar de alguna manera el comportamiento inelástico después del agrietamiento.

Otra forma de comparar los resultados obtenidos al utilizar un modelo de Clough, Bilineal o Trilineal, es comparar sus correspondientes factores de ductilidad por momentos; a continuación se muestran relaciones Momento-Curvatura del extremo izquierdo de diferentes elementos representativos.

Figura 6.26a. Relación Momento-Curvatura (extremo izquierdo) con una aceleración de 600gals y modelo Bilineal

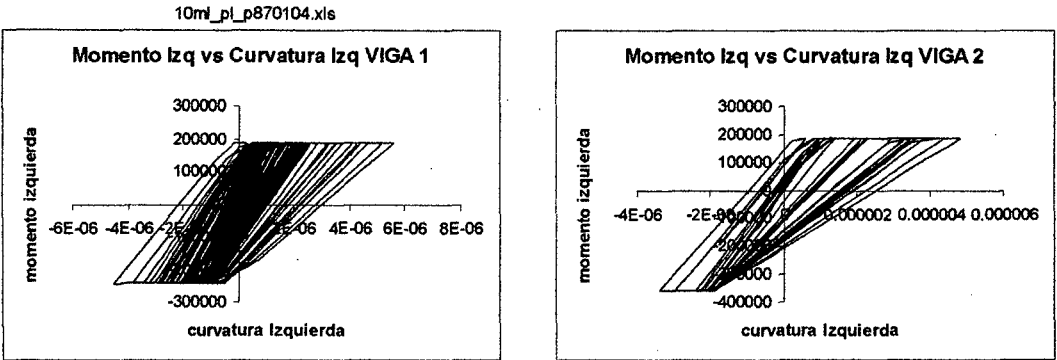


Figura 6.26b. Relación Momento-Curvatura (extremo izquierdo) con una aceleración de 600gals y modelo de Clough

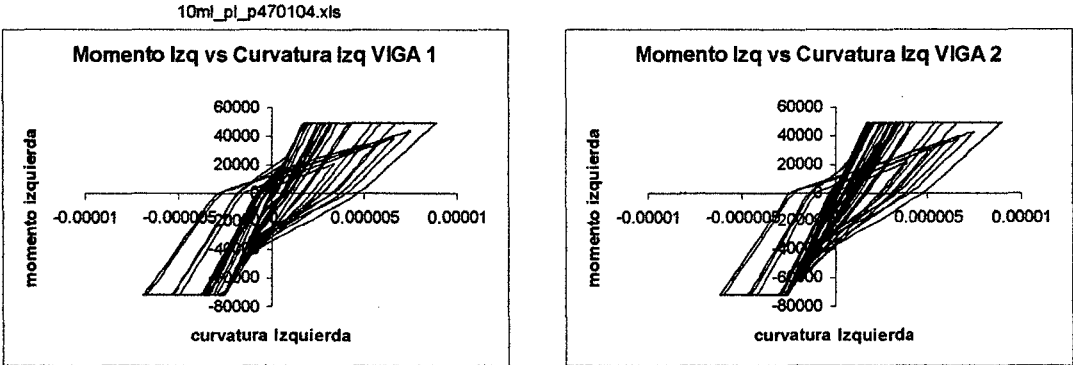
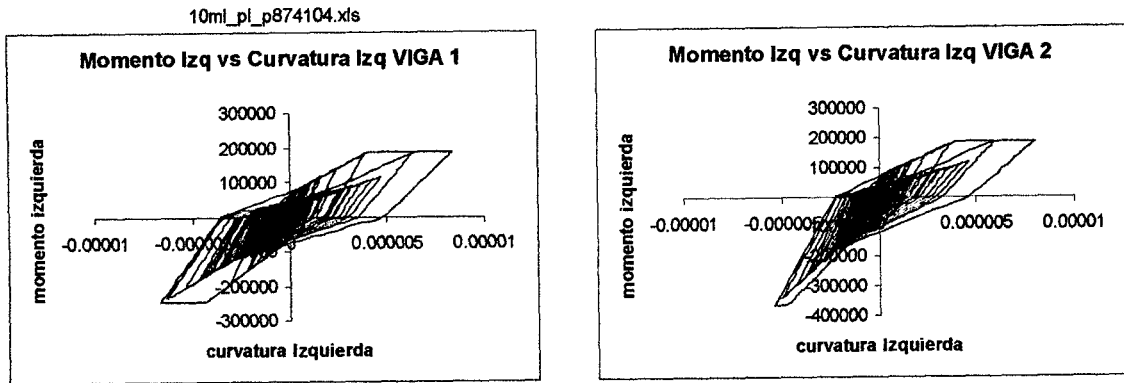


Figura 6.26c. Relación Momento-Curvatura (extremo izquierdo) con una aceleración de 600gals y modelo Trilineal



A continuación se presenta una tabla resumida típica, de los modelos comparados para el pórtico 6 con el registro sísmico de 1970, se elaboraron tablas similares para los diferentes pórticos y registros sísmicos.

Tabla 6.27 Resultados en vigas p670, aceleración 600 gals

Pórtico	Sismo	viga	Modelo	Momento-curvatura Izquierda				Momento-curvatura Derecha			
				máximo (kN-mm)	$\phi$ (rad/mm)	mínimo (kN-mm)	$\phi$ (rad/mm)	máximo (kN-mm)	$\phi$ (rad/mm)	mínimo (kN-mm)	$\phi$ (rad/mm)
6	70	1	CLOUGH	98,484.1	8.934E-06	-139,219.0	-6.865E-06	98,764.6	7.252E-06	-182,247.0	-5.803E-06
			BILINEAL	98,365.3	8.084E-06	-139,094.0	-6.239E-06	98,724.9	6.954E-06	-182,063.0	-5.230E-06
			TRILINEAL	98,133.1	6.422E-06	-119,413.0	-5.340E-06	95,669.6	5.792E-06	-135,274.0	-4.801E-06
		2	CLOUGH	98,827.3	7.724E-06	-182,085.0	-5.299E-06	98,342.5	7.921E-06	-139,377.0	-7.655E-06
			BILINEAL	98,778.2	7.355E-06	-181,937.0	-4.834E-06	98,295.2	7.582E-06	-139,194.0	-6.738E-06
			TRILINEAL	94,927.2	5.722E-06	-138,491.0	-4.945E-06	94,085.2	5.705E-06	-129,481.0	-5.950E-06
		3	CLOUGH	99,504.2	6.682E-06	-157,228.0	-4.993E-06	99,474.1	6.415E-06	-157,230.0	-5.005E-06
			BILINEAL	99,463.4	6.322E-06	-157,159.0	-4.649E-06	99,462.8	6.316E-06	-157,109.0	-4.398E-06
			TRILINEAL	95,917.4	5.820E-06	-135,745.0	-5.600E-06	99,464.5	6.331E-06	-122,306.0	-4.883E-06
		4	CLOUGH	99,525.4	6.869E-06	-157,137.0	-4.540E-06	99,451.0	6.212E-06	-157,328.0	-5.495E-06
			BILINEAL	99,483.5	6.499E-06	-157,073.0	-4.217E-06	99,440.2	6.116E-06	-157,201.0	-4.857E-06
			TRILINEAL	98,837.6	7.874E-07	-133,595.0	-5.481E-06	95,457.4	5.776E-06	-137,456.0	-5.686E-06
		5	CLOUGH	99,193.5	3.935E-06	-156,735.0	-2.524E-06	99,210.9	4.088E-06	-150,269.0	-2.226E-06
			BILINEAL	99,202.7	4.016E-06	-156,646.0	-2.077E-06	99,161.9	3.655E-06	-154,613.0	-2.152E-06
			TRILINEAL	75,749.0	3.909E-06	-118,614.0	-4.687E-06	81,737.2	4.476E-06	-107,316.0	-4.088E-06
		6	CLOUGH	99,225.8	4.220E-06	-148,512.0	-2.138E-06	99,168.0	3.709E-06	-156,770.0	-2.697E-06
			BILINEAL	99,231.7	4.272E-06	-149,509.0	-1.787E-06	99,116.6	3.255E-06	-156,767.0	-2.685E-06
			TRILINEAL	79,352.3	4.250E-06	-110,844.0	-4.275E-06	78,847.5	4.203E-06	-113,799.0	-4.432E-06
		7	CLOUGH	80,311.3	1.207E-06	-99,590.4	-1.497E-06	94,797.3	1.425E-06	-73,647.1	-1.107E-06
			BILINEAL	83,926.2	1.262E-06	-93,272.2	-1.402E-06	89,378.7	1.344E-06	-76,914.3	-1.156E-06
			TRILINEAL	59,630.0	2.439E-06	-78,577.1	-3.190E-06	65,238.6	2.979E-06	-59,912.5	-1.907E-06
		8	CLOUGH	96,237.6	1.527E-06	-69,957.1	-1.026E-06	76,159.2	1.145E-06	-103,156.0	-1.551E-06
			BILINEAL	96,251.6	1.611E-06	-66,543.2	-9.279E-07	70,961.0	1.067E-06	-105,053.0	-1.579E-06
			TRILINEAL	60,062.7	2.481E-06	-66,452.2	-2.357E-06	65,873.2	3.040E-06	-70,605.3	-2.642E-06

Tabla 6.28 Resultados en vigas p674, aceleración 600 gals

Portico	Sismo	viga	Modelo	Momento-curvatura Izquierda				Momento-curvatura Derecha			
				máximo (kN-mm)	$\phi$ (rad/mm)	mínimo (kN-mm)	$\phi$ (rad/mm)	máximo (kN-mm)	$\phi$ (rad/mm)	mínimo (kN-mm)	$\phi$ (rad/mm)
6	74	1	CLOUGH	98,503.9	9.076E-06	-140,168.0	-1.162E-05	98,673.9	6.571E-06	-185,505.0	-1.601E-05
			BILINEAL	98,306.3	7.661E-06	-138,915.0	-5.341E-06	98,598.3	6.002E-06	-181,949.0	-4.872E-06
			TRILINEAL	98,301.4	7.626E-06	-139,201.0	-6.771E-06	98,773.5	7.319E-06	-151,778.0	-5.544E-06
		2	CLOUGH	98,931.1	8.504E-06	-182,545.0	-6.739E-06	98,248.7	7.249E-06	-139,461.0	-8.076E-06
			BILINEAL	98,729.8	6.991E-06	-181,635.0	-3.888E-06	98,168.9	6.677E-06	-139,109.0	-6.310E-06
			TRILINEAL	98,745.7	7.110E-06	-155,009.0	-5.689E-06	98,300.1	7.617E-06	-136,716.0	-6.389E-06
		3	CLOUGH	99,549.1	7.079E-06	-157,084.0	-4.272E-06	99,403.5	5.792E-06	-157,292.0	-5.315E-06
			BILINEAL	99,448.0	6.185E-06	-156,918.0	-3.443E-06	99,327.0	5.115E-06	-157,079.0	-4.248E-06
			TRILINEAL	99,526.8	6.881E-06	-156,721.0	-6.708E-06	99,629.9	7.793E-06	-135,287.0	-5.574E-06
		4	CLOUGH	99,565.4	7.223E-06	-157,006.0	-3.883E-06	99,378.2	5.568E-06	-157,388.0	-5.794E-06
			BILINEAL	99,465.5	6.340E-06	-156,836.0	-3.029E-06	99,310.4	4.968E-06	-157,163.0	-4.666E-06
			TRILINEAL	99,546.4	7.055E-06	-143,061.0	-5.983E-06	99,606.9	7.590E-06	-142,410.0	-5.951E-06
		5	CLOUGH	99,197.6	3.971E-06	-149,073.0	-2.202E-06	99,146.7	3.521E-06	-150,559.0	-2.245E-06
			BILINEAL	99,139.1	3.453E-06	-141,944.0	-1.752E-06	99,068.3	2.827E-06	-142,344.0	-1.957E-06
			TRILINEAL	87,536.0	5.033E-06	-128,082.0	-5.189E-06	97,561.2	5.975E-06	-109,846.0	-4.226E-06
		6	CLOUGH	99,229.6	4.254E-06	-136,149.0	-1.805E-06	99,097.8	3.089E-06	-156,768.0	-2.689E-06
			BILINEAL	99,187.3	3.879E-06	-129,558.0	-1.386E-06	99,016.2	2.367E-06	-156,690.0	-2.299E-06
			TRILINEAL	90,518.9	5.316E-06	-126,508.0	-5.106E-06	91,501.0	5.401E-06	-117,231.0	-4.618E-06
		7	CLOUGH	77,681.7	1.168E-06	-91,219.0	-1.371E-06	87,006.0	1.308E-06	-71,193.5	-1.070E-06
			BILINEAL	71,867.1	1.080E-06	-75,241.4	-1.131E-06	72,291.0	1.087E-06	-65,670.9	-9.872E-07
			TRILINEAL	69,277.0	3.368E-06	-85,548.9	-3.670E-06	71,138.9	3.547E-06	-70,649.6	-2.645E-06
		8	CLOUGH	96,228.3	1.471E-06	-61,820.5	-9.210E-07	67,641.1	1.017E-06	-101,761.0	-1.530E-06
			BILINEAL	91,420.7	1.374E-06	-47,438.9	-7.131E-07	52,883.2	7.949E-07	-95,656.7	-1.438E-06
			TRILINEAL	68,258.7	3.270E-06	-74,313.9	-2.897E-06	72,046.0	3.634E-06	-81,529.9	-3.393E-06

### 6.3.2 Resumen del análisis tiempo-historia-columnas

Al utilizar los modelos de Clough y Bilineal, se observa que los momentos flectores varían entre 1%-60% y las curvaturas entre 6%-26%.

Debido a que los elementos de cada pórtico no entran en fluencia al mismo tiempo para cada modelo, se presentan mayores porcentajes de variación en los resultados entre elementos que fluyeron y los que no fluyeron, esto es razonable porque la curvatura varía más rápidamente en la segunda pendiente que en la primera, esto produce diferentes redistribuciones de momentos flectores en cada pórtico.

Los resultados de los análisis que utilizan modelos de Clough y Bilineal, son muy parecidos cuando los elementos comparados se encuentran en un mismo rango (inelástico o elástico).

En cuanto a los modelos Trilineal y Bilineal, las diferencias en los momentos flectores están en el orden del 12%-40%, en los elementos que se encuentran en el

rango elástico y varían considerablemente en los elementos que fluyen con un modelo y con otro no, en cuanto a curvaturas, las diferencias están en el orden de 20% a 56%, en los elementos que se encuentran en el rango elástico y varían considerablemente en los elementos que se encuentran en el rango inelástico.

Se debe tener en cuenta, que solamente las secciones de las bases de las columnas del primer nivel presentan un comportamiento inelástico, en la mayoría de los casos analizados y en todos los modelos.

En general, tanto en las comparaciones de vigas como en columnas, se obtienen resultados similares si la fluencia ocurre en ambos modelos y en similar rango de tiempo para un mismo elemento. Los resultados son diferentes cuando un elemento de un pórtico se encuentra en fluencia con un modelo y con el otro no.

Se puede decir que existe mejor aproximación entre los resultados de los modelos de Clough y Bilineal, que entre Bilineal y Trilineal.

### 6.3.3 Resumen de las aceleraciones y desplazamientos de cada piso

Estos valores se utilizan para comparar el comportamiento global de cada pórtico, las tablas de resumen de estos resultados se presentan a continuación:

Tabla 6.29 Variación de los modelos por piso

Pisos	BILINEAL-CLOUGH		BILINEAL-TRLINEAL	
	aceleración (%)	desplazamiento (%)	aceleración (%)	desplazamiento (%)
1	10-13	18	11-21	18
2	5-8	4-17	18-29	12-26
3	5-8	4-17	18-29	12-26
4	5-8	4-17	18-29	12-26

Tabla 6.30 Variación de los modelos por pórtico

Pórtico	BILINEAL-CLOUGH		BILINEAL-TRLINEAL	
	aceleración (%)	desplazamiento (%)	aceleración (%)	desplazamiento (%)
4	3-8	4-11	13-18	10-38
6	2-22	3-16	10-24	12-22
8	3-10	4-34	9-30	9-22

Cualitativamente podemos decir que los valores de las aceleraciones y los desplazamientos, se encuentran en el mismo orden de magnitud en todos los modelos.

Finalizando la presente página, se entregan gráficos donde se compara para cada modelo la influencia del período de cada pórtico en los desplazamientos laterales máximos, considerando el nivel de aceleración y el registro sísmico constantes. Los desplazamientos están en mm.

En cuanto a la influencia del nivel de aceleración, los resultados están dentro de lo esperado, es decir para mayor nivel de aceleración mayor desplazamiento en todos los modelos.

Considerando la influencia del registro sísmico, en la mayoría de los casos el registro que provoca mayores desplazamientos es el de 1974 seguido por el de 1970 para el modelo de Clough; el registro sísmico de 1974 vuelve a ser el más influyente para el modelo Trilineal y el de 1970 el segundo más influyente; para el modelo Bilineal el registro sísmico de 1974 es el más influyente seguido por el registro sísmico de 1966.

Considerando el período de la estructura como variable, p8 posee los mayores desplazamientos en la mayoría de los casos y p4 los menores desplazamientos, esto ocurre siempre, independientemente del modelo de fluencia que se utilice.

Figura 6.27

**RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS LATERALES (ANALISIS TIEMPO-HISTORIA INELASTICO)  
MODELO BILINEAL**

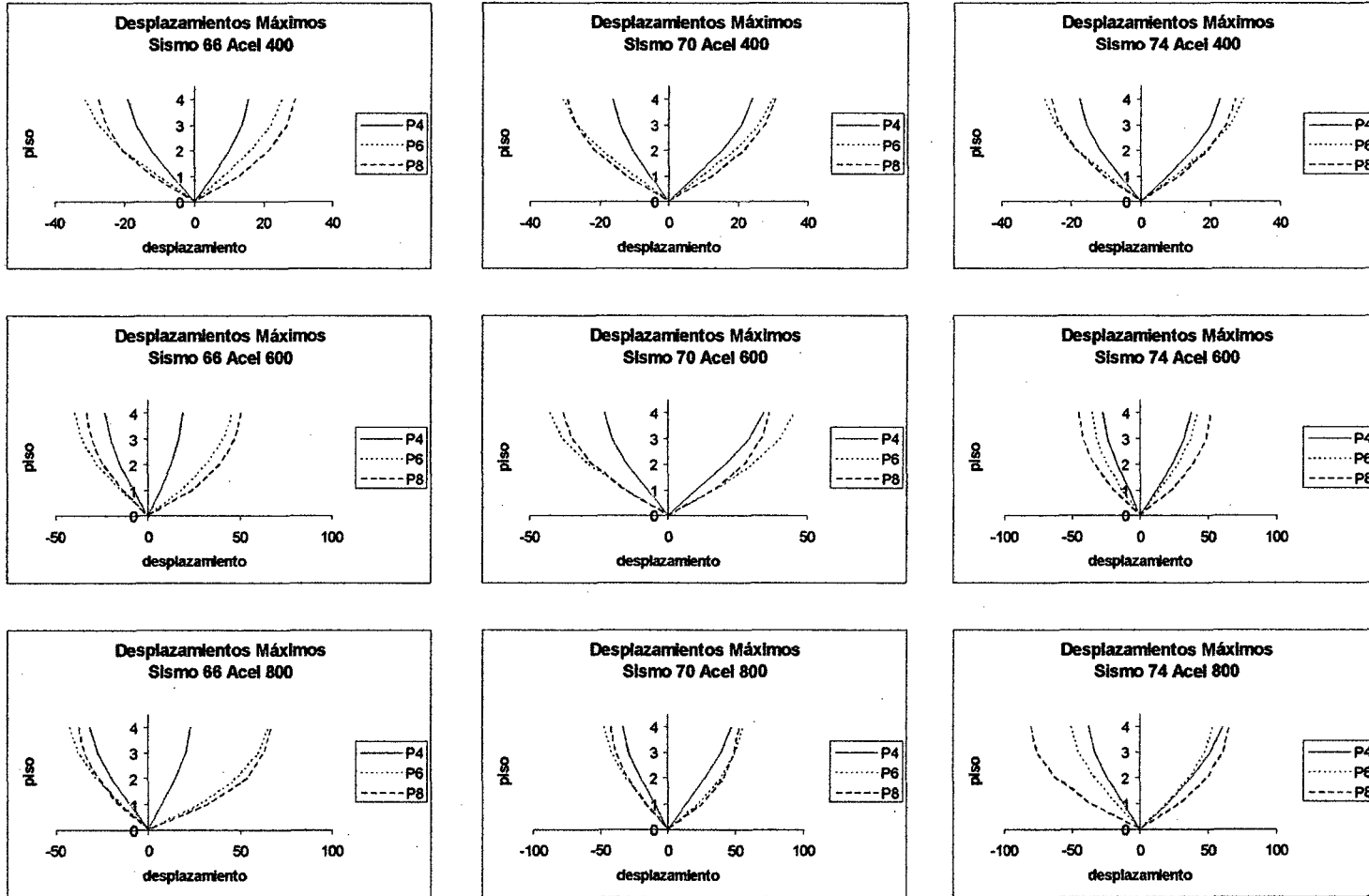




Figura 6.28

**RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS LATERALES (ANALISIS TIEMPO-HISTORIA INELASTICO)  
MODELO TRILINEAL**

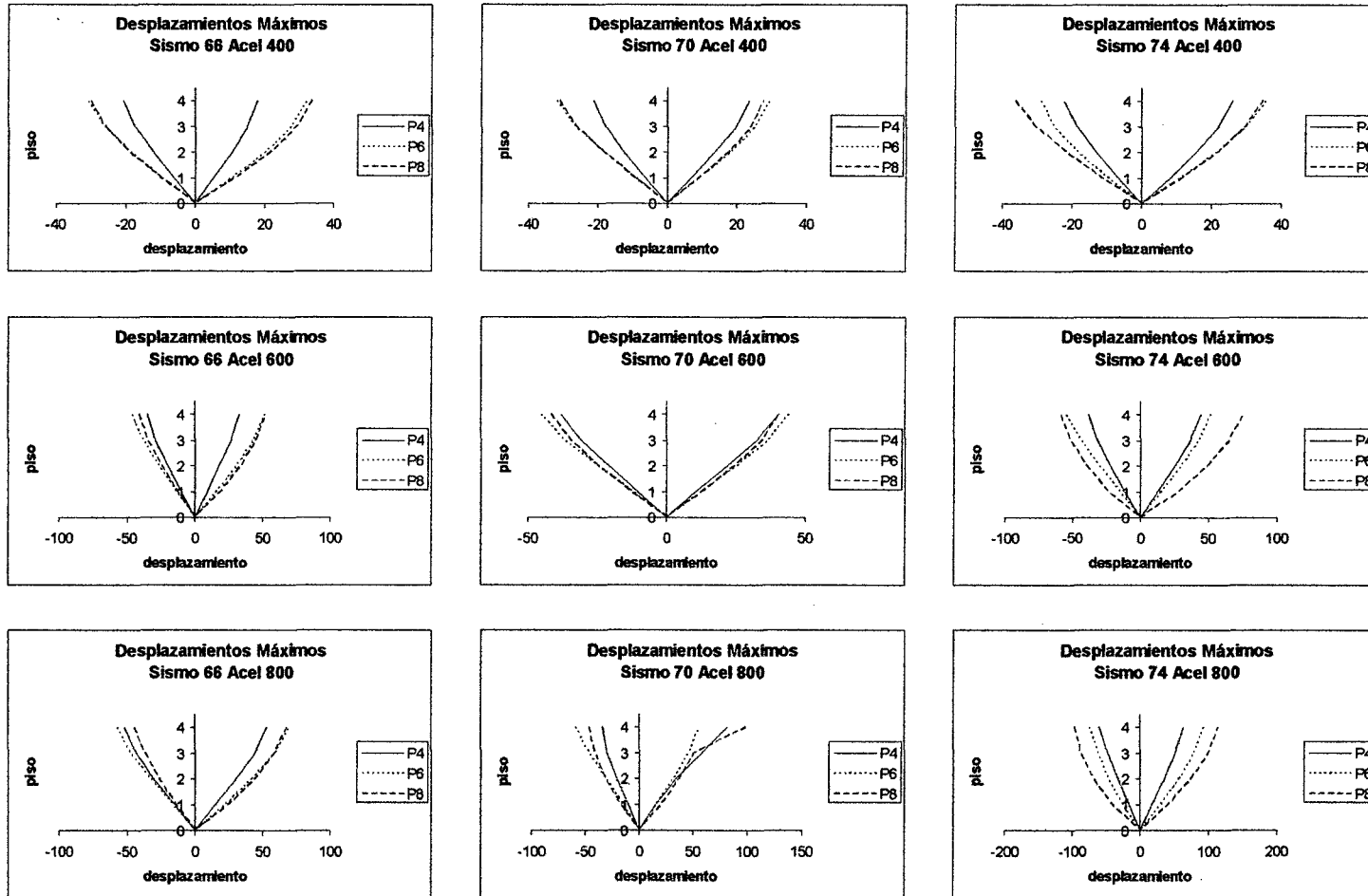
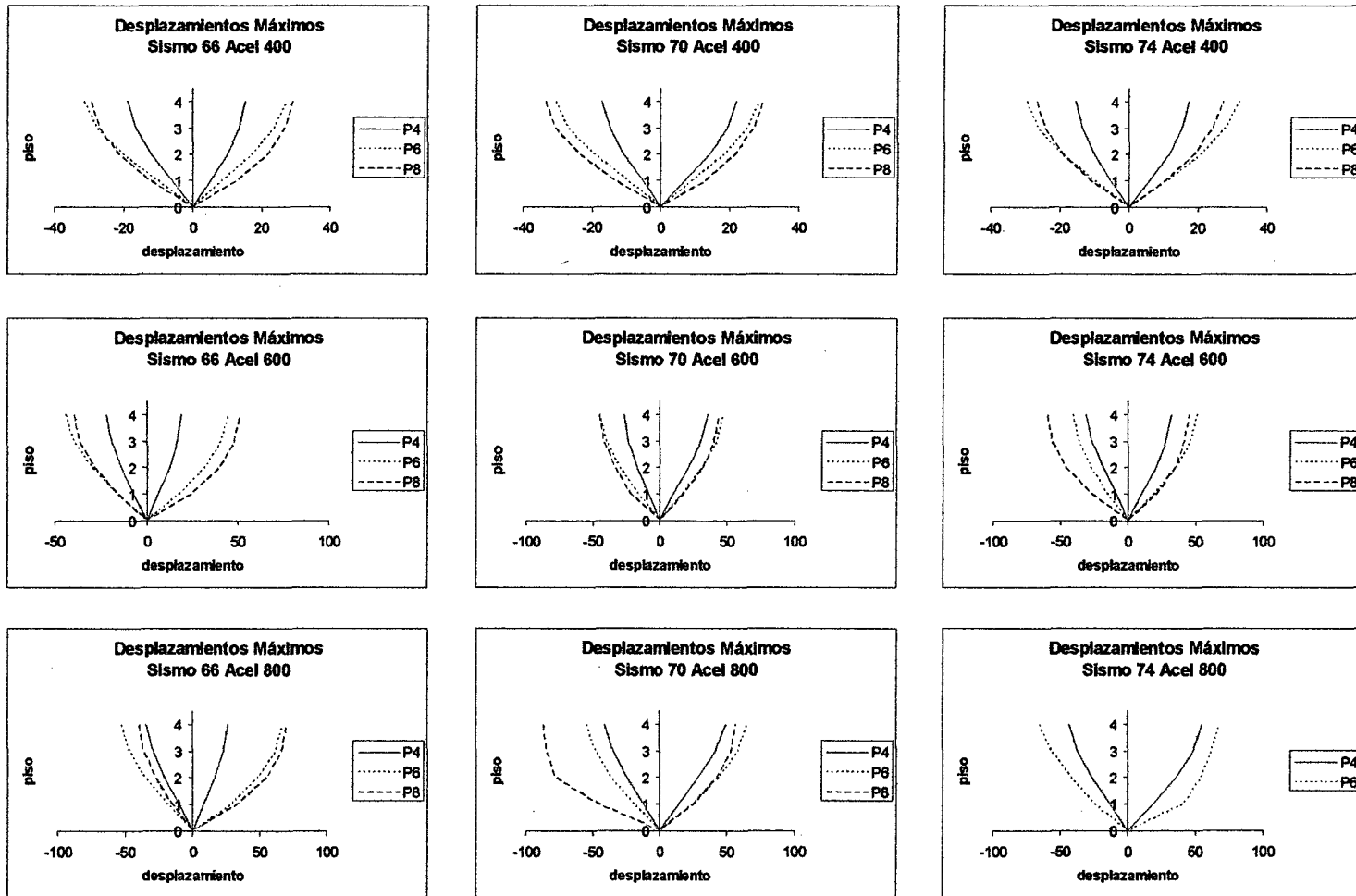


Figura 6.29

**RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS LATERALES (ANALISIS TIEMPO-HISTORIA INELASTICO)  
MODELO CLOUGH**



Las mayores aceleraciones se obtienen cuando se utiliza un modelo de Clough y las menores con el modelo Trilineal; en cuanto a desplazamientos, los mayores desplazamientos se producen cuando se utiliza un modelo Trilineal y los menores con el modelo Bilineal. A continuación se presenta una tabla genérica de aceleraciones y desplazamientos:

Tabla 6.31 Aceleraciones y desplazamientos máximos y mínimos de cada piso

Pórtico	Sismo	Acel	Nivel	Tipo	Aceleración (mm/seg <sup>2</sup> )		Desplazamiento (mm)	
					máxima	mínima	máximo	mínimo
4	66	600	1	CLOUGH	6,944.7	-5,999.1	6.32	-7.02
				BILINEAL	6,125.8	-5,946.3	6.43	-7.29
				TRILINEAL	5,159.4	-5,845.3	8.90	-10.08
			2	CLOUGH	7,625.9	-7,094.8	12.49	-14.18
				BILINEAL	7,230.4	-7,485.5	12.64	-14.85
				TRILINEAL	6,387.6	-6,473.4	17.63	-20.29
			3	CLOUGH	9,245.1	-8,167.4	16.69	-19.22
				BILINEAL	9,396.9	-8,325.1	16.81	-20.26
				TRILINEAL	8,075.1	-7,083.2	26.13	-29.08
			4	CLOUGH	10,650.0	-9,051.3	18.88	-21.88
				BILINEAL	11,249.0	-9,489.3	18.96	-23.09
				TRILINEAL	9,785.8	-10,465.0	32.61	-35.24

Tabla 6.32a Aceleraciones y desplazamientos de cada piso, modelo de Clough

Pórtico	Sismo	Acel	Nivel	Aceleración (mm/seg <sup>2</sup> )		Desplazamiento (mm)		
				máxima	mínima	máximo	mínimo	
4	66	400	1	4,627.0	-4,699.6	5.05	-6.19	
			2	6,867.4	-6,084.7	9.88	-12.31	
			3	8,607.1	-7,467.8	13.31	-16.59	
			4	9,416.9	-8,238.0	15.23	-18.90	
		600	1	6,944.7	-5,999.1	6.32	-7.02	
			2	7,625.9	-7,094.8	12.49	-14.18	
			3	9,245.1	-8,167.4	16.69	-19.22	
			4	10,650.0	-9,051.3	18.88	-21.88	
		800	1	7,667.9	-7,874.1	8.03	-9.90	
			2	9,017.6	-9,134.9	16.48	-20.98	
			3	11,126.0	-9,501.2	22.75	-29.61	
			4	14,451.0	-12,389.0	26.18	-34.48	
		70	400	1	4,902.5	-5,484.7	7.04	-5.48
				2	6,131.4	-7,423.9	14.27	-10.95
				3	8,628.3	-8,605.7	19.33	-14.99
				4	9,651.9	-9,889.5	21.91	-17.29
			600	1	7,356.0	-7,433.6	10.03	-8.70
				2	9,572.7	-9,599.7	21.34	-17.49
				3	9,921.5	-10,702.0	30.31	-23.68
				4	12,356.0	-13,587.0	35.52	-27.09
			800	1	7,576.0	-8,712.2	14.12	-12.39
				2	10,135.0	-10,815.0	28.93	-24.98
				3	10,965.0	-11,609.0	41.37	-34.86
				4	12,646.0	-13,842.0	49.68	-41.09
		74	400	1	4,308.8	-5,274.4	5.94	-5.28
				2	6,639.7	-7,426.6	11.55	-10.28
				3	7,644.2	-8,153.7	15.35	-13.78
				4	8,217.5	-9,549.2	17.40	-15.68
			600	1	6,014.9	-7,219.6	9.92	-8.90
				2	8,289.5	-9,853.8	20.33	-19.02
				3	9,805.4	-10,191.0	27.98	-26.93
				4	12,324.0	-11,924.0	32.07	-31.29
			800	1	6,819.5	-9,114.2	18.81	-13.41
				2	8,870.6	-11,743.0	35.54	-27.02
				3	10,616.0	-11,629.0	47.93	-37.52
				4	13,644.0	-13,619.0	55.21	-43.50

Tabla 6.32b Aceleraciones y desplazamientos de cada piso, modelo de Clough

Pórtico	Sismo	Acel	Nivel	Aceleración		Desplazamiento	
				máxima	mínima	máximo	mínimo
6	66	400	1	4,153.0	-5,098.3	8.62	-10.48
			2	5,777.2	-5,552.1	17.29	-20.57
			3	7,343.3	-7,155.3	23.68	-27.71
			4	8,386.8	-8,538.8	27.20	-31.52
		600	1	10,286.0	-8,030.8	18.09	-16.33
			2	6,598.1	-8,029.6	31.84	-30.26
			3	7,597.7	-8,442.3	40.60	-39.75
			4	8,262.9	-10,450.0	44.91	-44.43
		800	1	6,860.5	-10,151.0	28.67	-19.06
			2	7,977.3	-8,736.5	49.03	-35.46
			3	7,711.8	-8,732.4	61.76	-47.24
			4	9,689.1	-10,830.0	67.63	-53.28
	70	400	1	4,965.1	-4,017.7	9.24	-10.04
			2	6,652.4	-5,584.0	18.44	-19.86
			3	7,175.3	-7,537.9	25.06	-26.97
			4	8,489.1	-8,446.9	28.65	-30.84
		600	1	8,984.4	-6,394.8	17.03	-16.71
			2	6,871.6	-6,638.2	31.91	-30.73
			3	7,879.7	-8,487.3	42.29	-40.59
			4	9,499.0	-9,786.8	47.50	-45.69
		800	1	8,049.4	-8,175.4	24.70	-19.89
			2	8,047.0	-8,159.9	44.30	-36.81
			3	8,263.7	-8,574.0	58.08	-48.90
			4	9,884.5	-10,028.0	65.19	-55.16
74	400	1	3,917.4	-5,053.7	10.88	-10.24	
		2	5,658.4	-6,424.0	20.98	-19.76	
		3	6,766.1	-7,714.3	28.07	-26.29	
		4	7,421.8	-8,418.4	31.84	-29.69	
	600	1	6,132.1	-6,209.7	19.31	-15.62	
		2	6,738.2	-6,774.8	35.49	-28.03	
		3	7,405.6	-8,235.0	46.31	-36.61	
		4	9,270.5	-9,098.5	51.52	-40.95	
	800	1	8,745.2	-7,936.9	40.95	-24.97	
		2	8,272.3	-7,835.9	54.40	-42.74	
		3	8,262.0	-8,731.1	62.03	-57.04	
		4	11,252.0	-11,974.0	68.24	-65.37	
8	66	400	1	5,222.5	-4,370.1	13.03	-12.70
			2	4,717.4	-5,814.5	21.83	-21.73
			3	5,603.6	-5,960.4	26.88	-27.05
			4	6,214.5	-6,911.2	29.30	-29.56
		600	1	4,882.2	-6,394.1	24.44	-16.50
			2	5,677.0	-7,084.3	40.18	-28.88
			3	5,869.6	-6,603.7	48.00	-36.56
			4	6,677.2	-7,915.0	51.34	-40.06
		800	1	5,791.0	-15,258.0	33.23	-15.73
			2	6,184.1	-8,060.8	55.83	-27.88
			3	6,126.6	-7,760.9	66.49	-35.97
			4	8,637.0	-8,752.9	70.63	-39.92
	70	400	1	3,766.3	-4,332.0	13.26	-13.71
			2	4,480.4	-5,345.3	21.82	-24.24
			3	5,585.7	-6,102.4	27.10	-30.65
			4	6,159.6	-7,498.1	29.73	-33.73
		600	1	5,402.6	-5,252.1	18.21	-22.22
			2	4,859.2	-5,691.3	32.80	-34.29
			3	6,052.5	-6,280.6	40.75	-41.88
			4	6,961.9	-7,582.8	44.26	-45.43
		800	1	5,817.8	-8,277.9	25.56	-46.53
			2	5,742.8	-6,429.9	42.98	-78.53
			3	6,466.4	-6,570.1	53.00	-84.93
			4	7,733.5	-7,730.9	57.18	-87.58
74	400	1	3,884.3	-3,916.0	10.71	-11.43	
		2	4,647.3	-4,432.2	19.09	-19.54	
		3	5,274.1	-5,891.6	24.51	-24.42	
		4	5,836.2	-6,468.7	27.25	-26.78	
	600	1	5,053.0	-5,901.1	21.49	-27.30	
		2	5,652.5	-6,090.8	34.86	-47.12	
		3	5,891.5	-7,013.3	42.16	-56.28	
		4	6,986.9	-8,798.2	45.48	-60.26	

### 6.3.4 Resumen de los desplazamientos de entrepiso y fuerzas cortantes de piso

El modelo de Clough presenta una mejor aproximación al modelo Bilineal, tanto en valores de corte como en valores de desplazamiento de entrepiso. La variación de las fuerzas de corte entre los modelos Bilineal y Clough se encuentra en el rango de 0.1%-15%, en desplazamientos de entrepiso el rango de variación es de 0.1%-35%. Si se compara un modelo Bilineal con un modelo Trilineal, el rango de variación para las fuerzas de corte es de 0.5%-35% y presenta variaciones mayores en cuanto a desplazamientos de entrepiso, esto se debe a que en el modelo Trilineal, la segunda pendiente hace que la llegada a la fluencia de los elementos sea más lenta que en los modelos de Clough y Bilineal (se puede encontrar mayor comportamiento inelástico si se utiliza estos modelos).

A continuación se entrega una tabla típica de los resultados obtenidos comparando los tres modelos y una tabla con los resultados del modelo de Clough que será utilizada más adelante para el estudio de las ductilidades y factores de reducción R.

Tabla 6.33 Comparación de modelos (Registro sísmico de 1966)

Pórtico	Acel	Modelo	Piso 1			Piso 2			Piso 3			Piso 4		
			desp de entrepiso (mm)		corte (kN)	desp de entrepiso (mm)		corte (kN)	desp de entrepiso (mm)		corte (kN)	desp de entrepiso (mm)		corte (kN)
			derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda	
4	400	CLOUGH	-6.19	5.05	180.0	-6.12	4.83	155.7	-4.29	3.45	112.9	-2.33	1.92	59.1
		BILINEAL	-6.15	5.15	180.1	-6.12	4.93	157.1	-4.32	3.50	113.1	-2.32	1.95	60.5
		TRILINEAL	-6.15	5.11	119.7	-6.09	5.30	106.4	-4.98	4.52	79.5	-3.22	3.02	48.6
	600	CLOUGH	-7.02	6.32	193.7	-7.16	6.18	165.8	-5.08	4.20	122.4	-2.71	2.19	66.2
		BILINEAL	-7.29	6.43	195.2	-7.57	6.22	169.3	-5.41	4.17	122.2	-2.83	2.17	70.0
		TRILINEAL	-10.08	8.90	163.2	-10.21	9.16	146.1	-8.79	8.55	109.6	-6.17	6.48	64.7
	800	CLOUGH	-9.90	8.03	220.6	-11.12	8.55	191.7	-8.73	6.57	154.0	-4.99	3.67	90.5
		BILINEAL	-9.35	7.44	220.9	-10.23	7.57	191.0	-7.94	5.21	144.0	-4.47	2.66	80.4
		TRILINEAL	-14.96	14.64	205.4	-15.48	15.28	182.9	-12.78	14.04	161.1	-8.79	10.60	83.1
6	400	CLOUGH	-10.48	8.62	347.8	-10.10	8.66	313.6	-7.16	6.39	232.5	-3.82	3.54	127.3
		BILINEAL	-10.47	8.34	349.7	-10.04	8.08	314.2	-7.09	5.98	229.6	-3.78	3.34	130.2
		TRILINEAL	-9.65	10.39	258.9	-9.09	9.83	230.9	-7.40	7.79	166.1	-4.69	4.84	97.3
	600	CLOUGH	-16.33	18.09	397.8	-13.93	13.79	341.9	-9.50	9.37	270.6	-4.69	5.06	155.2
		BILINEAL	-15.25	18.17	390.8	-12.58	14.00	341.1	-8.21	9.43	268.8	-3.97	4.98	148.9
		TRILINEAL	-13.72	15.46	335.3	-13.48	15.32	308.5	-11.46	12.95	237.1	-7.71	9.11	146.7
	800	CLOUGH	-19.06	28.67	430.8	-16.43	20.41	366.0	-11.87	13.02	281.2	-6.22	6.46	161.1
		BILINEAL	-15.12	28.33	438.3	-13.46	19.78	364.3	-9.43	12.60	280.0	-4.74	6.33	156.7
		TRILINEAL	-16.55	21.67	351.8	-16.52	20.43	341.6	-14.75	17.08	271.1	-10.47	11.74	156.2
8	400	CLOUGH	-12.70	13.03	623.2	-9.03	8.82	538.3	-5.32	5.54	415.9	-2.52	2.91	224.8
		BILINEAL	-12.26	12.83	618.4	-8.40	8.78	538.0	-4.81	5.47	413.8	-2.38	2.85	219.4
		TRILINEAL	-10.09	11.49	495.6	-8.98	10.25	461.9	-6.98	7.95	342.8	-4.05	4.88	201.6
	600	CLOUGH	-16.50	24.44	702.8	-12.41	15.76	577.0	-7.83	8.15	462.5	-3.63	3.80	257.7
		BILINEAL	-14.22	24.15	710.3	-10.44	15.51	574.9	-6.16	7.95	463.7	-2.87	3.78	256.6
		TRILINEAL	-13.33	18.57	560.4	-12.01	15.06	551.9	-10.01	11.68	420.6	-6.77	7.38	251.0
	800	CLOUGH	-15.73	33.23	729.2	-12.31	22.61	614.4	-8.67	11.22	471.2	-4.45	4.76	281.3
		BILINEAL	-16.26	32.42	736.7	-11.41	21.55	608.0	-7.59	10.19	461.6	-3.62	4.55	284.5
		TRILINEAL	-14.20	24.67	582.4	-12.83	19.65	597.4	-11.40	14.90	459.9	-8.26	9.26	295.8

Tabla 6.34 Resultados de desplazamientos de entrepiso y fuerza de corte de cada piso  
modelo de Clough

Pórtico	Sismo	Acel	Piso 1			Piso 2			Piso 3			Piso 4		
			despla de entrep (mm)		corte (kN)	despla de entrep (mm)		corte (kN)	despla de entrep (mm)		corte (kN)	despla de entrep (mm)		corte (kN)
			derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda	
4	66	400	-6.193	5.046	180.0	-6.119	4.834	155.7	-4.286	3.449	112.9	-2.332	1.925	59.1
		600	-7.019	6.317	193.7	-7.159	6.175	165.8	-5.085	4.198	122.4	-2.708	2.188	66.2
		800	-9.899	8.028	220.6	-11.124	8.555	191.7	-8.731	6.567	154.0	-4.987	3.668	90.5
	70	400	-5.479	7.041	188.2	-5.471	7.262	155.5	-4.044	5.126	114.5	-2.294	2.688	61.9
		600	-8.697	10.031	226.6	-8.941	11.365	187.8	-6.652	9.185	144.6	-3.558	5.458	84.0
		800	-12.394	14.115	232.4	-12.644	14.864	193.8	-10.051	12.615	147.2	-6.472	8.575	85.8
	74	400	-5.285	5.943	185.5	-5.011	5.605	149.3	-3.492	3.835	109.8	-1.915	2.119	59.4
		600	-8.898	9.919	231.7	-10.169	10.406	187.2	-8.001	7.652	138.4	-4.482	4.097	76.7
		800	-13.410	18.806	231.5	-13.627	16.776	201.7	-10.549	12.514	143.4	-6.467	7.732	85.1
6	66	400	-10.478	8.622	347.8	-10.097	8.663	313.6	-7.164	6.392	232.5	-3.818	3.543	127.3
		600	-16.325	18.085	397.8	-13.932	13.790	341.9	-9.496	9.366	270.6	-4.688	5.062	155.2
		800	-19.060	28.671	430.8	-16.432	20.405	366.0	-11.873	13.020	281.2	-6.216	6.464	161.1
	70	400	-10.038	9.245	358.3	-9.858	9.196	316.5	-7.209	6.622	235.0	-3.918	3.610	127.0
		600	-16.714	17.031	387.9	-14.013	14.929	340.4	-9.866	10.544	262.7	-5.133	5.414	145.9
		800	-19.888	24.695	395.1	-16.918	19.625	353.7	-12.117	13.830	275.3	-6.286	7.287	148.2
	74	400	-10.237	10.884	364.1	-9.527	10.096	322.0	-6.533	7.112	236.6	-3.399	3.796	126.0
		600	-15.617	19.306	447.9	-12.583	16.180	351.3	-8.582	10.888	252.8	-4.542	5.345	136.9
		800	-24.974	40.947	589.3	-17.914	22.959	350.7	-14.740	16.081	279.7	-8.919	9.310	177.3
8	66	400	-12.697	13.026	623.2	-9.032	8.824	538.3	-5.317	5.536	415.9	-2.521	2.906	224.8
		600	-16.504	24.444	702.8	-12.408	15.762	577.0	-7.826	8.147	462.5	-3.630	3.804	257.7
		800	-15.730	33.232	729.2	-12.314	22.612	614.4	-8.674	11.216	471.2	-4.446	4.756	281.3
	70	400	-13.712	13.263	644.6	-10.531	8.606	550.5	-6.414	5.663	430.0	-3.084	2.944	240.1
		600	-22.222	18.213	637.2	-12.067	14.583	591.4	-7.638	7.975	428.9	-3.585	3.626	244.8
		800	-46.528	25.562	778.0	-32.100	17.466	603.4	-11.156	10.116	451.0	-4.435	4.314	251.6
	74	400	-11.429	10.711	606.3	-8.108	8.468	536.5	-4.885	5.417	397.5	-2.375	2.746	211.0
		600	-27.300	21.489	739.7	-21.569	13.386	609.2	-9.206	7.948	490.5	-4.063	4.144	283.5

Cualitativamente podemos decir que en todos los modelos, el pórtico p8 presenta la mayor fuerza cortante y p4 la menor; que existe un acercamiento entre los valores de la fuerza cortante para cada nivel si se mantiene constante el nivel de aceleración y el pórtico, que a mayor aceleración obtenemos mayor fuerza cortante, esto es un resultado esperado.

En desplazamientos de entrepiso para el modelo Bilineal a mayor aceleración mayor desplazamiento de entrepiso, lo mismo ocurre para el modelo de Clough y el modelo Trilineal, se aprecia también una proximidad entre los desplazamientos de entrepiso para los tres modelos, si la variable es el registro sísmico; si se cambia el período (es decir los pórticos son las variables de análisis), en la mayoría de los casos, p8 presenta el mayor desplazamiento de entrepiso en el primer nivel, sin embargo, en el último nivel el máximo desplazamiento de entrepiso ocurre tanto en p8 como en p6 para los modelos Trilineal, Clough y Bilineal. En las siguientes tablas, las fuerzas cortantes y los desplazamientos de entrepiso se encuentran en kN y mm respectivamente.

Figura 6.30

RESUMEN DE FUERZAS DE CORTE MAXIMAS (ANALISIS DINAMICO INELASTICO)  
MODELO CLOUGH

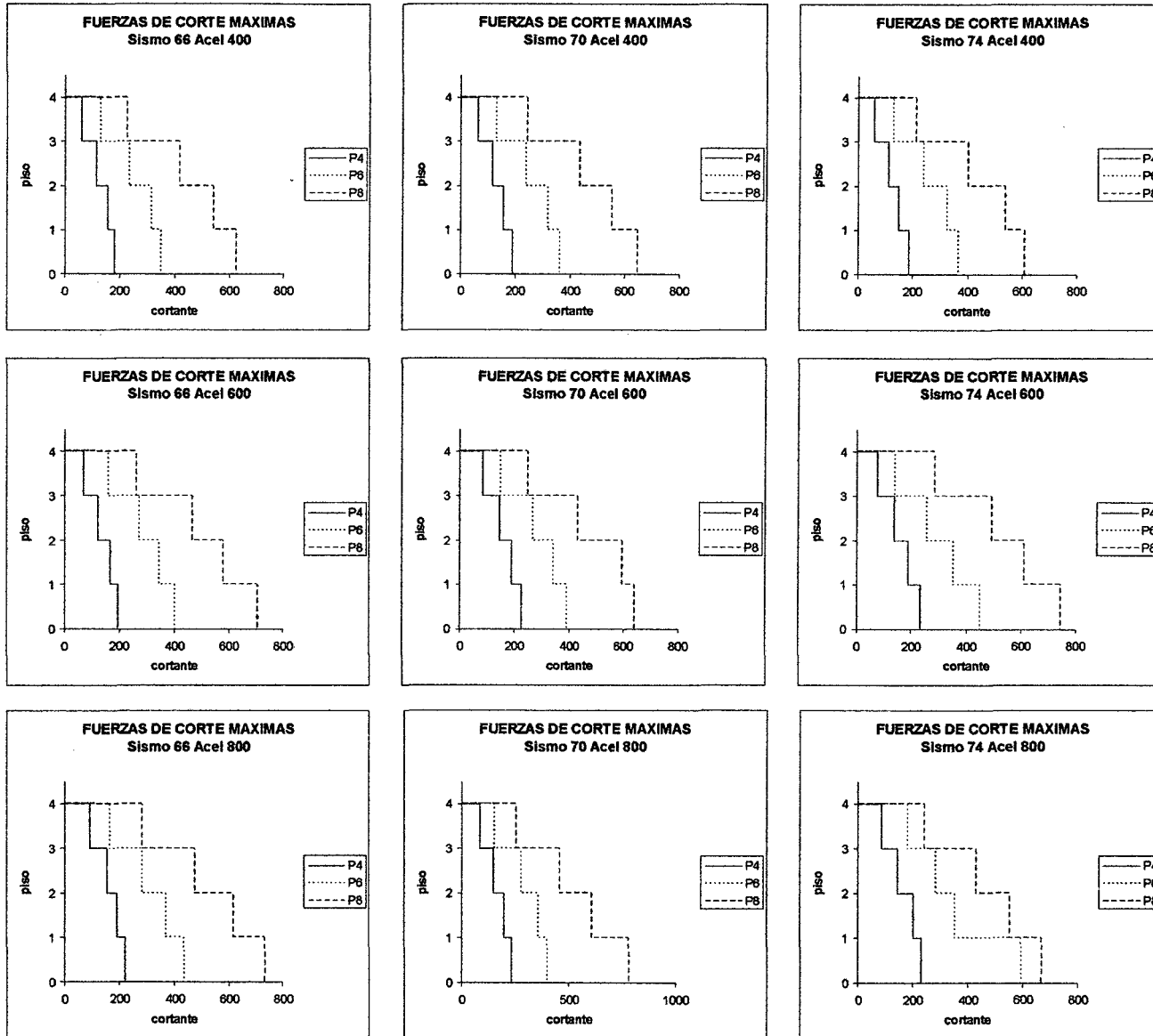
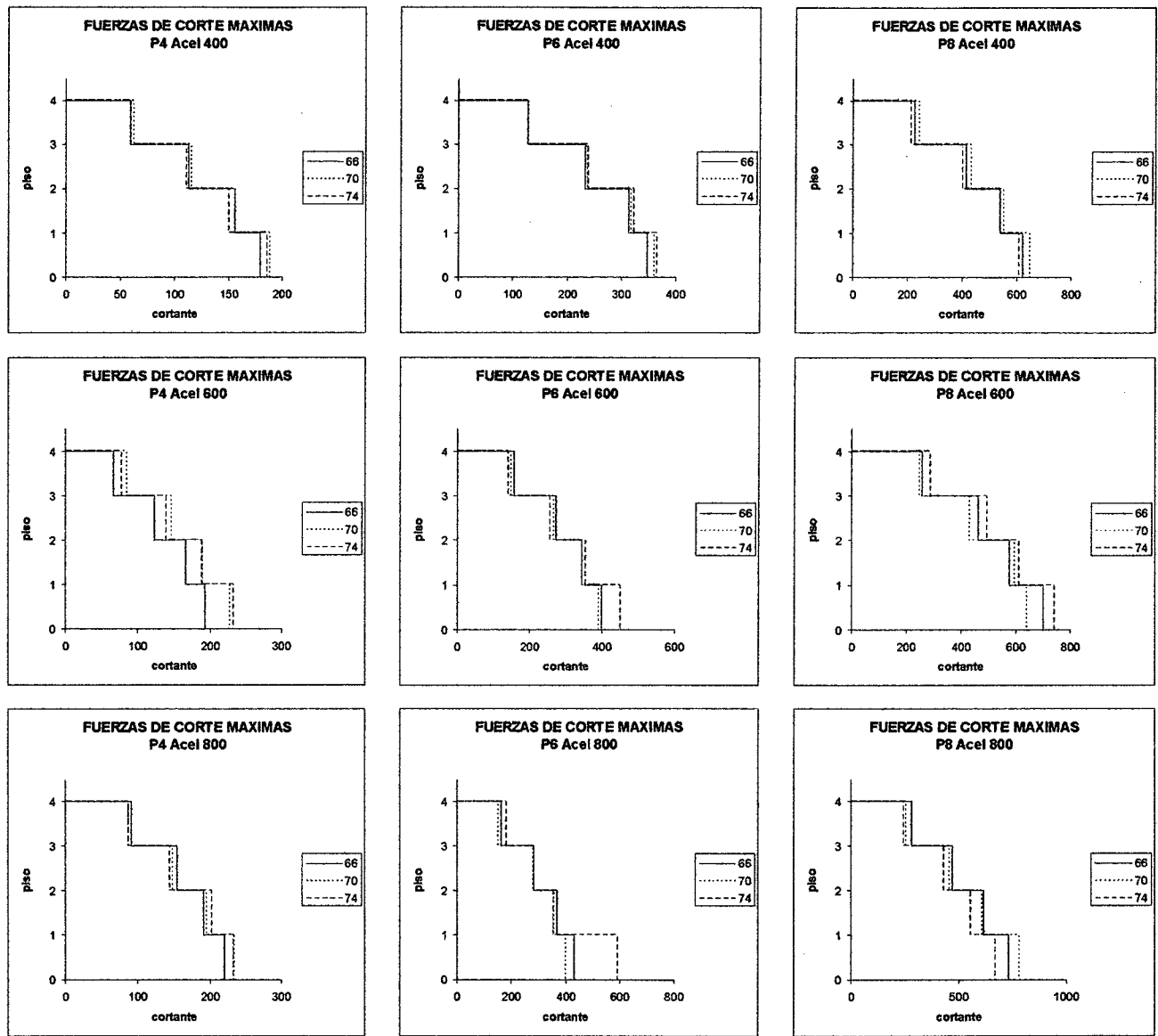


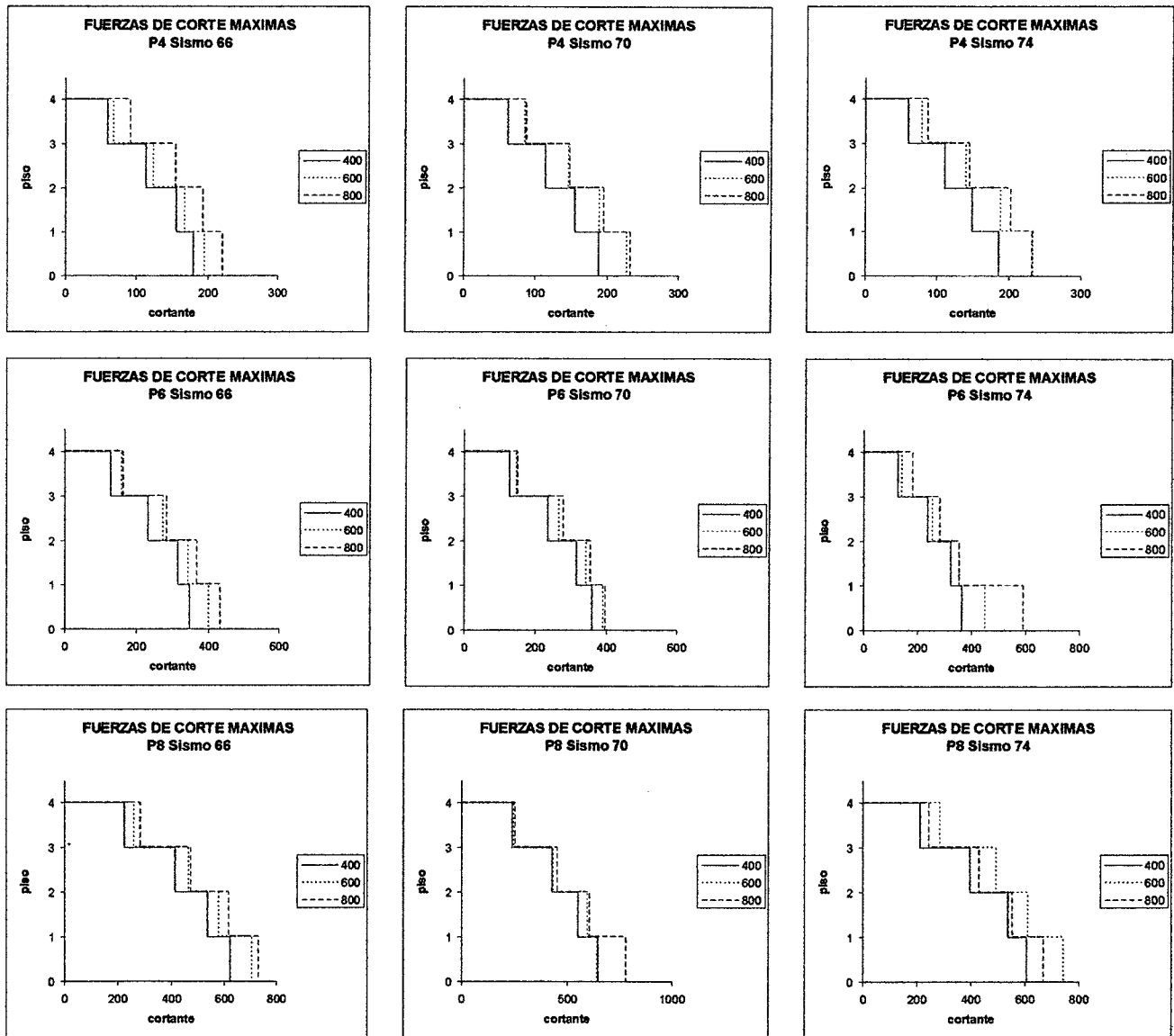
Figura 6.31

RESUMEN DE FUERZAS DE CORTE MAXIMAS (ANALISIS DINAMICO INELASTICO)  
MODELO CLOUGH





**Figura 6.32**  
**RESUMEN DE FUERZAS DE CORTE MAXIMAS (ANALISIS DINAMICO INELASTICO)**  
**MODELO CLOUGH**



**Figura 6.33**  
**RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO MÁXIMOS (ANÁLISIS TIEMPO-HISTORIA INELÁSTICO)**  
**MODELO CLOUGH**

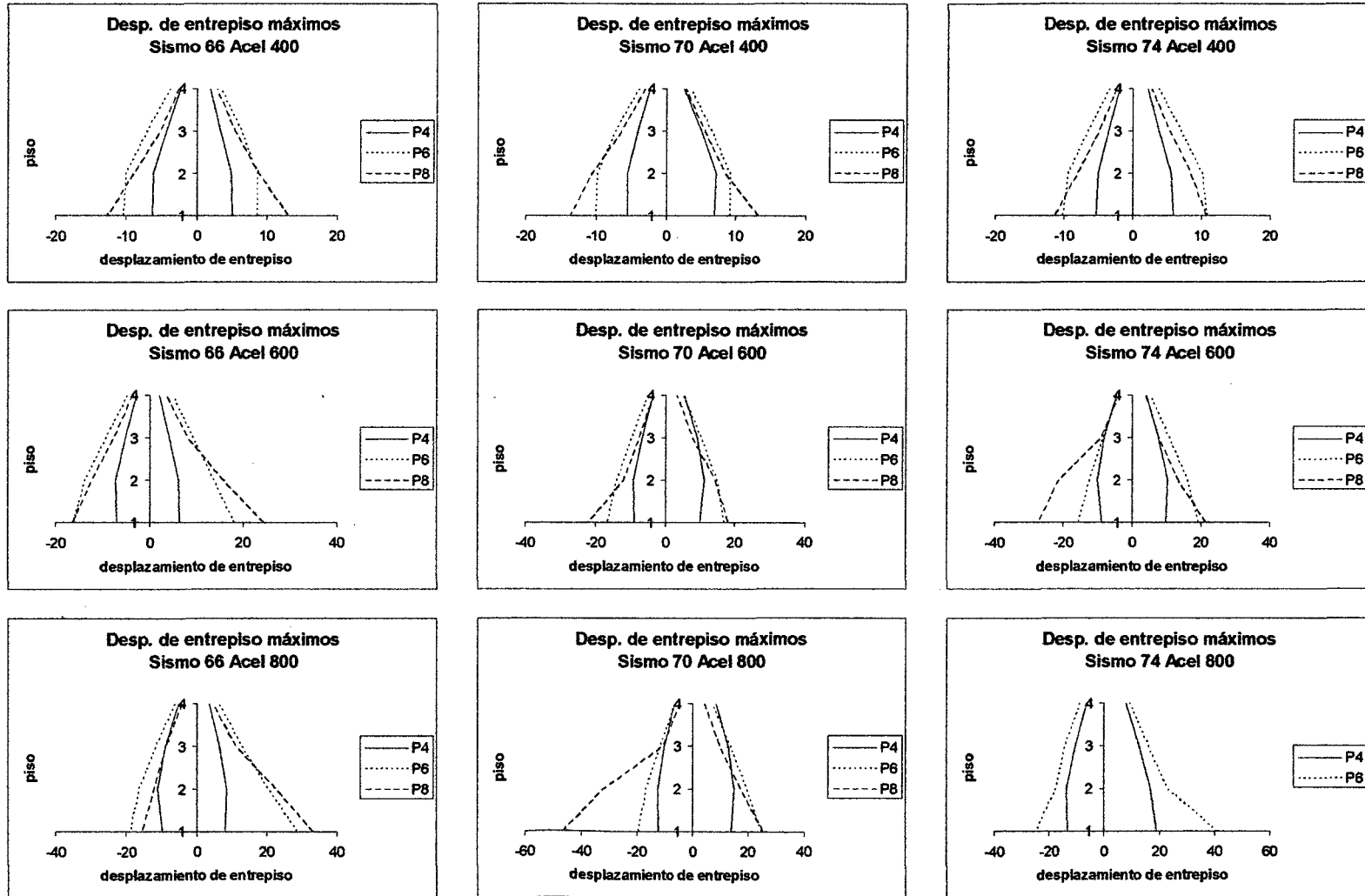


Figura 6.34

# RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO MÁXIMOS (ANÁLISIS TIEMPO-HISTORIA INELÁSTICO) MODELO CLOUGH

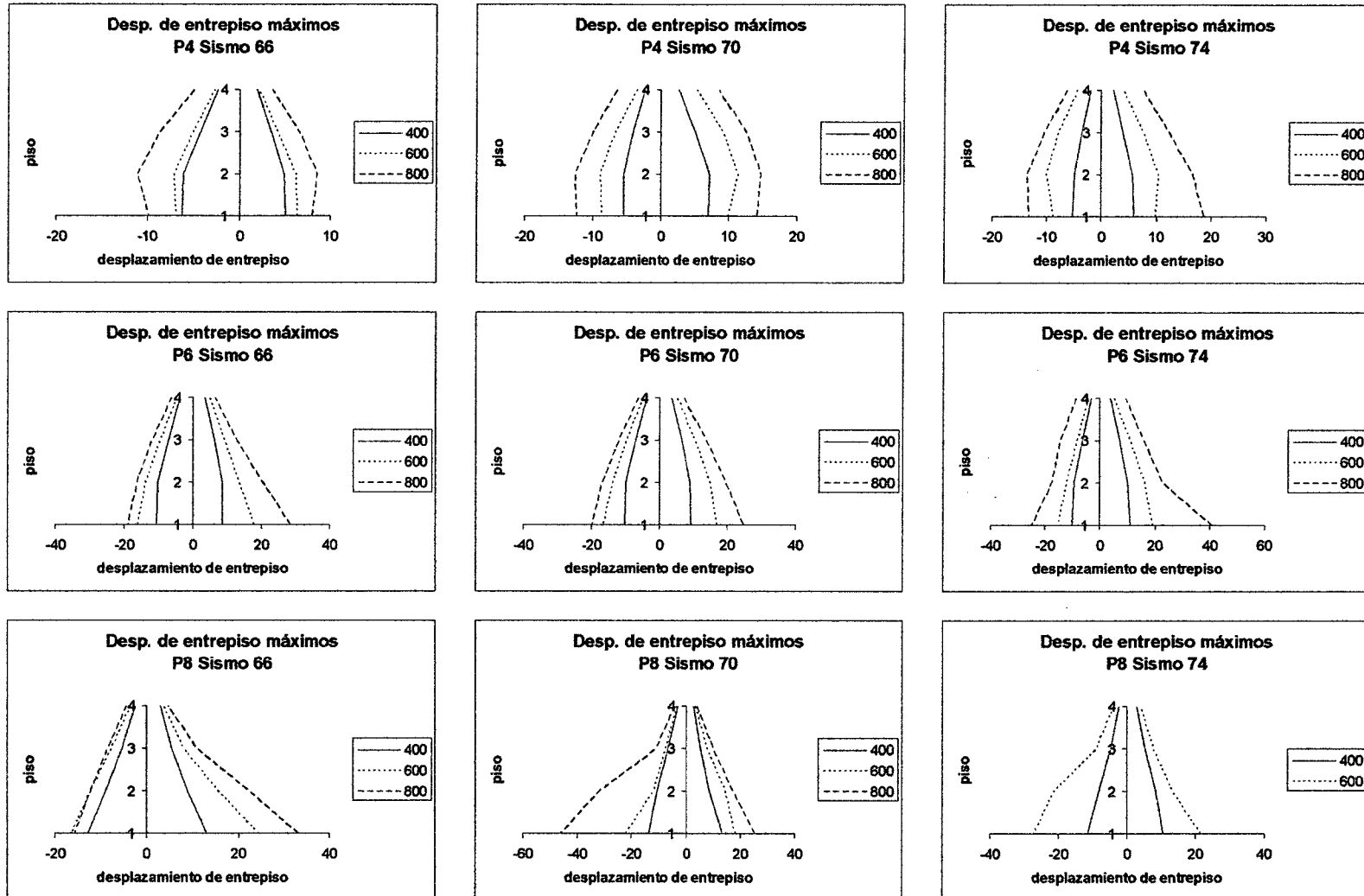
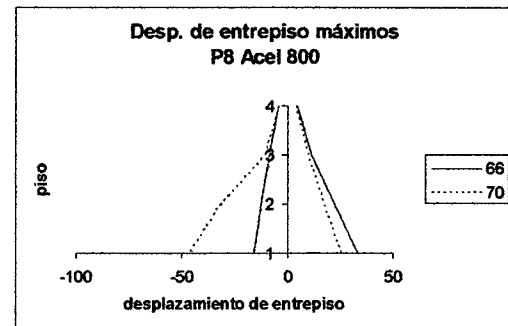
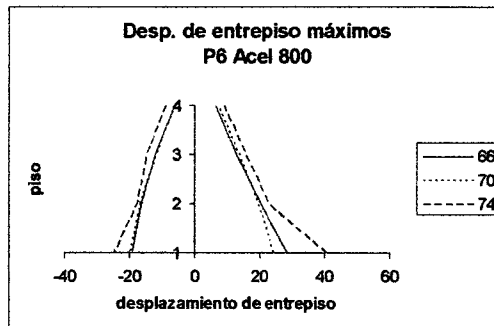
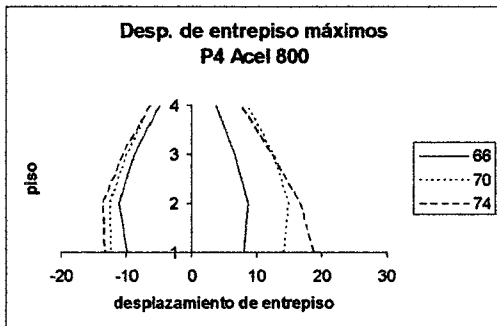
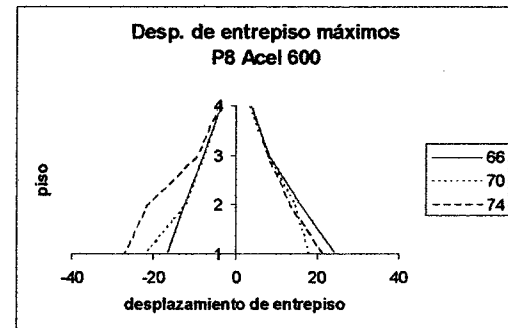
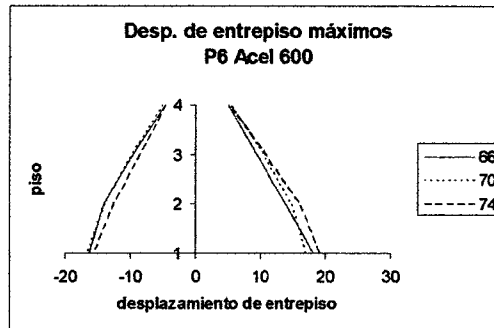
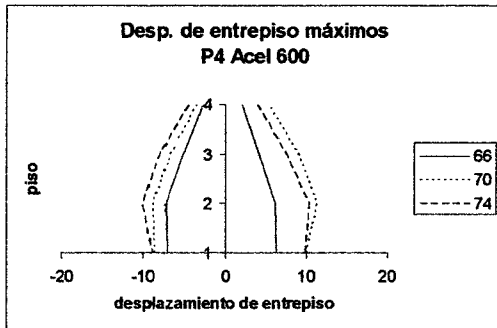
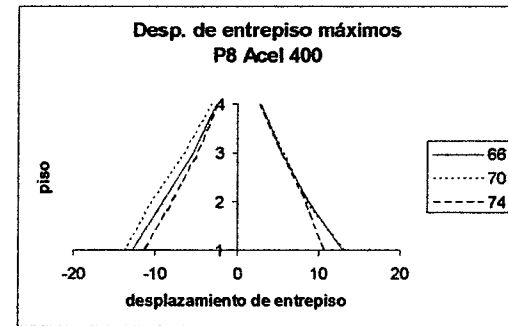
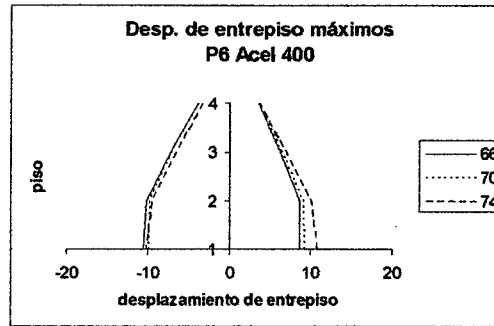
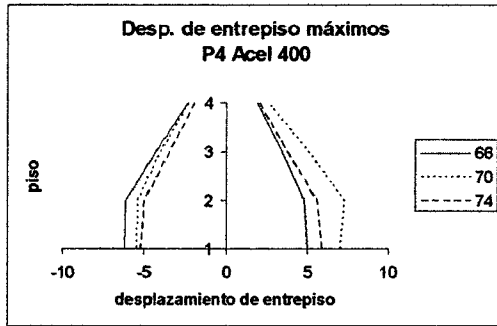


Figura 6.35

RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS DE ENTREPISO MÁXIMOS (ANÁLISIS TIEMPO-HISTORIA INELÁSTICO)  
MODELO CLOUGH



A manera de ilustración, se presentan relaciones representativas de fuerza cortante vs. desplazamiento de entrepiso de cada nivel, con los modelos Bilineal, Clough y Trilineal.

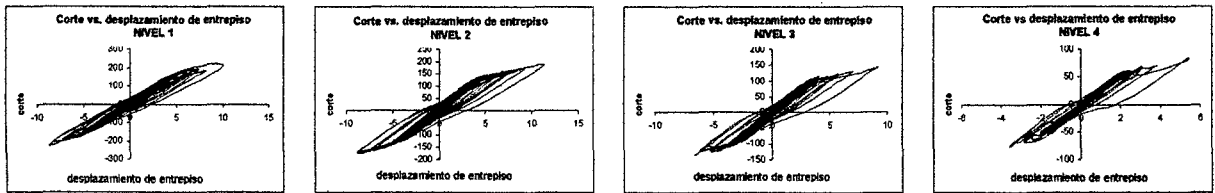


Figura 6.36a. Modelo Clough, relación fuerza cortante vs. desplazamiento de entrepiso del pórtico p4 sismo 1970 aceleración 600 gals

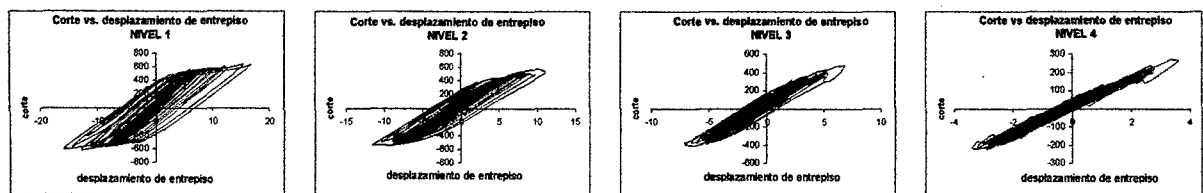


Figura 6.36b. Modelo Bilineal, relación fuerza cortante vs. desplazamiento de entrepiso del pórtico p8 sismo 1970 aceleración 600gals

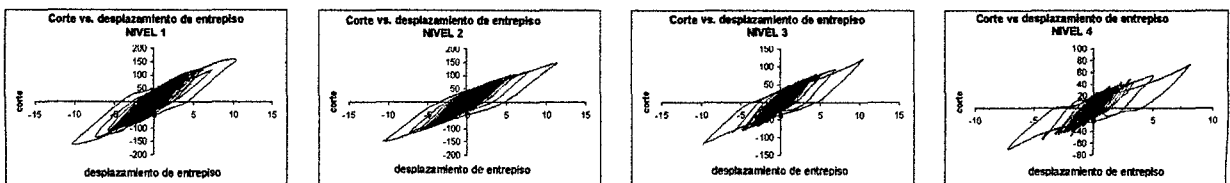


Figura 6.36c. Modelo Trilineal, relación fuerza cortante vs. desplazamiento de entrepiso del pórtico p4 sismo 1970 aceleración 600 gals

### 6.3.5 Resumen de las ductilidades de cada elemento

Se consideró el modelo de Clough el más adecuado para la determinación de las ductilidades de cada elemento, la razón principal es porque presenta mejor estabilidad en los resultados, sobre todo cuando se hacen análisis con aceleraciones superiores a 600 gals, en esta sección no se consideran los resultados del análisis Trilineal, porque presentan valores de overshooting para aceleraciones superiores a 600 gals.

En general los criterios para la evaluación de la ductilidad, serán el de ductilidad por momentos y el de ductilidad por curvatura aparente, indicados en el capítulo II.

Se puede decir que el comportamiento en las columnas es favorable, ya que la fluencia ocurre generalmente en las secciones de la base de las columnas del primer nivel, salvo algunas excepciones.

En p4 la viga 2 es el elemento con mayores valores de momento flector y curvatura en los dos primeros niveles, la viga 6 para los dos últimos niveles si el sismo tiene una aceleración de 400gals; se repite este resultado para una aceleración de 600gals; la viga 3 y la viga 6 para un sismo con aceleración mayor que 600gals; en general los elementos con mayor fluencia en los dos primeros niveles son las vigas 1 y 2, y en los dos últimos niveles las vigas 5 y 6, tanto en p6 como en p8.

A continuación se muestran tablas con resultados de los requerimientos de ductilidad por momentos flectores y curvaturas máximos en cada pórtico, se debe notar que los valores de requerimientos de ductilidad por momentos y por curvatura son similares, debido a la definición de curvatura por momentos dada en el capítulo II; si se utiliza un modelo Trilineal, los máximos requerimientos de ductilidad por curvatura son 2.85, 2.8 y 4.7 para p4, p6 y p8 respectivamente, esta diferencia con los resultados obtenidos al utilizar un modelo de Clough, se debe a las distintas definiciones de ductilidad que se utilizan en uno u otro modelo.

Tablas 6.35 Requerimientos de ductilidad utilizando un modelo de Clough

VIGAS

Pórtico	Aceleración	PISO 1-2		PISO 3-4	
		Duct. Por momentos	Duct. Por curvatura	Duct. Por momentos	Duct. Por curvatura
4	400	3.64	3.65	1.93	1.95
	600	5.22	5.20	3.68	3.70
	800	8.08	9.70	5.10	5.18
6	400	4.24	4.37	2.13	2.06
	600	6.12	6.44	2.96	2.97
	800	6.99	7.35	4.36	4.50
8	400	4.76	4.95	1.96	1.84
	600	15.63	16.52	2.68	2.63
	800	19.24	20.37	2.97	2.96

Tablas 6.36 Requerimientos de ductilidad utilizando un modelo de Clough

COLUMNAS

Pórtico	Aceleración	PISO 1-2		PISO 3-4	
		Duct. Por momentos	Duct. Por curvatura	Duct. Por momentos	Duct. Por curvatura
4	400	sin fluencia	sin fluencia	sin fluencia	sin fluencia
	600	1.18	1.18	sin fluencia	sin fluencia
	800	3.10	3.10	sin fluencia	sin fluencia
6	400	1.51	1.51	sin fluencia	sin fluencia
	600	7.30	7.30	sin fluencia	sin fluencia
	800	8.22	8.22	1.13	1.13
8	400	4.64	4.64	sin fluencia	sin fluencia
	600	8.55	8.55	1.14	1.14
	800	13.77	13.77	2.51	2.51

6.3.6 Factores R de los elementos

Para la determinación de los factores R de los elementos se utilizó la formula que se indica a continuación; se considera 2.5 un factor de compensación que considera aspectos no tomados en cuenta durante el análisis inelástico realizado.

$$R = 2.5 \frac{\text{parámetro elástico}}{\text{parámetro inelástico}} \dots (6.3.1)$$

En general, el factor R para p4 podría considerarse de 8.39, para p6 de 11.12 y p8 de 12.87, si se toma en cuenta una aceleración del registro sísmico de 600gals (ya que el comportamiento comienza a ser inelástico a partir de este valor en el presente estudio), sin embargo, podemos afirmar que R aumenta con el incremento de aceleración en un registro sísmico; los valores obtenidos para las columnas son menores; el cociente utilizado puede ser útil para comparar el incremento del momento flector elástico sobre el inelástico; se tomaron en cuenta también cocientes de curvatura (máximos y mínimos). En el caso de las curvaturas se consideran valores mínimos ya que un cociente menor que 2.5 indica comportamiento inelástico, muchas veces.

Tabla 6.37 Factores R en vigas

Pórtico	Aceleración	PISO 1-2			PISO 3-4		
		Factor R por momentos (max)	Amplificación por curvatura (max)	Amplificación por curvatura (min)	Factor R por momentos (max)	Amplificación por curvatura (max)	Amplificación por curvatura (min)
4	400	5.71	3.27	1.22	4.83	4.83	1.60
	600	8.39	3.72	1.15	5.43	5.14	1.07
	800	11.0	2.9	0.8	7.0	3.5	0.9
6	400	7.38	3.49	1.45	4.53	3.66	1.96
	600	11.12	3.03	0.78	6.63	4.36	1.84
	800	14.86	5.14	1.11	8.72	4.76	1.59
8	400	8.65	4.34	1.42	6.30	6.30	2.65
	600	12.87	3.98	0.67	7.53	6.64	2.34
	800	17.10	5.82	0.58	9.93	7.44	3.24

Tabla 6.38 Factores R en columnas

Pórtico	Aceleración	PISO 1-2			PISO 3-4		
		Factor R por momentos (max)	Amplificación por curvatura (max)	Amplificación por curvatura (min)	Factor R por momentos (max)	Amplificación por curvatura (max)	Amplificación por curvatura (min)
4	400	4.40	4.40	2.20	6.63	6.63	1.47
	600	5.96	5.96	2.21	6.79	6.79	0.70
	800	8.41	8.41	1.31	7.29	7.29	0.64
6	400	5.57	5.57	1.97	6.00	6.00	1.22
	600	7.71	7.71	0.50	6.62	6.62	0.06
	800	9.05	9.05	0.30	9.22	9.22	0.11
8	400	7.36	7.36	0.91	9.19	9.19	1.21
	600	8.34	8.34	0.41	10.19	10.19	1.77
	800	13.90	17.36	0.29	11.40	11.40	1.11

### 6.3.7 Relaciones entre los desplazamientos y aceleraciones

Para ver las relaciones entre los desplazamientos y aceleraciones del análisis elástico e inelástico, se procede a dividir los máximos y mínimos valores de los desplazamientos y aceleraciones del análisis elástico, entre los valores máximos y mínimos de desplazamientos y aceleraciones del análisis inelástico respectivamente.

Tabla 6.39 Factores de relación (elástico/inelástico)

Pórtico	aceleración	relación entre aceleraciones		relación entre desplazamientos	
		máxima	mínima	máxima	mínima
4	400	1.6	0.9	1.1	0.7
	600	1.8	0.9	1.3	0.7
	800	2	1.2	1.3	0.7
6	400	1.7	1.1	1.1	0.8
	600	2.2	0.9	1.1	0.7
	800	2.8	1.1	1.2	0.6
8	400	2.3	1.1	1.1	0.9
	600	2.9	1.4	1.2	0.6
	800	3.7	1.2	1.8	0.3



### 6.3.8 Ductilidades requeridas por piso en cada pórtico

En el cuadro mostrado, se puede apreciar que en general es el primer nivel el que tiene mayor incursión en el rango inelástico, se puede apreciar también, que la incursión en el rango inelástico comienza en el primer piso y sube de nivel en nivel.

En general, el máximo requerimiento de ductilidad por desplazamiento de entrepiso es de 1.038 y 1.1 por fuerza de corte en p4, de 2.12 por desplazamiento de entrepiso y 1.3 por fuerza de corte en p6, de 3.41 por desplazamiento de entrepiso y 1.4 por fuerza de corte en p8, todos estos resultados para aceleraciones menores o iguales a 600 gals.

Tabla 6.40 Resumen de ductilidades globales requeridas

Pórtico	Sismo	Acel	Piso 1			Piso 2			Piso 3			Piso 4			
			Desp. de entrepiso		corte	Desp. de entrepiso		corte	Desp. de entrepiso		corte	Desp. de entrepiso		corte	
			derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda		
4	66	400	0.641	0.522	0.9	0.544	0.430	0.9	0.473	0.381	0.8	0.439	0.363	0.8	
		600	0.727	0.654	0.9	0.637	0.549	0.9	0.561	0.463	0.9	0.510	0.412	0.9	
		800	1.025	0.831	1.1	0.989	0.761	1.1	0.963	0.725	1.1	0.939	0.691	1.2	
	70	400	0.567	0.729	0.9	0.487	0.646	0.9	0.446	0.566	0.8	0.432	0.506	0.8	
		600	0.900	1.038	1.1	0.795	1.011	1.0	0.734	1.013	1.0	0.670	1.028	1.1	
		800	1.283	1.461	1.1	1.124	1.322	1.1	1.109	1.392	1.1	1.219	1.615	1.1	
	74	400	0.547	0.615	0.9	0.446	0.498	0.8	0.385	0.423	0.8	0.361	0.399	0.8	
		600	0.921	1.027	1.1	0.904	0.925	1.0	0.883	0.844	1.0	0.844	0.772	1.0	
		800	1.388	1.947	1.1	1.212	1.492	1.1	1.164	1.381	1.0	1.218	1.456	1.1	
	6	66	400	1.151	0.947	1.0	1.064	0.913	1.0	1.019	0.909	1.0	0.985	0.914	1.0
			600	1.793	1.986	1.2	1.469	1.454	1.1	1.351	1.332	1.2	1.209	1.305	1.2
			800	2.093	3.148	1.3	1.732	2.151	1.2	1.689	1.852	1.2	1.603	1.667	1.3
70		400	1.102	1.015	1.1	1.039	0.969	1.1	1.026	0.942	1.0	1.011	0.931	1.0	
		600	1.835	1.870	1.1	1.477	1.574	1.1	1.404	1.500	1.1	1.324	1.396	1.1	
		800	2.184	2.712	1.2	1.783	2.069	1.2	1.724	1.968	1.2	1.621	1.879	1.2	
74		400	1.124	1.195	1.1	1.004	1.064	1.1	0.929	1.012	1.0	0.877	0.979	1.0	
		600	1.715	2.120	1.3	1.326	1.706	1.2	1.221	1.549	1.1	1.172	1.378	1.1	
		800	2.742	4.496	1.7	1.888	2.420	1.2	2.097	2.288	1.2	2.300	2.401	1.4	
8		66	400	1.586	1.627	1.2	1.309	1.279	1.1	1.161	1.208	1.2	0.972	1.120	1.1
			600	2.061	3.053	1.3	1.798	2.284	1.2	1.708	1.778	1.3	1.399	1.466	1.3
			800	1.965	4.151	1.4	1.785	3.277	1.3	1.893	2.448	1.3	1.714	1.833	1.4
	70	400	1.713	1.657	1.2	1.526	1.247	1.2	1.400	1.236	1.2	1.189	1.135	1.2	
		600	2.776	2.275	1.2	1.749	2.113	1.3	1.667	1.741	1.2	1.382	1.398	1.2	
		800	5.812	3.193	1.5	4.652	2.531	1.3	2.435	2.208	1.3	1.710	1.663	1.2	
	74	400	1.428	1.338	1.1	1.175	1.227	1.1	1.066	1.182	1.1	0.916	1.059	1.0	
		600	3.410	2.684	1.4	3.126	1.940	1.3	2.009	1.735	1.4	1.566	1.597	1.4	

### 6.3.9 Factores R por piso

La fórmula para determinar los factores R por piso, es la misma que para determinar los factores R por elemento, se debe notar que los factores por corte son muy parecidos en todos los niveles, alcanzando sus mayores valores en el primer nivel en la mayoría de los casos, el factor R por corte para p4 es de 5.5, 7.5 para p6 y

8.8 para p8, sin embargo los factores más representativos, son los que resultan de un análisis dinámico inelástico con aceleraciones de 600gals, ya que para aceleraciones de 400 gals los pórticos en estudio tienen pocas incursiones en el rango inelástico. Se debe tener en cuenta que en el caso de los desplazamientos de entrepiso, el resultado que se muestra en la tabla indica el cociente de un valor elástico entre uno inelástico.

Tabla 6.41 Factores R por piso

Pórtico	Sismo	Acel	Piso 1			Piso 2			Piso 3			Piso 4		
			Desp. de entrepiso		corte	Desp. de entrepiso		corte	Desp. de entrepiso		corte	Desp. de entrepiso		corte
			derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda		derecha	izquierda	
4	66	400	2.123	2.005	2.8	1.998	1.947	2.7	2.548	2.485	3.5	3.542	3.400	5.1
		600	3.308	3.116	4.6	2.917	2.847	4.6	3.188	3.241	4.6	3.760	3.905	4.6
		800	3.128	3.269	5.4	2.503	2.740	5.3	2.476	2.762	4.9	2.722	3.106	4.4
	70	400	2.374	1.964	2.9	2.185	1.659	2.8	2.348	1.771	2.9	2.641	2.083	2.9
		600	2.244	2.068	3.6	2.006	1.590	3.5	2.141	1.482	3.5	2.554	1.539	3.3
		800	2.099	1.959	4.7	1.891	1.621	4.6	1.890	1.439	4.6	1.872	1.306	4.3
	74	400	2.710	2.590	3.2	2.622	2.512	3.5	2.980	2.901	3.6	3.459	3.337	3.6
		600	2.415	2.328	3.8	1.938	2.029	4.2	1.951	2.181	4.3	2.217	2.589	4.1
		800	2.136	1.637	5.1	1.929	1.678	5.2	1.973	1.778	5.5	2.049	1.829	5.0
6	66	400	2.234	2.535	3.6	2.054	2.239	3.4	2.256	2.328	3.5	2.655	2.658	3.4
		600	2.151	1.813	4.7	2.233	2.110	4.7	2.553	2.383	4.5	3.244	2.792	4.2
		800	2.456	1.525	5.8	2.524	1.902	5.8	2.723	2.286	5.7	3.262	2.915	5.4
	70	400	2.814	2.839	4.1	2.552	2.554	4.1	2.701	2.767	4.1	3.091	3.185	4.1
		600	2.536	2.312	5.7	2.693	2.360	5.7	2.961	2.607	5.5	3.540	3.187	5.3
		800	2.841	2.126	7.5	2.975	2.394	7.3	3.214	2.650	7.0	3.854	3.157	6.9
	74	400	2.443	2.110	3.6	2.335	1.969	3.6	2.639	2.168	3.6	3.166	2.577	3.6
		600	2.403	1.784	4.4	2.652	1.843	4.9	3.014	2.124	5.1	3.554	2.745	5.0
		800	2.003	1.122	4.5	2.484	1.732	6.5	2.340	1.918	6.1	2.414	2.102	5.2
8	66	400	2.490	2.306	4.8	2.871	2.701	5.0	3.745	3.291	4.9	4.931	3.982	5.1
		600	2.874	1.843	6.4	3.135	2.268	7.0	3.817	3.354	6.6	5.136	4.563	6.6
		800	4.020	1.808	8.2	4.212	2.108	8.8	4.593	3.249	8.7	5.591	4.866	8.1
	70	400	2.243	2.240	4.6	2.339	2.795	4.6	2.876	3.214	4.3	3.613	3.806	4.2
		600	2.076	2.446	6.9	3.063	2.474	6.4	3.623	3.423	6.5	4.661	4.637	6.2
		800	1.322	2.324	7.6	1.535	2.755	8.4	3.307	3.599	8.3	5.024	5.197	8.0
	74	400	2.409	2.389	4.4	2.717	2.377	4.2	3.391	2.742	4.2	4.240	3.259	4.2
		600	1.513	1.786	5.4	1.532	2.256	5.6	2.699	2.803	5.1	3.718	3.240	4.7

### 6.3.10 Factores R globales

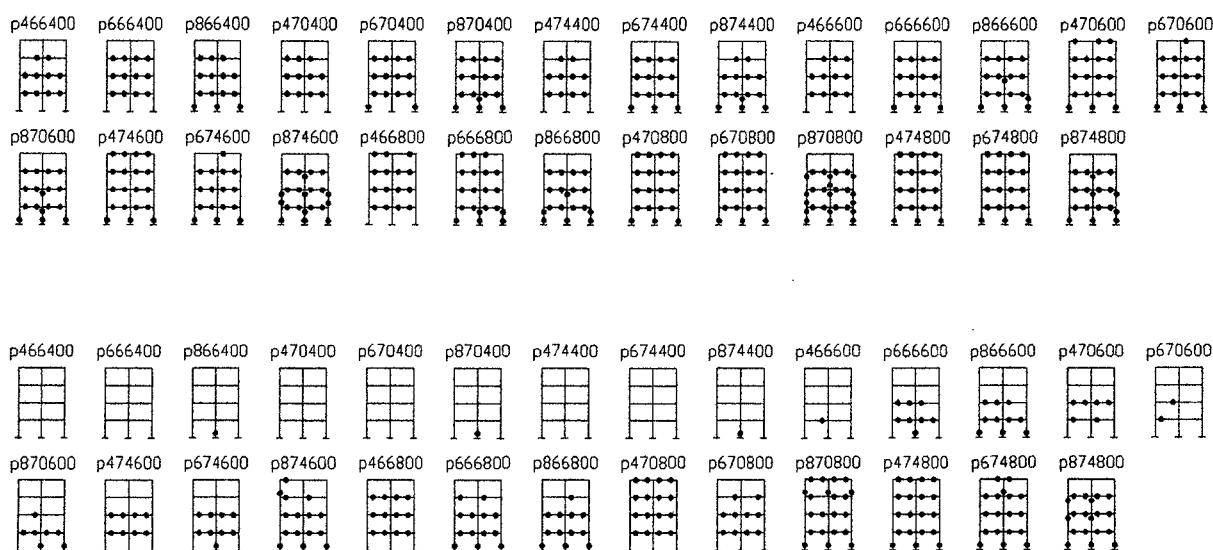
Se debe notar que el primer nivel es el más influyente en la ductilidad por piso de cada pórtico; además, los valores de fluencia de la relación cortante de la base versus el desplazamiento del último piso y los valores de fluencia del primer nivel de cada pórtico, obtenidos con un análisis estático inelástico, son muy parecidos. Se puede ver que globalmente se indica fluencia en todos los pórticos, salvo en los análisis de p4 con el registro sísmico de 1966 a 400gals y 600gals, p4 con registros sísmicos de 1970 y 1974 a 400gals. Los máximos factores R para p4, p6 y p8 son 5.402, 7.498 y 8.204 respectivamente, en general podemos decir que los pórticos analizados con registros sísmicos escalados a 600gals presentan los factores R más representativos, estos valores para análisis con registros escalados a 600 gals

son de 4.6, 5.7 y 6.9 para p4, p6 y p8 ver tabla (6.42); de esta manera podemos decir que el factor R depende del período y del nivel de aceleración.

### 6.3.11 Lugares donde ocurrieron rótulas plásticas

Si comparamos los lugares donde ocurrieron rótulas plásticas, tanto en un análisis estático inelástico como en un análisis dinámico inelástico vemos que son los mismos; sin embargo, la secuencia en que se producen las rótulas no es la misma, en ambos análisis se producen las rótulas en forma ascendente (viajando de los primeros pisos hacia los últimos pisos), hipótesis como estas sirven para indicar el valor de la carga vertical en pórticos bajo sollicitación sísmica (49), a continuación se presentan los lugares donde ocurrieron rótulas plásticas en el análisis dinámico inelástico con un modelo de Clough y un modelo Trilineal.

Figura 6.37 Lugares donde ocurrieron rótulas plásticas



Las diferencias entre utilizar un modelo de Clough y Trilineal, radican en que los puntos de cambio de pendiente (fluencia, agrietamiento) son diferentes y que además estos modelos, disipan diferente cantidad de energía en cada ciclo de histéresis.

Tabla 6.42

RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS Y MINIMOS DEL ULTIMO NIVEL VS CORTANTE BASAL, DUCTILIDADES GLOBALES Y R

Pórtico	Sismo	Acel	INELASTICO			FLUENCIA		DUCTILIDAD			ELASTICO			FACTORES R		
			cortante basal (kN)	Desp. Nivel 4 (mm)				$\Psi\Delta$		$\Psi F$ corte	cortante basal (kN)	Desp. Nivel 4 (mm)		Desplazamiento		Fueza c. Basal
				máximo	mínimo	máximo	mínimo	máximo	mínimo			máximo	mínimo			
4	66	400	180.0	15.23	-18.90	35.279	205.48	0.4316	0.5358	0.8758	201.0	13.742	-17.820	2.256	2.357	2.792
		600	193.7	18.88	-21.88	35.279	205.48	0.5351	0.6202	0.9429	357.4	23.766	-28.196	3.147	3.222	4.612
		800	220.6	26.18	-34.48	35.279	205.48	0.7420	0.9772	1.0734	476.6	31.689	-37.596	3.027	2.726	5.402
	70	400	188.2	21.91	-17.29	35.279	205.48	0.6211	0.4900	0.9161	216.7	16.219	-16.206	1.851	2.344	2.878
		600	226.6	35.52	-27.09	35.279	205.48	1.0069	0.7679	1.1027	325.0	24.330	-24.312	1.712	2.243	3.586
		800	232.4	49.68	-41.09	35.279	205.48	1.4082	1.1648	1.1308	433.4	32.442	-32.417	1.633	1.972	4.663
	74	400	185.5	17.40	-15.68	35.279	205.48	0.4933	0.4444	0.9026	234.7	19.064	-17.797	2.738	2.838	3.163
		600	231.7	32.07	-31.29	35.279	205.48	0.9092	0.8869	1.1276	352.1	28.599	-26.697	2.229	2.133	3.799
		800	231.5	55.21	-43.50	35.279	205.48	1.5650	1.2329	1.1268	469.4	38.133	-35.598	1.727	2.046	5.069
6	66	400	347.8	27.20	-31.52	30.814	341.87	0.8828	1.0229	1.0172	495.4	26.120	-28.096	2.400	2.228	3.561
		600	397.8	44.91	-44.43	30.814	341.87	1.4576	1.4420	1.1635	743.2	39.183	-42.148	2.181	2.371	4.671
		800	430.8	67.63	-53.28	30.814	341.87	2.1947	1.7292	1.2602	990.9	52.246	-56.199	1.931	2.637	5.750
	70	400	358.3	28.65	-30.84	30.814	341.87	0.9298	1.0007	1.0480	592.5	31.820	-33.998	2.776	2.756	4.134
		600	387.9	47.50	-45.69	30.814	341.87	1.5416	1.4826	1.1346	888.8	47.734	-51.000	2.512	2.791	5.728
		800	395.1	65.19	-55.16	30.814	341.87	2.1155	1.7902	1.1558	1185.1	63.648	-68.003	2.441	3.082	7.498
	74	400	364.1	31.84	-29.69	30.814	341.87	1.0332	0.9636	1.0649	525.2	26.772	-30.102	2.102	2.535	3.607
		600	447.9	51.52	-40.95	30.814	341.87	1.6719	1.3290	1.3100	787.9	40.161	-45.157	1.949	2.757	4.398
		800	589.3	68.24	-65.37	30.814	341.87	2.2145	2.1214	1.7238	1050.6	53.550	-60.212	1.962	2.303	4.457
8	66	400	623.2	29.30	-29.56	20.668	519.14	1.4178	1.4301	1.2005	1196.3	32.772	-35.877	2.796	3.034	4.799
		600	702.8	51.34	-40.06	20.668	519.14	2.4838	1.9382	1.3539	1794.6	49.162	-53.820	2.394	3.359	6.383
		800	729.2	70.63	-39.92	20.668	519.14	3.4176	1.9314	1.4046	2392.9	65.552	-71.763	2.320	4.494	8.204
	70	400	644.6	29.73	-33.73	20.668	519.14	1.4383	1.6321	1.2417	1178.2	33.103	-33.991	2.784	2.519	4.569
		600	637.2	44.26	-45.43	20.668	519.14	2.1417	2.1979	1.2273	1767.4	49.658	-50.990	2.805	2.806	6.935
		800	778.0	57.18	-87.58	20.668	519.14	2.7665	4.2376	1.4986	2356.7	66.213	-67.990	2.895	1.941	7.573
	74	400	606.3	27.25	-26.78	20.668	519.14	1.3186	1.2956	1.1679	1055.9	27.703	-30.478	2.541	2.846	4.354
		600	739.7	45.48	-60.26	20.668	519.14	2.2006	2.9155	1.4249	1583.9	41.557	-45.721	2.284	1.897	5.353

### 6.3.12 Intervalos de tiempo donde ocurrieron rótulas plásticas

Con el objetivo de tener los intervalos de tiempo, donde ocurre el comportamiento inelástico más importante de cada pórtico para cada registro sísmico, se presenta la siguiente tabla:

Tabla 6.43 Intervalos de tiempo

pórtico	sismo	aceleración (gals)	Tiempo (seg.)	
			inicio	fin
4	66	400	19.16	21.22
		600	19.41	20.52
		800	20.48	21.27
	70	400	8.82	9.12
		600	8.36	9.24
		800	8.36	9.38
	74	400	17.89	31.41
		600	17.81	19.36
		800	17.82	19.05
6	66	400	19.96	20.93
		600	19.52	21.86
		800	20.31	21.69
	70	400	9.00	10.04
		600	6.63	9.29
		800	8.21	11.25
	74	400	14.55	20.00
		600	17.52	19.14
		800	12.44	18.23
8	66	400	19.98	24.70
		600	19.53	21.51
		800	19.97	21.55
	70	400	7.17	9.27
		600	3.08	9.85
		800	3.38	24.88
	74	400	18.00	31.48
		600	11.69	18.78
		800	9.73	12.56

# Capítulo VII

## Conclusiones y Recomendaciones

### 7.1 Conclusiones

#### 7.1.1 Análisis dinámico elástico

En pórticos de poca altura, los resultados obtenidos al considerar en el análisis el factor de amortiguamiento tipo Rigidez, son similares a los resultados obtenidos con el factor de amortiguamiento tipo Rayleigh; esto hace posible considerar un factor de amortiguamiento por Rigidez en los análisis dinámicos. Notar que al intervenir el factor de amortiguamiento tipo Masa, éste no permite apreciar adecuadamente el amortiguamiento por histéresis en el análisis dinámico inelástico, ya que la masa mantiene sus propiedades constantes durante el tiempo.

En los análisis dinámicos realizados, se observa que el tipo de factor de amortiguamiento, no influye en los resultados a nivel global (desplazamientos de entrepiso, desplazamientos laterales, fuerzas cortantes) y a nivel local (momentos flectores), porque estos resultados se encuentran dentro del mismo orden de magnitud.

En los análisis dinámicos elásticos, la forma de las gráficas de los desplazamientos de piso y aceleraciones de piso contra el tiempo, es similar a la forma de las gráficas de los registros de aceleración de entrada, utilizados en cada pórtico; lo que indica que se pueden establecer relaciones de proporcionalidad entre las aceleraciones y desplazamientos laterales de cada piso en cada pórtico.

El operador de Green es una forma general de deducir la integral de Duhamel, permite la generalización de ésta a partir de operadores lineales y es un instrumento para utilizar esta integral en sistemas de varios grados de libertad.

### 7.1.2 Análisis estático inelástico

En un análisis estático inelástico los resultados de los momentos flectores, no dependen del tipo de relación momento-curvatura que se utilice en las secciones de los elementos viga-columna (Trilineal o Bilineal), estos resultados son del mismo orden de magnitud; sin embargo, existen diferencias en los resultados de las curvaturas.

Dependiendo del tipo de relación momento-curvatura (Trilineal o Bilineal), que se utilice en las secciones de los elementos viga-columna en cada pórtico, se puede decir que los módulos de las fuerzas cortantes de fluencia están dentro del mismo orden de magnitud; que hay mayores diferencias en los valores del desplazamiento del último nivel que en los módulos de las fuerzas cortantes de fluencia; existe menor diferencia entre los valores de los desplazamientos de fluencia que en los valores de los desplazamientos últimos (nivel global).

Si en un pórtico se utiliza una determinada distribución de fuerzas laterales (Lineal, Modal o Potencia) y con esta distribución se analiza el pórtico considerando primero, una relación momento-curvatura Bilineal y luego una Trilineal, las diferencias de los resultados del pórtico obtenidas al utilizar las relaciones momento-curvatura mencionadas, son menores cuando la distribución de fuerzas es Lineal; estas diferencias en porcentaje se incrementan a medida que aumenta el período de la estructura.

El análisis estático inelástico de fuerzas laterales (pushover), es útil para medir propiedades de fluencia en cada pórtico. En general, los lugares donde se producen las rótulas plásticas son los mismos, sin importar la relación momento-curvatura que se utilice.

El comportamiento cualitativo utilizando un modelo Trilineal o Bilineal en las secciones de los elementos viga-columna, es el mismo; la secuencia de formación de rótulas plásticas no depende de la relación momento-curvatura.

Los valores de fluencia del primer nivel y los valores de fluencia global, están más próximos que los valores de fluencia de los demás niveles; lo que indica que el primer nivel es el que influye más en el comportamiento global de los pórticos estudiados.

### **7.1.2 Análisis dinámico inelástico**

Los valores de los momentos flectores y curvaturas, obtenidos al utilizar el modelo de histéresis de Clough, están más próximos a los valores de los momentos flectores y curvaturas obtenidos al usar el modelo de histéresis Bilineal.

El análisis de los pórticos con el modelo de Clough, presenta mayor estabilidad en su solución numérica que el análisis con un modelo Trilineal; esto se debe a que el modelo de Clough tiene un sólo punto de cambio de pendiente.

Los valores de las aceleraciones y desplazamientos de cada piso, obtenidos al utilizar el modelo de Clough, están más próximos a los valores de las aceleraciones y desplazamientos de cada piso obtenidos al usar el modelo Bilineal; en los niveles superiores, las diferencias entre los valores de aceleración y desplazamiento de piso disminuyen.

El comportamiento inelástico después del punto de agrietamiento en el modelo Trilineal, hace que la llegada a la fluencia sea sensible a la ubicación de este punto.

Los modelos de histéresis, que no consideran el agrietamiento en las curvas del comportamiento del material, tienen mayor comportamiento inelástico, ya que los momentos flectores varían más rápidamente antes del agrietamiento que después del agrietamiento.

En general, las mayores aceleraciones por piso se obtienen con un modelo de Clough y los mayores desplazamientos con un modelo Trilineal.



Se puede decir que a mayor período mayor requerimiento de ductilidad en los elementos viga-columna, a mayor aceleración de la base mayor factor de reducción  $R$  de los momentos flectores de los elementos.

En general los desplazamientos laterales de cada piso, se amplifican 1.6 veces para análisis dinámicos con aceleraciones en la base menores o iguales a 600 gals, y 3.3 veces para análisis dinámicos con aceleraciones de la base superiores a los 600 gals.

A mayor período, mayor requerimiento de ductilidad por piso, tanto en fuerzas de corte como en desplazamientos de entrepiso.

Los factores  $R$  globales cambian de acuerdo al período de la estructura, para pórticos con períodos cortos a mayor período mayor  $R$ , esto indica que a pesar de que se tenga un mismo sistema estructural, la disipación de energía no es la misma; el primer nivel presenta los mayores valores de  $R$  por piso, en casi todos los análisis dinámicos efectuados.

Los lugares donde ocurrieron rótulas plásticas, tanto para un análisis estático inelástico de fuerzas laterales como para un análisis dinámico inelástico tiempo historia, son los mismos con algunas excepciones, la secuencia de formación de rótulas plásticas es diferente, las rótulas viajan de piso en piso o cada dos pisos (siempre en dirección vertical ascendente).

La inestabilidad numérica se manifiesta con un aumento excesivo de la energía del sistema. El monitoreo de la cantidad de energía, durante un paso de integración o incremento de tiempo, es una forma práctica de evaluar la estabilidad numérica y por lo tanto el grado de confiabilidad de los resultados.

## 7.2 Recomendaciones

El algoritmo de Newmark empleado, presenta mejor estabilidad numérica con un proceso iterativo como el de Newton, que con un proceso de corrección por desbalance de fuerzas.

En investigaciones futuras, se debe tomar en cuenta no sólo la estabilidad numérica de la solución de la ecuación en diferencias, sino también la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial, para estar seguros que la ecuación diferencial linealizada, tiene el mismo comportamiento local que la ecuación diferencial no linealizada.

Una alternativa para estudiar la estabilidad de la solución de una ecuación diferencial es el estudio cualitativo de la misma, ver (31).

Es necesario estudiar en forma conjunta la no linealidad geométrica y la no linealidad del material; sobre todo en edificios de gran altura, la no linealidad geométrica conduce a modelos matemáticos con inestabilidad en las soluciones de la ecuación diferencial (bifurcación), que puede hacer que las respuestas del modelo sean totalmente diferentes.

## Bibliografía

- 01) AKIYAMA, HIROSHI; “Earthquake-Resistant Limit-state Design for Buildings”; Universidad de Tokio; Tokio 1985.
- 02) APPLIED TECHNOLOGY COUNCIL (ATC-40); “Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings”; Cap IV; Noviembre 1996.
- 03) AVRAMESCU, C.; “Asymptotic Behavior of Solutions of Nonlinear Differential Equations and Generalized Guiding Functions”; Revista Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 13; Hungría 2003.
- 04) BABER, T.T., y NOORI, M.N.; “Random Vibration of Degrading Pinching Systems”; Revista ASCE, División de Ingeniería Mecánica, Vol. 107; 1985.
- 05) BATHE, KLAUS-JÜRGEN; “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”; Departamento de Ingeniería Mecánica, Instituto Tecnológico de Massachusetts, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey; 1982.
- 06) BELYTSCHKO, T., LIU, W.K. y MORAN, B.; “Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures”; John Wiley & Sons, Ltd.; Setiembre 2001.
- 07) BHATT, P.; “Problems in Structural Analysis by Matrix Methods”; Universidad de Glasgow; Octubre 1980.
- 08) BIGGS, J; “Introduction to Structural Dynamics”; McGraw-Hill, Inc. 1964.
- 09) BLANCO, A.; “Estructuración y Diseño de Edificaciones de Concreto Armado”, Colegio de Ingenieros del Perú Libro 2; 1991.
- 10) CARABALLO, T.; “On the Decay Rate of Solutions of Non-Autonomous Differential Systems”; Revista Electrónica de Ecuaciones Diferenciales, Vol. 2001(2001), No. 05; Universidad del sur-oeste de Texas; enero 2001.
- 11) CARR, ATHOL J.; “Ruamoko-User Guide”; Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Canterbury; Octubre 1998.
- 12) CHOPRA, A.K.; “Dynamic of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering”; Prentice-Hall, Inc.; New Jersey 1995.
- 13) CLOUGH, R. y PENZIEN, J.; “Dynamics of Structures”; McGraw-Hill, Inc.; 1975.

- 14) CLOUGH, R.W., BENUSKA, K.L., LIN T. y Asociados; "E.H.A. Study of seismic Design Criteria for High rise buildings"; HUD TS-3, US. Desarrollo Urbano y Vivienda, Administración Federal de Vivienda, Washington D.C.; Agosto 1966.
- 15) CLOUGH, R.W., BENUSKA, K.L. y WILSON, E.L.; "Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings"; Tercera Conferencia Mundial sobre Ingeniería Sísmica"; Vol. 2, Auckland y Wellington, Nueva Zelanda; 1965.
- 16) CLOUGH, R.W. y BENUSKA, K.L.; "Non Linear Earthquake Behavior of Tall Buildings"; Revista ASCE, División de Ingeniería Mecánica, Vol.93, N° EM3; 1967.
- 17) CLOUGH, R.W. y JHONSTON, S.B.; "Effects of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements"; Segunda Conferencia Nacional de Japón sobre Ingeniería Sísmica; Japón 1966.
- 18) CODDINGTON, E.A. y LEVINSON, N.; "Theory of Ordinary Differential Equations"; McGraw-Hill, Inc., New York; 1955.
- 19) CONSTANTINOU, M.C. y SYMANS, M.D.; "Experimental and Analytical Investigation of Seismic Response of Structures with Supplemental Fluid Viscous dampers"; Reporte Técnico NCEER-92-0032, Centro Nacional de Investigación de Ingeniería Sísmica, Universidad Estatal de New York en Buffalo; 1992.
- 20) COOK, R.D., MALKUS, D.S. y PLESHA, M.E.; "Concepts and Applications of Finite Element Analysis"; Universidad de Wisconsin-Madison, Editorial Jhon Wiley & Sons, Inc.; New York 1989.
- 21) CRUZ ZABALA, ERNESTO y COMINETTI C., S.; "Métodos Simplificados de Análisis Sísmico de Edificios Extensión a Sistemas Inelásticos"; Informe de investigación DIEN°91-5, Escuela de Ingeniería Estructural y Geotécnica, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile; Octubre 1991.
- 22) CRUZ, E. y COMINETTI C., S.; "Análisis no Lineal de Edificios bajo Solicitación Sísmica"; Publicación DIE 90-12, Pontificia Universidad Católica de Chile; Chile 1990.
- 23) FIERRO, E.A. y PERRY, CYNTIA L.; "Performance Design Parameters: Strength vs. Ductility Demand"; XII Conferencia Mundial de Ingeniería Sísmica; Sydney 2000.

- 24) FORNONS, JOSE-MARIA; “El Método de los Elementos Finitos en la Ingeniería de Estructuras”; edita Universidad Politécnica de Barcelona, ETS Ingenieros Industriales de Barcelona con la colaboración de Editorial Marcombo; Barcelona 1982.
- 25) GALLAGHER, RICHARD H.; “Finite Elements Analysis - Fundamentals”; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey; 1975.
- 26) GASTINEL, NOËL; “Análisis Numérico Lineal”; editorial reverté S.A.; 1975.
- 27) GAVIN, H.; “Numerical Integration For Structural Dynamics”; CE 283 Structural Dynamics; 2001.
- 28) GIBERSON, M.; “Two Nonlinear Beams with definitions of ductility”; Revista ASCE, División Estructural, Vol 95, N° ST2; Febrero 1969.
- 29) GOLDBERG, S.; “Ecuaciones en Diferencias Finitas”; Marcombo S.A.; Barcelona 1962.
- 30) GUEDES DE FIGUEIREDO, DJAIRO y FREIRIA NEVES, ALOISIO; “Ecuações Diferenciais Aplicadas”; Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA); Rio de Janeiro 1997.
- 31) IMAZ Z. y VOREL Z.; “Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”; Editorial Limusa-Wiley, S.A.; México 1968.
- 32) KANAAN, A.E., POWELL, G.H.; “General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures”; Centro de Investigaciones de Ingeniería Sísmica, Colegio de Ingenieros, Universidad de California, Berkeley, California; Abril 1973.
- 33) KINCAID, D. y CHENEY, W.; “Análisis Numérico”; Addyson Wesley Iberoamericana; USA 1994.
- 34) KREIDER, KULLER y OSTBERG; “Ecuaciones Diferenciales”; Fondo Educativo Interamericano S.A.; 1973.
- 35) LANGA, J.A., ROBINSON, J.C. y SUÁREZ A.; “Stability, instability, and bifurcation phenomena in non-autonomous differential equations”; CV4 7AL, U.K., Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla, Instituto de Matemática de la Universidad de Warwick; Coventry 2002.

- 36) LI , ZHILIN; “Numerical Solutions of PDEs - Finite Difference Methods”; course MA-584, Universidad Estatal de Carolina del Norte; otoño 2002.
- 37) LINDE, PETER; “Numerical Modelling and Capacity Design of Earthquake-Resistant Reinforced Concrete Walls”; Institut für Baustatik und Konstruktion Eidgenössische Technische Hochschule (ETH); Zurich, Julio 1993.
- 38) MASSONET, CH. y SAVE, M.; “Cálculo Plástico de las Construcciones”, Tomo I, Montaner y Simon S.A.; Barcelona 1966.
- 39) MASSONET, CH. y SAVE, M.; “Cálculo Plástico de las Construcciones”, Tomo II, Montaner y Simon S.A.; Barcelona 1966.
- 40) NEWMARK, N.M. y ROSENBLUETH, E.; “Fundamentos de Ingeniería Sísmica”; Editorial Diana; México 1976.
- 41) NIELSEN, N.M. y IMBEAULT F.A.; “Validity of Various Hysteretic Systems”; Tercera Conferencia Nacional de Japón sobre Ingeniería Sísmica; Japón 1971.
- 42) NORMA PERUANA DE DISEÑO SISMO-RESISTENTE RNC E-030; 1997.
- 43) NORMA PERUANA DE DISEÑO SISMO-RESISTENTE RNC E-030; 2003.
- 44) OTANI, S., y SOZEN, M. A.; “Behaviour of Multi-Story Reinforced Concrete Frames During Earthquakes”; Series de Investigación Estructural No. 392, Universidad de Illinois, Urbana, IL; 1972.
- 45) OTANI, S.; “Hysteresis Models of Reinforced Concrete for Earthquake Analysis”; Revista de la Facultad de Ingeniería de Tokio, Vol. XXXVI, N°2; 1981.
- 46) OTANI, S.; “Nonlinear Dynamic Analysis of Reinforced Concrete Building Structures”; Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Toronto, Toronto, Ontario, Canada; Enero 1979.
- 47) PARK Y.J., REINHORN A.M. y KUNNATH S.K.; “IDARC: Inelastic Damage Analysis of Reinforced Concrete Frame-Shear-Wall Structures”; Reporte Técnico NCEER-87-0008, Universidad Estatal de New York en Buffalo; 1987.

- 48) PARK, R., PAULAY T.; “Estructuras de Concreto Reforzado”; Editorial Limusa, Mexico; 1981.
- 49) PAULAY, T. y PRIESTLEY, M.J.N.; “Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings”; John Wiley & Sons Inc.; 1992.
- 50) PENZIEN J.; “Elasto-Plastic Response of Idealized Multi-Story Structures During Earthquakes”; Segunda Conferencia Mundial sobre Ingeniería Sísmica, Vol II, Tokio, Japón; 1960.
- 51) PIQUE, J.; “Apuntes de clase del curso de Dinámica Estructural”; Post grado en Ingeniería Estructural, UNI; Lima 1996.
- 52) PLAAT, OTTO; “Ecuaciones diferenciales ordinarias”; editorial reverté S.A.; 1974.
- 53) POWELL, G.H.; “Supplement to Report, DRAIN-2D User's Guide”; Universidad de California, Berkeley; 1975.
- 54) POWELL, G.H.; “Drain-2dx Element description and User's Guide version 1.1”; Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de California, Berkeley; 1993.
- 55) PRAKASH, V., POWELL, G.H., CAMPBELL, S.D. y FILIPPOU, F.C.; “Drain-2DX Preliminary Element User's Guide”; Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de California, Berkeley; Diciembre 1992.
- 56) QUIÑONES VILLANUEVA, ANTIOCO T.; “Simulación de Acelerogramas para el Terremoto del 03/10/74 Registrado en Lima-Perú”; Universidad Nacional de Ingeniería; Lima-Perú 2002.
- 57) REINHORN, A.M., VALLES, R.E., MATTOX y KUNNATH S.K.; “Seismic Damageability Evaluation of a Typical R/C Building in the Central U.S.”; NCERR Bulletin Vol 10 N°3, Centro Nacional de Investigación en Ingeniería Sísmica, Universidad Estatal de New York en Buffalo; Octubre 1996.
- 58) RICHTMYER, R.D. y MORTON, K.W.; “Difference Methods for Initial Value Problems”; Jhon Wiley & Sons, Inc.; EUA 1967.
- 59) SCALETTI, H.; “Apuntes de clase del curso de Elementos Finitos”; Post grado en Ingeniería Estructural, UNI; 1996.
- 60) SCALETTI, H.; “Apuntes de clase del curso de Métodos Numéricos”; Post grado en Ingeniería Estructural, UNI; 1996.

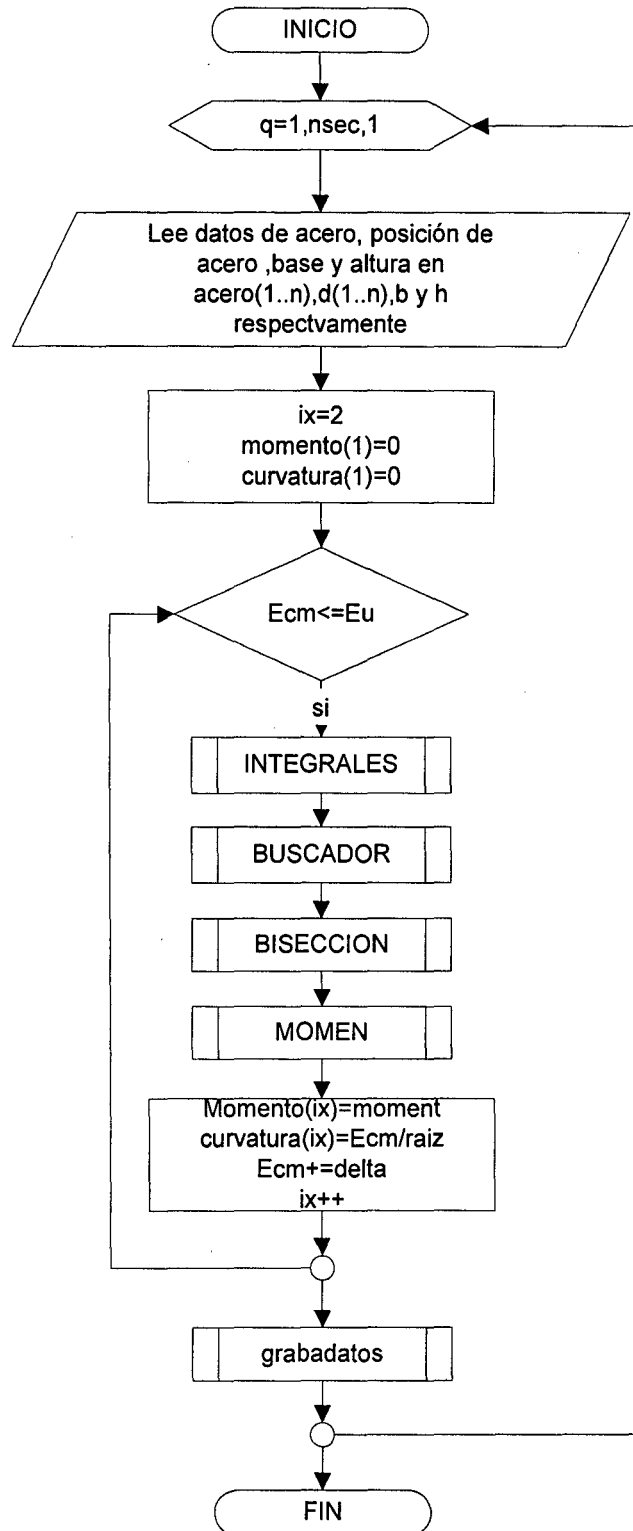
- 61) SOTOMAYOR, JORGE; “Lições de Ecuaciones Diferenciales Ordinárias”; Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), proyecto Euclides, Rio de Janeiro; 1979.
- 62) STOER, J. y BULIRCH, R.; “Introduction to Numerical Analysis”; Editorial Springer-Verlag, Inc.; New York 1980.
- 63) SUGANO y KOREISHI; “An empirical Evaluation of Inelastic Behavior Structural Elements in Reinforced Frames Subjected to Lateral Forces”; V Conferencia Mundial sobre Ingeniería Sísmica, Roma; Junio 1973.
- 64) TAKAYANAGI, T., y SCHNOBRICH, W. C.; “Computed Behavior of Reinforced Concrete Coupled Shear Walls”; Series de Investigación Estructural, No. 434, Universidad de Illinois, Urbana IL; 1976.
- 65) TAKIZAWA, H.; “Non-linear Models for Simulating the Dynamic Damaging Process of Low-Rise Reinforced Concrete Buildings During Severe Earthquakes”; Ingeniería Sísmica y Dinámica Estructural, Vol. 4.; 1975.
- 66) TAUCER, FABIO, SPACONE, ENRICO y FILIPPOU, FILIP C.; “A Fiber Beam-Column Element for Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures”; Reporte No. UCB/EERC-91/17, Centro de Investigación de Ingeniería Sísmica, Colegio de Ingenieros, Universidad de California, Berkeley; Diciembre 1991.
- 67) THOMAS, J. W.; “Numerical Partial Differential Equations Finite Difference Methods”; Springer-Verlag, Inc., New York; 1995.
- 68) TSAI, KEH-CHYUAN y LI, JENG-WEI.; “DRAIN-2D+ versión 1.14 A General Purpose Computer Program for Static and Dinamic Analysis of Inelastic 2D Structures Supplemented with a Grafic Processor View 2D”; Reporte No. CEER/R830-03, Centro para Investigaciones de Ingeniería Sísmica, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Taiwan; Noviembre 1994.
- 69) UNIFORM BUILDING CODE; Whittier, California; 1994.
- 70) VALDIVIA NUÑEZ, JOSE; “Respuesta Sísmica de Edificaciones de Concreto Armado”; Universidad Nacional de Ingeniería, Cismid, Lima-Perú; 1992.



- 71) VALLES, R.E., REINHORN, A.M., KUNNATH, S.K., LI, C. y MADAN, A.; “A Program for the Inelastic Damage Analysis for Buildings”; Reporte Técnico NCEER-96-0010; Centro Nacional de Investigaciones de Ingeniería Sísmica, Universidad Estatal de New York en Buffalo; Enero 1996.
- 72) VASQUEZ CH., L.F.G.; “Análisis y Diseño Inelástico de Estructuras Aporticadas”; Universidad Nacional de Ingeniería, Lima-Perú; 1992.
- 73) VELETSOS A.S. y NEWMARK, N.M.; “Effects of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motions”; Vol II, Segunda Conferencia Mundial sobre Ingeniería Sísmica, Tokio Japón; 1960.
- 74) VUIK, C.; “Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen”, Suplemento del libro “Numerical Analysis de Burden y Faires”; Facultad de Informática y Sistemas, Departamento de Análisis Matemático Aplicado, Universidad Tecnológica de Delft; Holanda 2002.
- 75) ZHIQIAN, Y. y SHUZEN, L.; “Earthquake Response Analysis of Multi-Story R.C. Framed Buildings”; Parte II, Séptima Conferencia Mundial sobre Ingeniería Sísmica; Estambul, Turquía; 1980.
- 76) ZIENKIEWICZ, O.C. y TAYLOR, R.L.; “El Método de los Elementos Finitos”, Vol 1, “Formulación Básica y Problemas Lineales”; 4ta edición, Mc Graw Hill; Madrid 1995.
- 77) ZIENKIEWICZ, O.C. y TAYLOR, R.L.; “El método de los elementos finitos”, Vol 2, “Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y No linealidad”; 4ta edición, Mc Graw Hill; Madrid 1995.

# Apéndice A

## Diagrama de flujo del programa Curvatura



## Apéndice B

### Deducción del operador de Green

**Teorema de Existencia y Unicidad.** Dada la transformación lineal

$T : C^n_{[I]} \rightarrow C_{[I]}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , definida por  $T(y) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(n-k)} \dots (b.1)$  donde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son

funciones reales continuas,  $a_j : I \rightarrow \mathbb{R} / a_0 \neq 0 \forall x \in I$ , además  $y^{(j)}$  representa la derivada  $j$ -ésima de la función  $y$ ,  $j = \{0, 1, \dots, n\}$ . La ecuación diferencial  $T(y) = f \dots (b.2)$  para el problema de valores iniciales  $y^{(j-1)}(x_0) = \alpha_j$ , donde  $j = \{1, \dots, n\}$ ,  $\alpha_j$  es una constante real,  $x_0 \in I$  y  $f$  pertenece al conjunto de las funciones continuas  $\forall x \in I$ , tiene una y solamente una solución.

**Método de Variación de Parámetros.** Se demostrará este método en forma detallada para comprender el operador lineal de Green, útil para la generalización de la integral de Duhamel. No se incluye aquí la demostración del teorema de existencia y unicidad (61).

#### Hipótesis

1. La solución particular de la siguiente ecuación diferencial  $T(y) = f(x)$ , para el problema de valores iniciales  $Y_p^{(j)}(x_0) = 0$  donde  $j = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , tiene la

siguiente forma  $Y_p = \sum_{k=1}^n U_k \Phi_k \dots (b.3)$ ,  $\Phi_k$  es una solución de la ecuación

diferencial homogénea  $T(y) = 0$ ,  $U_k$  es una función buscada, para  $k = \{1, \dots, n\}$ .

2.  $\sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k^{(j)} = 0 \dots (b.4)$ , donde  $j = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ;  $U_k^{(1)}$  y  $\Phi_k^{(j)}$ , denotan la

primera y la  $j$ -ésima derivada de  $U_k$  y  $\Phi_k$  respectivamente.

## Demostración

Sea  $Y_p^{(1)} = \sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k + \sum_{k=1}^n U_k \Phi_k^{(1)} = \sum_{k=1}^n U_k \Phi_k^{(1)} \dots (b.5)$  la derivada de  $Y_p$ ,

por la hipótesis (2) se tiene que  $\sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k = 0 \dots (1) \dots (b.6)$ . Si la solución particular satisface las condiciones iniciales, entonces por el teorema de existencia y unicidad,  $Y_p$  es la solución buscada y además satisface la hipótesis (2). Sea

$Y_p^{(j)} = \sum_{k=1}^n U_k \Phi_k^{(j)} \dots (b.7)$  y  $\sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k^{(j-1)} = 0 \dots (j) \dots (b.8)$  por la hipótesis (2),

derivando la expresión (b.7) se tiene  $Y_p^{(j+1)} = \sum_{k=1}^n U_k \Phi_k^{(j+1)} + \sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k^{(j)} \dots (b.9)$ ,

luego  $\sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k^{(j)} = 0 \dots (j+1) \dots (b.10)$  y  $Y_p^{(j+1)} = \sum_{k=1}^n U_k \Phi_k^{(j+1)} \dots (b.11)$ , de esta

manera  $\sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k^{(n-2)} = 0 \dots (n-1) \dots (b.12)$  y  $Y_p^{(n-1)} = \sum_{k=1}^n U_k \Phi_k^{(n-1)} \dots (b.13)$ . Para

encontrar las  $U_k$  se necesita una ecuación más, ésta se obtiene de la ecuación

diferencial, derivando (b.13) se tiene  $Y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^n U_k \Phi_k^{(n)} + \sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k^{(n-1)} \dots (b.14)$ ,

además  $T(\Phi_j) = 0 \dots (b.15)$ , ya que  $\Phi_j$  es una de las  $n$  soluciones linealmente

independientes de la ecuación diferencial homogénea. De (b.2) se obtiene la

siguiente expresión  $\sum_{k=0}^n a_k Y_p^{(n-k)} = f(x) \dots (b.16)$ , reemplazando (b.7) y (b.14)

en (b.16) se tiene  $\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^n U_i \Phi_i^{(n-k)} + a_0 \sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k^{(n-1)} = f(x) \dots (b.17)$ , además

$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=1}^n U_j \Phi_j^{(n-k)} = 0 \dots (b.18) \Rightarrow \sum_{k=1}^n U_k^{(1)} \Phi_k^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0} \dots (n) \dots (b.19)$ , luego:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_n \\ \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \dots & \Phi_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(n-1)} & \Phi_2^{(n-1)} & \dots & \Phi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ \vdots \\ U_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_0} \end{bmatrix} \dots (b.20)$$

donde:  $U_j^{(1)} = \frac{f(x) W_j(x)}{a_0 W(x)} \dots (j) \dots (b.21)$ ,  $U_j = \int_{x_0}^x \frac{f(t) W_j(t)}{a_0 W(t)} dt \dots (b.22)$

$$W_j(x) = \det \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & 0 & \dots & \Phi_n \\ \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \dots & 0 & \dots & \Phi_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(n-1)} & \Phi_2^{(n-1)} & \dots & 1 & \dots & \Phi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \dots (b.23)$$

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_j & \dots & \Phi_n \\ \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \dots & \Phi_j^{(1)} & \dots & \Phi_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(n-1)} & \Phi_2^{(n-1)} & \dots & \Phi_j^{(n-1)} & \dots & \Phi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \dots (b.24)$$

donde (b.24) es el wronskiano de las soluciones linealmente independientes de  $T(y) = 0$ , (b.23) resulta de cambiar la  $j$ -ésima columna de (b.24) por  $[0, 0, \dots, 0, 1]_{1 \times n}^T$ . De (b.3) y (b.22) se tiene:

$$Y_p = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \int_{x_0}^x \frac{f(t) W_i(t)}{a_0 W(t)} dt \dots (b.25), \text{ así } Y_p = \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(x) W_i(t)}{W(t)} \frac{f(t)}{a_0} dt \dots (b.26),$$

sea la función de Green  $g(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(x) W_i(t)}{W(t)} \dots (b.27)$ , y la función

auxiliar  $K(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) W_i(t) \dots (b.28)$ ,  $g(x, t) = \frac{K(x, t)}{W(t)} \dots (b.29)$ . El

desarrollo de (b.28) es:

$$K(x, t) = \Phi_1(x) \det \begin{bmatrix} 0 & \Phi_2 & \dots & \Phi_n \\ 0 & \Phi_2^{(1)} & \dots & \Phi_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \Phi_2^{(n-1)} & \dots & \Phi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} + \dots + \Phi_n(x) \det \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & 0 \\ \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(n-1)} & \Phi_2^{(n-1)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \dots (b.30)$$

$$K(x, t) = (-1)^{n-1} \Phi_1(x) \det \begin{bmatrix} \Phi_2 & \Phi_3 & \dots & \Phi_n \\ \Phi_2^{(1)} & \Phi_3^{(1)} & \dots & \Phi_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_2^{(n-2)} & \Phi_3^{(n-2)} & \dots & \Phi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} + \dots + (-1)^{2n-2} \Phi_n(x) \det \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_{n-1} \\ \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \dots & \Phi_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(n-2)} & \Phi_2^{(n-2)} & \dots & \Phi_{n-1}^{(n-2)} \end{bmatrix} \dots (b.31)$$

de donde:

$$K(x, t) = \det \begin{bmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) & \dots & \Phi_n(t) \\ \Phi_1^{(1)}(t) & \Phi_2^{(1)}(t) & \dots & \Phi_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(n-2)}(t) & \Phi_2^{(n-2)}(t) & \dots & \Phi_n^{(n-2)}(t) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \dots & \Phi_n(x) \end{bmatrix} \dots (b.32)$$

$$K_x^{(j)}(x, t) = \det \begin{bmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) & \dots & \Phi_n(t) \\ \Phi_1^{(1)}(t) & \Phi_2^{(1)}(t) & \dots & \Phi_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(n-2)}(t) & \Phi_2^{(n-2)}(t) & \dots & \Phi_n^{(n-2)}(t) \\ \Phi_1^{(j)}(x) & \Phi_2^{(j)}(x) & \dots & \Phi_n^{(j)}(x) \end{bmatrix} \dots (b.33)$$

donde  $K_x^{(j)}(x, t)$  representa la  $j$ -ésima derivada parcial de  $K(x, t)$  con respecto a  $x$ ,

así la fórmula de Green es:  $Y_p = \int_{x_0}^x \frac{K(x, t)}{W(t)} \frac{f(t)}{a_0} dt \dots (b.34)$ .

Se ha construido una solución de la ecuación diferencial que satisface las hipótesis, sin embargo se verificarán las condiciones iniciales para dar por concluida la prueba. Para esto utilizaremos la integral de Leibnitz:

$$\text{si } g(x) = \int_{x_0}^x h(x, t) dt \Rightarrow g^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int_{x_0}^x h(x, t) dt \right\} = h(x, x) + \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} [h(x, t)] dt \dots (b.35) \text{ luego:}$$

$$K(x, x) = 0 \Rightarrow g(x, x) = 0 \dots (b.36)$$

$$K_x^{(j)}(x, x) = 0 \Rightarrow g_x^{(j)}(x, x) = 0 \quad \forall (1 \leq j \leq n-2) \dots (b.37)$$

Si  $j = n-1 \Rightarrow K_x^{(n-1)}(x, x) = W(x) \Rightarrow g_x^{(n-1)}(x, x) = \frac{W(x)}{W(x)} = 1 \dots (b.38)$ , de (b.34) se tiene:

$$Y_p(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} g(x, t) \frac{f(t)}{a_0} dt = 0 \dots (b.39) \Rightarrow y(x_0) = 0, \text{ aplicando Leibnitz tenemos:}$$

$$Y_p^{(1)} = g(x, x) \frac{f(x)}{a_0(x)} + \int_{x_0}^x g_x^{(1)}(x, t) \frac{f(t)}{a_0} dt = \int_{x_0}^x g_x^{(1)}(x, t) \frac{f(t)}{a_0} dt \dots (b.40) \Rightarrow Y_p^{(1)}(x_0) = 0,$$

por inducción tenemos:  $Y_p^{(j)} = \int_{x_0}^x g_x^{(j)}(x,t) \frac{f(t)}{a_0} dt \dots (b.41) \Rightarrow Y_p^{(j)}(x_0) = 0$ , donde

$g_x^{(j)}(x,t)$  denota la derivada  $j$ -ésima de  $g$  con respecto a  $x$ , para  $j+1$ :

$$Y_p^{(j+1)} = g_x^{(j)}(x,x) \frac{f(x)}{a_0(x)} + \int_{x_0}^x g_x^{(j+1)}(x,t) \frac{f(t)}{a_0} dt = \int_{x_0}^x g_x^{(j+1)}(x,t) \frac{f(t)}{a_0} dt \dots (b.42) \Rightarrow Y_p^{(j+1)}(x_0) = 0,$$

si  $j \leq n-2$ ; para en  $n-1$ :

$$Y_p^{(n-1)} = g_x^{(n-2)}(x,x) \frac{f(x)}{a_0(x)} + \int_{x_0}^x g_x^{(n-1)}(x,t) \frac{f(t)}{a_0} dt = \int_{x_0}^x g_x^{(n-1)}(x,t) \frac{f(t)}{a_0} dt \dots (b.43) \Rightarrow Y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$$

De esta manera se comprueba que  $Y_p$  cumple con las condiciones iniciales y satisface la ecuación diferencial, luego por el teorema de existencia y unicidad se trata de la solución buscada.

## Apéndice C

### Estabilidad del método de Newmark

**Teorema:** Sean  $L_1, L_2$  dos aproximaciones lineales de  $f$  en  $X_0$  entonces  $L_1 \equiv L_2$ .

Se puede probar la unicidad de la aproximación lineal así:  $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta > 0; X \in \Omega;$

se cumple  $\|f(X) - L_1(X)\| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \|f(X) - L_2(X)\| < \frac{\varepsilon}{2} \dots (c.1)$ , luego por la desigualdad triangular se tiene la siguiente expresión:

$$\|(L_1 - L_2)(X)\| \leq \|L_1(X) - f(X)\| + \|f(X) - L_2(X)\| = \varepsilon \Rightarrow L_1 \equiv L_2 \dots (c.2).$$

**Matriz de Amplificación:** Se tiene el problema de valores y vectores propios  $A\phi = \lambda B\phi \dots (c.3)$ , donde  $A, B$  son matrices cuadradas y simétricas de orden  $n$ , sea

la sucesión de vectores  $d$  definida por  $Bd_{n+1} = Ad_n \dots (c.4)$ , cualquier vector de

$\mathfrak{R}^n$  se puede expresar como  $d_0 = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \dots (c.5)$ , donde  $c_k$  y  $\phi_k$  son constantes y

vectores linealmente independientes. Por hipótesis inductiva podemos considerar

$$d_n = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^n \phi_k \dots (c.6) \text{ de donde:}$$

$$Ad_n = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^n A \phi_k \Rightarrow Bd_{n+1} = B \left( \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^{n+1} \phi_k \right) \Rightarrow d_{n+1} = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^{n+1} \phi_k \dots (c.7), \text{ de esta}$$

forma se confirma la hipótesis inductiva  $d_n = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^n \phi_k \dots (c.8)$ , si además

$$|\lambda_k| < 1, k = \{1, 2, \dots, n\} \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \dots (c.9).$$

**Teorema:** Sean  $Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  una matriz cuadrada de orden  $2n$ ,  $A, B, C, D$  matrices

diagonales de orden  $n$ , si  $a_j, b_j, c_j, d_j$  son los elementos que ocupan la  $j$ -ésima

posición en las diagonales de  $A, B, C, D$ , entonces:



$$\det Q = \det \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & \cdots & H_n \end{bmatrix} = \det H_1 \cdot \det H_2 \cdots \det H_n \cdots (c.10)$$

$$H_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix} \cdots (c.11).$$

Por hipótesis inductiva, supongamos que si el teorema anterior se cumple para matrices de orden  $2(n-1)$ , el determinante de  $Q$  lo podemos encontrar con el desarrollo de los menores complementarios de su  $n$ -ésima columna:

$$\det Q = a_n \det \begin{bmatrix} A_{n-1 \times n-1} & B_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ C_{n-1 \times n-1} & D_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0_{n-1 \times 1}^T & 0_{n-1 \times 1}^T & d_n \end{bmatrix} + (-1)^n c_n \det \begin{bmatrix} A_{n-1 \times n-1} & B_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0_{n-1 \times 1}^T & 0_{n-1 \times 1}^T & b_n \\ C_{n-1 \times n-1} & D_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \end{bmatrix} \cdots (c.12)$$

donde  $A_{n-1 \times n-1}$ ,  $B_{n-1 \times n-1}$ ,  $C_{n-1 \times n-1}$ ,  $D_{n-1 \times n-1}$ , son matrices diagonales de orden  $n-1$  cuyos elementos en las diagonales son  $a_j, b_j, c_j, d_j$  respectivamente,  $j = \{1 \dots n-1\}$ , tomando nuevamente menores complementarios tenemos:

$$\det Q = a_n d_n \det \begin{bmatrix} A_{n-1 \times n-1} & B_{n-1 \times n-1} \\ C_{n-1 \times n-1} & D_{n-1 \times n-1} \end{bmatrix} + (-1)^{2n+1} c_n b_n \det \begin{bmatrix} A_{n-1 \times n-1} & B_{n-1 \times n-1} \\ C_{n-1 \times n-1} & D_{n-1 \times n-1} \end{bmatrix} \cdots (c.13)$$

agrupando términos:

$$\det Q = \det H_n \det \begin{bmatrix} A_{n-1 \times n-1} & B_{n-1 \times n-1} \\ C_{n-1 \times n-1} & D_{n-1 \times n-1} \end{bmatrix} = \det H_1 \cdot \det H_2 \cdots \det H_n \cdots (c.14)$$

probando finalmente:

$$\det Q = \det \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & \cdots & H_n \end{bmatrix} \cdots (c.15)$$

**Estabilidad del método de Newmark:** Para encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$Ma + Cv + f_{int} = 0 \dots (c.16)$$

donde  $a, v, f_{int}$  son el vector aceleración, el vector velocidad y el vector de fuerzas internas del pórtico, se linealiza la ecuación (c.16) en cada paso de integración, la ecuación en diferencias asociada a cada paso es  $Ma_n + Cv_n + Kd_n = 0 \dots (c.17)$ , donde  $C = \alpha_1 M + \alpha_2 K$  es la matriz de amortiguamiento, los integradores consistentes son:

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \Delta t^2 (\bar{\beta} a_n + \beta a_{n+1}) \dots (c.18)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t (\bar{\gamma} a_n + \gamma a_{n+1}) \dots (c.19)$$

donde  $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$  y  $\bar{\beta} = (1 - 2\beta)/2$ . Para probar la estabilidad numérica del método de Newmark, se multiplica (c.18) y (c.19) por la matriz  $M$ , y se reemplaza  $Ma_n = -Cv_n - Kd_n$ :

$$Md_{n+1} = Md_n + \Delta t Mv_n - \Delta t^2 [\bar{\beta}(Cv_n + Kd_n) + \beta(Cv_{n+1} + Kd_{n+1})] \dots (c.20)$$

$$Mv_{n+1} = Mv_n - \bar{\gamma} \Delta t (Cv_n + Kd_n) - \gamma \Delta t (Cv_{n+1} + Kd_{n+1}) \dots (c.21)$$

expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M + \beta \Delta t^2 K & \beta \Delta t^2 C \\ \gamma \Delta t K & M + \gamma \Delta t C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M - \bar{\beta} \Delta t^2 K & \Delta t M - \bar{\beta} \Delta t^2 C \\ -\bar{\gamma} \Delta t K & M - \bar{\gamma} \Delta t C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_n \\ v_n \end{bmatrix} \dots (c.22)$$

considerando la matriz de amplificación (ver concepto de matriz de amplificación)

$$\begin{bmatrix} M - \bar{\beta} \Delta t^2 K & \Delta t M - \bar{\beta} \Delta t^2 C \\ -\bar{\gamma} \Delta t K & M - \bar{\gamma} \Delta t C \end{bmatrix} [z] = \mu \begin{bmatrix} M + \beta \Delta t^2 K & \beta \Delta t^2 C \\ \gamma \Delta t K & M + \gamma \Delta t C \end{bmatrix} [z] \dots (c.23)$$

donde  $[z] = [d^T \ v^T]^T = [z_1^T \ z_2^T]^T$ , como el problema de valores y vectores propios  $K\phi = \lambda M\phi$  tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes, sea  $\Phi$  la matriz de vectores propios, entonces los vectores  $z_1 = \Phi a$ ,  $z_2 = \Phi b$  se pueden expresar como una combinación lineal de las columnas de  $\Phi$  ( $a, b$  son vectores constantes de orden  $n$ ), multiplicando (c.23) por la matriz  $\Theta^T$  se obtiene:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Phi & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \Phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I - \bar{\beta}\Delta t^2 L & \Delta t I - \bar{\beta}\Delta t^2 G \\ -\bar{\gamma}\Delta t L & I - \bar{\gamma}\Delta t G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} I + \beta\Delta t^2 L & \beta\Delta t^2 G \\ \gamma\Delta t L & I + \gamma\Delta t G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \dots\dots\dots(c.24a)$$

$$\text{donde: } L = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \dots\dots(c.24b), \quad G = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \dots\dots(c.24c)$$

la ecuación (c.24a) se puede expresar así:  $H z = 0$ , donde:

$$H z = \begin{bmatrix} I - \bar{\beta}\Delta t^2 L - \mu(I + \beta\Delta t^2 L) & \Delta t I - \bar{\beta}\Delta t^2 G - \mu(\beta\Delta t^2 G) \\ -\bar{\gamma}\Delta t L - \mu(\gamma\Delta t L) & I - \bar{\gamma}\Delta t G - \mu(I + \gamma\Delta t G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0 \dots\dots(c.25).$$

Se puede notar que las matrices  $A, B, C, D$  son matrices diagonales de orden  $n$ , los elementos de sus diagonales son  $a_j, b_j, c_j, d_j$ , donde  $j = \{1, 2, \dots, n\}$ , de acuerdo a (c.10), el determinante de la matriz  $H$  se puede expresar:

$$\det H = \det \begin{bmatrix} H_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & H_2 \end{bmatrix}, \text{ donde } H_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix}$$

$$a_j = 1 - \bar{\beta}\Delta t^2 \omega_j^2 - \mu(1 + \beta\Delta t^2 \omega_j^2) \dots\dots(c.26)$$

$$b_j = \Delta t - 2\Delta t^2 \bar{\beta}\xi_j \omega_j - \mu(2\beta\Delta t^2 \xi_j \omega_j) \dots\dots(c.27)$$

$$c_j = -\Delta t \bar{\gamma} \omega_j^2 - \mu(\Delta t \gamma \omega_j^2) \dots\dots(c.28)$$

$$d_j = 1 - 2\bar{\gamma}\Delta t \xi_j \omega_j - \mu(1 + 2\gamma\Delta t \xi_j \omega_j) \dots\dots(c.29).$$

Si el módulo de cada valor propio de  $H$  es menor que uno, el algoritmo es estable; desarrollando  $\det H_j = 0$  para  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$  se tiene:

$$\mu = \frac{2 - \frac{\omega_j^2 \Delta t^2}{2}}{2 + 2\varepsilon_j \omega \Delta t + \frac{\omega_j^2 \Delta t^2}{2}} \pm \frac{2\omega_j \sqrt{1 - \varepsilon_j^2 \Delta t}}{2 + 2\varepsilon_j \omega \Delta t + \frac{\omega_j^2 \Delta t^2}{2}} i \dots\dots(c.30), \text{ si } |\mu| < 1 \text{ resulta:}$$

$$\Delta t \leq \frac{2\xi_j}{(\gamma - \frac{1}{2})\omega_j} \dots\dots(c.31)$$

como  $\gamma = 0.5$ , para todo  $\Delta t$  se cumple que el módulo de  $\mu$  es menor que uno, luego el algoritmo es incondicionalmente estable.

# Apéndice D

## Definiciones y Teoremas

A continuación se entrega una lista de definiciones y teoremas útiles para la formalización de procesos de linealización y estabilidad de problemas no lineales.

**Teorema del extremo superior o teorema “estático”:** La carga límite  $P_l$  es el extremo superior de todas las cargas  $P_-$ , correspondientes a los estados estáticamente admisibles.

**Teorema del extremo inferior o teorema “cinemático”:** La carga límite  $P_l$  es el extremo inferior de todas las cargas  $P_+$ , correspondientes a los estados cinemáticamente admisibles.

Estos dos primeros teoremas están referidos al análisis estático inelástico (39), de alguna manera afirman sobre la unicidad de la carga límite.

**Espacio de Banach:** Un espacio de Banach representado por  $\beta$ , es un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas, es un espacio normado es decir  $\forall x, y \in \beta \exists$  una norma denotada por  $\|\cdot\|$  y es un espacio completo, es decir donde toda sucesión de Cauchy es convergente ( $\forall \varepsilon > 0 \exists$  un entero  $N / |x_n - x_m| < \varepsilon \dots (d.1)$  siempre que  $n, m \geq N$ ).

**Teorema Fundamental de Convergencia:** Sean  $\beta'$  y  $\beta''$  dos espacios de Banach con normas  $\|\cdot\|'$  y  $\|\cdot\|''$ , sea  $T$  y  $T_m$  dos operadores lineales que van de  $\beta' \rightarrow \beta''$ . Si:

1.  $\forall f \in \beta''$  la ecuación  $Tu = f \dots (d.2)$  tiene única solución en  $\beta'$ .
2. Cada operador  $T_m$  tiene inversa  $T_m^{-1}$  acotada y aproxima a  $T$  de manera que:

$$\forall u \in \beta', \|Tu - T_m u\| \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow \infty.$$

Entonces la solución  $u_m$  de  $T_m u_m = f \cdots (d.3)$ , converge a la solución de  $Tu = f \forall f \in \beta''$  si y solamente si la aproximación es estable.

**Teorema de Lax:** Dado un problema de valores iniciales y una aproximación en diferencias finitas que satisface la condición de consistencia, la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia.

**Teorema (C. Avramescu):** Si  $V_g(t, x) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}, |x| \geq r$ , donde  $V_g$  es la función guía de  $g$ , se define:  $V_g(x(t), t) = \langle (\text{div} V)(g(t)x), g(t)x - gf(t, x) \rangle \cdots (d.4)$ , entonces el sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{x} = f(t, x) \cdots (d.5)$ , admite por lo menos una solución que cumple la condición  $|x(t)| \leq k \cdot \frac{1}{g(t)} \cdots (d.6), t \in \mathbb{R} \wedge k > 0$ .

**Sistemas perturbados:** existen sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales perturbados. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{x} = Ax \cdots (d.7)$ ,  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , si en este sistema de ecuaciones diferenciales, la solución idénticamente nula es asintóticamente estable, existe una relación con el sistema perturbado  $\dot{x} = Ax + F(t, x) \cdots (d.8)$  donde  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que se enuncia en el siguiente teorema:

**Teorema:** Si todos los valores Propios de  $A$  tienen parte real negativa, Si  $F(t, x) = G_1(t, x) + G_2(t, x) \cdots (d.9)$ , donde  $G_1, G_2$  son funciones continuas que satisfacen:

$$G_1(t, 0) = G_2(t, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G_1(t, x)}{|x|} = 0 \cdots (d.10) \quad \text{y} \quad G_2(t, x) < g(t)|x| \cdots (d.11) \quad \text{con}$$

$$\int_0^{\infty} g(t) dt < \infty \cdots (d.12), \quad \text{entonces la solución idénticamente nula de (d.8) es}$$

asintóticamente estable.

Existe un teorema similar para sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales con el uso de funciones de decrecimiento exponencial que cumplen la condición:  $\lambda(t+s) \leq \lambda(t)\lambda(s) \cdots (d.13), \forall t, s \in \mathbb{R}^+$ , considere el sistema de

ecuaciones diferenciales  $\dot{x} = f(t, x)$  y el sistema perturbado  $\dot{y} = f(t, y) + g(t, y) \dots (d.14)$  donde  $f, g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; el teorema se enuncia a continuación:

**Teorema:** Si existen constantes positivas  $C, M, \delta$  y  $\gamma$ , y funciones no negativas  $\alpha(t), \beta(t)$  tales que  $\forall t_0 > T, \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  y para toda solución  $x(t, t_0, x_0)$  que cumpla con:

1.  $|x(t, t_0, x_0)| \leq C|x_0|\lambda(t - t_0)^{-\gamma} \dots (d.15), \forall t \geq t_0.$

2.  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \alpha(t)|x - y| \dots (d.16), \forall t \geq t_0, x, y \in \mathbb{R}^n.$

3.  $|g(t, x)| \leq \beta(t)|x - y| \dots (d.17), \forall t \geq t_0.$

4.  $\int_{t_0}^{t+1} \alpha(s) ds \leq M \dots (d.18), \forall t \geq t_0.$

5.  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_{t_0}^{t+1} \beta(s) ds}{\log \lambda(t)} \leq -\delta \dots (d.19).$

$\Rightarrow$  toda solución de (d.14) cumple con  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |y(t, t_0, y_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\min\{\gamma, \delta\} \dots (d.20).$

**Teorema:** Si  $\dot{x} = Ax$  es un sistema de ecuaciones diferenciales de orden  $n$ , donde  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  no singular, entonces el origen en  $\mathbb{R}^n$  es:

1. Asintóticamente estable, si las partes reales de todos los valores propios de  $A$  son negativas.
2. Estable, si  $A$  tiene al menos un par de valores propios imaginarios puros de multiplicidad uno, ningún par de valores propios imaginarios de multiplicidad mayor que uno y ningún valor propio con partes reales positivas.
3. Inestable en cualquier otro caso.

**Teorema:** Sea  $f = f(t, x) / x \in \mathbb{R}^n \wedge f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua en una franja de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que consta de todos los puntos  $(t, x)$  y  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , si  $f$  es de clase uno (es decir sus primeras derivadas parciales son continuas y existen) en toda subfranja  $S_1 \in S$  determinada por un intervalo cerrado  $I$ . Entonces si  $(t_0, x)$  es un punto cualquiera en  $S$ , el problema de valores iniciales:

$$\dot{x} = f(t, x) \cdots (d.21a)$$

$$y'(t_0) = y_0 \cdots (d.21b)$$

tiene solución única en  $I$ .

**Teorema:** La solución única de cualquier problema de valores iniciales:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$$y'(t_0) = y_0$$

donde  $f = f(t, x) / f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua, acotada y lipschitziana varía continuamente con  $f$  y con  $(t_0, x_0)$ .

Una consecuencia importante del teorema anterior es que pequeños cambios o perturbaciones en  $x_0$ , producen pequeños cambios en  $x$  (es decir  $x$  pertenece a una vecindad de  $x_0$ ), este teorema es útil para un comportamiento local de la ecuación diferencial.

**Condición de Lipschitz:** Sea  $f = f(t, x) / f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n \wedge x \in \mathbb{R}^n$ , si existe un número real  $\beta > 0$ , tal que para dos puntos cualesquiera  $(t, x_1)$  y  $(t, x_2)$  de  $\Omega$  se cumple que:  $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \beta \|x_1 - x_2\| \cdots (d.22)$ , la función  $f$  cumple con la condición de lipschitz.

## Apéndice E

### Modelo de penetración de fluencia

CASOS	CONDICION	Diagrama de momentos con curvatura simple $M_A M_B \geq 0$		Diagrama de momentos con curvatura doble $M_A M_B \leq 0$	
		$\alpha_A$	$\alpha_B$	$\alpha_A$	$\alpha_B$
1	$ M_A  \leq  M_{Agr} $ $\wedge$ $ M_B  \leq  M_{Bagr} $	0	0	0	0
2	$ M_A  >  M_{Agr} $ $\wedge$ $ M_B  \leq  M_{Bagr} $	$\frac{M_A - M_{Agr}}{M_A - M_B} \leq 1$	0	$\frac{M_A - M_{Agr}}{M_A - M_B} \leq 1$	0
3	$ M_A  \leq  M_{Agr} $ $\wedge$ $ M_B  >  M_{Bagr} $	0	$\frac{M_B - M_{Bagr}}{M_B - M_A} \leq 1$	0	$\frac{M_B - M_{Bagr}}{M_B - M_A} \leq 1$
4	$ M_A  >  M_{Agr} $ $\wedge$ $ M_B  >  M_{Bagr} $	0.5	0.5	$\frac{M_A - M_{Agr}}{M_A - M_B}$	$\frac{M_B - M_{Bagr}}{M_B - M_A}$

$M_{Agr}$  y  $M_{Bagr}$  son los momentos de agrietamiento en las secciones de los extremos A y B de un elemento;  $EI_A$  y  $EI_B$  son las rigideces de flexión de las secciones de los extremos A y B de un elemento,  $EI_0$  será la rigidez de flexión al interior del elemento (ver capítulo IV), ésta última rigidez será calculada como la media armónica de  $EI_A$  y  $EI_B$ :

$$EI_0 = \frac{2EI_A EI_B}{EI_A + EI_B} \dots (e.1).$$

Los parámetros de penetración serán calculados de la actual distribución de momentos flectores considerando sus signos, luego serán comparados con las longitudes de penetración máximas ( $\alpha_{Amax}$ ,  $\alpha_{Bmax}$ ) del paso anterior, salvo el caso 4 para curvatura simple, en los demás casos se cumple que



$\alpha_A \geq \alpha_{A\max}$  y  $\alpha_B \geq \alpha_{B\max}$ ; si  $\alpha_A + \alpha_B \geq 1 \dots (e.2)$  entonces  $EI_0$  será modificado de manera que  $\alpha_A + \alpha_B \leq 1 \dots (e.3)$ .

## Apéndice F

### Cálculo de curvaturas con IDARC

Cuando una sección de concreto armado tiene dos filas de acero, IDARC divide el área del concreto en un determinado número de fibras; incrementando la curvatura de la sección, bajo consideraciones de equilibrio y compatibilidad de esfuerzos, se obtiene la relación momento curvatura.

La deformación unitaria de una fibra viene dada por  $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + z\phi \dots (f.1)$ , donde  $\varepsilon_0$  es la deformación unitaria del centro de gravedad,  $\phi$  es la curvatura de la sección transversal y  $z$  la distancia de una fibra al eje centroidal ver figura:

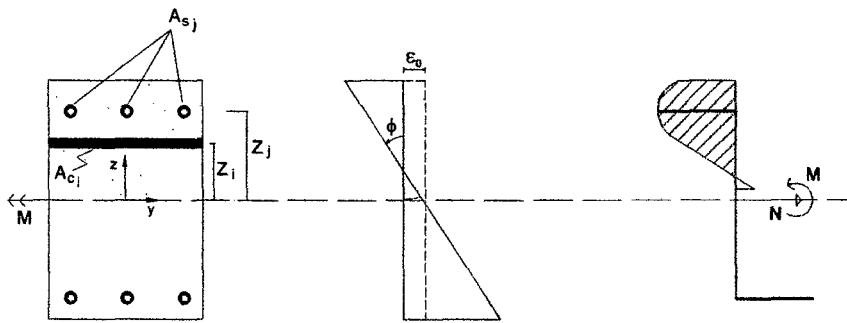


Figura F-1 Detalle de sección para análisis de modelo Fibra

La fuerza axial y el momento flector de la sección se pueden calcular con las

siguientes fórmulas:  $N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E\varepsilon dA \dots (f.2)$  y  $M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ez\varepsilon dA \dots (f.3)$  donde

$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ez(\varepsilon_0 + z\phi) dA \dots (f.4)$  ( $E$  es el módulo de Young), si se integran estas

últimas expresiones, se puede obtener la siguiente matriz para un incremento del paso  $j$ :

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_A(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) & k_z(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) \\ k_z(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) & k_{zz}(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \phi \end{bmatrix}_j \dots (f.5)$$

donde:

$$k_A = \sum_{i=1}^{NCC} E_{ci}(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) A_{ci} + \sum_{i=1}^{NSS} E_{si}(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) A_{si} \dots (f.6)$$

$$k_z = \sum_{i=1}^{NCC} E_{ci}(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) A_{ci} z_i + \sum_{i=1}^{NSS} E_{si}(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) A_{si} z_i \dots (f.7)$$

$$k_{zz} = \sum_{i=1}^{NCC} E_{ci}(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) A_{ci} z_i^2 + \sum_{i=1}^{NSS} E_{si}(\varepsilon_{0,j}, \phi_j) A_{si} z_i^2 \dots (f.8).$$

$NCC$  y  $NSS$  son el número de fibras de concreto y acero consideradas en la sección;  $E_{ci}, E_{si}$  son los módulos de Young de la fibra  $i$  del concreto y de la fibra  $i$  del acero,  $A_{ci}, A_{si}$  son las áreas de la fibra  $i$  del concreto y de la fibra  $i$  del acero.

Además el programa considera que la carga axial inicial es  $N_0 = N \dots (f.9)$  en todos los casos; se pueden encontrar relaciones de fuerza axial y momento flector con el siguiente algoritmo:

1. Se aplica un pequeño incremento de curvatura  $\Delta\phi_j$ ,  $\phi_j = \phi_{j-1} + \Delta\phi_j \quad \forall j \geq 1$ .
2. En  $j=0$  se aplica toda la fuerza axial, como  $N$  es constante entonces  $\Delta N_j^n$  es cero en todos los pasos futuros, entonces en la iteración  $n$ -ésima, el incremento de deformación unitaria en el centroide viene dado por:  $\Delta\varepsilon_o^n = -k_{z,j}^{n-1} \Delta\phi_k / k_{A,j}$ .
3. Actualizar las deformaciones y curvaturas: 
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \phi \end{Bmatrix}_j^n = \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \phi \end{Bmatrix}_j^{n-1} + \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_o \\ 0 \end{Bmatrix}_j^n$$
.
4. Recalcular los términos de (f.5).
5. Encontrar la fuerza de desbalance axial  $\Delta N_j^n = k_{A,j}^n \Delta\varepsilon_{0,j}^n + k_{z,j}^n \Delta\phi_j$ .

6. Si  $\Delta N_j^n > \xi$  donde  $\xi > 0$  es un valor de tolerancia muy pequeño, repetir los pasos 2, 3, 4, 5, y 6, en caso contrario hacer  $\Delta M_j^n = k_{z,j}^n \Delta \varepsilon_{0,j}^n + k_{zz,j}^n \Delta \phi_j$ , y continuar construyendo la curva esquelética de la sección para un incremento  $\Delta \phi_{j+1}$ .

# Apéndice G

## Validación de datos del programa CURVATURA

A continuación se entregan los datos de las vigas del primer nivel del pórtico 4, se comparan los momentos flectores y curvaturas, calculados con el programa CURVATURA y con los métodos de Sugano y ACI, se puede notar mejor aproximación entre los valores obtenidos por el programa CURVATURA y el método del ACI. Se realizó esta validación de datos para cada pórtico y cada elemento. En la siguiente tabla, los momentos flectores se encuentran en  $\text{kgr-cm}^2$ , las dimensiones de la sección del elemento en cm y el área del acero de refuerzo en  $\text{cm}^2$ .

Tablas G.1 y G.2

PISO	SECCION	As(+)	As(-)	b	h	d	d'	ACI	Sugano	ACI	ACI	Sugano	Programa Curvatura
								Mcr	Mcr	$\Psi_{cr}$	My	My	My
1	Isup	3.96	5.94	25	40	34	6	213,999.38	193,148.55	6.608E-06	513,618.7	465,696.0	510,032.7
	linf	5.94	3.96	25	40	34	6	218,554.83	221,021.68	6.749E-06	760,007.5	698,544.0	750,969.4
	Dsup	3.96	5.94	25	40	34	6	213,999.38	193,148.55	6.608E-06	513,618.7	465,696.0	510,032.7
	Dinf	5.94	3.96	25	40	34	6	218,554.83	221,021.68	6.749E-06	760,007.5	698,544.0	750,969.4

PISO	SECCION	As(+)	As(-)	b	h	d	d'	ACI	Sugano	Programa Curvatura	ACI	Programa Curvatura
								Mu	Mu	Mu	$\Psi_u$	$\Psi_u$
1	Isup	3.96	5.94	25	40	34	6	541,637.41	508,939.20	546,701.03	5.545E-04	5.646E-04
	linf	5.94	3.96	25	40	34	6	777,914.04	763,408.80	783,745.00	4.770E-04	4.899E-04
	Dsup	3.96	5.94	25	40	34	6	541,637.41	508,939.20	546,701.03	5.545E-04	5.646E-04
	Dinf	5.94	3.96	25	40	34	6	777,914.04	763,408.80	783,745.00	4.770E-04	4.899E-04

## Apéndice H

### Breve descripción de las rutinas principales de IDARC

**IDDYNA:** Este módulo y sus rutinas asociadas realizan análisis dinámicos de estructuras, sujetas a movimientos sísmicos horizontales y verticales, utiliza el algoritmo de NEWMARK-BETA.

**IDQUASI:** Este módulo y sus rutinas asociadas realizan análisis cuasi-estáticos de cargas cíclicas usando control de fuerzas o control de deformaciones.

**IDSID:** Este módulo y sus rutinas asociadas realizan el ingreso de datos de la estructura, así como la validación y algunos procedimientos anteriores al proceso de cálculo.

**IDMONO:** Este módulo y sus rutinas asociadas realizan análisis estáticos inelásticos de cargas laterales (pushover).

**IDSTAT:** Este módulo y sus rutinas asociadas realizan análisis incrementales estáticos no lineales bajo cargas especificadas.

**EIGEN1:** Resuelve problemas de valores y vectores propios.

**SOLVE:** Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales que resultan de las ecuaciones en diferencias.

**MON3LIN:** Este módulo y sus rutinas asociadas, se utilizan para calcular la respuesta inelástica de un modelo histerético de tres parámetros.

**BILINEAR:** Este módulo y sus rutinas asociadas, se utilizan para calcular la respuesta inelástica de un modelo histerético de dos parámetros.

# Apéndice I

## Pseudo-código de rutinas de histéresis

### Pseudo-código MONLIN3

Inicializar variables de control y seleccionar opción

IO=OPCION

IR A (10,20,30,40,50)) según OPCION

- 10 Rango Elástico  
OPCION=1  
SI (P >= PCP) ENTONCES IR A 11  
SI (P <= PCN) ENTONCES IR A 12  
Calcula U y energía  
IR A 200
- 11 Más allá del punto de agrietamiento positivo  
Actualiza P  
SI (P >= PYP) ENTONCES IR A 21  
IR A 20
- 12 Más allá del punto de agrietamiento negativo  
Actualiza P  
SI (P <= PYP) ENTONCES IR A 41  
IR A 40
- 20 Rango de agrietamiento positivo  
OPCION=2  
SI (DP<0.0 y IFLG=2) IR A 51  
Calcula U y energía  
IR A 200
- 21 Mas allá del punto de fluencia positivo  
Actualiza P  
IR A 30
- 30 Rango de fluencia Positivo  
OPCION=3  
SI (DP<0.0 y IFLG=2) IR A 51  
Calcula U y energía  
IR A 200
- 40 Rango de agrietamiento negativo  
OPCION=4  
SI (DP>0.0 y IFLG=2) IR A 51  
Calcula U y energía  
IR A 200
- 41 Mas allá de punto de fluencia negativo  
Actualiza P  
IR A 50
- 50 Rango de fluencia negativo  
OPCION=5  
SI (DP>0.0 y IFLG=2) IR A 51  
Calcula U y energía  
IR A 200
- 51 DESCARGA  
Actualiza U y energía  
IR A 200

```

200   SALIR
      IC=0
      SI (I0 <> OPCION) ENTONCES IC=I0
      REGRESAR AL PROGRAMA PRINCIPAL
      FIN

```

### **Pseudo-código BILINEAR**

Inicializa variables de control y seleccionar opción  
 I0=OPCION  
 IR A (10, 20, 30) según OPCION

```

10   Rango Elástico
      OPCION=1
      SI (P >= PYP) ENTONCES IR A 11
      SI (P <= PYN) ENTONCES IR A 12
      Calcula U y energía
      IR A 200

11   Más allá del punto de fluencia positivo
      Actualiza P
      IR A 20

12   Más allá del punto de fluencia negativo
      Actualiza P
      IR A 30

20   Rango de fluencia positivo
      OPCION=2
      SI (DP<0.0 y IFLG=2) IR A 31
      Calcula U y energía
      IR A 200

30   Rango de fluencia negativo
      OPCION=3
      SI (DP > 0.0 y IFLG=2) IR A 31
      Calcula U y energía
      IR A 200

31   DESCARGA
      Actualiza U y energía
      IR A 200

200  SALIR
      IC=0
      IF(I0<>OPCION) IC=I0
      REGRESAR AL PROGRAMA PRINCIPAL
      FIN

```

DP es el incremento de carga, IFLG es una variable que indica si se realiza un análisis estático inelástico o un análisis dinámico inelástico. PYP, PCP, PYN, PCN, indican los puntos de fluencia positivo, agrietamiento positivo, fluencia negativo y agrietamiento negativo de la sección de concreto.



El programa calcula la energía de disipación por histéresis a partir de la curva del material (Bilineal o Trilineal) de cada elemento, por ejemplo en la figura adjunta el programa realiza los siguientes pasos:

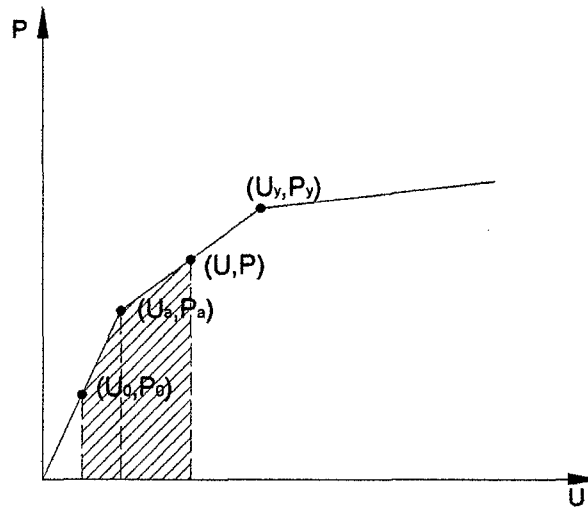


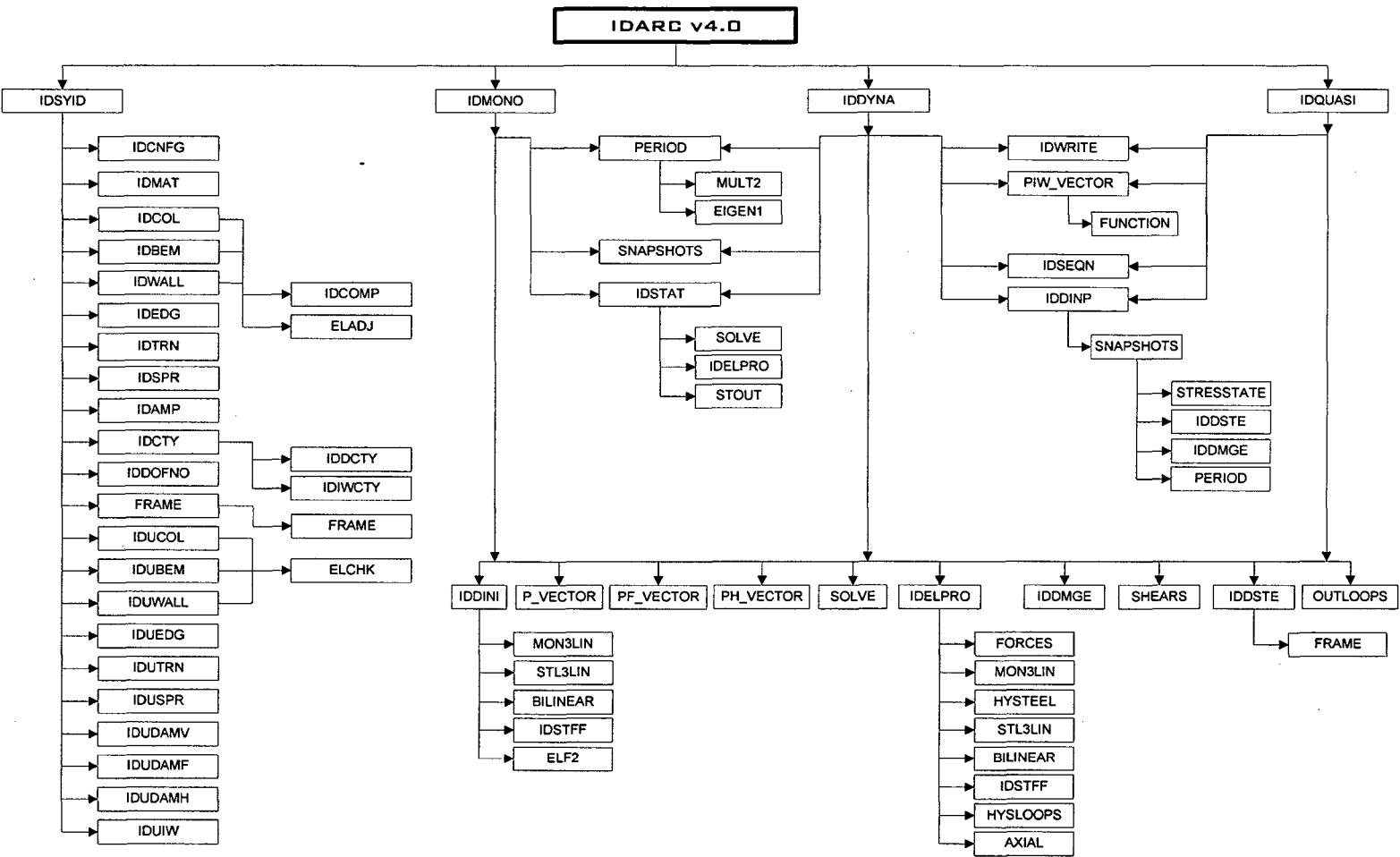
Figura I.1 Energía de disipación

1. Inicializa valores  $P_0, U_0$  y  $\Delta P$ ,  $P = P_0 + \Delta P$ .
2. Si  $P \leq P_a$ ,  $E = E_0$ ,  $U = U_a + \frac{P-P_a}{E_0}$ ,  $Energía = Energía + 0.5(P + P_0)(U - U_0)$ .
3. Si  $P > P_a$ :
  - 3.1  $Energía = Energía + 0.5(P_a + P_0)(U_a - U_0)$ .
  - 3.2  $P_0 = P_a$ ,  $U_0 = U_a$ ,  $E = \frac{(P_y - P_a)}{(U_y - U_a)}$ ,  $P = P_a + (P - P_a) \frac{E}{E_0}$ .
  - 3.3  $U = U_a + \frac{(P - P_a)}{E}$ ,  $Energía = Energía + 0.5(P + P_0)(U - U_0)$ .

Donde  $E_0$  es la pendiente elástica y  $E$  es la pendiente del siguiente tramo lineal.

# Apéndice J

## Diagrama de dependencias de IDARC



# Apéndice K

## Comentarios sobre algunos programas de análisis inelástico

**IDARC.** Programa de análisis inelástico (71), trabaja con un modelo de una componente de plasticidad extendida similar al de Takizawa, presenta básicamente 3 modelos de histéresis el Bilineal, el modelo orientado al vértice con el que se hacen modelos como el de Clough (cuando se manipulan ciertos parámetros) y un modelo de tres parámetros con el que se pueden simular los modelos Trilineales, Takeda, Syna, etc., también presenta modelos suavizados de transición para paneles, placas y aisladores de la base, resuelve el algoritmo de las ecuaciones inelásticas con el método de Newmark, para discretizar la ecuación en diferencias utiliza un método incremental y compensa las fuerzas de desbalance con el algoritmo de Powell (32), dentro de sus desventajas se encuentran: considera la carga axial constante para elementos viga-columna y no presenta métodos iterativos por lo que se requiere dividir el tiempo en intervalos pequeños (0.005 seg., 0.0005 seg., 0.00005 seg.), para tener buenos resultados se recomiendan pruebas como el test de la parcela en algunos puntos de monitoreo de la estructura; los archivos de salida son fácilmente manejables, presentan resultados a nivel de curvaturas para el caso de vigas y columnas. Existen opciones para modelar pórticos tridimensionales en el plano.

**DRAIN-2D+.** Es una mejora del programa original DRAIN-2D (32), una de sus ventajas es que mejora el algoritmo para resolver la ecuación dinámica utilizando métodos de predicción y corrección, sin embargo no entrega respuestas a nivel de curvaturas, por lo que es necesario trabajar con las curvas momento rotación de Sugano (63), también tiene problemas para encontrar los valores de la fuerza axial en el análisis dinámico inelástico, posee una interfaz gráfica (VIEW-2D).

**DRAIN-2DX.** Versión para PC del programa DRAIN-2D, presenta básicamente 4 elementos (biela, viga-columna, panel y un elemento fibra), el elemento viga columna tiene problemas con la carga axial, por lo que es necesario hacer hipótesis

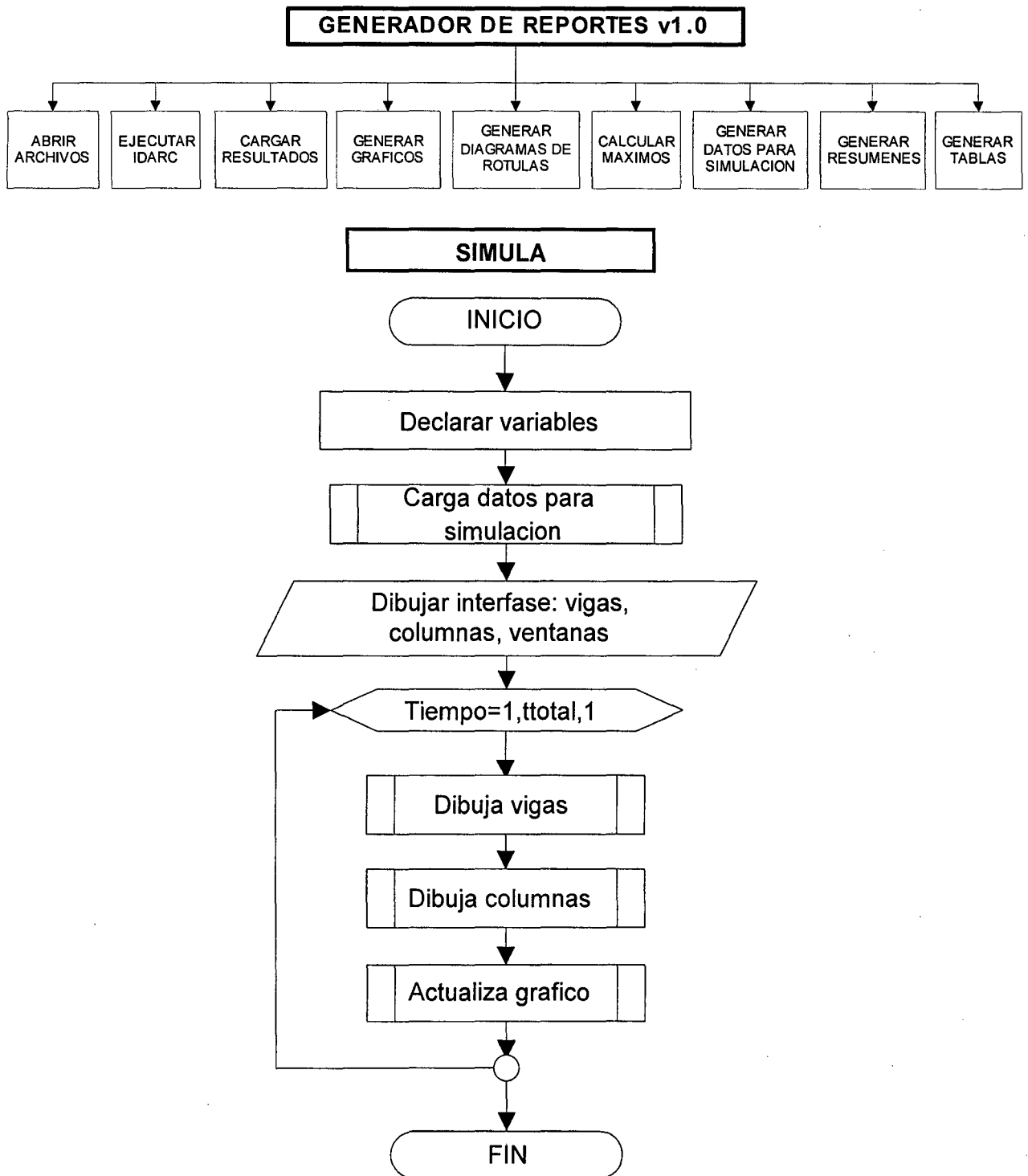
simplificativas si se hace un análisis inelástico, persiste el problema de no entregar curvaturas, lo que hace necesario reprogramar ciertos sectores del código fuente.

**RUAUMOKO.** Similar a programas como DRAIN-2D+, DRAIN-2DX, presenta gran variedad de modelos de histéresis, da la posibilidad de utilizar métodos iterativos como el de Newton (sin embargo no suaviza las curvas del material, lo que puede ser un problema si no existe una buena discretización en el tiempo, del modelo que se resuelve) y métodos incrementales, presenta una interfaz gráfica para apreciar y simular sus resultados.

Existen programas para elementos finitos como ADINA, DYNA, etc. una buena lectura para ver el estado del arte de la no linealidad de elementos finitos se encuentra en el primer capítulo de (6). Para el presente trabajo se construyeron simuladores y manejadores de bases de datos para programas como IDARC, DRAIN-2D+, DRAIN-2DX, RUAUMOKO, ver apéndice L.

# Apéndice L

## Programa generador de reportes y programa de simulación



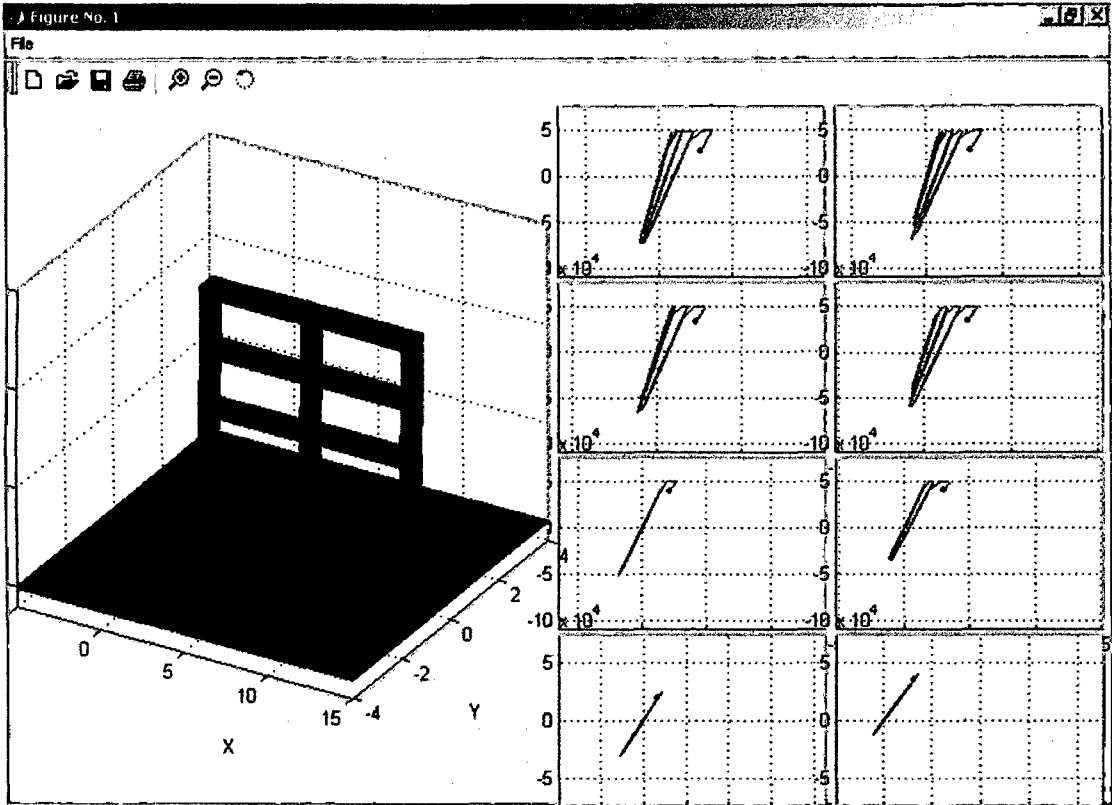


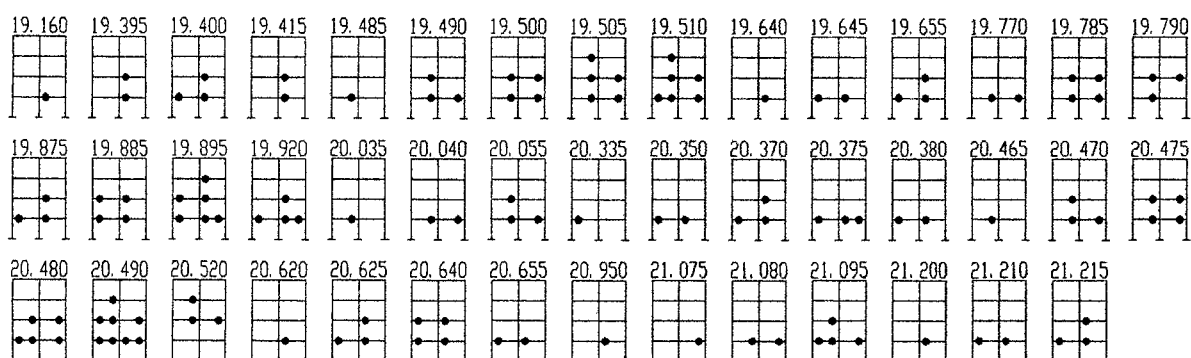
Figura L.1 Visualización del comportamiento inelástico de las vigas de p4, utilizando el programa SIMULA

# Apéndice M

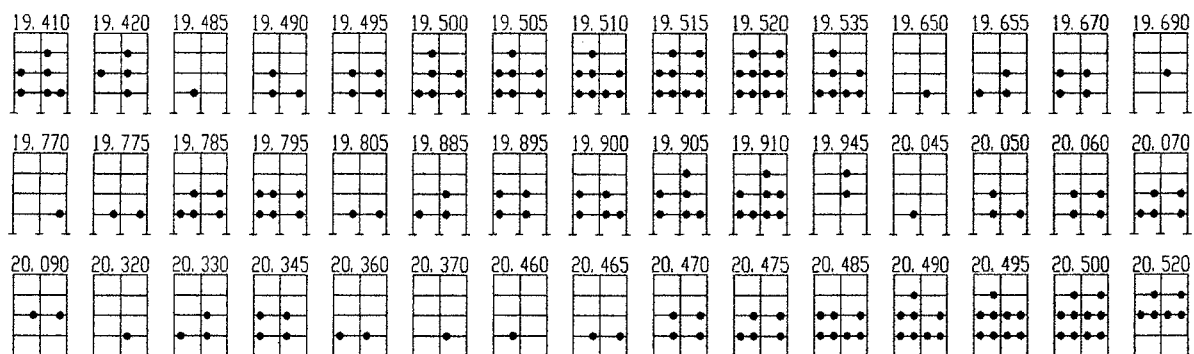
## Mecanismos de falla del análisis inelástico tiempo historia

Se cuenta con la secuencia de formación de rótulas plásticas de los modelos Bilineal, Clough y Trilineal, de registros sísmicos completos, sin embargo, por el gran volumen de información, se entregan las secuencias de formación de rótulas plásticas más importantes de cada registro sísmico con el modelo de Clough. Para ver en tiempo real cualquier simulación se tiene el programa SIMULA (apéndice L).

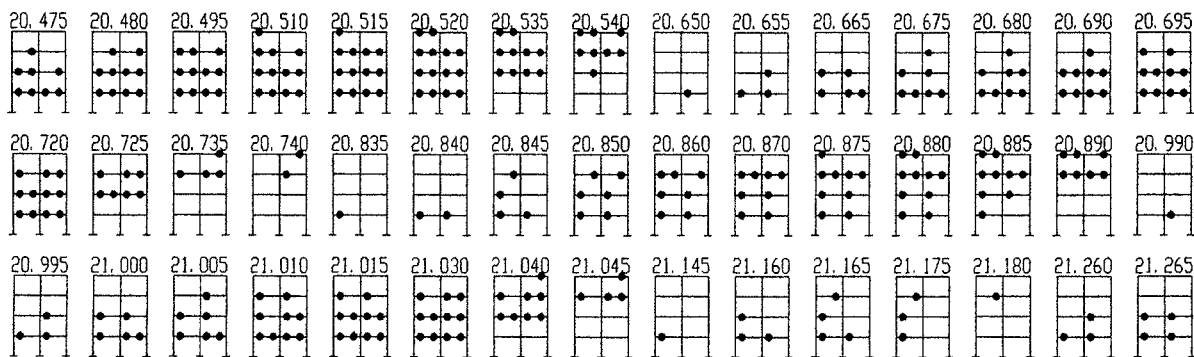
### P466400



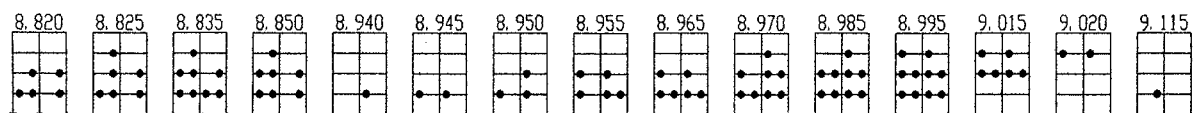
### P466600



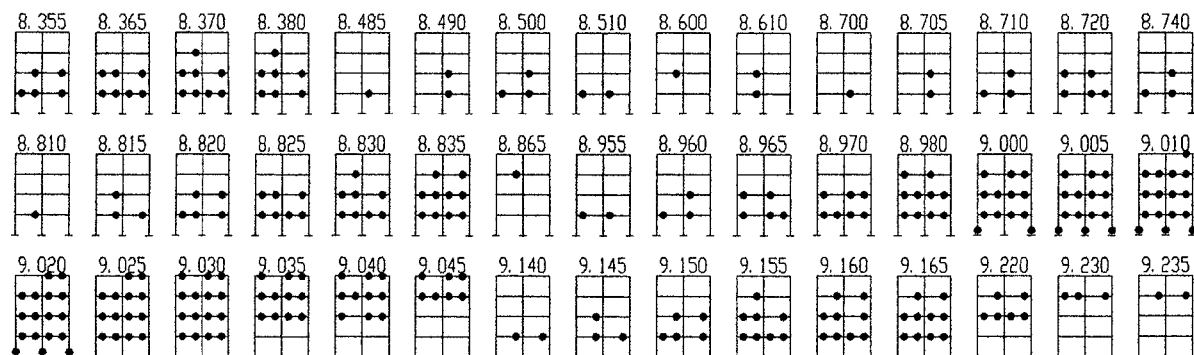
### P466800



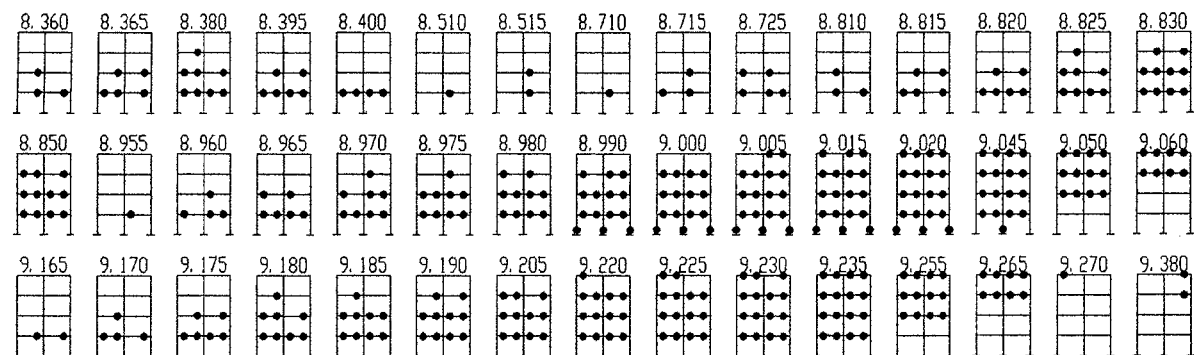
### P470400



### P470600

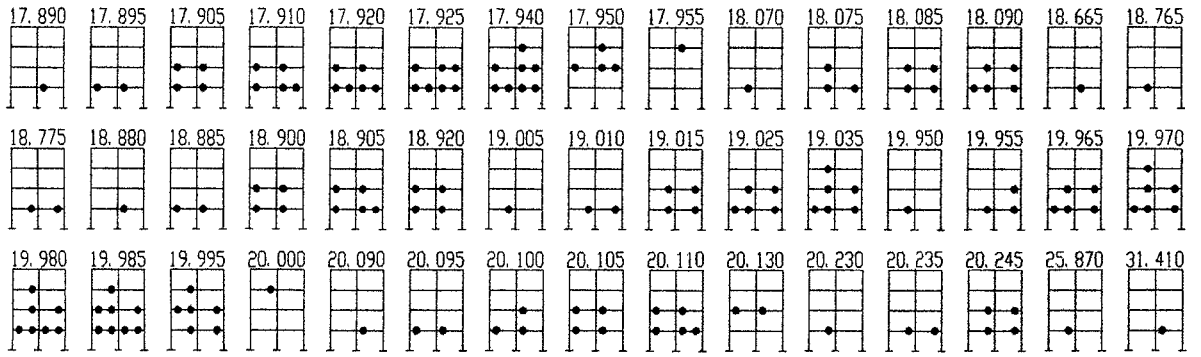


### P470800

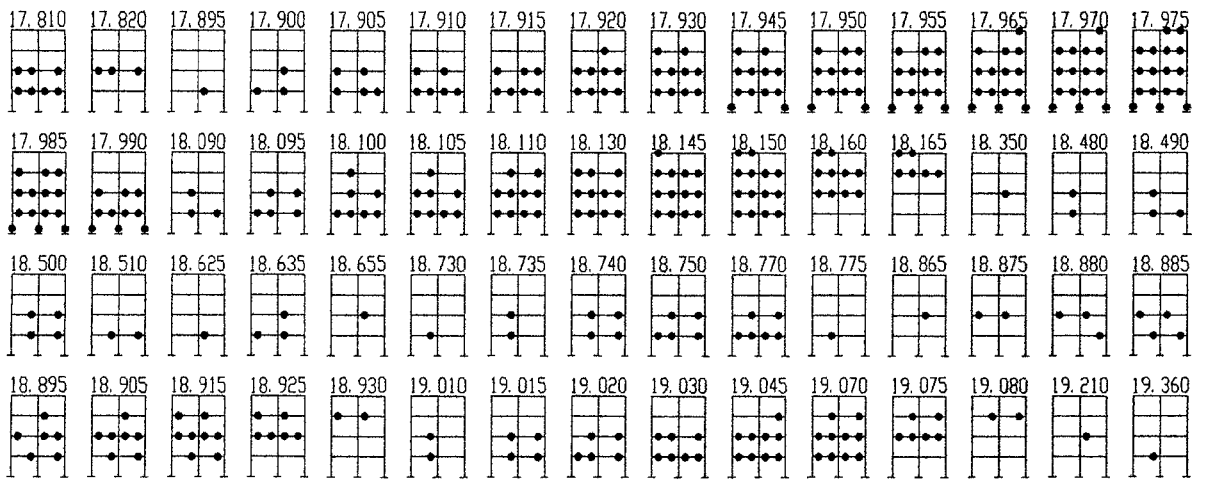




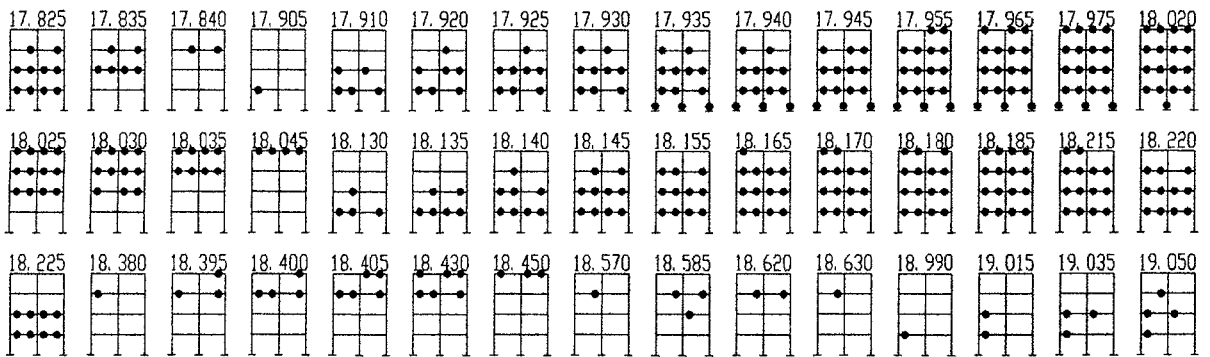
P474400



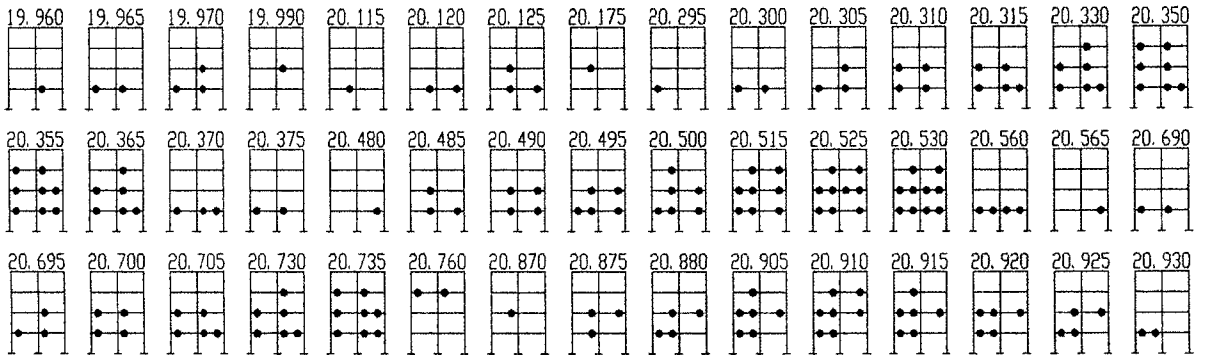
P474600



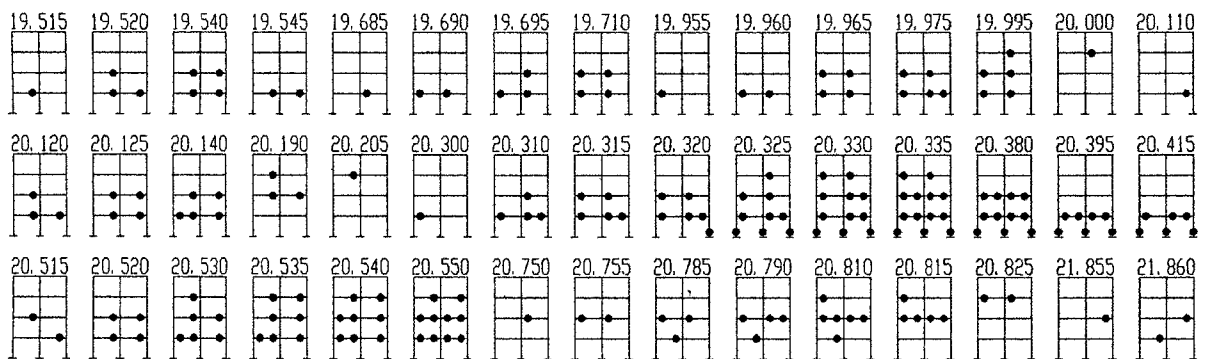
P474800



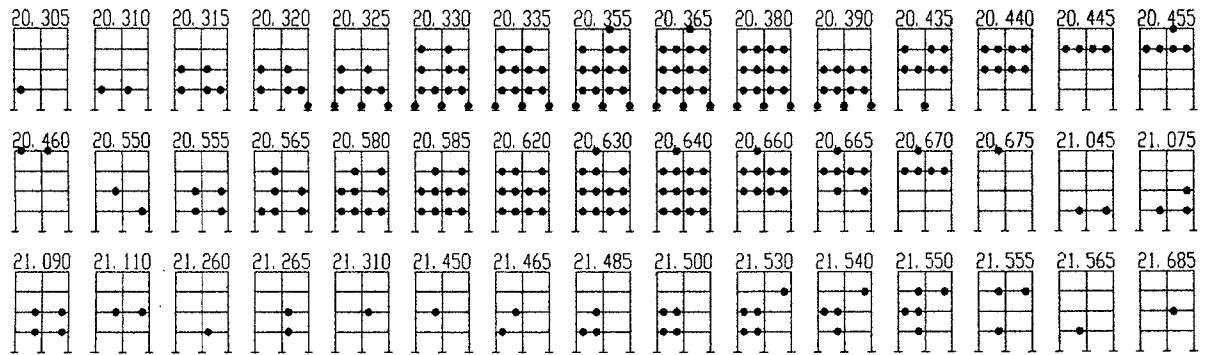
### P666400



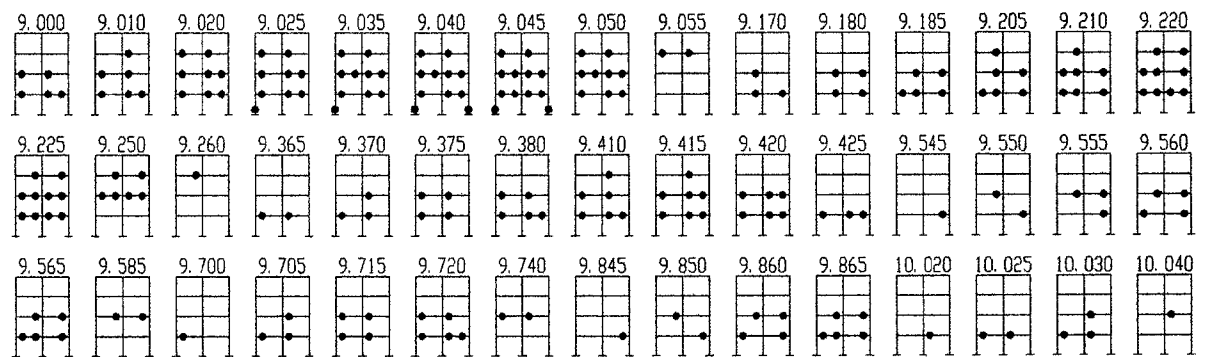
### P666600



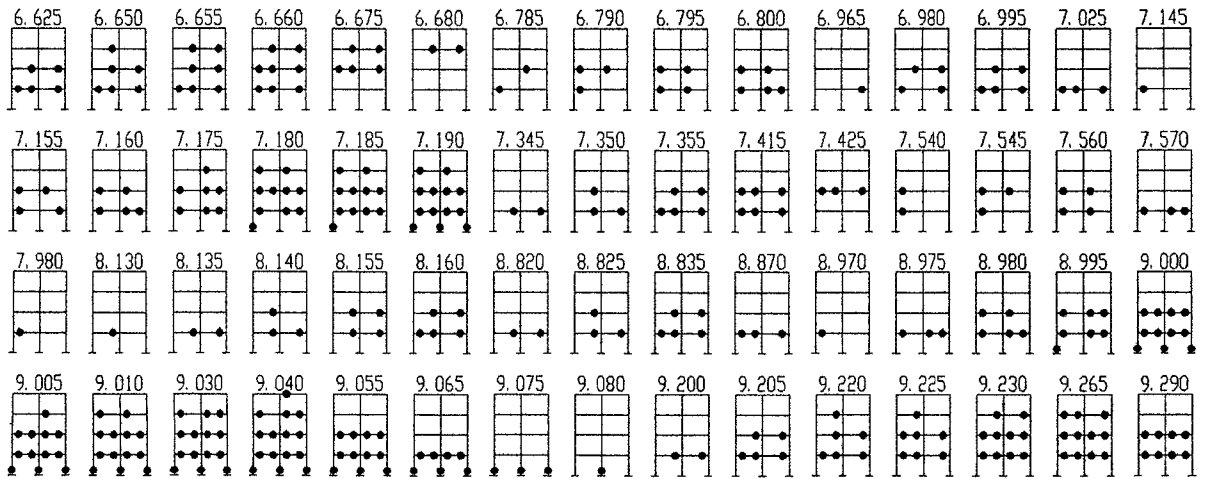
### P666800



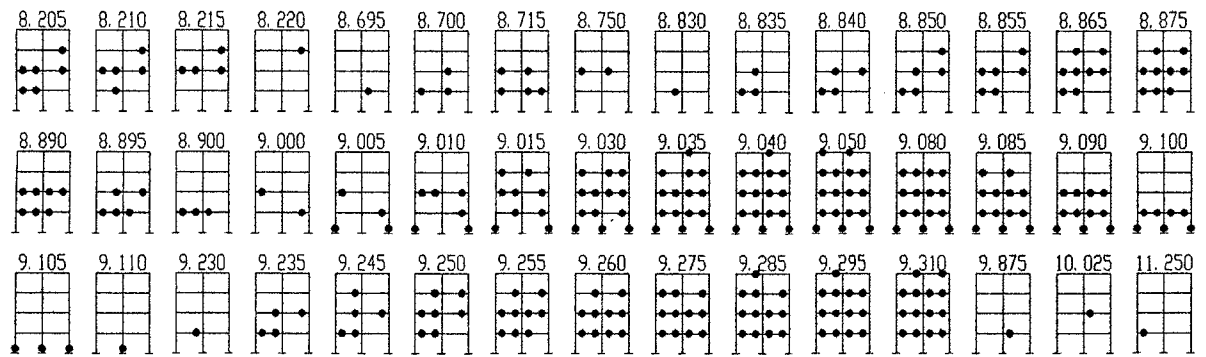
### P670400



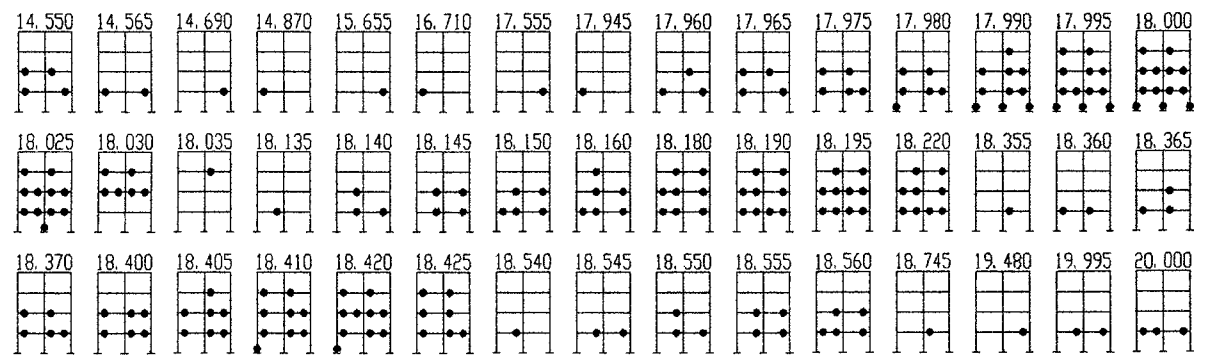
### P670600



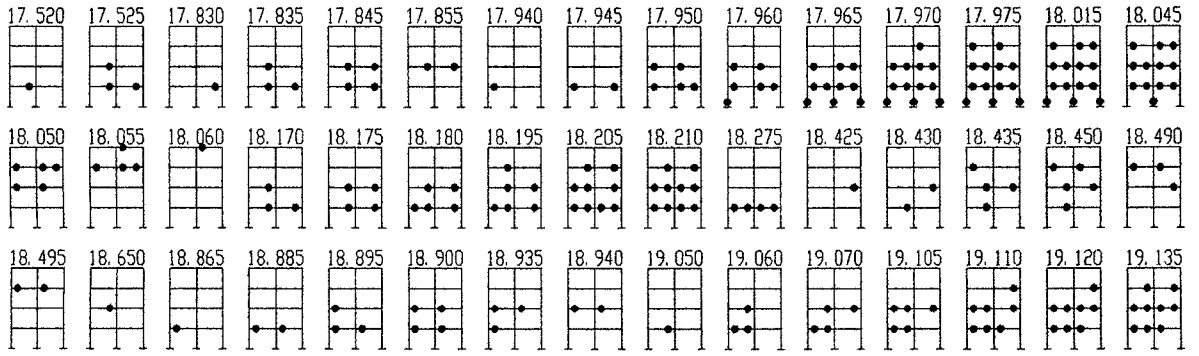
### P670800



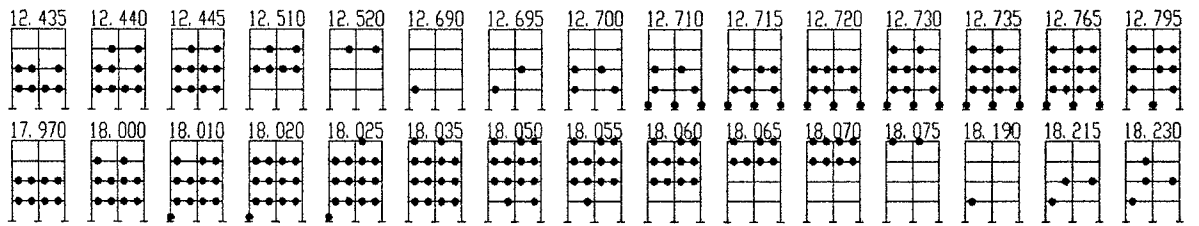
### P674400



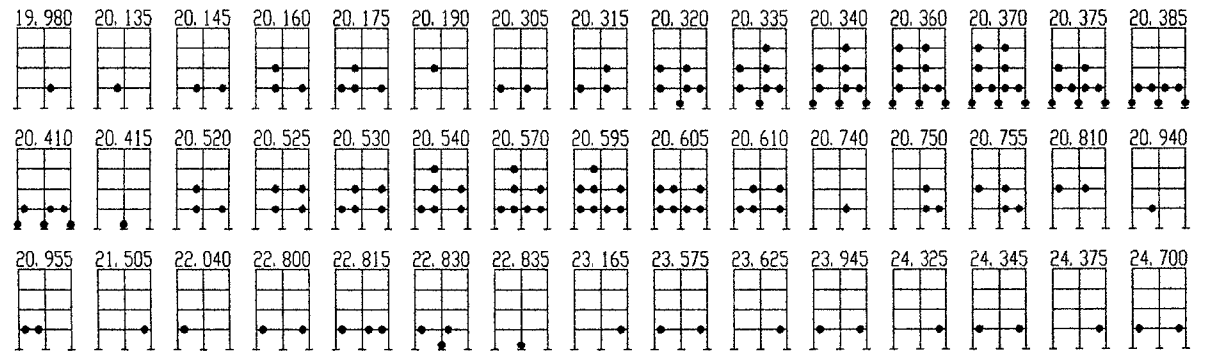
### P674600



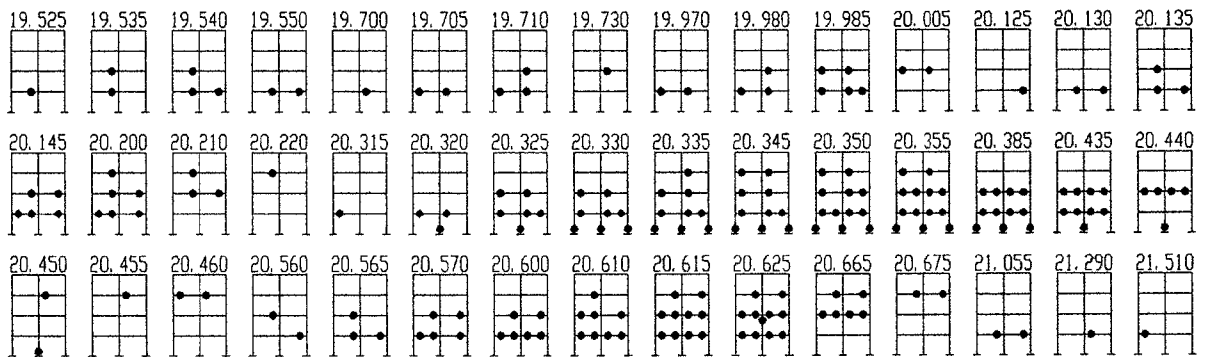
### P674800



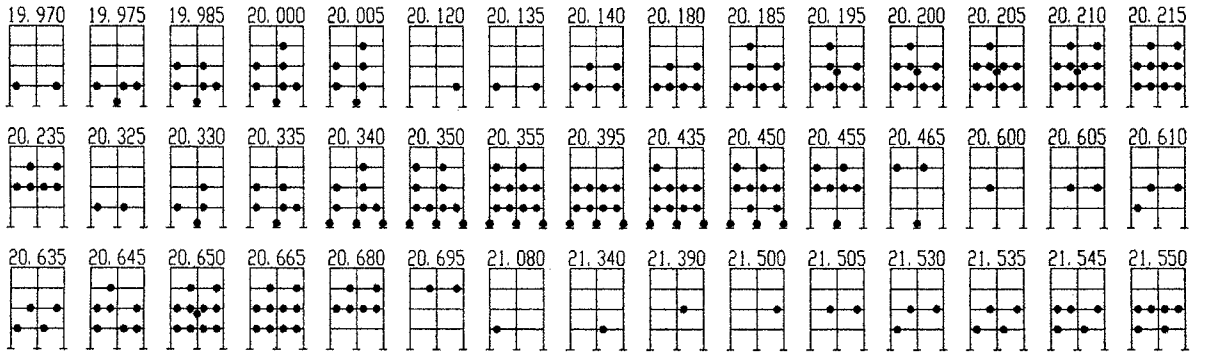
### P866400



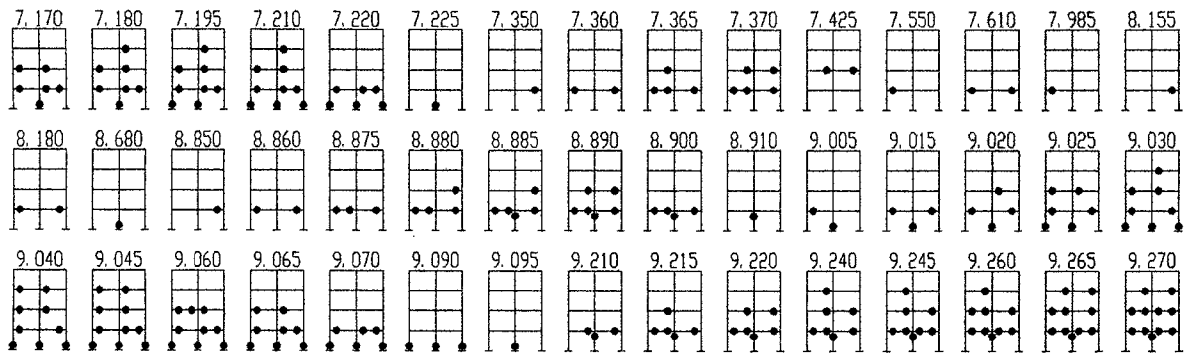
### P866600



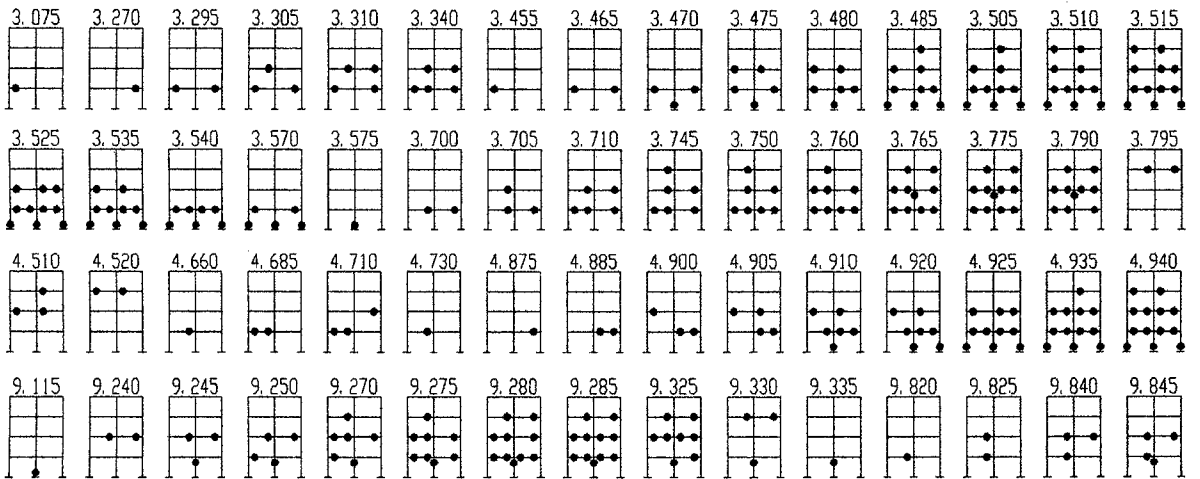
## P866800



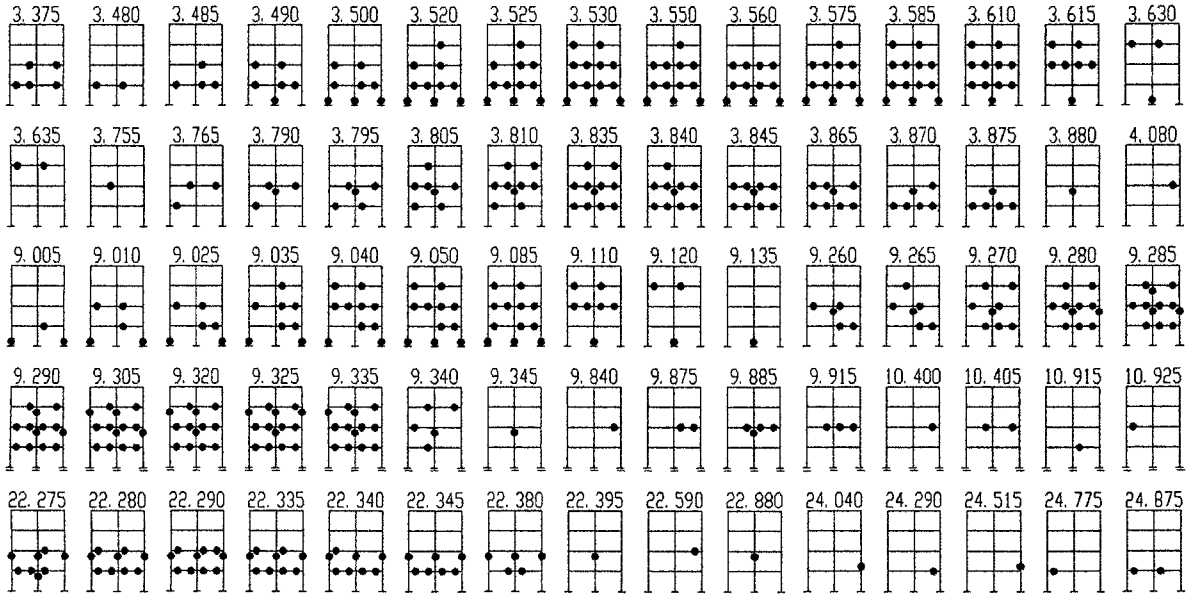
## P870400



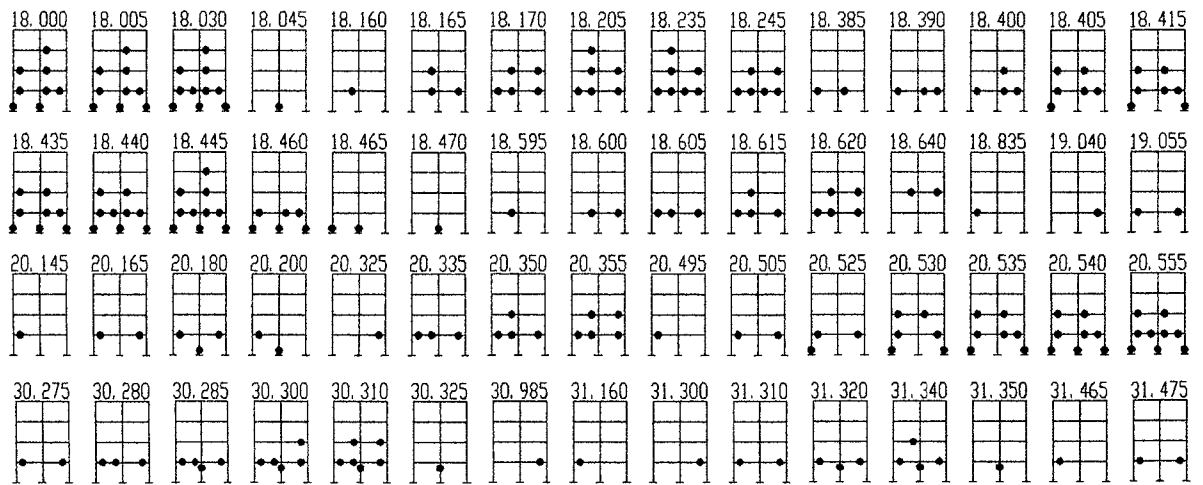
## P870600



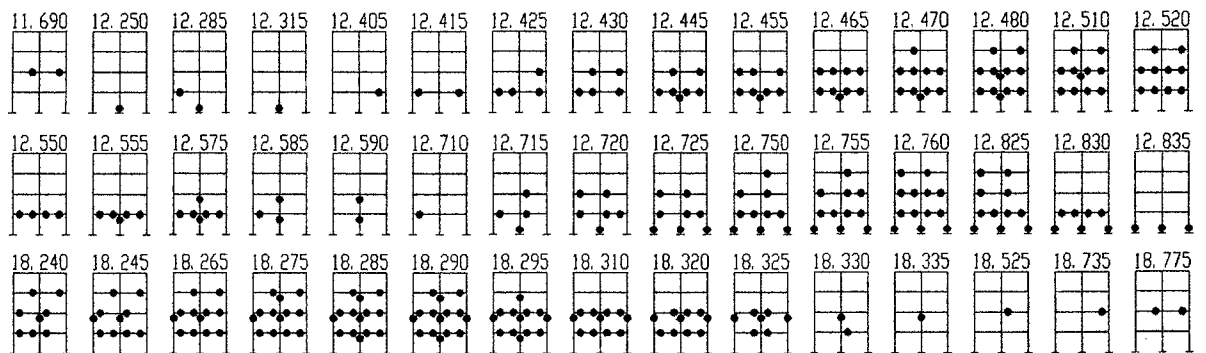
### P870800



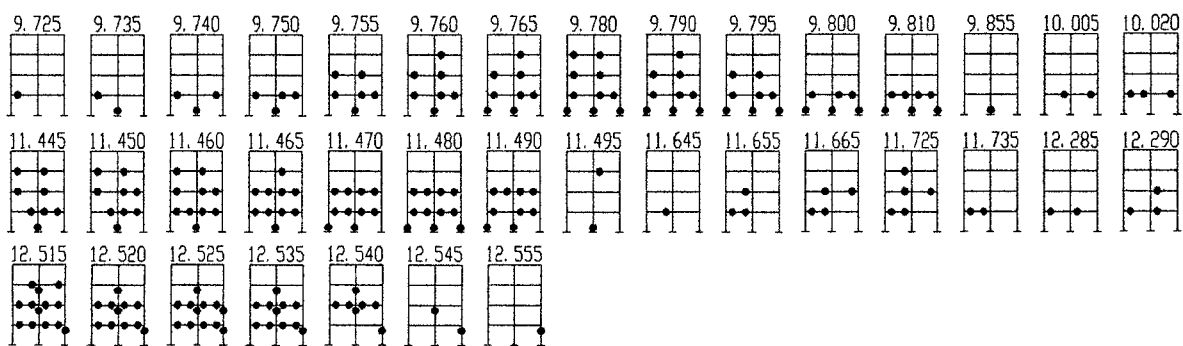
### P874400



### P874600



P874800



# Apéndice N

## Superficies tiempo historia

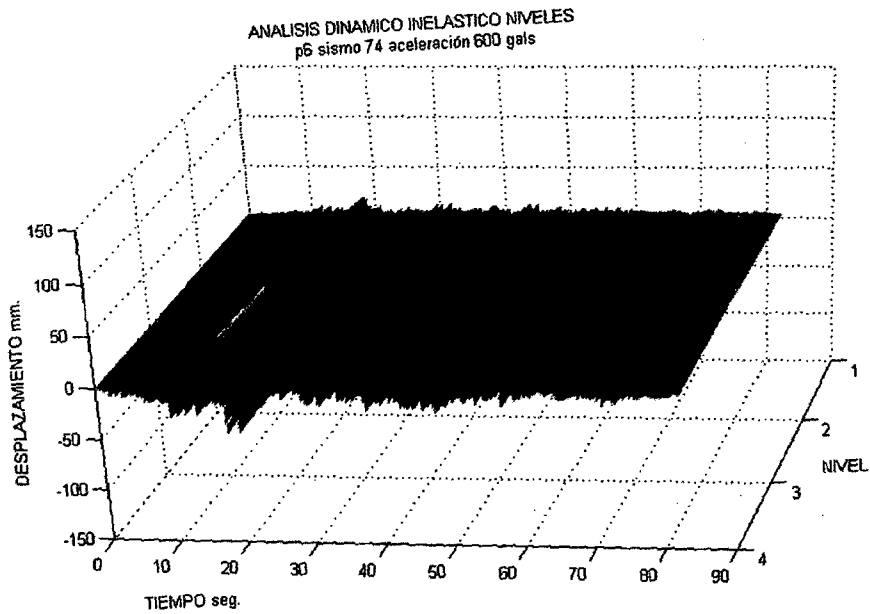


Figura N.1

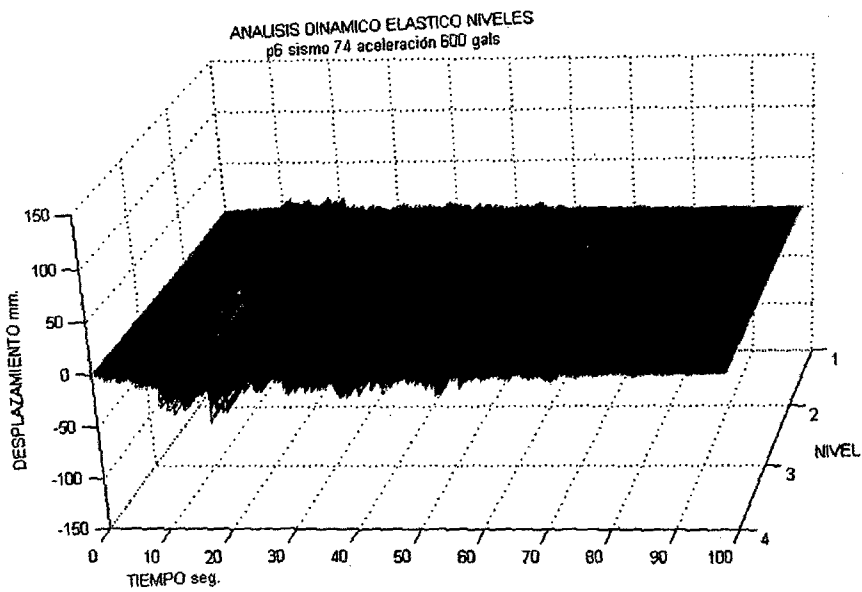


Figura N.2



Las figuras N.1 y N.2, permiten observar el aumento de desplazamiento en cada nivel y un comportamiento diferente de los modelos elástico e inelástico de P6, en el intervalo de tiempo comprendido entre los 10 y 30 segundos.

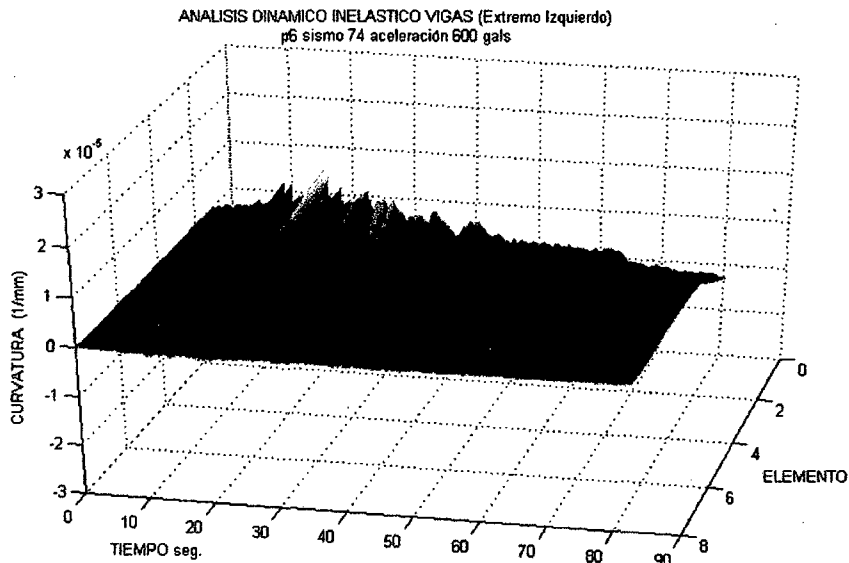


Figura N.3

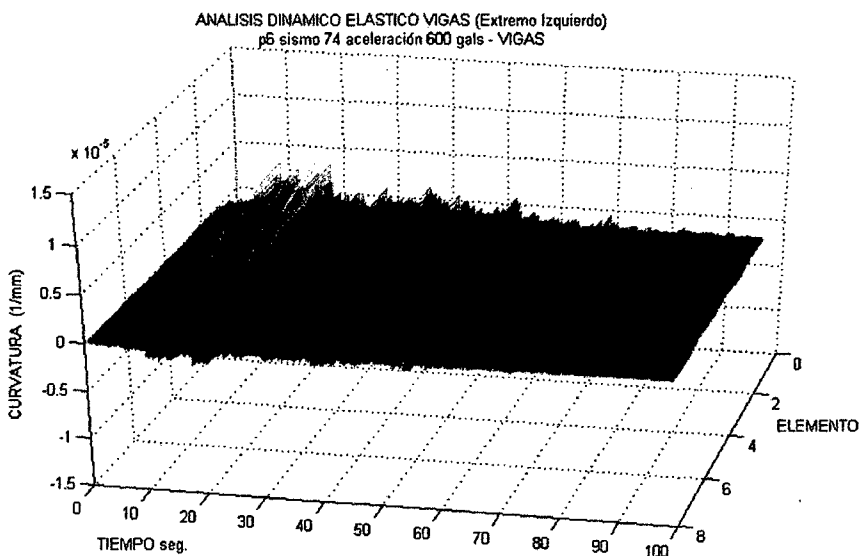


Figura N.4

Las figuras N.3 y N.4, resaltan un comportamiento local diferente del modelo elástico y el modelo inelástico (existen más diferencias que en el comportamiento global).

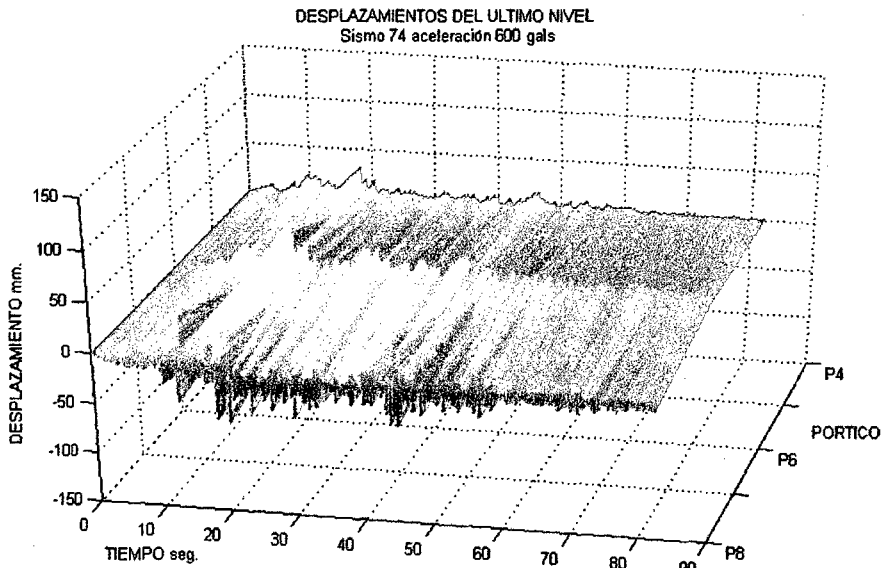


Figura N.5

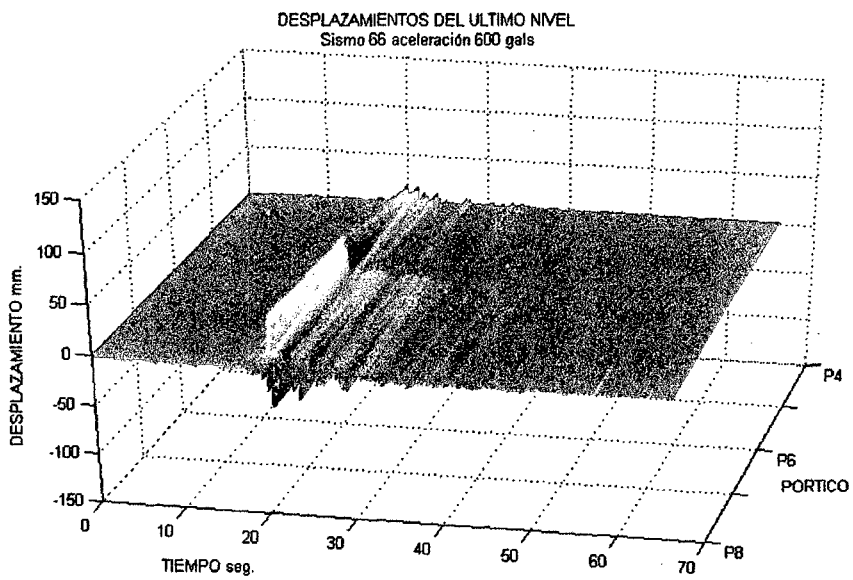


Figura N.6

Las figuras N.5 y N.6, indican que los mayores desplazamientos en los últimos niveles se han producido en p8 (los mayores desplazamientos se alcanzan con el registro sísmico de 1974).