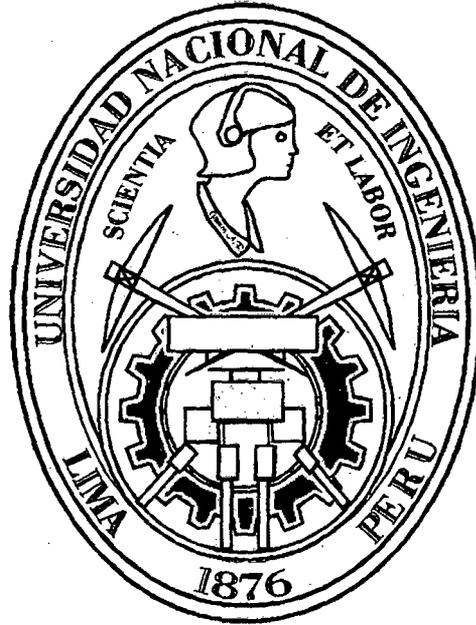


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**  
**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**



**ANALISIS SISMICO DE  
ESTRUCTURAS AXISIMETRICAS**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE  
INGENIERO CIVIL**

**Orlando Zegarra Quesada**

**LIMA - PERU**

**Digitalizado por:**

**2001**

Consortio Digital del  
Conocimiento MebLatam,  
Hemisferio y Dalse

***A la memoria de mi madre***

***Con todo mi amor Ale***

***A mi padre Manuel Ligorio,  
a mis hermanos Lito y Giuliana***

***A mi familia***

***Agradecimiento especial:***

***Al Señor Hugo Scaletti Farina Phd.***

***Asesor de mi Tesis.***

***Al CISMID, por el apoyo brindado.***

## **SUMARIO**

Se presenta una aplicación del método semianalítico que combina técnicas de elementos finitos y series de Fourier para el análisis dinámico y sísmico de estructuras axisimétricas.

# **ANÁLISIS SÍSMICO DE ESTRUCTURAS AXISIMÉTRICAS**

## ÍNDICE

<b>CAPÍTULO I Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1 Generalidades.....	1
<b>CAPÍTULO II El método de los elementos finitos aplicada al análisis de cáscaras axisimétricas .....</b>	<b>5</b>
2.1 Ecuaciones generales de equilibrio en cáscaras axisimétricas .....	5
2.2 Cáscaras de revolución bajo cargas simétricas .....	8
2.2.1 Ecuaciones de equilibrio .....	8
2.2.2 Ecuaciones de deformación para carga simétrica .....	9
2.2.3 Ecuaciones constitutivas.....	10
2.3 Formulación por elementos finitos de estructuras de revolución bajo carga simétrica ..	11
2.4 Matriz de rigidez y de cargas simétricas .....	19
2.5 Aplicación.....	21
2.5.1 Caso de cilindro empotrado con carga radial simétrica en el extremo libre.....	21
2.5.1.1 Deflexiones .....	22
2.5.1.2 Momentos .....	23
2.5.1.3 Modelo por elementos finitos tronco cónico .....	24
2.5.2 Caso de placa circular empotrada bajo carga uniforme .....	28
2.5.2.1 Deflexiones .....	28
2.5.2.2 Momentos .....	28
2.5.2.3 Modelo por elementos finitos tronco cónicos .....	29
<b>CAPÍTULO III Procedimientos semianalíticos .....</b>	<b>32</b>
3.1 Cáscaras de revolución bajo cargas no simétricas .....	32
3.1.1 Ecuaciones de equilibrio .....	32
3.1.2 Ecuaciones de deformación para carga no simétrica .....	33
3.1.3 Ecuaciones constitutivas.....	35
3.2 Formulación por elementos finitos de estructuras bajo carga no simétrica.....	36
3.2.1 Tratamiento de acciones no simétricas con funciones trigonométricas ortogonales.....	39
3.3 Aplicación.....	51
3.3.1 Caso de losa circular empotrada bajo carga asimétrica .....	51
3.3.1.1 Deflexiones .....	51
3.3.1.2 Momentos .....	51
3.3.1.3 Modelo por elementos finitos tronco cónicos .....	52
<b>CAPÍTULO IV Consideraciones para el análisis sísmico .....</b>	<b>56</b>
4.1 Equilibrio dinámico .....	56
4.2 Solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico .....	58
4.2.1 Método de solución paso a paso.....	58
4.2.2 Método de análisis modal .....	59
4.2.3 Solución en el dominio de frecuencias .....	61
4.3 Conveniencia del método de superposición modal .....	61
4.4 Masas y amortiguamiento.....	62
4.5 Análisis de la ecuación de equilibrio sin amortiguamiento.....	64
4.6 Valores y vectores características .....	65
4.7 Métodos de solución para obtención de valores y vectores característicos.....	67

4.7.1 Método de Rayleigh - Ritz.....	67
4.7.1.1 Selección de los vectores de Ritz.....	71
4.7.1.2 Apreciación física de las formas de modo naturales.....	71
4.7.1.3 Vectores de Ritz fuerza dependientes.....	72
4.7.2 Método de iteración inversa.....	73
4.7.3 Método generalizado de Jacobi.....	76
4.7.4 Método de secuencia de Sturm.....	78
4.7.5 Método de iteración en el subespacio.....	79
4.8 Formulación para el análisis sísmico.....	84
4.8.1 Análisis modal espectral.....	88
4.8.1.1 Combinación modal.....	89
<b>CAPÍTULO V Desarrollo de elementos finitos.....</b>	<b>90</b>
5.1 Obtención de la matriz de rigidez.....	90
5.1.1 Expresiones de la matriz B para el cálculo de la matriz de rigidez.....	92
5.1.2 Componentes de la matriz B.....	92
5.1.3 Aplicación de integración numérica.....	98
5.2 Matriz de masas concentradas.....	100
5.3 Desarrollo de programa de cómputo por elementos finitos para análisis sísmico de estructuras axisimétricas.....	104
5.3.1 Fase 1 Lectura e impresión de datos.....	105
5.3.2 Fase 2 Cálculo y ensamblaje de la matriz de rigidez y masas.....	105
5.3.3 Fase 3 Obtención de valores y vectores característicos.....	106
5.3.4 Fase 4 Salida de resultados.....	107
5.4 Listado de programa de cómputo.....	115
<b>CAPÍTULO VI Aplicación al análisis sísmico de chimeneas.....</b>	<b>137</b>
6.1 Proportcionamiento.....	137
6.2 Frecuencias naturales y modos de vibración de un sistema continuo de masa y rigidez flexionante.....	138
6.2.1 Frecuencias naturales.....	139
6.2.2 Modos de vibración.....	140
6.3 Aplicación.....	141
6.3.1 Chimenea de sección hueca uniforme.....	141
6.3.2 Descripción de elementos finitos.....	142
6.3.3 Archivo de entrada y salida para modelo de 11 nudos.....	157
<b>CAPÍTULO VII Conclusiones.....</b>	<b>162</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>163</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 GENERALIDADES

En el campo de aplicación de la ingeniería civil se presentan como solución estructuras laminares axisimétricas que pueden ser analizadas unidimensionalmente si éstas poseen características mecánicas y geométricas constantes en una dirección. La forma intuitiva más sencilla de estudiar las láminas de revolución por elementos finitos es utilizando troncos de cono; con ello, el problema de discretización de la geometría se reduce a su mínima expresión.

La condición de carga-simétrica de revolución permite simplificar notablemente el cálculo, de tal forma que éste se reduce al estudio de la deformación de la línea generatriz. Si las carga no son axisimétricas puede mantenerse el carácter unidimensional del análisis, desarrollando en series trigonométricas los movimientos de la lámina y las cargas en la dirección circunferencial y en las habituales funciones de forma para la dirección ortogonal. Esta técnica reduce considerablemente el esfuerzo computacional y la necesidad de computadores de grandes capacidades.

El objetivo de la Tesis es extender el procedimiento descrito al análisis sísmico de una estructura laminar de revolución o axisimétrica mediante métodos semianalíticos.

La Tesis en el **Segundo Capítulo** previamente presenta las ecuaciones diferenciales de equilibrio para cáscaras axisimétricas bajo cargas en general. Luego, particulariza su estudio a un tipo de carga simétrica estática mostrando y definiendo las ecuaciones diferenciales de equilibrio, de deformación – desplazamientos y relaciones constitutivas.

Es después de haber definido las bases conceptuales cuando se presenta una formulación de elemento finito tronco cónico para estructuras de revolución – cáscaras - cuando las cargas también son simétricas.

Seguidamente se presentan dos ejemplos en los cuales se podrá apreciar comparativamente los resultados para desplazamientos y para momentos obtenidos por el método analítico y a través de un programa de cómputo por elementos finitos desarrollado para éste fin.

En el Tercer Capítulo trata el tema de procedimientos semianalíticos que se aplican cuando las cargas no son simétricas. Para ello, y siguiendo la misma tónica del capítulo anterior, previamente se plantean las ecuaciones diferenciales de equilibrio para cáscaras de revolución bajo carga no simétrica; de esa forma se evidencia la presencia de una componente circunferencial que justifica la aparición de otras coordenadas de deformación adicionales a las que se presentan cuando es carga simétrica. Luego, se hace el desarrollo de las ecuaciones de desplazamiento – deformación y relaciones constitutivas, agrupándolas todas ellas en forma matricial para su posterior formulación por elementos finitos.

Este método plantea la combinación de elementos finitos y funciones trigonométricas para el análisis de estructuras. El procedimiento fue utilizado con éxito para análisis de láminas y sólidos de revolución bajo cargas arbitrarias por Grafton y Strome y Ahmad et. Al<sup>2</sup> y se basa en lo que en matemáticas se denomina aproximación semianalítica de Kantorovich.

La aparición de esta variable circunferencial por carga no simétrica hace que el estudio hecho del elemento finito tronco cónico en el segundo capítulo, en el que los desplazamientos se definen en la dirección radial y meridional, se amplíe a una tercera componente. Con la asociación de la nueva variable con una función ortogonal es que se hace la aplicación del método semianalítico.

La aplicación de series de Fourier para el tratamiento de las cargas no simétricas implica el desarrollo de los diferentes  $m$  términos armónicos de la serie, siendo cada uno de ellos la contribución relativa para cada valor individual de  $m$ . Pero es debido a la propiedad de ortogonalidad de las funciones trigonométricas que se generan  $m$  sistemas de ecuaciones desacoplados o separados. Esto permite que si el desarrollo de los términos de carga sólo contiene un término, sólo sea necesario resolver un único sistema de ecuaciones. De este razonamiento es que se puede considerar al sismo como el tipo de fuerza excitadora de un sólo término que actúa en la base.

Se presentan ejemplos de aplicación en los que se demuestra la efectividad del método semianalítico utilizado a través de un programa de cómputo para la obtención de las deformaciones y esfuerzos resultantes, comparándolos con soluciones analíticas en forma gráfica y cuantitativa.

Hasta aquí ya se ha hecho un análisis estático de la estructura de revolución ya sea bajo carga simétrica o no simétrica, pero es con la ecuación de la matriz de rigidez de esta última condición de carga que llevamos al análisis dinámico la aplicación del método semianalítico una vez comprobada su efectividad.

El **Cuarto Capítulo** trata de las consideraciones para el análisis dinámico. Se analiza la ecuación de equilibrio dinámico con las definiciones de masa y amortiguamiento. Seguidamente presenta las alternativas de solución. Para el rango elástico el análisis modal es el más apropiado y es el que se utiliza en la Tesis.

Para el cálculo de los valores y vectores característicos naturales del sistema se utiliza el método de iteración en el subespacio que supone la aplicación estratégica y combinada de métodos como iteración inversa, vectores de Ritz, de Jacobi que en conjunto hacen de iteración en el subespacio una herramienta eficiente, sobretodo para solución de grandes

sistema de ecuaciones. Se hace una explicación detallada de los algoritmos para cada uno de estos métodos aplicados.

Definida entonces la estrategia para la obtención de los valores y vectores propios se presenta como solución de la ecuación de movimiento debido a un sismo una formulación por análisis modal espectral. Se define la dirección de movimiento y componentes de desplazamiento para la estructura como cuerpo rígido para el cálculo del factor de participación modal.

En el **Quinto Capítulo** se hace el desarrollo por Elementos Finitos. Se presenta el procedimiento seguido para la determinación de las componentes de la matriz rigidez, de masas y de fuerzas concentradas. Además, se presentan diagramas de flujo del programa principal pero dando énfasis a la subrutinas correspondientes de ensamble para la matriz de rigidez. Adicionalmente se presenta el listado del programa de cómputo principal.

En el **Sexto Capítulo** se realiza la aplicación del método presentado con el programa de cómputo para análisis sísmico de estructuras axisimétricas, para el caso de chimeneas. Se realizan cálculos comparativos con otros procedimientos de los valores característicos y formas de modo así como la obtención de los desplazamientos, cortantes basales y cálculo de las fuerzas internas por análisis modal espectral.

Finalmente,

En el **Sétimo Capítulo** se dan las conclusiones y recomendaciones del trabajo presentado.

## CAPÍTULO II

# EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AL ANÁLISIS DE CÁSCARAS AXISIMÉTRICAS

### 2.1 ECUACIONES GENERALES DE EQUILIBRIO EN CÁSCARAS AXISIMÉTRICAS

Una cáscara con forma de superficie de revolución viene engendrada por el giro de una curva llamada generatriz en torno a un eje situado en el plano de la curva que lo contiene denominada meridiano. Además de ello también está su espesor y las condiciones de sustentación sobre el contorno de la superficie media (borde de lámina). La figura 2.1 a muestra la ubicación de un punto de la superficie de revolución en función de las coordenadas  $\theta, \phi, r$  y el elemento de superficie ABCD que está definida por dos meridianos y dos círculos paralelos.

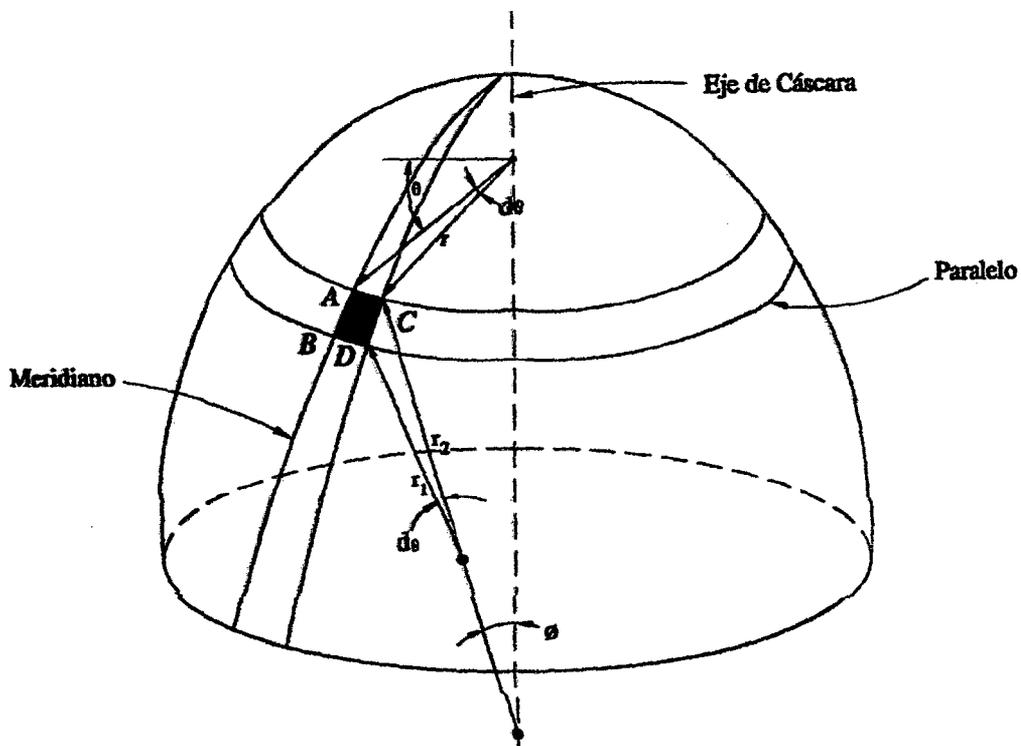


Figura 2.1 a

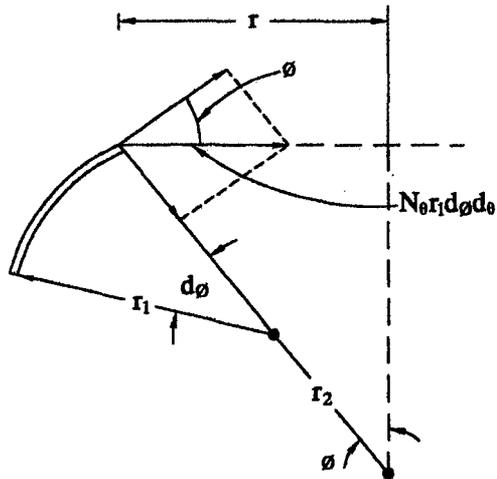


Figura 2.1 b

Si el elemento diferencial de lámina de revolución es sometido a cargas simétricas y no simétricas, éste presenta un conjunto de esfuerzos internos tal como se aprecia en la figura contigua.

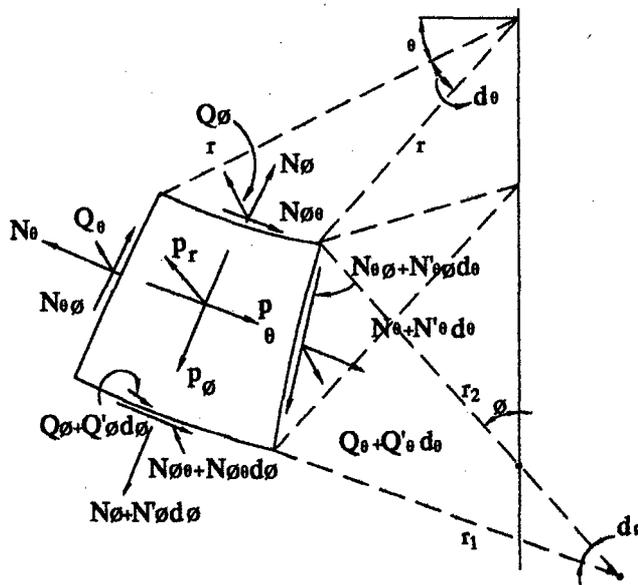


Figura 2.2 a

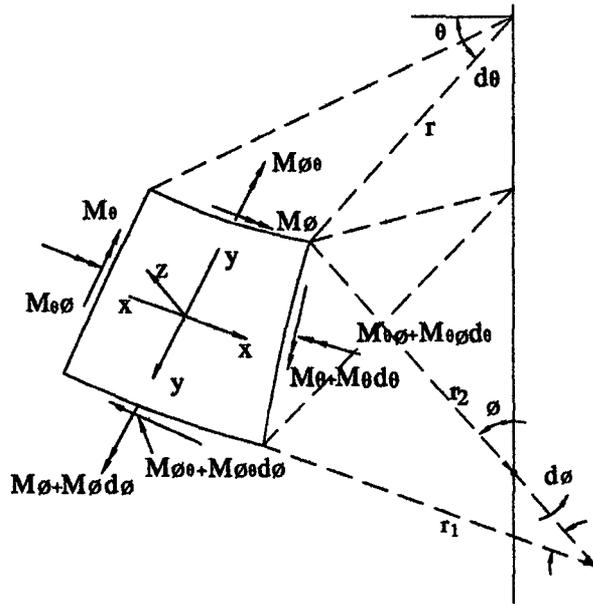


Figura 2.2 b

Teniéndose las siguientes ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de este tipo de estructuras 4:

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rN_{\phi}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} N_{\phi\theta} - r_1 N_{\theta} \cos \phi - rQ_{\phi} = -rr_1 p_{\phi} \quad 2.01$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rN_{\phi\theta}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} N_{\theta} + r_1 N_{\phi\theta} \cos \phi - r_1 Q_{\theta} \sin \phi = -rr_1 p_{\theta} \quad 2.02$$

$$r_1 N_{\theta} \sin \phi + rN_{\phi} + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} Q_{\theta} + \frac{\partial}{\partial \phi}(rQ_{\phi}) = rr_1 p_r \quad 2.03$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rM_{\phi}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\phi\theta} - r_1 M_{\theta} \cos \phi = rr_1 Q_{\phi} \quad 2.04$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rM_{\phi\theta}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta\phi} - r_1 M_{\theta} \cos \phi = rr_1 Q_{\theta} \quad 2.05$$

$$\frac{M_{\phi\theta}}{r_1} - \frac{M_{\theta\phi}}{r_2} = N_{\phi\theta} - N_{\theta\phi} \quad 2.06$$

Donde:

$N_\phi$	Resultante de la tensión axial por unidad de longitud en el meridiano.
$N_\theta$	Resultante de la tensión axial por unidad de longitud en el paralelo.
$N_{\phi\theta}, N_{\theta\phi}$	Resultante de la fuerza de corte por unidad de longitud.
$Q_\theta, Q_\phi$	Resultante de la fuerza transversal por unidad de longitud.
$M_\phi$	Momento flector meridional por unidad de longitud.
$M_\theta$	Momento flector en el paralelo por unidad de longitud
$M_{\phi\theta}, M_{\theta\phi}$	Momento torsor en el meridiano y paralelo por unidad de longitud.
$r_1, r_2$	Radios principales de curvatura de una lámina en forma de superficie de revolución en un plano meridiano y en el plano normal perpendicular al meridiano respectivamente.
$r, \theta$	Coordenadas polares.

## 2.2 CÁSCARAS DE REVOLUCIÓN BAJO CARGAS SIMÉTRICAS

### 2.2.1 Ecuaciones de Equilibrio

Cuando el sistema de cargas al igual que la cáscara tienen simetría axial las ecuaciones precedentes se reducen considerablemente. Todos los términos con derivadas respecto al ángulo  $\theta$ , las fuerzas de corte  $N_{\phi\theta}$ ,  $N_{\theta\phi}$ , los momentos de torsión  $M_{\phi\theta}$ ,  $M_{\theta\phi}$ , la componente  $p_\theta$  y el corte transversal  $Q_\theta$ , excepto  $Q_\phi$ , se eliminan dando como resultado las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rN_\phi) - r_1 N_\theta \cos \phi - rQ_\phi = -rr_1 p_\phi \quad 2.07$$

$$r_1 N_\theta \sin \phi + r N_\phi + \frac{\partial}{\partial \phi} (r Q_\phi) = r r_1 p_r \quad 2.08$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (r M_\phi) - r_1 M_\theta \cos \phi = r r_1 Q_\phi \quad 2.09$$

### 2.2.2 Ecuaciones de Deformación para Carga Axisimétrica

En el caso de deformación axisimétrica de una lámina, un desplazamiento elemental de un punto puede descomponerse en dos componentes:  $u$  en la dirección de la tangente al meridiano y  $w$  en la dirección normal a la superficie media.

Según lo anterior las expresiones de la deformación de una cáscara de revolución por carga axial simétrica queda definida como <sup>3</sup> :

Para deformación meridional:

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{r_1} \frac{du}{d\phi} - \frac{w}{r_1} \quad 2.10$$

Para deformación circunferencial:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r_2} \cot \phi - \frac{w}{r_2} \quad 2.11$$

Para la curvatura del meridiano:

$$\chi_\phi = \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \quad 2.12$$

Para la curvatura del paralelo:

$$\chi_{\theta} = \left( \frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \frac{\cos \phi}{r} \quad 2.13$$

### 2.2.3 Ecuaciones Constitutivas para Cáscaras

De las relaciones de deformación presentadas y por la Ley de Hooke establecemos las siguientes ecuaciones constitutivas para la obtención de las fuerzas internas resultantes de una cáscara de revolución bajo carga simétrica <sup>9</sup>:

$$N_{\phi} = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\phi} + \nu \varepsilon_{\theta}) \quad 2.14$$

$$N_{\theta} = \frac{Et}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{\phi} + \varepsilon_{\theta}) \quad 2.15$$

$$M_{\phi} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_{\phi} + \nu \chi_{\theta}) \quad 2.16$$

$$M_{\theta} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\nu \chi_{\phi} + \chi_{\theta}) \quad 2.17$$

Donde la rigidez a la flexión está dada por la expresión:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad 2.18$$

## 2.3 Formulación por Elementos Finitos de Estructuras de Revolución bajo Carga Simétrica

La geometría de una cáscara axisimétrica puede ser representada por una serie de troncos de cono tal como se representa en la figura 2.3 a.

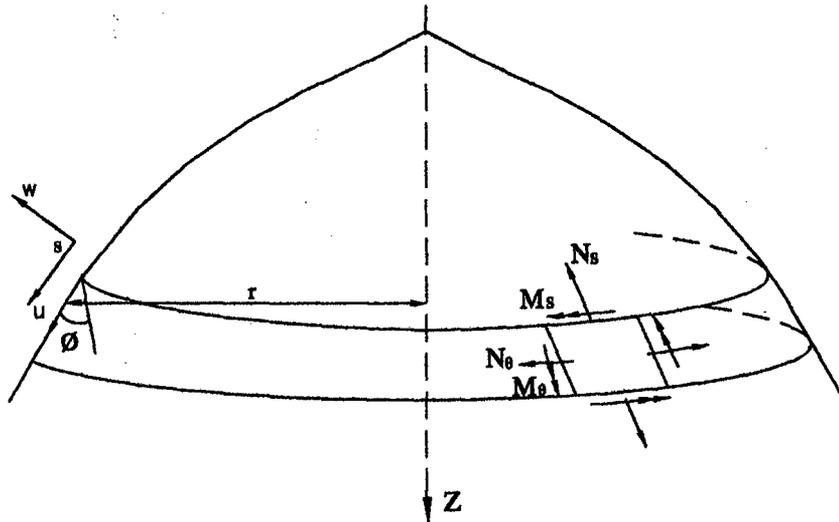
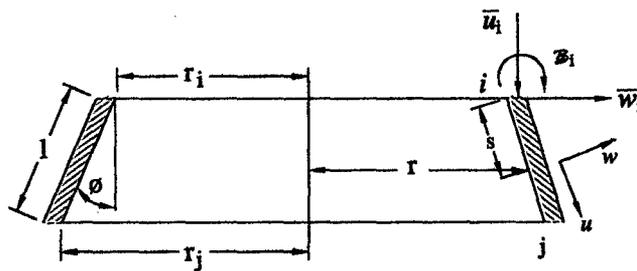


Lámina de revolución bajo carga simétrica.  
Componentes de tensiones y desplazamientos resultantes.

Figura 2.3 a



Elemento tronco cónico de lámina de revolución.

Figura 2.3 b

Los desplazamientos de un punto de la superficie media están definidos por dos componentes  $u$  y  $w$  en la dirección tangencial y normal respectivamente. De las ecuaciones de deformación arriba presentadas y tomando en cuenta la figura 2.3 b, estas se simplifican y representan matricialmente como <sup>5</sup>:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ (w \cos \phi + u \sin \phi) / r \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ -\frac{\partial w \sin \phi}{\partial s} / r \end{Bmatrix} \quad 2.19$$

De esta última relación, asociada con una matriz de elasticidad  $\mathbf{D}$  por aplicación de Ley de Hooke para materiales de comportamiento lineal obtenemos las resultantes de las tensiones internas representada en la figura 2.3 a.

$$\sigma = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\varepsilon \quad 2.20$$

Siendo la matriz  $\mathbf{D}$  de elasticidad para una lámina isótropa:

$$\mathbf{D} = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & | & 0 & 0 \\ \nu & 1 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & t^2/12 & \nu t^2/12 \\ 0 & 0 & | & \nu t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix} \quad 2.21$$

En la parte superior izquierda se tiene una submatriz de rigidez para tensión plana y en la inferior derecha una submatriz de rigidez para flexión; se ha prescindido en ambas de los términos debidos al esfuerzo cortante.

Las deformaciones del elemento deben estar definidas sólo por los desplazamientos nodales  $i, j$ , donde cada nudo tendrá tres componentes de desplazamientos: el correspondiente al movimiento axial, radial y rotacional.

Para un nudo  $i$  tenemos:

$$\underline{\tilde{a}}_i = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad 2.22$$

Entonces para un elemento  $e$  definido por 2 nodos  $i, j$  esta se define como:

$$\underline{\tilde{a}}^e = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{a}}_i \\ \underline{\tilde{a}}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{w}_i \\ \beta_i \\ - \\ \tilde{u}_j \\ \tilde{w}_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad 2.23$$

Dentro de cada elemento, los movimientos interiores o locales de cada punto pueden expresarse por una interpolación de sus valores nodales con funciones de forma unidimensionales como sigue:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{\tilde{a}}^e \quad 2.24$$

Para la evaluación de  $u$  y  $w$  en los nodos  $i, j$  en función de las componentes de la matriz  $\alpha^e$  que están, a excepción de los giros  $\beta$  referidos al sistema de referencia global se utiliza una matriz de transformación que para el caso de los nudo  $i$  y  $j$  se expresa como:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i \\ u_j \\ w_j \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{w}_i \\ \beta_i \\ \tilde{u}_j \\ \tilde{w}_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad 2.25$$

Para definir completamente la evaluación de  $u$  y  $w$  esta vez en función de  $N$ , es necesario aproximar estos desplazamientos locales mediante funciones polinómicas:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 S \quad 2.26$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 S + \alpha_5 S^2 + \alpha_6 S^3 \quad 2.27$$

Donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6$  son constantes que dependen únicamente de los valores de desplazamientos  $u$  y  $w$  que determinados y reemplazados en la ecuación anterior se convierten en:

$$u = \left(1 - \frac{s}{l}\right) u_i + \frac{s}{l} u_j \quad 2.28$$

$$w = \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right)w_i + l\left(\frac{s}{l} - 2\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right)\left(\frac{dw}{ds}\right)_i$$

2.29

$$+ \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right)w_j + \left(-\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right)l\left(\frac{dw}{du}\right)_j$$

Siendo las expresiones:

$$N_1 = \left(1 - \frac{s}{l}\right) \quad 2.30 \text{ a}$$

$$N_2 = \frac{s}{l} \quad 2.30 \text{ b}$$

$$N_3 = \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) \quad 2.30 \text{ c}$$

$$N_4 = \left(\frac{s}{l} - 2\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) \quad 2.30 \text{ d}$$

$$N_5 = \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) \quad 2.30 \text{ e}$$

$$N_6 = \left(-\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right)l \quad 2.30 \text{ f}$$

Las funciones de interpolación polinómica denominadas funciones de forma. La función de forma interpola dentro del elemento únicamente al nudo  $i$  y  $j$  por ello se denomina función de forma del nudo.

Las ecuaciones 2.28 , 2.29 y considerando las 2.30 a-f se pueden representar así:

$$u = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad 2.31$$

$$w = [N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \begin{bmatrix} w_i \\ \beta_i \\ w_j \\ \beta_j \end{bmatrix} \quad 2.32$$

Y a su vez agrupando sus desplazamientos como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i \\ u_j \\ w_j \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_j \end{Bmatrix} \quad 2.33$$

reemplazando la ecuación 2.26 en 2.33 tenemos:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} cx & cy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -cy & cx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cx & cy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -cy & cx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{w}_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad 2.34$$

Representando esquemáticamente la ecuación precedente:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_i & \tilde{N}_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \end{Bmatrix} \quad 2.35$$

Y operando parcialmente dos de sus componentes obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \{N_i \quad N_j\} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \end{Bmatrix} = \tilde{N} a^e \quad 2.36$$

De la ecuación de deformaciones observamos que descomponiendo esta relación matricial obtenemos:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ (w \cos \phi + u \operatorname{sen} \phi)/r \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ -\frac{\operatorname{sen} \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ \frac{\operatorname{sen} \phi}{r} & \frac{\cos \phi}{r} \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \\ 0 & -\frac{\operatorname{sen} \phi}{r} \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad 2.37$$

Aplicando la ecuación 2.33 en la precedente obtenemos:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ \frac{\operatorname{sen} \phi}{r} & \frac{\cos \phi}{r} \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \\ 0 & -\frac{\operatorname{sen} \phi}{r} \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i \\ u_j \\ w_j \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_j \end{Bmatrix} \quad 2.38$$

Siendo el producto de los dos primeros miembros de la derecha la matriz de deformación

$B'$ :

$$\underline{\underline{B}}' = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & 0 \\ N_1 \text{sen}\phi & N_3 \cos\phi & N_4 \cos\phi & N_2 \text{sen}\phi & N_5 \cos\phi & N_6 \cos\phi \\ r & r & r & r & r & r \\ 0 & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial s^2} & -\frac{\partial^2 N_4}{\partial s^2} & 0 & -\frac{\partial^2 N_5}{\partial s^2} & -\frac{\partial^2 N_6}{\partial s^2} \\ 0 & -\frac{\text{sen}\phi \partial N_3}{r \partial s} & -\frac{\text{sen}\phi \partial N_4}{r \partial s} & 0 & -\frac{\text{sen}\phi \partial N_5}{r \partial s} & -\frac{\text{sen}\phi \partial N_6}{r \partial s} \end{Bmatrix} \quad 2.39$$

Esta última relación bien puede representarse así:

$$\underline{\underline{B}}' = \{ \underline{\underline{B}}'_i \mid \underline{\underline{B}}'_j \} \quad 2.40$$

Luego, en la ecuación de deformaciones representando simplificada en forma matricial y aplicando la transformación a coordenadas globales obtenemos:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \{ \underline{\underline{B}}'_i \mid \underline{\underline{B}}'_j \} \begin{Bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \end{Bmatrix} = \{ \underline{\underline{B}}'_i \lambda \mid \underline{\underline{B}}'_j \lambda \} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \end{Bmatrix} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{a}}^e \quad 2.41$$

## 2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE CARGAS SIMÉTRICAS

Para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento se utiliza la siguiente relación obtenida por el Principio de Trabajos Virtuales:

$$\underline{\underline{k}}^{(e)} = \int_A \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dA \quad 2.42$$

Como la integración deberá hacerse sobre el área del elemento:

$$dA = 2\pi r ds = 2\pi r l ds' \quad 2.43$$

Donde  $s' = s/l$  ; Para  $0 \leq s' \leq 1$

Finalmente la matriz de rigidez del elemento K se obtiene por:

$$\{k\}^{(e)} = 2\pi l \int_0^l \{B\}^T \{D\} \{B\} r ds' \quad 2.44$$

Ciertamente, el radio r debe ser expresado como una función de s antes de la integración de la ecuación precedente.

Para las fuerzas nodales equivalentes en ejes globales y por el Principio de Trabajos Virtuales se utilizará:

$$\tilde{f}_i^{(e)} = 2\pi \int_{l^{(e)}} N_i^T \tilde{b}^{(e)} tr ds + 2\pi \int_{l^{(e)}} N_i^T \tilde{g}^{(e)} tr ds + 2\pi r_i P_i^{(e)} \quad 2.45$$

Siendo:

$\tilde{N}_i$  La matriz de funciones de forma del elemento

$\tilde{b}^{(e)} = \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \\ b_\theta \end{Bmatrix}$  Las fuerzas másicas (por unidad de volumen)

$\tilde{g}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}_r \\ g_z \\ g_\theta \end{Bmatrix}$  Las fuerzas repartidas de superficie y

$\tilde{P}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} P_{r_i} \\ P_{z_i} \\ M_i \end{Bmatrix}$  Las fuerzas puntuales.

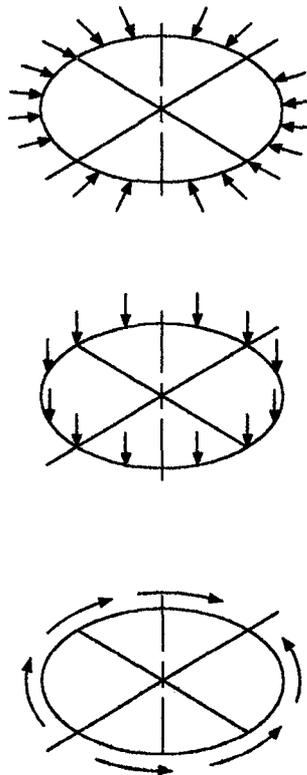
Todas estas fuerzas presentan simetría de revolución y corresponden a fuerzas por unidad de circunferencia. Ver figura 2.4.

La matriz de rigidez y de fuerzas se relacionan a través de la siguiente relación fuerza - desplazamiento obtenida por el Principio de Trabajos Virtuales:

$$\tilde{K} \tilde{a} - \tilde{f} = 0 \quad 2.46$$

Esta expresión representa fundamentalmente un sistema lineal de ecuaciones que significará la implementación de rutinas de ensamble y de solución numérica como el método de perfil y eliminación gaussiana respectivamente.

Definidos los valores de desplazamiento, el paso final para la obtención de los esfuerzos se da con la aplicación de los mismos en las ecuaciones constitutivas ya definidas.



**Cargas y componentes de los desplazamientos de un cuerpo de revolución simétricas.**

**Figura 2.4**

## 2.5 APLICACIÓN

### 2.5.1 Caso de Cilindro Empotrado con carga radial simétrica en el extremo libre.

Este caso, originalmente resuelto por y Grafton y Strome y Ahmad et. Al<sup>2</sup>, corresponde a un tubo cuyo extremo se pretende ensanchar.

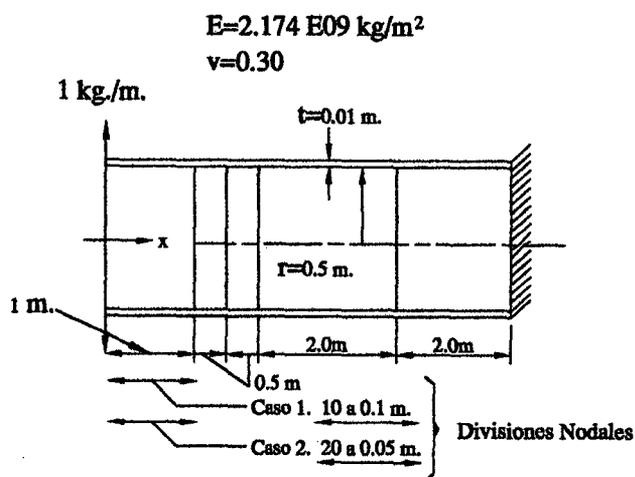


Figura 2.5

#### 2.5.1.1 Deflexiones.

Para la obtención de las deflexiones se utiliza la solución general:

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \text{sen} \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \text{sen} \beta x) + f(x) \quad 2.47$$

Debido a que no hay presión uniformemente repartida  $f(x)=0$  y puesto que los esfuerzos aplicados en el extremo  $x=0$  producen flexión local que se anula rápidamente en cuanto aumenta la distancia  $x$  al extremo cargado, se deduce que el primer término del segundo

miembro de la ecuación anterior ha de ser nulo. Por lo tanto  $C_1 = C_2 = 0$ . y la ecuación queda así:

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} (-Q_0 \cos \beta x) \quad 2.48$$

Donde:

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \quad 2.49$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad 2.50$$

Siendo  $t$  el espesor de la placa,  $E$  el módulo de Young,  $Q$  la carga radial,  $\nu$  módulo de poisson y  $a$  el radio.

### 2.5.1.2 Momentos

Aquí el término  $x$  es el radio medido del eje axial a la superficie media de la cáscara

En el Meridiano

$$M_s = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad 2.51$$

$$M_s = \frac{e^{\beta x} Q \sin \beta x}{\beta D} \quad 2.52$$

**En el paralelo**

$$M_{\theta} = \nu M_s \quad 2.53$$

### **2.5.1.3 Modelo por Elementos Finitos Tronco Cónicos.**

Para el caso de cilindro empotrado con carga radial en el extremo libre se ha predeterminado un esquema de discretización de 15 nudos para subsecuentemente utilizar otro modelo más refinado de 25 nudos y probar si existe convergencia con la solución analítica.

La distribución espacial de los elementos hace hincapié en una discretización más tupida en la vecindad al extremo libre del cilindro, donde se aplica la carga. La figura 2.5 presenta un cilindro dividido principalmente en 5 partes, una de las cuales - la que se ubica al extremo libre en un espacio de 1 m. - está subdividida en 10 y 20 elementos originando dos esquemas diferentes de 14 y 24 elementos (15 nudos y 25 nudos respectivamente).

Del resultado en la aplicación se puede observar en las tablas que si existe convergencia con la solución analítica en la aproximación a 25 nudos tanto en las deflexiones como los momentos en el meridiano.

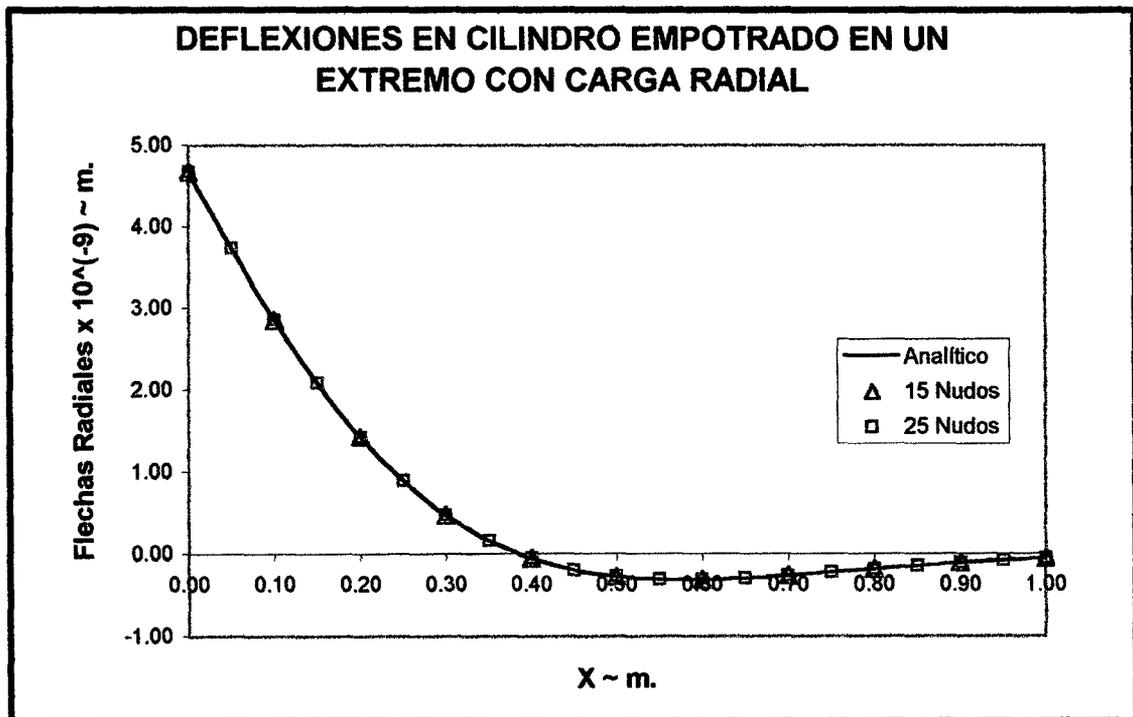
En los gráficos de deflexiones y de momentos que se presentan, la curva perteneciente al método analítico en ambos casos muestra una variación abrupta de su tendencia geométrica en los primeros 0.80 m. del tramo de 1 m. medidos a partir del extremo libre del cilindro donde se aplica la carga radial. Para tramos mayores a 1 m. la curva presenta una variación más suave lo que sugiere la creación de elementos con longitudes más grandes. Este detalle proporciona una prueba crítica para cualquier representación por elementos finitos.

Para aplicación de elementos finitos este detalle observado se aprovecho con una mayor distribución de elementos en el tramo de interés primero con un modelo de 15 nudos y luego refinado con el de 25 nudos para así describir mucho mejor estas variaciones en las deflexiones y esfuerzos resultantes en el meridiano.

De lo expuesto se puede comentar que es posible llegar a una eficiente esquema de discretización por elementos finitos para una cáscara de revolución considerando la intensificación de esfuerzos en la vecindad de una carga concentrada. Se observa que una distribución de elementos tupida reacciona sensiblemente.

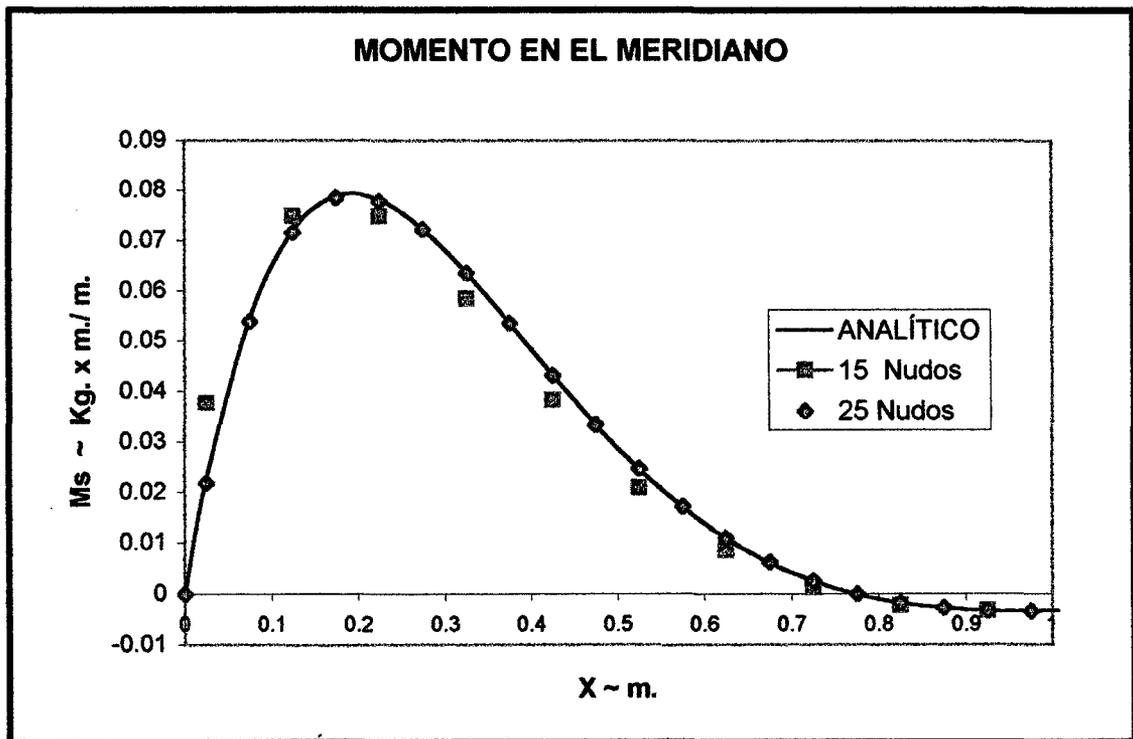
Cuadro comparativo de resultados de las Deflexiones.

X (m.)	Deflexiones (m.)			% Error Relativo	
	Analítico x1.E-9	MEF		15 nudos	25 nudos
		15 nudos x1.E-9	25 nudos x1.E-9		
1.00	-0.048412	-0.048298	-0.048295	0.236	0.242
0.95	-0.073932		-0.073705		0.307
0.90	-0.104767	-0.104250	-0.104460	0.493	0.293
0.85	-0.140460		-0.140090		0.263
0.80	-0.179835	-0.178860	-0.179420	0.542	0.231
0.75	-0.220752		-0.220290		0.209
0.70	-0.259843	-0.258320	-0.259340	0.586	0.194
0.65	-0.292235		-0.291680		0.190
0.60	-0.311289	-0.309190	-0.310690	0.674	0.192
0.55	-0.308386		-0.307750		0.206
0.50	-0.272808	-0.270310	-0.272140	0.916	0.245
0.45	-0.191771		-0.191110		0.345
0.40	-0.050677	-0.048291	-0.050052	4.708	1.233
0.35	0.166309		0.166840		-0.319
0.30	0.475283	0.476610	0.475660	-0.279	-0.079
0.25	0.891101		0.891240		-0.016
0.20	1.425254	1.424200	1.425100	0.074	0.011
0.15	2.083016		2.082400		0.030
0.10	2.859793	2.854800	2.858700	0.175	0.038
0.05	3.736641		3.735000		0.044
0.00	4.674980	4.664900	4.672700	0.216	0.049



**Cuadro comparativo de resultados de los Momentos**

Elem.	X (m.)	Xm (m.)	M s ( Kg. x m. / m. )			% Error Relativo	
			Analítico	M E F		15 Nudos	25 Nudos
				15 Nudos	25 Nudos		
20	1.00	0.975	-0.003423		-0.003436		-0.377
19	0.95	0.925	-0.003321	-0.003357	-0.003321	-1.098	0.007
18	0.90	0.875	-0.002831		-0.002818		0.460
17	0.85	0.825	-0.001809	-0.002280	-0.001784	-26.054	1.378
16	0.80	0.775	-0.000091		-0.000055		39.144
15	0.75	0.725	0.002497	0.001256	0.002542	49.709	-1.775
14	0.70	0.675	0.006131		0.006182		-0.824
13	0.65	0.625	0.010967	0.008594	0.011020	21.640	-0.482
12	0.60	0.575	0.017118		0.017168		-0.293
11	0.55	0.525	0.024620	0.020873	0.024661	15.221	-0.165
10	0.50	0.475	0.033393		0.033416		-0.068
9	0.45	0.425	0.043186	0.038208	0.043180	11.526	0.013
8	0.40	0.375	0.053517		0.053471		0.086
7	0.35	0.325	0.063613	0.058347	0.063510	8.277	0.161
6	0.30	0.275	0.072331		0.072157		0.241
5	0.25	0.225	0.078101	0.074816	0.077837	4.206	0.338
4	0.20	0.175	0.078857		0.078486		0.471
3	0.15	0.125	0.072010	0.074827	0.071515	-3.912	0.688
2	0.10	0.075	0.054439		0.053808		1.160
1	0.05	0.025	0.022545	0.037707	0.021770	-67.249	3.440



## 2.5.2 Caso de placa circular empotrada bajo carga uniforme.

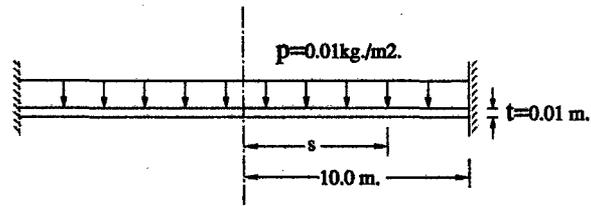


Figura 2.6

### 2.5.2.1 Deflexiones.

Para el caso de placa circular empotrada bajo carga uniforme la solución general es:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{P_o r^4}{64D} \quad 2.54$$

Siendo los valores de c. constantes de integración.

El cálculo de las deflexiones se obtiene con la siguiente expresión:

$$w = \frac{P_o}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad 2.55$$

### 2.5.2.2 Momentos.

En el meridiano

$$M_r = \frac{P_o}{16} [(1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)r^2] \quad 2.56$$

**En el paralelo**

$$M_{\theta} = \frac{P_0}{16} [(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] \quad 2.57$$

### **2.5.2.3 Modelo por Elementos Finitos Tronco Cónicos.**

Siendo la placa circular empotrada una estructura plana, los elementos tronco cónicos son en este caso subregiones anulares.

Para el caso de placa circular empotrada bajo carga uniforme se ha utilizado un esquema de discretización de 17 nudos. Las coordenadas de los nudos se han determinado con la consideración de una altura  $z = 0$  y un radio variable de 0 a 10 m distribuida en 16 elementos.

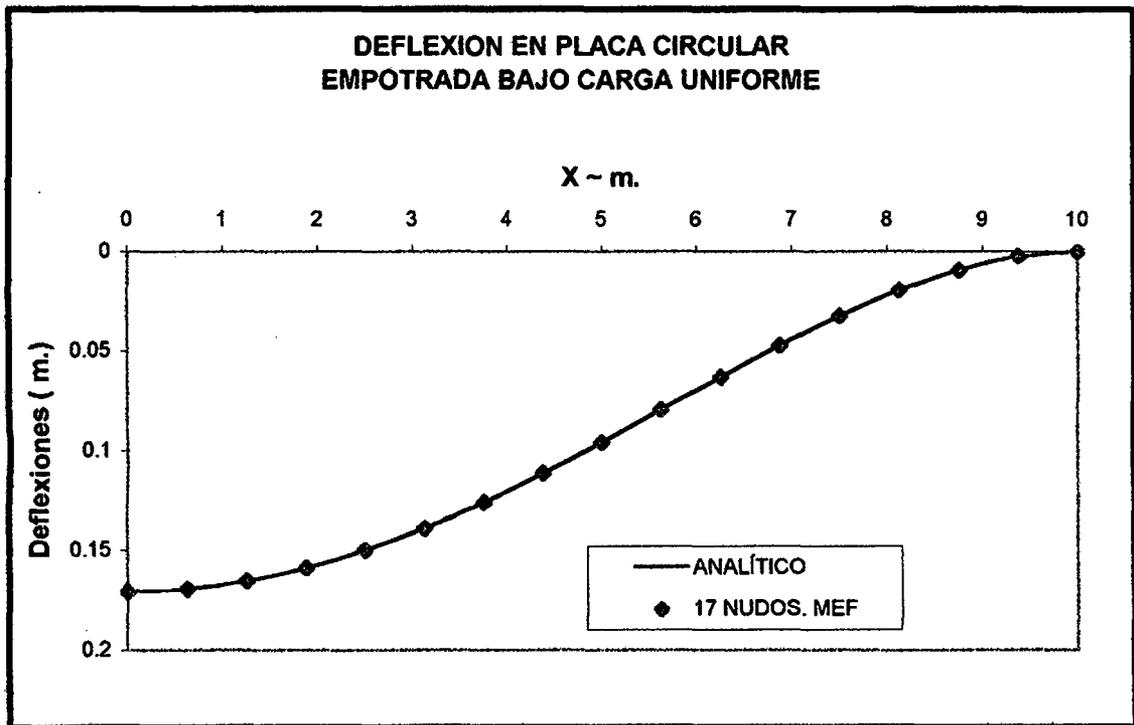
La malla de 16 elementos está proporcionalmente dividida en todo el radio de la placa circular por la misma razón de estar la fuerza aplicada uniformemente repartida. No se analiza todo el diámetro de la estructura por ser ésta y la carga simétrica.

Se puede observar en la tabla de deflexiones que los resultados de la aplicación con 17 nudos prácticamente son los mismos con los obtenidos mediante solución analítica. Se estima un porcentaje de error del 0.0022 %. Asimismo, los momentos meridionales en el centro de cada elemento aproximan con bastante precisión los valores exactos.

Los gráficos de deflexiones y de momentos no presentan variaciones abruptas en tramos pequeños y predeterminados por la subdivisión. Más bien ésta presenta variaciones suaves entre todo el conjunto de discretizaciones hecha.

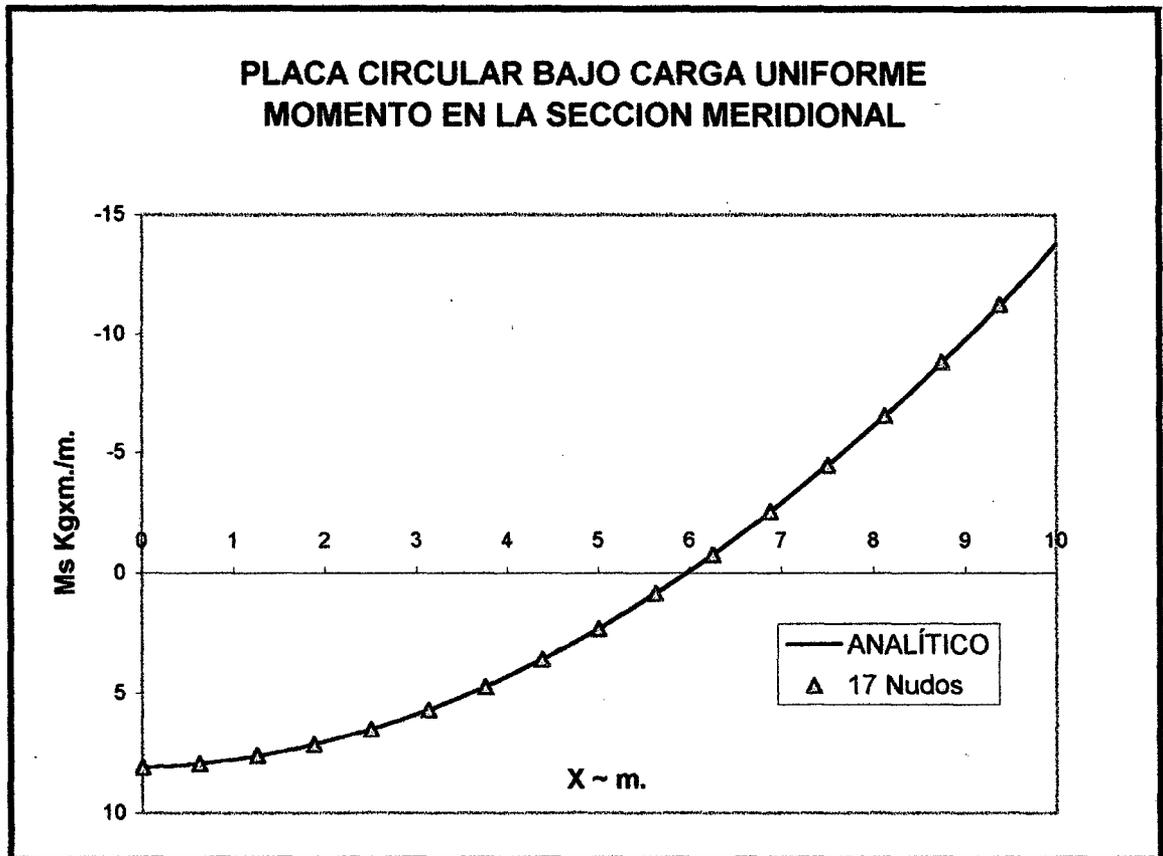
Cuadro comparativo de resultados de las Deflexiones

Nudo	X (m.)	Deflexiones (m.)		% Error Relativo
		Analítico	MEF 17 Nudos	
1	0.000	0.170625	0.170620	0.003
2	0.625	0.169295	0.169290	0.003
3	1.250	0.165335	0.165330	0.003
4	1.875	0.158839	0.158830	0.006
5	2.500	0.149963	0.149960	0.002
6	3.125	0.138927	0.138920	0.005
7	3.750	0.126011	0.126010	0.001
8	4.375	0.111559	0.111560	-0.001
9	5.000	0.095977	0.095975	0.002
10	5.625	0.079733	0.079732	0.001
11	6.250	0.063360	0.063359	0.001
12	6.875	0.047449	0.047449	0.001
13	7.500	0.032659	0.032658	0.002
14	8.125	0.019706	0.019706	0.001
15	8.750	0.009373	0.009373	0.001
16	9.375	0.002502	0.002502	0.000
17	10.000	0.000000	0.000000	0.000



**Cuadro comparativo de resultados de los Momentos**

Elem.	X (m.)	X m (m.)	Ms ( Kg.x m./ m.)		% Error Relativo
			Analítico	MEF 17 Nudos	
1	0.000	0.3125	8.104858	8.099800	0.06
2	0.625	0.9375	7.943726	7.937300	0.08
3	1.250	1.5625	7.621460	7.615100	0.08
4	1.875	2.1875	7.138062	7.131600	0.09
5	2.500	2.8125	6.493530	6.487200	0.10
6	3.125	3.4375	5.687866	5.681700	0.11
7	3.750	4.0625	4.721069	4.715100	0.13
8	4.375	4.6875	3.593140	3.587200	0.17
9	5.000	5.3125	2.304077	2.298100	0.26
10	5.625	5.9375	0.853882	0.847940	0.70
11	6.250	6.5625	-0.757446	-0.763390	-0.78
12	6.875	7.1875	-2.529907	-2.535900	-0.24
13	7.500	7.8125	-4.463501	-4.469500	-0.13
14	8.125	8.4375	-6.558228	-6.564200	-0.09
15	8.750	9.0625	-8.814087	-8.820100	-0.07
16	9.375	9.6875	-11.231079	-11.237000	-0.05



## CAPÍTULO III

### PROCEDIMIENTOS SEMIANALÍTICOS

#### 3.1 CÁSCARAS DE REVOLUCIÓN BAJO CARGAS NO SIMÉTRICAS

##### 3.1.1 Ecuaciones de Equilibrio

Cuando el sistema de cargas que actúa sobre la superficie de una cáscara de revolución no es simétrico se consideran todos los esfuerzos mostrados en la figura 2.2 a. Sin embargo el esfuerzo de corte Q no se tomará en cuenta debido principalmente al poco espesor de la cáscara, quedando por tanto las ecuaciones diferenciales del 2.1 al 2.6 como:

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rN_{\phi}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} N_{\phi\theta} - r_1 N_{\theta} \cos \phi = -rr_1 p_{\phi} \quad 3.01$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rN_{\phi\theta}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} N_{\theta} + r_1 N_{\phi\theta} \cos \phi = -rr_1 p_{\theta} \quad 3.02$$

$$r_1 N_{\theta} \operatorname{sen} \phi + rN_{\phi} = rr_1 p_r \quad 3.03$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rM_{\phi}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\phi\theta} - r_1 M_{\theta} \cos \phi = 0 \quad 3.04$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(rM_{\phi\theta}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta} - r_1 M_{\phi\theta} \cos \phi = 0 \quad 3.05$$

$$\frac{M_{\phi\theta}}{r_1} - \frac{M_{\theta\phi}}{r_2} = N_{\phi\theta} - N_{\theta\phi} \quad 3.06$$

### 3.1.2 Ecuaciones de Deformación para Carga No Simétrica

En el caso de deformación de una cáscara bajo carga no simétrica, el desplazamiento de un punto puede descomponerse en tres componentes porque el problema físico que se presenta es tri dimensional:  $u$  en la dirección de la tangente al meridiano,  $w$  en la dirección normal a la superficie media y  $v$  en la dirección circunferencial.

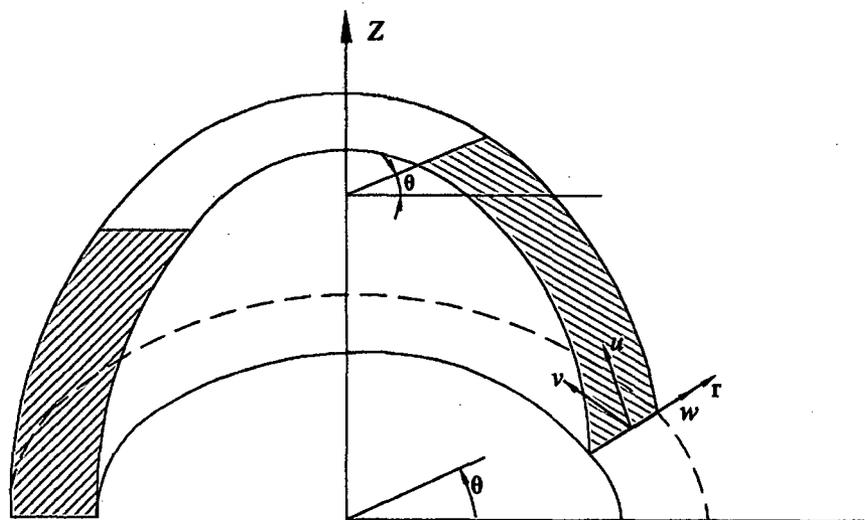


Figura 3.1

La tercera componente en la dirección circunferencial o del paralelo tiene relación con nuevas expresiones de la deformación de una cáscara de revolución bajo carga no simétrica que a continuación se definen<sup>6</sup>:

Para deformación meridional:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} \quad 3.07$$

Para deformación circunferencial:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + (w \cos \phi + u \sin \phi) \frac{1}{r} \quad 3.08$$

Para deformación transversal:

$$\gamma_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - v \sin \phi \frac{1}{r} \quad 3.09$$

Para la curvatura del meridiano:

$$\chi_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad 3.10$$

Para la curvatura del paralelo:

$$\chi_{\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v \cos \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \quad 3.11$$

Para la torsión:

$$\chi_{s\theta} = 2 \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2} v \right) \quad 3.12$$

### 3.1.3 Ecuaciones Constitutivas

Excepto por la consideración de algunos términos adicionales, las ecuaciones constitutivas son en este caso similares a las correspondientes para el caso simétrico:

$$N_s = \frac{Et}{1-\nu^2}(\varepsilon_s + \nu\varepsilon_\theta) \quad 3.13$$

$$N_\theta = \frac{Et}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_s + \varepsilon_\theta) \quad 3.14$$

$$N_{s\theta} = \frac{Et}{2(1+\nu)}\gamma_{s\theta} \quad 3.15$$

$$M_\phi = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_\phi + \nu\chi_\theta) \quad 3.16$$

$$M_\theta = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\nu\chi_\phi + \chi_\theta) \quad 3.17$$

$$M_{\phi\theta} = -\frac{Et^3}{12(1+\nu)}\chi_{\phi\theta} \quad 3.18$$

Estando estas "tensiones" de membrana y de flexión definidas tal como se muestra en la figura 3.2:

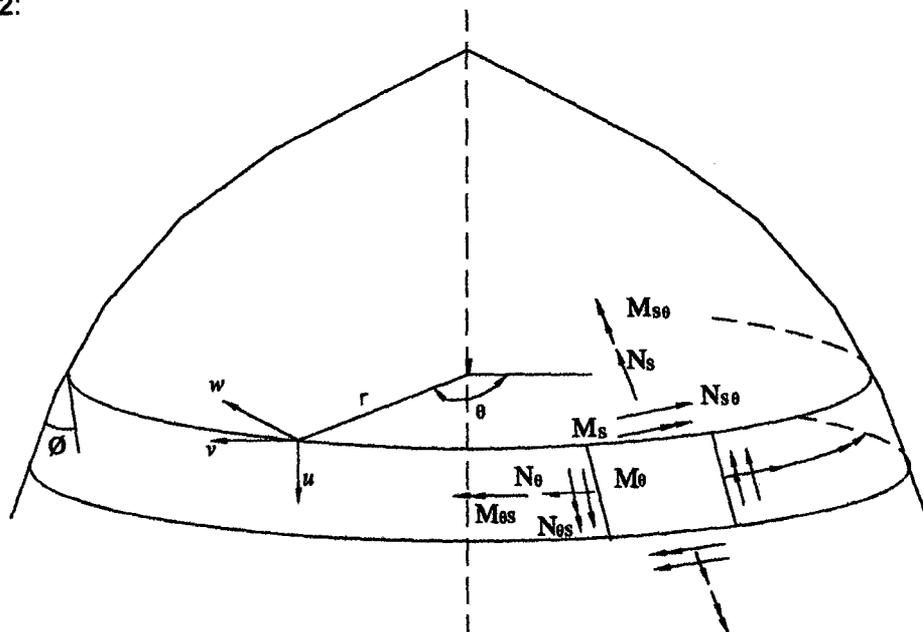


Lámina de revolución bajo carga asimétrica.  
Componentes de tensiones y desplazamientos resultantes.

Figura 3.2

### 3.2 FORMULACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE ESTRUCTURAS DE REVOLUCIÓN BAJO CARGA NO SIMÉTRICA

Una cáscara de revolución sometida a carga no simétrica puede igualmente estar representada por series de elementos finitos tronco cónicos. Como ya se estableció para el análisis, se han de considerar además de los desplazamientos  $u$ ,  $w$  en las direcciones axial y normal respectivamente, una componente adicional  $v$  en dirección circunferencial:

Agrupando y representando matricialmente las ecuaciones 3.7 a 3.12 de las deformaciones para el caso de cáscaras de revolución bajo carga no simétrica se tiene <sup>5</sup>

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + (w \cos \phi + u \operatorname{sen} \phi) \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - v \operatorname{sen} \phi \frac{1}{r} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos \phi}{r^2} - \frac{\operatorname{sen} \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \\ 2 \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r^2} v \right) \end{Bmatrix} \quad 3.19$$

Esta a su vez puede descomponerse como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 \\ \frac{\cos\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin\phi}{r} \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial s^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 2 \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin\phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) & 2 \left( \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin\phi \cos\phi}{r^2} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} \quad 3.20$$

Que puede expresarse como:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\mathbf{L}} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} \quad 3.21$$

Siendo  $\underline{\mathbf{L}}$  un operador diferencial.

Las resultantes de las tensiones internas son obtenidas a través de una matriz  $\underline{\mathbf{D}}$  tal que:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \underline{\mathbf{D}} \underline{\varepsilon} \quad 3.22$$

Donde  $\underline{\mathbf{D}}$  es la matriz de elasticidad; que en el caso isotrópico resulta:

$$D = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{12} & \frac{\nu t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu t^2}{12} & \frac{t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^2(1-\nu)}{12} \end{pmatrix} \quad 3.23$$

### 3.2.1. Tratamiento de Acciones de Acciones No Simétricas con Funciones Trigonómicas Ortogonales.

En lo que sigue, se supone que las componentes de fuerza en las direcciones meridional, transversal y tangencial pueden expresarse en series de Fourier:

$$U = \sum \bar{U}_m \cos m\theta \quad 3.24$$

$$W = \sum \bar{W}_m \cos m\theta \quad 3.25$$

$$V = \sum \bar{V}_m \operatorname{sen} m\theta \quad 3.26$$

Siendo  $\bar{U}_m$ ,  $\bar{W}_m$  y  $\bar{V}_m$  las intensidades por unidad de longitud.

Estas tres últimas expresiones representan un estado de simetría con respecto a  $\theta$  en el plano  $\theta = 0$  ( considerando subsecuentemente a la función seno como el término no simétrico del desplazamiento en la serie de Fourier).

Similarmente al caso de carga simétrica, los desplazamientos  $u, w, v$  de un punto pueden expresarse por interpolación de sus valores nodales con funciones de formas unidimensionales y expresadas como:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{a}}^e \quad 3.27$$

En este caso los desplazamientos  $u, w, v$  son función de  $\theta$  :

$$u = \sum u_m \cos m\theta \quad 3.28$$

$$w = \sum w_m \cos m\theta \quad 3.29$$

$$v = \sum v_m \sin m\theta \quad 3.30$$

Tal como se puede apreciar, estas expresiones para los desplazamientos se han desarrollado en  $m$  términos, siendo cada uno de ellos la contribución relativa para el "modo"  $m$  por separado.  $u_m, w_m, v_m$  son amplitudes que están en función de las coordenadas  $r, z$  y de  $m$  pero no de  $\theta$ .

En la ecuación 3.27 se observa que  $\mathbf{N}$  es la matriz de función de forma y  $\mathbf{a}^e$  otra con 2 submatrices, correspondientes a los nudos  $i, j$ , con los siguientes componentes de desplazamientos expresados matricialmente como:

$$\tilde{a}^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ \tilde{a}_j \\ \tilde{a}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \\ v_i \\ - \\ u_j \\ w_j \\ \beta_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad 3.31$$

Se entiende que para un nudo  $i$  general se considera las componentes de desplazamiento:

$u_i, w_i, \beta_i = (\partial w / \partial s)_i, v_i$  que igualmente admiten los siguientes desarrollos:

$$\tilde{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum u_{mi} \cos m\theta \\ \sum w_{mi} \cos m\theta \\ \sum \beta_{mi} \cos m\theta \\ \sum v_{mi} \sin m\theta \end{Bmatrix} \quad 3.32$$

Y para un elemento  $e$  de nudos  $i, j$  se obtiene que:

$$\tilde{a}^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ \tilde{a}_j \\ \tilde{a}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \\ v_i \\ - \\ u_j \\ w_j \\ \beta_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum u_{mi} \cos m\theta \\ \sum w_{mi} \cos m\theta \\ \sum \beta_{mi} \cos m\theta \\ \sum v_{mi} \cos m\theta \\ - \\ \sum u_{mj} \cos m\theta \\ \sum w_{mj} \cos m\theta \\ \sum \beta_{mj} \cos m\theta \\ \sum v_{mj} \cos m\theta \end{Bmatrix} \quad 3.33$$

Aproximando los desplazamientos mediante funciones polinómicas, de modo similar como se hizo para acciones simétricas tenemos:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 S \quad 3.34$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 S + \alpha_5 S^2 + \alpha_6 S^3 \quad 3.35$$

$$v = \alpha_7 + \alpha_8 S \quad 3.36$$

Donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8$  son constantes que dependen únicamente de los valores de desplazamientos  $\mathbf{u}$ , que determinados y reemplazados en la ecuación anterior se convierten en:

$$\begin{aligned} u &= \left(1 - \frac{s}{l}\right) u_i + \frac{s}{l} u_j \\ &= N_1 u_i + N_2 u_j \end{aligned} \quad 3.37$$

$$\begin{aligned} w &= \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) w_i + l \left(\frac{s}{l} - 2\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) \left(\frac{dw}{ds}\right)_i \\ &\quad + \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) w_j + \left(-\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) l \left(\frac{dw}{ds}\right)_j \\ &= N_3 w_i + N_4 \beta_i + N_5 w_j + N_6 \beta_j \end{aligned} \quad 3.38$$

$$\begin{aligned}
v &= \left(1 - \frac{s}{l}\right)v_i + \frac{s}{l}v_j \\
&= N_7 v_i + N_8 v_j
\end{aligned}
\tag{3.39}$$

Las ecuaciones 3.37 – 3.39 que expresan los desplazamientos de un punto de la superficie de revolución son las funciones de forma en los nudos i, j del elemento  $e$  para carga no simétrica. Se observa que se han utilizado los mismos polinomios para el caso de carga simétrica, sólo que esta vez los coeficientes N son 8, dos adicionales por la componente circunferencial.

Expresando cada uno de los desplazamientos matricialmente y considerando las expresiones dadas en las ecuaciones 3.32 y 3.33 tenemos:

$$u = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} \sum u_{mi} \cos m\theta \\ \sum u_{mj} \cos m\theta \end{Bmatrix}
\tag{3.40}$$

$$w = [N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_i \\ w_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = [N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \begin{Bmatrix} \sum w_{mi} \cos m\theta \\ \sum \beta_{mi} \cos m\theta \\ \sum w_{mj} \cos m\theta \\ \sum \beta_{mj} \cos m\theta \end{Bmatrix}
\tag{3.41}$$

$$v = [N_7 \quad N_8] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} = [N_7 \quad N_8] \begin{Bmatrix} \sum v_{mi} \text{sen} m\theta \\ \sum v_{mj} \text{sen} m\theta \end{Bmatrix}
\tag{3.42}$$

Agrupándolas:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & | & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & | & 0 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_7 & | & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum u_{mi} \cos m\theta \\ \sum w_{mi} \cos m\theta \\ \sum \beta_{mi} \cos m\theta \\ \sum v_{mi} \text{sen} m\theta \\ - \\ \sum u_{mj} \cos m\theta \\ \sum w_{mj} \cos m\theta \\ \sum \beta_{mj} \cos m\theta \\ \sum v_{mj} \text{sen} m\theta \end{Bmatrix} \quad 3.43$$

Y factorizando se tiene la ecuación 3.44:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = \sum \begin{Bmatrix} N_1 \cos m\theta & 0 & 0 & 0 & | & N_2 \cos m\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 \cos m\theta & N_4 \cos m\theta & 0 & | & 0 & N_5 \cos m\theta & N_6 \cos m\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_7 \text{sen} m\theta & | & 0 & 0 & 0 & N_8 \text{sen} m\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{im} \\ w_{im} \\ \beta_{im} \\ v_{im} \\ - \\ u_{jm} \\ w_{jm} \\ \beta_{jm} \\ v_{jm} \end{Bmatrix}$$

Que simplificada también puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = \left\{ \tilde{N}_i^{(m)} \mid \tilde{N}_j^{(m)} \right\} \begin{Bmatrix} a_i \\ - \\ a_j \end{Bmatrix} \quad 3.45$$

Por otro lado, siendo  $T$  la matriz de transformación de coordenadas:

$$\tilde{T} = \begin{Bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad 3.46$$

Las componentes de los desplazamientos en términos de coordenadas globales para un nudo  $i$  en general son:

$$\tilde{a}_i = \begin{Bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{w}_i \\ \beta_i \\ \tilde{v}_i \end{Bmatrix} \quad 3.47$$

Entonces la expresión para un elemento  $e$  con nudos  $i, j$  en coordenadas globales será:

$$\tilde{a}^e = \begin{Bmatrix} \tilde{a}_i \\ - \\ \tilde{a}_j \\ - \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_i & | & 0 \\ - & | & - \\ 0 & | & T_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}_i \\ - \\ \tilde{a}_j \\ - \end{Bmatrix} \quad 3.48$$

Reemplazando 3.48 en 3.45 queda:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = \left\{ \tilde{N}_i^{(m)} \quad | \quad \tilde{N}_j^{(m)} \right\} \begin{Bmatrix} T_i & | & 0 \\ - & | & - \\ 0 & | & T_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}_i \\ - \\ \tilde{a}_j \\ - \end{Bmatrix} \quad 3.49$$

$$= \left\{ \tilde{N}_i^{(m)} T_i \quad | \quad \tilde{N}_j^{(m)} T_j \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{a}_i \\ - \\ \tilde{a}_j \\ - \end{Bmatrix} = \tilde{N}^{(m)} \tilde{a}^e$$

Entonces en la ecuación de deformación 3.20 con 3.46 se tiene que:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{u}} \\ \underline{\underline{w}} \\ \underline{\underline{v}} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{L}} \left\{ \underline{\underline{N}}_i^{(m)} T_i \mid \underline{\underline{N}}_j^{(m)} T_j \right\} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{a}}_i \\ \vdots \\ \underline{\underline{a}}_j \end{Bmatrix} \quad 3.50$$

Donde  $\underline{\underline{B}}^{(m)}$ :

$$\underline{\underline{B}}^{(m)} = \underline{\underline{L}} \left\{ \underline{\underline{N}}_i^{(m)} T_i \mid \underline{\underline{N}}_j^{(m)} T_j \right\} = \left\{ \underline{\underline{B}}_i^{(m)} \mid \underline{\underline{B}}_j^{(m)} \right\} \quad 3.51$$

De la relación entre tensiones y deformaciones locales dada por 3.22, las ecuaciones 3.49, 3.50 y por el Principio de Trabajos Virtuales se obtienen la matriz de rigidez  $\underline{\underline{K}}^{(m)}$  y el vector de fuerzas nodales equivalentes  $\underline{\underline{f}}^{(m)}$  y que están relacionados por la ecuación de equilibrio dada por:

$$\underline{\underline{K}}^{(m)} \underline{\underline{a}}^{(m)} - \underline{\underline{f}}^{(m)} = \underline{\underline{0}} \quad 3.52$$

Que representa un sistema de m ecuaciones desacopladas de la forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}^{(1)} \\ \underline{\underline{K}}^{(2)} \\ \underline{\underline{K}}^{(3)} \\ \vdots \\ \underline{\underline{K}}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{a}}^{(1)} \\ \underline{\underline{a}}^{(2)} \\ \underline{\underline{a}}^{(3)} \\ \vdots \\ \underline{\underline{a}}^{(m)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underline{\underline{f}}^{(1)} \\ \underline{\underline{f}}^{(2)} \\ \underline{\underline{f}}^{(3)} \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}^{(m)} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad 3.53$$

Donde cada componente  $\underline{K}^{(m)}$  constituye una submatriz típica que es la matriz de rigidez de la estructura para un término (armónico)  $m$  aislado definido por:

$$[\underline{K}^{(m)}] = \int_A \{B^{(m)}\}^T \{D\} \{B^{(m)}\} dA \quad 3.54$$

Como la integración deberá hacerse sobre el área del elemento se tendrá:

$$dA = r d\theta ds = r d\theta l ds' \quad 3.55$$

Donde  $s' = s/l$  ; Para  $0 \leq s' \leq 1$

El radio  $r$  debe ser expresado como una función de  $s$  antes de la integración de la ecuación precedente.

Y como en la misma expresión de la rigidez intervienen las integrales:

$$\int_0^a \text{sen} \frac{m\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} dz = 0 \quad \text{donde } m = 0,1,.. \quad 3.56$$

$$\int_0^a \text{sen}^2 \frac{m\pi z}{a} dz = \int_0^a \cos^2 \frac{m\pi z}{a} dz = \frac{a}{2} \quad \text{donde } m = 1,2,.. \quad 3.57$$

Finalmente la matriz de rigidez de la estructura se obtiene ensamblando las contribuciones de los diferentes elementos de la malla definida por:

$$\left\{ \underset{\sim}{k}_{ij}^{(m)(m)} \right\}^{(e)} = \pi l \int_0^l \left\{ \underset{\sim}{B}_i^{(m)} \right\}^T \left\{ \underset{\sim}{D} \right\} \left\{ \underset{\sim}{B}_j^{(m)} \right\} r ds' \quad 3.58$$

Entonces los términos de carga relativos a cada m contribución se obtendrán a partir del teorema de trabajos virtuales como:

$$\underset{\sim}{f}^{(m)} = \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \overline{U}_m \cos^2 m\theta \\ \overline{W}_m \cos^2 m\theta \\ \overline{V}_m \sin^2 m\theta \end{array} \right\} d\theta \quad 3.59$$

Cuando  $m = 1, 2, \dots$

Que aplicando las ecuaciones 3.56 y 3.57 para el caso de carga no simétrica – ver figura 3.3 - y para un término individual m queda como:

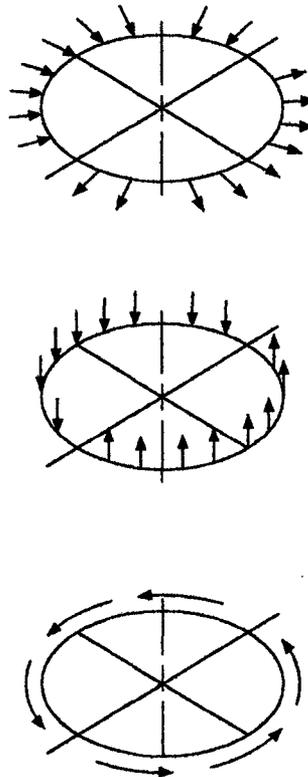
$$\underset{\sim}{f}^{(m)} = \pi \left\{ \begin{array}{l} \overline{U}_m \\ \overline{W}_m \\ \overline{V}_m \end{array} \right\} \quad 3.60$$

De la relación dada por 3.53 se deduce que el sistema se desdobra en m problemas separados.

Esto significa que el m-ésimo término de la fuerza sólo afecta al m-ésimo sistema de ecuaciones y no interviene en absoluto en las otras ecuaciones. Esta importante propiedad es de considerable interés práctico, puesto que si el desarrollo de los términos de carga sólo contiene un término, sólo será necesario resolver un único sistema de ecuaciones.

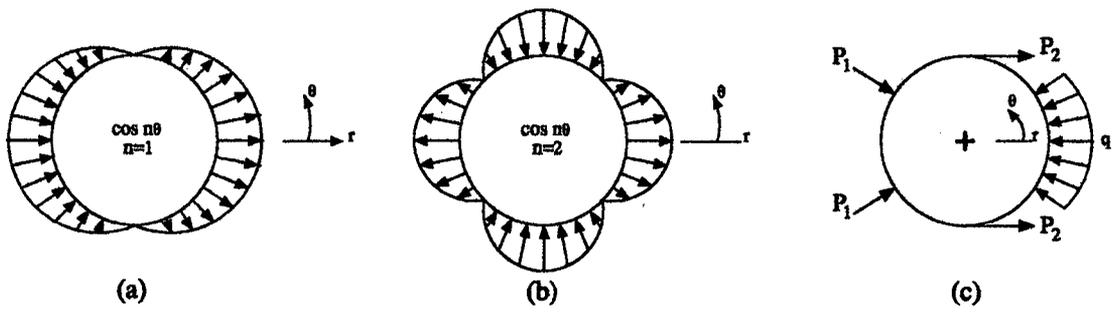
Esto permite calcular las amplitudes modales de los movimientos para cada término armónico por separado, lo cual significa que el  $m$  – ésimo armónico sólo afecta al  $m$  – ésimo sistema de ecuaciones resolviendo el sistema:

$$\tilde{K}^{(m)} \tilde{a}^{(m)} = \tilde{f}^{(m)} \quad \text{Para } m = 1, 2, \dots, M \quad 3.61$$



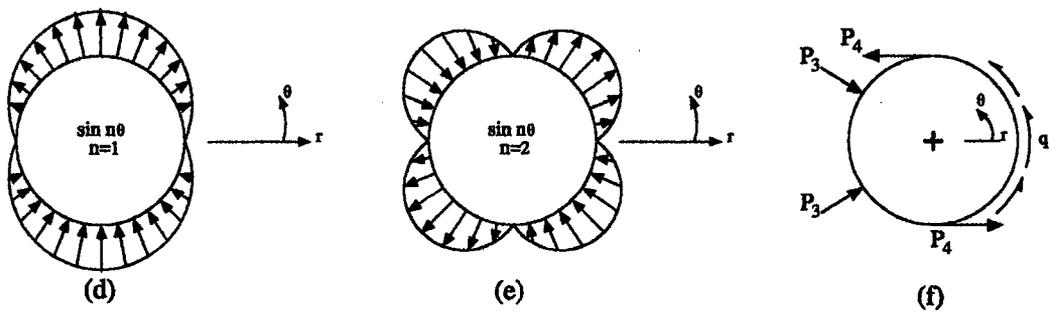
**Cargas y componentes de los desplazamientos de un cuerpo de revolución no simétricas.**

Figura 3.3



(a),(b) Términos de coseno.

Cargas simétricas posibles en el plano  $r\theta$ .



(d),(e) Términos de senos.

Cargas no simétricas posibles en el plano  $r\theta$ .

Figura 3.4

### 3.3 APLICACION

#### 3.3.1 Caso de losa circular empotrada bajo carga asimétrica.

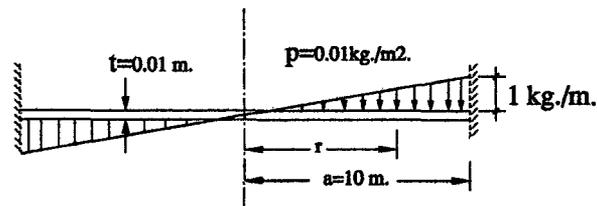


Figura 3.5

#### 3.3.1.1 Deflexiones.

En la solución analítica<sup>3</sup> las deflexiones se obtienen con la siguiente expresión:

$$w = \frac{P_o}{192D} \frac{r}{a} (a^2 - r^2)^2 \cos \theta \quad 3.62$$

#### 3.3.1.2 Momentos.

En el meridiano

$$M_r = -\frac{P_o}{48} \left[ \frac{r^3}{a} (5 + \nu) - ar(3 + \nu) \right] \cos \theta \quad 3.63$$

En el paralelo

$$M_\theta = \frac{P_o}{48} \left[ \frac{r^3}{a} (1 + 5\nu) - ar(1 + 3\nu) \right] \cos \theta \quad 3.64$$

## Torsional

$$M_{r\theta} = -\frac{(1-\nu)P_0ra}{48}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\text{sen}\theta \quad 3.65$$

### 3.3.1.3 Modelo por Elementos Finitos Tronco Cónicos.

Para el caso de losa circular empotrada de radio  $a$  sujeta a carga  $P_0$  linealmente variable se ha predeterminado un esquema de discretización con 21 nudos y otro con 101 nudos con la finalidad de comparar sus deformaciones y los esfuerzos por flexión asimétrica. La estructura es plana y los elementos tronco cónicos son subregiones anulares.

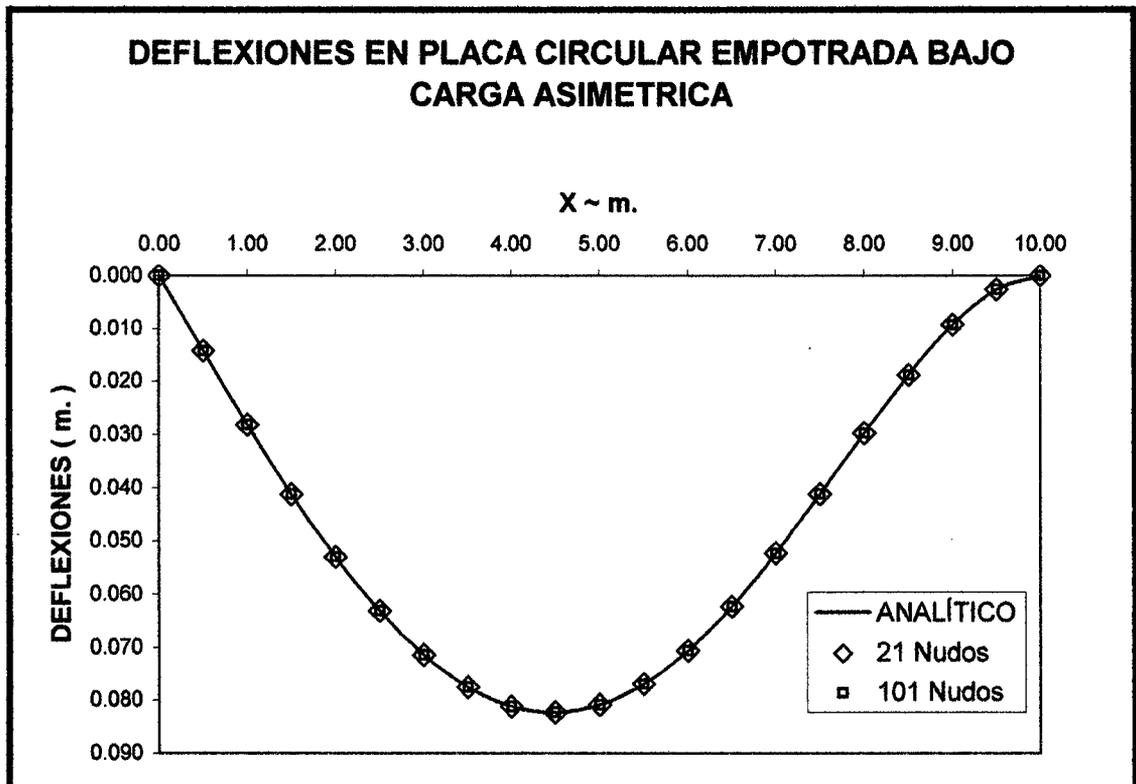
La losa circular empotrada, en su contorno tiene 10 m. de radio, con espesor de 0.01 m. y carga variable tal como muestra la figura 3.5 Dada la característica simétrica del modelo - más no su carga - se ha tomado para el análisis un lado a partir del eje axial simétrico.

Como se aprecia en la figura, el modelo presenta una carga variable linealmente repartida - que en buena cuenta es una carga no simétrica - que tuvo que transformarse por proporciones geométricas al equivalente de cargas puntuales o concentradas para efecto de aplicación del programa. Asimismo, las restricciones de contorno del modelo en el nudo empotrado obviamente se dan para los cuatro grados de libertad. Para los nudos interiores se ha considerado la restricción en la componente de desplazamiento radial y tangencial.

Del resultado en la aplicación, se puede observar en las tablas y gráficos que sí existe convergencia con la solución analítica, sobre todo en la aproximación a 101 nudos tanto en las deflexiones como los momentos en el meridiano.

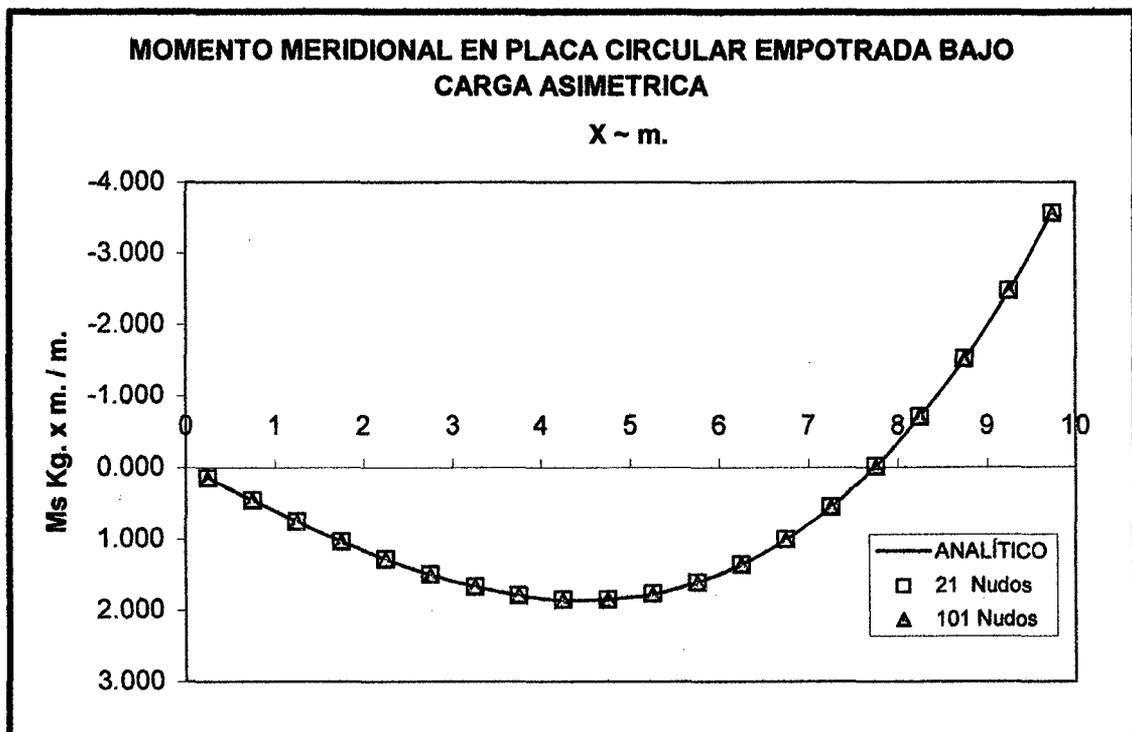
**Cuadro comparativo de resultados de las Deflexiones**

Nudo	X (m)	Deflexiones (m.)			% Error Relativo	
		Analítico	M E F		21 Nudos	101 Nudos
			21 Nudos	101 Nudos		
1	0.00	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000	0.0000
2	0.50	0.0143046	0.0143050	0.0143050	-0.0030	-0.0030
3	1.00	0.0281806	0.0281810	0.0281810	-0.0016	-0.0016
4	1.50	0.0412101	0.0412100	0.0412100	0.0003	0.0003
5	2.00	0.0529970	0.0529960	0.0529970	0.0020	0.0001
6	2.50	0.0631774	0.0631750	0.0631770	0.0038	0.0006
7	3.00	0.0714304	0.0714270	0.0714300	0.0048	0.0006
8	3.50	0.0774892	0.0774840	0.0774890	0.0068	0.0003
9	4.00	0.0811517	0.0811450	0.0811520	0.0083	-0.0004
10	4.50	0.0822911	0.0822830	0.0822910	0.0099	0.0002
11	5.00	0.0808671	0.0808590	0.0808670	0.0100	0.0001
12	5.50	0.0769361	0.0769280	0.0769360	0.0105	0.0001
13	6.00	0.0706627	0.0706540	0.0706620	0.0123	0.0010
14	6.50	0.0623299	0.0623220	0.0623290	0.0127	0.0014
15	7.00	0.0523501	0.0523420	0.0523500	0.0155	0.0002
16	7.50	0.0412759	0.0412690	0.0412750	0.0167	0.0022
17	8.00	0.0298108	0.0298050	0.0298100	0.0196	0.0028
18	8.50	0.0188202	0.0188170	0.0188200	0.0170	0.0010
19	9.00	0.0093418	0.0093399	0.0093415	0.0199	0.0028
20	9.50	0.0025966	0.0025961	0.0025965	0.0208	0.0054
21	10.00	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000	0.0000



**Cuadro comparativo de resultados de los Momentos.**

Elem .	X (m)	Xm (m)	Ms (Kg. X m. / m.)			% Error Relativo	
			Analítico	F E M		21 Nudos	101 Nudos
				21 Nudos	101 Nudos		
		0	0.000000				
1	0.00	0.25	0.1560872	0.1560700	0.1562000	0.0110	-0.0722
2	0.50	0.75	0.4643555	0.4638900	0.4645100	0.1002	-0.0333
3	1.00	1.25	0.7609049	0.7601000	0.7611800	0.1058	-0.0361
4	1.50	1.75	1.0379232	1.0368000	1.0382000	0.1082	-0.0267
5	2.00	2.25	1.2875977	1.2861000	1.2878000	0.1163	-0.0157
6	2.50	2.75	1.5021159	1.5003000	1.5022000	0.1209	-0.0056
7	3.00	3.25	1.6736654	1.6716000	1.6736000	0.1234	0.0039
8	3.50	3.75	1.7944336	1.7920000	1.7941000	0.1356	0.0186
9	4.00	4.25	1.8566081	1.8538000	1.8560000	0.1512	0.0328
10	4.50	4.75	1.8523763	1.8493000	1.8516000	0.1661	0.0419
11	5.00	5.25	1.7739258	1.7705000	1.7735000	0.1931	0.0240
12	5.50	5.75	1.6134440	1.6097000	1.6132000	0.2321	0.0151
13	6.00	6.25	1.3631185	1.3590000	1.3626000	0.3021	0.0380
14	6.50	6.75	1.0151367	1.0107000	1.0148000	0.4371	0.0332
15	7.00	7.25	0.5616862	0.5569500	0.5611200	0.8432	0.1008
16	7.50	7.75	-0.0050456	-0.0055604	-0.0055604	-10.2035	-10.2035
17	8.00	8.25	-0.6928711	-0.6982600	-0.6932200	-0.7778	-0.0504
18	8.50	8.75	-1.5096029	-1.5153000	-1.5097000	-0.3774	-0.0064
19	9.00	9.25	-2.4630534	-2.4691000	-2.4628000	-0.2455	0.0103
20	9.50	9.75	-3.5610352	-3.5674000	-3.5605000	-0.1787	0.0150



## CAPÍTULO IV

### CONSIDERACIONES PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO

#### 4.1 EQUILIBRIO DINÁMICO

La ecuación de equilibrio dinámico para un sistema de varios grados de libertad puede ser expresada como una función del tiempo como sigue <sup>8</sup>:

$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = F(t) \quad 4.01$$

en la cual los vectores de fuerza  $F$  en el tiempo  $t$  son:

$F_I(t)$	Es el vector de fuerzas de inercia actuando en las masas nodales
$F_D(t)$	Es el vector de fuerzas por amortiguamiento
$F_S(t)$	Es el vector de fuerzas por deformación de la estructura
$F(t)$	Es el vector de cargas aplicadas externamente.

La ecuación presentada es válida tanto para sistemas lineales como no lineales si el equilibrio es formulado con respecto a la geometría deformada de la estructura.

Para el análisis lineal, esta ecuación se puede escribir, en términos de desplazamientos nodales, de la siguiente forma:

$$\underline{M}^m \ddot{u}(t) + \underline{C}^m \dot{u}(t) + \underline{K}^m u(t) = \underline{F}^m(t) \quad 4.02$$

En donde,  $\tilde{M}^m$  es la matriz de masas (concentrada),  $\tilde{C}^m$  es la matriz de amortiguamiento viscoso (que tiene el propósito de introducir en las ecuaciones una disipación de energía similar a la de la estructura real) y  $\tilde{K}^m$  es la matriz de rigidez estática para el sistema de elementos estructurales. El superíndice m representa al término m-ésimo individual correspondiente del sistema desacoplado proveniente de un desarrollo por series de Fourier. Los vectores dependientes del tiempo,  $u(t)_a$ ,  $\dot{u}(t)_a$  y  $\ddot{u}(t)_a$  son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales absolutas, respectivamente.

Para cargas sísmicas, las cargas externas  $\tilde{F}^m$  son iguales a cero. Los movimientos sísmicos básicos son las tres componentes de los desplazamientos de la base.

Así, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas pueden eliminarse de la ecuación 4.2 mediante las siguientes ecuaciones:

$$u(t)_a = u(t) + I_x u_{xg}(t) + I_y u_{yg}(t) + I_z u_{zg}(t) \quad 4.03 \text{ a}$$

$$\dot{u}(t)_a = \dot{u}(t) + I_x \dot{u}_{xg}(t) + I_y \dot{u}_{yg}(t) + I_z \dot{u}_{zg}(t) \quad 4.03. \text{b}$$

$$\ddot{u}(t)_a = \ddot{u}(t) + I_x \ddot{u}_{xg}(t) + I_y \ddot{u}_{yg}(t) + I_z \ddot{u}_{zg}(t) \quad 4.03. \text{c}$$

Donde  $I_i$  es un vector con 1 (unos) en los grados de libertad en la dirección "i" y ceros en las otras posiciones. Si sustituimos las ecuaciones 4.3 a-c en la ecuación 4.2, esto nos permite reescribir las ecuaciones de equilibrio como sigue:

$$M\ddot{u}(t)_a + C\dot{u}(t)_a + Ku(t)_a = -M_x \ddot{u}_{xg}(t) - M_y \ddot{u}_{yg}(t) - M_z \ddot{u}_{zg}(t) \quad 4.04$$

donde  $M_i = MI_i$

La forma simplificada de la ecuación 4.4 es posible desde que los desplazamientos y velocidades de cuerpo rígido asociados con los movimientos de la base no causan fuerzas en la estructura adicional.

Es importante entender que los desplazamientos, los mismos que son proporcionados por los programas de cómputo, son los desplazamientos relativos y, fundamentalmente, la carga en la estructura es debida a desplazamientos en la base y no a cargas nodales aplicadas en la estructura.

## **4.2 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINÁMICO.**

Para la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico, que son un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, existen diversos métodos que a continuación se presentan.

### **4.2.1 Método de Solución Paso a Paso o Análisis Tiempo Historia**

Es un método incremental en el cual las ecuaciones de equilibrio son resueltas en los tiempos  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, etc.$  En general, estos métodos involucran una solución de todo el conjunto de ecuaciones de equilibrio en cada incremento de tiempo.

Constituye un procedimiento idóneo cuando toma en cuenta el comportamiento no lineal en el que es necesario reformular la matriz de rigidez de todo el sistema estructural para cada intervalo de tiempo. La iteración – para simular la no linealidad -será requerida dentro de cada incremento de tiempo para simular satisfacer el equilibrio. Los requerimientos de cómputo son significativos.

Adicionalmente, el amortiguamiento numérico o artificial debe considerarse en los métodos de solución incremental con el propósito de obtener soluciones estables. Esto es

extensivo para los casos de estructuras no lineales sujetas a movimientos en la base en que se hace necesario el empleo de estos métodos.

#### **4.2.2 Método de Análisis Modal**

Este método, luego de evaluar un conjunto de vectores ortogonales, reduce el gran conjunto de ecuaciones globales de equilibrio a un pequeño número de ecuaciones diferenciales desacopladas. La solución numérica de estas ecuaciones en lugar del sistema de ecuaciones original significa una gran reducción de tiempo de cómputo.

Hay dos formas de realizar el análisis modal: Una es por superposición modal, el mismo que está restringido al análisis elástico lineal, produce la completa respuesta en la historia del tiempo de los desplazamientos de los nudos y fuerzas en los elementos debidos a una carga especificada de movimiento de la base. Y el otro es por medio de respuesta espectral.

En el primer caso, cada ecuación modal se puede resolver tanto en el dominio del tiempo como en el de frecuencias. Aquí la solución modal es almacenada, los modos se superponen apropiadamente en cada intervalo de tiempo y el tiempo-historia para cada efecto se revisa para encontrar su máximo valor. Esta superposición tiene que ser repetida independientemente para cada efecto ya que los coeficientes que afectan las respuestas modales (o sea las contribuciones de cada modo a cada respuesta en particular) variarán de un efecto a otro.

Por lo expuesto en el método de superposición modal hay dos desventajas. Primero, los procedimientos producen una gran cantidad de información, la misma que requiere un enorme esfuerzo computacional que considere todas las posibilidades de la verificación del diseño como una función de tiempo. Segundo, el análisis debe repetirse para diferentes

registros sísmicos con el propósito de asegurar que todos los modos significativos sean excitados.

Se ha demostrado que los movimientos sísmicos excitan a la estructura sólo en sus frecuencias más bajas. Típicamente, las aceleraciones de la tierra debidas a los sismos son registradas con incrementos a razón de 100 puntos por segundo. Así, la información de cargas básicamente no contiene información por encima de los 50 ciclos por segundo. Por lo que despreciando las altas frecuencias y formas de modo del sistema no se introducen errores significativos.

En sistemas estructurales muy grandes, se ha encontrado que la combinación de los métodos de superposición modal e incremental ha sido eficiente para sistemas con un pequeño número de elementos no lineales.

En el análisis modal espectral el método involucra el cálculo solamente de los valores máximos de los desplazamientos en cada modo usando un espectro de diseño, el mismo que representa el promedio de diversos sismos. Luego, por ejemplo, mediante el método CQC se combinan estos valores máximos de respuesta modal obteniendo los valores más probables de desplazamientos y fuerzas.

Hay significativas ventajas computacionales usando el método de respuesta espectral en el análisis de los sismos para predecir los desplazamientos y fuerzas en los elementos de un sistema estructural.

#### **4.2.3 Solución en el Dominio de Frecuencias**

Este procedimiento se basa en la expansión de las fuerzas externas  $F(t)$  en términos de series de Fourier.

Este procedimiento es muy efectivo para las cargas de tipo periódico como en vibración de máquinas, acústica, olas de mar y viento. Sin embargo, el uso del método de solución en el dominio de frecuencias para resolver problemas de Ingeniería Sísmica tiene las siguientes desventajas:

Las cargas sísmicas no son periódicas (aunque se pueden tratar como tales agregando suficientes ceros después del registro.)

Para el tipo de carga del sismo el método no es numéricamente eficiente.

Se restringe la aplicación del método a soluciones de sistemas estructurales lineales.

El método ha sido empleado, sin la suficiente justificación teórica, para la solución no lineal aproximada de problemas de respuesta de sitio la interacción suelo estructura.

Típicamente, se usa de manera iterativa para crear ecuaciones lineales.

#### **4.3 CONVENIENCIA DEL MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN MODAL**

De los procedimientos presentados arriba, el análisis modal es el procedimiento más usado en dinámica estructural. Para un análisis modal no es necesaria la determinación de la matriz de amortiguamientos viscoso,  $C$ . Sólo es preciso tomar en consideración un número limitado de modos, ya que la respuesta a las frecuencias más altas carece de importancia. Permite desacoplar las  $n$  ecuaciones diferenciales de movimiento, reduciendo el problema a la solución de  $n$  ecuaciones independientes de un grado de libertad y en la mayoría de los casos sólo algunos modos contribuyen significativamente a la respuesta no siendo necesario por tanto resolver los  $n$  sistemas simples.

#### **4.4 MASAS Y AMORTIGUAMIENTO**

Cuando los desplazamientos de una estructura de comportamiento lineal varían con el tiempo, en ésta actúan las fuerzas de inercia y las de amortiguamiento. Las primeras se expresan por unidad de volumen y se define en su forma estática como:

$$F(t)_I = \rho \ddot{u} \quad 4.05$$

Donde  $\rho$  es la densidad y  $\ddot{u}$  es la aceleración quedando las componentes de esta fuerza definidas en la misma dirección del desplazamiento  $u$ .

Las fuerzas de amortiguamiento pueden expresarse como si fueran viscosas:

$$F(t)_D = -\mu \dot{u} \quad 4.06$$

Donde,  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad.

Para una aplicación de elementos finitos en la ecuación de equilibrio dinámico (ecuación 4.2) se hace necesario aproximar los desplazamientos con la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= N\mathbf{a} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}(t) \end{aligned} \quad 4.07$$

Al sustituir la ecuación 4.6 en 4.2 Las nuevas matrices C y M se ensamblan a partir de submatrices de cada uno de los elementos definidas por

$$\tilde{C}_{ij}^e = \int_{V^e} \tilde{N}^T \mu \tilde{N} dv \quad 4.08$$

Y

$$\tilde{M}_{ij}^e = \int_{V^e} \tilde{N}^T \rho \tilde{N} dv \quad 4.09$$

La matriz de masa se conceptúa como concentrada haciendo de ella una matriz diagonal.

La concentración puede obtenerse de dos formas:

En la primera, la concentración se considera como un proceso en el que se usa una función de forma que puede ser igual o diferente a la de desplazamientos en la ecuación de equilibrio dinámico.

En la segunda forma se emplea integración numérica para obtener la concentración sin introducir aparentemente funciones de forma adicionales.

$$\tilde{M}_{ij} = \int_{v^e} \tilde{N}^T \rho \tilde{N} dv = \sum_{q=1}^m w_q \left( \tilde{N}^T \rho \tilde{N} \right)_q \quad 4.10$$

Donde  $q$  se refiere al punto de integración en el cual hay que evaluar el integrando y  $w_q$  es el coeficiente de ponderación correspondiente a ese punto. Si los puntos elegidos para la integración numérica se sitúan en los nudos, entonces en un nudo  $i$  todas las funciones de forma son cero excepto  $\tilde{N}_i$  y en consecuencia la matriz de masas resultará diagonal.

En cambio, la determinación del valor del amortiguamiento  $C$  es difícil en la práctica, ya que las fuerzas disipativas no son viscosas y resulta imprecisa la viscosidad  $\mu$ . A menudo, se hace la hipótesis de que la matriz de amortiguamiento sea una combinación lineal de las matrices de masas y rigidez, es decir:

$$C = \alpha M + \beta K \quad 4.11$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan de modo tal que se tenga el amortiguamiento correcto en los dos modos más importantes.

#### 4.5 ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO SIN AMORTIGUAMIENTO

Al no considerar el amortiguamiento en la ecuación y como un sismo produce un movimiento de la base de apoyo del sistema, mas no fuerzas que se apliquen sobre el elemento, la ecuación 4.2 se reduce a:

$$\tilde{M}\ddot{u}(t)_a + \tilde{K}u(t)_a = 0 \quad 4.12$$

La solución de ésta última ecuación puede expresarse como:

$$u = \phi \operatorname{sen}\omega(t-t_0) \quad 4.13$$

Siendo  $u$  la función de desplazamientos respecto al tiempo y donde  $\phi$  es un vector de orden  $n \times 1$ ,  $t$  el tiempo variable,  $t_0$  tiempo constante y  $\omega$  una constante que representa la frecuencia de vibración del vector  $\phi$ . Haciendo la sustitución respectiva se obtiene:

$$\tilde{K}\phi = \omega^2 \tilde{M}\phi \quad 4.14$$

Esta expresión, representa un problema típico de valores y vectores propios o característicos.

#### 4.6 VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

Considerando el problema de la forma generalizada:

$$(\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M})\phi = 0 \quad 4.15$$

Esta representa un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales con n incógnitas que son las componentes del vector  $\underline{\phi}$ . La solución de la ecuación anterior establece, n valores y vectores característicos  $\omega_i^2$  y  $\underline{\phi}_i$  respectivamente, donde  $i = 1, \dots, n$ .

Y

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \dots \leq \omega_n^2 \quad 4.16$$

El vector  $\underline{\phi}_i$  se denomina el  $i$ ésimo vector de forma de modo y  $\omega_i$  es la correspondiente frecuencia de vibración.

Por otro lado, una propiedad importante del vector  $\underline{\phi}_i$  es su ortogonalidad modal definido como:

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_i^T M \underline{\phi}_j &= 1; & i = j \\ &= 0; & i \neq j \end{aligned} \quad 4.17$$

Si definimos una matriz  $\underline{\Phi}$  que agrupe en columnas los n vectores característicos  $\underline{\phi}_i^T$  que también se conocen con el nombre de modos naturales del sistema:

$$\underline{\Phi} = [\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \dots, \underline{\phi}_n] \quad 4.18$$

Y otra matriz diagonal  $\underline{\Omega}^2$  que almacene los n valores característicos:

$$\underline{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad 4.19$$

Se puede escribir las n soluciones de la ecuación anterior como:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\Omega}}^2 \quad 4.20$$

Adaptando la propiedad de ortonormalidad de los vectores característicos tenemos que:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\Omega}}^2; \quad \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{I}} \quad 4.21$$

Y estableciendo una función de transformación como:  $\underline{U}(t) = \underline{\phi} \underline{x}(t)$  se puede obtener ecuaciones de equilibrio que correspondan a los desplazamientos nodales generalizados

$$\ddot{\underline{X}}(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{X}(t) = 0 \quad 4.22$$

Esto indica que para un análisis sin amortiguamiento las ecuaciones de equilibrio están desacopladas.

#### 4.7 METODOS DE SOLUCIÓN PARA OBTENCIÓN DE VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS.

Existen diversos métodos numéricos para solución del problema de valores y vectores característicos dado por la expresión  $\underline{\underline{K}} \underline{\phi} = \lambda \underline{\underline{M}} \underline{\phi}$ . Cada una con sus propias ventajas o deficiencias pero dependiendo su aplicación de cómo toma en cuenta las características específicas de  $\underline{\underline{K}}$  y  $\underline{\underline{M}}$

Dentro de los métodos de solución básica existente tenemos el de iteración inversa, de Jacobi y el método secuencial de Sturm. Como es muy importante emplear un algoritmo óptimo para el cálculo de los valores y vectores característicos sobre todo cuando el orden

de  $\tilde{K}$  y  $\tilde{M}$  es grande es lógico combinar las técnicas de solución básica a fin de diseñar un procedimiento más efectivo.

Ahora se entiende que  $\tilde{K}$  y  $\tilde{M}$  forman un sistema grande cuando es más barato operacionalmente resolver solamente para los  $p$  menores valores y vectores característicos requeridos en vez de calcularlos todos. Es por ello que el Método de Iteración en el Subespacio es una técnica muy eficiente para el análisis de sistemas de grandes anchos de banda.

#### 4.7.1 Método de Rayleigh – Ritz

Si a la expresión del problema de valores y vectores característicos dada por la ecuación generalizada:

$$\tilde{K}\tilde{\phi} = \omega^2 \tilde{M}\tilde{\phi} \quad 4.23$$

lo transformamos a su forma estándar a fin de simplificar el cálculo de los valores propios como:

$$\tilde{K}\tilde{\phi} = \lambda\tilde{\phi} \quad 4.24$$

Donde  $\tilde{K}$  es una matriz simétrica y  $\tilde{M}$  diagonal como ocurre cuando las masas se han concentrado.

Podemos expresar la función de desplazamientos  $\tilde{\phi}$  como una combinación lineal de distintas funciones de forma  $\psi$  llamadas Vectores Básicos de Ritz o simplemente Vectores de Ritz:

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i(t) \tilde{\psi}_i \quad 4.25$$

Donde  $x_i$  son las coordenadas de Ritz y los vectores  $\tilde{\psi}_i$  deben ser linealmente independientes.

En el análisis de Rayleigh - Ritz se busca determinar los vectores  $\tilde{\phi}_i, i = 1, \dots, q$  específicos que mejor se aproximen a los vectores característicos con la consideración de establecerse en un subespacio medido por los vectores de Ritz.

Para ello, deberá establecerse primero, la condición básica denominada Principio Mínimo de Rayleigh. :

$$\lambda_1 = \min \rho(f) \quad 4.26$$

Donde el mínimo es tomado de entre todos los posibles vectores  $\tilde{\phi}$  y  $\rho(\tilde{\phi})$  es el cociente de Rayleigh definido como:

$$\rho(\tilde{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{k}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{m}_{ij}} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \quad 4.27$$

Donde:

$$\tilde{k}_{ij} = \tilde{\psi}_i^T K \tilde{\psi}_j \quad 4.28$$

$$\tilde{m}_{ij} = \psi_i^T M \psi_j \quad 4.29$$

La condición necesaria para un valor mínimo de  $\rho(\tilde{\phi})$  dado en la ecuación es

$$\frac{\partial \rho(\tilde{\phi})}{\partial x_i} = 0, i=1, \dots, q \quad 4.30$$

Porque sólo los valores  $x_i$  son variables. Sin embargo

$$\frac{\partial \rho(\tilde{\phi})}{\partial x_i} = \frac{2\tilde{m} \sum_{j=1}^q x_j \tilde{k}_{ij} - 2\tilde{k} \sum_{j=1}^q x_j \tilde{m}_{ij}}{\tilde{m}^2} \quad 4.31$$

Y utilizando  $\rho = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}$ , la condición para un mínimo de  $\rho(\phi)$  es:

$$\sum_{j=1}^q x_j (\tilde{k}_{ij} - \rho \tilde{m}_{ij}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, q \quad 4.32$$

En el análisis real escribimos las  $q$  ecuaciones de la anterior relación de forma matricial obteniendo:

$$\tilde{K} x = \rho \tilde{M} x \quad 4.33$$

Dónde  $\tilde{K}$  y  $\tilde{M}$  son matrices de tamaño  $q \times q$  con elementos definidos en 4.35 y 4.36 respectivamente, y  $x$  es un vector de coordenadas de Ritz buscadas:

$$\tilde{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_q] \quad 4.34$$

La solución de 4.40 establece  $q$  valores característicos, ...  $\rho_2$  que son aproximaciones a  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  y  $q$  vectores característicos.

$$\begin{aligned} x_1^T &= [x_{11}^1 \quad x_2^1 \quad x_3^1 \quad \dots \quad x_q^1] \\ x_2^T &= [x_1^2 \quad x_2^2 \quad x_3^2 \quad \dots \quad x_q^2] \\ &\vdots \\ x_q^T &= [x_1^q \quad x_2^q \quad x_3^q \quad \dots \quad x_q^q] \end{aligned} \quad 4.35$$

Los vectores característicos  $x_i$  son usados para evaluar los vectores  $\phi_1, \dots, \phi_q$  que son aproximaciones de los vectores y que se representa como:

$$\tilde{\phi}_i = \sum_{j=1}^q x_j^i \psi_j, \quad i = 1, \dots, q \quad 4.36$$

De este análisis se obtiene una propiedad que las frecuencias naturales aproximadas no son menores que las verdaderas frecuencias.

Así:

$$\omega_1 \leq \varpi_1 \quad \omega_2 \leq \varpi_2 \dots \omega_q \leq \varpi_q \quad 4.37$$

De esta manera se ha obtenido valores aproximados que constituyen los valores más cercanos a las frecuencias y por lo tanto las mejores aproximaciones.

#### 4.7.1.1 Selección de los Vectores de Ritz

El éxito del método de Rayleigh-Ritz depende de que combinación lineal de vectores de Ritz se utilice. Por eso es importante que estos vectores sean juiciosamente seleccionados. Existen dos formas de obtenerlos; el primero está basado en una apreciación física de las formas naturales de modo y el segundo es un procedimiento numérico.

#### 4.7.1.2 Apreciación física de las formas de modo naturales

Si se pueden visualizar las formas de modo de los primeros modos naturales de vibración de una estructura los vectores de Ritz pueden ser seleccionados como una aproximación de esos modos. En particular, el  $n$ -ésimo vector de Ritz es seleccionado para aproximar la  $n$ -ésima modo natural de la estructura.

Un inconveniente de este procedimiento es que tal visualización es difícil para sistemas complejos de estructuras de dos o tres dimensiones.

#### 4.7.1.3 Vectores de Ritz Fuerza Dependientes

Es un método numérico recursivo, conveniente para el análisis de estructuras sujetas a fuerzas dinámicas externas y que no utiliza iteración.

Para un sistema no amortiguado como:

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = FG(t) \quad 4.38$$

Donde  $F$  es un bloque de "b" vectores de carga independientes y  $G(t)$  son los "b" funciones dependientes del tiempo.

El fundamento físico del método es el reconocimiento que la respuesta dinámica de una estructura será función de la distribución espacial de carga. De esta manera, cuando una carga es aplicada lentamente, las fuerzas de inercia son pequeñas y la respuesta puede ser escrita como:

$$\underline{K} \underline{u} \approx \underline{F} \quad 4.39$$

Si las inercias son importantes para cualquiera de las frecuencias el error será de la forma  $M\ddot{u}$ . La siguiente aproximación será para resolver el desplazamiento debido a este error.

Este tipo de razonamiento permite generar un procedimiento recursivo:

$$\underline{K} \underline{V} = \underline{M} \underline{V}^{(i-1)} \quad 4.40$$

Que es similar al algoritmo de Lanczos para el cálculo de valores y vectores característicos a excepción de los vectores de inicio que son los desplazamientos estáticos que provienen de la distribución espacial de carga.

$$\underline{K} \underline{X} = \underline{M} \underline{V}^{(i-1)} \quad 4.41$$

$$\underline{V}^{(i)} = \underline{X} - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \underline{V}^{(j)} \quad 4.42$$

$$c_j = \frac{\underline{V}^{(i)T} \underline{M} \underline{X}}{\underline{V}^{(i)T} \underline{M} \underline{V}^{(j)}} \quad 4.43$$

#### 4.7.2 Método de Iteración Inversa

La iteración Inversa es un método numérico iterativo que está orientado a determinar el vector característico asociado al valor propio de menor módulo, razón por la cual es de mucha importancia en la obtención de la respuesta del sistema, tiene como objetivo satisfacer la ecuación:

4.44

$$\tilde{K} \tilde{\phi} = \lambda \tilde{M} \tilde{x}_1$$

operando en ella directamente.

Para tal efecto, se asume para  $\tilde{\phi}$  un vector llamado  $\tilde{x}_1$  desconocido, asimismo el valor de  $\lambda$  que también es una incógnita se supone igual a la unidad y esto no afectará el resultado final porque los vectores característicos o eigenvectores son determinados dentro de un factor de escala.

Entonces para  $i = 1$ ,  $\tilde{\phi} = \tilde{x}_1$  y  $\lambda = 1$  el lado derecho de la ecuación arriba presentada queda como:

$$\tilde{R}_1 = \tilde{M} \tilde{x}_1 \quad 4.45$$

Estableciendo ahora la ecuación de equilibrio, se tiene:

$$k \tilde{x}_2 = \tilde{R}_1 \quad 4.46$$

Donde  $\tilde{x}_2$  es el vector desplazamiento a la fuerza  $\tilde{R}_1$ ,  $\tilde{x}_2 \neq \tilde{x}_1$  y cierra un primer ciclo de iteración que sugiere una mejor aproximación respecto de  $\tilde{x}_1$  a  $\tilde{\phi}$ .

A continuación se presenta un resumen de los pasos seguidos en este método:

Operación	Calcula	
<b>Paso 1</b>		
Factorización de $\underline{\underline{K}}$	$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{L}}\underline{\underline{D}}\underline{\underline{L}}^T$	4.47
<b>Paso 2</b>		
Determinación del vector $\underline{\underline{x}}_{i+1}$	$\underline{\underline{k}}x_{i+1} = \underline{\underline{m}}x_i$	4.48
<b>Paso 3</b>		
Obtención del valor característico para determinación de la convergencia en la iteración.	$\lambda^{(i+1)} = \frac{\underline{\underline{x}}_{i+1}^T \underline{\underline{m}}x_i}{\underline{\underline{x}}_{i+1}^T \underline{\underline{m}}x_{i+1}}$	4.49
	ó	
	$\lambda^{(i+1)} = \frac{\underline{\underline{x}}_{i+1}^T \underline{\underline{k}}x_{i+1}}{\underline{\underline{x}}_{i+1}^T \underline{\underline{m}}x_{i+1}}$	4.50
<b>Paso 4</b>		
Chequeo de la convergencia	$\frac{ \lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)} }{\lambda^{(i+1)}} \leq \textit{tolerancia}$	4.51
<b>Paso 5</b>		
Normalización del vector $\underline{\underline{x}}_{i+1}$	$x_{i+1} = \frac{\underline{\underline{x}}_{i+1}}{(\underline{\underline{x}}_{i+1}^T \underline{\underline{m}}x_{i+1})^{1/2}}$	4.52
Para asegurar que el nuevo vector satisface ortonormalmente la relación $x_{i+1}^T \underline{\underline{m}}x_{i+1} = 1$ de tal forma que no afecta la convergencia porque mantiene valores similares de una iteración a la subsiguiente.	ó	
	$x_{i+1} = \frac{\underline{\underline{x}}_{i+1}}{\Gamma_{i+1}}$	4.53

En el paso 1 para posibilitar la solución de la ecuación 4.48 se obtienen los factores  $L$  y  $D$  que son matrices triangulares inferior y superior respectivamente.

En el paso 2 se da la determinación del vector  $\bar{x}_{i+1}$  por solución de la ecuación 4.48 una vez factorizado  $K$  y asignado a  $\phi_1$  un vector inicial no ortogonal de valor  $x_1$ .

En el paso 3 dado que el resultado es un escalar proveniente de un proceso iterativo, por aplicación del Cociente de Rayleigh se obtiene el valor propio con error de segundo orden de aproximación.

En el paso 4 para la verificación de la convergencia se comparan dos valores sucesivos de  $\lambda$  en función de un límite o tolerancia seleccionado dependiendo de la precisión deseada.

En el paso 5 la ecuación de normalización puede variar en el denominador, siendo  $\Gamma_{i+1}$  un elemento escalar de máximo valor absoluto del vector  $\bar{x}_{i+1}$  que normaliza el vector utilizado en la iteración.

Esta operación de normalización que se realiza en cada paso de la iteración garantiza la convergencia al vector característico buscado evitando problemas numéricos por crecimiento o decremento de los elementos del vector  $\bar{x}_{i+1}$ .

Si  $l$  es la última iteración y satisface el paso 5 entonces el valor y vector característico será:

$$\lambda_1 = \lambda^{(l+1)} \quad \phi_1 = \frac{\bar{x}_{l+1}}{(\bar{x}_{l+1}^T m \bar{x}_{l+1})^{1/2}} \quad 4.54$$

### 4.7.3 Método Generalizado de Jacobi

Es un método que diagonaliza a la matriz  $\underline{K}$  y  $\underline{M}$  operando directamente en la ecuación generalizada  $\underline{K}\phi = \lambda \underline{M}\phi$  sin necesidad de transformarla previamente a su forma estándar.

Para ello, se utiliza una matriz  $\underline{P}$  definida como:

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \alpha & \\ & \gamma & 1 & \\ & & & 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{fila } i \\ \text{fila } j \end{matrix} \quad 4.55$$

A continuación se presenta un resumen de los pasos seguidos en este método:

Operación	calcula	
<b>Paso 1</b>		
Cálculo de los factores de convergencia.	$\frac{k_{ij}^{(k)^2}}{k_{ii}^{(k)} k_{jj}^{(k)}}, \frac{m_{ij}^{(k)^2}}{m_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)}}$	4.56
<b>Paso 2</b>		
Transformación a cero de los elementos (i, j).	$\bar{k}_{ii}^{(k)} = k_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)}$	4.57
	$\bar{k}_{jj}^{(k)} = k_{jj}^{(k)} m_{ii}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)}$	4.58
	$\bar{k}_i^{(k)} = k_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)}$	4.59

### Paso 3

Cálculo de los factores pertenecientes a la matriz de transformación  $\underline{P}$

$$x = \frac{\bar{k}^{(k)}}{2} + (\text{sign} \bar{k}^{(k)}) \sqrt{\left[ \left( \frac{\bar{k}^{(k)}}{2} \right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)} \right]} \quad 4.60$$

$$\gamma = -\frac{\bar{k}_{ii}^{(k)}}{x}, \quad 4.61$$

$$\alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(k)}}{x} \quad 4.62$$

### Paso 4

Calcula los valores y vectores característicos  $K_{k+1} = P_k^T K_k P_k$  4.63

$M_{k+1} = P_k^T M_k P_k$  4.64

$$(P_1 \dots P_{k-1}) P_k$$

### Paso 5

Verificación de la convergencia  $\frac{|\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}|}{\lambda^{(i+1)}} \leq \text{tolerancia}$  4.65

En el paso 1 el cálculo de los factores de convergencia es necesario para verificar si los elementos fuera de la diagonal de  $\underline{K}$  y  $\underline{M}$  son suficientemente pequeños para ser ceros.

En el paso 5 para la verificación de la convergencia se comparan dos valores característicos aproximados y sucesivos de  $\lambda$  en función de un límite o tolerancia seleccionado dependiendo de la precisión deseada y por verificación de los elementos fuera de la diagonal que deben ser suficientemente pequeños o iguales a cero.

#### 4.7.4 Método de Secuencia de Sturm

Es una técnica utilizada para evaluar valores característicos a diferencia de los métodos presentados que calculan eigen vectores. El procedimiento que se sigue es la factorización triangular de  $\underline{K} - \mu \underline{M}$ :

$$\underline{K} - \mu \underline{M} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T$$

4.66

El  $\mu$  es un valor de traslación seleccionado de tal forma que se pueda obtener de él una cantidad de valores positivos y negativo alternados en los elementos de la diagonal  $D$ . El resultado es igual número de valores característicos requeridos y menores a  $\mu$ .

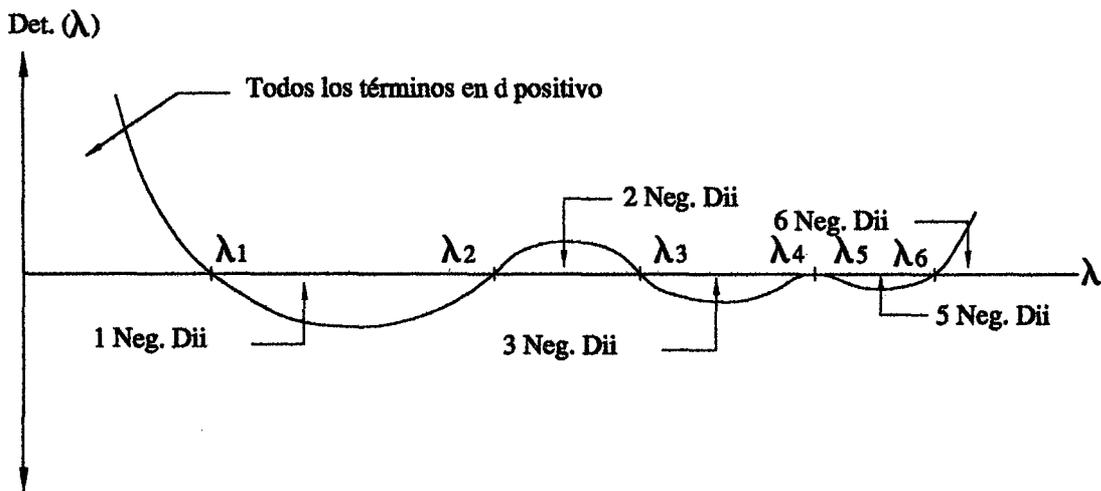


Figura 4.1

Según la figura 4.1, se observa que para un valor específico de  $w_i$ , se puede contabilizar el número de términos negativos en la matriz diagonal que es siempre igual al número de frecuencia debajo de éste valor. Por eso este concepto se puede utilizar para verificación del método de solución aplicado para calcular todas las frecuencias debajo de un valor específico. Además con la aplicación de la secuencia de Sturm es posible evaluar el número de frecuencias en un rango de frecuencia dado.

Para ello es necesario factorar la matriz en un máximo y mínimo puntos de frecuencia y la diferencia en el número de términos diagonales es igual al número de frecuencias en el rango.

#### 4.7.5 Método de Iteración en el Subespacio

Es un método muy eficiente para la solución de sistemas de matrices con grandes anchos de banda y es motivo su aplicación para la tesis. Se denomina así porque la iteración se realiza en un subespacio vectorial formado por  $q$  vectores linealmente independientes y permite determinar simultáneamente los  $p$  valores y vectores característicos requeridos, siendo  $q > p$ .

Para ello, es necesario que el subespacio generado por los  $q$  vectores de trabajo inicialmente se itere en forma inversa a fin de contener y mejorar la aproximación a los  $p$  vectores característicos requeridos y también obtener los  $p$  menores módulos de valores característicos.

Obtenidos los  $p$  valores y sus correspondientes vectores característicos el método de iteración en subespacio busca satisfacer la siguiente relación:

$$\tilde{K}\tilde{\Phi} = \tilde{M}\tilde{\Phi}\tilde{\Lambda} \quad 4.67$$

donde  $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\lambda)$  y  $\tilde{\Phi} = [\Phi_1, \dots, \Phi_p]$

Así como de cumplir adicionalmente las condiciones de ortogonalidad dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^T \tilde{K} \tilde{\Phi} &= \tilde{\Lambda}; \\ \tilde{\Phi}^T \tilde{M} \tilde{\Phi} &= \tilde{\mathbf{I}} \end{aligned} \quad 4.68$$



### Paso 3

Factorización de  $\underline{K}$

$$\underline{K} = \underline{L}\underline{D}\underline{L}^T \quad 4.75$$

### Paso 4

Iteración de Subespacio.

$$\underline{F}_k = \underline{M}\underline{X}_k \quad 4.76$$

Con la ecuación 4.76, se obtiene el vector de cargas inerciales  $\underline{F}_k$ . Luego,

$$\underline{L}^T \underline{D} \underline{L} \underline{X}_{k+1} = \underline{F}_k \quad 4.77$$

se resuelve 4.77 para obtener  $\underline{X}_{k+1}$

$$\underline{K}_{k+1} = \underline{X}_{k+1}^T \underline{K} \underline{X}_{k+1} \quad 4.78$$

$$\underline{M}_{k+1} = \underline{X}_{k+1}^T \underline{M} \underline{X}_{k+1} \quad 4.79$$

como mejor aproximación a  $\phi$ .

$$\underline{K}_{k+1} \underline{Q}_{k+1} = \underline{M}_{k+1} \underline{Q}_{k+1} \underline{\Lambda}_{k+1} \quad 4.80$$

$$\underline{X}_{k+1} = \underline{X}_{k+1} \underline{Q}_{k+1} \quad 4.81$$

### Paso 5

Medida de la Convergencia.

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(i+1)}} \leq \text{tolerancia} \quad 4.82$$

Si bien la iteración se realiza con  $q$  vectores la convergencia es medida sólo con la aproximación precisada para los  $p$  valores característicos más bajos.

$$i = 1, \dots, p$$

### Paso 6

Verificación de Valores característicos por Secuencia de Sturm.

$$\underline{\bar{K}} = \underline{K} - \mu \underline{M} \quad 4.83$$

$$\underline{\bar{K}} = \underline{L}\underline{D}\underline{L}^T \quad 4.84$$

En el paso 1 también se puede determinar el subespacio óptimo con la expresión:

$$q = \text{máximo}(4, \sqrt{b}) \quad 4.85$$

Lo cual indica que el subespacio óptimo es proporcional al ancho de banda de la matriz de rigidez  $\underline{K}$ .

En el paso 2 es recomendable que el subespacio vectorial  $q$  sea convenientemente grande para evitar que algunos valores característicos se pierdan. Por otro lado, la selección de los vectores iniciales de iteración puede hacerse valiéndose de criterios como el de asignar un valor unitario a cada grado de libertad de los elementos del espacio vectorial generado o de asignar valores de la matriz de masa basándose en el criterio de la proporción  $k_{ii}/m_{ii}$  para así corresponder a los valores de frecuencia más bajos y asegurar de excitar todos los grados de libertad del sistema.

En el paso 3 podría presentarse que existan valores característicos repetidos o de valor aproximado lo que hace el proceso de convergencia lento. En este caso una estrategia de traslación haría que dicho proceso converga rápidamente. Para ello se factoriza la expresión  $\underline{K} - \mu \underline{M}$  (ecuación 4.83). Hay que acotar que para pequeños anchos de banda de matrices el esfuerzo numérico es pequeño. Para la aplicación en la Iteración Inversa constituye un efectivo método de evaluación para sistemas de frecuencia sin amortiguamiento y formas de modo de un sistema estructural.

En el paso 4 una vez definidos los vectores iniciales de iteración y factorado la matriz de rigidez, con la ecuación de 4.74 se obtiene el vector de cargas inerciales  $F_k$ . Las ecuaciones 4.78 y 4.79 determinan las proyecciones de  $\underline{K}$  y  $\underline{M}$  en el subespacio  $E_k$  que tiende a converger a  $E_\infty$  a medida que las iteraciones se realicen.

La iteración continua de  $\underline{K}$  y  $\underline{M}$  las transforma en matrices diagonales lo cual lleva a utilizar en forma efectiva el método generalizado de Jacobi para obtener los valores y vectores característicos.

De esto se desprende que:

$$\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda \quad 4.86$$

$$X_{k+1} \rightarrow \Phi \quad 4.87$$

Cuando

$$k \rightarrow \infty \quad 4.88$$

Con las relaciones 4.80 y 4.81 se establece una fase importante de verificación en el método de iteración en el subespacio.

En el paso 6 a fin de asegurar que los valores más bajos se han calculados, previa incorporación del valor de traslación  $\mu$  transformando  $\tilde{K}$  en 4.83 se establece que en 4.84 el número de elementos negativos en  $D$  es igual al número de eigen valores más pequeños de  $\mu$ . Para este caso ese número es igual a los  $p$  valores requeridos.

En esencia este método consiste de los siguientes pasos:

1. Generación de un espacio vectorial (o de vectores) inicial de tamaño  $q$ , siendo  $p$  el número de valores y vectores característicos ha ser calculados de tal forma que  $q < p$ .
2. Uso simultáneo de iteración inversa sobre los  $q$  vectores de inicio y análisis de Ritz para extraer la mejor aproximación de un valor y vector característico desde los  $q$  vectores de iteración y hacerlo paralelo el subespacio  $p$ .
3. Uso de la secuencia de Sturm después de la convergencia de la iteración para verificar los valores y correspondientes vectores característicos.

#### 4.8 FORMULACIÓN PARA EL ANÁLISIS SÍSMICO

De la ecuación de movimiento (4.02), y definiéndola para el caso de sismos, ésta se puede expresar como:

$$\underline{M}\ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{u}}(t) + \underline{K}\underline{u}(t) = \underline{o} \quad 4.89$$

Donde  $\underline{u}(t)$  se expresa a su vez como:

$$\underline{u}(t) = \underline{1}u_g(t) + \underline{x}(t) \quad 4.90$$

Siendo:

$\underline{u}(t)$  Vector de desplazamientos totales o absolutos

$\underline{1}$  Es el vector de desplazamientos en distintos grados de libertad cuando la estructura se desplaza como cuerpo rígido con el terreno. Ver figura 4.2.

$u_g$  Valor escalar del desplazamiento del terreno.

$\underline{x}$  Vector de desplazamiento del terreno.

Despejando  $\underline{x}$  y sustituyendo en 4.89 se tiene que:

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = -M \ddot{u}_g \quad 4.91$$

Cabe anotar que al expresar los desplazamientos de cuerpo rígido,  $\underline{1}$ , en series de Fourier, se tiene una componente radial  $u = u_g \cos\theta$ , mientras que la componente tangencial resulta  $v = -u_g \text{sen}\theta$ . Un solo término de la serie ( $m=1$ ) es suficiente.

$$\underline{1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \cos \theta \\ 0 \\ -1 \text{sen} \theta \\ \sim \\ 0 \\ 1 \cos \theta \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad 4.92$$

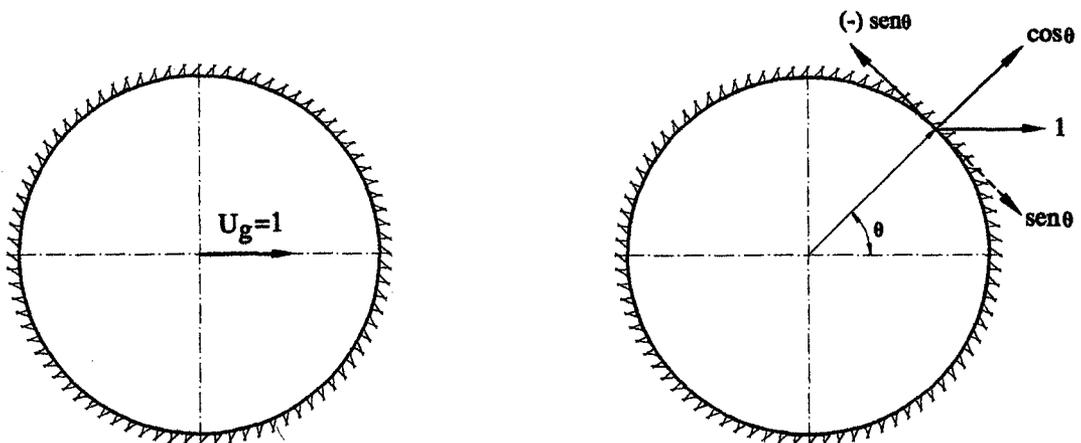


Figura 4.2

Al expresar los desplazamientos en series de Fourier se obtienen sistemas de ecuaciones diferenciales independientes para cada término de la serie, como se indicó en el capítulo III.

Sin embargo, en este caso todas las contribuciones son cero excepto la correspondiente al término  $m=1$ . Por lo tanto, en las expresiones siguientes éste es el único término considerado.

Siendo los modos de vibración,  $\phi_i$ , una base completa, los desplazamientos relativos pueden expresarse como una combinación lineal de los modos.

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \phi_i \quad 4.93$$

En este caso  $\alpha_i(t)$  es la "componente" correspondiente al modo  $i$ .

Sustituyendo esta expresión y sus derivadas  $\dot{\tilde{x}}$ ,  $\ddot{\tilde{x}}$  en 4.91 se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \left[ M \ddot{\alpha}_i(t) \phi_i + C \dot{\alpha}_i(t) \phi_i + K \alpha_i(t) \phi_i \right] = -M \ddot{1} u_g \quad 4.94$$

Ordenando y premultiplicando cada una de estas ecuaciones diferenciales por  $\phi_j^T$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$  y teniendo en cuenta la ortogonalidad de los productos vectoriales donde:

$$\phi_j^T M \phi_i = \phi_j^T C \phi_i = \phi_j^T K \phi_i = 0 \quad \text{Para } j \neq i$$

Se tiene que el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (4.91) se reduce a un juego de  $n$  ecuaciones independientes, de la forma:

$$(\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_i) \ddot{\alpha}_i(t) + (\underline{\phi}_i^T \underline{C} \underline{\phi}_i) \dot{\alpha}_i(t) + (\underline{\phi}_i^T \underline{K} \underline{\phi}_i) \alpha_i(t) = (-u_g) (\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{1}) \quad 4.95$$

Es decir:

$$\ddot{\alpha}_i(t) + (2\beta\omega_i) \dot{\alpha}_i(t) + \omega_i^2 \alpha_i(t) = \Gamma_i (-u_g) \quad 4.96$$

Donde  $\Gamma_i$  es el factor de participación estática del modo  $i$  definida como:

$$\Gamma_i = \frac{\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{1}}{\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_i} \quad 4.97$$

#### 4.8.1 Análisis Modal Espectral

La respuesta máxima correspondiente al modo  $i$  se expresa como:

$$\underline{x} = S_{di} \Gamma_i \underline{\phi}_i \quad 4.98$$

$S_{di}$  es el espectro de desplazamiento relativo definido como:

$$S_{di}(\omega, \beta) = \max_x y(t) \quad 4.99$$

Aquí  $S_{di}$  es el valor leído del espectro de respuesta de desplazamiento para un sismo dado o un valor leído de un espectro teórico obtenido de normas de diseño sísmico y para un amortiguamiento  $\beta$  especificado. Se relaciona con el espectro de pseudo velocidad relativa y pseudo aceleraciones absolutas con las siguientes expresiones:

$$S_{vi}(\omega, \beta) = \omega S_{di}(\omega, \beta) \quad 4.100$$

$$S_{ai}(\omega, \beta) = \omega^2 S_{di}(\omega, \beta) \quad 4.101$$

#### 4.8.1.1 Combinación Modal

En el análisis modal espectral la determinación de todos los modos se realiza en forma aproximada combinando las respuestas. Estas respuestas pueden ser desplazamientos, fuerzas globales, efectos locales en los elementos y combinarlos por diversos criterios.

Una forma de combinación puede ser usando el promedio del 75% de la raíz cuadrada de la suma de las respuestas al cuadrado (*RSCS*) con el 25% de la suma de los valores absolutos.

$$(.25 \sum ABS + .75 RSCS) / 2 \quad 4.102$$

## CAPITULO V

### DESARROLLO DE ELEMENTOS FINITOS

Para la aplicación de elementos finitos al análisis dinámico de estructuras de revolución con funciones ortogonales se utilizarán las ecuaciones de desplazamientos y deformaciones para cáscaras sometidas a carga no simétrica del Capítulo III.

Lo que viene a continuación es el desarrollo de los elementos que conforman las respectivas matrices de rigidez y masas que se desarrollaron para la aplicación de un programa de cómputo motivo de la tesis.

#### 5.1 OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

La expresión para la obtención de la matriz de rigidez se da a través de la ecuación:

$$\tilde{K}^e = \int_{V^e} \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{B} d(vol) \quad 5.01$$

Que adaptada a un elemento finito tronco cónico para el análisis de una estructura axisimétrica y teniendo en cuenta las propiedades ortogonales de las funciones armónicas escogidas:

$$\int_0^a \text{sen} \frac{m\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} dz = 0 \quad \text{donde } m = 0,1,\dots \quad 5.02$$

$$\int_0^a \text{sen}^2 \frac{m\pi z}{a} dz = \int_0^a \cos^2 \frac{m\pi z}{a} dz = \frac{a}{2} \quad \text{donde } m = 1,2,\dots \quad 5.03$$

$$\int_0^a \text{sen} \frac{m\pi z}{a} \text{sen} \frac{n\pi z}{a} dz = 0 \quad \text{donde } m \neq n \quad 5.04$$

$$\int_0^a \cos \frac{m\pi z}{a} \cos \frac{n\pi z}{a} dz = 0 \quad \text{donde } m \neq n \quad 5.05$$

Queda:

$$\tilde{K}^e = \int_0^1 \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{B} \pi r l ds' \quad 5.06$$

$$\text{Donde:} \quad s' = \frac{s}{l} \quad \text{Para: } 0 \leq s' \leq 1$$

Dadas las condiciones de ortogonalidad el sistema de ecuaciones resulta como un sistema de bloques desacoplados de la forma:

$$\begin{bmatrix} [k^{11}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k^{22}] & & \\ 0 & & [k^{33}] & \\ & 0 & & \\ 0 & & & [k^{mm}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}^1 \\ \tilde{a}^2 \\ \tilde{a}^3 \\ \vdots \\ \tilde{a}^m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{f}^1 \\ \tilde{f}^2 \\ \tilde{f}^3 \\ \vdots \\ \tilde{f}^m \end{Bmatrix} = \tilde{0} \quad 5.07$$

Donde cada uno de los bloques  $[k^{mm}]$  corresponde a un modo componente en la expansión en series de Fourier.

Por lo tanto, las ecuaciones para obtener los coeficientes de desplazamiento  $\tilde{a}$  para cada modo pueden ser resueltas en forma independiente.

### 5.1.1 Expresiones de la Matriz B para el Cálculo de la Matriz de Rigidez

Como parte del proceso para la obtención de la matriz de rigidez dado por la ecuación 5.06 se tiene a la matriz  $\tilde{\mathbf{B}}$  de deformaciones que para su determinación existe un desarrollo algebraico previo dado por:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{L} \left\{ \tilde{N}_i \mid \tilde{N}_j \right\} = \left\{ \tilde{B}_i \mid \tilde{B}_j \right\} \quad 5.08$$

Que como se vio en el Capítulo III  $\tilde{L}$  es un operador diferencial y  $N$  son las funciones de forma.

### 5.1.2 Componentes de la Matriz B

Las siguientes expresiones son el resultado de cada una de las componentes del proceso que involucra la operación de la ecuación 5.08:

Estos elementos están distribuidos en la matriz B como se muestra:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_7 & B_{13} & B_{19} & B_{25} & B_{31} & B_{37} & B_{43} \\ B_2 & B_8 & B_{14} & B_{20} & B_{26} & B_{32} & B_{38} & B_{44} \\ B_3 & B_9 & B_{15} & B_{21} & B_{27} & B_{33} & B_{39} & B_{45} \\ B_4 & B_{10} & B_{16} & B_{22} & B_{28} & B_{34} & B_{40} & B_{46} \\ B_5 & B_{11} & B_{17} & B_{23} & B_{29} & B_{35} & B_{41} & B_{47} \\ B_6 & B_{12} & B_{18} & B_{24} & B_{30} & B_{36} & B_{42} & B_{48} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$B_1 = -\frac{1}{l} \text{sen} \phi' \cos m\theta \quad 5.09$$

$$B_2 = \left[ \left(1 - \frac{s}{l}\right) \frac{\cos \phi' \text{sen} \phi'}{r} - \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) \frac{\text{sen} \phi'' \cos \phi'}{r} \right] \cos m\theta \quad 5.10$$

$$B_3 = -\frac{m}{r} \left(1 - \frac{s}{l}\right) \text{sen} \phi' \text{sen} m\theta \quad 5.11$$

$$B_4 = -\frac{6}{l} \left(1 - 2\frac{s}{l}\right) \cos \phi' \cos m\theta \quad 5.12$$

$$B_5 = -\left[ \frac{m^2}{r^2} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) \right] \quad 5.13$$

$$B_6 = 2\frac{m}{r} \cos \phi' \left[ 6\left(-\frac{s^2}{l^2} + \frac{s}{l}\right) \frac{1}{l} + \frac{\cos \phi'}{r} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) \right] \text{sen} m\theta \quad 5.14$$

$$B_7 = -\frac{1}{l} \cos \phi' \cos m\theta \quad 5.15$$

$$B_8 = \left[ \frac{\cos^2 \phi'}{r} \left(1 - \frac{s}{l}\right) + \frac{\text{sen}^2 \phi'}{r} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) \right] \cos m\theta \quad 5.16$$

$$B_9 = -\frac{m}{r} \cos \phi' \left(1 - \frac{s}{l}\right) \text{sen} m\theta \quad 5.17$$

$$B_{10} = \frac{\text{sen}\phi'}{l^2} 6 \left(1 - 2\frac{s}{l}\right) \cos m\theta \quad 5.18$$

$$B_{11} = \left[ \text{sen}\phi' \frac{m^2}{r^2} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) + \frac{\cos\phi' \text{sen}\phi'}{rl} 6 \left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right) \right] \cos m\theta \quad 5.19$$

$$B_{12} = -\frac{2m}{r} \text{sen}\phi' \left[ \frac{6}{l} \left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right) + \frac{\cos\phi'}{r} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) \right] \text{sen}m\theta \quad 5.20$$

$$B_{13} = 0 \quad 5.21$$

$$B_{14} = \text{sen}\phi' \frac{l}{r} \left(\frac{s}{l} - 2\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) \cos m\theta \quad 5.22$$

$$B_{15} = 0 \quad 5.23$$

$$B_{16} = \frac{1}{l} \left(4 - 6\frac{s}{l}\right) \cos m\theta \quad 5.24$$

$$B_{17} = \left[ \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{s}{l} - 2\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) l - \frac{\cos\phi'}{r} \left(1 - 4\frac{s}{l} + 3\frac{s^2}{l^2}\right) \right] \cos m\theta \quad 5.25$$

$$B_{18} = 2\frac{m}{r} \left[ \left(1 - 4\frac{s}{l} + 3\frac{s^2}{l^2}\right) - \frac{l \cos\phi'}{r} \left(\frac{s}{l} - 2\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) \right] \text{sen}m\theta \quad 5.26$$

$$B_{19} = 0 \quad 5.27$$

$$B_{20} = \frac{m}{r} \left(1 - \frac{s}{l}\right) \cos m\theta \quad 5.28$$

$$B_{21} = \left[ -\frac{1}{l} - \frac{\cos \phi'}{r} \left(1 - \frac{s}{l}\right) \right] \text{sen} m\theta \quad 5.29$$

$$B_{22} = 0 \quad 5.30$$

$$B_{23} = \frac{m \text{sen} \phi'}{r^2} \left(1 - \frac{s}{l}\right) \cos m\theta \quad 5.31$$

$$B_{24} = 2 \frac{\cos \phi'}{r} \left[ -\frac{1}{l} - \frac{\cos \phi'}{r} \left(1 - \frac{s}{l}\right) \right] \text{sen} m\theta \quad 5.32$$

$$B_{25} = -\frac{1}{l} \text{sen} \phi' \cos m\theta \quad 5.33$$

$$B_{26} = \left[ \frac{\cos \phi' \text{sen} \phi' s}{r l} - \frac{\text{sen} \phi' \cos \phi'}{r} \left(3 \frac{s^2}{l} - 2 \frac{s^3}{l^3}\right) \right] \cos m\theta \quad 5.34$$

$$B_{27} = -\frac{m s}{r l} \text{sen} \phi' \text{sen} m\theta \quad 5.35$$

$$B_{28} = \frac{\cos \phi'}{l} \left(6 - 12 \frac{s}{l}\right) \cos m\theta \quad 5.36$$

$$B_{29} = -\cos \phi' \left[ \frac{m^2}{r^2} \left(3 \frac{s^2}{l^2} - 2 \frac{s^3}{l^3}\right) - \frac{\cos \phi'}{r l} 6 \left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right) \right] \cos m\theta \quad 5.37$$

$$B_{30} = -2\frac{m}{r}\cos\phi'\left[\frac{1}{l}6\left(\frac{s}{l}-\frac{s^2}{l^2}\right)-\frac{\cos\phi'}{r}\left(3\frac{s^2}{l^2}-2\frac{s^3}{l^3}\right)\right]\text{sen}m\theta \quad 5.38$$

$$B_{31} = -\frac{1}{l}\cos\phi'\cos m\theta \quad 5.39$$

$$B_{32} = \left[\frac{s}{l}\frac{\cos^2\phi'}{r}+\frac{\text{sen}^2\phi'}{r}\left(3\frac{s^2}{l^2}-2\frac{s^3}{l^3}\right)\right]\cos m\theta \quad 5.40$$

$$B_{33} = -\frac{m}{r}\frac{s}{l}\cos\phi'\text{sen}m\theta \quad 5.41$$

$$B_{34} = -\frac{\text{sen}\phi'}{l^2}6\left(1-2\frac{s}{l}\right)\cos m\theta \quad 5.42$$

$$B_{35} = \text{sen}\phi'\left[\frac{m^2}{r^2}\left(3\frac{s^2}{l^2}-2\frac{s^3}{l^3}\right)-\frac{\cos\phi'}{rl}6\left(\frac{s}{l}-\frac{s^2}{l^2}\right)\right]\cos m\theta \quad 5.43$$

$$B_{36} = 2\frac{m}{r}\text{sen}\phi'\left[\frac{1}{l}6\left(\frac{s}{l}-\frac{s^2}{l^2}\right)-\frac{\cos\phi'}{r}\left(3\frac{s^2}{l^2}-2\frac{s^3}{l^3}\right)\right]\text{sen}m\theta \quad 5.44$$

$$B_{37} = 0 \quad 5.45$$

$$B_{38} = \frac{\text{sen}\phi'}{r}\left(\frac{s^3}{l^3}-\frac{s^2}{l^2}\right)l\cos m\theta \quad 5.46$$

$$B_{39} = 0 \quad 5.47$$

$$B_{40} = -\frac{1}{l} 2 \left( 1 - 3 \frac{s}{l} \right) \cos m \theta \quad 5.48$$

$$B_{41} = \left[ \frac{m^2 l}{r^2} \left( \frac{s^3}{l^3} - \frac{s^2}{l^2} \right) + \frac{\cos \phi'}{r} \left( 2 \frac{s}{l} - 3 \frac{s^2}{l^2} \right) \right] \cos m \theta \quad 5.49$$

$$B_{42} = 2 \frac{m}{r} \left[ \left( 3 \frac{s^2}{l^2} - 2 \frac{s}{l} \right) - \frac{\cos \phi'}{r} \left( \frac{s^3}{l^3} - \frac{s^2}{l^2} \right) l \right] \text{sen} m \theta \quad 5.50$$

$$B_{43} = 0 \quad 5.51$$

$$B_{44} = \frac{m s}{r l} \cos m \theta \quad 5.52$$

$$B_{45} = \left[ \frac{1}{l} - \frac{\cos \phi' s}{r l} \right] \text{sen} m \theta \quad 5.53$$

$$B_{46} = 0 \quad 5.54$$

$$B_{47} = \frac{m s}{r^2 l} \text{sen} \phi' \cos m \theta \quad 5.55$$

$$B_{48} = 2 \frac{\text{sen} \phi'}{r l} \left( 1 - \cos \phi' \frac{s}{l} \right) \text{sen} m \theta \quad 5.56$$

El cálculo de la integral del producto de  $B^T DB$  implica un desarrollo algebraico extenso de cada una de las componentes del producto matricial. Sin embargo, ésta puede también efectuarse, más eficientemente, utilizando integración numérica de Gauss – Legendre

### 5.1.3 Aplicación de Integración Numérica.

Para ello, se define a la ecuación 5.06 en términos de integración numérica dado por la expresión:

$$\underline{\underline{K}}^e = \pi \int_0^l \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} r l ds' = \pi \sum_{q=1}^n \mathbf{W}_q G(\xi_q) \quad 5.57$$

Donde la función

$$\mathbf{G}(\xi) = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} r l$$

el radio expresado en función de s,

$$r = \left(1 - \frac{s}{l}\right) r_i + \frac{s}{l} r_j$$

y

$$s' = s/l \quad ; \quad 0 \leq s' \leq 1$$

Siendo  $\mathbf{W}_q$  y  $\xi_q$  el peso y la abcisa del punto de integración, respectivamente, en el cual hay que evaluar el integrando o función  $\mathbf{G}(\xi)$  que es el coeficiente de ponderación correspondiente a ese punto.

Para el desarrollo planteado de la ecuación 5.54 se escoge como base de cálculo un orden de integración  $n = 4$ . De una tabla para Integración Numérica de Gauss Legendre se obtienen:

N	Abcisa de punto de Integración $\xi$	Peso $W_q$
4	$\pm 0.86113 63115 94053$	0.34785 48451 37454
	$\pm 0.33998 10435 84856$	0.65214 51548 62546

Que están definidos para un intervalo normalizado que va de  $-1$  a  $1$ .

Se requiere un cambio de variable:

$$s = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\xi_q \quad 5.58$$

Y por tanto

$$ds = \frac{l}{2}d\xi \quad 5.59$$

De esta aplicación se obtienen los siguientes puntos de integración  $\xi_i$  que reemplazan al factor  $s/l$  en las funciones de forma desarrolladas:

$\xi_1 = -0.861136311594053$	$s_1 =$	0.0694318442	5.60
$\xi_2 = -0.339981043584856$	$s_2 =$	0.3300094782	
$\xi_3 = 0.339981043584856$	$s_3 =$	0.9305681558	
$\xi_4 = 0.861136311594053$	$s_4 =$	0.6699905218	

Combinando los pesos de integración con el factor  $\pi$  ( resultante de la integración de términos tales como  $\cos$  ó  $\sin$  entre  $0$  y  $2\pi$  ) y con el factor  $\frac{1}{2}$  de la expresión 5.59, se tiene que:

$W_1 =$	0.1739274226	0.5464091131	5.61
$W_2 =$	0.3260725774	1.0243840720	
$W_3 =$	0.3260725774	1.0243840720	
$W_4 =$	0.1739274226	0.5464091131	

Los valores obtenidos en 5.60 y 5.61 servirán para evaluar y multiplicar respectivamente las funciones de forma que están en las expresiones de las componentes de la matriz B que intervienen en el producto matricial  $B^T DB$ .

## 5.2 MATRIZ DE MASAS CONCENTRADAS

La matriz de masa de un elemento de nudos  $i, j$  se define por:

$$\tilde{M}_{ij}^e = \int_{V^e} \tilde{N}^T \rho \tilde{N} dV \quad 5.62$$

Donde:

$$dV = (rd\theta)dA = (rd\theta)tds \quad 5.63$$

El desarrollo analítico de la ecuación 5.62 utilizando las funciones de formas aplicadas en la matriz de rigidez  $K$  donde se consideran los 4 grados de libertad por nudo del elemento tronco cónico da como resultado una matriz de "masa consistente" con componentes fuera de la diagonal diferentes de cero.

La ecuación 5.62 puede diagonalizarse si por integración numérica se eligen puntos que se sitúen en los nudos, de tal forma que si en un nudo  $i$  todas las funciones de forma son cero excepto  $N_i$ , se tendrá que los términos de la matriz de masa fuera de la diagonal sean cero.

Sin embargo, el cálculo de la matriz de masa de un elemento finito se simplifica aún más cuando ésta se diagonaliza suponiendo que su masa distribuida puede estar concentrada proporcionalmente a los coeficientes de la diagonal principal de la matriz de masas

consistente. En este trabajo se ha supuesto que las componentes de la diagonal asociadas con los grados de libertad son cero, es decir, se ha supuesto que la inercia rotacional es despreciable.

Este criterio implica la utilización de funciones de forma que sean el producto de funciones lineales que describan grados de libertad de traslación en los nudos  $i, j$  en el meridiano y de funciones trigonométricas en la dirección circunferencial tal como:

$$L_i = \left(1 - \frac{s}{l}\right) \cos m\theta$$

5.64

$$L_j = \frac{s}{l} \cos m\theta$$

Y definiendo el radio del elemento tronco cónico con nudos  $i, j$  como:

$$r^m = \left(1 - \frac{s}{l}\right) \cos m\theta r_i^m + \frac{s}{l} \cos m\theta r_j^m$$

5.65

$$= L_1 \cos m\theta r_i^m + L_2 \cos m\theta r_j^m$$

0

$$r^m = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \cos m\theta \begin{bmatrix} r_i^m \\ r_j^m \end{bmatrix}^e$$

5.66

Siendo

$$\begin{bmatrix} r^m \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} r_i^m \\ r_j^m \end{bmatrix}$$

5.67

Teniendo en cuenta las propiedades ortogonales de la función de forma usada queda:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho l \cos^2 \theta d\theta N^T N (rd\theta) t ds' \\ &= \pi t \rho l \int_0^1 N^T N r ds' \end{aligned} \quad 5.68$$

$$= \pi t \rho l \int_0^1 \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}^T [L_1 \quad L_2] (L_1 r_i + L_2 r_j) ds'$$

$$\tilde{M} = \pi t \rho l \int_0^L \begin{bmatrix} L_1^3 & L_1^2 L_2 \\ L_2^2 L_1 & L_2^3 \end{bmatrix} r ds \quad 5.69$$

Donde  $\tilde{M}$  es la matriz de masa de un elemento  $e$  de nudos  $i, j$  consistente cuyo desarrollo de la integral genera las siguientes expresiones:

$$m_{a_i} = \frac{3!}{4!} r_i + \frac{2!1!}{4!} r_j = \frac{3r_i + r_j}{12} \quad 5.70$$

$$m_{a_j} = \frac{2!1!}{4!} r_i + \frac{3!}{4!} r_j = \frac{r_i + 3r_j}{12}$$

Siendo la suma de los elementos de la diagonal de la matriz consistente igual a:

$$\Sigma m_{a_j} = \frac{3r_i + r_j}{4} \quad 5.71$$

$$\Sigma m_{a_j} = \frac{r_i + 3r_j}{4}$$



### 5.3 DESARROLLO DE PROGRAMA DE CÓMPUTO POR ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS SÍSMICO DE ESTRUCTURAS AXISIMÉTRICAS

Sin duda que el problema de la determinación de los valores y vectores característicos o también llamados eigen pares en su forma generalizada:

$$(\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M})\tilde{\phi} = \tilde{0} \quad 5.69$$

Conlleva a la búsqueda de algoritmos y procedimientos numéricos basados en las propiedades de simetría de la matriz de rigidez y masas así como de ortogonalidad del vector  $\tilde{\phi}$  para la solución del sistema de n ecuaciones con n incógnitas resultantes de las formulaciones por elementos finitos.

Entonces, para el análisis sísmico por elementos finitos con funciones trigonométricas o también llamado método semianalítico es necesario hacer un análisis dinámico y para ello, tomando en cuenta los métodos presentados en el capítulo IV se ha desarrollado un programa cómputo que consta fundamentalmente de las siguientes fases:

#### 5.3.1 Fase 1: Lectura e impresión de datos. Subprograma datos

En esta fase se define las coordenadas de los nodos en base a un sistema de coordenadas global, las condiciones de contorno, las propiedades del material de cada elemento que han sido generados en una etapa previa de discretización. La tipología aplicada para láminas de revolución es el elemento tronco cónico de dos nodos.

Las condiciones de contorno se asignan en base de códigos que toman el valor de 0 para movimiento libre o 1 para movimiento restringido. Es con el subprograma PM donde se

leen los parámetros de material necesario para formar la matriz constitutiva D. El orden de lectura empieza por el módulo de elasticidad, coeficiente Poisson y densidad.

La conectividad de los elementos se lleva a cabo por la subprograma CE. Esto se realiza asociando por un número al elemento y también como dato extra los nudos  $i,j$ . Los datos inherentes al análisis dinámico se dan en el sub programa DD

### **5.3.2 Fase 2: Cálculo y ensamblaje de la matriz de Rigidez y Masas.**

Es una fase crucial en el desarrollo por computadora de los elementos finitos. El planteamiento de cómo se debe almacenar las componentes de la matriz de rigidez y de masas para lograr mecanismos eficientes de reserva de memoria esta ligada a un conocimiento previo de la configuración de la matriz; es decir si ésta presenta simetría y una diagonal con ancho de banda constante o variable.

Esta última configuración presenta una generalidad interesante porque no sólo optimiza memoria obviando aquellas componentes iguales a cero haciéndola más compacta, sino que es ideal para adaptar algoritmos de solución a sistemas de ecuaciones lineales considerando una factorización en matrices triangulares inferior y superior.

El concepto es simple: una vez definidas las condiciones de contorno de cada nudo se procede a numerar aquellos grados de libertad no restringidos convirtiéndose en ecuaciones activas del sistema que pasan a ser coeficientes de las matrices dentro de un perfil no nulo. Para ello se utiliza el subprograma Setup que a su vez utiliza al subprograma Codes para compatibilizar los grados de libertad local con los del sistema global.

En base a esta consideración previa es que en la subrutina KFM se construye la matriz de rigidez K de cada uno de los elementos que forma parte de la malla del sistema global. Y

tal como ya se definió cada una de las componentes de la matriz de deformaciones  $\mathbf{B}$ , la aplicación de la integración numérica para el desarrollo de la matriz de rigidez, lo que faltaría es desarrollar una formulación eficiente en líneas de programación del triple producto matricial.

Para la determinación de la matriz de masa se aplica un criterio diferente de obtención de coeficientes basada en una concentración de masa en los nudos que la convierte en matriz diagonal.

Finalmente viene la fase de ensamble de la matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  y del vector de masas nodales a partir de las contribuciones de los diferentes elementos de la malla.

El ensamble de la matriz global almacenada en forma de perfil se lleva a cabo usando una matriz de indicadores llamada  $id(i)$ .

### **5.3.3 Fase 3: Obtención de valores y vectores característicos.**

El objetivo en esta fase es de aplicar un algoritmo eficiente para la obtención de las formas de modo y vectores característicos que se desarrolla en el subprograma *Subspite*. Aunque la literatura presente una gama diferente de solución de sistemas de ecuaciones, lo cierto es que no se puede generalizar la aplicación de un procedimiento específico sino más bien de aprovechar las características propias del problema que se afronta.

Sin embargo cuando se trata de afrontar sistemas grandes de eigenpares es decir cuando es más barato solucionar para los eigen valores y vectores requeridos en lugar de simplemente calcularlos todos, el Método de Iteración en el Subespacio es el más indicado porque cumple los requisitos de confiabilidad, precisión y porque el costo de solución esta esencialmente determinado por el número de operaciones de alta velocidad y la posibilidad de uso eficiente de almacenamiento de memoria " out of core " ( de perfil o fuera del núcleo ) en la solución del sistema.

El método de iteración en el subespacio tiene como objetivo la obtención de las frecuencias más bajas que para el caso de superposición modal son los que mas interesan para el análisis dinámico. Se compone de varios procedimientos como el de iteración inversa que para su aplicación utiliza el procedimiento Solve donde la matriz presenta una factorización de la matriz de rigidez en triangular inferior y superior.

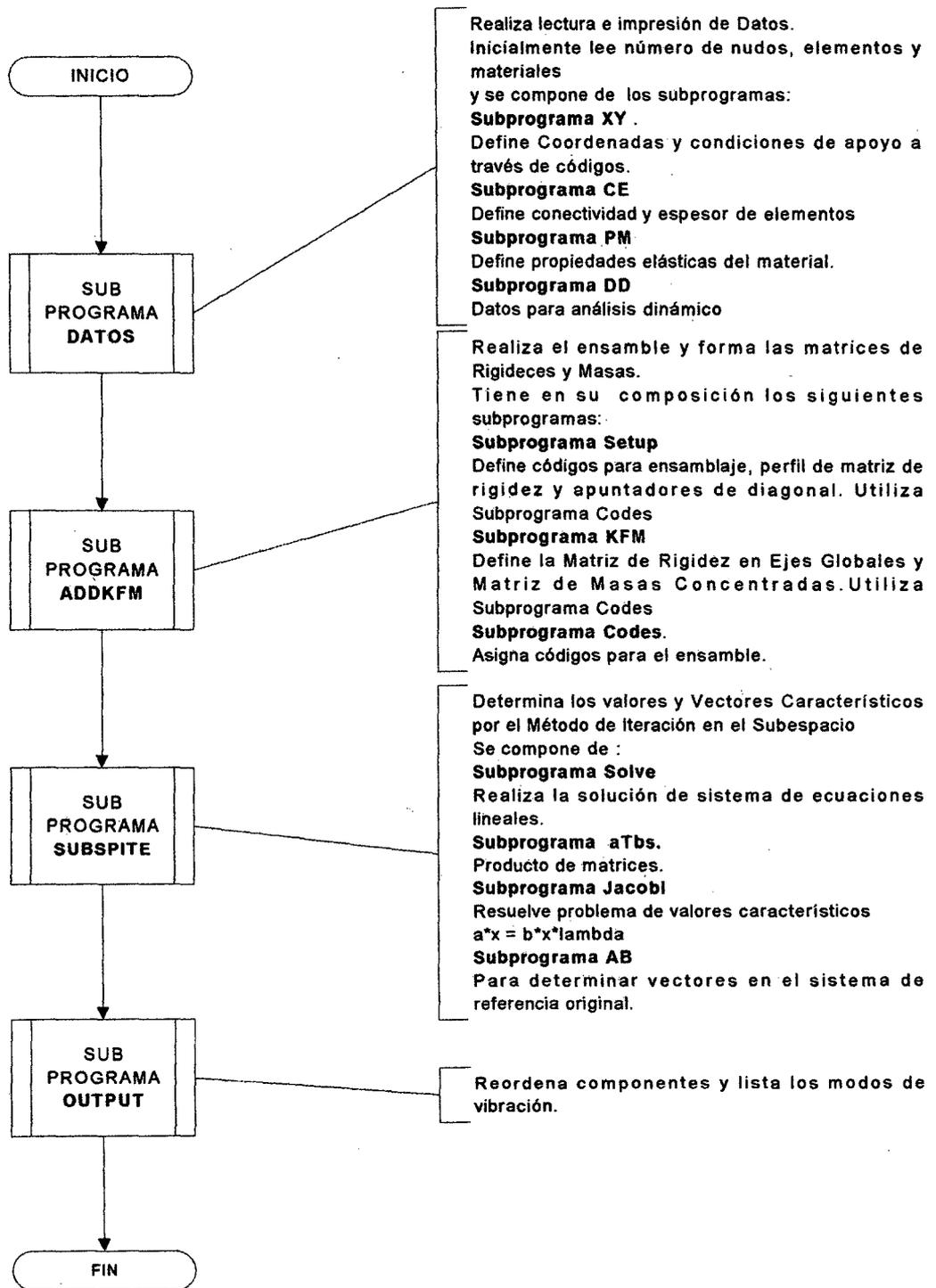
También adopta como parte de su estrategia de solución el método de Jacobi que junto con subprogramas complementarios como atbs y AB.

#### **5.3.4 Fase 4: Salida de resultados.**

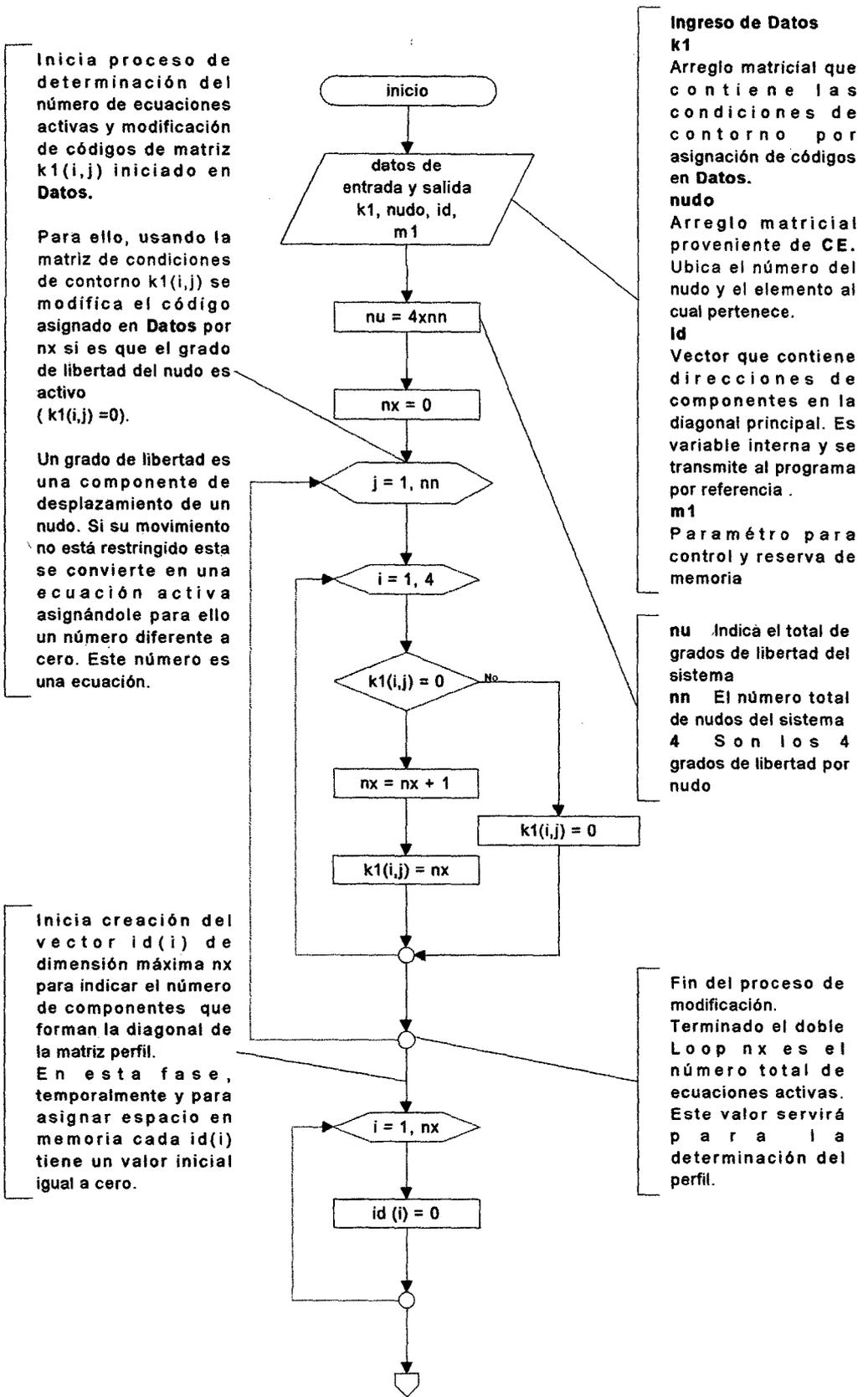
Etapa final donde se ordena componentes modales de vibración para luego aplicar el método modal espectral, realizando de esta manera el análisis sísmico con la obtención de los desplazamientos, cortantes en la base y esfuerzos internos generados por el sismo.

Seguidamente se presentan los diagramas de flujo del programa desarrollado para la Tesis dando mayor incidencia en el proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez  $K$ .

**DIAGRAMA DE FLUJO PRINCIPAL**  
**ANALISIS SISMICO, LINEAL Y ELASTICO DE**  
**CASCARAS AXISIMETRICAS**



## SUBPROGRAMA SETUP



Inicia proceso de determinación del número de ecuaciones activas y modificación de códigos de matriz  $k1(i,j)$  iniciado en Datos.

Para ello, usando la matriz de condiciones de contorno  $k1(i,j)$  se modifica el código asignado en Datos por  $nx$  si es que el grado de libertad del nudo es activo ( $k1(i,j) = 0$ ).

Un grado de libertad es una componente de desplazamiento de un nudo. Si su movimiento no está restringido esta se convierte en una ecuación activa asignándole para ello un número diferente a cero. Este número es una ecuación.

Inicia creación del vector  $id(i)$  de dimensión máxima  $nx$  para indicar el número de componentes que forman la diagonal de la matriz perfil.

En esta fase, temporalmente y para asignar espacio en memoria cada  $id(i)$  tiene un valor inicial igual a cero.

**Ingreso de Datos**

**k1**  
Arreglo matricial que contiene las condiciones de contorno por asignación de códigos en Datos.

**nudo**  
Arreglo matricial proveniente de CE. Ubica el número del nudo y el elemento al cual pertenece.

**id**  
Vector que contiene direcciones de componentes en la diagonal principal. Es variable interna y se transmite al programa por referencia.

**m1**  
Parámetro para control y reserva de memoria

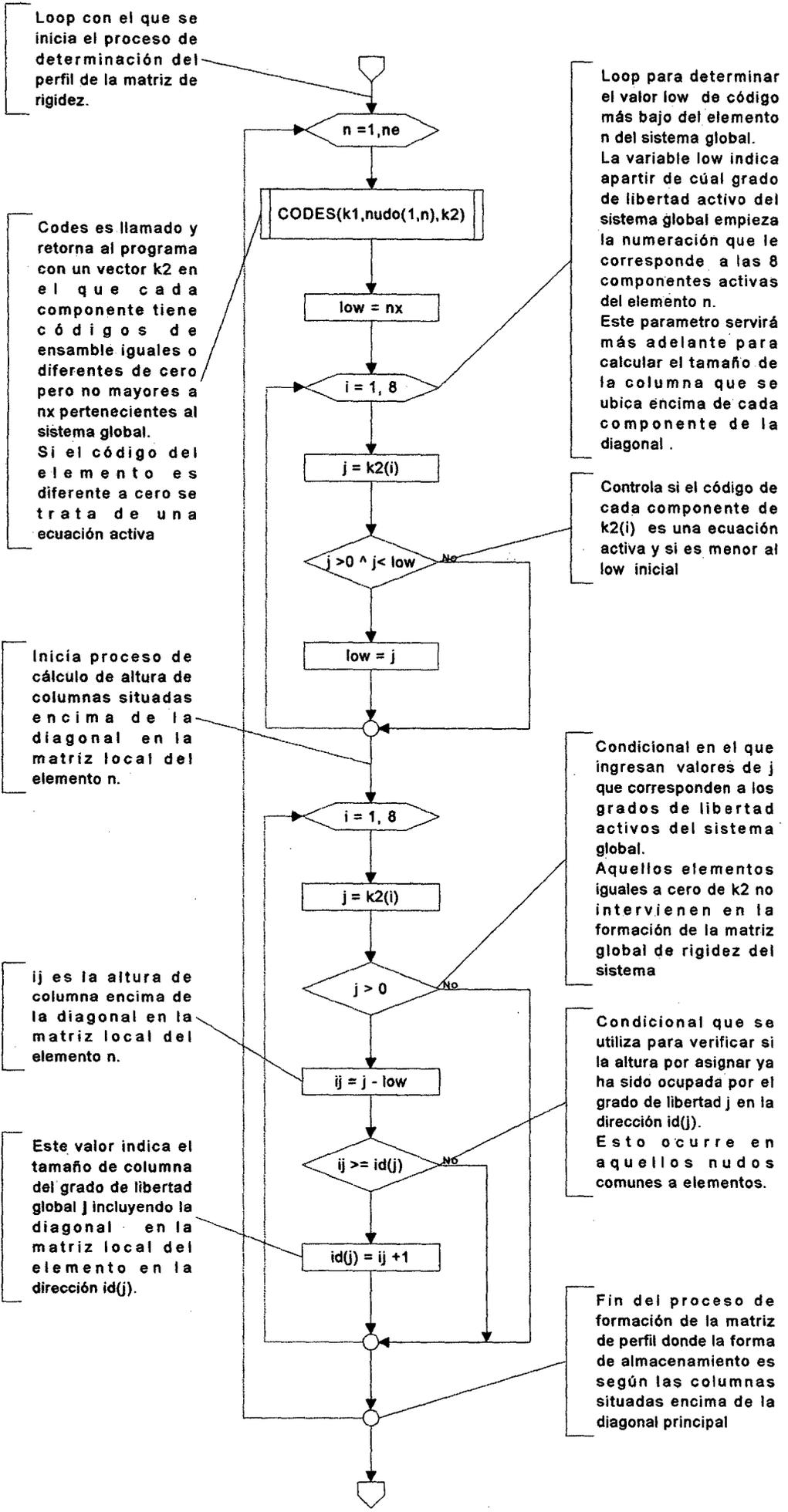
**nu** Indica el total de grados de libertad del sistema

**nn** El número total de nudos del sistema

4 Son los 4 grados de libertad por nudo

Fin del proceso de modificación.

Terminado el doble Loop  $nx$  es el número total de ecuaciones activas. Este valor servirá para la determinación del perfil.



Loop con el que se inicia el proceso de determinación del perfil de la matriz de rigidez.

Codes es llamado y retorna al programa con un vector k2 en el que cada componente tiene códigos de ensamble iguales o diferentes de cero pero no mayores a nx pertenecientes al sistema global. Si el código del elemento es diferente a cero se trata de una ecuación activa

Inicia proceso de cálculo de altura de columnas situadas encima de la diagonal en la matriz local del elemento n.

ij es la altura de columna encima de la diagonal en la matriz local del elemento n.

Este valor indica el tamaño de columna del grado de libertad global j incluyendo la diagonal en la matriz local del elemento en la dirección id(j).

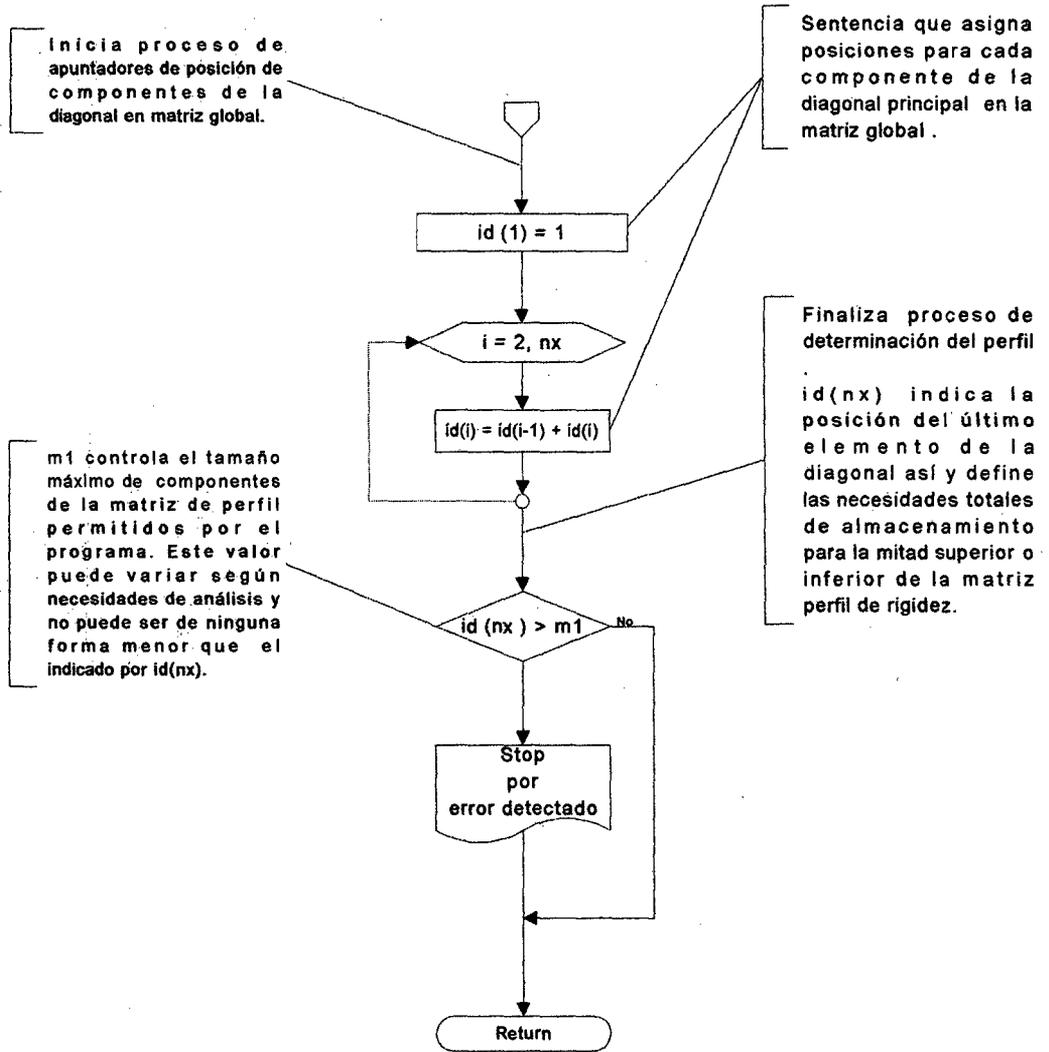
Loop para determinar el valor low de código más bajo del elemento n del sistema global. La variable low indica apartir de cual grado de libertad activo del sistema global empieza la numeración que le corresponde a las 8 componentes activas del elemento n. Este parametro servirá más adelante para calcular el tamaño de la columna que se ubica encima de cada componente de la diagonal.

Controla si el código de cada componente de k2(i) es una ecuación activa y si es menor al low inicial

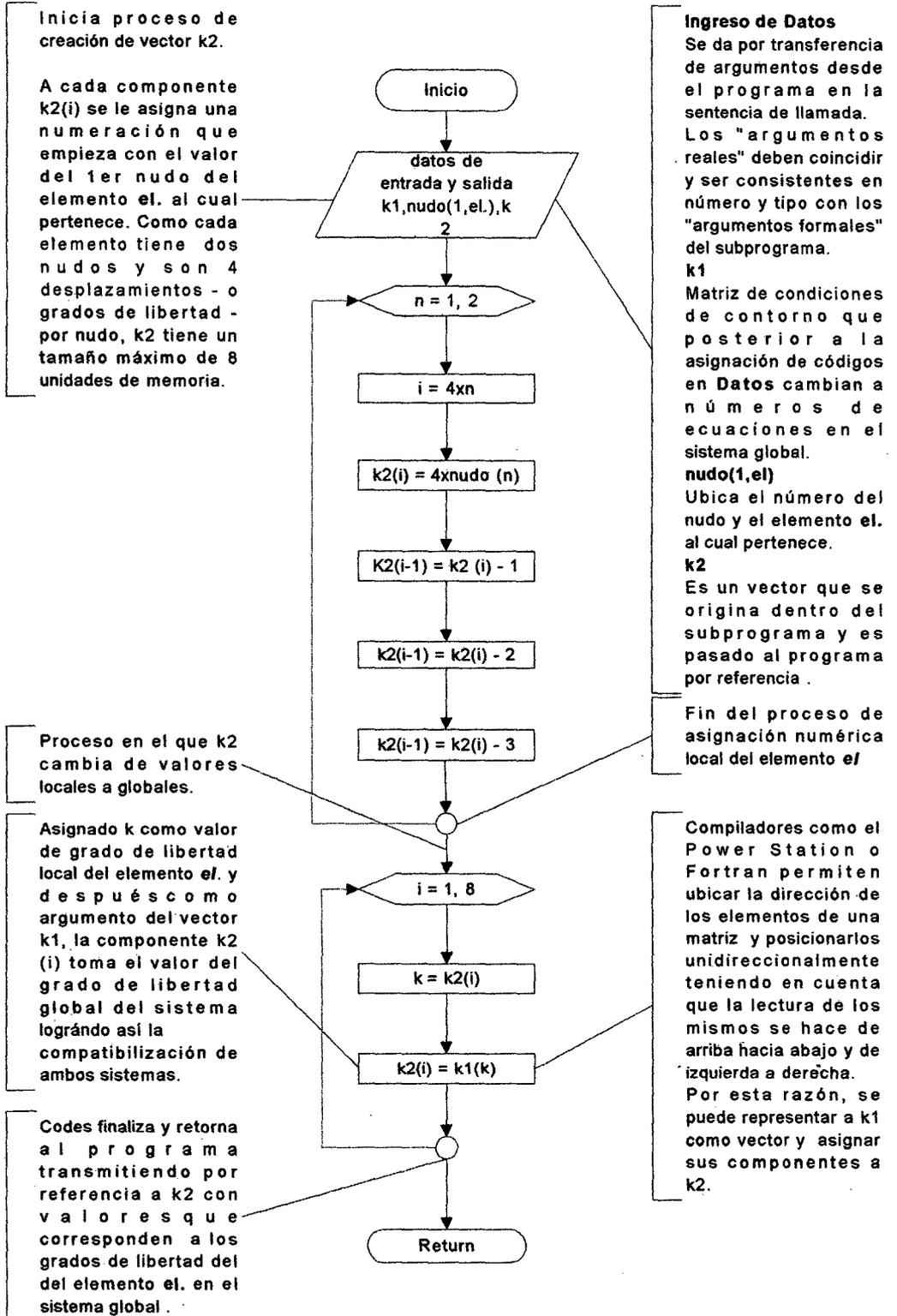
Condional en el que ingresan valores de j que corresponden a los grados de libertad activos del sistema global. Aquellos elementos iguales a cero de k2 no intervienen en la formación de la matriz global de rigidez del sistema

Condional que se utiliza para verificar si la altura por asignar ya ha sido ocupada por el grado de libertad j en la dirección id(j). Esto ocurre en aquellos nudos comunes a elementos.

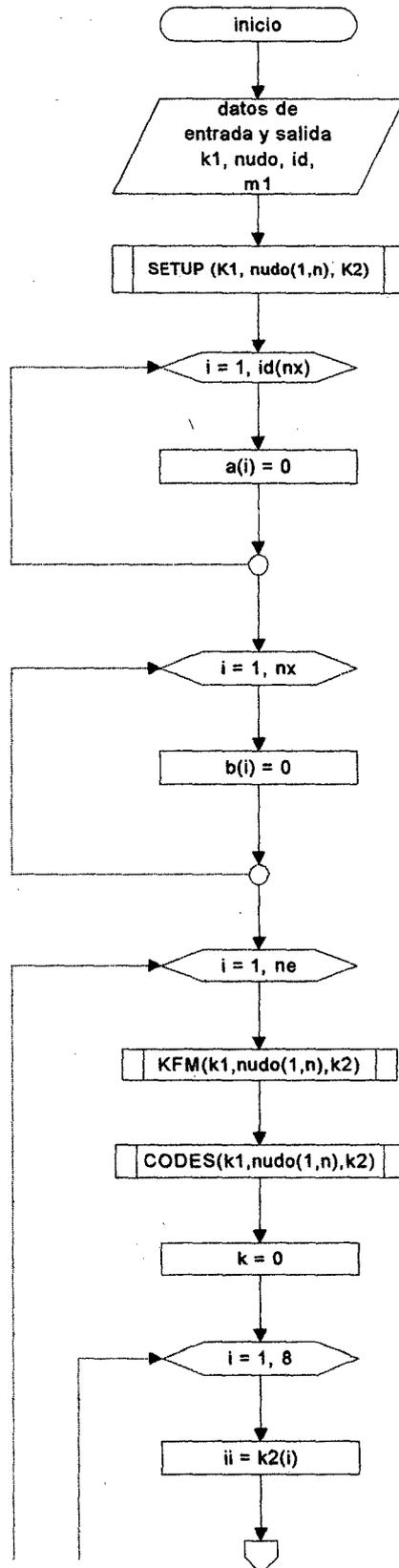
Fin del proceso de formación de la matriz de perfil donde la forma de almacenamiento es según las columnas situadas encima de la diagonal principal

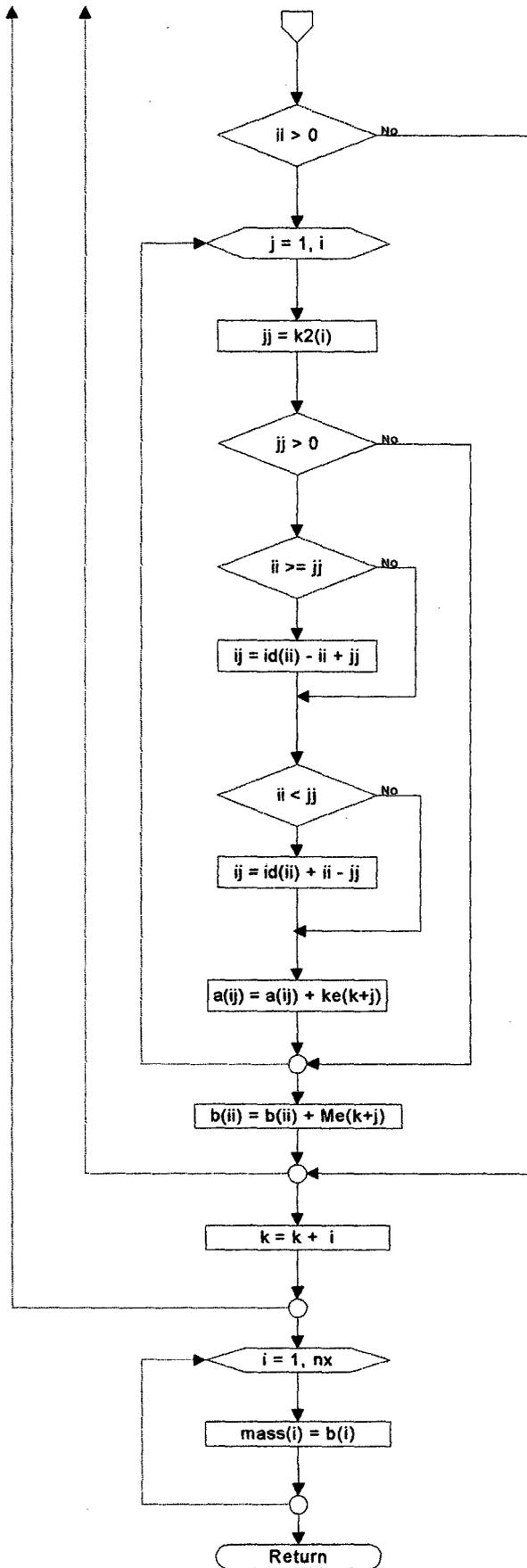


## SUBPROGRAMA CODE



# SUBPROGRAMA ADDKFM





## 5.4 LISTADO DE PROGRAMA DE CÓMPUTO

\$debug

\* **ANÁLISIS SÍSMICO, LINEAL Y ELÁSTICO DE CÁSCARAS AXISIMÉTRICAS**

\* **Tesis de Grado para optar el Título de Ingeniero Civil**

\* **Universidad Nacional de Ingeniería**

\* **Orlando Zegarra Quesada**                      **Noviembre 2001**

\* **Convenciones de signo según Zienkiewicz (3a. ed. Fig. 14.1 y 2)**

IMPLICIT REAL\*8(a-h,o-z)

REAL\*8 mass

INTEGER\*2 year,month,day

DIMENSION

. a(1000000),b(120000),mass(120000),r(30000),z(30000),k1(4,30000),  
. id(120000),nudo(2,30000),te(30000),u(1200000),v(1200000),c(21000),  
. d(21000),q(40000),e(2000),w(2000),T(3000),Sa(3000)

COMMON nn, ne, nx, nu, nv, np, c1, c2, c3, g

m1 = 1000000

OPEN (5, FILE = '')

OPEN (6, FILE = '', STATUS='unknown')

CALL GETDAT ( year,month,day )

CALL DATOS ( r,z,te,k1,nudo,T,Sa)

CALL ADDKFM ( a,b,mass,r,z,te,k1,nudo,id,m1 )

CALL SUBSPITE ( a,b,u,v,c,d,q,e,w,nx,id,nv)

CALL OUTPUT ( r,z,te,mass,e,u,v,T,Sa,k1,nudo )

END

**SUBROUTINE DATOS ( r, z, te, k1, nudo, T, Sa)**

\* **LECTURA DE DATOS**

IMPLICIT REAL\*8(a-h,o-z)

CHARACTER\*128 abc

DIMENSION k1(4,\*),r(\*),z(\*),nudo(2,\*),te(\*),T(\*),Sa(\*)

COMMON nn, ne, nx, nu, nv, np, c1, c2, c3, g

COMMON /label/ abc

\* **Título, número de nudos, elementos**

READ (5,1) abc, nn,ne

WRITE (6,2) abc,nn,ne

\* **Coordenadas, condiciones de apoyo**

CALL XY ( r, z, nn, k1)

\* **Conectividad de elementos, espesor**

CALL CE ( te, ne, nudo)

\* **Propiedades del material (homogéneo, isotrópico)**

CALL PM ( c1, c2, c3, g)

\* **Datos para análisis dinámico**

CALL DD ( T, Sa, nv,np )

```

1  FORMAT (A/3I5)
2  FORMAT (/Tesis de Grado/'para optar el Título Profesional de Ingeniero Civil'
./Universidad Nacional de Ingeniería/'Orlando Zegarra Quesada      Noviembre 2001
./'/' ', A//I5,' nudos'/I5,' elementos'/I5)

```

**END**

**SUBROUTINE XY (r, z, nn, k1)**

**\* COORDENADAS, CONDICIONES DE BORDE ESENCIALES**

```

IMPLICIT REAL*8(a-h,o-z)
DIMENSION r (*), z (*), k1 (4,*)

```

\* Número de nudo, coordenadas r,z, códigos de apoyo  
\* (Último nudo, incremento, coordenadas de último nudo)  
10 READ ( 5,1,ERR = 19 ) n,r(n),z(n),kode, l,i,RI,ZI

```

k1 (1, n) = kode/1000
kode = kode-1000*k1(1,n)
k1 (2, n) = kode/100
kode = kode-100*k1(2,n)
k1 (3, n) = kode/10
k1 (4, n) = kode-10*k1 (3, n)

```

**\* Información para generar datos**

```

IF (l.LE. n) GO TO 18
IF (i.LE. 0) i = 1
delta = (l-n)/i
delta = 1./delta

```

**\* Generación de coordenadas**

```

f2 = 0.
DO j = n,l,i
  f1 = 1.-f2
  r(j) = f1*r(n)+f2*RI
  z(j) = f1*z(n)+f2*ZI
  f2 = f2+delta

```

**\* Copia códigos de apoyo**

```

DO k = 1,4
  k1(k,j) = k1(k,n)
END DO
END DO

```

**\* Último nudo ?**

```

18 IF ( n.ne.nn.AND.l.ne.nn ) GO TO 10

```

**\* Imprime códigos y coordenadas**

```

19 WRITE (6,2) ( n,(k1(k,n),k = 1,4),r(n),z(n),n=1,nn )

```

```

1  FORMAT (I5, 2F15.0, 3I5, 2F10.0)
2  FORMAT (/ Coordenadas y Códigos de los Nudos//
.' nudo', 20X,'R', 14X,'Z'// (I5, 5X, 4I1, 2F15.3))
END

```

**SUBROUTINE CE (te, ne, nudo)**

**\* CONECTIVIDAD DE ELEMENTOS, ESPESOR**

IMPLICIT REAL\*8(a-h,o-z)  
DIMENSION te (\*), nudo (2,\*)

m = 0  
DO WHILE (m .LT. ne )

**\* Elemento, nudos, espesor**

**\* (Datos en orden, genera información faltante)**

READ (5,1) n,(nudo(j,n),j=1,2), te(n)

IF ( n .GT. m+1 ) THEN  
  i = nudo(1,m)  
  j = nudo(2,m)  
  k = ( nudo(1,n) - i ) / ( n - m )  
  l = ( nudo(2,n) - j ) / ( n - m )  
  DO mn = m+1, n-1  
    i = i + k  
    j = j + l  
    nudo(1,mn) = i  
    nudo(2,mn) = j  
    te(mn) = te(m)  
  END DO  
END IF

m = n  
END DO

**\* Imprime datos leídos o generados**

WRITE (6,2) (n, nudo(1,n),nudo(2,n), te(n), n=1,ne )

1 FORMAT (3I5, F15.0)  
2 FORMAT (// Conectividad y Espesor de los Elementos//  
. 4X,'e',6X,'i',4X,'j',12X,'te'//(15,2X,2I5,F15.3))  
END

**SUBROUTINE PM (c1, c2, c3, g)**

**\* PROPIEDADES DEL MATERIAL (homogéneo e isotrópico)**

IMPLICIT REAL\*8(a-h,o-z)

**\* Módulo de Young, Poisson, Densidad**

READ (5,1) E,p,g  
WRITE (6,2) E,p,g

c1 = E/( 1.-p\*p )  
c2 = c1\*p  
c3 = .5\*E/(1.+p)

1 FORMAT (5F15.0)  
2 FORMAT (// Propiedades del Material//  
' E =',1P, E10.3/' æ =',0P, F6.3/' g =',0P, F8.3/)  
END

**SUBROUTINE DD (T, Sa, nv, np)**

**\* Datos para Análisis Dinámico**

IMPLICIT REAL\*8(a-h,o-z)  
DIMENSION T (\*),Sa(\*)

**\* Número de puntos que definen el espectro Sa**

READ (5,1) np

**\* Periodos, valores del espectro de pseudo-aceleraciones**

IF (np.LE.0) np=1

READ (5, 2) (T(i), Sa(i),i=1,np)

WRITE (6, 3) (T(i),Sa(i),i=1,np)

**\* Número de modos**

READ (5,6) nv

IF (nv.LE.0) nv=1

WRITE (6,7) nv

1 FORMAT (I5)

2 FORMAT (2F10.3)

3 FORMAT (///5X,\* INFORMACION PARA ANALISIS DINAMICO \*\*//

.5X,'Espectro de pseudo-aceleraciones'//8X,'T',8X,'Sa'//(2F10.5))

6 FORMAT (I5)

7 FORMAT (/2X, I5,' modos ', /)

END

**SUBROUTINE ADDKFM ( a,b,mass,r,z,te,k1,nudo,id,m1 )**

**\* FORMA MATRICES DE RIGIDECES Y MASAS**

IMPLICIT REAL\*8(a-h,o-z)

REAL\*8 Ke(36),Me(8), a(\*),b(\*),mass(\*)

DIMENSION r(\*),z(\*),te(\*),k1(4,\*),id(\*), nudo(2,\*),k2(8)

COMMON nn, ne, nx, nu, nv, np, c1, c2, c3, g

**\* Códigos para ensamblar, perfil de rigidez,apunt. diag. pr.**

CALL Setup (k1, nudo, id, m1)

**\* Inicializa matrices de rigidez y masas**

DO i = 1,id(nx)

  a(i) = 0.

END DO

DO i = 1,nx

  b(i) = 0.

END DO

**\* Contribución de cada elemento**

DO n = 1,ne

  CALL KFM(r,z,te(n),c1,c2,c3,g,ke,Me,nudo(1,n),nudo(2,n))

**\* códigos para ensamblaje**

  CALL CODES (k1, nudo(1,n),k2)

**\* Ensamblaje**

  k = 0

```

DO i = 1, 8
  ii = k2(i)
  IF (ii .GT. 0) THEN
    DO j = 1, i
      jj = k2(j)
      IF (jj .GT. 0) THEN
        IF (ii .GE. jj) ij = id(ii) - ii + jj
        IF (ii .LT. jj) ij = id(jj) + ii - jj
        a(ij) = a(ij) + Ke(k+j)
      END IF
    END DO
    b(ii)=b(ii) + Me(i)
  END IF
  k=k+i
END DO
END DO

```

```

DO i=1,nx
  mass(i)= b(i)
END DO
END

```

**SUBROUTINE Setup (k1, nudo, id, m1)**

```

DIMENSION nudo(2,*),k2(8),id(*),k1(4,*)
COMMON nn, ne, nx, nu, nv, np, c1, c2, c3, g

```

\* **Ordena códigos para ensamblar**

```

nu = 4*nn
nx = 0
DO j = 1, nn
  DO i = 1, 4
    IF (k1 (i,j) .EQ. 0 ) THEN
      nx = nx+1
      k1 (i,j) = nx
    ELSE
      k1 (i,j) = 0
    END IF
  END DO
END DO
END DO

```

\* **perfil de la matriz de rigidez**

```

DO i = 1, nx
  id(i) = 0
END DO

```

```

DO n = 1, ne
  CALL CODES (k1, nudo(1,n),k2 )
  low = nx
  DO i = 1, 8
    j = k2(i)
    IF ((j .GT. 0) .AND. (j .LT. low)) low = j
  END DO
  DO i = 1, 8
    j = k2(i)
    IF (j .GT. 0) THEN
      ij = j - low
      IF (ij .GE. id(j)) id(j) = ij + 1
    END IF
  END DO
END DO

```

```

    END IF
  END DO
END DO

```

- \* Apuntadores a diagonal principal

```

id(1) = 1
DO i = 2,nx
  id(i) = id(i-1) + id(i)
END DO

```

```

IF (id (nx) .GT. m1) THEN
  STOP
END IF

```

- 3 FORMAT (// ERROR:' I5,' x', I3,' >', I6/)

```

END

```

```

SUBROUTINE CODES (k1, nudo, k2 )

```

- \* Códigos para Ensamble

```

DIMENSION k1(*),nudo(2),k2(8)
COMMON nn, ne, nx, nu, nv, np, c1, c2, c3, g

```

```

DO n = 1, 2
  i = 4*n
  k2(i) = 4*nudo(n)
  k2(i-1) = k2(i) - 1
  k2(i-2) = k2(i) - 2
  k2(i-3) = k2(i) - 3
END DO

```

```

DO i = 1,8
k = k2(i)
k2(i) = k1(k)
END DO
END

```

```

SUBROUTINE KFM ( r,z,te,c1,c2,c3,g,Ke,Me,ni,nj )

```

- \* MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE MASAS, ELEMENTO TRONCO CONICO

```

IMPLICIT REAL*8(a-h,o-z)
REAL*8 Ke(36),Me(8)
REAL*4 L
DIMENSION r(*),z(*), s(4),w(4), B(48)
DATA s,w,B/.0694318,.3300095,.6699905,.9305682,
. 0.5464091, 2*1.0243872, 0.5464091, 48*0. /
a = 1.

```

- \* Geometría

```

Dx = r(nj)-r(ni)
Dy = z(ni)-z(nj)
L = SQRT ( Dx*Dx+Dy*Dy )
cx = Dx/L
cy = Dy/L
t2 = te**2/12.
d1 = c1*t2

```

$$d2 = c2*t2$$

$$d3 = c3*t2$$

\* **Inicializa**

$$b25 = 1./L$$

$$B(25) = b25*cy$$

$$B(31) = b25*cx$$

$$B(1) = -B(25)$$

$$B(7) = -B(31)$$

DO i = 1,36  
 Ke(i) = 0.  
 END DO

\* **Integración numérica**

DO loop = 1,4

\* **funciones de interpolación (ejes locales)**

$$f2 = s(loop)$$

$$f1 = 1.-f2$$

$$f3 = f1**2*(1.+2.*f2)$$

$$f4 = 1.-f3$$

$$f5 = L*f1**2*f2$$

$$f6 = -L*f1*f2**2$$

$$radio = f1*r(ni)+f2*r(nj)$$

$$c = w(loop)*L*radio*te$$

$$f0 = a/radio$$

\* **matriz deformación-desplazamiento (ejes locales)**

$$b2 = f1*cx/radio$$

$$b3 = -f0*f1$$

$$b8 = f3*cy/radio$$

$$b10 = 6*(1.-2.*f2)/L**2$$

$$b11 = f0**2*f3 + 6.*f1*f2*cx/(radio*L)$$

$$b12 = -2.*f0 * ( 6./L*f1*f2 + f3*cx/radio )$$

$$b26 = f2*cx/radio$$

$$b27 = -f0*f2$$

$$b32 = f4*cy/radio$$

$$b35 = f0**2 - b11$$

$$b36 = 2.*f0 * ( 6./L*f1*f2 - f4*cx/radio )$$

\* **matriz deformación-desplazamiento (ejes globales)**

$$B(2) = b2*cy-b8*cx$$

$$B(3) = b3*cy$$

$$B(4) = -b10*cx$$

$$B(5) = -b11*cx$$

$$B(6) = -b12*cx$$

$$B(8) = b2*cx+b8*cy$$

$$B(9) = b3*cx$$

$$B(10) = b10*cy$$

$$B(11) = b11*cy$$

$$B(12) = b12*cy$$

$$B(14) = f5*cy/radio$$

$$B(16) = 2.*(2.-3.*f2)/L$$

$$B(17) = f0**2*f5 + f1*(3.*f2-1.)*cx/radio$$

$$B(18) = 2.*f0 * ( f1*(1.-3.*f2) - f5*cx/radio )$$

$B(20) = -b3$   
 $B(21) = -b2-b25$   
 $B(23) = B(20)*cy/radio$   
 $B(24) = 2.*B(21)*cy/radio$

$B(26) = b26*cy-b32*cx$   
 $B(27) = b27*cy$   
 $B(28) = b10*cx$   
 $B(29) = -b35*cx$   
 $B(30) = -b36*cx$   
 $B(32) = b26*cx+b32*cy$   
 $B(33) = b27*cx$   
 $B(34) = -b10*cy$   
 $B(35) = b35*cy$   
 $B(36) = b36*cy$

$B(38) = f6*cy/radio$   
 $B(40) = 2.*(1.-3.*f2)/L$   
 $B(41) = f0**2*f6 + f2*(2.-3.*f2)*cx/radio$   
 $B(42) = 2.*f0 * ( f2*(3.*f2-2.) - f6*cx/radio )$   
 $B(44) = -b27$   
 $B(45) = b25-b26$   
 $B(47) = B(44)*cy/radio$   
 $B(48) = 2.*B(45)*cy/radio$

\* **matriz de rigidez (ejes globales)**

i = 0

DO j = 1,4,8,6

$DB1 = c1*B(j)+c2*B(j+1)$   
 $DB2 = c2*B(j)+c1*B(j+1)$   
 $DB3 = c3*B(j+2)$   
 $DB4 = d1*B(j+3)+d2*B(j+4)$   
 $DB5 = d2*B(j+3)+d1*B(j+4)$   
 $DB6 = d3*B(j+5)$

DO k = 1,j,6

i = i+1

$Ke(i) = Ke(i) + c* ( B(k)*DB1 + B(k+1)*DB2 + B(k+2)*DB3 +$   
 $B(k+3)*DB4 + B(k+4)*DB5 + B(k+5)*DB6 )$

END DO

END DO

END DO

\* **matriz de masas concentradas**

$c = 3.141593*L*te/8*g$

$Me(1) = c*(3*r(nj) + r(ni))$

$Me(2) = Me(1)$

$Me(3) = 0.$

$Me(4) = Me(1)$

$Me(5) = c*(r(nj)+3*r(ni))$

$Me(6) = Me(5)$

$Me(7) = 0.$

$Me(8) = Me(5)$

END

**SUBROUTINE SUBSPITE ( a,b,x,y,c,d,q,e,w,nx,id,nv )**

**\* Resuelve  $AX = BX$  lamda por iteración en subespacio**

IMPLICIT REAL\*8 (a-h,o-z)  
DIMENSION a(\*),b(\*),x(\*),y(\*),c(\*),d(\*),q(\*),e(\*),w(\*),id(\*)

**\* Dimensión del subespacio**

nd = 0  
DO i = 1,nx  
IF ( b(i).GT.0.) nd = nd + 1  
END DO

nq = MIN0 (2\*nv,nv+8,nd)

**\* Aproximación inicial**

DO i = 1, nq  
w(i) = 0.  
END DO

DO i = 1, nx\*nq  
x(i)=0  
END DO

DO i = 1, nx  
x(i) = i  
ii = id(i)  
y(i) = b(i)/a(ii)  
x(nx+i) = b(i)  
ND DO

IF (nq.GT.2) THEN  
nd=nx/nq  
nl=nx  
DO j = 3, nq  
nl=nl-nd  
r = 0.  
DO i = 1,nl  
IF (y(i).GT.r) THEN  
k = i  
r = y(i)  
END IF  
END DO

DO i= nl,nx  
IF (y(i).ge.r) THEN  
k = i  
r = y(i)  
END IF  
END DO

y(k) = 0.  
k = k + (j-1)\*nx  
x(k) = 1.  
END DO  
END IF

```

* Factoriza A
CALL solve (a,x,id,nx,nx,nq, 1)

* Iteración en Subespacio
DO iter = 1, 12
  Write (*, 1) iter
  * Iteración inversa
  m=0
  DO j = 1, nq
    DO i = 1, nx
      m = m+1
      y(m) = b(i)*x(m)
      x(m) = y(m)
    END DO
  END DO
  CALL solve (a, y, id, nx, nx, nq, 2)

* Proyección de las matrices A;B
CALL aTbs (x,y,c,nx,nq)
m=0
DO j= 1, nq
  DO i = 1, nx
    m = m+1
    x (m) = b(i)*y(m)
  END DO
END DO

CALL aTbs (x,y,d,nx,nq)

* Valores y vectores característicos en subespacio
CALL JACOBI (c,d,q,e,x,nq)

* Vectores en el sistema de referencia original
CALL AB (y,q,x,nx,nq,nq)

* Verifica convergencia
k=0
DO i = 1, nv
  eps = DABS (1.- w(i)/e(i))
  IF ( eps .GT. 1. E-6 ) k = k+1
  w(i) = e(i)
END DO
IF (( iter .GT.2 ). AND. ( k.EQ.0)) RETURN
END DO
WRITE (*,2)
1 FORMAT (' iteración',I3)
2 FORMAT ('ERROR(HSI): Iteración terminada luego de 12 ciclos/')
END

```

**INTEGER FUNCTION MIN0(i,j,k)**

```

MIN0 = i
IF (j .LT. MIN0) MIN0=j
IF (k .LT. MIN0) MIN0=k
END

```

**SUBROUTINE SOLVE (a, b, id, n, m, l, kode)**

- \* **Solución de sistema de ecuaciones lineales  $ax = b$**   
IMPLICIT REAL\*8 (a-h,o-z)  
DIMENSION a(\*),b(\*),id(\*)  
REAL\*8 dot
- \* **Reducción de a (factorización  $A = LDL$ )**  
IF (Kode .NE. 2) THEN  
jr = 1  
DO j = 2,n  
jj = id(j)  
jh = jj-jr  
is = j+1-jh  
ii = id(is)
- \* **reduce coeficientes de columna j, excepto diagonal**  
IF (jh.GT.2) THEN  
ij = jr+1  
DO i = is+1,j-1  
ir = ii  
ii = id(i)  
ij = ij+1  
ih = MIN(ii-ir-1,i-is)  
a(ij) = a(ij) - dot( a(ij-ih),a(ii-ih),ih )  
END DO  
END IF
- \* **reduce coeficiente de la diagonal principal**  
IF (jh.GT.1) THEN  
ij = jr  
DO i = is, j-1  
ij = ij+1  
ii = id(i)  
IF (a(ii) .NE. 0.) THEN  
c = a(ij)  
a(ii) = c/a(ii)  
a(ij) = a(ij)-c\*a(ii)  
END IF  
END DO  
END IF  
IF (a(ij) .LE. 0.) THEN  
WRITE (\*, 1) j  
STOP  
END IF  
jr = jj  
END DO  
END IF  
IF (kode .EQ.1) RETURN
- \* **Reducción de [b] (solución de  $LZ = B$ )**  
jr = 1  
DO j = 2, n  
jj = id(j)  
jh = jj-jr  
jk = j  
ik = j-jh+1  
DO k = 1,j  
b(jk) = b(jk) - dot( a(jr+1),b(ik), jh-1 )

```

    jk = jk+m
    lk = lk+m
  END DO
  jr = jr
END DO

```

\* **División entre diagonal (solución de  $DY = Z$ )**

```

DO i = 1,n
  ii = id(i)
  IF (a(ii).NE.0.) THEN
    ik = i
    DO k = 1,l
      b(ik) = b(ik)/a(ii)
      ik = ik+m
    END DO
  END IF
END DO

```

\* **Sustitución inversa (solución de  $UX = Y$ )**

```

DO j = n,2,-1
  jr = id(j-1)
  ij = jr
  is = j-jj+jr+1
  DO i = is,j-1
    ij = ij+1
    c = a(ij)
    ik = i
    jk = j
    DO k = 1,l
      b(ik) = b(ik) - c*b(jk)
      ik = ik+m
      jk = jk+m
    END DO
  END DO
  jj = jr
END DO

```

1 **FORMAT (' ERROR(solve): matriz no es definida positiva//  
' ( error detectado en la ecuacion',l4,')')**  
**END**

**REAL\*8 FUNCTION dot (a, b, n)**

**IMPLICIT REAL\*8 (a-h,o-z)**  
**DIMENSION a(\*),b(\*)**

\* **Sustitución inversa (solución de  $UX = Y$ )**

```

dot = 0.
DO i = 1,n
  dot = dot + a(i)*b(i)
END DO
END

```

**SUBROUTINE aTbs (a, b, c, n1, n2)**

- \* **Producto  $a(n1,n2) * b(n1,n2) = c(n2,n2)$**
- \* **(c simétrica, se almacena submatriz triangular)**

REAL\*8 a(\*),b(\*),c(\*),suma

```
ij = 0
m = 0
DO j = 1, n2
  ki = 1
  DO i = 1, j
    kj = m
    suma = 0.
    DO k = 1, n1
      kj = kj + 1
      suma = suma + a(ki)*b(kj)
      ki = ki + 1
    END DO
    ij = ij + 1
    c(ij) = suma
  END DO
  m = m + n1
END DO
END
```

**SUBROUTINE Jacobi (a,b,x,e,d,n)**

- \* **Resuelve problema de valores característicos  $ax = b\lambda da$**

IMPLICIT REAL\*8 (a-h,o-z)  
DIMENSION a(\*),b(\*),x(\*),e(\*),d(\*)  
tol1 = 1.E-6  
tol2 = 1.E-10

- \* **Matriz Unitaria**  
DO ij = 1, n\*n  
 x(ij) = 0.  
END DO  
DO ij = 1, n\*n, n+1  
 x(ij) = 1.  
END DO

- \* **Aproximación a valores característicos**  
ii = 0.  
DO i = 1, n  
 ii = ii+i  
 IF (b(ii) .LE.0.) THEN  
 WRITE (\*, 1)  
 STOP  
 END IF  
 d(i) = a(ii)/b(ii)  
 e(i) = d(i)  
END DO  
IF (n .EQ. 1) RETURN

```

* Inicia iteración
DO iter = 1,12

* Transformación de a,b por rotación
eps = .01**iter
IF (eps .LT. tol2) eps = tol2
ii = 0
DO i = 1, n-1
  ii = ii + i
  jj = ii
  DO j = i+1, n
    ij = jj + i
    jj = jj + j

* Verifica si elementos (i,j) deben anularse
epsA = (a(ij)*a(ij))/(a(ii)*a(jj))
epsB = (b(ij)*b(ij))/(b(ii)*b(jj))
IF ((epsA.GE.eps).OR.(epsB.GE.eps)) THEN

* Cálculo de elementos de matriz de rotación
a1 = a(jj)*b(ij)-b(jj)*a(ij)
a2 = a(ii)*b(ij)-b(ii)*a(ij)
a3 = (a(ii)*b(jj)-a(jj)*b(ii))/2
r = a3*a3 + a1*a2
IF ( r.LT.0.) THEN
  WRITE (*,1)
  CYCLE
END IF
s = DSQRT(r)
d1 = a3 + s
d2 = a3 - s
IF (DABS (d2).GT.DABS (d1)) d1=d2
IF (d1.EQ.0.) THEN
  alfa = 0.
  gamma = -a(ij)/a(jj)
ELSE
  alfa = a1/d1
  gamma = -a2/d1
END IF

* Columnas i,j (filas 1 a i-1)
DO k = 1, i-1
  ki = ii - i + k
  kj = jj - j + k
  f = a(ki)
  a(ki) = f + gamma*a(kj)
  a(kj) = a(kj) + alfa*f
  f = b(ki)
  b(ki) = f + gamma*b(kj)
  b(kj) = b(kj) + alfa*f
END DO

* filas i,j (columnas j+1 a n)
DO k = j+1,n
  kk = k*(k - 1)/2
  ki = kk + i
  kj = kk + j
  f = a(ki)
  a(ki) = f + gamma*a(kj)
  a(kj) = a(kj) + alfa*f

```

```

f = b(ki)
b(ki) = f + gamma*b(kj)
b(kj) = b(kj) + alfa*f
END DO

```

\* **filas y columnas i+1 a j-1**

```

DO k = i+1,j-1
ki = k*(k - 1)/2 + i
kj = jj - j + k
f = a(ki)
a(ki) = f + gamma*a(kj)
a(kj) = a(kj) + alfa*f
f = b(ki)
b(ki) = f + gamma*b(kj)
b(kj) = b(kj) + alfa*f
END DO

```

\* **elementos (i,i), (i,j), (j,j)**

```

f = a(jj)
a(jj) = f + 2.*alfa*a(ij) + alfa*alfa*a(ii)
a(ii) = a(ii) + 2.*gamma*a(ij) + gamma*gamma*f
a(ij) = 0.
f = b(jj)
b(jj) = f + 2.*alfa*b(ij) + alfa*alfa*b(ii)
b(ii) = b(ii) + 2.*gamma*b(ij) + gamma*gamma*f
b(ij) = 0.

```

\* **actualiza vectores característicos**

```

ki = n * (i-1)
kj = n * (j-1)
DO k = 1,n
ki = ki + 1
kj = kj + 1
f = x(ki)
x(ki) = f + gamma*x(kj)
x(kj) = x(kj) + alfa*f
END DO

```

END IF

END DO  
END DO

\* **control del error en los valores característicos**

```

ii = 0
k = 0
DO i = 1, n
ii = ii + i
IF (b(ii) .EQ. 0. ) THEN
WRITE (*, 1)
STOP
ENDIF
e(i) = a(ii)/b(ii)
eps = DABS(tol1*e(i))
IF (DABS(e(i) - d(i)) .GT. eps ) k = 1
d(i) = e(i)
END DO

```

IF ( k .NE. 0 ) CYCLE

\* **Control de tolerancia en diagonalización**

ii = 0

DO i = 1, n-1

ii = ii + i

jj = ii

DO j = i+1, n

ij = jj + i

jj = jj + j

epsA = (a(ij)\*a(ij)) / (a(ii)\*a(jj))

epsB = (b(ij)\*b(ij)) / (b(ii)\*b(jj))

IF ( (epsA .GT. tol2) .OR. ( epsB .GT. tol2 ) ) GOTO 3

END DO

END DO

EXIT

3 IF (iter .EQ. 12) WRITE (\*, 2)

END DO

\* **Normalización con respecto a matriz B**

jj = 0

DO j = 1, n

ij = n \* (j-1)

jj = jj + j

IF (b(jj) .LT. 0. ) CYCLE

f = DSQRT (b(jj) )

DO i = 1, n

ij = ij + 1

x(ij) = x(ij)/f

END DO

END DO

\* **Ordena valores característicos y vectores asociados**

ij = 0

DO j = 1, n

k = j

DO i = j,n

IF ( e(i) .LT. e(k) ) k = i

END DO

f = e(k)

e(k) = e(j)

e(j) = f

ik = n \* (k-1)

DO i = 1, n

ij = ij + 1

ik = ik + 1

f = x(ij)

x(ij) = x(ik)

x(ik) = f

END DO

END DO

\* **Errores**

1 FORMAT (' ERROR (JACOBI): matriz no es definida-positiva')

2 FORMAT

./' ERROR (JACOBI): iteraciϕn terminada luego de 10 ciclos'/)  
END

**SUBROUTINE ab ( a,b,c, n1,n2,n3 )**

\* **producto  $a(n1,n2) * b(n2,n3) = c(n1,n3)$**

REAL\*8 a (\*), b(\*), c(\*),suma

DO i = 1, n1

ij = i

kj = 1

DO j = 1, n3

ik = i

suma = 0.

DO k = 1, n2

suma = suma + a(ik) \* b(kj)

kj = kj + 1

ik = ik + n1

END DO

c(ij) = suma

ij = ij + n1

END DO

END DO

END

**SUBROUTINE OUTPUT ( r,z,te,mass,w2,u,v, T, Sa, k1,nudo )**

\* **reordena componentes y lista modos de vibraciϕn**

IMPLICIT REAL\*8 (a-h,o-z)

CHARACTER\*128 abc

REAL\*8 mass (\*)

DIMENSION r(\*),z(\*),te(\*),w2(\*),u(\*),T(\*),Sa(\*),k1(\*),v(\*),  
.nudo(2,\*),re(4)

COMMON nn, ne, nx, nu, nv, np, c1, c2, c3, g

COMMON /label/ abc

\* **reordena componentes de cada modo**

j = 0

n = 0

DO mode = 1, nv

DO i = 1, nu

n = n + 1

v(n) = 0.

k = k1(i)

IF ( k .GT. 0 ) v(n) = u(k+j)

END DO

j = j + nx

END DO

```

* recompone matriz de masas
DO i = nu, 1,-1
  IF ( k1(i) .GT. 0 ) THEN
    mass(i) = mass(k1(i))
  ELSE
    mass(i) = 0.
  END IF
END DO

* Modos de vibración
i2 = 0
DO mode = 1,nv

* frecuencias, periodo
w = DSQRT ( w2(mode) )
f = w/6.2831853
periodo = 1./f

* valores espectrales
So = spectralordinate (T,Sa,periodo,np)
Sv = So/w
Sd = SV/w
WRITE (6,1) abc, mode, periodo,f,w, So,Sv,Sd

* coeficientes de participación
fp = 0
DO i=2, nu, 4
  j= i2 + i
  fp = fp + mass(i)*v(j)-mass(i+2)*v(j+2)
END DO

i1 = i2 + 1
i2 = i2 + nu
WRITE (6, 2) (v(i), i=i1,i2 )

WRITE (6, 3) fp
DO i=i1, i2
  u(i) = fp* So * v(i)
  v(i) = fp * Sd * v(i)
END DO

END DO

* Combinación modal

* Desplazamientos
write (6,4)
DO n= 1, nn
  DO k= 1, 4
    s1=0
    s2=0
    j= 4*(n-1)+k

    DO mode = 1 ,nv
      s1=s1 + abs(v(j))
      s2=s2 + v(j)*v(j)
      j=j + nu
    END DO
  
```

```

re (k)= 0.25*s1 + 0.75*SQRT(s2)
END DO

```

```

WRITE (6, 5) n,re
END DO

```

\* **Cortantes en la Base**

```

WRITE (6, 6)
F1=0
F2=0
F4=0
DO n= 1, nn
DO k= 1, 4
s1=0
s2=0
j=4*(n-1) +k
m=j
DO mode = 1, nv
s1=s1+abs(u(j))
s2=s2+u(j)*u(j)
j=j+nu
END DO
re(k) = mass(m)*(0.25*s1+ 0.75*SQRT(s2))
END DO
F1= F1 + re(1)
F2= F2 + re(2)
F4= F4 + re(4)
END DO
WRITE (6, 7) F1, F2, F4

```

\* **Fuerzas de Membrana y Momentos de Flexión**

```

WRITE (6, 8)
DO nel=1, ne
call MF (v,r,z,nel,te(nel),nudo)
END DO

```

```

1  FORMAT (//A/'Modo', I3//
.' T =', F8.4, ' seg/'f =', F8.4, ' Hertz/'w =', F8.3, ' rad/seg'//
.' Sa =', 1PE10.3/'Sv =', E10.3/'Sd =',E10.3//)
2  FORMAT ('vector característico://12X,'u',13X,'w',
. 14X,'B',14X,'v' (4F15.6))
3  FORMAT ('factor de participación://2F15.6)
4  FORMAT (/// 'Desplazamientos'////
.' nudo', 14x,'u',14x,'w',14x,'B',14x,'v'/)
5  FORMAT (I5, 5X, 1P, 4E15.4)
6  FORMAT (////'Cortantes en la Base:////12x,'Fu',13X,'Fr',
. 13X,'Ft'//3F15.6)
7  FORMAT (1X, 1P, 1(2X, 3E15.4))
8  FORMAT (////' Fuerzas de Membrana y Momentos de Flexión'////
.' e i j ',
. 5X,'Nm', 12X,'Nt', 11X,'Nts', 14X,'Ms', 12X,'Mt', 11X,'Mts'/)
END

```

SUBROUTINE MF (v, r, z, n, t, nudo)

\* DETERMINA FUERZAS DE MEMBRANA Y MOMENTOS DE FLEXION

IMPLICIT REAL\*8 (a-h,o-z)

REAL\*8 L, Nm, Nt, Nts, Ms, Mt, Mts

DIMENSION v(\*), r(\*), z(\*), nudo(2, \*), D(8), RNm(1000), RNT(1000),  
.RNts(1000), RMs(1000), RMt(1000), RMts(1000)

COMMON nn, ne, nx, nu, nv, np, c1, c2, c3, g

\* Fuerzas de membrana, momentos de flexión (al centro del elemento)

a = 1

ni = nudo(1, n)

nj = nudo(2, n)

Dx = r(nj) - r(ni)

Dy = z(ni) - z(nj)

L = SQRT(Dx\*Dx + Dy\*Dy)

cx = Dx/L

cy = Dy/L

t3 = t\*\*3/12.

radio = .5\*(r(ni) + r(nj))

f = a/radio

DO m = 1, nv

li = (m-1)\*nu

D(1) = v(li+4\*ni-3)

D(2) = v(li+4\*ni-2)

D(3) = v(li+4\*ni-1)

D(4) = v(li+4\*ni)

D(5) = v(li+4\*nj-3)

D(6) = v(li+4\*nj-2)

D(7) = v(li+4\*nj-1)

D(8) = v(li+4\*nj)

ui = cy\*D(1) + cx\*D(2)

uj = cy\*D(5) + cx\*D(6)

wi = -cx\*D(1) + cy\*D(2)

wj = -cx\*D(5) + cy\*D(6)

ri = D(3)

rj = D(7)

vi = D(4)

vj = D(8)

um = .5\*(ui + uj)

wm = .5\*(wi + wj) + (ri - rj)\*L/8.

rm = 1.5/L\*(wj - wi) - .25\*(ri + rj)

vm = .5\*(vi + vj)

eps1 = (uj - ui)/L

eps2 = (um\*cx + wm\*cy + a\*vm)/radio

gamma = (vj - vi)/L - (a\*um + vm\*cx)/radio

chi1 = (ri - rj)/L

chi2 = f\*\*2\*wm + f\*vm\*cy/radio - rm\*cx/radio

chi12 = 2.\* ( f\*rm - f\*wm\*cx/radio +

$$(v_j - v_i) \cdot c_y / \text{radio} / L - v_m \cdot c_x \cdot c_y / \text{radio}^{**2}$$

- \* fuerzas de membrana son positivas si son tracciones

$$RNm(m) = t \cdot (c1 \cdot \text{eps1} + c2 \cdot \text{eps2})$$

$$RNt(m) = t \cdot (c2 \cdot \text{eps1} + c1 \cdot \text{eps2})$$

$$RNts(m) = t \cdot c3 \cdot \text{gamma}$$

- \* momentos son positivos si antihorarios en nudo i

$$RMs(m) = t \cdot (c1 \cdot \text{chi1} + c2 \cdot \text{chi2})$$

$$RMt(m) = t \cdot (c2 \cdot \text{chi1} + c1 \cdot \text{chi2})$$

$$RMts(m) = t \cdot c3 \cdot \text{chi12}$$

END DO

$$r1=0$$

$$r2=0$$

DO m = 1, nv

$$r1=r1+\text{abs}(RNm(m))$$

$$r2=r2+RNm(m)**2$$

END DO

$$Nm = 0.25 \cdot r1 + .75 \cdot \text{SQRT}(r2)$$

$$r1=0$$

$$r2=0$$

DO m = 1, nv

$$r1=r1+\text{abs}(RNt(m))$$

$$r2=r2+RNt(m)**2$$

END DO

$$Nt = 0.25 \cdot r1 + .75 \cdot \text{SQRT}(r2)$$

$$r1=0$$

$$r2=0$$

DO m = 1, nv

$$r1=r1+\text{abs}(RNts(m))$$

$$r2=r2+RNts(m)**2$$

END DO

$$Nts = 0.25 \cdot r1 + .75 \cdot \text{SQRT}(r2)$$

$$r1=0$$

$$r2=0$$

DO m = 1, nv

$$r1=r1+\text{abs}(RMs(m))$$

$$r2=r2+RMs(m)**2$$

END DO

$$Ms = 0.25 \cdot r1 + .75 \cdot \text{SQRT}(r2)$$

$$r1=0$$

$$r2=0$$

DO m = 1, nv

$$r1=r1+\text{abs}(RMt(m))$$

$$r2=r2+RMt(m)**2$$

END DO

$$Mt = 0.25 \cdot r1 + .75 \cdot \text{SQRT}(r2)$$

$$r1=0$$

$$r2=0$$

DO m = 1, nv

$$r1=r1+\text{abs}(RMts(m))$$

$$r2=r2+RMts(m)**2$$

```

END DO
Mts= 0.25*r1+.75*SQRT(r2)

WRITE (6,2) n,ni,nj,Nm,Nt,Nts,Ms,Mt,Mts

2  FORMAT (/I5, 2I5, 1P, 2(2X, 3E14.4))
3  FORMAT (17X, I5, 1P, 2(2X, 3E14.4))
END

```

**REAL\*8 FUNCTION spectralordinate ( T,Sa,período,np)**

```

IMPLICIT REAL*8 (a-h,o-z)
Dimension T(*),Sa(*)

```

```

IF ( período .LE. T(1) ) THEN
spectralordinate = Sa(1)
RETURN
END IF

```

```

IF ( período .GE. T(np) ) THEN
spectralordinate = Sa(np)
RETURN
END IF

```

```

DO i = 2, np
IF ( período .LE. T(i) ) EXIT
END DO

```

```

a = (T(i) - período) / ( T(i) - T(i-1) )
spectralordinate = a * Sa(i-1) + (1.-a) * Sa(i)
END

```

## **CAPÍTULO VI**

### **APLICACIÓN AL ANÁLISIS SÍSMICO DE CHIMENEAS**

La construcción de chimeneas de concreto armado y de gran altura se requiere básicamente para un mayor control del aire contaminado. Se han construido chimeneas con alturas del orden de hasta 400 m. y hay la tendencia a construir este tipo de estructuras cada vez más altas.

Debido a los recientes cambios en la proporción geométrica de las chimeneas, muchos problemas estructurales como la respuesta ante un sismo se tornaron críticos. Con la disponibilidad de computadoras se hizo posible el análisis para tales fuerzas y así calcular los esfuerzos para muchas condiciones de carga de manera más rápida y económica.

#### **6.1 PROPORCIONAMIENTO**

La altura de la chimenea así como su diámetro en la parte más alta son normalmente escogidas para que la velocidad de salida y dispersión de los gases estén dentro de límites especificados. El diámetro en la base sin embargo está más frecuentemente controlado por requerimientos estructurales del concreto de la cáscara y de la cimentación. Por ejemplo, un diámetro pequeño en la base puede crear problemas en la parte superior de la cimentación y puede causar altos esfuerzos en el fuste del concreto. Una vez que los diámetros inferiores y superiores interiores estén definidos los exteriores pueden variar linealmente a lo largo de la chimenea para mayor facilidad de la construcción sin pérdida significativa de economía.

El espesor del concreto está determinado para satisfacer esfuerzos en el concreto debido a la carga de viento estática y carga muerta. El ACI establece que: "el espesor mínimo de

pared para cualquier chimenea con un diámetro interno de 28 pies o menos debe ser 8 pulgadas. Cuando el diámetro interno excede los 28 pies, el espesor mínimo de pared deberá ser incrementado ¼ de pulgada por cada 2 pies de incremento en el diámetro interno”.

## 6.2 FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS DE VIBRACION DE UN SISTEMA CONTINUO DE MASA Y RIGIDEZ FLEXIONANTE

Un sistema continuo es aquel que tiene su masa distribuida y por tanto tiene un infinito número de grados de libertad unidimensionales. Está definida por la siguiente ecuación modal de movimiento de cuarto orden:

$$EI(x)\phi^{iv}(x) + 2EI'(x)\phi'''(x) + EI''(x)\phi''(x) - \omega^2 m(x)\phi(x) = 0 \quad 6.01$$

La idealización de una chimenea como viga empotrada sujeta a flexión para aproximar su comportamiento dinámico con masa  $m(x)$  y rigidez flexionante  $EI(x)$  de un sistema continuo se facilita grandemente si se consideran estas propiedades constantes y uniformes en todo el largo de su fuste.

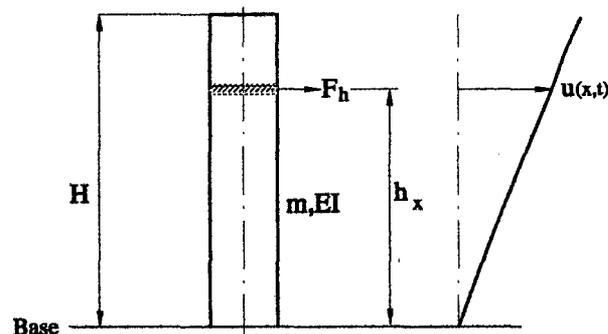


Figura 6.1

Esta aproximación permite hacer un desarrollo práctico de la ecuación 6.01 que transformada y para un sistema continuo sin amortiguamiento es:

$$EI\phi^{iv}(x) - \omega^2 m\phi(x) = 0 \quad 6.02$$

### 6.2.1 Frecuencias Naturales

Como resultado del procedimiento analítico de 6.02, se utilizarán las siguientes expresiones para el cálculo de las frecuencias de una chimenea concebida para el análisis como una viga sometida a flexión, de sección hueca uniforme empotrada en un extremo y que a continuación se detalla:

$$C^2 = \frac{EI}{m} \quad 6.03$$

$$\omega_1 = \frac{3.516}{H^2} C \quad 6.04$$

$$\omega_2 = \frac{22.03}{H^2} C \quad 6.05$$

$$\omega_3 = \frac{61.70}{H^2} C \quad 6.06$$

$$\omega_4 = \frac{120.9}{H^2} C \quad 6.07$$

Y para  $n \geq 3$  siendo  $n$  el número de modo

$$\omega_n = \frac{\pi^2(n-.5)^2}{H^2} C \quad 6.08$$

De acuerdo a esto, las relaciones para hallar los valores del módulo de Young E, la Inercia I y la masa que estará expresada por unidad de longitud serán:

$$E = 15000\sqrt{f'c} \quad \text{Donde } f'c = 210k/cm^2 \quad 6.09$$

$$A = \pi(r_e^2 - r_i^2) \quad 6.10$$

$$I = 0.7854(r_e^4 - r_i^4) \quad 6.11$$

$$m = \frac{\gamma A}{g} \quad \text{siendo } \gamma \text{ el peso volumetrico } \gamma_{\text{concreto armado}} = 2,400 \text{ kg/m}^3 \quad 6.12$$

*g la aceleración de la gravedad 9.81 m/seg<sup>2</sup>*

### 6.2.2 Modos de Vibración

Para la determinación de las formas de modo naturales de una chimenea de sección hueca uniforme en cantiliver se utilizará la siguiente expresión analítica:

$$\phi(y)_1 = C_1 \left[ \cosh \beta y - \cos \beta y - \frac{\cosh \beta H + \cos \beta H}{\sinh \beta H + \sin \beta H} (\sinh \beta y - \sin \beta y) \right] \quad 6.13$$

Donde  $C_1$  es una constante arbitraria y el factor  $\beta H$  tiene las siguientes raíces:

$$\beta H = 1.875, 4.6941, 7.8548, \text{ y } 10.996 \quad 6.14$$

Y para  $n > 4$  siendo  $n$  el número de modo

$$\beta H \approx (2n-1)\pi/2 \quad 6.15$$

## 6.3 APLICACIÓN

### 6.3.1 Chimenea de Sección Hueca Uniforme

Características:

$H = 50 \text{ m.}$ ,  $R_{\text{ext.}} = 2.60 \text{ m.}$ ,  $R_{\text{inte}} = 2.40 \text{ m.}$ , espesor de pared  $t = 0.20 \text{ m.}$ , material : concreto armado.

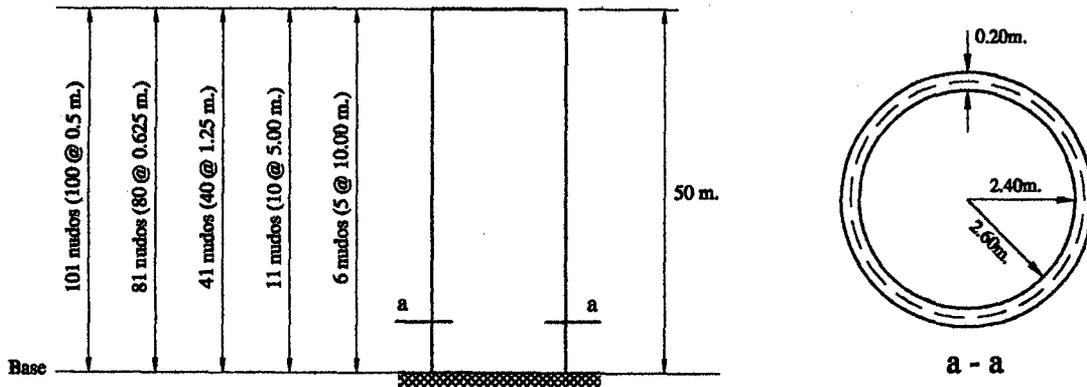


Figura 6.2

### 6.3.2 Descripción del Modelo de Elementos Finitos.

Para el análisis, se utilizaron mallas de 5, 10, 40 y 80 elementos por criterio de igual tamaño para asemejar un comportamiento " uniformemente distribuido " y probar una mayor aproximación de resultados en nudos comunes al modelo de la figura 6.02 .

Se presentan tablas y gráficos con las propiedades dinámicas naturales del sistema. El factor  $C_1$  es la constante obtenida de normalizar la forma de modo obtenida analíticamente con la malla de 10 elementos y tiene como pivot el último nudo. A partir de allí es que se busca la comparación con las otras mallas más tupidas.

Las frecuencias angulares tienden a la convergencia a medida que se hace más tupida la malla pero que también va divergiendo a partir del tercer modo de los obtenidos por medio analítico.

Esta aparente divergencia se debe a que el programa de cómputo está arrojando resultados de excitación de otros grados de libertad que son perfectamente válidos pero que el modelo analítico no toma en cuenta. El programa de cómputo arrojará valores de frecuencias naturales de mayor valor y convergentes si se solicitan más formas de modo.

Esto se explica por las limitaciones que el modelo analítico de viga empotrada a flexión presenta, ya que no toma en cuenta el cortante, tiene grados de libertad en una sola dirección en comparación al modelo utilizado en el programa de cómputo que tiene cuatro direcciones de análisis por nudo y posee una subrutina de obtención de valores y vectores propios como iteración en el subespacio orientado a obtener las frecuencias de menor valor que son los de mayor interés para el análisis.

Los gráficos muestran el comportamiento modal de la estructura hasta en 5 formas de modo en la dirección radial o normal al meridiano. Se observa que para mallas más tupidas las componentes modales son prácticamente las mismas y coincidentes con la obtenida analíticamente.

Como se indicó, un modelo con espaciamiento uniformemente distribuido da mejores resultados que una división que puede ser igual de tupida pero por tramos de subdivisión variable. Según los modelos aplicados, esta última forma genera saltos en el gráfico que fácilmente pueden dejar escapar algún detalle en la variación de esfuerzos por ejemplo.

Sin embargo, siempre es conveniente hacer una malla más tupida en zonas donde se supone se generan los mayores esfuerzos. Un ejemplo claro es en el área cercana de empotramiento que para este caso resulto estar en los primeros 5 metros.

Aceptado el modelo propuesto en la tesis para obtención de las frecuencias angulares y formas de modo el análisis modal espectral prácticamente sigue la metodología estándar.

Para definir las componentes de desplazamiento horizontal del sismo se tiene que apreciar además el comportamiento tangencial. De los gráficos, se observa que le corresponde una forma modal para cada malla aproximadamente igual en valor absoluto pero de signo negativo a la componente radial de desplazamiento.

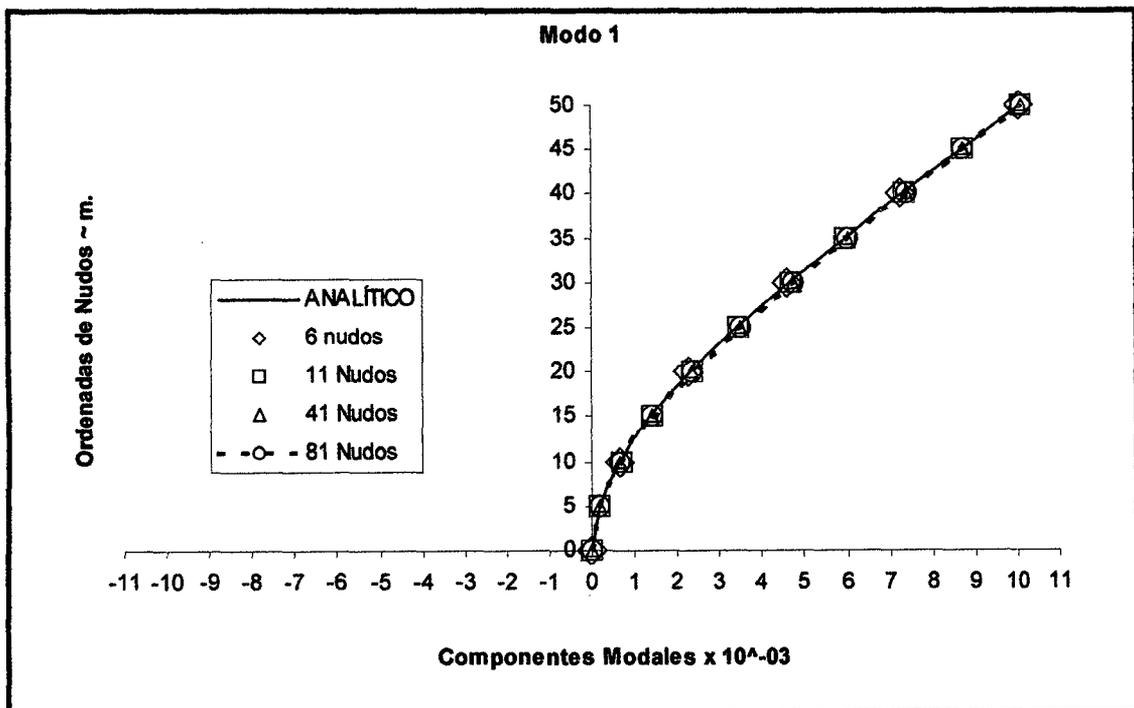
Sin embargo, se puede determinar que efectivamente se logra una mayor aproximación con mallas más tupidas a nivel de desplazamientos y esfuerzos a nivel de nudos. Gráficamente se puede apreciar esta convergencia.

A continuación se presentan gráficos y tablas para 5 formas de modo que ilustran lo expuesto.

**COMPONENTES EN LA DIRECCION NORMAL AL MERIDIANO (RADIAL)**

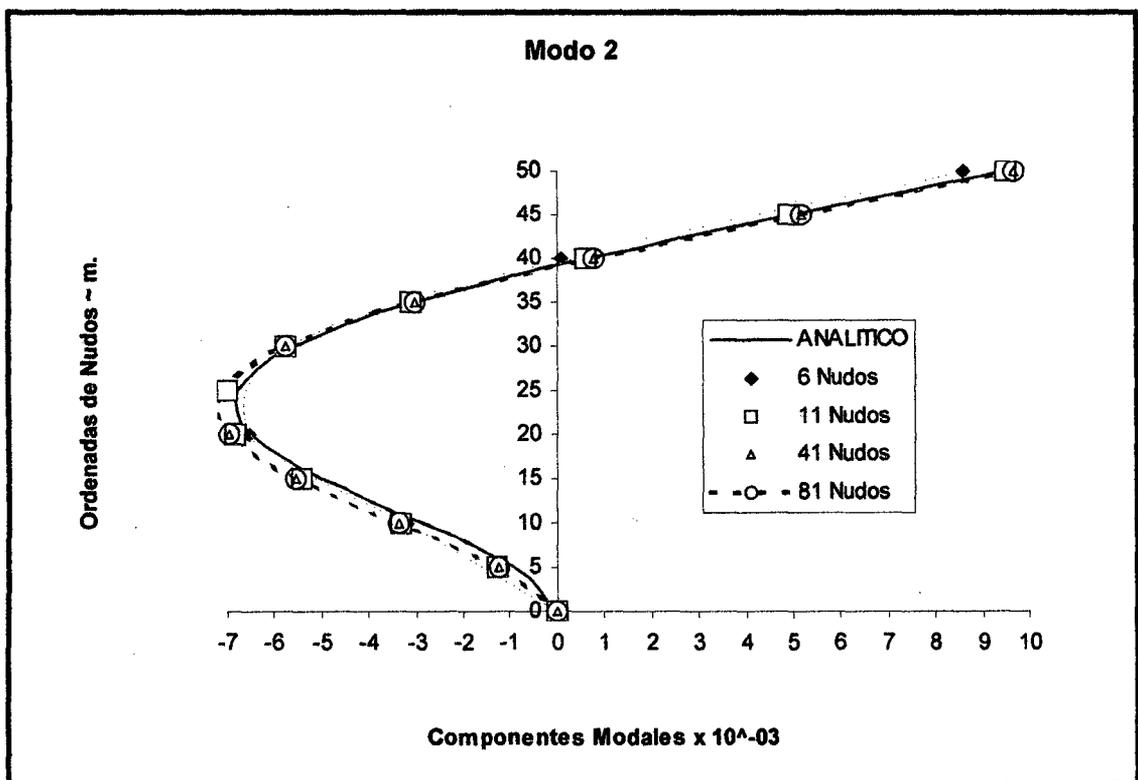
MODO 1					
	ANALITICO	MEF			
		6 Nudos	11 Nudos	41 Nudos	81 Nudos
T (seg.)	0.847	0.581	0.788	0.856	0.859
f(hertz)	1.185	1.431	1.269	1.169	1.165
W (rad/seg.)	7.420	10.806	7.972	7.344	7.317

COMPONENTES MODALES					
NUDO	ANALÍTICO C1= 5.0475 x10 <sup>-03</sup>	MEF			
		6 Nudos x10 <sup>-03</sup>	11 Nudos x10 <sup>-03</sup>	41 Nudos x10 <sup>-03</sup>	81 Nudos x10 <sup>-03</sup>
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.169		0.210	0.192	0.191
3	0.645	0.668	0.688	0.684	0.683
4	1.378		1.422	1.428	1.428
5	2.321	2.271	2.365	2.379	2.379
6	3.427		3.469	3.490	3.490
7	4.655	4.582	4.692	4.718	4.718
8	5.965		5.995	6.024	6.025
9	7.324	7.260	7.345	7.375	7.377
10	8.706		8.717	8.745	8.747
11	10.095	10.050	10.095	10.117	10.119



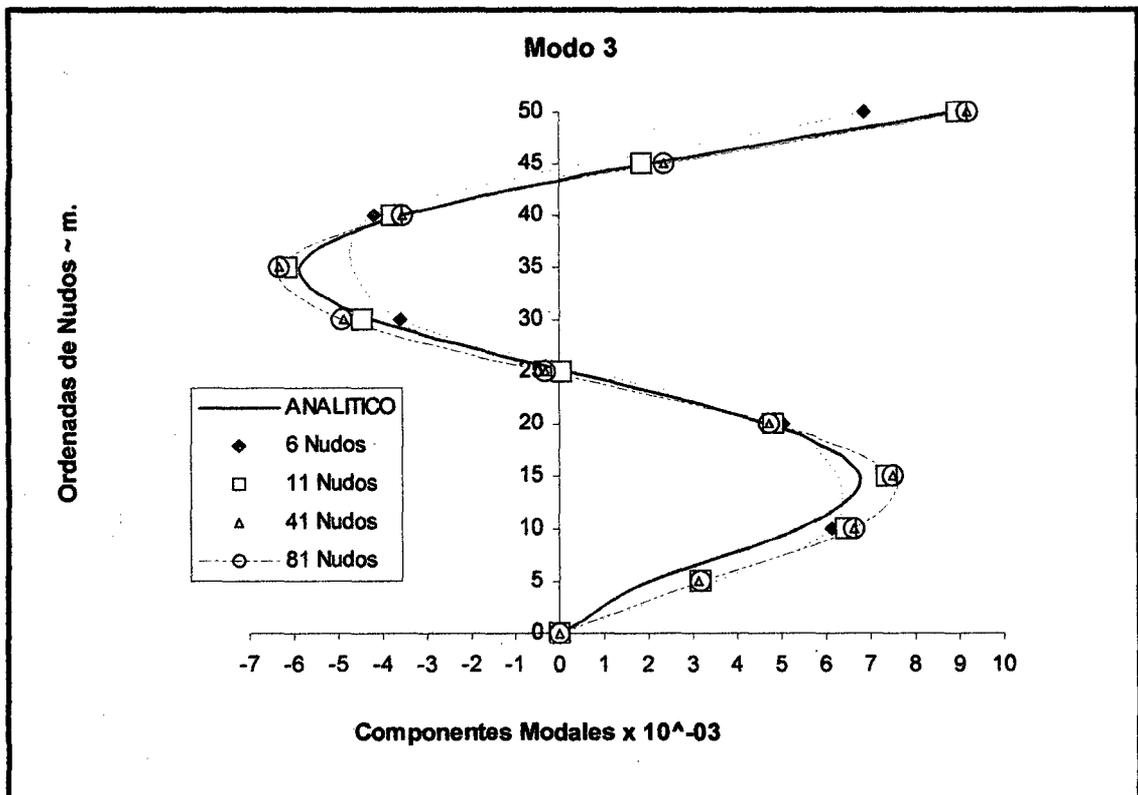
MODO 2					
	ANALITICO	MEF			
		6 Nudos	11 Nudos	41 Nudos	81 Nudos
T (seg.)	0.135	0.110	0.137	0.1476	0.148
f(hertz)	7.396	9.126	7.309	6.7762	6.752
W (rad/seg.)	46.47	57.338	45.922	42.576	42.426

COMPONENTES MODALES					
NUDO	ANALÍTICO C1= -4.7463 x10 <sup>-03</sup>	6 Nudos x10 <sup>-03</sup>	11 Nudos x10 <sup>-03</sup>	41 Nudos x10 <sup>-03</sup>	81 Nudos x10 <sup>-03</sup>
1	0.000	0.000	0	0.000	0.000
2	-0.879		-1.276	-1.231	-1.228
3	-2.857	-3.180	-3.312	-3.374	-3.376
4	-4.994		-5.414	-5.538	-5.543
5	-6.488	-6.525	-6.826	-6.959	-6.966
6	-6.775		-7.019	-7.112	-7.117
7	-5.597	-5.772	-5.760	-5.770	-5.772
8	-3.012		-3.114	-3.024	-3.021
9	0.662	0.075	0.603	0.780	0.789
10	4.968		4.936	5.156	5.167
11	9.488	8.581	9.488	9.648	9.650



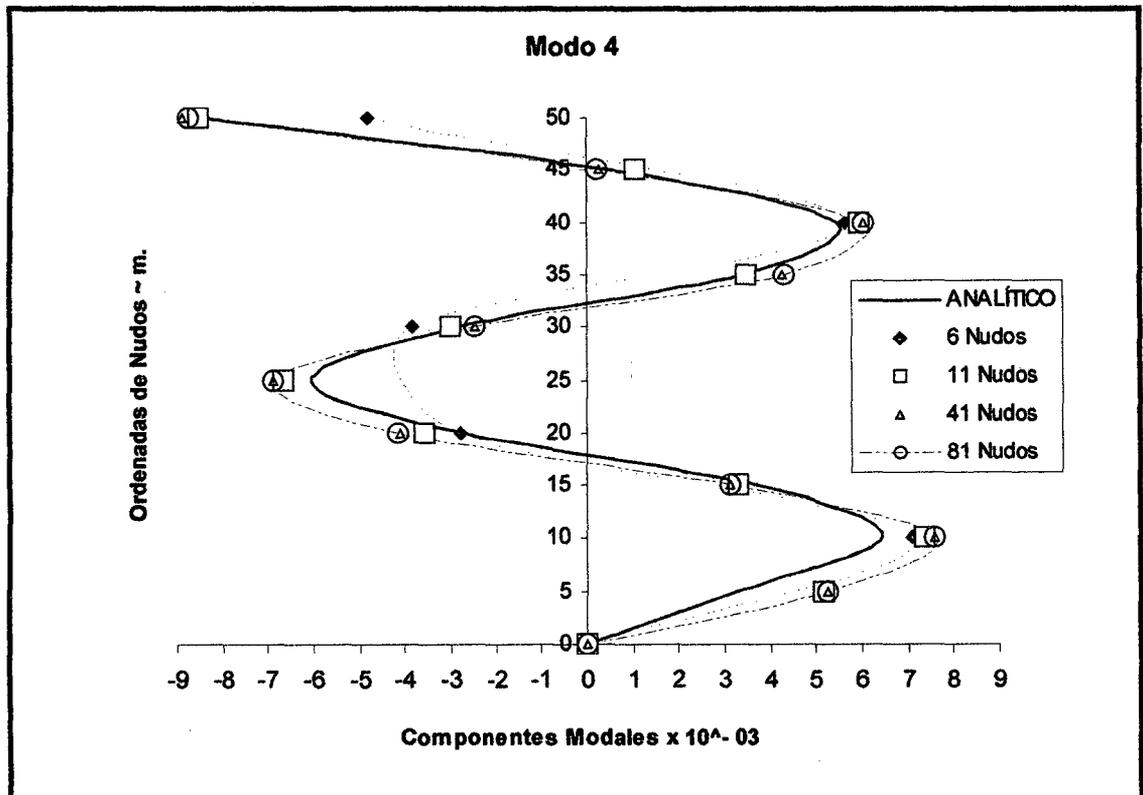
MODO 3					
	ANALITICO	MEF			
		6 Nudos	11 Nudos	41 Nudos	81 Nudos
T (seg.)	0.0483	0.046	0.054	0.0583	0.059
f(hertz)	20.714	21.829	18.412	17.1522	17.090
W (rad/seg.)	130.15	137.156	115.684	107.771	107.378

COMPONENTES MODALES						
NUDO	ANALÍTICO C1= 4.4712 x10 <sup>-03</sup>	6 Nudos x10 <sup>-03</sup>	11 Nudos x10 <sup>-03</sup>	41 Nudos x10 <sup>-03</sup>	81 Nudos x10 <sup>-03</sup>	
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	2.040		3.170	3.159	3.160	
3	5.406	6.152	6.447	6.643	6.655	
4	6.763		7.344	7.497	7.508	
5	4.703	5.068	4.827	4.735	4.733	
6	0.175		0.032	-0.320	-0.337	
7	-4.237	-3.573	-4.470	-4.886	-4.909	
8	-5.879		-6.127	-6.318	-6.329	
9	-3.530	-4.186	-3.777	-3.566	-3.555	
10	2.045		1.843	2.342	2.369	
11	8.944	6.877	8.944	9.191	9.160	



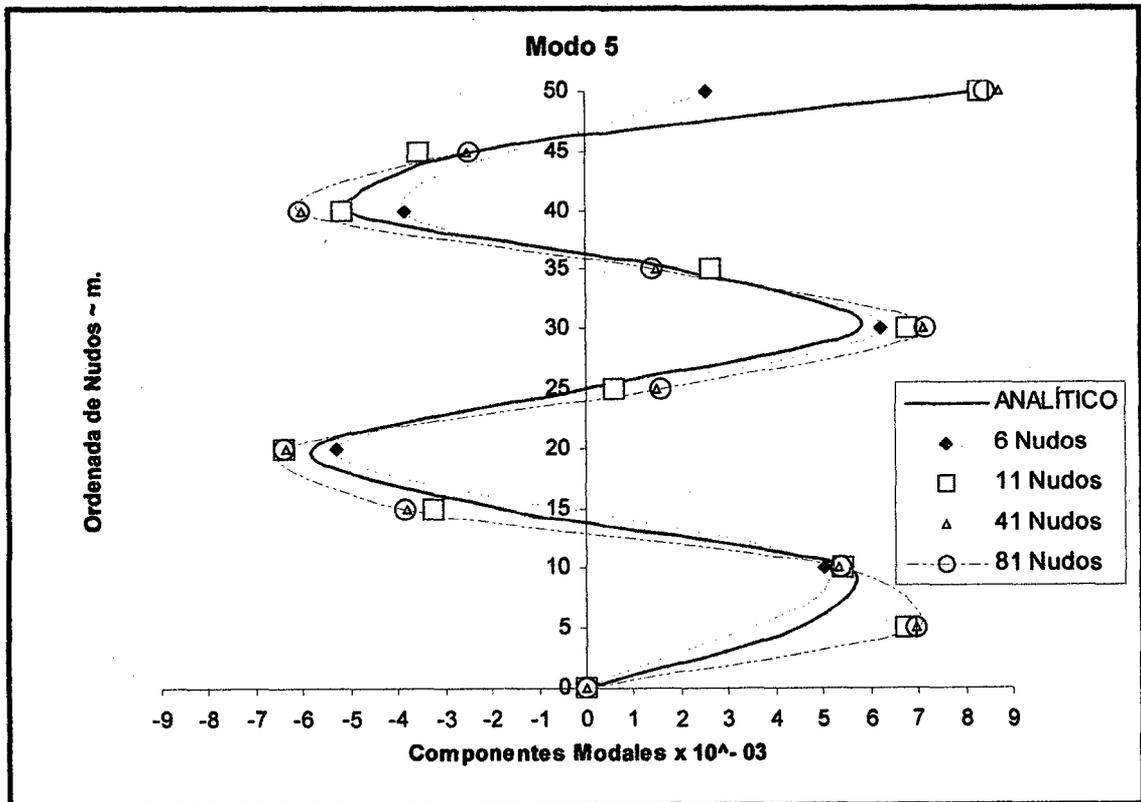
MODO 4					
	ANALITICO	MEF			
		6 Nudos	11 Nudos	41 Nudos	81 Nudos
T (seg.)	0.025	0.028	0.032	0.034	0.034
f(hertz)	20.714	35.541	31.782	29.895	29.781
W (rad/seg.)	255.030	223.308	199.691	187.834	187.120

COMPONENTES MODALES					
NUDO	ANALÍTICO C1=4.2654 x10 <sup>-03</sup>	6 Nudos x10 <sup>-03</sup>	11 Nudos x10 <sup>-03</sup>	41 Nudos x10 <sup>-03</sup>	81 Nudos x10 <sup>-03</sup>
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	3.284		5.156	5.251	5.262
3	6.430	7.124	7.374	7.575	7.594
4	3.701		3.329	3.125	3.118
5	-2.692	-2.800	-3.580	-4.100	-4.132
6	-6.032		-6.680	-6.871	-6.887
7	-2.786	-3.845	-3.019	-2.481	-2.453
8	3.390		3.507	4.296	4.343
9	5.486	5.668	5.950	6.056	6.065
10	0.444		1.056	0.258	0.210
11	-8.530	-4.814	-8.530	-8.857	-8.735



MODO 5					
	ANALITICO	MEF			
		6 Nudos	11 Nudos	41 Nudos	81 Nudos
T (seg.)	0.015	0.022	0.022	0.023	0.023
f(hertz)	67.098	46.563	45.746	43.849	43.680
W (rad/seg.)	421.590	292.564	287.433	275.511	274.448

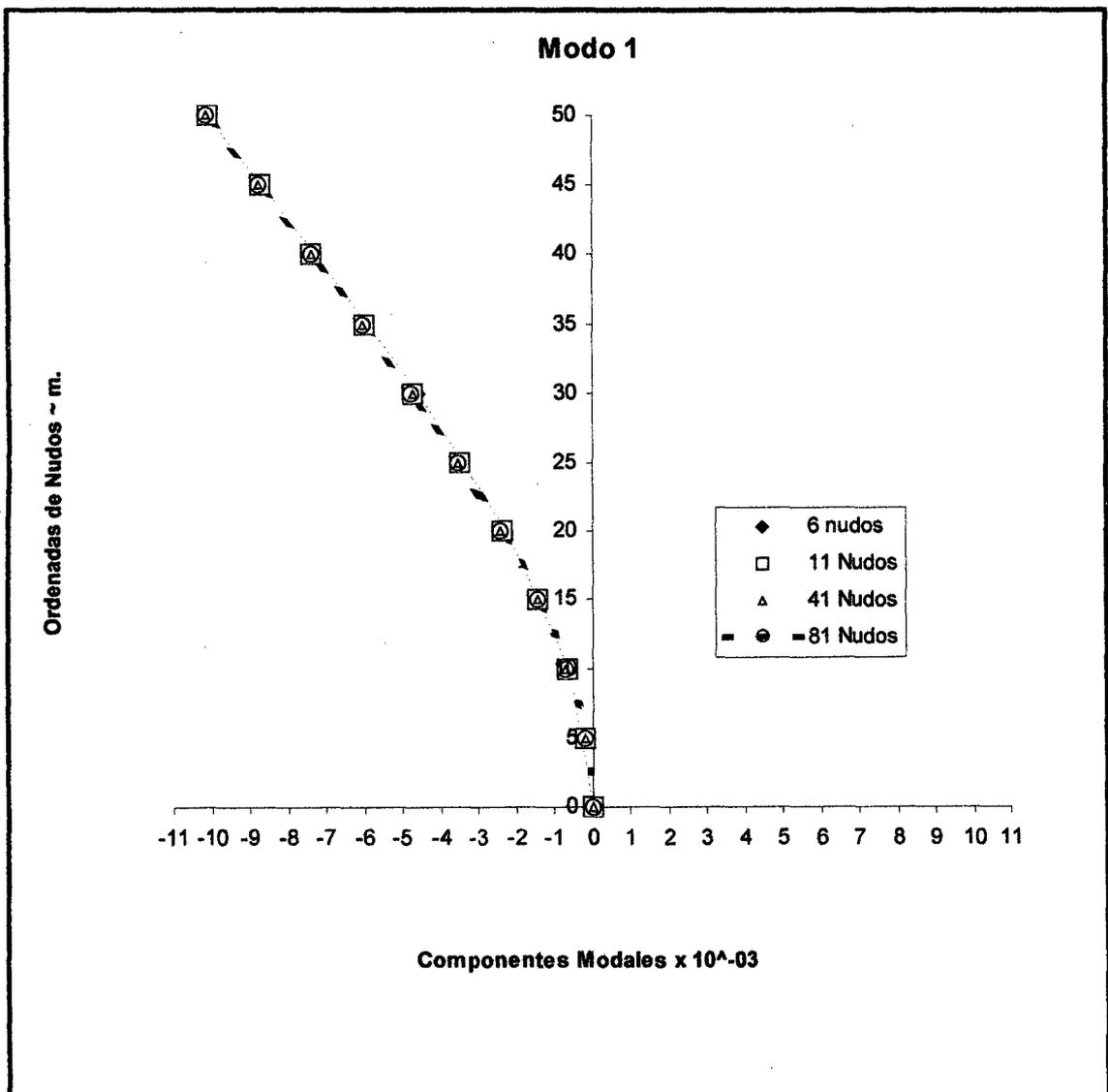
COMPONENTES MODALES					
NUDO	ANALÍTICO C1= 4.1540 x10 <sup>-03</sup>	6 Nudos x10 <sup>-03</sup>	11 Nudos x10 <sup>-03</sup>	41 Nudos x10 <sup>-03</sup>	81 Nudos x10 <sup>-03</sup>
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	4.463		6.747	6.936	6.965
3	5.480	5.044	5.399	5.350	5.359
4	-1.755		-3.249	-3.780	-3.822
5	-5.787	-5.302	-6.402	-6.372	-6.385
6	0.007		0.600	1.514	1.572
7	5.818	6.236	6.803	7.115	7.148
8	1.875		2.626	1.489	1.420
9	-4.989	-3.855	-5.144	-6.005	-6.066
10	-2.443		-3.544	-2.530	-2.464
11	8.308	2.538	8.308	8.760	8.461



### COMPONENTES EN LA DIRECCION TANGENCIAL

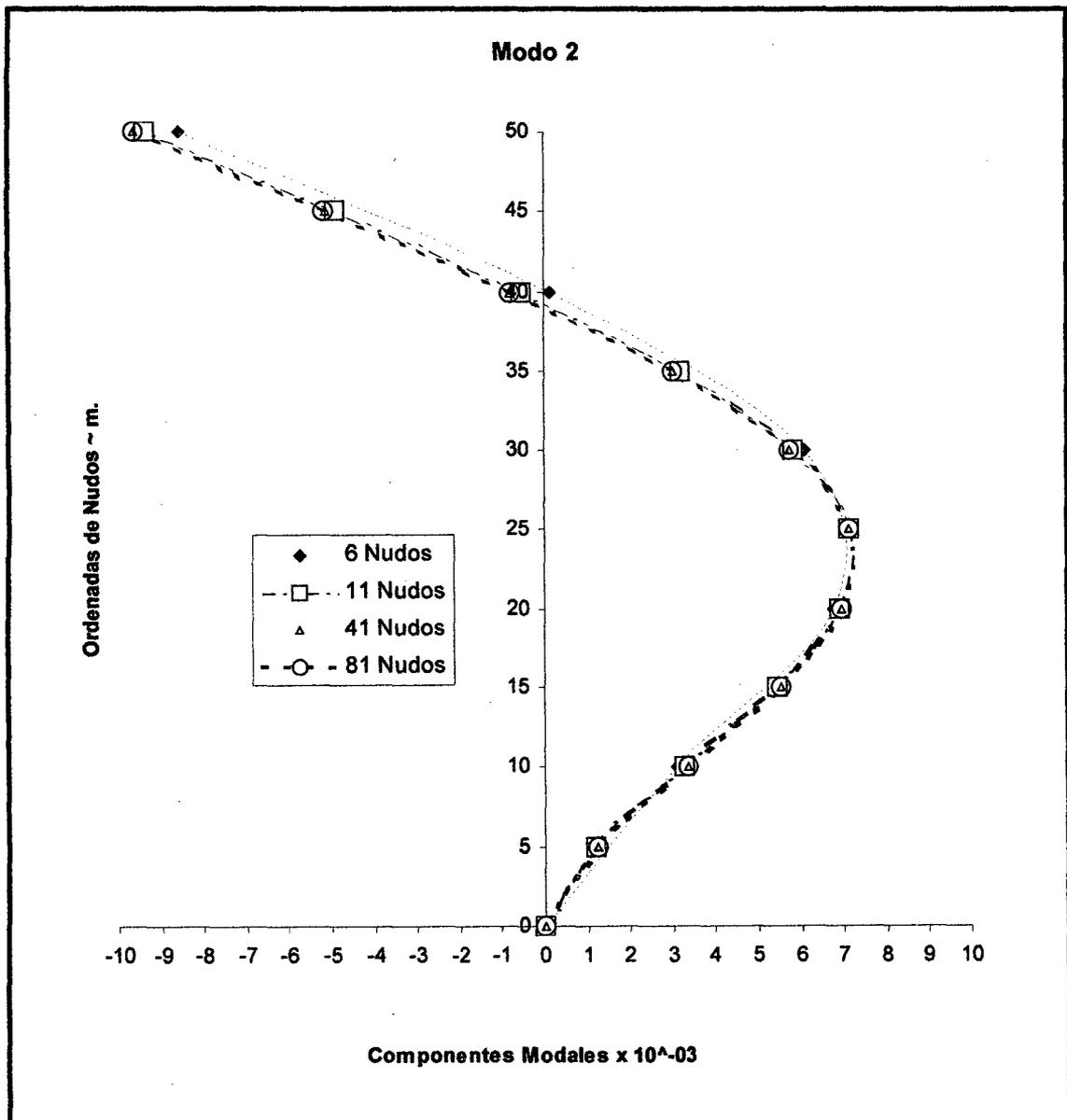
#### MODO 1

NUDO	MEF			
	6 Nudos $\times 10^{-3}$	11 Nudos $\times 10^{-3}$	41 Nudos $\times 10^{-3}$	81 Nudos $\times 10^{-3}$
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2		-0.181	-0.190	-0.191
3	-0.573	-0.666	-0.682	-0.683
4		-1.405	-1.427	-1.428
5	-2.209	-2.351	-2.378	-2.379
6		-3.458	-3.489	-3.490
7	-4.549	-4.685	-4.717	-4.718
8		-5.991	-6.023	-6.025
9	-7.248	-7.343	-7.375	-7.376
10		-8.716	-8.745	-8.746
11	-10.052	-10.091	-10.117	-10.118



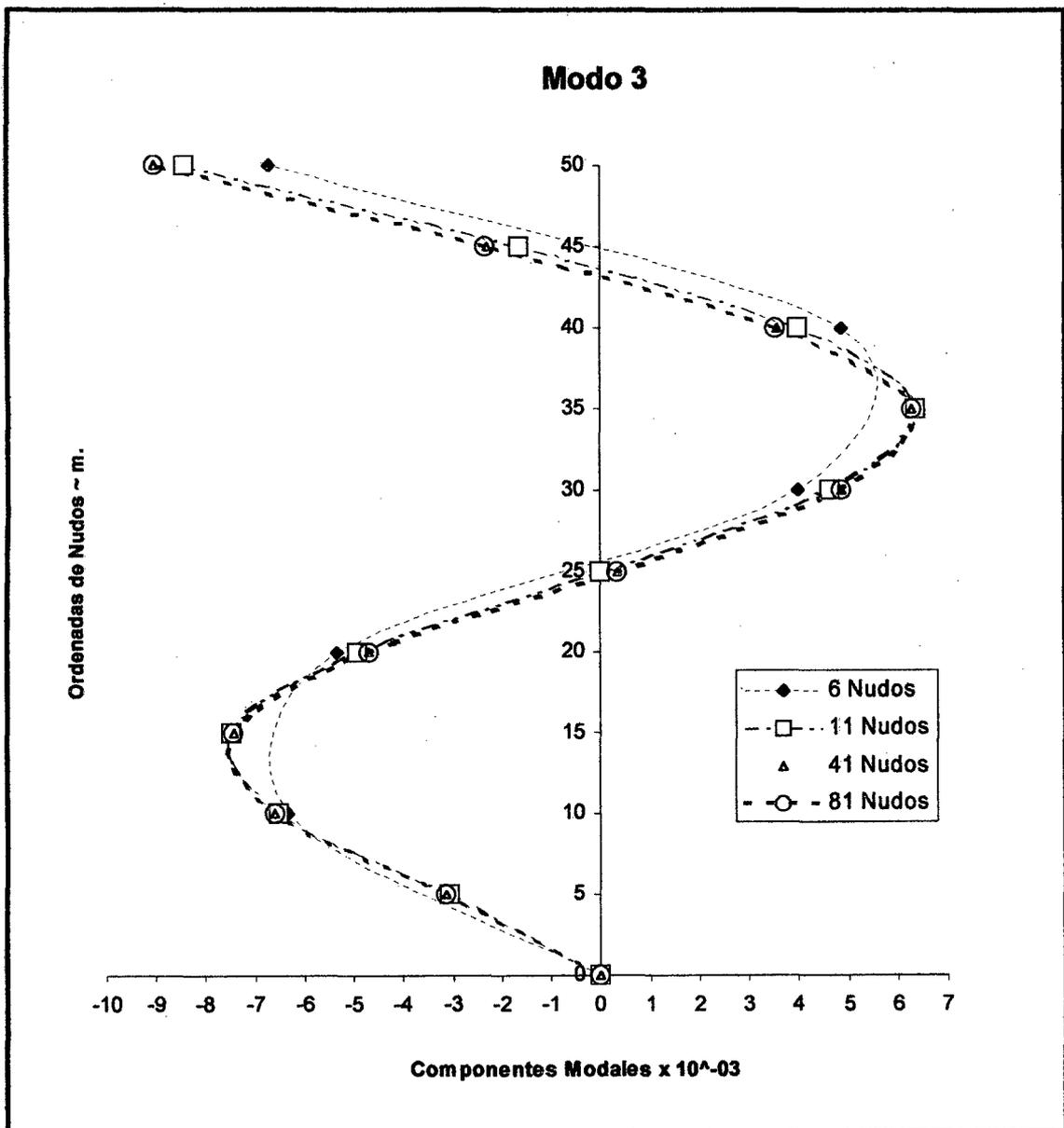
**MODO 2**

NUDO	MEF			
	6 Nudos $\times 10^{-3}$	11 Nudos $\times 10^{-3}$	41 Nudos $\times 10^{-3}$	81 Nudos $\times 10^{-3}$
1	0	0.000	0.000	0.000
2		1.177	1.224	1.226
3	3.091	3.294	3.369	3.372
4		5.457	5.535	5.537
5	6.778	6.910	6.957	6.959
6		7.122	7.111	7.110
7	6.116	5.860	5.770	5.766
8		3.195	3.026	3.018
9	0.134	-0.548	-0.776	-0.787
10		-4.900	-5.149	-5.160
11	-8.579	-9.401	-9.625	-9.634



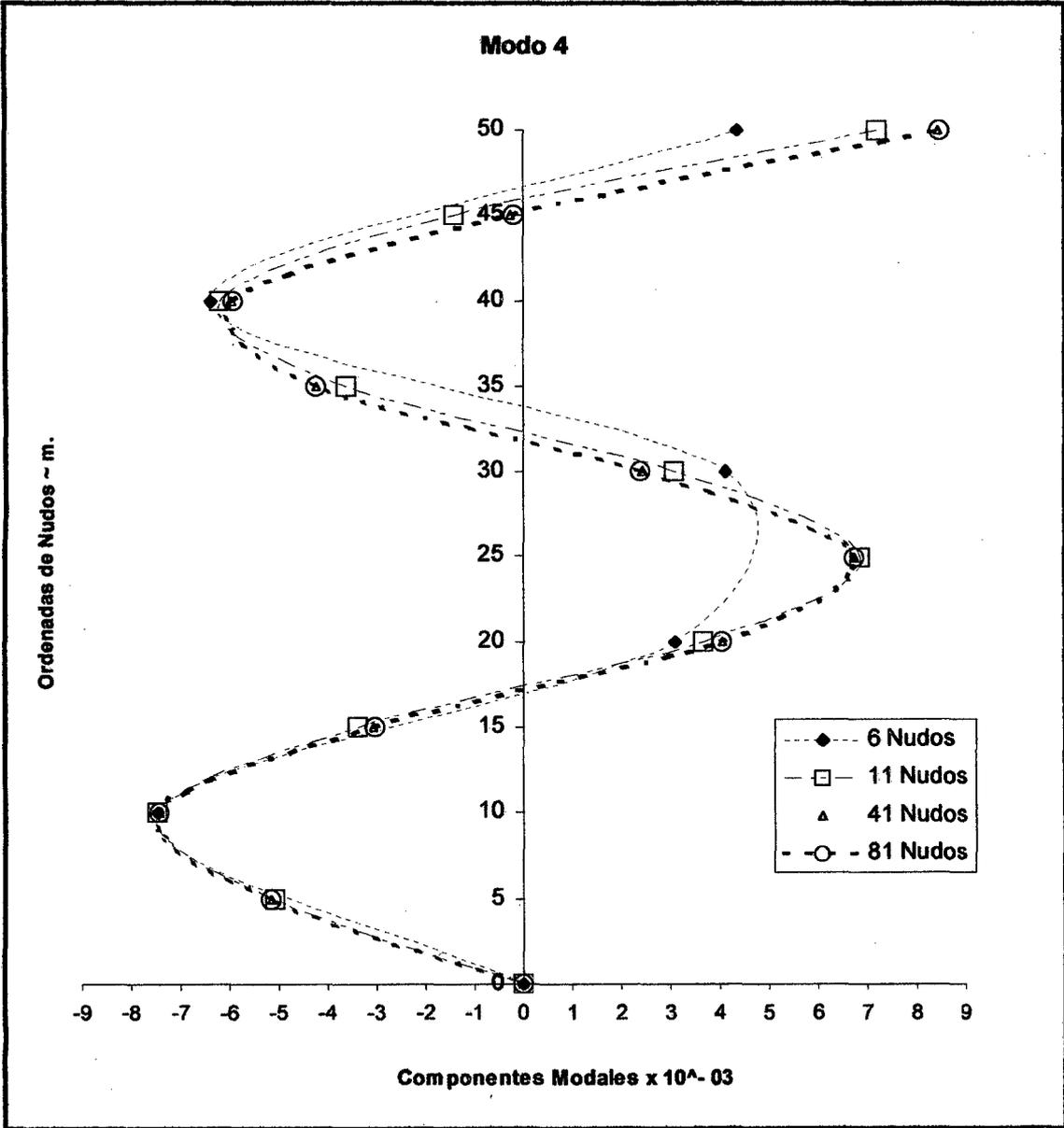
**MODO 3**

NUDO	MEF			
	6 Nudos $\times 10^{-3}$	11 Nudos $\times 10^{-3}$	41 Nudos $\times 10^{-3}$	81 Nudos $\times 10^{-3}$
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2		-3.051	-3.132	-3.134
3	-6.338	-6.525	-6.603	-6.605
4		-7.496	-7.456	-7.452
5	-5.362	-4.930	-4.709	-4.698
6		-0.001	0.320	0.335
7	4.005	4.620	4.863	4.873
8		6.346	6.289	6.284
9	4.850	3.984	3.553	3.531
10		-1.660	-2.319	-2.349
11	-6.724	-8.454	-9.045	-9.065



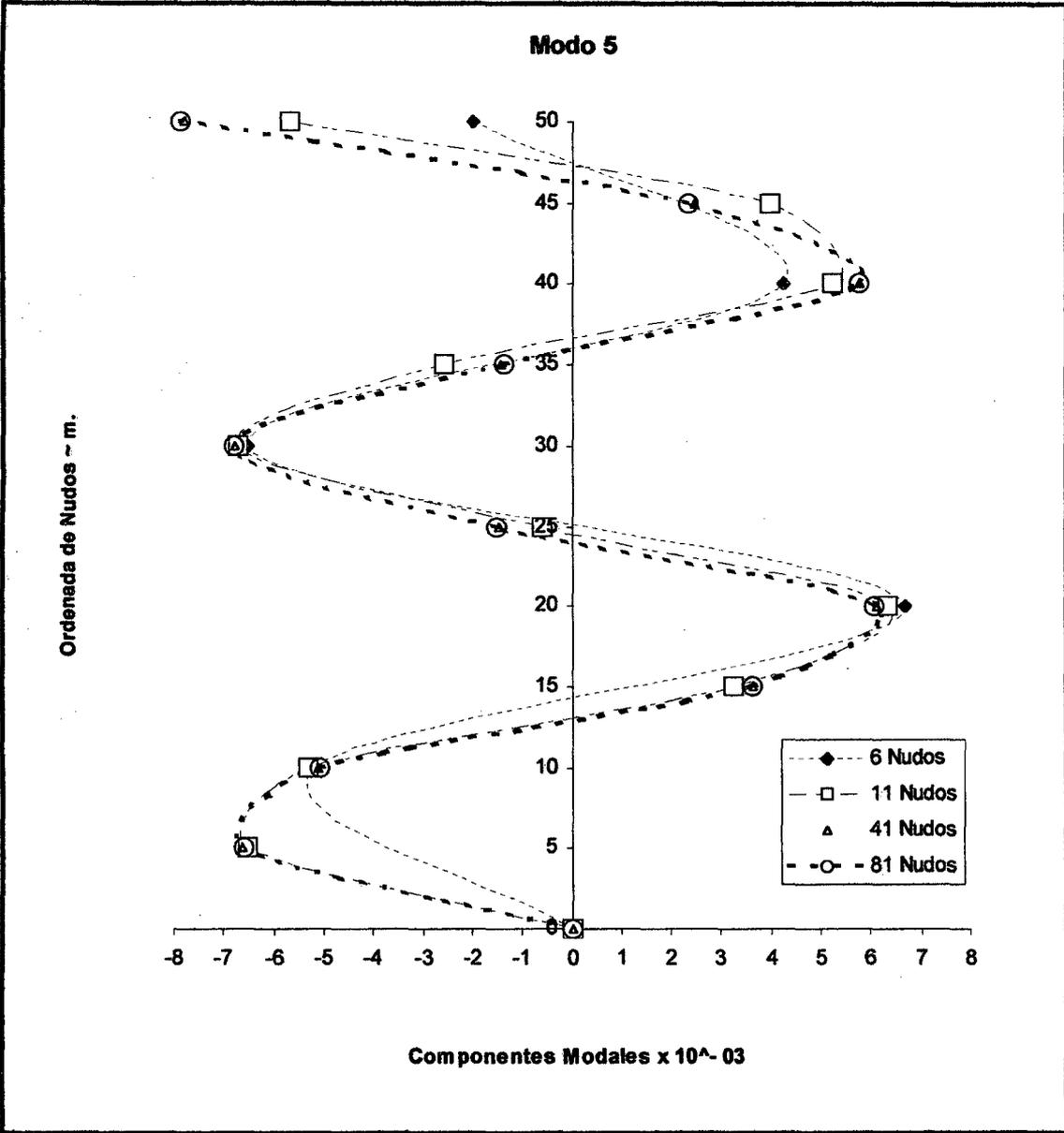
**MODO 4**

NUDO	MEF			
	6 Nudos $\times 10^{-3}$	11 Nudos $\times 10^{-3}$	41 Nudos $\times 10^{-3}$	81 Nudos $\times 10^{-3}$
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2		-5.060	-5.138	-5.137
3	-7.471	-7.458	-7.425	-7.417
4		-3.372	-3.063	-3.045
5	3.082	3.673	4.023	4.037
6		6.832	6.740	6.728
7	4.116	3.074	2.433	2.396
8		-3.628	-4.217	-4.243
9	-6.403	-6.203	-5.947	-5.927
10		-1.432	-0.268	-0.209
11	4.331	7.203	8.425	8.458

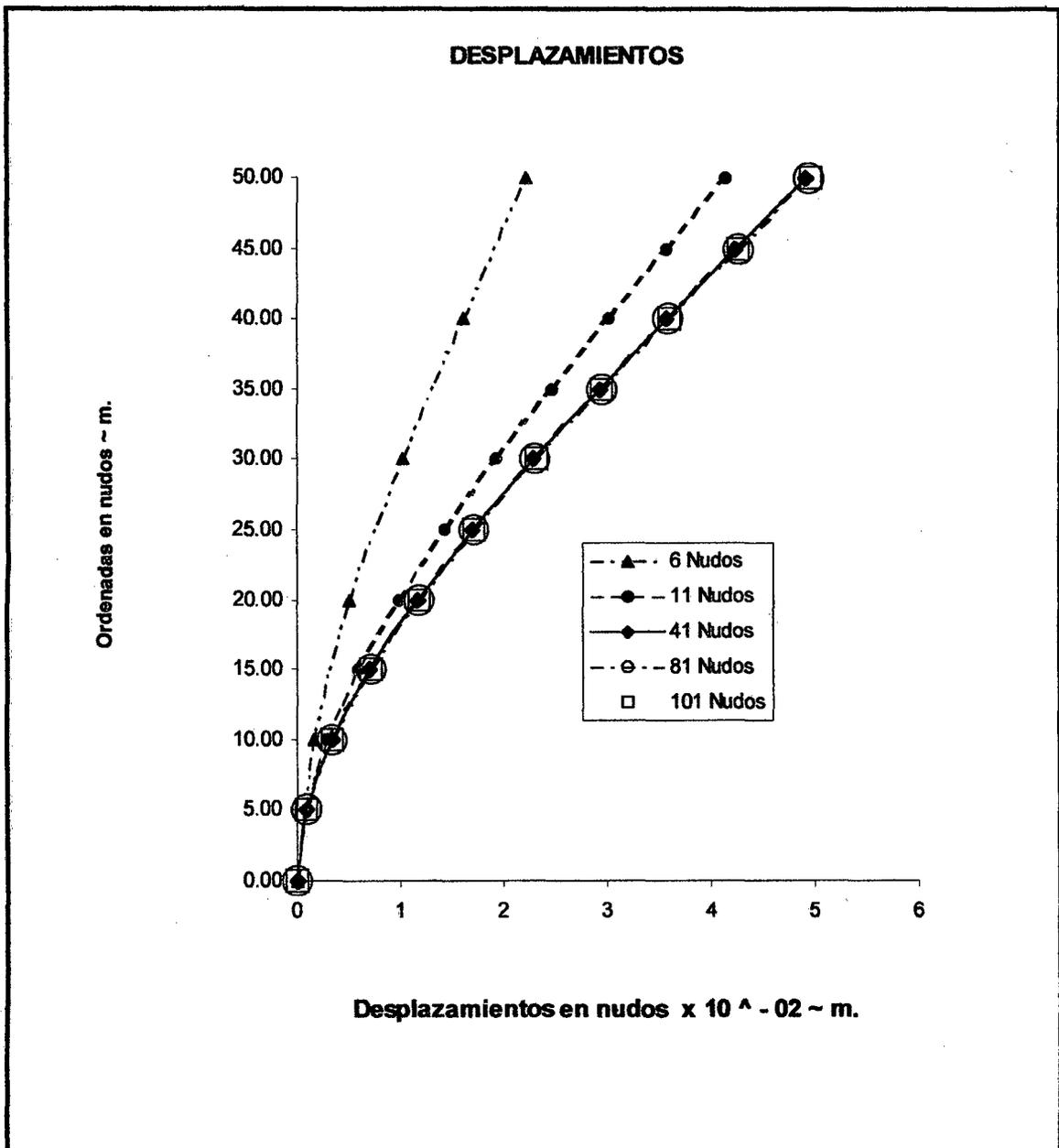


**MODO 5**

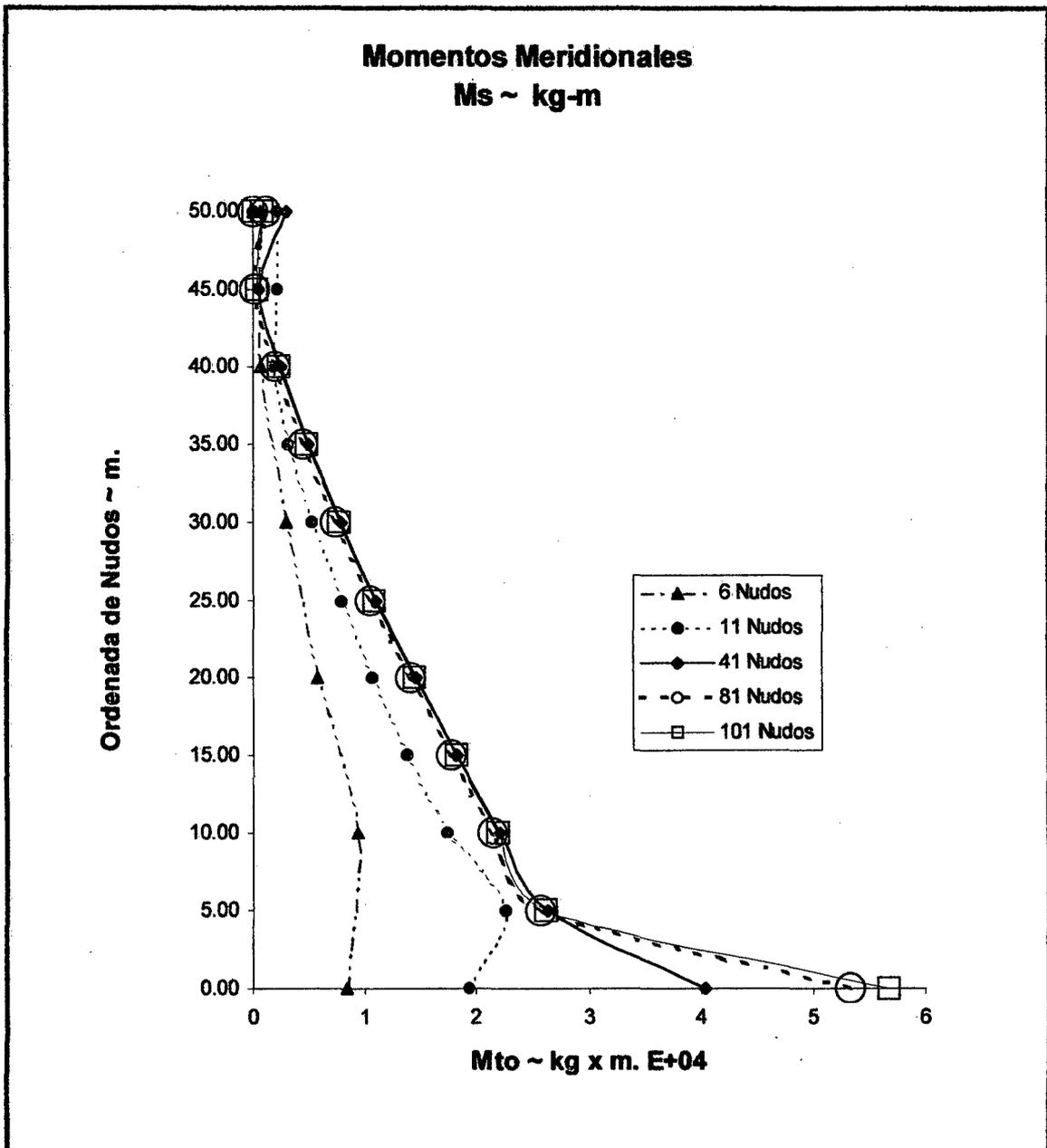
NUDO	MEF			
	6 Nudos $\times 10^{-3}$	11 Nudos $\times 10^{-3}$	41 Nudos $\times 10^{-3}$	81 Nudos $\times 10^{-3}$
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2		-6.532	-6.616	-6.610
3	-5.188	-5.295	-5.108	-5.087
4		3.233	3.616	3.630
5	6.674	6.345	6.091	6.063
6		-0.588	-1.447	-1.493
7	-6.530	-6.724	-6.800	-6.786
8		-2.565	-1.421	-1.348
9	4.224	5.214	5.747	5.762
10		3.968	2.435	2.343
11	-1.999	-5.697	-7.828	-7.884



DESPLAZAMIENTOS					
m. x 10 <sup>-02</sup>					
Ordenada m.	6 Nudos	11 Nudos	41 Nudos	81 Nudos	101 Nudos
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5.00		0.0894	0.0967	0.0969	0.0970
10.00	1.5220	0.2896	0.3399	0.3422	0.3424
15.00		0.5941	0.7046	0.7098	0.7104
20.00	5.0862	0.9818	1.1666	1.1755	1.1765
25.00		1.4300	1.7028	1.7159	1.7175
30.00	0.2220	1.9320	2.2941	2.3118	2.3140
35.00		2.4609	2.9199	2.9425	2.9452
40.00	0.0725	3.0090	3.5681	3.5957	3.5991
45.00		3.5777	4.2390	4.2718	4.2757
50.00	0.0725	4.1514	4.9136	4.9514	4.9559



MOMENTOS MERIDIONALES X 10 <sup>4</sup> ~ kg-m.					
Ordenada	6 Nudos	11 Nudos	41 Nudos	81 Nudos	101 Nudos
0.00	0.8277	1.9335	4.0367	5.3279	5.6672
5.00		2.2595	2.6288	2.5657	2.6185
10.00	0.9256	1.7314	2.1997	2.1392	2.1868
15.00		1.3727	1.8222	1.7671	1.8105
20.00	0.5722	1.0609	1.4592	1.4028	1.4449
25.00		0.7796	1.1020	1.0493	1.0869
30.00	0.2886	0.5283	0.7835	0.7306	0.7664
35.00		0.3181	0.4898	0.4418	0.4727
40.00	0.0725	0.1730	0.2421	0.2019	0.2267
45.00		0.2081	0.0476	0.0209	0.0354
50.00	0.0725	0.2081	0.3005	0.1188	0.0817





4	4	5	.200
5	5	6	.200
6	6	7	.200
7	7	8	.200
8	8	9	.200
9	9	10	.200
10	10	11	.200

Propiedades del Material

E = 2.174E+09  
 α = .000  
 g = 244.648

\* INFORMACION PARA ANALISIS DINAMICO \*

Espectro de pseudo-aceleraciones

T Sa  
 .18500 1.69700

5 modos

chimenea

Modo 1

T = .7882 seg  
 f = 1.2688 Hertz  
 w = 7.972 rad/seg

Sa = 1.697E+00  
 Sv = 2.129E-01  
 Sd = 2.670E-02

vector característico:

u	w	B	v
.000000	.000000	.000000	.000000
.000159	.000210	-.000053	-.000181
.000298	.000688	-.000116	-.000666
.000414	.001422	-.000164	-.001405
.000506	.002365	-.000202	-.002351
.000577	.003469	-.000230	-.003458
.000627	.004692	-.000250	-.004685
.000660	.005995	-.000264	-.005991
.000678	.007345	-.000271	-.007343
.000685	.008717	-.000275	-.008716
.000687	.010095	-.000279	-.010091

factor de participación:

153.312142

chimenea

Modo 2

T = .1368 seg  
 f = 7.3087 Hertz  
 w = 45.922 rad/seg

Sa = 1.697E+00  
 Sv = 3.695E-02  
 Sd = 8.047E-04

vector característico:

u	w	B	v
.000000	.000000	.000000	.000000
-.000684	-.001276	.000211	.001177
-.000941	-.003312	.000349	.003294
-.000803	-.005414	.000307	.005457

-.000355	-.006826	.000136	.006910
.000278	-.007019	-.000110	.007122
.000956	-.005760	-.000375	.005860
.001547	-.003114	-.000607	.003195
.001961	.000603	-.000774	-.000548
.002168	.004936	-.000876	-.004900
.002222	.009488	-.001001	-.009401

factor de participaci3n:

-87.051719

chimenea

Modo 3

T = .0543 seg  
f = 18.4117 Hertz  
w = 115.684 rad/seg

Sa = 1.697E+00  
Sv = 1.467E-02  
Sd = 1.268E-04

vector caracteristico:

u	w	β	v
.000000	.000000	.000000	.000000
.001157	.003170	-.000295	-.003051
.000826	.006447	-.000258	-.006525
-.000405	.007344	.000151	-.007496
-.001633	.004827	.000574	-.004930
-.002050	.000032	.000718	-.000009
-.001339	-.004470	.000466	.004622
.000199	-.006127	-.000081	.006346
.001845	-.003777	-.000689	.003984
.002916	.001843	-.001183	-.001660
.003241	.008944	-.001878	-.008454

factor de participaci3n:

51.321293

chimenea

Modo 4

T = .0315 seg  
f = 31.7818 Hertz  
w = 199.691 rad/seg

Sa = 1.697E+00  
Sv = 8.498E-03  
Sd = 4.256E-05

vector caracteristico:

u	w	β	v
.000000	.000000	.000000	.000000
.001052	.005156	-.000166	-.005060
-.000511	.007374	.000167	-.007458
-.002254	.003329	.000619	-.003372
-.002033	-.003580	.000554	.003673
.000086	-.006680	-.000023	.006832
.001999	-.003019	-.000540	.003074
.001728	.003507	-.000448	-.003628
-.000608	.005950	.000263	-.006203
-.003020	.001056	.001227	-.001432
-.003931	-.008530	.003040	.007203

factor de participaci3n:

36.119661

chimenea

Modo 5

T = .0219 seg  
f = 45.7464 Hertz  
w = 287.433 rad/seg

Sa = 1.697E+00  
Sv = 5.904E-03  
Sd = 2.054E-05

vector característico:

u	w	β	v
.000000	.000000	.000000	.000000
.000436	.006747	.000006	-.006532
-.001944	.005399	.000316	-.005295
-.002154	-.003249	.000338	.003233
.000654	-.006402	-.000107	.006345
.002329	.000600	-.000372	-.000588
.000378	.006803	-.000067	-.006724
-.002052	.002626	.000290	-.002565
-.000968	-.005144	-.000010	.005214
.002447	-.003544	-.001114	.003968
.004169	.008308	-.004438	-.005697

factor de participación:

26.480559

Desplazamientos

nudo	u	w	β	v
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	6.6859E-04	8.9367E-04	2.2237E-04	7.7280E-04
3	1.2404E-03	2.8961E-03	4.8194E-04	2.8043E-03
4	1.7101E-03	5.9405E-03	6.7850E-04	5.8694E-03
5	2.0821E-03	9.8183E-03	8.2967E-04	9.7641E-03
6	2.3698E-03	1.4332E-02	9.4552E-04	1.4292E-02
7	2.5878E-03	1.9320E-02	1.0330E-03	1.9293E-02
8	2.7309E-03	2.4609E-02	1.0906E-03	2.4593E-02
9	2.8151E-03	3.0090E-02	1.1253E-03	3.0079E-02
10	2.8527E-03	3.5777E-02	1.1440E-03	3.5771E-02
11	2.8615E-03	4.1514E-02	1.1662E-03	4.1498E-02

Cortantes en la Base:

Fu	Fr	Ft
6.8477E+03	3.3112E+04	3.3137E+04

Fuerzas de Membrana y Momentos de Flexión

e	i	j	Nm	Nt	Nts	Ms	Mt	Mts
1	1	2	5.8132E+04	1.3653E+04	4.6779E+03	1.9335E+04	5.4612E+03	1.0085E+04
2	2	3	4.9912E+04	9.7517E+03	5.5008E+03	2.2595E+04	3.9007E+03	3.2277E+03
3	3	4	4.1559E+04	7.2981E+03	5.3632E+03	1.7314E+04	2.9192E+03	1.9129E+03
4	4	5	3.3915E+04	5.7340E+03	5.0649E+03	1.3727E+04	2.2936E+03	1.5084E+03
5	5	6	2.6462E+04	4.3994E+03	4.6527E+03	1.0609E+04	1.7598E+03	1.3162E+03

6	6	7	1.9510E+04	3.1956E+03	4.1331E+03	7.7961E+03	1.2782E+03	1.1687E+03
7	7	8	1.3198E+04	2.1102E+03	3.6409E+03	5.2831E+03	8.4406E+02	1.0388E+03
8	8	9	7.7851E+03	1.1904E+03	2.9610E+03	3.1813E+03	4.7617E+02	8.4511E+02
9	9	10	3.5182E+03	5.3357E+02	2.0855E+03	1.7300E+03	2.1343E+02	5.0623E+02
10	10	11	8.5092E+02	4.9912E+02	9.1646E+02	2.0806E+03	1.9965E+02	2.8042E+02

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación semianalítica que permite analizar estructuras de revolución cuando ésta es sometida a cargas no simétricas. Se utiliza un elemento finito tronco cónico de dos nudos para discretizar la sección transversal - meridional - y series de Fourier con un sólo término para definir el comportamiento circunferencial.

Con el modelo semianalítico, para el análisis estático bajo carga no simétrica, se obtienen resultados muy semejantes a los analíticos. De la aplicación hecha, con una malla de 101 nudos, resultan errores relativos de 0.0772% en deflexiones 0.0054% en momentos.

Se ha determinado que el modelo semianalítico también es aplicable el análisis sísmico de estructuras de revolución. Las acciones sísmicas son apropiadamente representadas con un sólo término del desarrollo por series de Fourier.

Del análisis dinámico realizado para una chimenea de sección constante con una malla de 81 nudos se han obtenido períodos, frecuencias y formas de modo que convergen con los resultados analíticos derivados de un modelo de viga empotrada a flexión.

Asimismo, para el análisis sísmico, con una malla de 101 nudos se logró una mejor descripción de la variación de momentos en la base por lo que es importante una mayor discretización en zonas donde se prevee una mayor concentración de esfuerzos.

Aún cuando las comparaciones se han hecho para un modelo de sección constante, porque se tiene en ese caso una solución conocida, el procedimiento propuesto permite el análisis de estructuras de sección variable y es aplicable a otras formas axisimétricas.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Bathe y Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*  
Prentice Hall, Inc, Englewood Cliff, New Jersey, 1976.
2. Grafton y Strome, *Analysis of Axisymmetrical Shells by the Direct Stiffness Methods*,  
AIAA Journal, Seattle, 1963.
3. Ugural A.C. *Stresses in Plates and Shells*  
MacGraw – Hill Book Company, New York, 1981.
4. Flugge W. *Stresses in Shells*  
Springer-Verlag, New York, 1973.
5. Zienkiewicz O.C. *El Método de los Elementos Finitos*, 3ra Edición  
Editorial Reverté, Barcelona, 1980.
6. Oñate I. E. *Cálculo de Estructuras por Elementos Finitos*  
Centro Internacional de los Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1992.
7. Chopra A. K. *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*  
Prentice Hall, Inc, Englewood Cliff, New Jersey, 1995.
8. Wilson E.L. *Three Dimensional Dynamics Analysis of Structures*  
Computers and Structures, Inc. Berkeley, CA, 1997.
9. Timoshenko S. *Teoría de Placas y Láminas*  
Ediciones Urmo. Bilbao, 1970.
10. Piqué J. y Scaletti H. *Análisis Sísmico de Edificios*  
Capítulo de Ingeniería Civil. Colección del Ingeniero Civil. Lima, 1991.