

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**SECCIÓN DE POST-GRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL**



**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**MENCIÓN INGENIERÍA AERONÁUTICA**  
**(VEHÍCULOS NO TRIPULADOS)**

**TITULADA:**  
**ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA**  
**DE UN COHETE POR EL MÉTODO DE**  
**LOS ELEMENTOS FINITOS**

**PRESENTADO POR:**  
**FREDY MARCELL VILLANUEVA JIMÉNEZ**

**LIMA - PERÚ**

**2001**

## **PRÓLOGO**

Nosotros como ingenieros debemos plantear y analizar el fenómeno, utilizar métodos modernos de cálculo, interpretar los resultados y brindar la solución al problema.

El tema elegido surge de la necesidad de aplicar métodos más modernos y eficaces de análisis estructural que nos permita obtener un alto grado de precisión en los resultados, reducción del tiempo de análisis, y la amplia utilización de las computadoras que como sabemos es una herramienta indispensable y en cierta forma obligatoria para el ingeniero de hoy.

Con este trabajo queremos presentar y difundir el uso del método de los elementos finitos para aplicaciones en proyectos industriales, es así que presentamos el análisis estructural de un prototipo de cohete sometido a diferentes condiciones de cargas tanto internas, externas e inerciales.

La aplicación del método de elementos finitos para el análisis de una estructura en los proyectos de ingeniería no es nuevo pero hasta hace algún tiempo demandaba gran inversión tanto en el hardware como en software, ahora podemos encontrar programas que pueden ser ejecutadas en una computadora personal haciéndose mucho más accesible en nuestros días.

En el primer capítulo exponemos las condiciones generales de cálculo y en forma resumida los principales fenómenos que dan origen a las cargas, posteriormente en el segundo y tercer capítulo presentamos un breve análisis de determinación de las mismas.

En el cuarto capítulo mostramos un planteamiento teórico del cálculo por los métodos clásicos, utilizados como una alternativa de comprobación

El capítulo cinco abarca los fundamentos teórico-matemáticos que sustentan el método, describiendo cada uno de los principales elementos, sus ecuaciones de interpolación y la

notación matricial que en su conjunto conforman el algoritmo matemático del cálculo por el método de los elementos finitos. En la segunda parte del capítulo mostramos la implementación computacional y las etapas que conforman el método FEM.

En los últimos capítulos presentamos el desarrollo y la solución de algunos problemas estructural, cuyos resultados se muestran en forma numérica y gráfica mostrando la potencia y ventaja del método. Presentamos la solución de un problema dinámico y análisis de resistencia de un sólido de geometría complicada utilizando artificios de importación de la geometría desarrollados en un programa CAD.

Para la solución por elementos finitos hemos hecho uso de un programa bastante difundido en el ambiente de los computadores personales como es el MSC/NASTRAN.

## ÍNDICE

PRÓLOGO	1
ÍNDICE	3
RESUMEN	6
INTRODUCCIÓN	7
1. CONSIDERACIONES GENERALES	9
1.1 Definición del objetivo de análisis	9
1.2 Características del prototipo de cohete	10
1.3 Propiedades de los materiales utilizados	10
1.4 Propiedades termodinámicas del propelente	11
1.5 Consideraciones de cálculo	13
1.6 Casos de cálculo	13
1.7 Coeficiente de seguridad	14
1.8 Velocidad del viento	15
2. DETERMINACIÓN DE LAS CARGAS QUE ACTÚAN SOBRE LA ESTRUCTURA DEL COHETE	17
2.1 Distribución de la masa del cohete	17
2.2 Determinación de la presión interna de trabajo	17
2.3 Determinación de la temperatura de los gases en la cámara de combustión	18
2.4 Determinación del empuje del cohete	18
2.5 Determinación de las fuerzas aerodinámicas a lo largo del cohete	21
2.5.1 Distribución de las cargas aerodinámicas a lo largo del cohete	
2.5.2 El factor de carga y su distribución a lo largo del cohete	
2.5.3 Fuerza de interacción entre los elementos y el cuerpo del cohete	
2.6 Resumen de fórmulas aerodinámicas	42

3.	DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERNOS DEL COHETE	44
3.1	Determinación de las principales características .....	44
3.2	Cálculo de los esfuerzos axiales del cohete .....	47
3.3	Cálculo de los Esfuerzos cortantes y Momento flector del cohete	50
3.4	Resultado de los cálculos .....	54
4	METODOLOGÍA DE ANÁLISIS POR EL MÉTODO CLÁSICO.....	58
4.1	Cálculo de la pared del cilindro de la cámara de combustión	58
4.2	Cálculo de la estructura del cohete .....	67
	4.2.1 Cálculo de la cámara de combustión.	
	4.2.2 Cálculo del tapón	
	4.2.3 Cálculo de un sólido de geometría complicada	
	4.2.4 Cálculo de las frecuencias propias de oscilación del cohete	
5	FUNDAMENTACION DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	79
5.1	Fundamentación teórica del método de los elementos finitos.	79
	5.1.1 Introducción	
	5.1.2 Procedimiento de análisis por el método de los elementos finitos	
	5.1.3 Análisis de los elementos finitos	
	5.1.3.1 Elemento barra	
	5.1.3.2 Elemento viga	
	5.1.3.3 Elemento triangular	
	5.1.3.4 Elemento rectangular	
	5.1.3.5 Elemento tetraédrico	
5.2	Implementación computacional del método .....	96
	5.2.1 Introducción	
	5.2.2 Organización lógica del programa	
	5.2.3 Pre-procesamiento	
	5.2.4 Procesamiento	
	5.2.5 Post-procesamiento	
	5.2.6 Relación entre el pre y post procesamiento	
	5.2.7 Consideraciones de modelamiento	

6.	PROBLEMAS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	104
6.1	Análisis de la cámara de combustión por acción de la presión interna	105
6.1.1	Descripción del problema	
6.1.2	Desarrollo del modelo	
6.1.3	Análisis de los resultados	
6.2	Análisis de un sólido de geometría complicada utilizando elementos tetraédricos .....	124
6.2.1	Descripción del problema	
6.2.2	Desarrollo del modelo	
6.2.3	Análisis de los resultados	
6.3	Cálculo de los modos y de las frecuencias propias de oscilación de la estructura del cohete. ....	131
6.3.1	Descripción del problema	
6.3.2	Desarrollo del modelo	
6.3.3	Análisis de los resultados	
7	CONCLUSIONES .....	147
8	ANEXOS .....	149
	Anexo 1 Características del programa MSC/NASTRAN usado en el presente trabajo.	
	Anexo 2 Velocidad del aire en función de la altura.	
	Anexo 3 Cálculo aproximado de la altura de vuelo.	
	Anexo 4 Resultados comparativos de los elementos de la estructura del cohete	
9	BIBLIOGRAFÍA .....	155

## **RESUMEN**

La estructura de un cohete es un sistema muy complejo, el cálculo puede limitarse a la utilización de métodos tradicionales, los problemas empiezan cuando se requiere determinar los esfuerzos con gran precisión y obtener los resultados mucho más rápido, es por esta razón que la ingeniería actual utiliza el Método de los Elementos Finitos (FEM) como una herramienta moderna de calculo estructural.

1. Es importante conocer el fenómeno y el origen de las cargas que actúan sobre la estructura. La determinación correcta de estas juega un factor importante en el análisis estructural.
2. Con un análisis estático por el método FEM se puede determinar la deformación y los esfuerzos secundarios con mayor precisión que por el método de calculo tradicional.
3. El programa FEM permite modelar cualquier irregularidad que es despreciado por el método clásico. El modelamiento de estructuras complejas puede realizarse con ayuda de programas especializados en generación de geometrías.
4. La respuesta dinámica a una fuerza externa presenta la exigencia de determinación de las frecuencias y modos naturales. El método FEM efectúa un análisis modal con mayor precisión y confiabilidad que los cálculos tradicionales. Al mismo tiempo permite obtener estos resultados con menor inversión de tiempo.
5. Es importante conocer las etapas que conforman un programa FEM para tener una mayor claridad del cálculo computacional.

## INTRODUCCION

El Método de los Elementos Finitos (FEM)<sup>1</sup>, es un método de cálculo numérico que permite obtener una solución a un problema complejo por la técnica de la división del mismo en pequeñas partes llamadas elementos (discretización de un objeto continuo) de las cuales es posible conocer el comportamiento matemático sin dificultad y posteriormente reconstruir el sistema completo para estudiarlo a partir de dichos componentes. Esto se hace combinando varios conceptos matemáticos que permitirá resolver nuestro problema.

La estructura de un vehículo no tripulado representa un sistema de elementos y componentes estructurales muy complicada, que para su cálculo requiere de utilización de métodos modernos de cálculo que brinde la suficiente resistencia y confiabilidad y al mismo tiempo mantener las condiciones de peso mínimo (optimo) de la estructura.

Para la solución de problemas se desarrollaron muchos métodos de cálculo, sin embargo estos métodos pueden ser aplicados a cuerpos de geometría simple. Bajo estas condiciones se debe simplificar la geometría para la aplicación de métodos tradicionales, o recurrir a un método de cálculo numérico apropiado.

La solución obtenida por este método será una aproximación de la solución real y para obtener resultados que tiendan a aproximarse a los valores teóricos es necesario de una discretización refinada, generándose un número elevado de elementos. Como cada elemento obtenido contendrá un determinado número de incógnitas, se generarán problemas con una gran cantidad de ecuaciones simultáneas, cuyo número dependerá del tamaño y la complejidad del problema, y podemos afirmar sin lugar a dudas que el método carece de valor práctico real si no se cuenta con un computador.

Es así, que el método FEM, adquiere una mayor importancia en nuestros días en que deja de ser sólo un algoritmo teórico para convertirse en una potente herramienta para la

---

<sup>1</sup> FEM del ingles Finite Element Metod



solución de problemas específicos, sobre todo allí donde la geometría del mismo impedía el uso de los métodos tradicionales ya sea de integración o de solución de ecuaciones diferenciales.

La aplicación del método FEM es tan variada y comprende diferentes áreas de la ingeniería, que hoy es imposible presentar una imagen completa del método en un solo trabajo, sin embargo, parte de nuestro objetivo es el de presentar la aplicación en el campo aeroespacial.

Como una muestra de la potencia del método podemos decir que con éste se puede resolver desde los problemas más clásicos de la mecánica de estructuras elásticas lineales, hasta los más complejos problemas no lineales y dinámicos, en las áreas de mecánica de sólidos, mecánica de fluidos, electromagnetismo, transmisión de calor, etc. El alcance, sin embargo, de nuestro trabajo será el de mostrar cómo el método FEM puede sustituir muchas veces a los métodos de cálculo tradicionales, y principalmente que éste es capaz de presentar una solución bastante aproximada, allí donde no era posible obtener una solución exacta del problema que se estaba analizando.

Para el desarrollo del trabajo se ha empleado un programa computacional llamado MSC/NASTRAN, versión 4.5 desarrollado inicialmente por la NASA y mejorado por la compañía The MacNeal-Schwendler Corporation. La versión disponible puede ser ejecutada en un computador personal de características media. En los anexos se da una descripción de las características y requerimientos del programa.

# 1. CONSIDERACIONES GENERALES

## 1.1 DEFINICIÓN DEL OBJETIVO DE ANÁLISIS

### *Descripción general*

Como objetivo de análisis elegimos un prototipo de cohete, al que realizaremos un estudio minucioso del comportamiento durante la etapa inicial de vuelo.

El cohete es un vehículo que se desplaza por la atmósfera debido a la fuerza de reacción que se produce como resultado de la combustión del combustible generando de esta manera gas que es expulsado a grandes velocidades por la parte posterior.

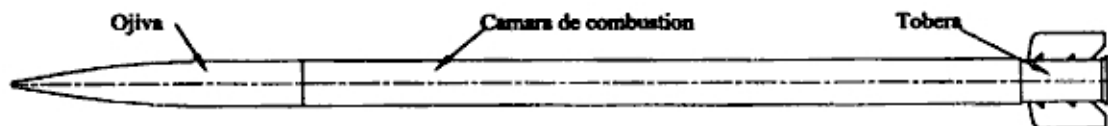


Fig. 1.1 El cohete en estudio

El cohete está compuesto de los diferentes componentes:

*Ojiva o cabeza de combate* es la carga útil del cohete cuyo objetivo es almacenar gran cantidad de energía para ser posteriormente liberado por acción de una espoleta causando gran destrucción, tiene como parte integrante a la espoleta que es un dispositivo para la detonación de la carga explosiva.

*La cámara de combustión* es el lugar donde se alojan los granos de propelente (Combustible) y elementos de sujeción, aquí se desarrolla la ignición y el encendido del motor generando como resultado gas a altas temperaturas que influyen directamente sobre la estructura del cohete

*La tobera* es la encargada de dirigir y acelerar los gases productos de la combustión, generalmente esta construido de materiales refractarios resistentes a las altas temperaturas y la erosión térmica.

*El bloque estabilizador*, se encuentra en la parte posterior del fuselaje, su principal función es la estabilización del cohete durante el vuelo.

## **1.2 CARACTERÍSTICAS DEL COHETE**

Las principales características del cohete supersónico son:

### *DIMENSIONES*

Longitud total	2870 mm
Calibre	122 mm

### *PESO*

Peso promedio del cohete	68 Kg.
Peso sin propelente	47 Kg.
Peso del propelente	21 Kg.
Peso de la ojiva	18Kg.

### *PERFORMANCE*

Alcance máximo	20 Km.
Velocidad	690 m/s

## **1.3 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES UTILIZADOS**

La tendencia a la disminución del peso de la estructura obliga a utilizar materiales con alta resistencia específica.

Para la fabricación de elementos de cohetes de combustible sólido de pequeñas dimensiones generalmente se utiliza aleaciones de acero, pero también se utilizan otros

tipos de materiales tales como aleaciones de aluminio, titanio, magnesio, así como materiales compuestos y fibra de vidrio.

Las principales propiedades del acero de nuestra estructura son:

Propiedades mecánicas:

Límite de rotura	$\sigma_b$
Límite de fluencia	$\sigma_f$
Tensión de corte	$\tau_b$
Módulo de elasticidad	$E$
Módulo de corte	$G$
Módulo de Poisson	$\mu$

Propiedades térmicas:

Coefficiente de dilatación	$\alpha$
Conductividad térmica	$\lambda$
Calor específico	$c_p$

#### 1.4 PROPIEDADES TERMODINÁMICAS DEL PROPELENTE

Los combustibles sólidos utilizados en los cohetes pueden ser de doble base o compuesto. En nuestro caso vamos a utilizar un combustible compuesto.

El combustible compuesto es una mezcla heterogénea de carburante y oxidante cristalino, cuyas propiedades termodinámicas son:

Formulación	$NH_4ClO_4 + Al + Ligante$
Velocidad de combustión	$v$
Peso molecular	$m$

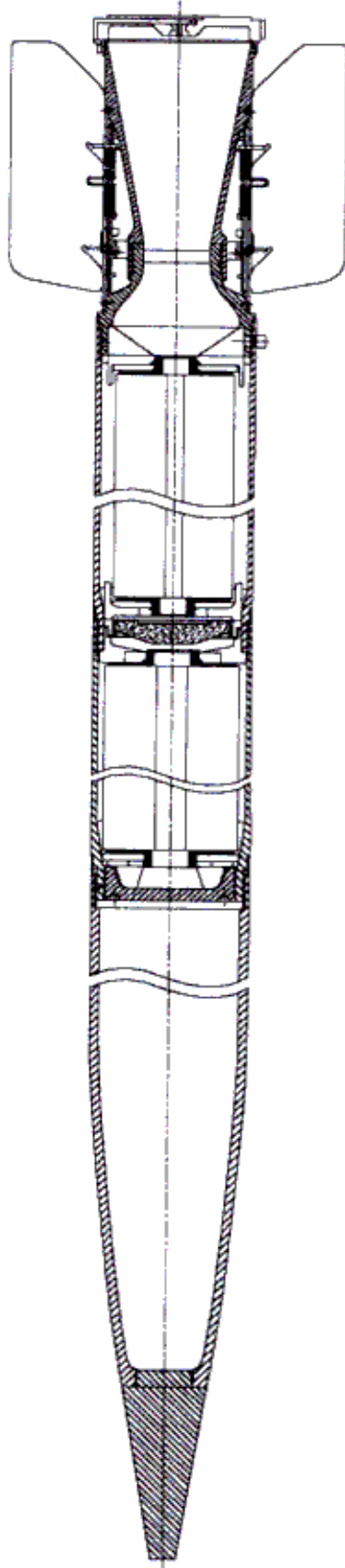


Fig. 1.2 Detalle del cohete en estudio

## 1.5 CONSIDERACIONES DE CÁLCULO

Dentro de las suposiciones y consideraciones para el cálculo del cohete se encuentran los siguientes parámetros:

El cohete se analiza en la etapa inicial de vuelo, la altura aproximada se calcula con la ayuda del programa de cálculo balístico que nos brinda valores aceptables de cálculo de performance,

Otro de los parámetros que hemos introducido es el ángulo de ataque del cohete que viene a ser el ángulo comprendido entre el eje longitudinal del cohete y el vector de la velocidad del cohete.

El incremento excesivo de este ángulo conlleva a un incremento de la sustentación pero también incrementa la fuerza de arrastre, que influye negativamente sobre la performance del cohete por eso hemos asumido que el valor del ángulo de ataque es aproximadamente  $0^\circ$ , este ángulo puede ser reemplazado por el ángulo de ataque óptimo calculado por métodos aerodinámicos más precisos.

La velocidad de vuelo del cohete es otro factor importante para la determinación de las características aerodinámicas, según los datos de los fabricantes la velocidad que desarrolla el cohete es de 690 m/s, considerando que esta velocidad es la que desarrolla el cohete en la etapa final de la combustión del propelente.

## 1.6 CASOS DE CÁLCULO

Para el análisis de resistencia de la estructura de una gran variedad de acciones se trata de elegir aquellos que presentan mayores esfuerzos estructurales.

La determinación de los casos de cálculo es una de las tareas más complicadas y se basa en la teoría de probabilidades y confiabilidad por la falla. Estos parámetros generalmente se calculan experimentalmente en función a la experiencia obtenida durante el diseño y análisis estructural de cohetes.

Muchas veces los casos de cálculo son normalizados y son diferentes para cada tipo y configuración del cohete

Principales casos de cálculo

- Transporte
- Conservación
- Mantenimiento
- Disparo
- Vuelo
- Maniobra

Cada elemento de la estructura debe garantizar la suficiente resistencia y rigidez en cualquier instante de operación, los cálculos para todos estos instantes de tiempo es imposible, es por eso que se elige los instantes críticos es decir cuando el elemento es cargado con la mayor fuerza posible y realizar los cálculos solamente para este instante de tiempo.

## 1.7 COEFICIENTE DE SEGURIDAD

En la industria aeroespacial se aplica el método de cálculo por las cargas de rotura o por el límite de deformación. En ambos casos las fuerzas máximas obtenidas se llaman operacionales o límites pero para garantizar la resistencia suficiente este valor debe ser elevado generándose un multiplicador que se denomina coeficiente de seguridad y lo denotaremos con la letra  $f$ .

$$f = \frac{P^c}{P^o} \quad (1.1)$$

donde:

$P^c$  carga de cálculo o de diseño

$P^o$  carga operacional

Cuando se selecciona el coeficiente de seguridad se consideran muchos factores (probabilidad de la aparición del caso de cálculo). Según la referencia [1] para los vehículos tripulados de utilización múltiple el coeficiente de seguridad  $f = 1.5 + 2.0$  y para los vehículos no tripulados como es nuestro caso, este valor se reduce a  $f = 1.2 + 1.3$ .

## 1.8 VELOCIDAD DEL VIENTO

La velocidad del viento depende de la localización geográfica del lugar de lanzamiento, tiempo en el año incluso de los días, pero principalmente de la altura [1].

En la Fig. 1.3 se muestra la acción de una ráfaga de viento el cual tiene una velocidad  $U$  sobre el cohete que se desplaza en el plano horizontal con una velocidad  $V_0$  sumando las velocidades  $V_0$  y  $U$  obtenemos el vector resultante  $V$ . Con respecto al eje del cohete este vector comprende el ángulo:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \quad (1.2)$$

donde:

$\alpha_0$  ángulo de ataque de vuelo en una atmósfera estable, el ángulo adicional  $\Delta\alpha$  depende de la velocidad del viento y cuando  $U \ll V$  se puede determinar por la fórmula:

$$\Delta\alpha = \frac{U}{V_0} \quad (1.3)$$



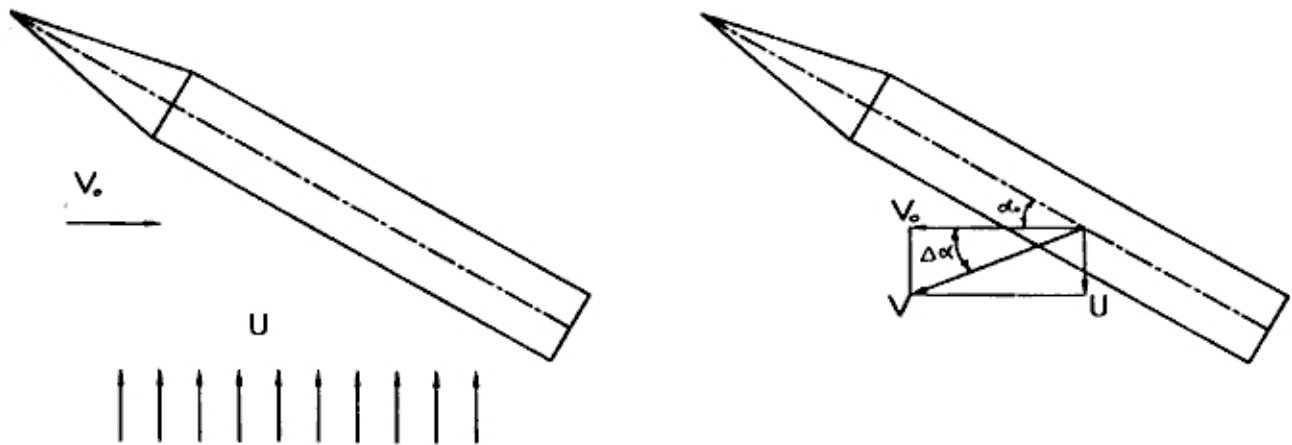


Fig. 1.3 Variación del ángulo de ataque del cohete por acción de una ráfaga de viento

Este incremento del ángulo de ataque conlleva a un incremento de la fuerza de sustentación que es necesario considerarlo durante los cálculos.

En lo que se refiere a la magnitud de la velocidad su variación no es muy grande y por eso se puede asumir que:

$$V = V_0$$

Para determinar el valor del viento que actúa sobre el cohete haciendo variar su trayectoria planificada se recurrió a la tabla de valores generales donde se considera que las condiciones de la atmósfera alrededor de la tierra son semejantes.

La tabla de valores de la velocidad del viento en función de la altura se presenta en el anexo 2.

## 2. DETERMINACIÓN DE LAS CARGAS QUE ACTÚAN SOBRE LA ESTRUCTURA DEL COHETE

### 2.1 DISTRIBUCIÓN DE LA MASA DEL COHETE

La distribución de la masa del cohete se toma en función a la configuración interna y distribución de los elementos y componentes del cohete.

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta l} \quad (2.1)$$

donde:

$q_m$  masa distribuida

El momento de inercia es calculado tomando en cuenta la distribución de la masa de los elementos internos del cohete así como la estructura del fuselaje

### 2.2 DETERMINACIÓN DE LA PRESIÓN EN LA CÁMARA DE COMBUSTIÓN

La presión de trabajo de la cámara de combustión es uno de los parámetros importantes del cohete que se puede determinar por métodos analíticos como por medios experimentales. Otro de los medios para obtener la presión de trabajo de cámara son los resultados estadísticos de cohetes de una misma clase.

La presión de cámara también se puede optimizar, teniendo como objetivo la reducción del peso de la estructura, esto sin sacrificar la performance del motor en general.

Experimentalmente se obtuvo una presión de cámara equivalente a 100 Atmósferas como máximo, pero por estadística de cohetes similares se obtuvo una presión promedio de 120 Atmósferas [5] por lo tanto optamos por la mayor presión que es la que debe soportar nuestra estructura.

### 2.3 DETERMINACIÓN DE LA TEMPERATURA DE LOS GASES EN LA CÁMARA DE COMBUSTIÓN

Considerando la composición química y las propiedades del propelente se obtuvo una temperatura adiabática de los gases aproximadamente de 2500 C°.

Para obtener estos resultados hemos hecho uso de un programa de análisis termodinámico. Posteriormente por métodos analíticos de la referencia [7] se deduce que la temperatura en la pared interna de la cámara de combustión llega a 500 C°

Como requerimiento de los materiales utilizados para poder conservar sus propiedades físico mecánicas se exige que la temperatura no sea mayor a 500...600 C° [6].

Este valor nos proporciona un estimado del valor de la tensión térmica de la pared de la cámara de combustión.

### 2.4 DETERMINACIÓN DEL EMPUJE DEL COHETE

Nosotros analizamos un prototipo de cohete cuyos parámetros geométricos son conocidos de antemano. Es así que para la determinación del empuje necesitamos conocer el área de salida en la tobera (sección divergente).

La fuerza del empuje  $E$  se determina para un flujo isoentrópico tomando en consideración los siguientes parámetros según la referencia [7]:

$$E = \dot{m} w_a + (p_a - p_k) S_a \quad (2.2)$$

donde:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \text{ flujo másico}$$

$w_a$  velocidad de gas en la salida de la tobera.

$p_a$  presión en la salida de la tobera.

$p_h$  presión atmosférica a una altura dada.

$S_a$  área de salida de la tobera.

Conociendo el impulso específico el empuje se puede determinar por la siguiente fórmula [7]:

$$E = I_{sp} \dot{m} \quad (2.3)$$

El flujo másico podemos determinar de la siguiente manera:

$$\dot{m} = \frac{m_c}{t} \quad (2.4)$$

donde:

$m_c$  masa del combustible

$t$  tiempo de combustión

$I_{sp}$  impulso específico

Conociendo las dimensiones del grano podemos conocer su tiempo de combustión:

$$t = \frac{e}{v} \quad (2.5)$$

donde:

$e$  espesor del grano de propelente

$v$  velocidad de quemado del propelente

Para la determinación necesitamos conocer

El espesor del grano de propelente se determina a partir de la geometría del propelente por la fórmula:

$$e = \frac{D - d}{4} \quad (2.6)$$

donde:

$D$  diámetro externo del grano

$d$  diámetro interno del grano

El impulso específico del cohete se determina con ayuda de un programa de análisis termodinámico [19] en función a su relación de áreas entre el área de salida en la tobera y el área crítica, la composición y propiedades del propelente,

Tomando los siguientes valores iniciales:

$$I_{sp} = 2400 \text{ m/s} \quad D = 102.5 \text{ mm} \quad d = 23 \text{ mm} \quad v = 9 \text{ mm/s}$$

Obtenemos:

$$e = 19.87 \text{ mm} \quad t = 2.2 \text{ s} \quad \dot{m} = 9.51 \text{ Kg/s}$$

Por lo tanto obtenemos un empuje igual a:

$$E = 22900 \text{ N}$$

Para los cálculos tomamos el valor de 23000 N

## 2.5 DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS AERODINÁMICAS

### 2.5.1 Distribución de las cargas aerodinámicas a lo largo del cuerpo del cohete

Para el análisis de resistencia del un cohete se necesita conocer la distribución de las cargas aerodinámicas a lo largo del cohete.

En la Fig. 2.1 se muestra las componentes de la fuerza aerodinámica resultante en el sistema de coordenadas  $x, y, z$  local (ligado al cohete)

donde:

- $X$  fuerza aerodinámica longitudinal.
- $Y$  fuerza aerodinámica normal.
- $O$  centro de masa cohete.

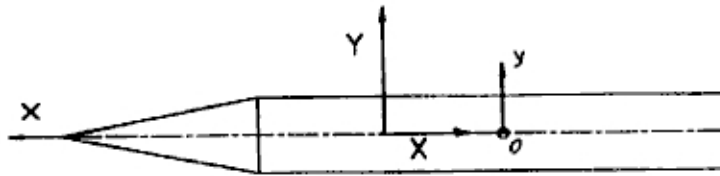


Fig. 2.1 Componentes aerodinámicas del cohete

En un vuelo supersónico con altos valores del número de Mach, se puede desarrollar un cálculo aproximado de las fuerzas aerodinámicas utilizando la teoría de Newton.

Analicemos un cuerpo de revolución que se desplaza por el aire con un ángulo de ataque  $\alpha$  (Fig. 2.2). a una distancia  $\xi$  desde la nariz del cohete separamos una sección de longitud  $d\xi$ .

El ángulo comprendido entre la tangente y el eje del cohete lo denominamos  $\beta$ . En una sección transversal la posición de un punto arbitrario vamos a denominarlo como  $\varphi$  contándolo desde el eje  $y$ .

Por la Teoría presentada en [2] la acción de la presión aerodinámica  $p$  sobre la superficie del cuerpo se determina cuando  $\beta \geq \alpha$  y se define como

$$p = 2q \left( \frac{V_n}{V} \right)^2 \quad (2.9)$$

donde:

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad \text{presión dinámica.}$$

$V$  velocidad del viento.

$V_n$  componente normal a la superficie de la velocidad  $V$ .

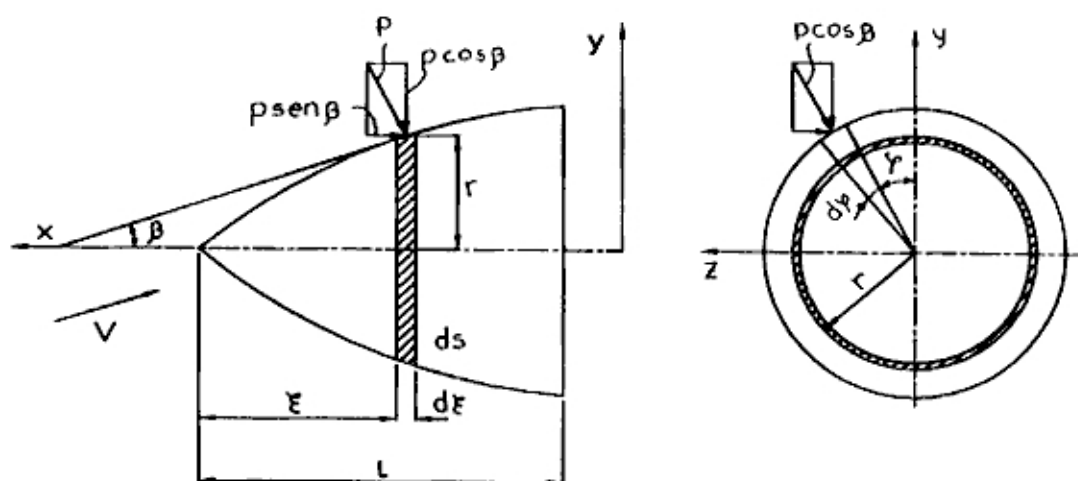


Fig. 2.2 Cuerpo de revolución en el aire

Se puede mostrar que la proyección del vector  $V$  sobre la normal de la superficie en un punto arbitrario:

$$V_n = V (\text{sen} \beta \cos \alpha - \cos \beta \text{sen} \alpha \cos \varphi)$$

Para el caso cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son pequeños entonces:

$$V_n = V(\beta - \alpha \cos \varphi)$$

Considerando a (2,9) tenemos:

$$p = 2q (\beta - \alpha \cos \varphi)^2$$

La última relación lo podemos mostrar como:

$$p = p_o + p_1 \cos \varphi + p_2 \cos 2\varphi \quad (2.10)$$

donde:

$$p_o = q(2\beta^2 + \alpha^2) \quad p_1 = -4\alpha\beta q \quad p_2 = \alpha^2 q \quad (2.11)$$

Descomponiendo la presión  $p$  en sus componentes  $p \cos \beta$  y  $p \sin \beta$  orientados en dirección al radio de la sección y a la paralela al eje de rotación respectivamente (Fig. 2.2). La componente radial da una proyección sobre el eje  $y$  igual  $-p \cos \beta \cos \varphi$ .

### Fuerza aerodinámica normal $Y$

Multiplicando esta magnitud por una superficie elemental  $r d\varphi ds$  integrando luego por  $\varphi$  desde 0 a  $2\pi$ , encontramos el valor de la fuerza normal  $dY$  que genera el flujo del aire en la sección analizada considerando que:

$$ds = \frac{d\xi}{\cos \beta}$$

Entonces:

$$dY = - \int_0^{2\pi} p \cos \beta \cos \varphi r d\varphi \frac{d\xi}{\cos \beta} = -r d\xi \int_0^{2\pi} p \cos \varphi d\varphi$$



Dividiendo  $dY$  entre  $d\xi$ , obtenemos la fuerza aerodinámico normal distribuida que lo designamos como  $q_{ay}$ .

$$q_{ay} = \frac{dY}{d\xi} = -r \int_0^{2\pi} p \cos \varphi d\varphi$$

Reemplazando  $p$  de (2,10) en esta ecuación obtenemos.

$$q_{ay} = -r \int_0^{2\pi} (p_0 + p_1 \cos \varphi + p_2 \cos 2\varphi) \cos \varphi d\varphi = -p_1 \pi r$$

Considerando (2.11) tenemos:

$$q_{ay} = 4\pi\alpha\beta q r \quad (2.12)$$

Esta fórmula muestra que la fuerza aerodinámica distribuida  $q_{ay}$  a lo largo del cuerpo concuerda con el carácter de variación del producto de  $\beta r$ .

Conociendo la fuerza aerodinámica distribuida se puede determinar la fuerza aerodinámica total.

$$Y = \int_0^l q_{ay} d\xi \quad (2.13)$$

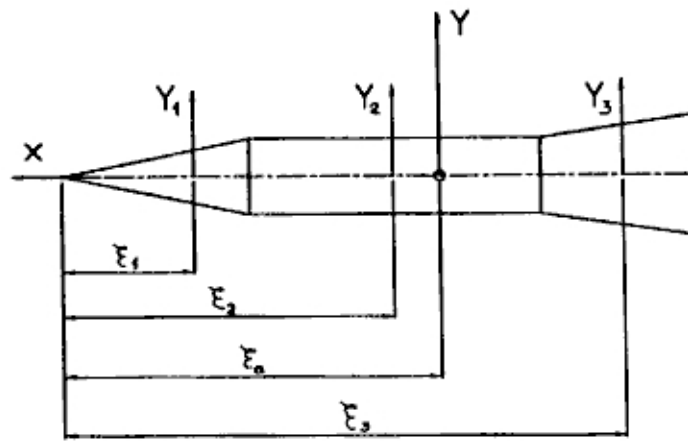


Fig. 2.3 Determinación de la fuerza  $Y$  y el centro de presión

Para un cohete que tiene estaciones de distintas formas, es más conveniente encontrar la fuerza que se crea en cada estación para posteriormente sumarlos.

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

así la coordenada del punto de aplicación de la fuerza resultante  $Y$  (centro de presión) se obtiene por la fórmula.

$$\xi_n = \frac{1}{Y} \sum_1^3 Y_i \xi_i$$

donde:

$\xi_i$  Coordenada del centro de presión de la  $i$ -ésima estación del cuerpo del cohete

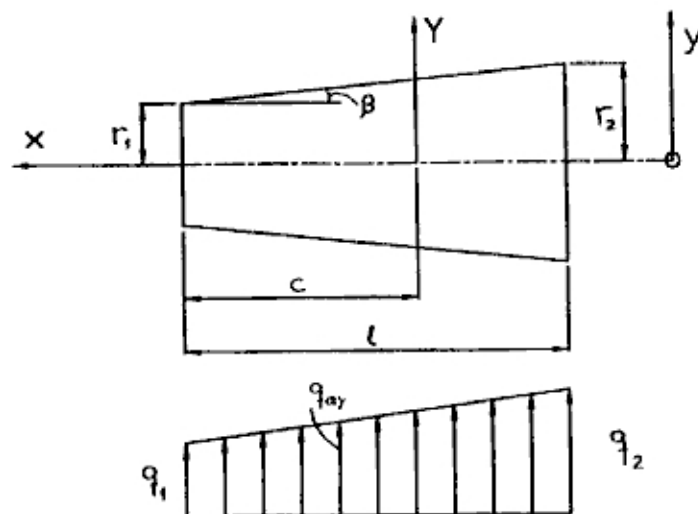


Fig. 2.4 Carga aerodinámica normal

Para el caso cuando una estación presenta una geometría de tronco de cono Fig. (2.4). En este caso  $\beta = const$  y la fuerza  $q_{av}$  de acuerdo a (2.12) va a variar a lo largo de la sección proporcional a  $r$  es decir por una ecuación lineal.

$$q_{av} = Kr$$

donde:

$$K = 4\pi\alpha\beta q \quad (2.14)$$

Por otra parte el coeficiente de proporción  $K$  se puede representar como la resultante  $Y$ , cuyo valor es igual al área de la gráfica de  $q_{av}$ .

$$Y = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\ell = K\ell \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (2.15)$$

de donde:

$$K = \frac{2Y}{\ell(r_1 + r_2)}$$

De esta manera para una estación del cuerpo del cohete en forma de cono cortado vamos a obtener:

$$q_{av} = \frac{2Y}{\ell(r_1 + r_2)} r \quad (2.16)$$

Entonces la acción de la resultante  $Y$  (centro de presión de la estación) se determina por la magnitud  $C$  (Fig. 2.4) para el cual obtenemos lo siguiente:

$$C = \frac{\ell}{3} \left( 1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2} \right) \quad (2.17)$$

Introducimos en (2.15) la expresión (2.14) y considerando una pequeña conicidad:

$$\beta = \frac{r_2 - r_1}{\ell}$$

Como resultado tenemos:

$$Y = 2\alpha q (S_2 - S_1) \quad (2.18)$$

donde:

$$S_1 = \pi r_1^2 \quad S_2 = \pi r_2^2$$

La fórmula (2.18) es válida para altos valores de velocidad  $M > 2$

Para la velocidad  $1 < M < 2$  se debe utilizar la relación:

$$Y = 3\alpha q (S_2 - S_1) \quad (2.19)$$

Si en las relaciones (2.16) – (2.19) tomamos  $r_1 = 0$  obtenemos los valores para el caso de un cono perfecto (Fig. 2.5)

$$q_{ay} = \frac{2Y}{\ell r_2} \quad C = \frac{2}{3} \ell$$

$$Y = 2\alpha q S \quad \text{para } (M > 2)$$

(2.20)

$$Y = 3\alpha q S \quad \text{para } (1 < M < 2)$$

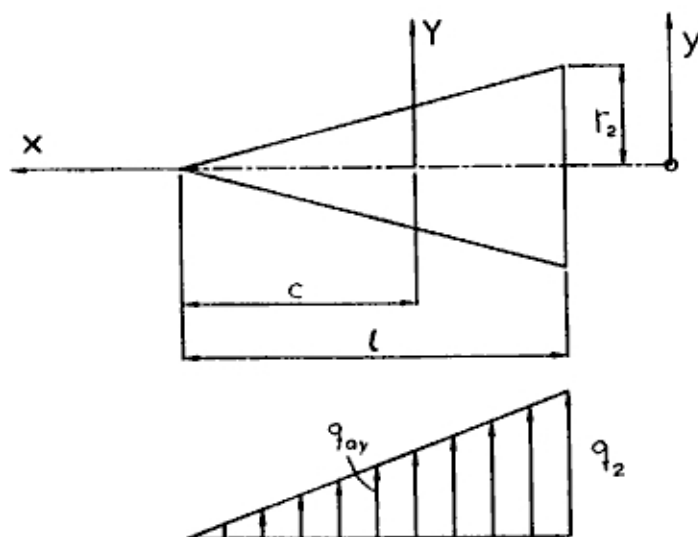


Fig. 2.5 Carga normal aerodinámica en un cono perfecto

Para un tronco de cono invertido también podemos utilizar la fórmula (2.16).

$$Y = 0,4\alpha q (S_2 - S_1) \quad \text{para } M > 2 \quad (2.21)$$

$$Y = 0,6\alpha q (S_2 - S_1) \quad \text{para } 1 < M < 2$$

La coordenada del centro de presión se calcula por la relación (2.17).

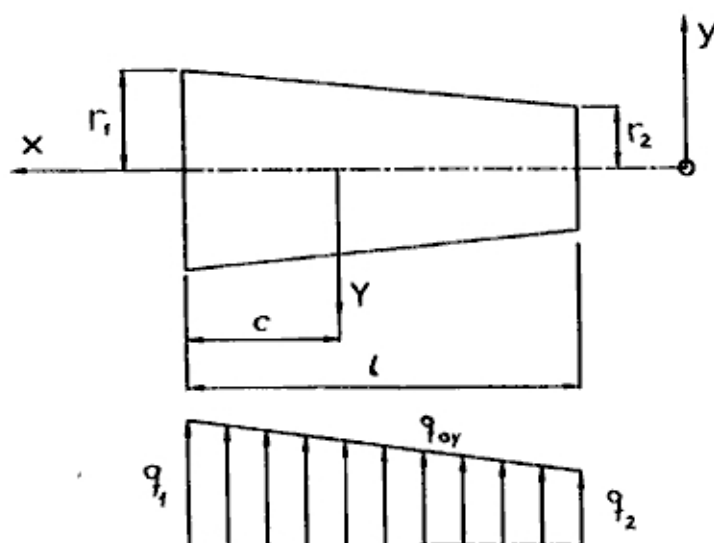


Fig. 2.6 Carga normal aerodinámica en un tronco de cono

Ahora veamos una sección de geometría cilíndrica (Fig. 2.7). De la fórmula (2.18) se deduce que para esta geometría  $Y = 0$ . En realidad la sección cilíndrica también genera una fuerza de sustentación, aproximadamente lo podemos encontrar por la fórmula:

$$Y = 1,5 \alpha^2 \lambda q S \quad (2.22)$$

donde:

$\lambda = \frac{\ell}{d}$  alargamiento del cilindro.

$S = \frac{\pi d^2}{4}$  superficie de la sección transversal.

La distribución de la fuerza  $Y$  a lo largo de la sección cilíndrica se puede considerar uniforme

$$q_{ay} = \frac{Y}{\ell} \quad (2.23)$$

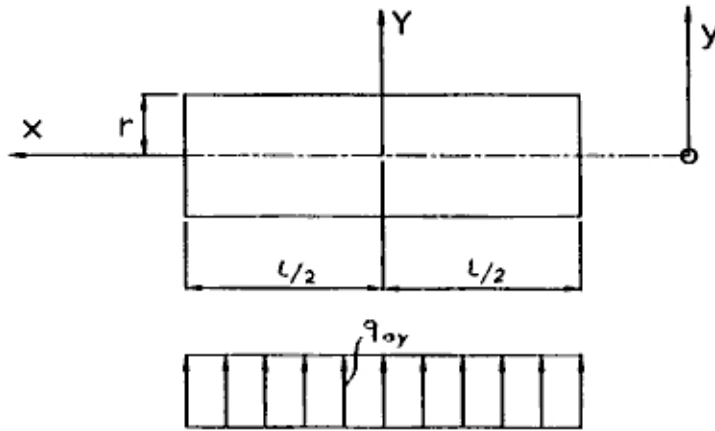


Fig. 2.7 Carga aerodinámica en un cilindro

Como resultado de la suma de las componentes aerodinámicas normales del cohete obtenemos una representación en la figura 2.8

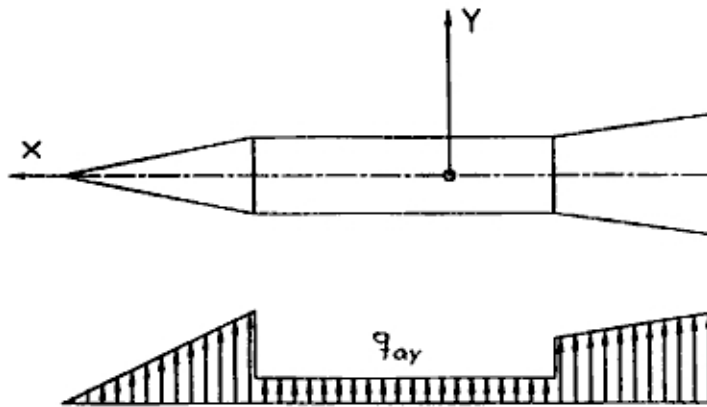


Fig. 2.8 Carga aerodinámica normal  $q_{ay}$

### Fuerza aerodinámica longitudinal $X$

Determinemos ahora las fuerzas aerodinámicas longitudinales. La fuerza longitudinal del cuerpo del cohete se puede determinar como la suma de tres componentes.

La fuerza  $X_p$  debido a la presión normal sobre la superficie lateral del cohete.

La fuerza  $X_f$  debido a la fricción.

La fuerza  $X_{bas}$  debido a la presión en la sección final del cohete.

$$X = X_p + X_f + X_{bas} \quad (2.24)$$

Volviendo a la Fig. 2.2 encontramos la siguiente relación para la fuerza  $dX_p$ , que resulta por acción del flujo sobre la sección de superficie del cuerpo de longitud  $d\xi$ .

$$dX_p = \int_0^{2\pi} p \sin \beta r d\varphi ds = \int_0^{2\pi} p \sin \beta r d\varphi \frac{d\xi}{\cos \beta} = r \operatorname{tg} \beta d\xi \int_0^{2\pi} p d\varphi$$

La relación  $\frac{dX_p}{d\xi}$ , con signo menos, representa la carga longitudinal distribuida  $q_{axp}$ ,

ocasionado por la fuerza de presión sobre la superficie lateral del cohete.

Considerando (2.10) obtenemos:

$$q_{axp} = -r \operatorname{tg} \beta \int_0^{2\pi} p d\varphi = -r \operatorname{tg} \beta \int_0^{2\pi} (p_o + p_1 \cos \varphi + p_2 \cos 2\varphi) d\varphi = -2\pi p_o r \operatorname{tg} \beta$$

Reemplazando aquí el valor de  $p_o$  de (2.11) y reemplazando  $\operatorname{tg} \beta$  por  $\beta$  obtenemos:

$$q_{axp} = -2\pi \beta (\alpha^2 + 2\beta^2) qr$$

De donde se deduce que para un cono.

$$q_{axp} = -Kr \quad (2.25)$$

donde:

$$K = 2\pi \beta q (\alpha^2 + 2\beta^2)$$

De esta manera  $q_{axp}$  así como  $q_{ay}$  cambia en una estación cónica proporcional al radio.

Entonces para un tronco de cono:

$$q_{axp} = \frac{-2X_p}{\ell(r_1 + r_2)} r \quad (2.26)$$

$$X_p = q(\alpha^2 + 2\beta^2)(S_2 - S_1) \quad (2.27)$$

Para pequeños ángulos de ataque  $\alpha$  la relación (2.26) se puede emplear y para un cono perfecto.

Para este caso la magnitud  $X_p$  se debe calcular.

$$X_p = C_{xpo} q (S_1 - S_2) - \frac{1}{2} Y \alpha \quad (2.28)$$

Donde la fuerza normal  $Y$  se encuentra de (2.21)

$$C_{xpo} = 1,949 \beta^{1,7} \left( 0,8 + \frac{1}{M^2} \right) \quad (2.29)$$

Para la estación cilíndrica del cuerpo  $X_p = 0$  esto permite determinar la fuerza longitudinal  $X_p$  de todo el cohete, sumando solamente las fuerzas originadas en las partes cónicas.

La fuerza longitudinal  $X_f$  que es ocasionada por la fricción se puede representar como una parte de la fuerza  $X_p$  de todo el cohete.

$$X_f = \chi X_p \quad (2.30)$$

donde:

$\chi$  coeficiente experimental cuyo valor oscila entre 0,2...0,6. [2]

Vamos a considerar que la fricción (Fig. 2.9) es constante para toda la superficie del cohete. Entonces  $dX_f$  para una sección pequeña del cohete de longitud  $d\xi$  será igual.



$$dX_f = \tau \cos \beta \, 2\pi r \frac{d\xi}{\cos \beta} = 2\pi r \tau d\xi$$

De donde obtenemos la carga distribuida

$$q_{axf} = -\frac{dX_f}{d\xi} = -2\pi r \tau \quad (2.31)$$

De esta manera,  $q_{axf}$  varía proporcionalmente al radio de la sección del cuerpo. El coeficiente de proporción  $2\pi\tau$  se puede expresar a través de la fuerza total  $X_f$ :

$$X_f = -\int_0^l q_{axf} d\xi = 2\pi\tau \int_0^l r d\xi = 2\pi\tau F$$

donde:

$F$  la mitad de la superficie de la sección longitudinal del cuerpo. (Fig. 2.9)

de donde:

$$2\pi\tau = \frac{X_f}{F}$$

Entonces:

$$q_{axf} = -\frac{X_f}{F} r$$

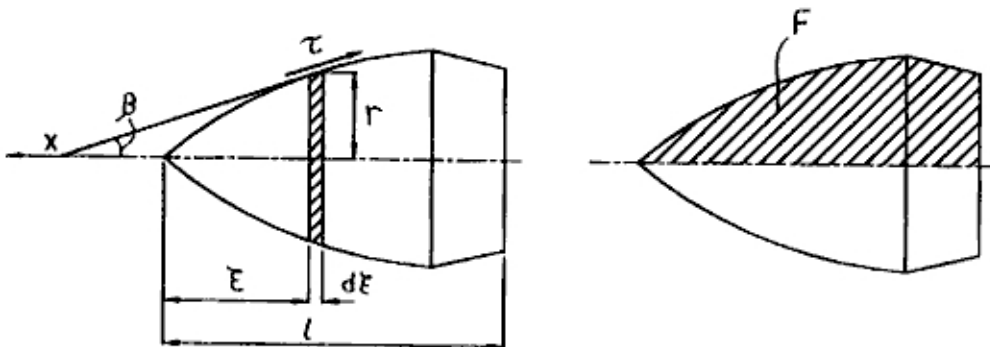


Fig. 2.9 determinación de  $q_{axf}$

Con respecto a la fuerza  $X_{bas}$  debido a una sección cortada al final del cohete; se determina según la referencia [2].

$$X_{bas} = -\bar{p}_{bas} q s_{bas} \quad (2.32)$$

donde:

$s_{bas}$  superficie de la sección de final del cohete.

$\bar{p}_{bas} = \frac{(p_{bas} - p_h)}{q}$  coeficiente de presión de base.

$p_{bas}$  presión en sección de la base.

$p_h$  presión atmosférica a la altura de vuelo.

El valor del coeficiente de presión de base depende de muchos factores como: el ángulo de ataque, la forma geométrica de la sección, velocidad de vuelo (Mach), número de Reynolds y la presión en la sección final por acción del ahorro del motor cohete.

La determinación de  $X_{bas}$  es una tarea muy complicada y necesita de cálculos aerodinámicos complicados. En la práctica con una precisión bastante aceptable según la referencia [2] se puede tomar:

$$X_{bas} = K(X_p + X_f) \quad (2.33)$$

El coeficiente  $K$  varía entre los valores 0,15....0,25.

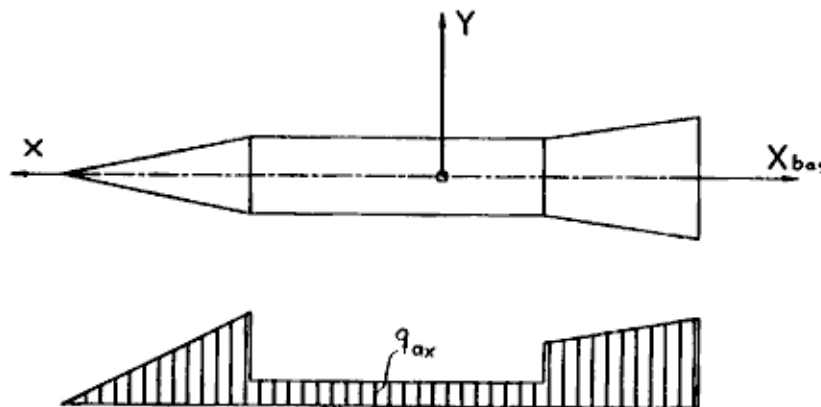


Fig. 2.10 Carga aerodinámica longitudinal  $q_{ax}$

La fuerza  $X_{bas}$  actúa como una fuerza concentrada sobre la estructura aplicada a una de las secciones que sujeta al motor o sobre la sección del diámetro crítico de la tobera.

Teniendo los valores de  $q_{axp}$  y  $q_{axf}$  se puede encontrar la carga aerodinámica total distribuida de todo el cohete.

$$q_{ax} = q_{axp} + q_{axf} \quad (2.34)$$

### 2.5.2 El factor de carga y su distribución a lo largo del cuerpo del cohete.

El vector del factor de carga en el centro de masa del cohete se determina como:

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{mg} \quad (2.35)$$

donde:

$m$  masa del cohete.

$R$  resultado de todas las fuerzas que actúan sobre el cohete con excepción de la fuerza de gravedad.

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \quad (2.36)$$

Los componentes  $n_x, n_y, n_z$  se llaman factor de carga longitudinal tangencial, normal y transversal respectivamente y se determina como:

$$n_x = \frac{R_x}{mg}; \quad n_y = \frac{R_y}{mg}; \quad n_z = \frac{R_z}{mg} \quad (2.37)$$

donde:

$R_x, R_y, R_z$  Proyecciones del vector R sobre su respectivo eje.

El vector del factor de carga se puede enlazar con el vector aceleración  $\vec{a}$  centro de masa del cohete. Adicionando a  $\vec{R}$  el vector de la gravedad  $m \vec{g}$  escribimos la ecuación del movimiento del cohete:

$$m \vec{a} = \vec{R} - m \vec{g} \quad (2.38)$$

pero por (2,35)

$$\vec{R} = mg \vec{n} \quad (2.39)$$

Después de dividir (2.38) por  $m g$  obtenemos:

$$\vec{n} = \frac{1}{g} \left( \vec{a} - \vec{g} \right) \quad (2.40)$$

Analicemos ahora un punto cualquiera  $O_i$  del cohete, cuya posición se define por  $\rho_i$  con respecto al centro de masa (Fig. 2.11). Considerando al cohete un cuerpo rígido, expresamos el vector de la aceleración  $\vec{a}_i$  de este punto por la aceleración del centro de masa según la fórmula conocida.

$$\vec{a}_i = \vec{a} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

donde:

$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$  vector de la velocidad angular y aceleración angular.

El valor del vector factor de carga  $\vec{n}_i$  en el punto  $O_i$  se puede encontrar por la fórmula (2.40)

$$\vec{n}_i = \frac{1}{g} \left( \vec{a} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) - \vec{g} \right)$$

Considerando (2.38) obtenemos la expresión del factor de carga en un punto arbitrario con respecto al centro de masa.

$$\vec{n}_i = \vec{n} + \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_i}{g} + \frac{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)}{g} \quad (2.41)$$

Veamos ahora un caso particular del cohete en el plano vertical.

La descomposición del vector  $\vec{R}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{\varepsilon}$ ,  $\vec{\omega}$  en los ejes

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k} \quad (2.42)$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$$

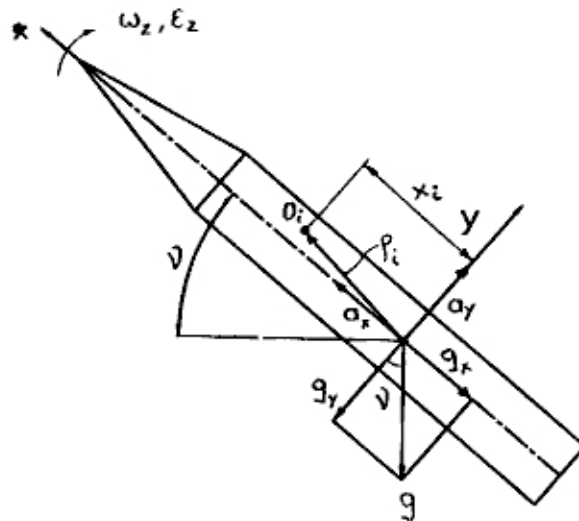


Fig. 2.11 determinación del factor de carga en el plano vertical

La proyección del vector  $\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j}$  en  $x$ ,  $y$  de acuerdo con Fig. 2.11 será:

$$g_x = -g \sin \nu, \quad g_y = -g \cos \nu$$

donde:

$\nu$  ángulo de cabeceo.

De (2,40) se deduce que en este caso el movimiento.

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} \quad (2.43)$$

$$n_x = \frac{1}{g} a_x + \text{sen } \nu \quad n_y = \frac{1}{g} a_y + \text{cos } \nu$$

Consideramos que el punto  $O_i$  se encuentra en el eje longitudinal del cohete así que,

$$\vec{\rho}_i = x_i \vec{i}$$

$x_i$  coordenada longitudinal del punto  $O_i$ .

Entonces de (2.41) (2.42) y (2.43) se determina la relación

$$\vec{n}_i = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} \quad (2.44)$$

donde:

$$n_x = n_x - \frac{\omega_z^2}{g} x_i \quad n_y = n_y + \frac{\varepsilon_z}{g} x_i \quad (2.45)$$

La fórmula (2,45) muestra que a lo largo del eje  $x$  el factor de carga varía por una función lineal. Recalcamos que el miembro  $\frac{\omega_z^2 x}{g}$  en la primera de estas fórmulas resulta generalmente pequeñas en comparación con  $n_x$  incluso para los puntos más alejados del centro de masa del cohete.

Depreciando este miembro obtenemos la relación.

$$n_x = n_x \quad n_y = n_y + \frac{\varepsilon_z}{g} x_i \quad (2.46)$$

De esta manera analizando el vuelo del cohete en el plano vertical, los valores  $n_x$ ,  $n_y$  a lo largo del cuerpo se caracterizan por su valor  $n_x$ ,  $n_y$  en el centro de masa y la magnitud (valor) de la aceleración angular  $\varepsilon_x$ .

Veamos el cálculos de estas 3 magnitudes para el caso cuando se conocen las fuerzas que actúan sobre el cohete en vuelo.

Utilizamos las fórmulas (2.37) y observando la figura 2.12 obtenemos:

$$R_x = E \cos \delta - X$$

$$R_y = E \operatorname{sen} \delta + Y$$

donde:

$\delta$  ángulo comprendido entre las fuerzas del empuje  $E$  y el eje el cohete.

$X, Y$  fuerzas aerodinámicas longitudinal y normal.

Por la condición de que  $\delta$  es pequeño se tiene:

$$\cos \delta = 1, \quad \operatorname{sen} \delta = \delta$$

entonces obtenemos:

$$R_x = E - X \qquad R_y = E\delta + Y$$

Así que para  $n_x$ ,  $n_y$  obtenemos la fórmula.

$$n_x = \frac{E - X}{mg} \qquad n_y = \frac{E\delta + Y}{mg} \qquad (2.47)$$

En la relación (2.47) se toma  $\delta > 0$  si la proyección del vector de empuje  $E$  en el eje y es positivo como se muestra en la (Fig. 2.12).

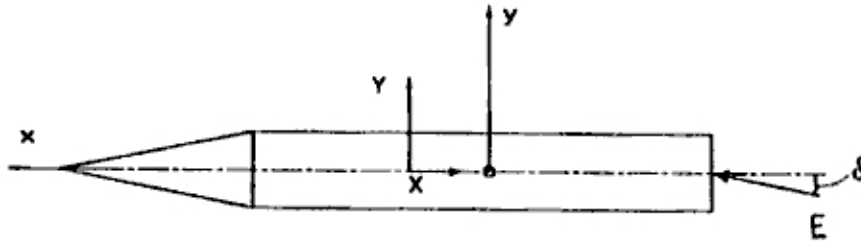


Fig. 2.12 Fuerzas en un plano vertical

La aceleración angular  $\varepsilon_z$  se puede encontrar de la ecuación de la rotación del cohete alrededor del eje  $z$ .

$$\varepsilon_z = \frac{M_z}{I_z} \quad (2.48)$$

donde:

$M_z$  momento de las fuerzas externas.

$I_z$  momento de inercia del cohete con respecto a  $z$ .

### 2.5.3 Fuerza de interacción entre los elementos y el cuerpo del cohete.

Supongamos que en el punto  $O_i$  (Fig. 2.11) se encuentra el centro de masa de un elemento de masa  $m_i$ , unido firmemente al cuerpo del cohete. En vuelo sobre el elemento además de la fuerza de gravedad actúa la fuerza  $R_i$  de reacción que lo hace mover junto con el cohete.

Si se conoce el valor de vector de factor de carga  $\vec{n}_i$  en el punto  $O_i$  y considerando (2.46) podemos escribir.

$$R_{ix} = m_i g n_x; \quad R_{iy} = m_i g \left( n_y + \frac{\varepsilon_z}{g} x_i \right) \quad (2.49)$$

El elemento provoca una fuerza longitudinal y normal que actúa sobre el cuerpo del cohete.



$$P_{ix} = -R_{ix} \quad P_{iy} = -R_{iy}$$

Y en base a (2,49) obtenemos:

$$P_{ix} = -m_i g n_x \quad P_{iy} = -m_i g \left( n_y + \frac{\varepsilon_z}{g} x_i \right) \quad (2.50)$$

Además sobre el elemento también actúan momento

$$H_{iz} = \varepsilon_z I_{iz}$$

donde:

$I_{iz}$  momento de inercia del elemento con respecto al eje, que pasa por su centro de masa paralelo al eje  $z$ .

Si el centro de masa del elemento se encuentra en el mismo plano de sujeción del elemento al cuerpo del cohete entonces sobre el cuerpo se transmite el momento.

$$M_{iz} = -H_{iz} = -\varepsilon_z I_{iz}$$

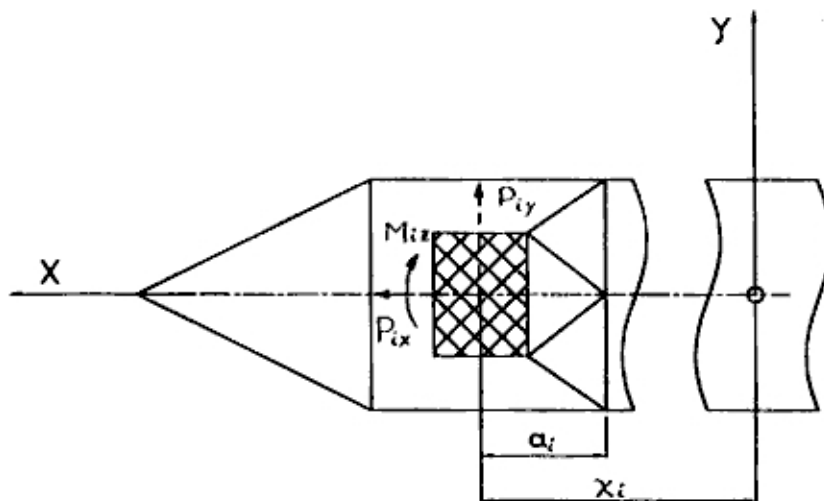


Fig. 2.13 Fuerza y momento que se transmite al cuerpo del cohete

Las fuerzas  $P_{ix}$  y  $P_{iy}$  y el momento  $M_{iz}$  con respecto al centro de masa  $O_i$  del elemento se muestran en la Fig. (2.13) con líneas cortadas.

El momento  $M_i$  que recibe el cuerpo en esta sección es igual;

$$M_i = M_{iz} + P_{iy} a_i$$

donde:

$a_i$  Distancia del punto  $O_i$  hasta el plano de sujeción del elemento y de esta manera:

$$M_i = -\varepsilon_z I_z + P_{iy} a_i$$

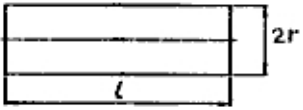
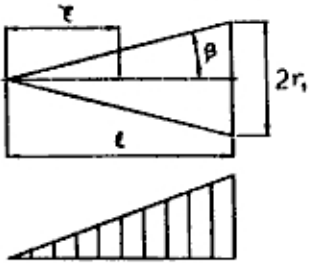
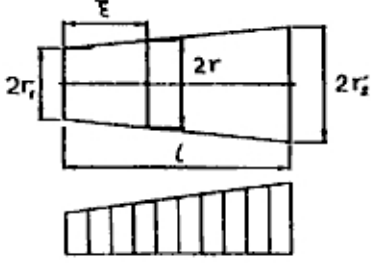
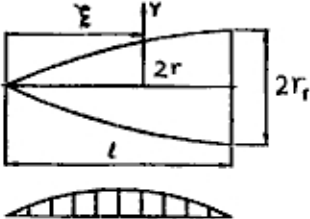
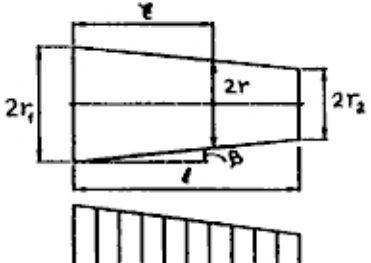
Se considera que  $a$  es positivo cuando el elemento se encuentra en la posición positiva del eje  $x$  (Fig. 2.13).

En muchos casos el momento de inercia de los elementos con muy pequeñas con respecto al momento de inercia del cohete por eso se desprecia. En este caso el momento  $M_i$

$$M_i = P_{iy} a_i$$

## 2.6 RESUMEN DE LAS FÓRMULAS

A continuación se muestra un resumen de las formulas obtenidas para la determinación de las cargas aerodinámicas que actúan sobre el cohete.

FORMA	FUERZA $X_p$	ESFUERZO $q_{axp}$
	0	0
	$(2\beta + \alpha^2)qS_1$ $S_1 = \pi r_1^2$	$\frac{2X_p}{l^2} r_1^2 \xi$
	$q(2\beta^2 + \alpha^2)(S_2 - S_1)$ $S_1 = \pi r_1^2$ $S_2 = \pi r_2^2$	$\frac{2X_p}{l} \frac{r_1}{r_1 + r_2} \xi$
	$(\frac{3}{8} \frac{r_1^2}{l^2} + \alpha^2)qS_1$ $S_1 = \pi r_1^2$	$\frac{6X_p}{l} \frac{\xi}{l} (1 - \frac{\xi}{l})$
	$C_{xpo} q(S_2 - S_1) - \frac{1}{2} Y \alpha$ $C_{xpo} = 1.949 \beta^{1.7} (0.8 + \frac{1}{M^2})$	$\frac{2X_p}{l} \frac{r_1}{r_1 + r_2} \xi$

Formulas para determinación de las cargas aerodinámicas

FORMA	FUERZA NORMAL $Y_i$	$c_i$	ESFUERZO $q_{sy}$
	$1.5\alpha^2 \lambda q S$ $\lambda = \frac{l}{2r}$ $S_1 = \pi r_1^2$	$\frac{l}{2}$	$\frac{Y}{l}$
	$2q\alpha S_1 \quad M > 2$ $3q\alpha S_1 \quad 1 < M \leq 2$ $S_1 = \pi r_1^2$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{2Y}{l} \xi$
	$2q\alpha(S_2 - S_1) \quad M > 2$ $3q\alpha(S_2 - S_1) \quad 1 < M \leq 2$ $S_1 = \pi r_1^2$ $S_2 = \pi r_2^2$	$\frac{l}{3} \left(1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)$	$\frac{2Y}{l} \frac{r}{r_1 + r_2}$
	$2q\alpha S_1 \quad M > 2$ $3q\alpha S_1 \quad 1 < M \leq 2$ $S_1 = \pi r_1^2$	$\frac{l}{2}$	$\frac{6Y}{l} \frac{\xi}{l} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)$
	$4q\alpha(S_2 - S_1) \quad M > 2$ $6q\alpha(S_2 - S_1) \quad 1 < M \leq 2$ $S_1 = \pi r_1^2$ $S_2 = \pi r_2^2$	$\frac{l}{3} \left(1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)$	$\frac{2Y}{l} \frac{r}{r_1 + r_2}$

### 3. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERNOS DEL COHETE

#### 3.1 DETERMINACIÓN DE LAS PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS

##### 3.1.1 Introducción

Anteriormente ya hemos deducido las formulas aerodinámicas para poder determinar las cargas que actúan sobre la estructura del cohete, ahora podemos determinar los esfuerzos internos de la estructura, que serán nuestros datos de entrada para la comprobación dimensional de nuestra estructura.

Los esfuerzos internos en las secciones transversales del cuerpo del cohete se encuentran como la suma de componentes, que son ocasionados por las fuerzas aerodinámicas, máscas, presión interna y empuje del motor.

El cohete se analiza como una viga cargada por fuerzas distribuidas y concentradas. Se presenta la metodología de cálculo de los esfuerzos axiales (longitudinales) transversales así como el momento flector.

De estos valores se construye las gráficas de variación del los esfuerzos internos y momentos a lo largo del cohete.

##### 3.1.2. Masa y ángulo de ataque del cohete.

La masa del cohete  $m$  en el tiempo  $t$  de cálculo se expresa como:

$$m = m_0 - t \dot{m}_c \quad (3.1)$$

donde:

$m_0$  masa inicial del cohete

$$\dot{m}_c = \frac{dm_c}{dt} \quad \text{flujo másico}$$

Consideramos que el cálculo se realiza en la mitad de la combustión del propelente, y considerando que la velocidad de combustión es constante, obtenemos:

$$m = m_o - \frac{m_c}{2} \quad (3.2)$$

$m_c$  masa del combustible (propelente)

El ángulo de ataque  $\alpha$  calculamos por la formula (2.1) y (2.2) de la siguiente manera.

$$\alpha = \alpha_o + \Delta\alpha \quad \Delta\alpha = \frac{U}{V}$$

Como habíamos mencionado anteriormente la velocidad de nuestro cohete es de 690 m/s y posteriormente de la curva de balística se observa que la altura promedio de vuelo es 2000 metros entonces:

$$V = 690 \frac{m}{s} \quad \text{y} \quad H = 2000 \text{ m}$$

Para esta altura por la tabla presentada en el anexo 2 se determina la velocidad del sonido:

$$H = 2000 \text{ m} \rightarrow a_H = 332 \frac{m}{s}$$

$a_H$  velocidad del sonido correspondiente a la altura  $H$ .

Entonces el número Mach será:

$$M = \frac{V}{a_H} = \frac{690}{332} = 2.07 \approx 2$$

La velocidad del aire para una altura teórica:

$$H = 2000 \text{ m} \quad U = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De las suposiciones hechas anteriormente el ángulo de ataque inicial  $\alpha_0 = 10^\circ$

$$\Delta\alpha = \frac{15}{690} = 0.0217 \text{ rad.} \approx 1.24^\circ$$

### 3.1.3 Momento de inercia y coordenada del centro de masa del cohete.

La distancia desde la nariz del cohete hasta el centro de masa calculamos como.

$$\xi_c = \frac{\sum m_i \xi_i}{m}$$

donde:

$m = \sum m_i$  masa del cohete.

$m_i$  masa de los elementos y la carga puntual.

$\xi_i$  coordenada de los centros de masa de los elementos y la carga puntual.

El momento de inercia  $I_z$  del cohete se calcula como:

$$I_z = I' - m\xi_c^2 \quad I' = \sum m_i \xi_i^2 + \sum I_i$$

donde:

$I'$  momento de inercia del cohete con respecto al eje transversal situado en la nariz del cohete

$I_i$  momento de inercia de cargas individuales con masa  $m_i$  con respecto al eje transversal que pasa por el centro de masa del cohete.

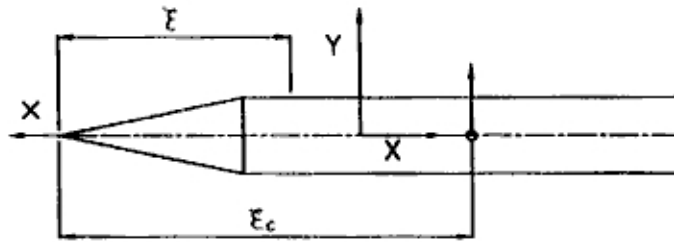


Fig. 3.1 Posición del centro de masa del cohete

### 3.2 CÁLCULO DE LAS FUERZAS AXIALES DEL COHETE

El valor de la fuerza axial se puede calcular de la siguiente manera:

$$N(\xi) = N_a + N_m + N_p + N_e$$

donde:

$N_a$  fuerza debido a las fuerzas aerodinámicas.

$N_m$  fuerza debido a las fuerzas de inercia.

$N_p$  fuerza debido a la presión interna.

$N_e$  fuerza debido al empuje del motor.

#### 3.2.1 Cálculo de $N_a$

En base a lo establecido en el parágrafo 2.5.1 la fuerza aerodinámica axial  $X$  se determina por la formula (2.24) como la suma de tres componentes:

$$X = X_p + X_f + X_{bas}$$

La fuerza ocasionada por la presión sobre la superficie transversal

$$X_p = \Sigma X_{pi}$$



$X_{pi}$  Fuerza aerodinámica de los componentes del cohete.

Los valores de  $X_{pi}$  y  $q_a$  lo encontramos de acuerdo a las formulas de la tabla del párrafo 2.6

La fuerza de fricción se determina por la formula (2.30) como:

$$X_f = \chi X_p$$

Como hemos dicho anteriormente el coeficiente  $\chi$  toma el valor de 0,4

La resistencia de base se calcula por (2.33):

$$X_{bas} = K (X_p + X_f)$$

El coeficiente  $K$  toma el valor  $\approx 0,2$ .

La distribución de  $X_f$  a lo largo del cohete se calcula por la fórmula:

$$q = \frac{X_f}{F} r$$

$F$  mitad de la superficie de la sección longitudinal del cohete.

$r$  radio de la sección transversal del cohete.

La carga aerodinámica  $q_{ax}$  se obtiene como resultado.

$$q_{ax} = q_{axp} + q_{axf}.$$

Se construye  $q_{ax}$  a lo largo del cohete, la integración se realiza por el método del trapecio

$$N_a = - \int q_{ax} d\xi$$

### 3.2.2 Cálculo de $N_m$

Considerando las formulas deducidas en el parágrafo 2.5.2 la fuerza axial originada por la acción de la masa de la parte sustraída sobre la carcaza.

$$N_m = -n_{xg} \left( \int_0^{\Sigma} q_m d\xi + \Sigma m_i \right)$$

donde:

$q_m$  masa distribuida de la cascaza.

$g$  aceleración de la gravedad.

$m_i$  masa concentradas.

El símbolo  $\Sigma$  significa que se suma en los límites de la parte sustraída.

Dados los valores de  $\chi$  y  $K$  se puede determinar  $X$  y calcular el factor de carga axial del cohete (formula 2.47).

$$n_x = \frac{E - X}{m g}$$

siendo  $E$  el empuje del motor.

### 3.2.3 Cálculo de $N_p$

La fuerza axial debido a la presión interna de la cámara de combustión puede ser calculada como:

$$N_p = p_o \pi r^2$$

donde:

$r$  radio de la sección transversal de la cámara.

El valor de  $N_p$  se calcula en las secciones de cálculo de la cámara.

### 3.2.4 Cálculo de $N_e$

La fuerza por la acción del empuje:

$$N_e = \Sigma E$$

## 3.3 CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS CORTANTES Y MOMENTO FLECTOR

### 3.3.1 Factor de carga normal.

Para un cohete que tiene secciones diferentes es conveniente encontrar la fuerza aerodinámica normal que se originan en los diferentes componentes y la fuerza resultante del factor de carga como la suma.

$$Y = \Sigma Y_i$$

La coordenada  $\xi_a$  del centro de presión en este caso es igual:

$$\xi_a = \frac{\Sigma Y_i \xi_i}{Y}$$

donde:

$\xi_i$  distancia desde la nariz del cohete al punto de acción de la resultante  $Y_i$  de las partes. La suma se halla de todas las partes.

Hemos deducido ya las formulas para el cálculo de  $Y_i$  y la posición del centro de presión  $c_i$  en la tabla del parágrafo 2.6 y también de la distribución de la carga aerodinámica  $q_{ay}$  en cada estación.

Encontramos el factor de carga normal en el centro de masa del cohete.

$$n_y = \frac{E\delta + Y}{mg}$$

donde:

$\delta$  ángulo comprendido entre vector de empuje y el eje del cohete.

Aceleración angular con el cual rota el cohete, se puede calcular por la fórmula:

$$\varepsilon_z = \frac{M_z}{I}$$

El momento de todas las fuerzas externas con respecto al centro de masa del cohete se puede determinar por la siguiente formula:

$$M_z = Y(\xi_c - \xi_a) + E\delta(\xi_c - \xi_M)$$

donde:

$\xi_M$  distancia desde el eje al punto de aplicación del vector de empuje del motor.

El factor de carga normal  $n_{y_i}$  en una sección cualquiera del centro de masa  $x_i = \xi_c - \xi_i$

Calculado por:

$$n_{y_i} = n_y + \frac{\varepsilon_z}{g} x_i$$

### 3.3.2 Cálculo de $Q$ y $M$

El cálculo de  $Q(\xi)$  y  $M(\xi)$  se realiza por la siguiente formula:

$$Q(\xi) = Q_a + Q_{mg}$$

$$M(\xi) = - \left( \int_0^\xi Q d\xi + \Sigma M_i \right)$$

donde:

$Q_a$  esfuerzo constante, ocasionado por la acción de la carga aerodinámica.

$Q_{mg}$  esfuerzo constante debido a la masa de la estructura y combustible del cohete.

$Q_a$  se calcula como:

$$Q_a = \int_0^{\xi} q_{ay} d\xi$$

donde:

$q_{ay}$  carga aerodinámica normal distribuida.

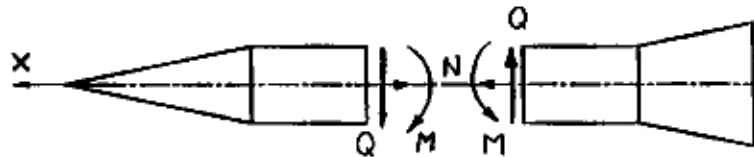


Fig. 3.2 Fuerza cortante y momento flector

La fuerza constante que depende de la masa de la estructura y combustible.

$$Q_{mg} = \int_0^{\xi} q_{my} d\xi + \sum P_{iy}$$

$$q_{my} = -g q_m \left( n_y + \frac{\epsilon_z}{g} x \right)$$

$$P_{iy} = -g m_i \left( n_y + \frac{\epsilon_z}{g} x_{mi} \right)$$

aquí:

$x_{mi}$  distancia del centro de masa del cohete al centro de masa de la carga  $i$ .

$q_m$  masa distribuida de la estructura

$P_{iy}$  fuerza ocasionada por los elementos del cohete

El momento concentrado  $M_i$  lo calculamos por la fórmula:

$$M_i = M_{im} + M_{ig}$$

donde:

$$M_{im} = -\varepsilon_z I_i - g m_i \left( n_y + \frac{\varepsilon_z}{g} x_{cm} \right) a_i$$

donde:

$I_i$  momento de inercia de la carga  $i$ .

$a_i$  distancia del centro de masa de la carga al plano de unión con el cuerpo.

$a_i > 0$  si su centro de masa se alinea del plano de sujeción en dirección positiva en el eje  $x$ .

### **3.4 RESULTADOS DE LOS CÁLCULOS**

Como resultado de los cálculos obtenemos la distribución de las fuerzas que actúan sobre la estructura del cohete, de esta manera podemos definir las zonas de mayor concentración de fuerzas y donde debemos poner mayor importancia.

El máximo valor de la fuerza axial se encuentra en la parte delantera de la cámara de combustión, la fuerza cortante presenta un valor variado a lo largo del cohete, el mayor valor del momento flector se produce en la parte central del cohete.

Se obtiene el centro de gravedad aproximado y la aceleración angular en función al momento que se origina debido a la distancia de aplicación de la fuerza de sustentación y la fuerza del peso del cohete, a estos puntos se les conoce como centro de presión (solamente fuselaje) y centro de gravedad respectivamente.

Hemos obtenido el factor de carga axial y normal que son parámetros importantes que nos permiten evaluar la maniobrabilidad del cohete, de tal manera que conociendo estos valores podemos deducir la aceleración que destraba el seguro de la espoleta de detonación en vuelo antes de impactar.

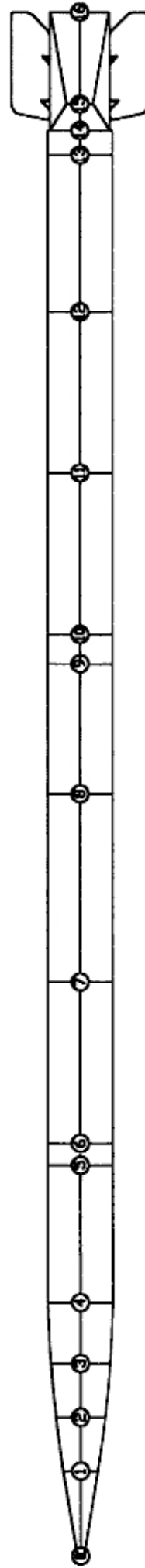


Fig. 3.3 Secciones de cálculo del Cohete



### FUERZA AXIAL, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

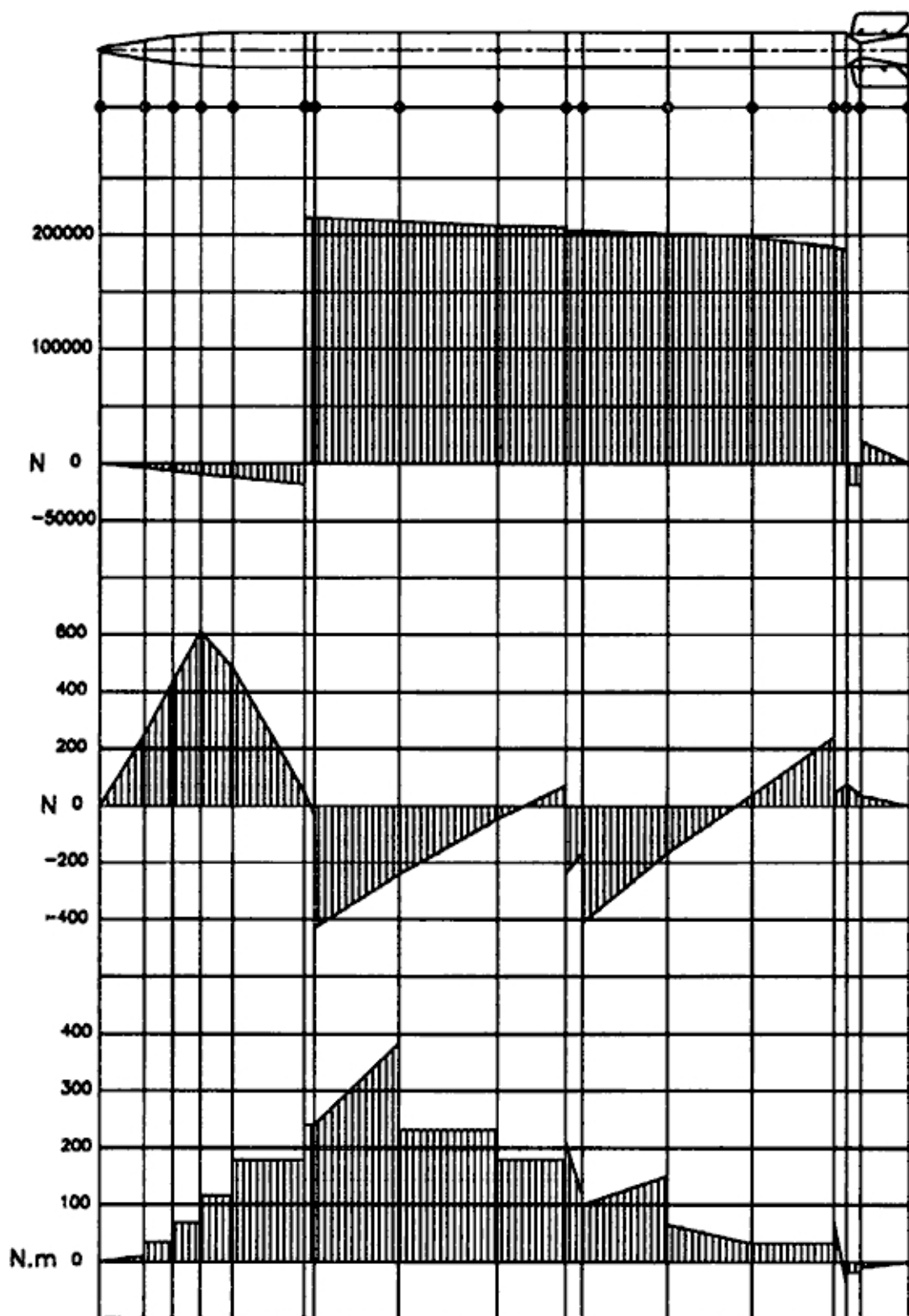


Fig. 3.5 Fuerzas a lo largo del Cohete

## **4. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS POR EL MÉTODO CLÁSICO**

### **4.1 CÁLCULO ESTRUCTURAL DE LA CÁMARA DE COMBUSTIÓN**

Uno de los principales objetivos del diseño y análisis estructural de cohetes de combustible sólido es el de garantizar la resistencia de los elementos estructurales que lo conforman.

El análisis de resistencia considera todos los casos de carga (transporte, almacenamiento, operación, mantenimiento, lanzamiento, vuelo etc.) de la estructura en conjunto como de sus partes.

Las cargas más significantes que actúan sobre el cohete en el proceso de transporte y conservación son las cargas estáticas de su peso, vibración y factores de carga para diferentes condiciones de operación, en muchos casos estas cargas depende del tipo de cohete, sus dimensiones y carácter de utilización.

Durante el lanzamiento el cálculo de resistencia considera las vibraciones, variación de la presión en la cámara de combustión y las cargas iniciales por la aceleración del cohete.

Durante el vuelo las cargas principales son la presión interna en la cámara, cargas inerciales sobre los elementos de la estructura, momentos, fuerzas aerodinámicas distribuidas sobre las superficies de sustentación y sobre el cuerpo del cohete, los efectos de aeroelasticidad y las cargas dinámicas.

Cuando el cohete se encuentra encendido las partes de la estructura de la cámara soportan altas temperaturas, debido a la temperatura de los gases llegan hasta 2500-3000 °C que obliga a utilizar un recubrimiento térmico en la superficie de contacto con los gases. De esta manera se reduce la temperatura en la superficie interna de la pared hasta 300-500 °C, a esta temperatura el material de la estructura todavía conserva sus propiedades mecánicas.

El cálculo de resistencia de los elementos del motor cohete de combustible sólido con altas temperaturas es muy complicado. Esto se explica por un lado las tensiones térmicas que originan una distribución irregular del campo, necesitamos cambiar las características del material.

La presión del cálculo de la cámara de combustión según la referencia [5] se obtiene por la fórmula:

$$P = P_o K_1 K_2 f \quad (4.1)$$

donde:

$K_1$  coeficiente que considera el incremento de la presión durante el encendido del motor

$K_2$  coeficiente que considera la variación de la presión

$P_o$  presión de trabajo del motor

$f$  coeficiente de seguridad

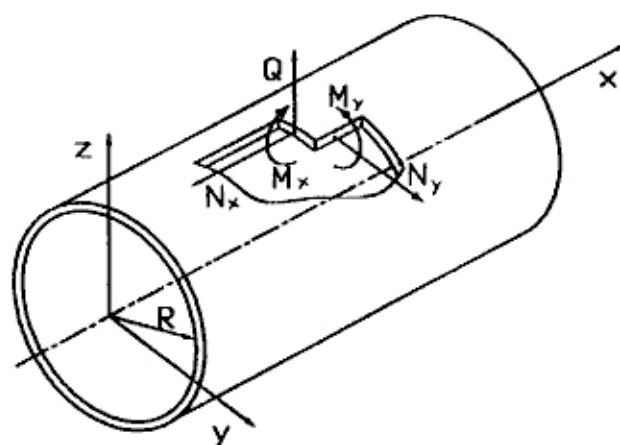


Fig. 4.1 Fuerza y momentos en las paredes del cilindro

La cámara de combustión representa un cilindro de paredes delgadas, en cuyo interior se genera gas caliente con alta presión.

Para el cálculo de resistencia es necesario definir si es un cilindro corto o largo y poder utilizar los métodos de cálculo apropiados.

El cilindro se considera largo si cumple con la siguiente condición [5].

$$L \geq 2,4\sqrt{R\delta} \quad (4.2)$$

- $L$  longitud del cilindro
- $R$  radio interno
- $\delta$  espesor de la pared del cilindro

Podemos considerar, que en la pared de la cámara la temperatura varía en forma lineal desde un valor en la superficie interna de la pared  $T_i$  hasta un valor en superficie externa

$T_e$ .

Para este caso donde la temperatura en la pared no es uniforme y teniendo una presión interna  $p$  y una fuerza axial  $N_x$  el desplazamiento de un punto de la superficie media de la pared.  $W$  según la referencia [5] va a caracterizarse por la siguiente ecuación diferencial.

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{E\delta}{R^2} W = -p + \mu \frac{N_x}{R} - \frac{\alpha E \delta}{R} T_o + \frac{D(1-\mu)\alpha}{\delta} \frac{d^2(\Delta T)}{dx^2} \quad (4.3)$$

donde:

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \text{ rigidez cilíndrica}$$

- $E$  módulo de elasticidad del material en la superficie media.
- $\mu$  coeficiente de Poisson.
- $p$  presión interna
- $R$  radio de la superficie media de la pared de la cámara *cm*
- $\alpha$  coeficiente de dilatación lineal  $1/C^\circ$ .

$$T_o = \frac{T_e + T_i}{2} \text{ temperatura en la superficie media de la pared de la cámara.}$$

$\Delta T = T_e - T_i$  diferencia de la temperatura de a superficie externa e interna en grados.

En realidad  $T_o$  y  $\Delta T$  varían a lo largo del cohete.

En una sección transversal arbitraria actúan:

La fuerza cortante  $Q$

$$Q = -D \left[ \frac{d^3 W}{dx^3} - \frac{1 + \mu}{\delta} \alpha \frac{d}{dx} (\Delta T) \right] = \frac{dM_x}{dx} \quad (4.4)$$

El momento flector  $M_x$

$$M_x = -D \left[ \frac{d^2 W}{dx^2} - (1 - \mu) \alpha \frac{\Delta T}{\delta} \right] \quad (4.5)$$

En una sección longitudinal:

Fuerza longitudinal  $N_y$

$$N_y = \mu N_x - \frac{E \delta W}{R} - \alpha E \delta T_o \quad (4.6)$$

Momento flector  $M_y$

$$M_y = -D \left[ \mu \frac{d^2 W}{dx^2} - (1 + \mu) \alpha \frac{\Delta T}{\delta} \right] \quad (4.7)$$

Conociendo los valores de  $Q, M_x, M_y, N_y$  se puede calcular la tensión en la estructura de la cámara.

En una sección arbitraria de la cámara de combustión, a una distancia  $z$  de la superficie media se originan tensiones normales y tangenciales. Las tensiones normales se originan por la acción de la fuerza constante  $Q$  y para su distribución en el espesor de la envoltura  $\delta$  se puede tomar una ley parabólica de distribución:

$$\tau = \frac{Q}{\delta} \left( \frac{3}{2} - \frac{6z^2}{\delta^2} \right) \quad (4.8)$$

En general estas tensiones en la sección de la envoltura no son grandes y se pueden despreciar.

Las tensiones normales ocasionados por la acción de las fuerzas axiales y los momentos flectores es mucho más que las tensiones de corte y para un espesor, arbitrario de envoltura se puede calcular por la fórmula.

$$\sigma_x = \frac{N_x}{\delta} - \frac{12M_x}{\delta^3} z \quad \sigma_y = \frac{N_y}{\delta} - \frac{12M_y}{\delta^3} z \quad (4.9)$$

El valor máximo de la tensión de corte como regla es mucho menor que el valor máximo de la tensión normal, por eso los puntos más cargados siempre serán el externo o el interno; en las cuales las tensiones normales se calcula por la fórmula  $\mu$ .

$$\sigma_{x \max} = \frac{N_x}{\delta} \pm \frac{6M_x}{\delta^2} \quad \sigma_{y \max} = \frac{N_y}{\delta} \pm \frac{6M_y}{\delta^2} \quad (4.10)$$

De esta manera se ve que para determinar la resistencia de la estructura de la cámara es necesario determinar la función  $W(x)$ .

Una solución aproximada de la ecuación (4.3) puede ser:

$$W(x) = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) - \frac{pR^2}{E\delta} \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) - R \alpha T_o \quad (4.11)$$

donde:

$$k = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{\delta^2 R^2}} \quad \text{Parámetro que depende de las dimensiones de la envoltura.}$$

Los últimos miembros de la función  $W(x)$  representan una solución particular de la ecuación (4.3), si consideramos una presión uniforme a lo largo de la cámara y sin considerar las tensiones térmicas esta solución particular sería:

$$W_1(x) = \frac{pR^2}{E\delta} \quad (4.12)$$

Los valores de los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$  determinan las condiciones de frontera:

Para  $x = 0$

$$W(0) = -R \alpha T_o$$

$$W'(0) = 0 \quad (4.13)$$

Reemplazando el valor de  $W(0)$  en la ecuación (4.11) obtenemos:

$$C_2 = \frac{pR^2}{E\delta} \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) \quad (4.14)$$

Diferenciamos la ecuación (4.11) en  $x$  y colocamos el valor de  $W'(0)$  del sistema (4.13) obtenemos:

$$C_1 = C_2 = \frac{pR^2}{E\delta} \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) \quad (4.15)$$

Ahora reemplazando el valor  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente de la ecuación (4.14) y (4.15) y la igualdad (4.11) obtenemos solución de la ecuación diferencial (4.3).

$$W(x) = \frac{pR^2}{E\delta} \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) \left[ e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) - 1 \right] - R \alpha T_o \quad (4.16)$$

Para determinar los valores  $Q(x)$  y  $M_x(x)$ ,  $N_y(x)$  y  $M_y(x)$  encontramos 1<sup>ra</sup>, 2<sup>da</sup> y 3<sup>ra</sup> derivada  $W(x)$ :

$$W'(x) = -2k \frac{pR^2}{E\delta} \left(1 - \frac{N_x}{pR} \mu\right) e^{-kx} \sin kx \quad (4.17)$$

$$W''(x) = -2k^2 \frac{pR^2}{E\delta} \left(1 - \mu \frac{N_x}{pR}\right) (\cos kx - \sin kx) e^{-kx} \quad (4.18)$$

$$W'''(x) = -4k^3 \frac{pR^3}{E\delta} \left(1 - \mu \frac{N_x}{pR}\right) e^{-kx} \cos kx \quad (4.19)$$

Después de reemplazar los valores obtenidos  $W(x)$ ,  $W'(x)$ ,  $W''(x)$ ,  $W'''(x)$  de las ecuaciones (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) respectivamente en las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) obtenemos:

$$Q(x) = -\frac{p}{k} \left(1 - \mu \frac{N_x}{pR}\right) e^{-kx} \cos kx \quad (4.20)$$

$$M(x) = \frac{p}{2k^2} \left(1 - \mu \frac{N_x}{pR}\right) e^{-kx} (\cos kx - \sin kx) + \frac{E\alpha \Delta T \delta^2}{12(1-\mu)} \quad (4.21)$$

$$N_y = \mu N_x - pR \left(1 - \mu \frac{N_x}{pR}\right) \left[e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)\right] \quad (4.22)$$

$$M_y = \frac{p}{2k^2} \mu \left(1 - \mu \frac{N_x}{pR}\right) e^{-kx} (\cos kx - \sin kx) + \frac{E\alpha \Delta T \delta^2}{12(1-\mu)} \quad (4.23)$$

Ahora encontremos las fórmulas para determinar los valores para 2 secciones.

1. Analicemos una sección en el inicio de la cámara de combustión y al final a la entrada de la tobera.

Para el punto (1):  $x = 0$



$$Q(0) = -\frac{p}{k} \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right)$$

$$M_x(0) = \frac{p}{2k^2} \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) + \frac{E\alpha \Delta T \delta^2}{12(1-\mu)} \quad (4.24)$$

$$N_y(0) = \mu N_x$$

$$M_y(0) = \frac{p}{2k^2} \mu \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) + \frac{E\alpha \Delta T \delta^2}{12(1-\mu)}$$

2. Para la sección localizada en la parte central de la cámara de combustión cuando el valor de  $x = \frac{L}{2}$

$$Q\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{p}{k} \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) e^{-k\frac{L}{2}} \cos k \frac{L}{2}$$

$$M_x\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{p}{2k^2} \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) e^{-k\frac{L}{2}} \left( \cos k \frac{L}{2} - \sin k \frac{L}{2} \right) + \frac{E\alpha \Delta T \delta^2}{12(1-\mu)} \quad (4.25)$$

$$N_y\left(\frac{L}{2}\right) = \mu N_x - pR \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) \left[ e^{-k\frac{L}{2}} \cos k \frac{L}{2} + \sin k \frac{L}{2} \right]$$

$$M_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{p}{2k^2} \mu \left( 1 - \mu \frac{N_x}{pR} \right) e^{-k\frac{L}{2}} \left( \cos k \frac{L}{2} - \sin k \frac{L}{2} \right) + \frac{E\alpha \Delta T \delta^2}{12(1-\mu)}$$

Las fórmulas (4.24) y (4.25) se utilizan para el cálculo de la cámara de combustión, considerando que el material se encuentre dentro del límite de elasticidad.

Sin embargo la estructura de la cámara de combustión trabaja en condiciones de deformación elásticas-plásticas, que hace aun más complicada las ecuaciones de

solución puesto que el modulo de elasticidad dependen de la deformación. Una solución a estos problemas podría ser el método iterativo de cálculo.

## 4.2 CÁLCULO DE LA ESTRUCTURA DEL COHETE

### 4.2.1 CÁLCULO DE LA CÁMARA DE COMBUSTIÓN

#### 4.2.1.1 DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES EN LA PARED DE LA CÁMARA DE COMBUSTIÓN POR ACCIÓN DEL ESFUERZO AXIAL, ESFUERZO CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

De los resultados obtenidos se observaron que los esfuerzos varían a lo largo de la cámara de combustión. Vamos a realizar un cálculo para la sección que presenta mayores valores de  $M$ ,  $N$  y  $Q$ .

Sección		6	Unid.
Esfuerzo axial	$N$	209260	N
Esfuerzo cortante	$Q$	-415	N
Momento flector	$M$	334	N.m

La geometría de la sección

$\delta$  espesor de pared de la cámara

$R$  radio exterior del cilindro

$r$  radio interior del cilindro

$R_m$  radio medio del cilindro

Entonces de nuestra geometría tenemos:

$$R = 61 \text{ mm} \quad r = 57.5 \text{ mm} \quad R_m = 59.25 \text{ mm} \quad \delta = 3.5 \text{ mm}$$

#### 1) Determinación de las tensiones originadas por el esfuerzo axial $N$ .

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

donde:

$N$  esfuerzo axial

$A$  área de la sección

El área de la sección se determina:

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

resolviendo:

$$A = 1302.9 \text{ mm}^2$$

Entonces obtenemos una tensión:

$$\sigma = \frac{209260}{1302.9} = 160.6 \text{ MPa}$$

2) **Determinación de las tensiones originadas por el momento flector  $M$ .**

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

donde:

$I$  momento de inercia de la sección

$y$  altura del punto de análisis con respecto al eje horizontal

Determinación del momento de inercia de la sección con respecto al eje horizontal.

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

Resolviendo:

$$I = 2289089 \text{ mm}^4$$

Determinamos ahora la altura  $y$ :

Sabemos que

$$y = R_m \sin \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo desde el eje horizontal al punto de análisis

El valor de  $y$  es máximo cuando  $\theta = \pm 90^\circ$  entonces:

$$\sigma = \frac{334 \cdot 1000}{2289089} 59,25 = 8.6 \text{ MPa}$$

### 3) Determinación de la tensión de corte por acción del esfuerzo cortante $Q$

Como la acción del esfuerzo cortante es vertical y sobre toda la superficie de la sección lo analizamos por la siguiente fórmula:

$$\tau = \frac{q}{\delta} \quad \text{y} \quad q = \frac{Q}{I} S$$

donde:

$S$  momento estático de la sección

$\delta$  espesor de la pared de la cámara

$q$  flujo

Como la acción del esfuerzo de corte es central y simétrica la distribución de las tensiones de corte va a ser simétrica:

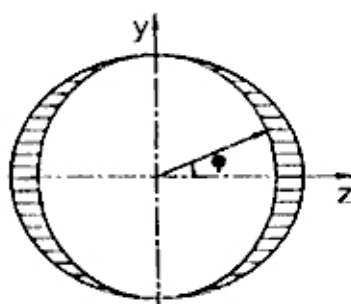


Fig. 4.2 Sección del cilindro

Sabemos que:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \delta \sin \varphi d\varphi = -R^2 \delta \cos \varphi$$

Para:  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad q = 0 \rightarrow \tau = 0$

Para:  $\varphi = 0 \quad q = 2.22 \frac{N}{mm} \quad \tau = 0.63 \text{ MPa}$

Resumen de las tensiones ocasionadas por las fuerzas aerodinámicas e inerciales en la sección del cohete:

	$\sigma$ MPa	$\tau$ MPa
<i>N</i>	160.6	
<i>M</i>	8.6	
<i>Q</i>		0.63
$\Sigma$	169.2	0

Determinación de la resistencia equivalente por el criterio de Von Mises.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Entonces:

$$\sigma_{VM} = 169.2 \text{ MPa}$$

Para un coeficiente de seguridad de  $f = 1.3$  :

$$\sigma_{VM} = 219.9 \text{ MPa}$$

De los cálculos efectuados observamos que la tensión obtenida es menor que la tensión de fluencia del material igual a  $\sigma_f = 416 \text{ MPa}$ . Por lo tanto podemos afirmar que nuestra estructura no tiene deformación plástica bajo las cargas aplicadas.

El margen de seguridad de la estructura sera:

$$MdS = \frac{\sigma_f}{\sigma_{VM}} - 1 = 0.89$$

#### 4.2.1.2 DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES EN LA PARED DE LA CÁMARA DE COMBUSTIÓN POR ACCIÓN DE LA PRESIÓN INTERNA

Por la teoría de cálculo de los cuerpos de revolución, calculamos la tensión que se origina en una sección de la cámara de combustión por acción de una presión interna de 240 Atmosferas.

El material utilizado presenta las siguientes características:

Tensión de rotura  $\sigma = 640$  MPa

Módulo de elasticidad  $E = 210000$  MPa

Módulo de Poisson  $\mu = 0.3$

Las tensiones tangenciales y meridionales se determinan como:

$$\sigma_t = \frac{P R_m}{\delta} \qquad \sigma_m = \frac{P R_m}{2\delta}$$

donde:

$\sigma_t$  tensión tangencial

$\sigma_m$  tensión meridional

$R_m$  radio medio

$\delta$  espesor de pared

Para los valores:

$$P = 240 \text{ Atm.} \qquad \delta = 3.5 \text{ mm.} \qquad R_m = 59.25 \text{ mm.}$$

Obtenemos:

$$\sigma_m = 203.14 \text{ MPa} \qquad \sigma_t = 406.2 \text{ MPa}$$

La deformación radial de la cámara se determina por:

$$w = \frac{PR_m^2}{E\delta} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

Por lo tanto obtenemos una deformación de :

$$w = 0.0974 \text{ mm.}$$



## 4.2.2 CÁLCULO DEL TAPÓN

El tapón de la cámara de combustión presenta una geometría plana que permite disminuir la longitud total del cohete y aprovechar eficientemente el volumen interno, pero esto acompaña a un incremento del espesor del tapón.

La tensión máxima que se origina en el fondo del tapón de la cámara de combustión se determina por [5]:

$$\sigma = \frac{3 R_t^2}{4 \delta_t^2} P$$

donde:

- $\delta_t$     espesor del tapón
- $R_t$     radio del tapón
- $P$     presión de cálculo

Para:

$$P = 240 \text{ Atm.} \quad \delta_t = 10 \text{ mm.} \quad R_t = 50 \text{ mm.}$$

Obtenemos:

$$\sigma = 450 \text{ MPa}$$

Como observamos este valor es un poco elevado superior a la tensión de fluencia  $\sigma_f = 416 \text{ MPa}$  y nos indica que el tapón va a tener una deformación residual después de la aplicación de la carga pero va a soportar la carga aplicada.

La tensión de corte que se origina por acción de la presión interna es:

$$\tau = \frac{\pi R_t^2 P}{2 \pi R_t K K_m H}$$

donde:

- $\tau$     tensión de corte
- $K$     coeficiente de relleno de rosca
- $K_m$     coeficiente de deformación plástica
- $H$     longitud de la parte roscada

Sabemos que  $\sigma_B = 640 \text{ MPa}$ , también  $\tau_B = 0.6 \sigma_B$ . Por lo tanto  $\tau_B = 384 \text{ MPa}$

Para:  $P = 240 \text{ Atm.}$      $H = 22 \text{ mm.}$      $K = 0.87$      $K_m = 0.6$

Obtenemos:  $\tau = 52.2 \text{ MPa}$

Notamos que este valor es menor que la tensión de corte por rotura del material lo que significa que la rosca va a soportar la presión aplicada.

### 4.2.3 CÁLCULO DE UN SÓLIDO DE GEOMETRÍA COMPLICADA

Vamos a realizar el cálculo de un sólido de geometría complicada por el método clásico, primeramente tenemos que simplificar la geometría hasta que podamos aplicar las fórmulas conocidas.

Nuestra geometría es un sólido que está destinado a soportar principalmente las fuerzas axiales y está compuesto por dos anillos de diferentes diámetros, el anillo externo no interviene en cálculo estructural pues cumple únicamente la función de soporte del iniciador. El anillo interno está apoyado sobre el cilindro en seis puntos distribuidos uniformemente.

Analizamos la parte del apoyo como una viga cantilever fijada en uno de los extremos y sometida a una carga transversal al final de la viga, Esta fuerza genera un momento y una fuerza cortante.

La fuerza total en el sólido es  $F = 3600 \text{ N}$

por lo tanto la fuerza que soportara cada uno de los apoyos será  $F_a = 600 \text{ N}$

El apoyo tiene las siguientes dimensiones

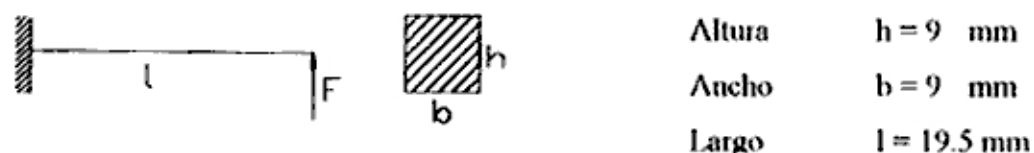


Fig. 4.3 Viga cantilever

La tensión que se genera en el inicio de la viga se calcula por la fórmula clásica:

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad \tau = \frac{Q}{A}$$

donde:

$\sigma$  tensión

$\tau$  tensión de corte

$M$  momento flector

$I$  momento de inercia

$y$  altura máxima

$F_a = Q$  fuerza cortante

$A$  área de la sección

El momento originado y el momento de inercia se determinan como:

$$M = F_a l \quad I = \frac{b h^3}{12}$$

Entonces para:

$$M = 11700 \text{ Nmm} \quad I = 546.75 \text{ mm}^4 \quad y = 4.5 \text{ mm} \quad A = 81 \text{ mm}^2$$

Obtenemos:

$$\sigma = 96.2 \text{ MPa} \quad \tau = 7.4 \text{ MPa}$$

La resistencia según el criterio de Von Mises será:  $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 97.1 \text{ MPa}$

Por otra parte esta fuerza es transmitida al anillo central que es analizado solo la sexta parte como una viga empotrada en sus extremos.

Utilizando la misma metodología que para el tramo anterior analizamos una sección de la estructura que lo vamos a analizar como una viga fijada en ambos extremos sobre la cual actúa una carga distribuida y cuya geometría es:

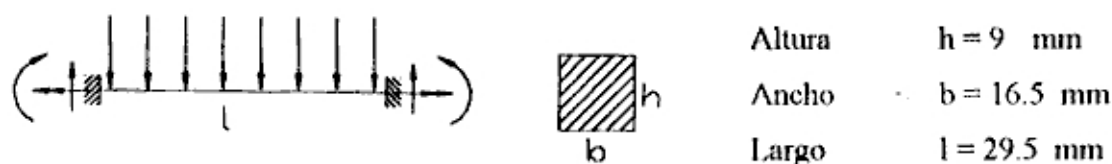


Fig. 4.4 Viga apoyada

Sobre esta parte aplicamos las mismas formulas anteriores, pero además sobre la viga actúa un momento torsor cuya tensión se determina como:

$$\tau = \frac{M_{tor} (1.5b + 0.9h)}{0.5 b^2 h^2}$$

donde:

$M_{tor}$  momento torsor de la viga

Par una carga distribuida sobre toda la superficie de la parte en estudio:

$$q = 1000000 \frac{N}{m^2}$$

Determinamos que la fuerza distribuida lineal que se aplicara a la viga será:

$$q_l = 16500 \frac{N}{m}$$

Obteniéndose de esta manera

$$M_{tor} = 11700 \text{ Nmm} \quad M = 7228 \text{ Nmm} \quad I = 1002.4 \text{ mm}^4 \quad y = 4.5 \text{ mm}$$

Encontramos que:

$$\sigma = 32.44 \text{ MPa} \quad \tau = 34.85 \text{ MPa}$$

La resistencia equivalente según el criterio de Von Mises será:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 67.2 \text{ MPa}$$

Como vemos los valores obtenidos son menores a las tensiones de fluencia lo que nos indica que esta pieza resistirá las cargas aplicadas.

#### 4.2.4 CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS PROPIAS DE OSCILACIÓN DEL COHETE

Vamos a analizar nuestro cohete como una viga con una geometría cilíndrica con el diámetro externo del tubo  $D= 122$  mm. y el espesor de pared  $\delta=3.5$  mm y una longitud igual a la longitud del cohete y que es de 2870 milímetros.

Para los cálculos hemos hecho uso de la teoría planteada en [16] con el cual determinamos las frecuencias de oscilación de una viga con las características geométricas antes mencionadas utilizando la fórmula:

$$f_n = \frac{a_n}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

donde:

- $E$     modulo de elasticidad
- $I$     momento de inercia de la sección
- $A$     área de la sección
- $\rho$     densidad del material utilizado
- $L$     longitud de la viga
- $a_n$     constante dependiente del número de modo

Para los valores siguientes:  $E = 210000$  MPa,  $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$

De la geometría del cilindro se obtiene:  $A = 0.00130297$  m<sup>2</sup>  $I = 0.00000228908$  m<sup>4</sup>

Las frecuencias de oscilación para los tres primeros modos:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 22 & f_1 = 92.26 \\ a_2 = 61.7 & f_2 = 258.76 \\ a_3 = 121 & f_3 = 507.46 \end{array}$$

Estos valores deben ser parecidos a los que obtendremos por simulación.

## **5 FUNDAMENTACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

### **5.1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

#### **5.1.1 INTRODUCCIÓN**

Los primeros trabajos dedicados al desarrollo de la teoría del método de los elementos finitos se dieron por los años 50 donde se analiza la posibilidad de discretizar una estructura continua en pequeñas partículas que se llamaron elementos finitos y presentar una solución basándose en el cálculo matricial.

Por otra parte el gran avance tecnológico de las computadoras de gran capacidad impulsaron aun más la utilización del método en las diferentes áreas de ingeniería.

En nuestros días el método FEM es una herramienta indispensable para el ingeniero de cálculo estructural pues la atención se concentra en determinar el comportamiento de trabajo de una estructura y el análisis de los resultados en vez de resolver ecuaciones complicadas es decir enfocar la atención en el pre-procesamiento y post-procesamiento.

Un paso importante durante la solución de problemas por el método de los elementos finitos, consiste en transformar las ecuaciones diferenciales que gobiernan dichos problemas en un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas, que puede posteriormente ser resuelto por un computador digital.

### **5.1.2 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

El método FEM puede actualmente ser definido como un procedimiento numérico para la solución de problemas físicos que se hallan gobernados por una ecuación diferencial o por un principio de conservación de energía.

El procedimiento de análisis por el método de los elementos finitos es el siguiente:

- 1 Topología de la estructura, datos de la geometría, material y rigidez de los elementos
- 2 Determinación de las coordenadas locales
- 3 Cálculo de la rigidez de los elementos en el sistema de coordenadas locales
- 4 Cálculo de los cosenos de dirección de los elementos en el sistema global de referencia
- 5 Cálculo de la rigidez de los elementos en el sistema de coordenadas global
- 6 Determinación de la matriz de rigidez del conjunto
- 7 Eliminación de los grados de libertad del conjunto
- 8 Inversión de la matriz reducida de rigidez
- 9 Conversión de las fuerzas distribuidas a fuerzas concentradas
- 10 Cálculo de las fuerzas térmicas
- 11 Determinación de la matriz térmica del conjunto
- 12 Cálculo de la carga total
- 13 Cálculo de los desplazamientos
- 14 Determinación de los desplazamientos, fuerzas tensiones de los elementos





### 5.1.3 ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El estudio de los elementos finitos es muy extenso pero nos bastara conocer la teoría de los elementos básicos para poder entender la metodología de cálculo por el método de los elementos finitos.

En el modelamiento del cohete utilizamos diferentes elementos finitos. Para el fundamento teórico. Tomando en cuenta la referencia [9], [11] podemos presentar la teoría de los elementos finitos básicos tales como:

#### 1. ELEMENTO BARRA

El primer tipo de elemento finito a considerar, y a la vez el más simple, es el elemento lineal barra, que se une a otros elementos por medios de apoyos articulados. Este elemento va a experimentar solamente tracción y compresión. Determinemos la matriz de rigidez de este elemento en un sistema de coordenadas locales.

Analicemos una barra un segmento de longitud  $l$ , formado por dos nodos (Fig. 5.2), con una sección constante  $A$ , el material con módulo de elasticidad constante  $E$ , densidad del material constante  $\rho$ . Los nodos son denotados por  $i$  y  $j$  y los valores nodales por  $u_i$  y  $u_j$ .

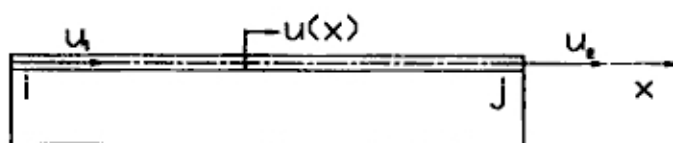


Fig. 5.2 Elemento Barra

La función polinómica que describe el desplazamiento axial de la barra es:

$$u = c_1 + c_2 x \quad (5.1)$$

Los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  pueden ser determinados usando las condiciones nodales, podemos entonces desarrollar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_i &= c_1 + c_2 x_i \\ u_j &= c_1 + c_2 x_j \end{aligned} \quad (5.2)$$

De donde obtenemos:

$$u = \left( \frac{x_j - x}{l} \right) u_i + \left( \frac{x - x_i}{l} \right) u_j \quad (5.3)$$

Donde  $x_j - x_i$  ha sido reemplazado por la longitud del segmento  $l$ .

Esta última ecuación nos representa una de las formas típicas del método de los elementos finitos, donde para obtener el valor nodal en un punto cualquiera  $x$ , se multiplican los valores de los nodos adyacentes por funciones lineales dependientes de  $x$ , que son las llamadas funciones de forma o funciones de interpolación, y que representan la base del método de los elementos finitos.

$$a_i = \frac{x_j - x}{l} \quad \text{y} \quad a_j = \frac{x - x_i}{l} \quad (5.4)$$

La ecuación (5.3) también puede ser escrita de la siguiente forma:

$$u = [a] \{U\} \quad (5.5)$$

donde:

$[a] = [a_i, a_j]$  es una matriz fila de funciones de forma

$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$  es un vector columna que contiene los valores nodales.

Analizando la ecuación (5.4) podemos notar que  $a_i = (x_j - x)/l$  obtiene un valor de 1 en el nodo  $i$  y cero en el nodo  $j$ . Igualmente  $a_j$  obtiene un valor de 1 en el nodo  $j$  y cero en el nodo  $i$ . Estos valores son característicos de las funciones de forma.

Deformación unitaria total constante:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{u_j - u_i}{l} \quad (5.6)$$

La matriz de rigidez del elemento se determina por acción de las cargas unitarias en los nodos:

$$k = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Los esfuerzos que se originan en el elemento se determina por la relación de Hooke:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \left( \frac{u_j - u_i}{l} \right) \quad (5.8)$$

La fuerza interna axial constante se da:

$$N = EA \left( \frac{u_j - u_i}{l} \right) \quad (5.9)$$

Para los cálculos dinámicos determinamos la matriz de masa:

$$m = \frac{\rho Al}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

## 2. ELEMENTO VIGA

Ahora analicemos una viga bidimensional que soporta fuerzas y momentos en los nodos extremos. En cada nodo vamos a analizar 2 desplazamientos: 2 lineales y 2 angulares y sus correspondientes fuerzas. como nodos  $i$   $j$  del elemento tomamos sus finales. El eje  $x$  del sistema de coordenadas locales concuerda con el eje del elemento.

La viga de longitud  $l$ , tiene un momento de inercia constante  $I$ , material con módulo de elasticidad constante  $E$ , y densidad constante  $\rho$ ,

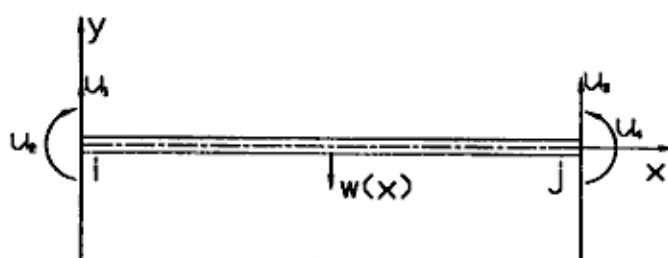


Fig. 5.3 Elemento viga

La función de forma, o ley de desplazamiento interno  $w(x)$  en función de los desplazamientos en sus extremos se denota como:

$$w(x) = aU = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Donde:  $a_i = f\left(\frac{x}{l}\right)$

La deflexión de la viga se determina como:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = bU \quad (5.12)$$

La matriz de rigidez para un elemento viga bidimensional se determina como:

$$k = \frac{EI}{l^3} \begin{vmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{vmatrix} \quad (5.13)$$

El momento flector que se origina en la viga por acción de las fuerzas se determina por la relación:

$$M(x) = E I b U$$

El esfuerzo de la viga es proporcional a la altura con respecto al eje central y determina por la relación:

$$\sigma(x) = \frac{M}{I} y$$

La matriz de masa del elemento viga se determina como:

$$m = \frac{\rho A l}{420} \begin{vmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{vmatrix} \quad (5.14)$$

### 3. ELEMENTO TRIANGULAR

Hemos visto cómo el método utiliza una aproximación de una función para obtener los valores de la misma en puntos fijos llamados nodos, en general sucede lo mismo para los elementos planos o bidimensionales como lo demostraremos a continuación

Analicemos un elemento triangular que tiene lados rectos y un nodo localizado en cada esquina y con fuerzas en su plano.

El elemento de espesor constante  $\delta$ , de superficie  $A$  y módulo de elasticidad constante  $E$  y coeficiente de Poisson  $\mu$ .

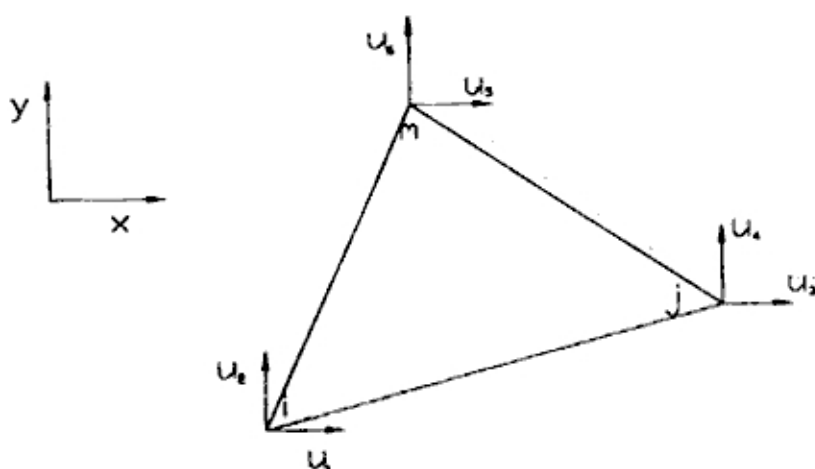


Fig. 5.2 Elemento triangular

Para operar con elementos triangulares es necesario una convención en la numeración de los nodos en sentido antihorario, empezando en el nodo  $i$  escogido arbitrariamente.

El polinomio de interpolación es:

$$u_x = c_1 + c_2x + c_3y \qquad u_y = c_4 + c_5x + c_6y \qquad (5.15)$$

La función de forma, o la ley de desplazamiento interno  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  en función de dos desplazamiento en los nudos

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = aU = \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \end{bmatrix}_{1,3}^{2,2} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}_{3,1}^{2,1} \quad (5.16)$$

considerando que:

$$a_i = f(x, y, A) \quad (5.17)$$

siendo  $A$  el área del triángulo

Las deformaciones unitarias totales que se originan en el elemento se denota como:

$$\varepsilon = b U \quad (5.18)$$

Considerando que los desplazamientos en cada nodo obtenemos:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad U = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}_{3,1}^{2,1} \quad (5.19)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \end{bmatrix}_{1,3}^{3,2} \quad b_i = \frac{-1}{2A} \begin{bmatrix} \zeta_i & 0 \\ 0 & -\xi_i \\ -\xi_i & \zeta_i \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\zeta_i = y_m - y_j \quad \xi_i = x_m - x_j$$

De las ecuaciones anteriores vemos que los desplazamientos a lo largo de cualquier borde varían linealmente, y ellos sólo dependen de los desplazamientos de los dos vértices en el borde particular; esto asegura la satisfacción de la compatibilidad de desplazamientos en dos elementos triangulares adyacentes con un límite común.

La matriz de rigidez de un elemento triangular se puede representar como 2 submatrices y se denota por:

$$k = k_n + k_s \quad (5.21)$$

donde:



$k_n$  representa la rigidez por esfuerzos normales,

$k_s$  rigidez por esfuerzos cortantes.

$$k_n = \frac{E \delta}{4A(1-\mu^2)} |C_{ij}|_{6,6} \quad (5.22)$$

con  $C_{ij} = f(\mu, \zeta, \xi)_{ijm}$

$$k_s = \frac{E \delta}{8A(1+\mu)} |D_{ij}|_{6,6} \quad (5.23)$$

con  $D_{ij} = f(\mu, \zeta, \xi)_{ijm}$

La tensión se determina una vez conocidos los desplazamientos por la ley de Hooke :

$$\sigma = \frac{E}{2A(1-\mu^2)} |F_{ij}| \quad (5.24)$$

con  $F_{ij} = f(\mu, \zeta, \xi)_{ijm}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

La matriz de masa característica para el elemento triangular:

$$m = \frac{\rho A \delta}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

#### 4. ELEMENTO RECTANGULAR

El elemento rectangular tiene sus lados rectos y un nodo en cada esquina. Su ecuación característica es la siguiente:

$$u_x = c_1 + c_2\xi + c_3\xi\eta + c_4\eta \quad u_y = c_5 + c_6\xi + c_7\xi\eta + c_8\eta \quad (5.27)$$

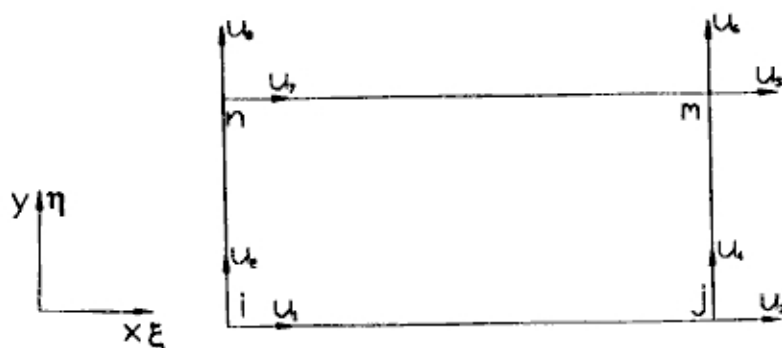


Fig. 5.3 Elemento rectangular

El origen del sistema de la coordenada local se tomará en la esquina izquierda más baja del rectángulo, como mostrado en la Fig. 5.3 y para simplificar los análisis subsecuentes utilizaremos coordenadas no-dimensionales.

$$\xi = \frac{x}{a} \quad y \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (5.28)$$

dónde  $a$  y  $b$  son las dimensiones del plano rectangular. Los desplazamientos del elemento se representan por los desplazamientos a las cuatro esquinas. Hay ocho desplazamientos cuyas  $u_1, u_2, \dots, u_8$ , y sus direcciones positivas serán igual que las direcciones positivas de los ejes  $x$  y  $y$ , como es indicado en la Fig. 5.3

Las tensiones totales que corresponden a las funciones del desplazamiento:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \quad (5.29)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \quad (5.30)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{1}{b} \frac{\partial u_x}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \quad (5.31)$$

Encontramos que la relación de la deformación unitaria para el plano rectangular se da:

$$\epsilon = b U \quad (5.32)$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$b = \left[ b_i \ b_j \ b_m \ b_n \right]_{1,3}^{4,2} \quad U = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_n \end{bmatrix}_{4,1}^{2,1} \quad (5.34)$$

donde  $b_i = f(a, b, \frac{x}{a}, \frac{y}{b})$

Por la ley de Hooke determinamos las tensiones que se originan en el elemento rectangular:

$$\sigma = \frac{E}{1-\mu^2} H_{ij} \quad (5.35)$$

con  $H_{ij} = f(\mu, \eta, \xi, a, b)_{ijmn}$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

La matriz de rigidez como en el caso anterior se determina:

$$k = \frac{Et}{12(1-\mu^2)} |G_y|_{8,8} \quad (5.37)$$

con  $G_y = f(\mu, \frac{a}{b})_{8 \times 8}$

La matriz de masa para un elemento rectangular:

$$m = \frac{\rho V}{36} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (5.38)$$

## 5. ELEMENTO TETRAEDRO

El elemento básico para el análisis tridimensional es el tetraedro. Como convención para la denominación de sus nodos, escogemos arbitrariamente una de las caras y llamamos  $i$ ,  $j$  y  $k$  a los tres vértices partiendo de uno cualquiera y avanzando en sentido antihorario; el otro vértice será llamado  $l$  (Fig. 5.4).

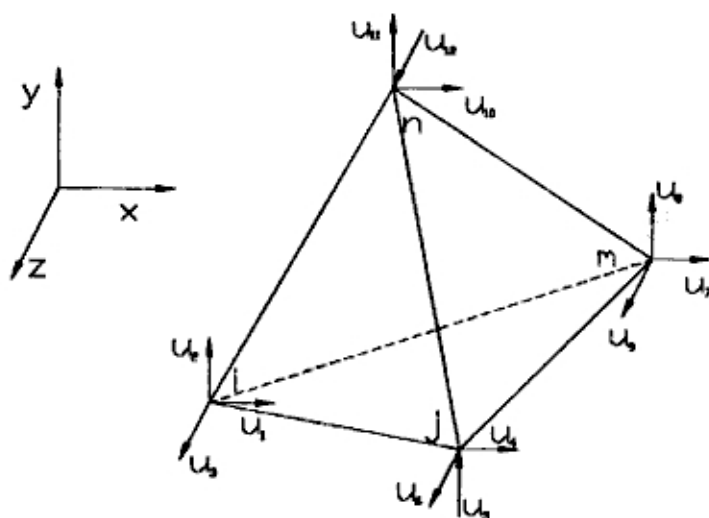


Fig. 5.4 Elemento tetraédrico

La ecuación de interpolación polinómica para el tetraedro es:

$$\begin{aligned}u_x &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4z \\u_y &= c_5 + c_6x + c_7y + c_8z \\u_z &= c_9 + c_{10}x + c_{11}y + c_{12}z\end{aligned}\tag{5.39}$$

Los coeficientes pueden ser determinados una vez más usando los valores nodales en cada uno de los vértices del tetraedro, que producen el siguiente sistema de ecuaciones.

Para un tetraedro sólido la distribución del desplazamiento se tomará para ser lineal en  $x$ ,  $y$  y  $z$  de donde

$$u = a U\tag{5.40}$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}_{3,1} \quad a = \begin{Bmatrix} a_j & a_f & a_m & a_n \end{Bmatrix}_{1,4}^{3,3} \quad U = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_n \end{Bmatrix}_{4,1}^{3,1} \quad (5.41)$$

con:  $a_i = f(x, y, V)$

La deformación unitaria para un elemento tetraedro se da por la formula conocida:

$$\varepsilon = b U \quad (5.42)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad b = \begin{Bmatrix} b_i & b_j & b_m & b_n \end{Bmatrix}_{1,4}^{6,3} \quad U = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_n \end{Bmatrix}_{4,1}^{3,1} \quad (5.43)$$

donde:  $b_i = f(a, b, \frac{x}{a}, \frac{y}{b})$

La matriz de rigidez  $k$  se determina como 2 submatrices y se denota por:

$$k = k_n + k_s \quad (5.44)$$

donde:

$k_n$  representa la rigidez por esfuerzos normales,

$k_s$  Rigidez por esfuerzos cortantes.

$$k_n = \frac{E}{9(1+\mu)(1-2\mu)V} |H_{ij}|_{12,12} \quad (5.45)$$

con  $H_{ij} = f(\mu, A_{pqr}^{ij})_{ijm}$

$$k_s = \frac{E}{18(1 + \mu)V} |P_{ij}|_{12,12} \quad (5.46)$$

con  $P_{ij} = f(\mu, A_{pqr}^{ij})_{ijm}$

La matriz de masa del elemento se determina principalmente en función del volumen y de la densidad como:

$$m = \frac{\rho V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

## 5.2 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MÉTODO

### 5.2.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes hemos presentado la teoría general del método de los elementos finitos así como la formulación matemática de los principales elementos que en su conjunto integran el algoritmo del método FEM. En el presente capítulo discutiremos los aspectos concernientes al cálculo computacional del método.

### 5.2.2 ORGANIZACIÓN LÓGICA DEL PROGRAMA

El uso de los métodos clásicos de cálculo es eficiente cuando se analiza estructuras de geometría simple, pero se torna muy tedioso cuando la geometría es complicada, en este caso una alternativa viable es la utilización del método FEM.

Dentro de la estructura de los programas, podemos reconocer tres grandes bloques funcionales necesarios en todo programa FEM (Fig. 6.1):

Pre procesamiento

Procesamiento

Post procesamiento

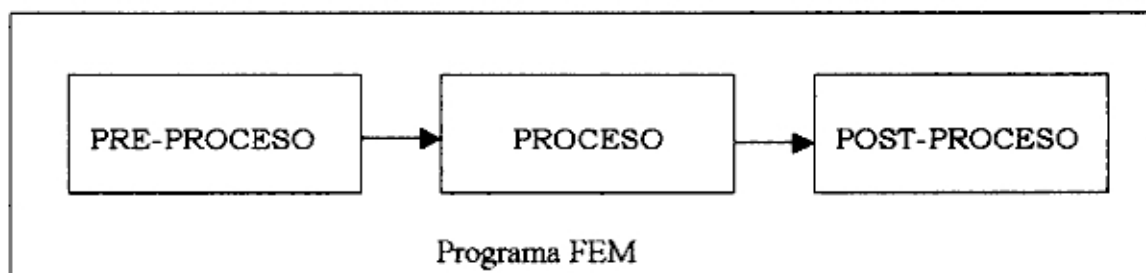


Fig. 6.1 Bloques funcionales de un programa FEM



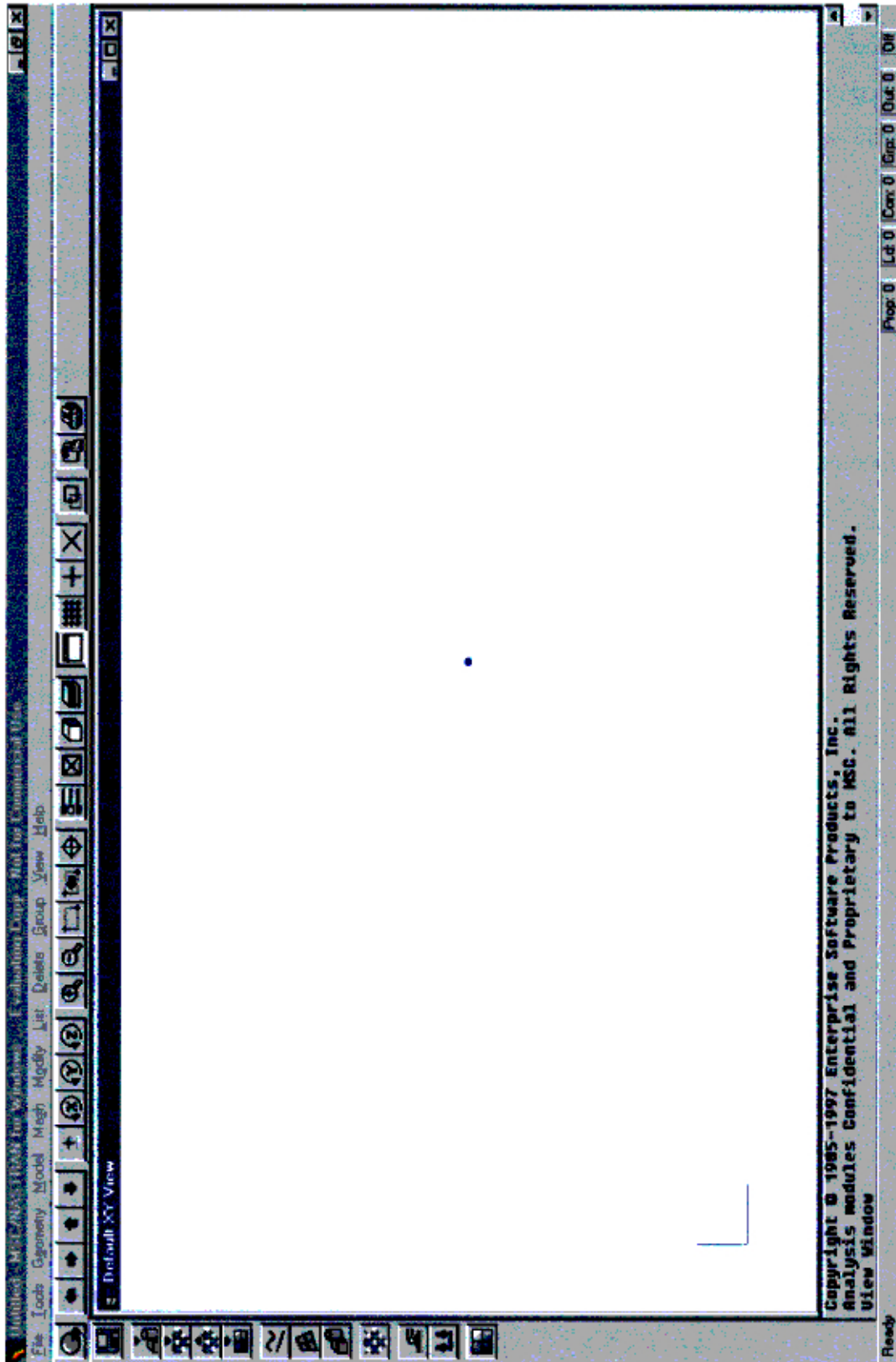


Fig 6.2 Ventana de pre procesamiento y post procesamiento del programa MSC/NASTRAN

### 5.2.3 PRE-PROCESAMIENTO

Un Pre-Procesador es un programa que nos permite definir en forma interactiva el modelo que pensamos analizar, esta fase es considerado la más importante en el cálculo de una estructura por el método de los elementos finitos, y es donde se debe prestar mayor atención debido a los constantes errores que se cometen.

Las principales etapas que conforman el pre-proceso son:

#### **Definición de la geometría del modelo**

La definición de la geometría del modelo es a veces una de las etapas mas complicadas del pre-procesamiento, todo programa FEM posee una sección grafica e interactiva para realizar los modelos, pero cuando se trata de modelos con geometría compleja se recurre a un programa especializado en elaboración de geometrías complicadas para después utilizando mecanismos de interfase exportarlos a la ventana de pre-procesamiento

#### **Definición de las propiedades de los elementos**

Una vez seleccionado nuestro modelo es necesario darles las propiedades estructurales o en general de acuerdo a las necesidades del problema, entre estos tenemos a las propiedades de los materiales de la estructura. En algunos programas esta operación se realiza después de haber hecho la discretización (mallado) de nuestro modelo.

#### **Discretización de la estructura**

En esta etapa la geometría es dividida en pequeños elementos, muchas veces esta operación conocida como el mallado se realiza automáticamente, y posteriormente modificado de acuerdo a las zonas de interés y complejidad de la geometría.

Muchas veces esta etapa es crucial y se necesita de mucha experiencia, ya que el usuario determina el tipo de elemento que va a conformar el modelo, y como ya hemos visto anteriormente, de esto depende la exactitud de los cálculos y como consecuencia de los resultados.

### **Aplicación de las cargas**

La aplicación y la magnitud de la carga es definida de acuerdo al modelo y a los objetivos que queremos encontrar. Es aplicado sobre los nodos o directamente sobre los elementos de la estructura.

### **Definición de las condiciones de borde**

Una correcta definición de las condiciones de borde nos permitirá reducir el número de ecuaciones y como consecuencia menor tiempo de cálculo. Debemos tener presente que nuestro objetivo es obtener el desplazamiento de los nodos independientemente del tipo de análisis que estemos realizando.

## **5.2.4 PROCESAMIENTO**

Después de desarrollar nuestro modelo en un pre procesador ahora debemos someterlo a una serie de subrutinas de análisis al que conoceremos como procesamiento. Todas las etapas del procesamiento se realizan dentro del computador y no es posible interferir durante su desarrollo.

Dentro de las etapas del procesamiento presentes en un programa FEM podemos citar:

### **Generación de las matrices de rigidez**

Se genera la matriz global de rigidez a partir de pequeñas matrices de rigidez de cada uno de los elementos que forman parte de nuestro modelo. A esta operación también se le conoce como ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos, y que implica el equilibrio en la estructura que estamos analizando.

### **Generación y solución del sistema de ecuaciones**

A partir de la matriz de rigidez se genera el sistema general de ecuaciones. La solución del sistema general de ecuaciones se desarrolla por algoritmos matemáticos conocidos incorporados en las diferentes subrutinas del programa FEM.

### **5.2.5 POST-PROCESAMIENTO**

La etapa de post-procesamiento se resume al análisis de los resultados de nuestro modelo (output). Se genera una representación grafica de las deformaciones y de los esfuerzos en el modelo como una escala de colores. Las etapas que conforman un post-procesador son:

#### **Lectura de los resultados**

Generalmente la lectura de los datos se realiza en forma numérica en lenguaje de programación que no es posible visualizar sin la conversión correspondiente.

#### **Visualización de los resultados**

Esta etapa permite una visualización de los resultados de análisis mediante una representación tabular o grafica utilizando para esto una escala de colores, también es posible obtener resultados numéricos y plasmarlos directamente sobre los nodos o elementos del modelo.

#### **Impresión de los resultados**

Una vez que los valores han sido calculados y representados en pantalla, éstos pueden ser impresos en forma tabular como un listado de datos o imprimir la representación grafica de nuestro modelo que tenemos en la pantalla del computador.

### **5.2.6 RELACIÓN ENTRE EL PRE Y POST PROCESAMIENTO**

Actualmente los modelos que se desarrollan a nivel industrial requieren, de una gran cantidad de elementos, esto hace necesario disponer gran capacidad de recursos del computador. Cuando realizamos el modelamiento de una estructura debemos tomar en cuenta los fenómenos que ocurren en ella, ya que de la correcta introducción de datos en el pre-procesador dependerá los resultados que obtengamos en el post-procesador.

La relación de los programas de pre y post procesamiento, toman mayor importancia cuando se desea optimizar el diseño de una estructura, ya que los valores que obtenemos en el post-procesador servirán luego de su respectivo análisis como datos en el pre-procesador

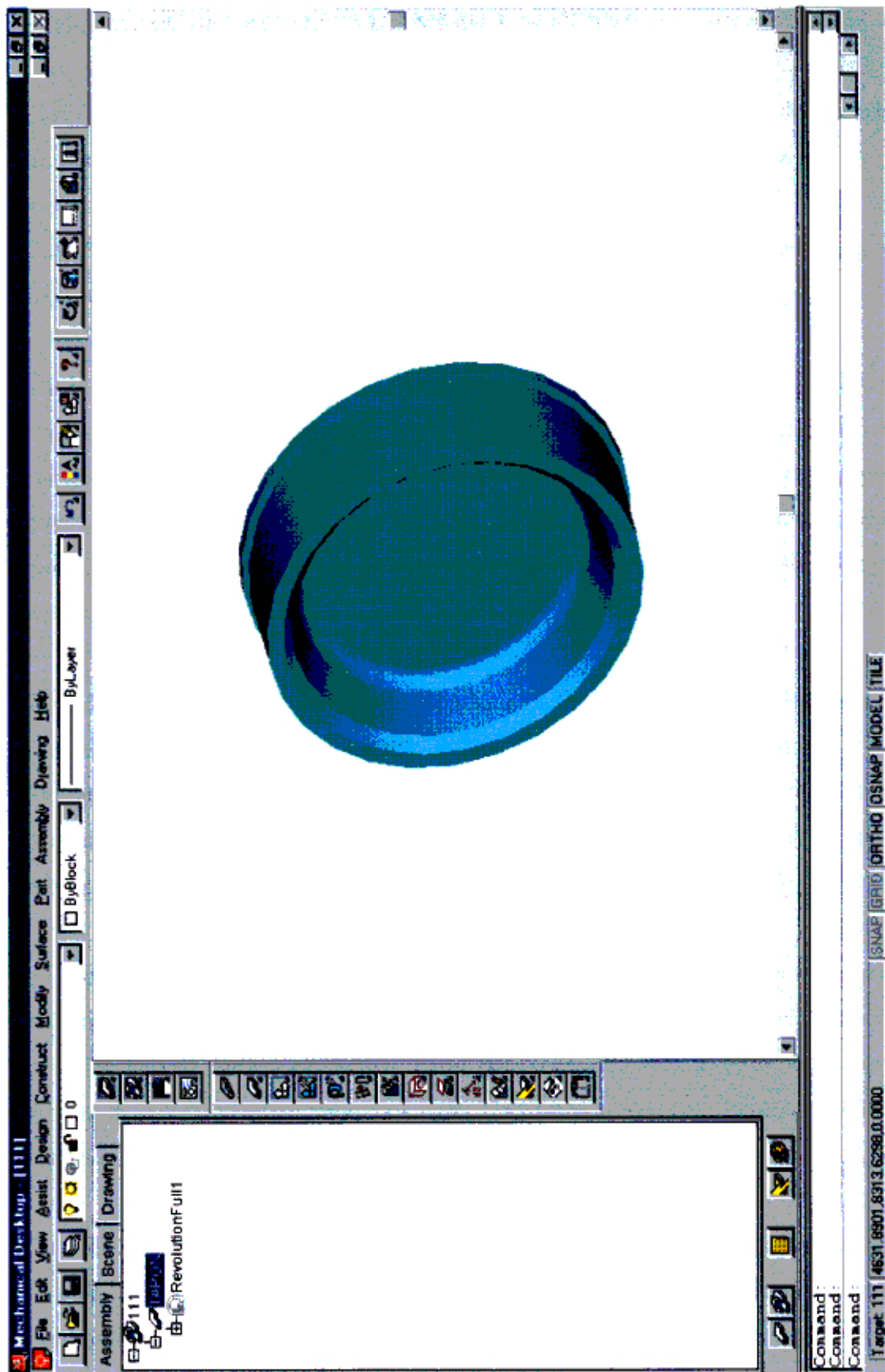


Fig 6.3 Ventana del programa Mechanical Desktop

### **5.2.7 CONSIDERACIONES DE MODELAMIENTO**

El objetivo de un análisis por el método de los elementos finitos es la determinación de los resultados de un modelo bajo la influencia de cargas predeterminadas.

Cuando nosotros modelamos una estructura siempre tenemos en mente que nuestro modelo representa la idealización de un sistema físico.

En la creación de un modelo debemos considerar la exactitud y la eficiencia del computador. Por eso generalmente primero se desarrolla un modelo simple que dará resultados aproximados, estos resultados combinados con el análisis ingenieril del comportamiento del sistema nos dará un camino para definir un nuevo modelo mas completo con un mallado más adecuado es decir las dimensiones de los elementos en las zonas de mayor interés.

Cuando los modelos son demasiado grandes o de formas irregulares se hace necesario la utilización de programas específicos en generación de geometrías como el Mechanical Desktop y otro disponibles en el mercado y posteriormente exportarlos al pre-procesador del MSC/NASTRAN, esta alternativa facilita y agiliza el proceso de modelamiento y consecuentemente de análisis de la estructura

El modelamiento de estructuras con simetría axial o en un plano permiten reducir el volumen total de trabajo de modelamiento, ya que solamente se puede modelar una parte de la estructura y especificar en el pre-procesador que se trata de una estructura simétrica, de esta manera habremos reducido considerablemente los costos relacionados a su preparación y análisis.

La utilización del tipo de elemento durante el modelamiento de la estructura dependerá del tipo de análisis que queremos realizar y de las condiciones del modelo, la densidad del mallado dependerá del grado de aproximación de los valores que quisiéramos obtener en una parte específica de la estructura.

El algoritmo numérico utilizado en las diferentes fases de solución del sistema de ecuaciones representa uno de los factores más importantes en el cálculo de una estructura, muchas veces de esta depende la rapidez y la precisión de los resultados.

## 6. PROBLEMAS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL COHETE

En la actualidad, el análisis estructural juega un papel importante en cualquier proyecto de esta naturaleza, por tanto, la ciencia busca dar diferentes soluciones para fenómenos internos que son tan complejos de reproducirlos y plasmarlos matemáticamente.

Una de estas soluciones son la utilización de programas especializados en simulación basados en métodos numéricos con diferentes algoritmos de solución como son los Elementos Finitos, con los cuales esta siendo posible reproducir aceptablemente los fenómenos internos de la estructura.

Una vez elaborado el modelo en el preprocesador del MSC/NASTRAN es posible realizar diferentes cálculos a diferentes condiciones, y obtener resultados en menor tiempo y en forma económica con respecto a los métodos clásicos utilizados.

En este capítulo desarrollaremos algunos problemas de análisis de la estructura de un prototipo de cohete por el método de los elementos finitos que son característicos durante el desarrollo de un proyecto industrial enfatizando el procedimiento de análisis. El objetivo es el de conocer las deformaciones que se originan en la estructura y a partir de estos valores determinar los valores que nos interesen.



## 6.1 ANÁLISIS DE LA CÁMARA DE COMBUSTIÓN POR ACCIÓN DE LA PRESIÓN INTERNA

La cámara de combustión es la parte estructural más importante del cohete debido a que soporta los más grandes esfuerzos internos, aerodinámicos, inerciales y térmicos. Esto a su vez cumple la función de soporte de todos los componentes del cohete como las aletas ojiva etc.

Debido a esto es muy importante conocer los esfuerzos totales que experimenta dicha estructura y poder determinar su resistencia y operatividad durante el vuelo.

Por tal motivo realizaremos un análisis por el método de los elementos finitos, con el programa de simulación MSC/NASTRAN.

Este método nos permite obtener los resultados mucho más precisos que el cálculo por el método clásico, por otra parte nos permite realizar un análisis considerando las particularidades geométricas del diseño.

El tipo de análisis que vamos a desarrollar es estático lineal que es el tipo más básico de análisis. El término "lineal" enfatiza la dependencia lineal de deformación y "estática" por que las fuerzas no varían con tiempo, o que la variación de tiempo es insignificante y puede ignorarse.

La ecuación del análisis estática es:

$$[P] = [K] \{U\}$$

donde:

- $P$  es el vector de fuerzas aplicadas
- $K$  es la matriz de rigidez de sistema
- $U$  es el vector de desplazamientos

La matriz de rigidez de sistema es generada automáticamente por MSC/NASTRAN, basado en la geometría y las propiedades del material y de los elementos.

El vector de desplazamientos es calculado por el MSC/NASTRAN, posteriormente se procede al cálculo las tensiones, la fuerza de reacción, y otras que nos interesen.

### **6.1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

El presente trabajo comprende un análisis estructural de la cámara de combustión de un motor-cohete bajo condiciones de cargas internas, es decir la presión aplicada sobre la superficie interna de la estructura de la cámara de combustión.

Como resultado del análisis obtenemos valores numéricos de las tensiones existentes en la estructura. Gracias a estos resultados podemos formular las observaciones y elaborar las recomendaciones necesarias para su posterior aceptación.

En los cohetes de combustible sólido el calculo se realiza principalmente por la presión interna, en estos tipos de cohetes las fuerzas aerodinámicas son pequeñas en comparación con las presiones internas de la cámara de combustión.

### **GEOMETRÍA**

La cámara de combustión presenta una geometría cilíndrica simétrica con respecto al eje longitudinal, debido a la simetría del modelo y a la simetría de las cargas aplicadas se desarrollo el modelo utilizando elementos axisimetricos cuyas propiedades son semejantes a los elementos planos descritos anteriormente.

Esta propiedad permite reducir notablemente el tiempo de modelamiento y de análisis.

### **MATERIAL**

El material utilizado en la cámara de combustión es un acero de alta calidad, Para nuestro análisis necesitamos las características mecánicas del material.

Modulo de elasticidad:  $E = 210000 \text{ MPa}$

Densidad:  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Modulo de Poisson:  $\mu = 0.3$

### **PRESIÓN INTERNA**

Anteriormente se ha obtenido una presión de 120 Atmósferas, para nuestro análisis hemos utilizado la presión de calculo. Para obtener la presión de calculo se utilizo la fórmula presentada en el capítulo 4:

$$P = P_o K_1 K_2 f$$

donde:

$P$  presión de cálculo

$P_o$  presión nominal en la cámara de combustión

$K_1$  coeficiente dependiente de la variación de la presión en la cámara de combustión

$K_2$  coeficiente que considera el incremento de presión durante el encendido del motor

$f$  coeficiente de seguridad

Los valores tomados son:

$$P_o = 120 \text{ Atm.} \quad K_1 = 1.1 \quad K_2 = 1.4 \quad f = 1.3$$

Por consiguiente obtenemos un valor de presión igual:

$$P = 240 \text{ Atm.}$$

#### **6.1.2 DESARROLLO DEL MODELO**

Para el modelamiento se utilizo elementos axisimetricos que tienen propiedades semejantes a los elementos planos, dentro de esta clasificación se tomo elementos triangulares por tener mayor convergencia en las estructuras de perfil complicado [12].

Para realizar el análisis estructural por el método de los elementos finitos necesitamos elaborar el modelo de simulación que representa las características físicas de la estructura real.

Hemos dividido nuestra estructura en 4 partes y analizarlo independientemente, como son:

- 1 Tapón
- 2 Cámara delantera
- 3 Cámara posterior
- 4 Tobera

El modelamiento del tapón se realizó con 5979 elementos resultando 12260 nodos

La cámara delantera y la cámara posterior se modelaron con 8226 y 8014 elementos y 18433 y 18003 nodos respectivamente.

La tobera se modeló con un total de 3095 elementos y 6475 nodos

La geometría bidimensional de cada uno de estas partes independientes fueron elaborados en el programa AutoCad por presentar mejores ventajas de importación y exportación de archivos.

### **6.1.3 ANALISIS DE LOS RESULTADOS**

Por tener una geometría circular y simétrica hemos realizado el modelamiento tomando en cuenta esta propiedad, esto nos permite simplificar el modelo y como consecuencia disminuir los recursos del sistema.

Para el análisis hemos utilizado elementos triangulares que gracias a su gran convergencia en los modelos irregulares y complicados nos brinda una mejor aproximación con el valor teórico.

Durante el proceso de simulación con el programa FEM de simulación MSC/NASTRAN se utilizó el módulo "lineal statics"

De los valores obtenidos se observa que la cámara de combustión puede soportar valores de presión hasta 240 Atm. Considerando las pérdidas de las propiedades mecánicas del material.

Como medida de verificación se recomienda realizar una prueba hidrostática de la cámara de combustión con el objetivo de comprobar los valores experimentales con el de simulación.

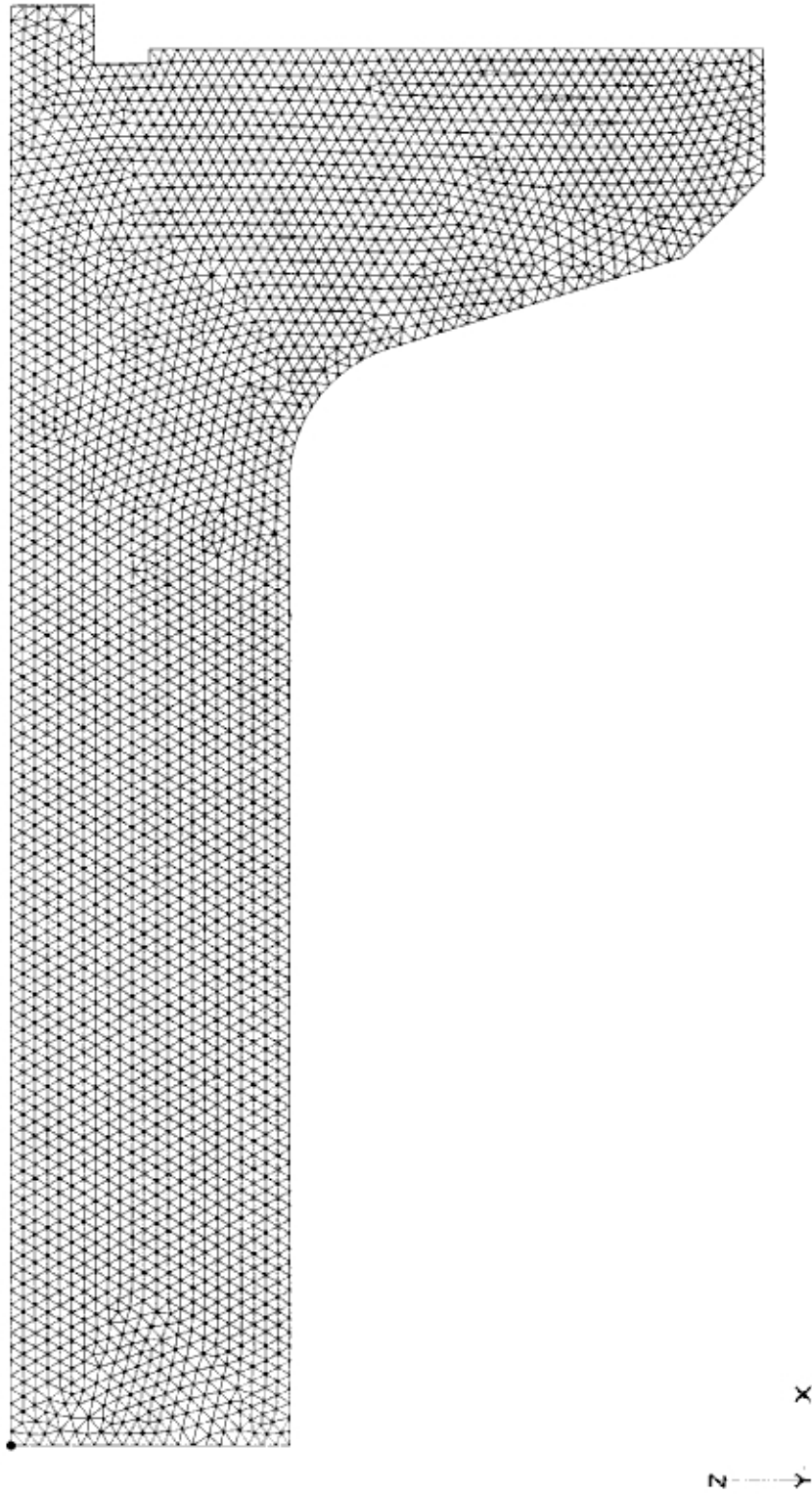


Fig. 6.1 Mallado del Tapón

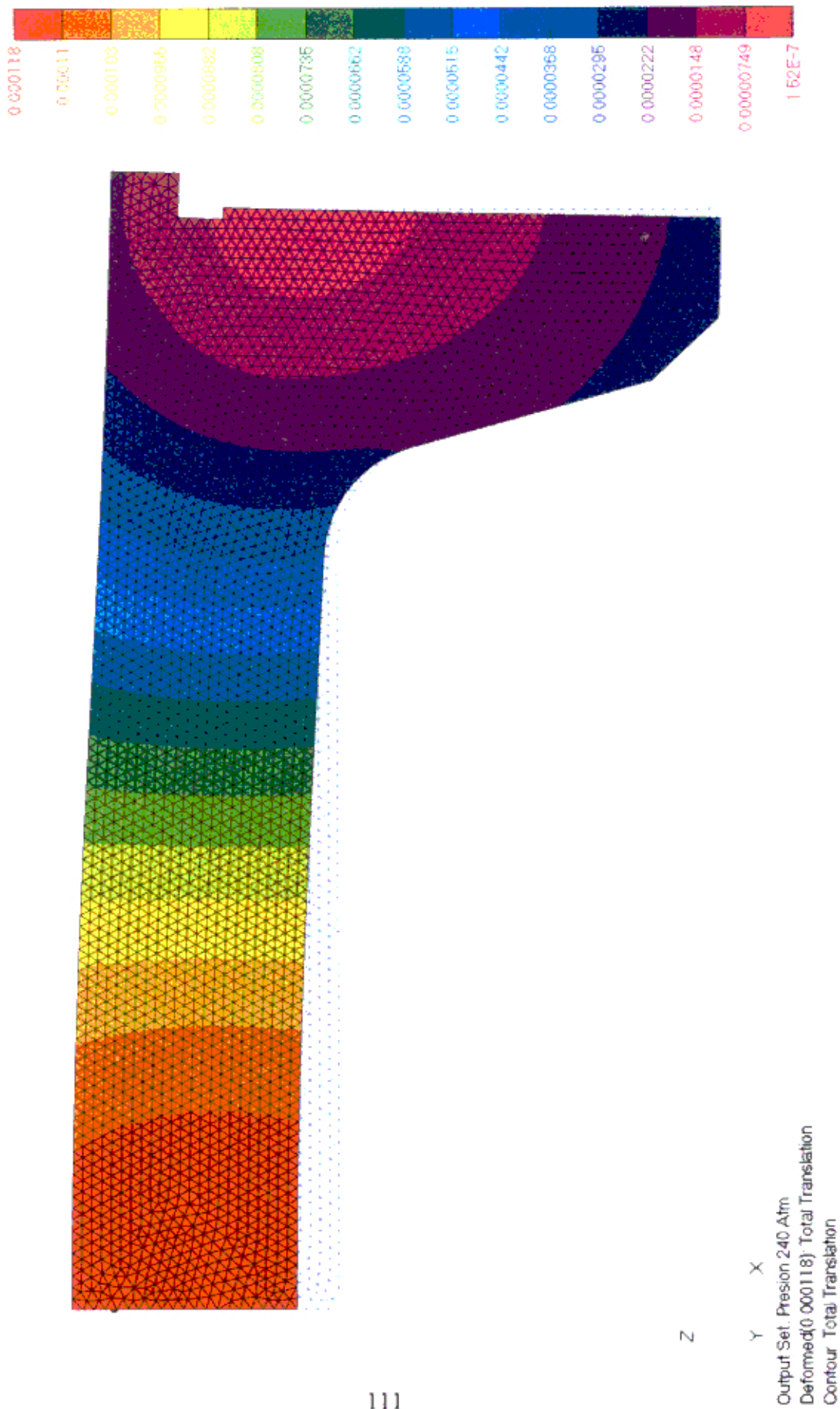


Fig. 6.2 Deformación total del Tapón

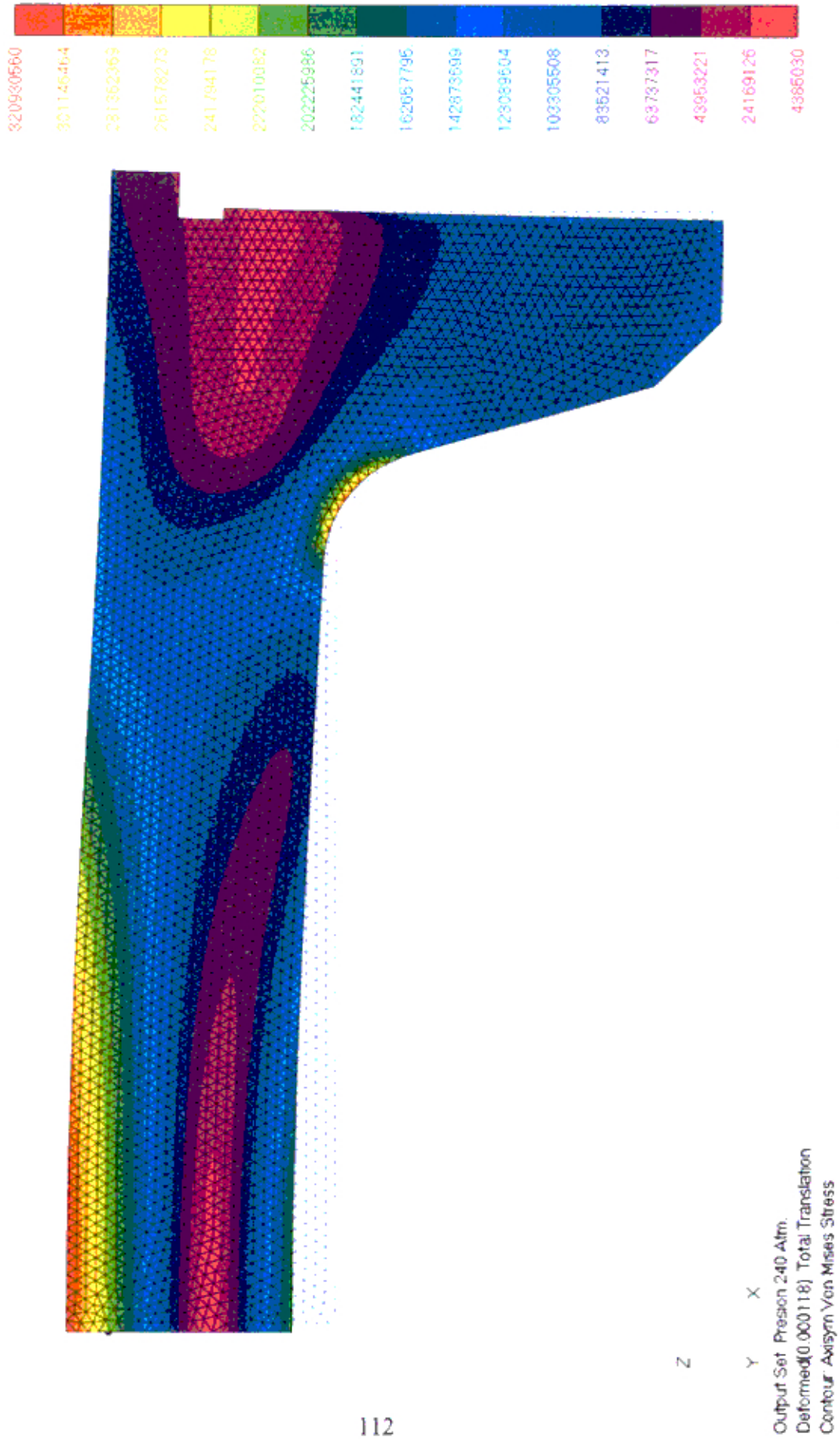


Fig. 6.3 Tensiones VonMises del Tapón



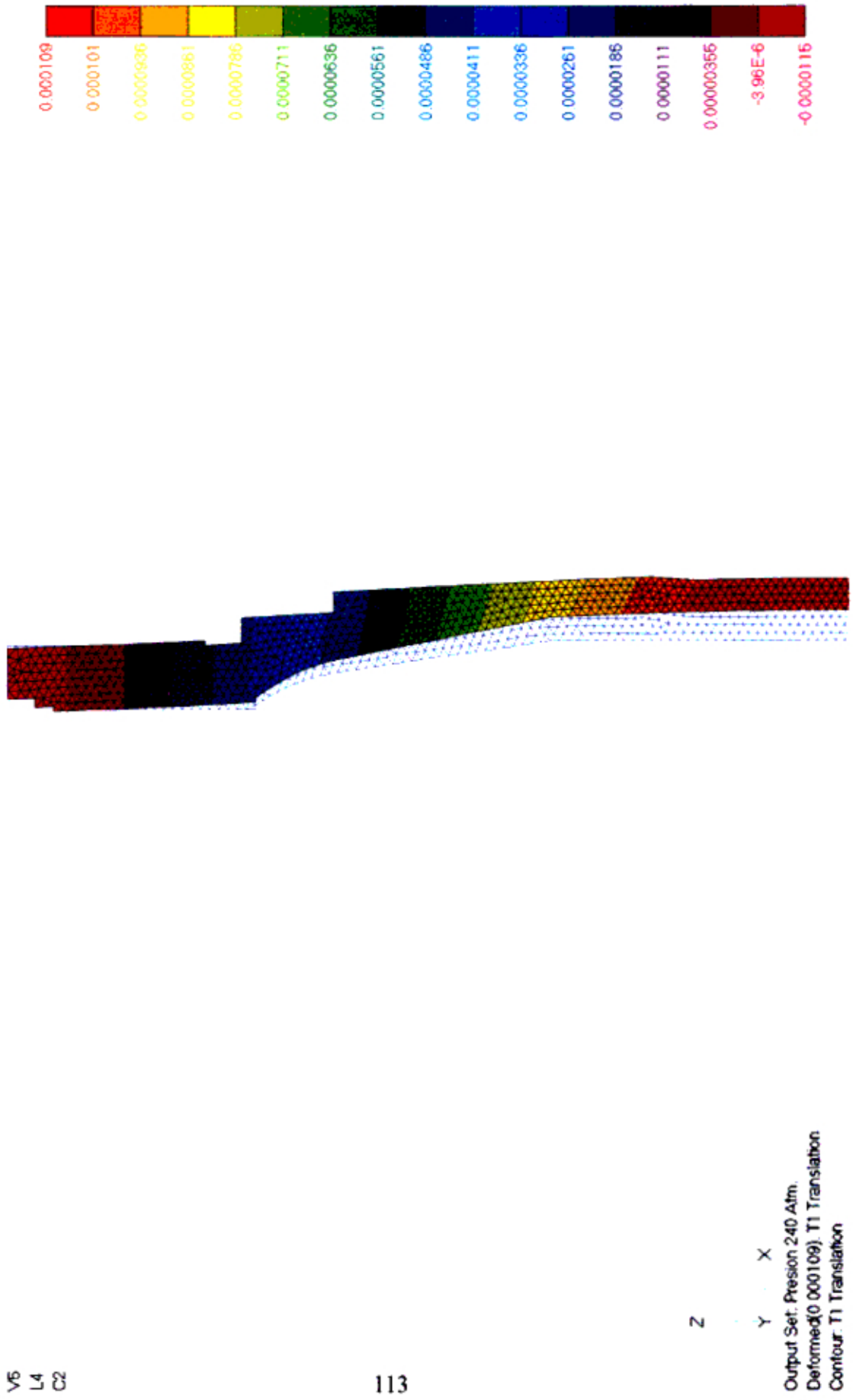


Fig. 6.4 Deformación radial de la parte delantera de la cámara de Combustión Delantera

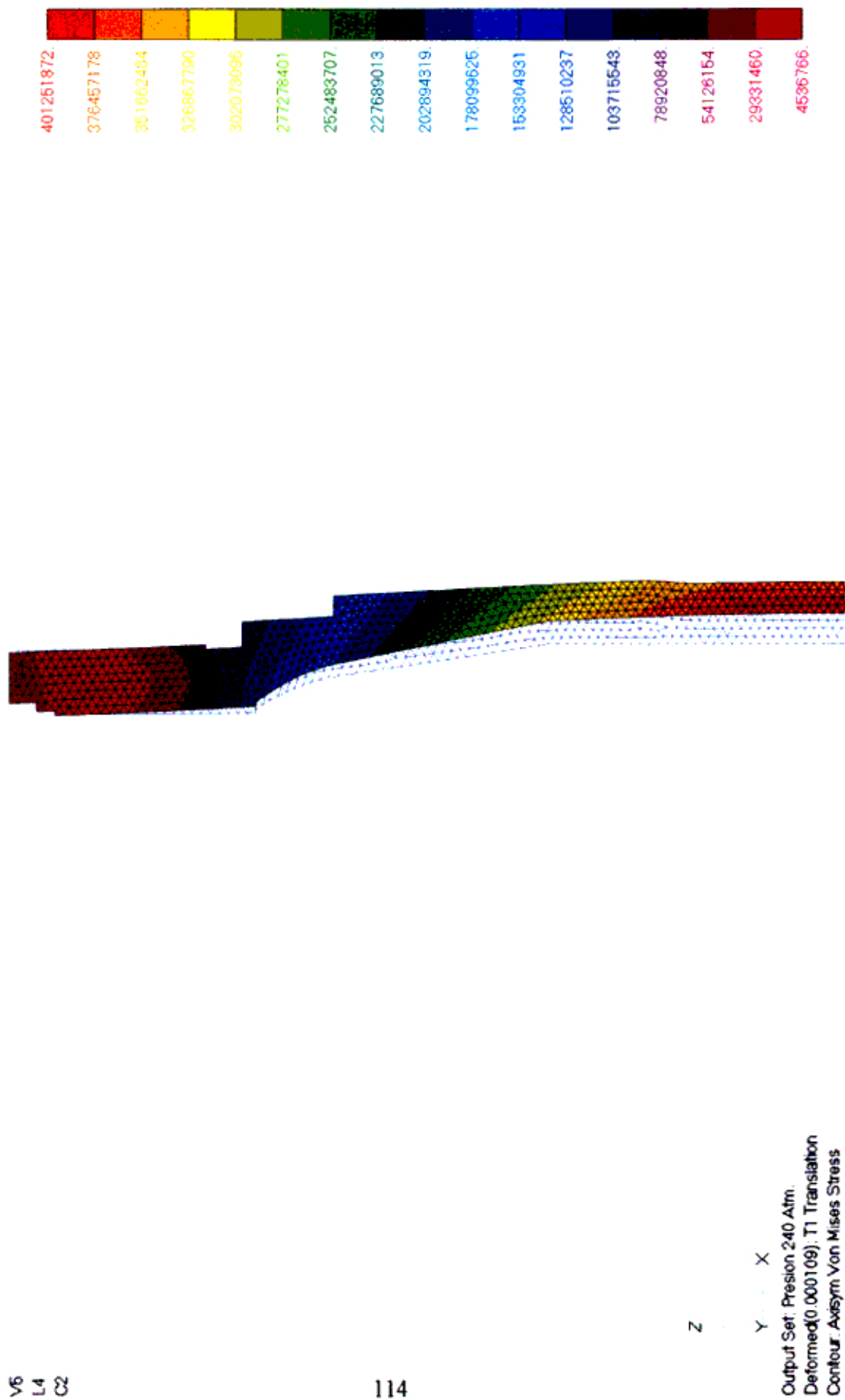


Fig. 6.5 Tensiones VonMises de la parte delantera de la cámara de Combustión Delantera

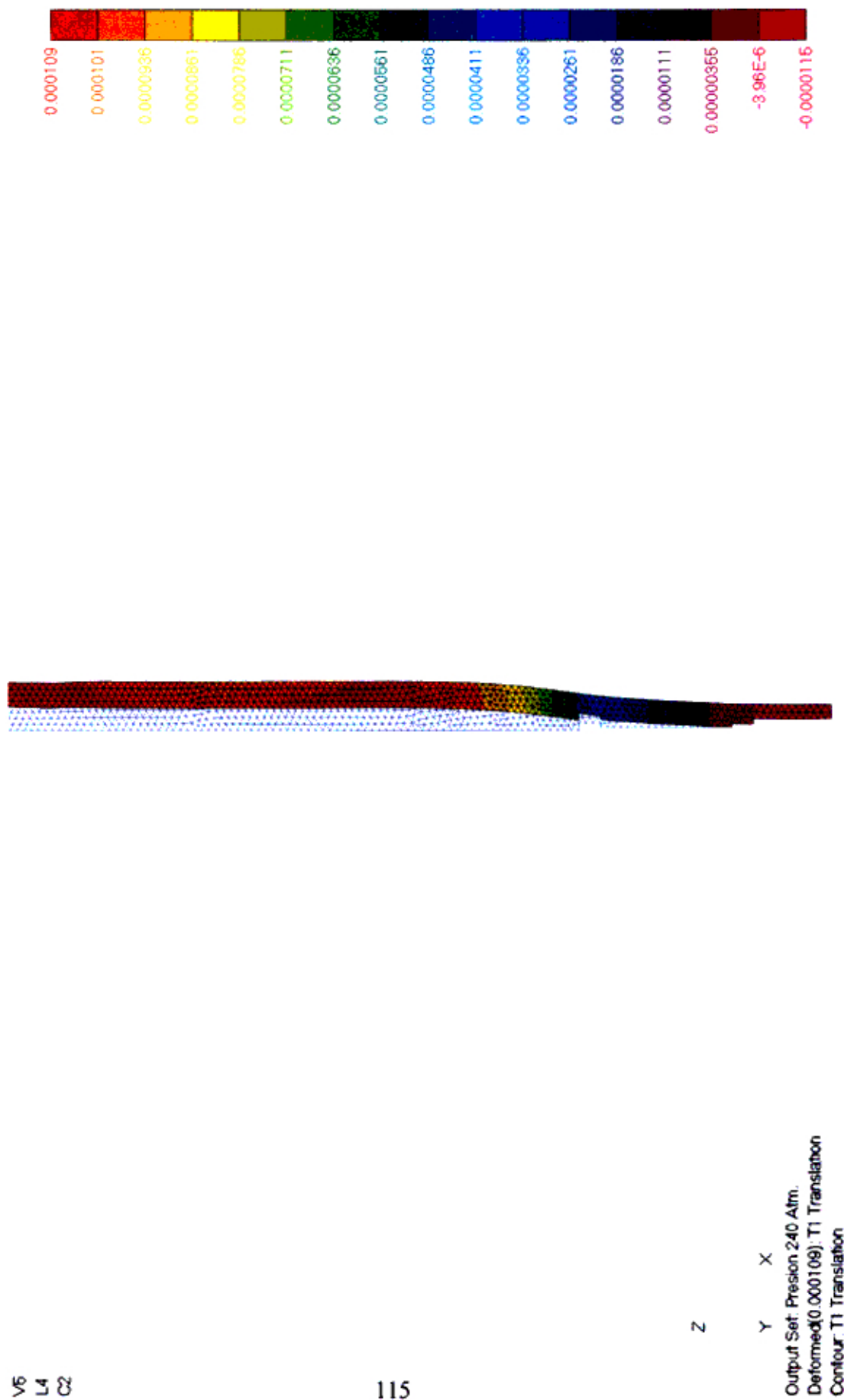


Fig. 6.6 Deformación radial de la parte posterior de la cámara de Combustión Delantera



Fig. 6.7 Tensiones VonMises de la parte posterior de la cámara de Combustión Delantera

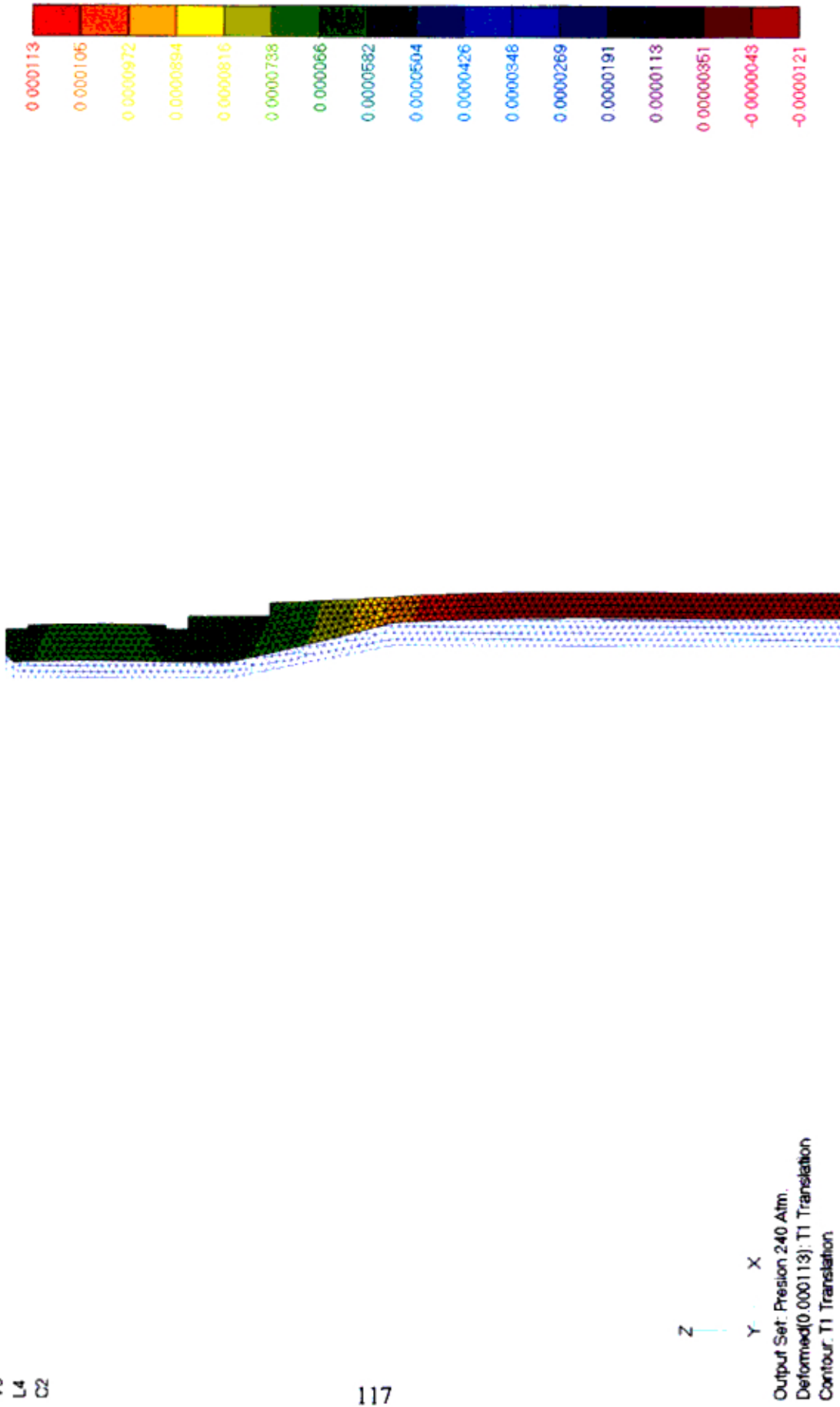


Fig. 6.8 Deformación radial de la parte delantera de la cámara de Combustión Posterior

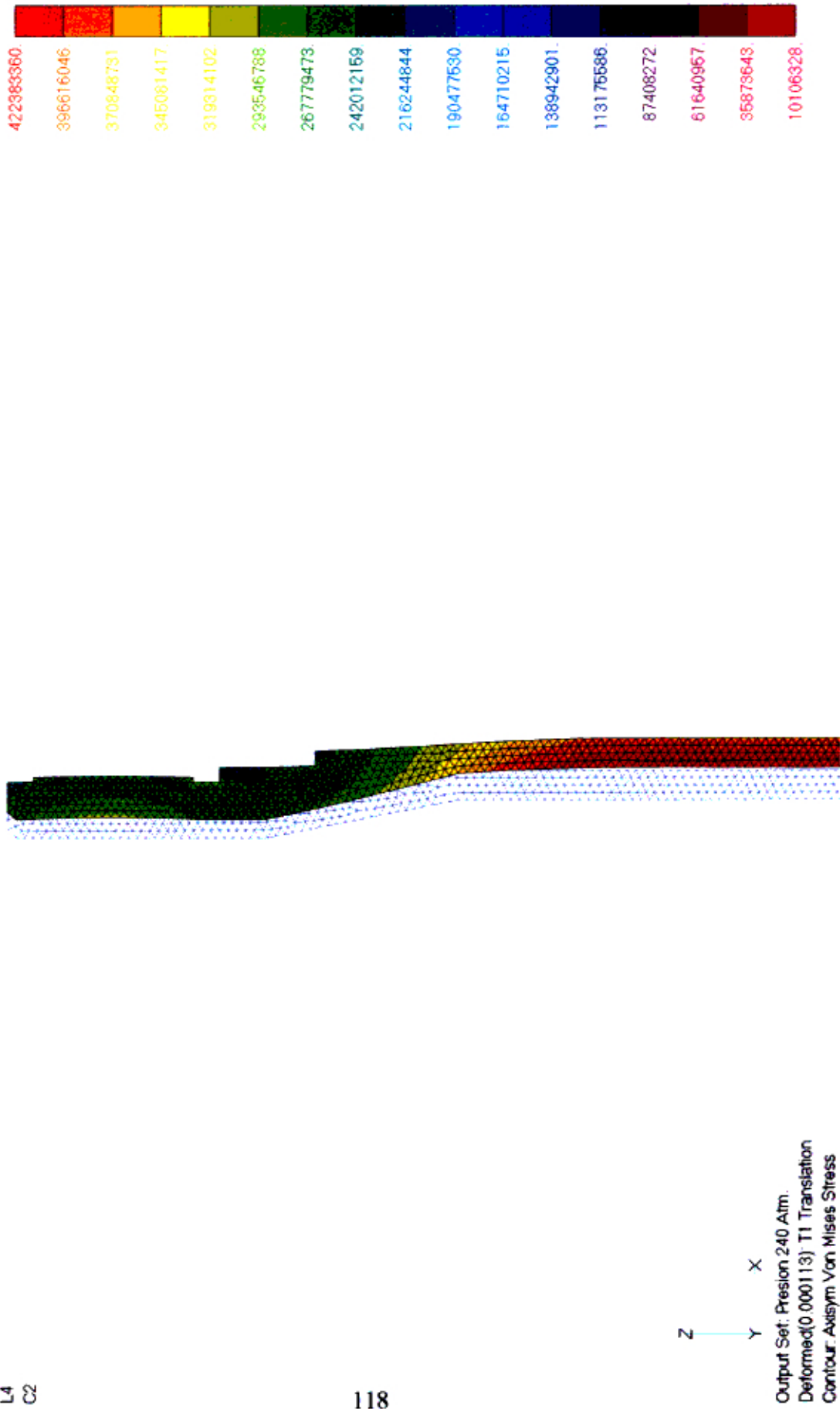


Fig. 6.9 Tensiones VonMises de la parte delantera de la cámara de Combustión Posterior

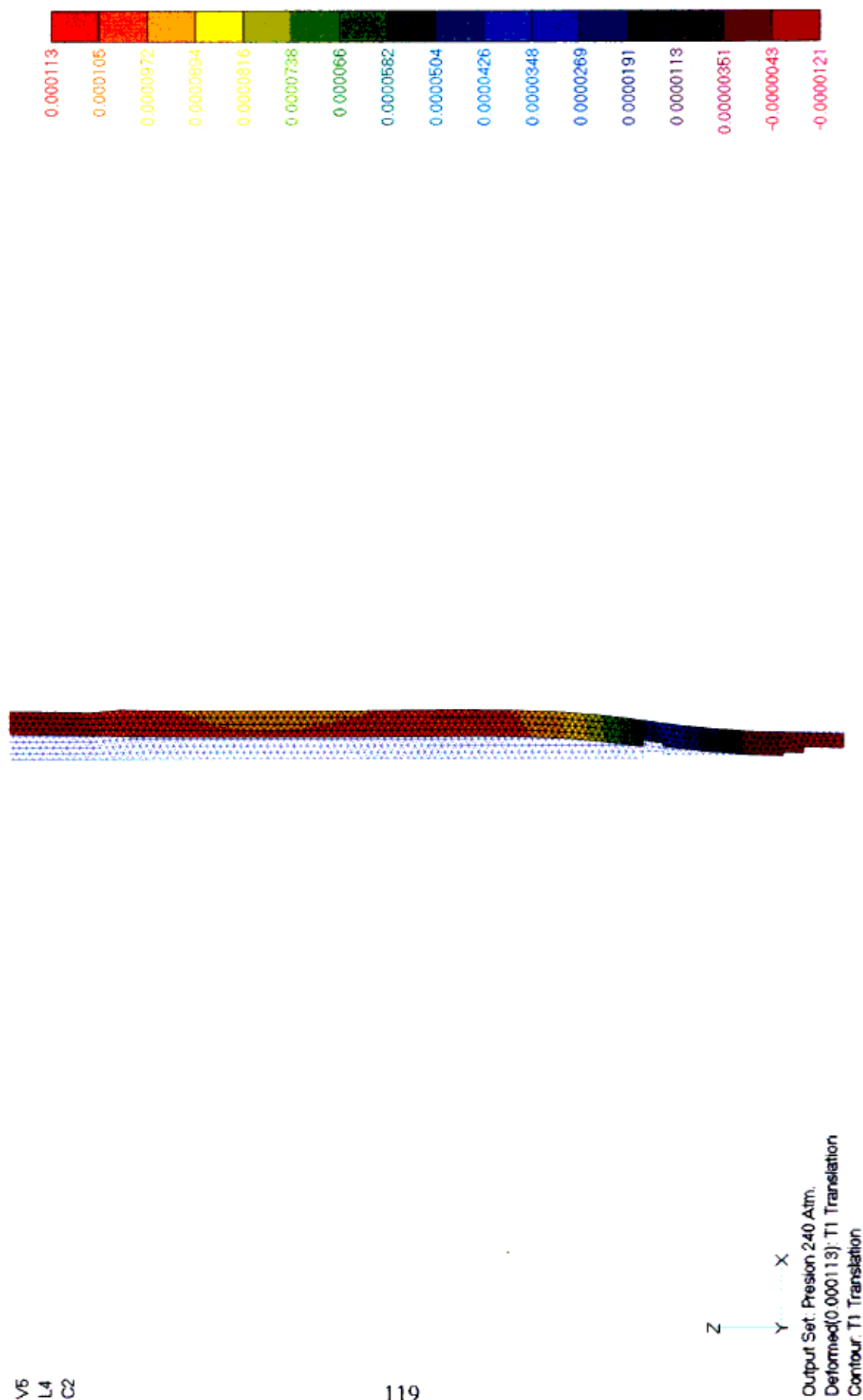


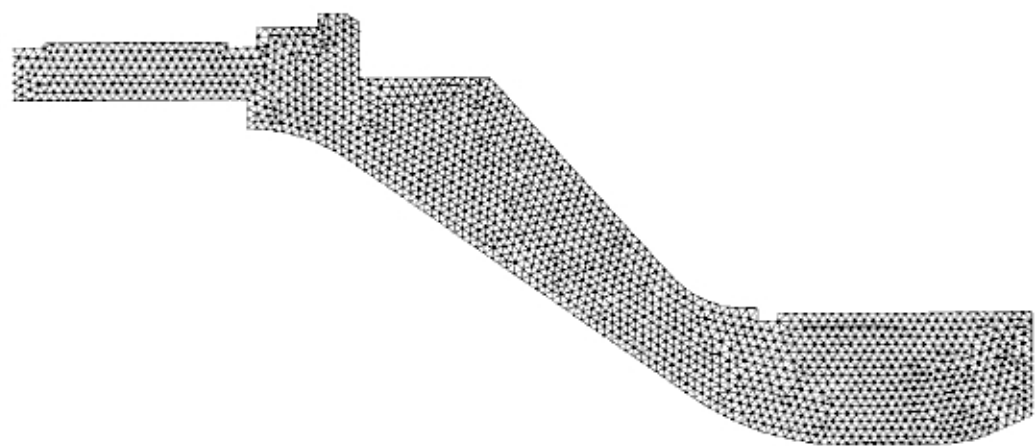
Fig. 6.10 Deformación radial de la parte posterior de la cámara de Combustión Posterior

V6  
L4  
C2



Fig. 6.11 Tensiones VonMises de la parte posterior de la cámara de Combustión Posterior





Z  
Y  
X

Fig. 6.12 Mallado de la parte convergente de la tobera

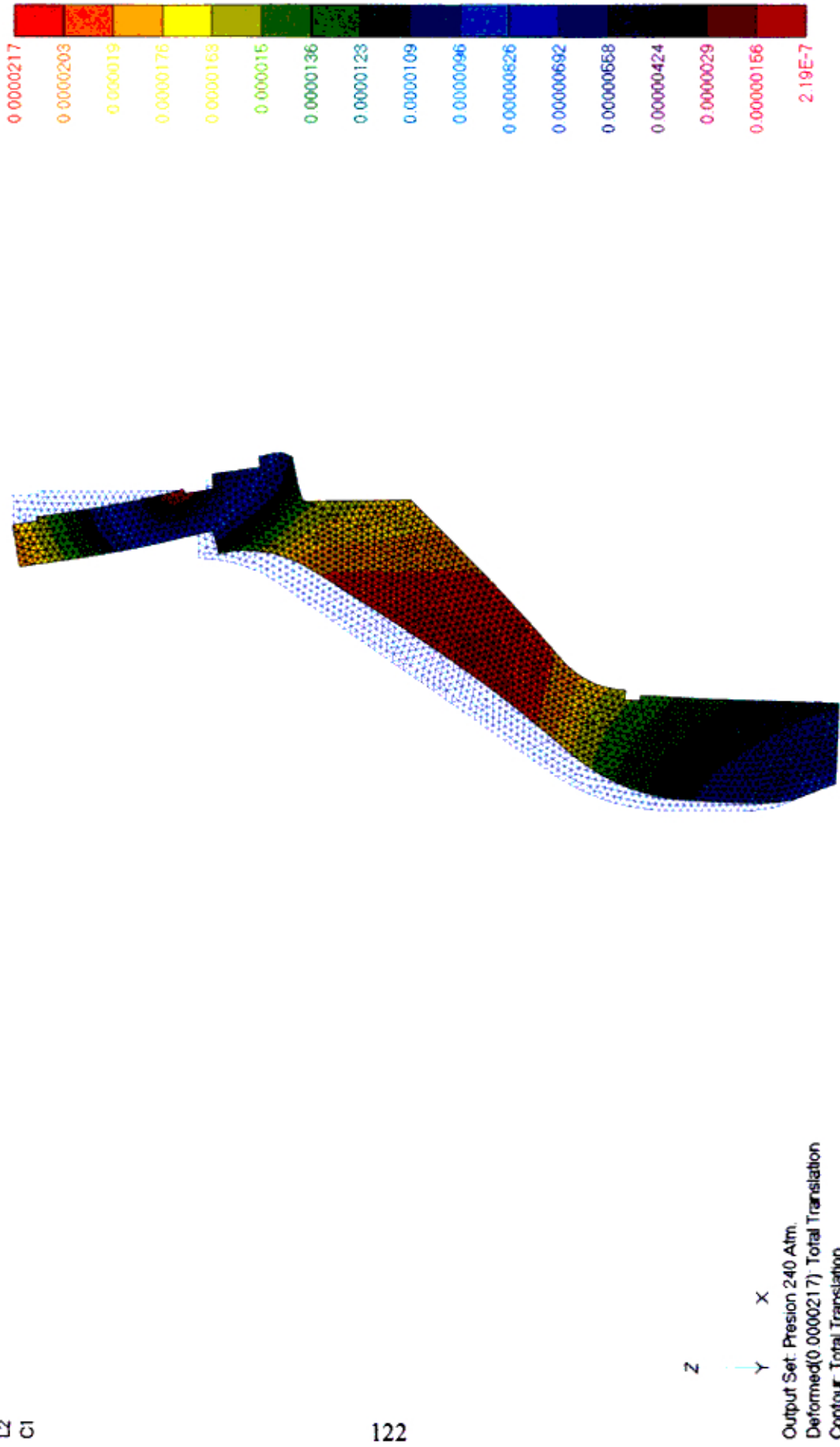


Fig. 6.13 Deformación total de la parte convergente de la tobera



Fig. 6.14 Tensiones VonMises de la parte convergente de la tobera

## **6.2 ANÁLISIS DE UN SÓLIDO DE GEOMETRÍA COMPLICADA UTILIZANDO ELEMENTOS TETRAÉDRICOS**

Ahora mostraremos el uso más avanzado del método de los elementos finitos, ilustrando en forma práctica cómo la ingeniería puede aprovechar esta técnica para el análisis de un sólido de geometría complicada

El problema está referido a un elemento del cohete destinada a sostener el propelente dentro de la cámara de combustión por acción de las fuerzas del propelente por acción del factor de carga que previamente hemos calculado.

Para el análisis usaremos elementos tetraédricos (sólido tridimensional). Esto nos permitirá mostrar la respuesta simulada en términos de esfuerzo y deformación de nuestro elemento a las cargas que pensamos aplicar.

### **6.2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

Para afrontar el problema del cálculo estructural, en este caso mostramos el comportamiento de un elemento estructural del cohete de geometría complicada que soporta fuerzas distribuidas.

El objetivo es observar su comportamiento y garantizar la rigidez necesaria para evitar las deformaciones excesivas por los efectos de las cargas aplicadas

La fuerza que genera el propelente delantero sobre la estructura por acción del factor de carga equivalente a 36 g's es  $F = 3600$  N; el área de aplicación de la carga es igual a  $A = 0.0035989$  m<sup>2</sup> por lo tanto la fuerza distribuida será aproximadamente de 10e6 Pa.

### **6.2.2 DESARROLLO DEL MODELO**

Dada la complejidad de sus formas geométricas, para el desarrollo del modelo, hemos usado el programa Mechanical Desktop, que permite realizar la geometría del modelo de una manera eficiente y mucho más amigable.

Utilizando las herramientas de interfase y exportación de datos lo hemos exportado al pre-procesador del programa MSC/NASTRAN.

Entrando en el detalle diremos que a diferencia de MSC/NASTRAN, en el Mechanical Desktop el modelo es desarrollado o dibujado interactivamente y no es necesario escribir ningún archivo con los datos de modelo.

Para la elaboración del modelo hemos utilizado elementos tetraédricos

En las figuras siguientes mostramos el modelo final utilizado:

### **6.2.3 ANALISIS DE LOS RESULTADOS**

El análisis de los resultados se realiza en el ambiente de post-procesamiento del programa MSC/NASTRAN la idea de observar cuál es la distribución de los esfuerzos internos en la estructura e identificar cuales son los puntos con máxima deformación y máximo esfuerzo,

Como se puede observar de los resultados la deformación se hace mas pronunciada en la parte central de la geometria, que es justamente lo que esperábamos .

Las magnitudes de tensión obtenidas nos muestran que el elemento puede soportar dicha carga aplicada.

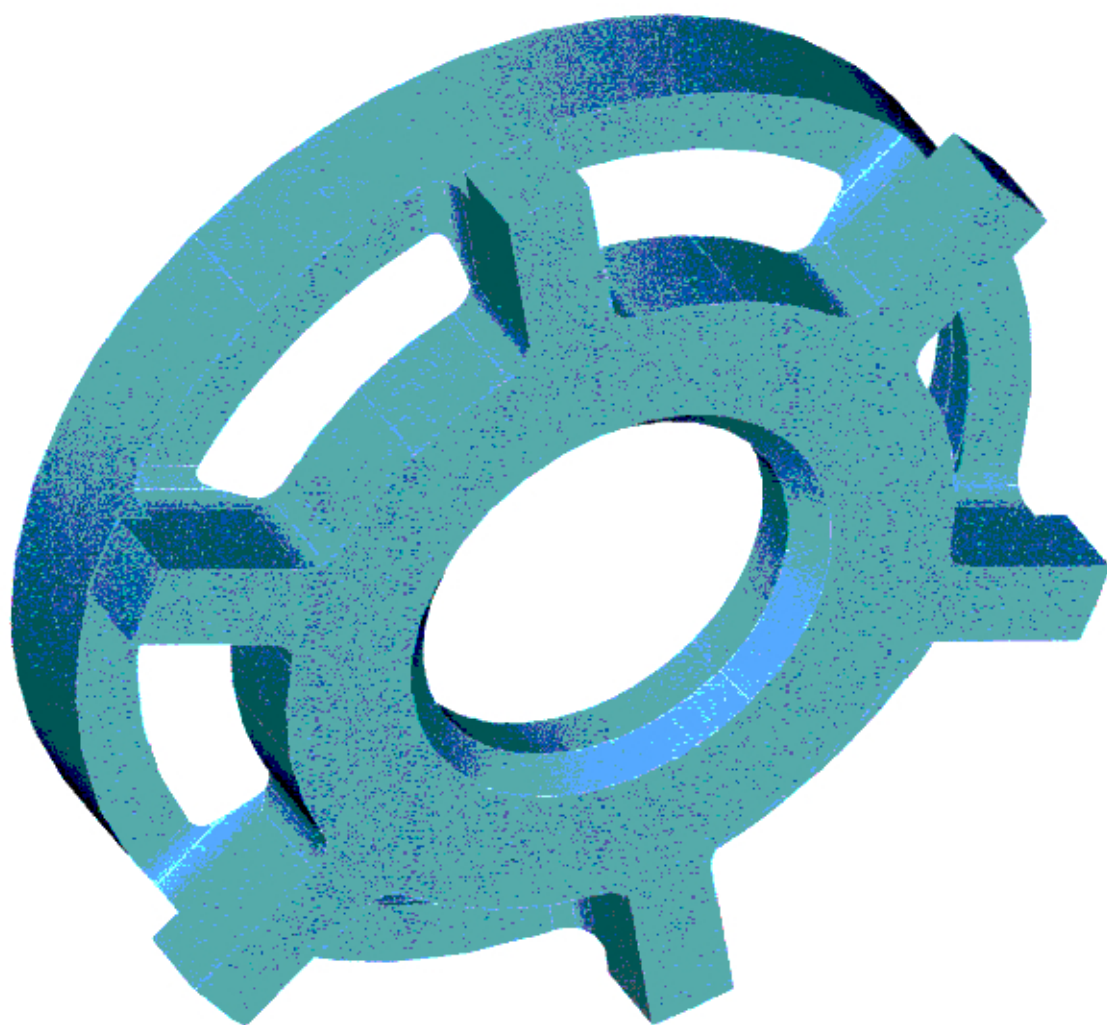


Fig. 6.15 Geometría desarrollada en Mechanical Desktop

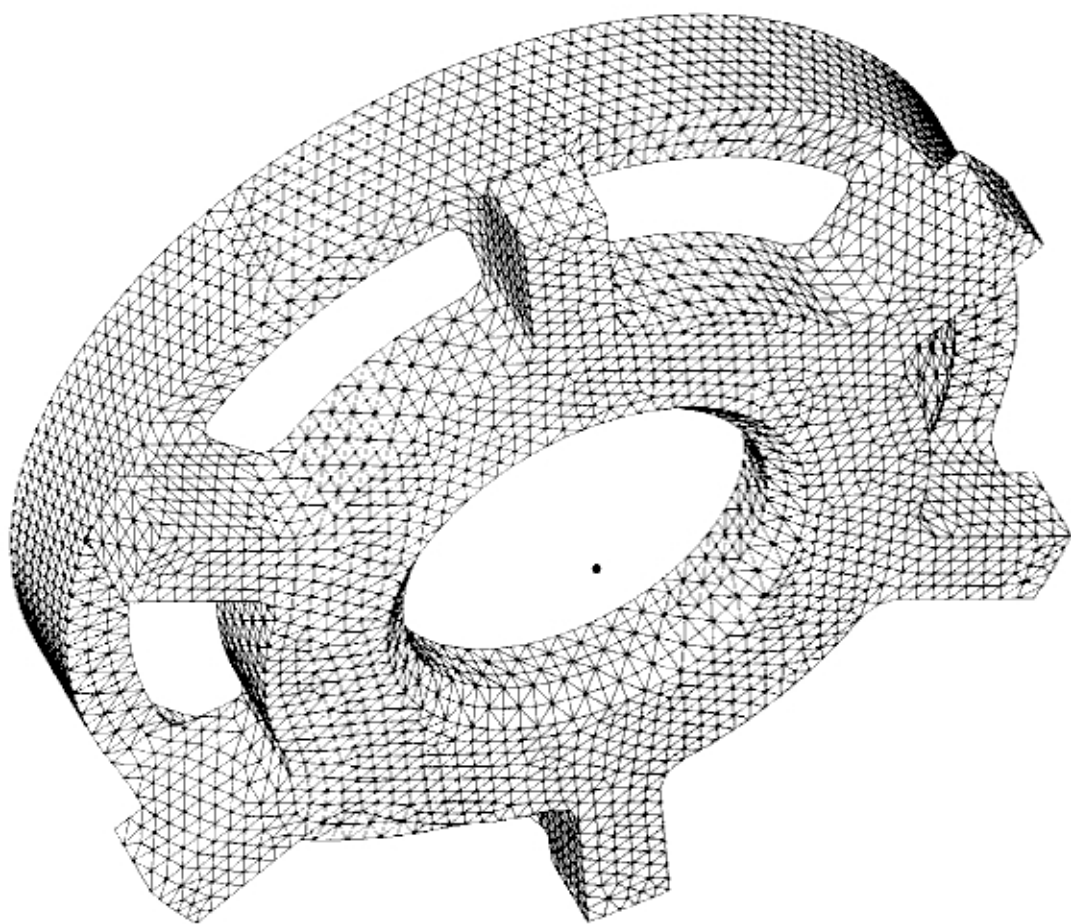


Fig. 6.16 Mallado de la geometría utilizando elementos tetraédricos (vista anterior)

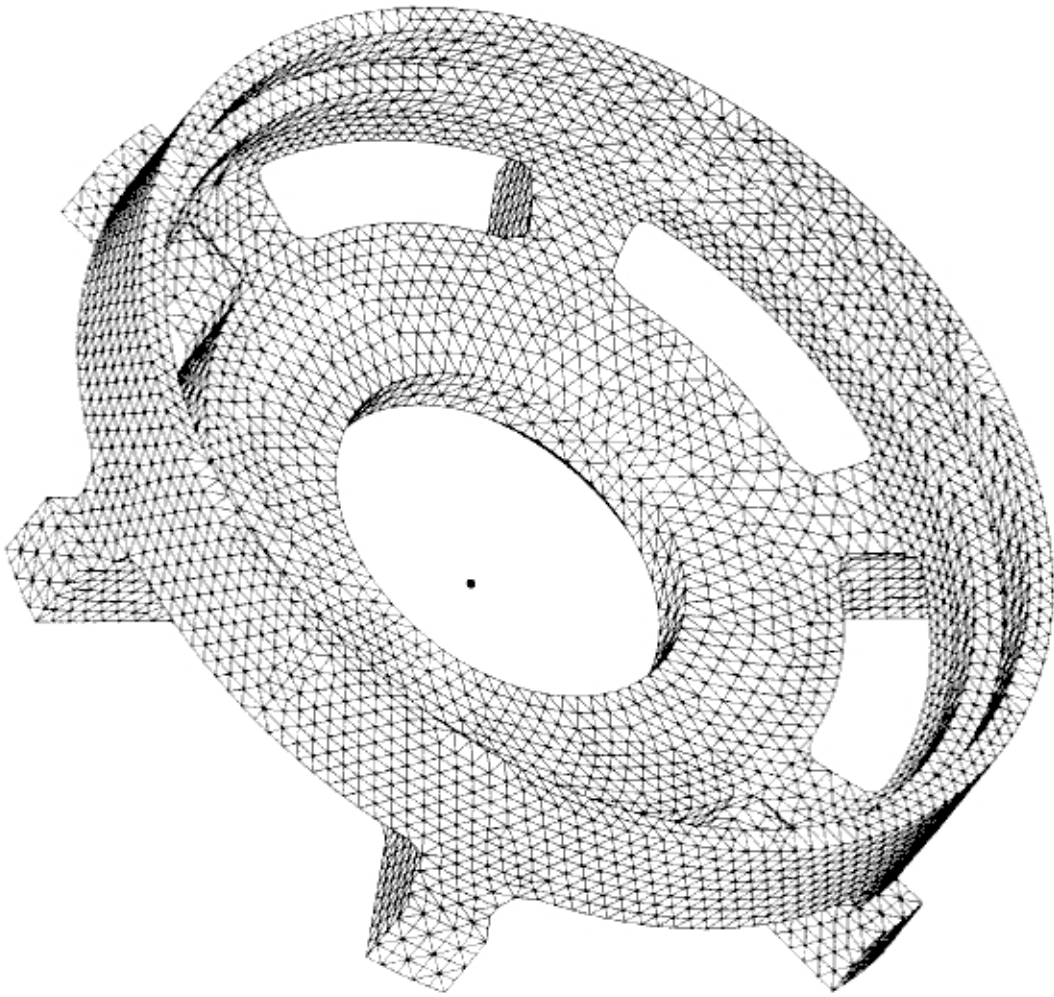


Fig. 6.17 Mallado de la geometría utilizando elementos tetraédricos (vista posterior)



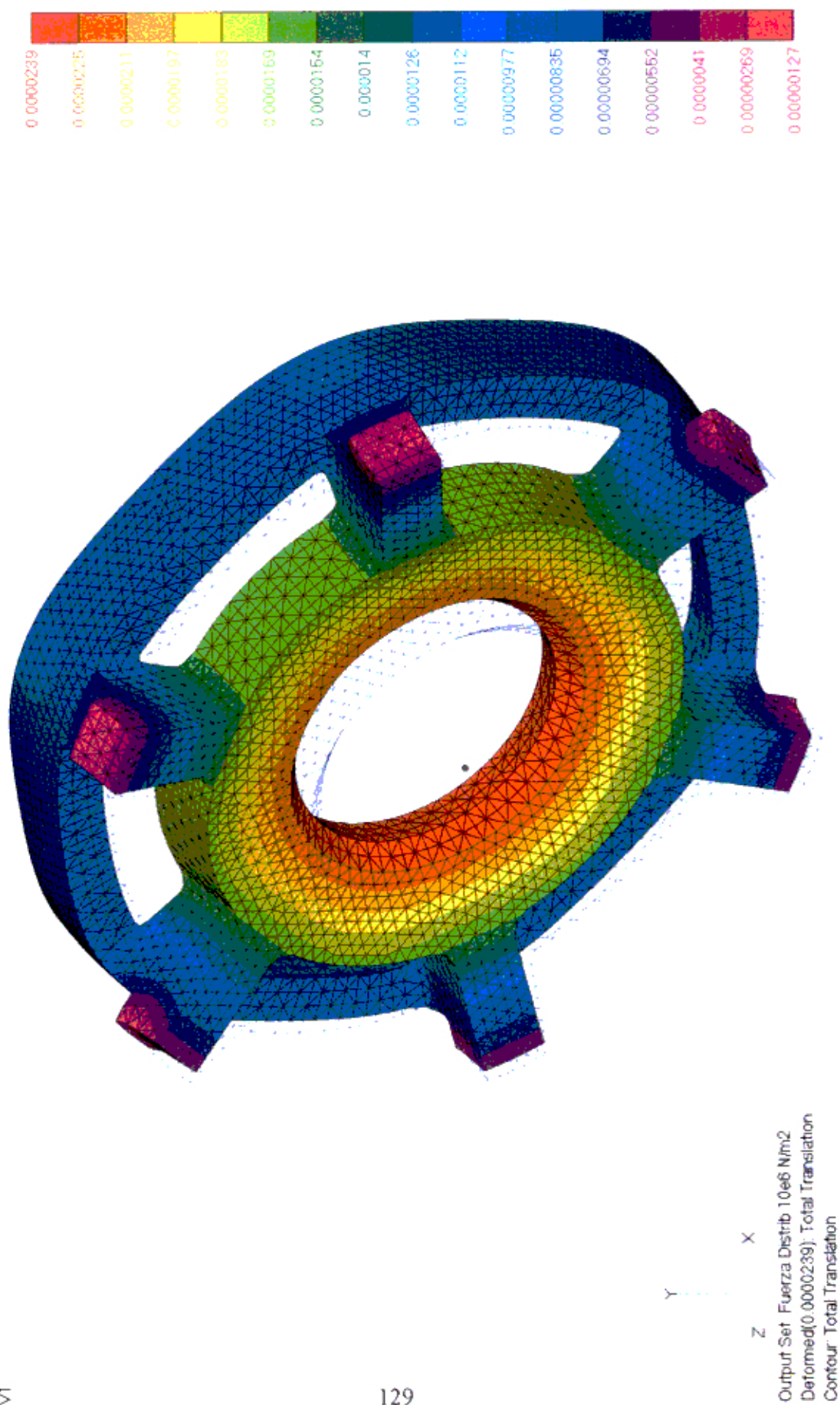


Fig. 6.18 Deformación total de la geometría



### 6.3 CÁLCULO DE LOS MODOS Y LAS FRECUENCIAS PROPIAS DE OSCILACIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL COHETE

A continuación desarrollaremos un problema de naturaleza dinámica que consiste en la determinación de los modos de oscilación de la estructura del cohete.

El análisis modal es el fundamento para una comprensión completa de las características dinámicas de la estructura.

El análisis modal permite realizar:

La evaluación de la interacción dinámica entre un componente y su estructura base de apoyo; si la frecuencia natural de la estructura base de apoyo es cercana a la frecuencia de operación del componente puede haber amplificación dinámica significativa de las cargas.

Analizar los posibles cambios del diseño según las características dinámicas de la estructura.

El análisis modal se resuelve por la ecuación:

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = 0$$

donde:

K es la matriz de rigidez de sistema.

M es la matriz de masa de sistema basado en la geometría y propiedades,

#### 6.3.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La ecuación general obtenida en el numeral anterior nos sirve ahora para la solución a un problema dinámico, como es el caso de la oscilación libre de una viga.

El análisis modal consiste en la determinación de las frecuencias naturales y la forma de una estructura. Las frecuencias naturales son las frecuencias que una estructura tenderá a vibrar si sujeta a una perturbación.

Muchas veces para desarrollar un análisis dinámico detallado necesitamos de las formas y las frecuencias modales de una estructura, es así que el siguiente problema consiste en el desarrollo de un modelo complejo de todo el cohete utilizando mecanismos de verificación los resultados de nuestro modelo.

### **6.3.2 DESARROLLO DEL MODELO**

El desarrollo del análisis lo vamos a desarrollar en 2 partes una simplificada y otra compleja. Este procedimiento se realiza cuando la estructura es muy grande y muy compleja, y que generalmente demanda gran cantidad de tiempo de maquina.

### **VALIDACIÓN DEL MODELO**

Cuando nosotros analizamos una estructura relativamente compleja es muy importante tener una idea de los valores que deberíamos obtener, para ello se realiza un modelo simplificado cuyos valores nos darán una idea de los que obtendremos al analizar la estructura compleja.

Con este objetivo se desarrollo un modelo simplificado que represente la estructura de nuestro cohete, para ello hemos utilizado elementos tipo viga (Beam). El programa FEM MSC/NASTRAN utilizado cuenta con diferentes tipos de secciones de viga, seleccionando la sección tipo tubo cilíndrico cuyos datos de entrada son el diámetro externo del tubo  $D$  y el espesor de pared  $\delta$ .

Para nuestro caso:

$$D = 122 \text{ mm.}$$

$$\delta = 3.5 \text{ mm}$$

Hemos hecho el modelo de la viga con 100 elementos para la longitud total del cohete que es de 2870 milímetros obteniendo elementos viga de 28.7 milímetros de largo.

Por otra parte hemos hecho un cálculo teórico para tener la certeza de que los valores obtenidos mediante simulación son correctas, para ello hemos hecho uso de la teoría planteada en [16] con el cual determinamos las frecuencias de oscilación de una viga con las características geométricas antes mencionadas utilizando la fórmula:

$$f_n = \frac{a_n}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

donde:

- $E$  módulo de elasticidad
- $I$  momento de inercia de la sección
- $A$  área de la sección
- $\rho$  densidad del material utilizado
- $L$  longitud de la viga
- $a_n$  constante dependiente del numero de modo

Para los valores siguientes:  $E = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Se obtuvo los siguientes valores:  $A = 0.00130297 \text{ m}^2$   $I = 0.00000228908 \text{ m}^4$

Como consecuencia:

$a_1 = 22$	$f_1 = 92.26$
$a_2 = 61.7$	$f_2 = 258.76$
$a_3 = 121$	$f_3 = 507.46$

Una vez obtenidos los resultados muy parecidos al obtenido mediante simulación procedemos al modelamiento de nuestra estructura del cohete.

## MODELAMIENTO DE LA ESTRUCTURA DEL COHETE

Vamos a modelar la estructura primaria básica del cohete que conforma la ojiva, la cámara de combustión y la tobera que están fabricados de acero.

La geometría primaria conformado por líneas de contorno del modelo es elaborado en un programa especializado como es el AutoCad, que utilizando los artificios de exportación generamos un archivo con los datos básicos de la geometría.

Posteriormente desde el pre-procesador del programa FEM MSC/NASTRAN importamos este archivo creado anteriormente y para después completar la geometría tridimensional y general el modelo con todas las condiciones de borde necesarias.

Una vez culminada la geometría en nuestro pre-procesador procedemos a seleccionar el tipo de elemento, propiedades del material, para después con ayuda del generador automático de malla (Mesh) aplicando las dimensiones y el tipo de malla requerido generar la malla automáticamente.

Una vez creada la malla se procede a la revisión de la malla ya que el mallador automático siempre encuentra dificultades en las partes donde le parece complicado como en nuestro caso se presentó en la parte delantera del cohete, lo que hemos realizado manualmente.

Después de la generación de mallas utilizamos el corrector del modelo que consiste en encontrar duplicidad de geometrías como líneas, superficies etc, como también la duplicidad de nodos o elementos.

Hemos realizado un modelo con 22344 elementos y 11176 nodos, y un tiempo de análisis aproximado de 4 horas.

Posteriormente se procede a ejecutar el procesador del programa FEM.

### **6.3.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS**

Como sabemos por la teoría expuesta en el capítulo anterior primero determinamos los desplazamientos, posteriormente a partir de ellos se determina el resto de parámetros que quisiéramos conocer.

Los datos de la viga, con sus respectivos datos, así como los elementos finitos usado se incluyen en la figuras siguientes:

En las figuras siguientes se observa los tres primeros modos de oscilación de la estructura.

Dada la simetría de la estructura en dos de sus ejes obtenemos iguales valores de frecuencia, por esta razón mostraremos solamente las primeras formas modales.

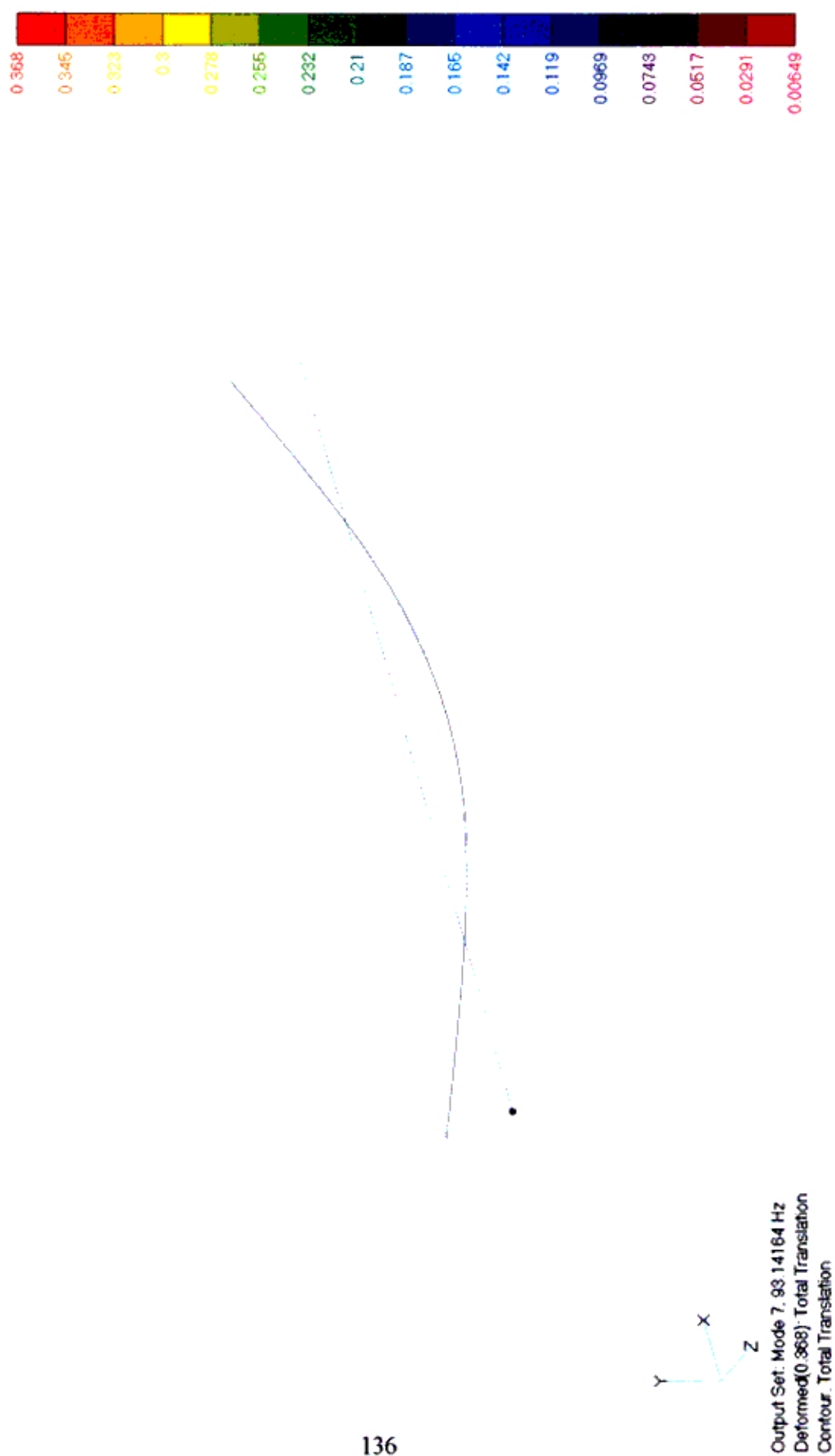


Fig. 6.20 Primer modo de oscilación de la viga





Fig. 6.21 Segundo modo de oscilación de la viga

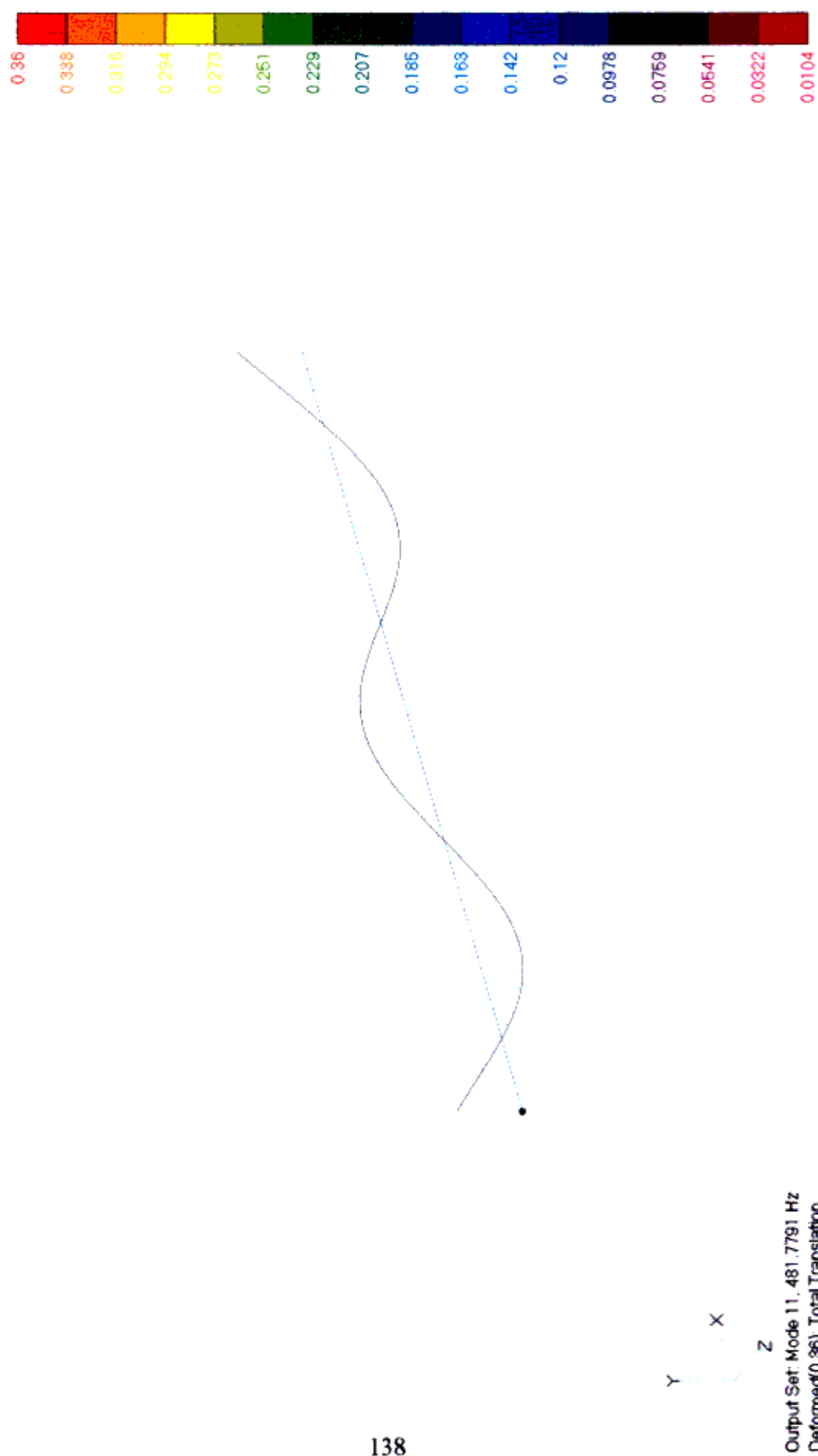


Fig. 6.22 Tercer modo de oscilación de la viga

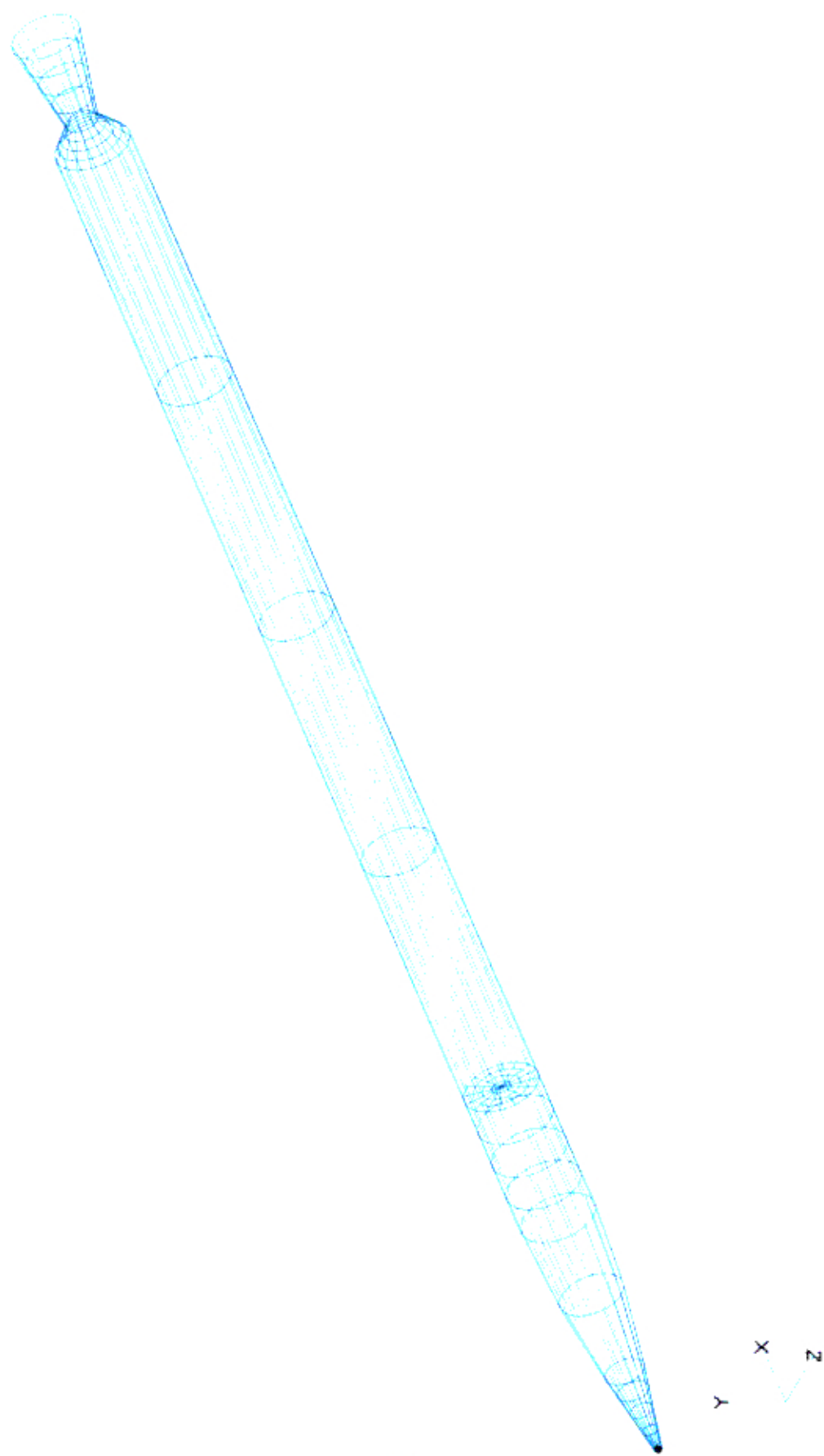


Fig. 6.23 Geometría desarrollada en AutoCAD

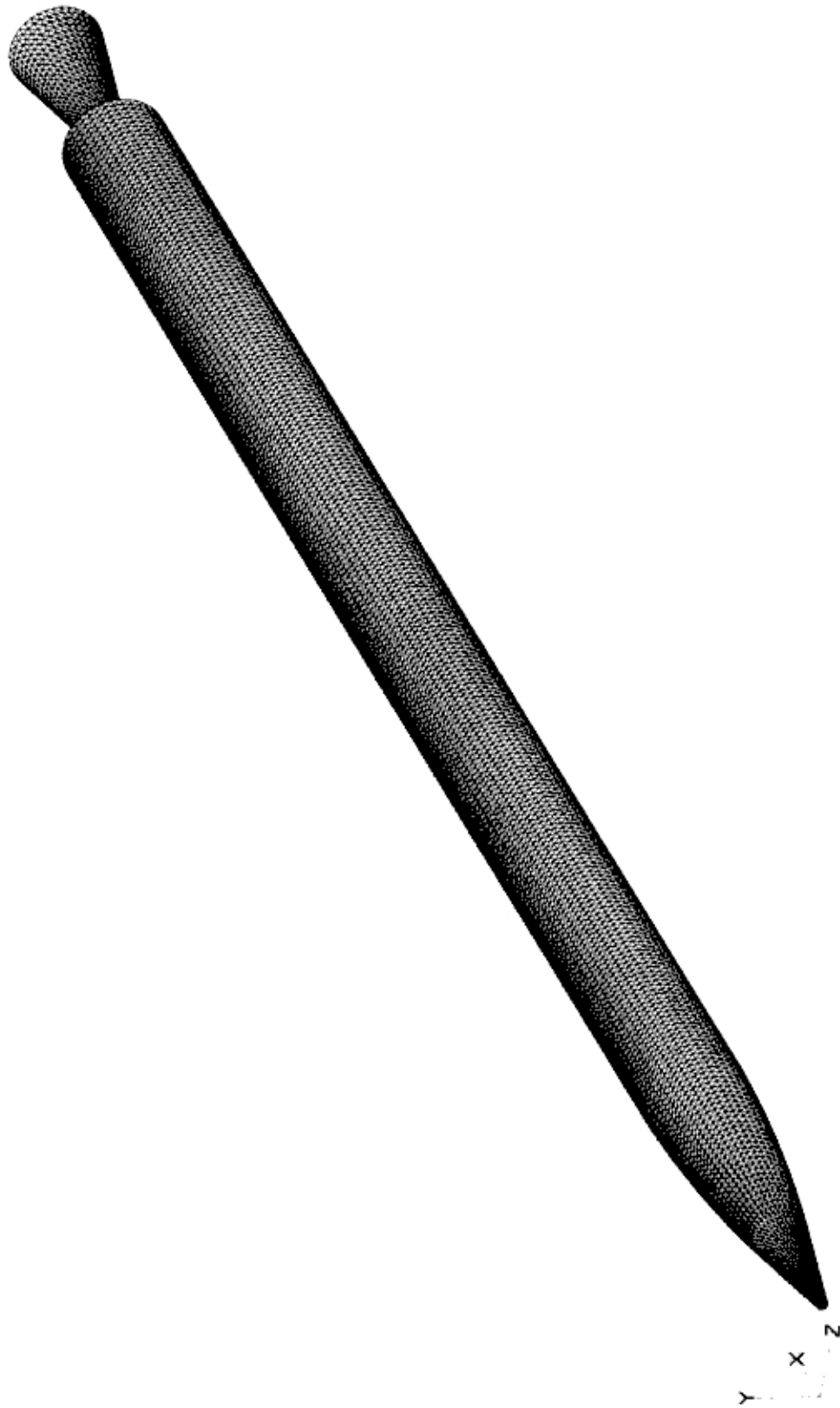


Fig. 6.24 Mallado de la estructura del Cohete (Vista anterior)

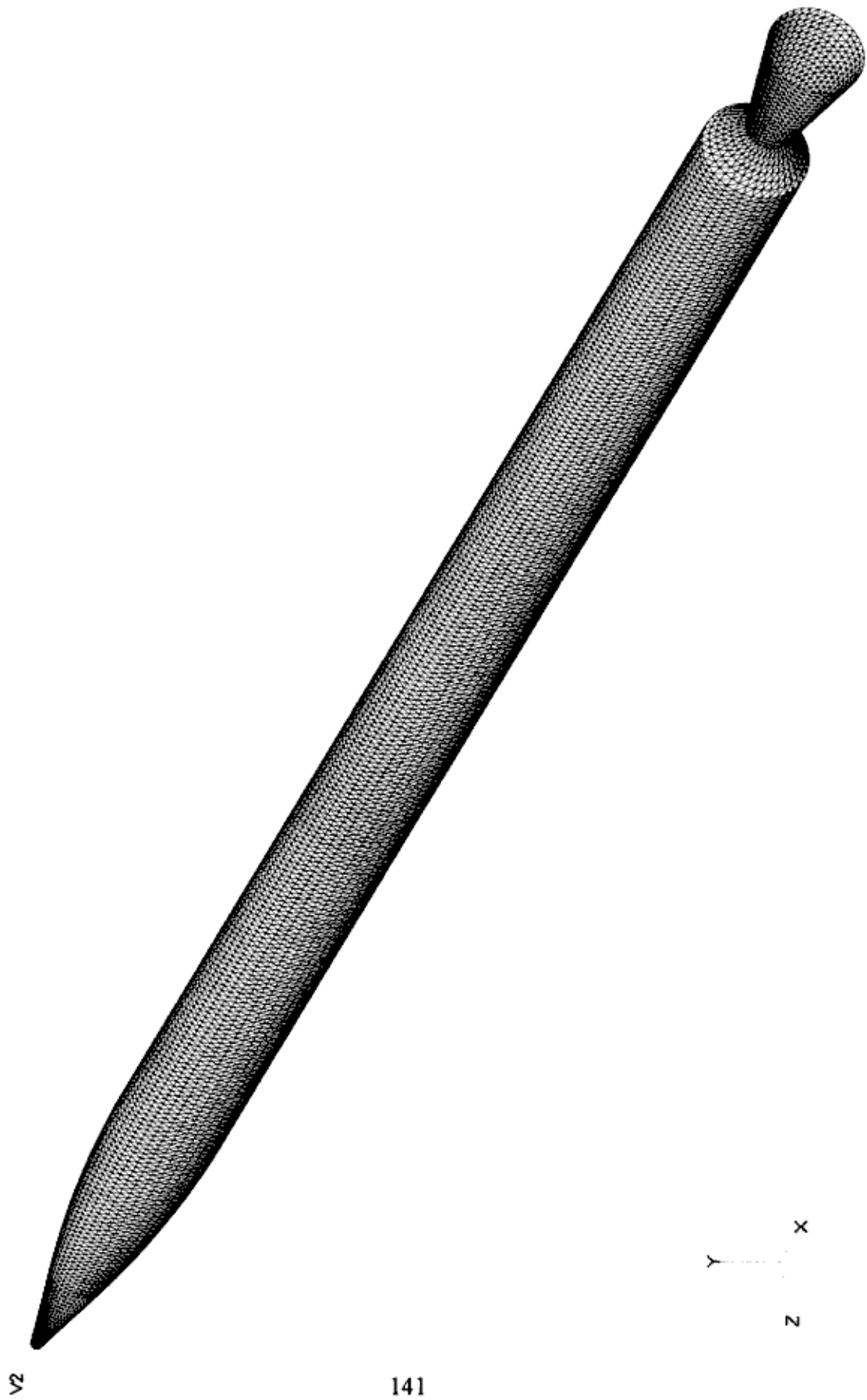


Fig. 6.25 Mallado de la estructura del Cohete (Vista posterior)

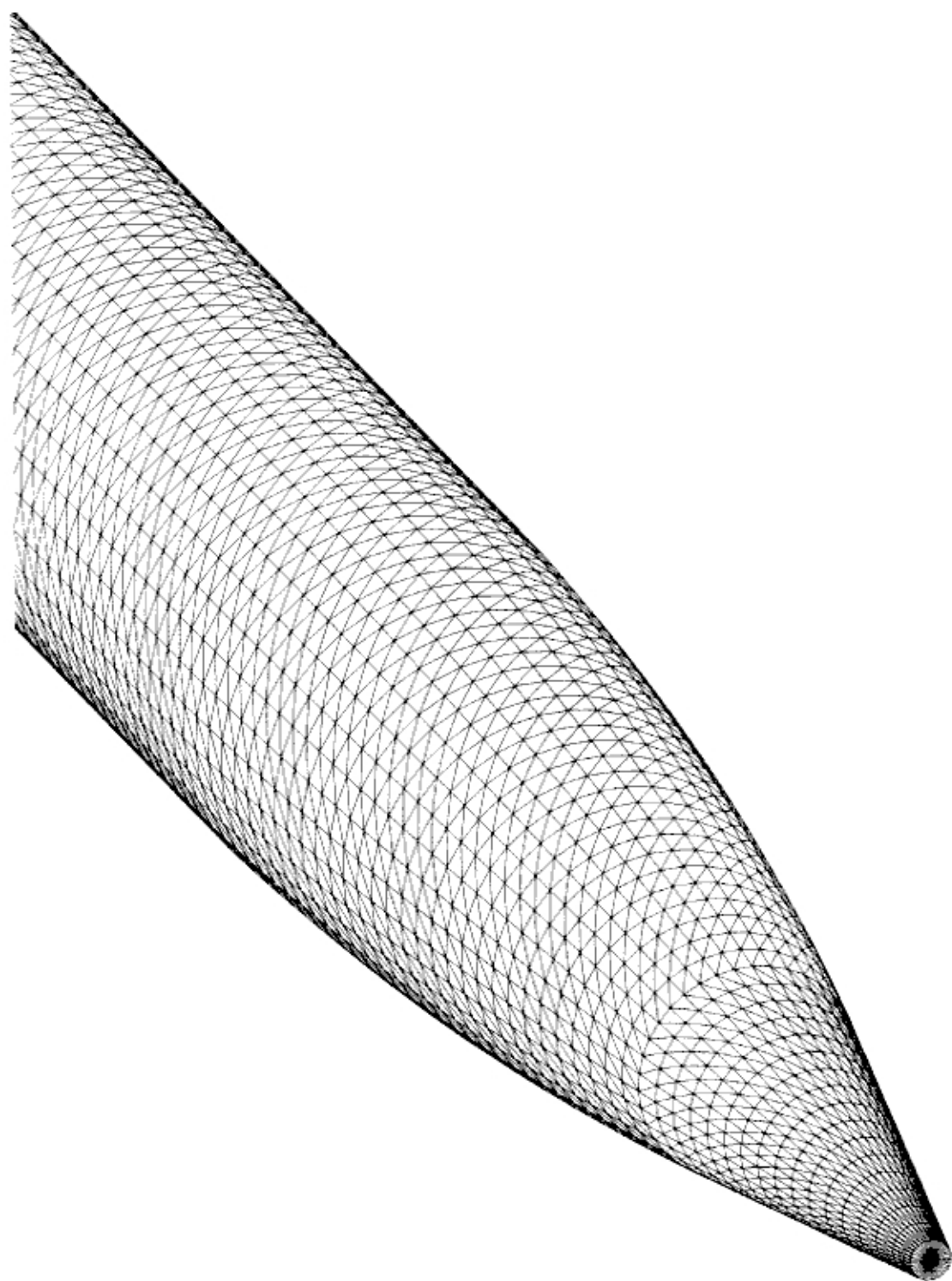


Fig. 6.26 Mallado de la ojiva del cohete

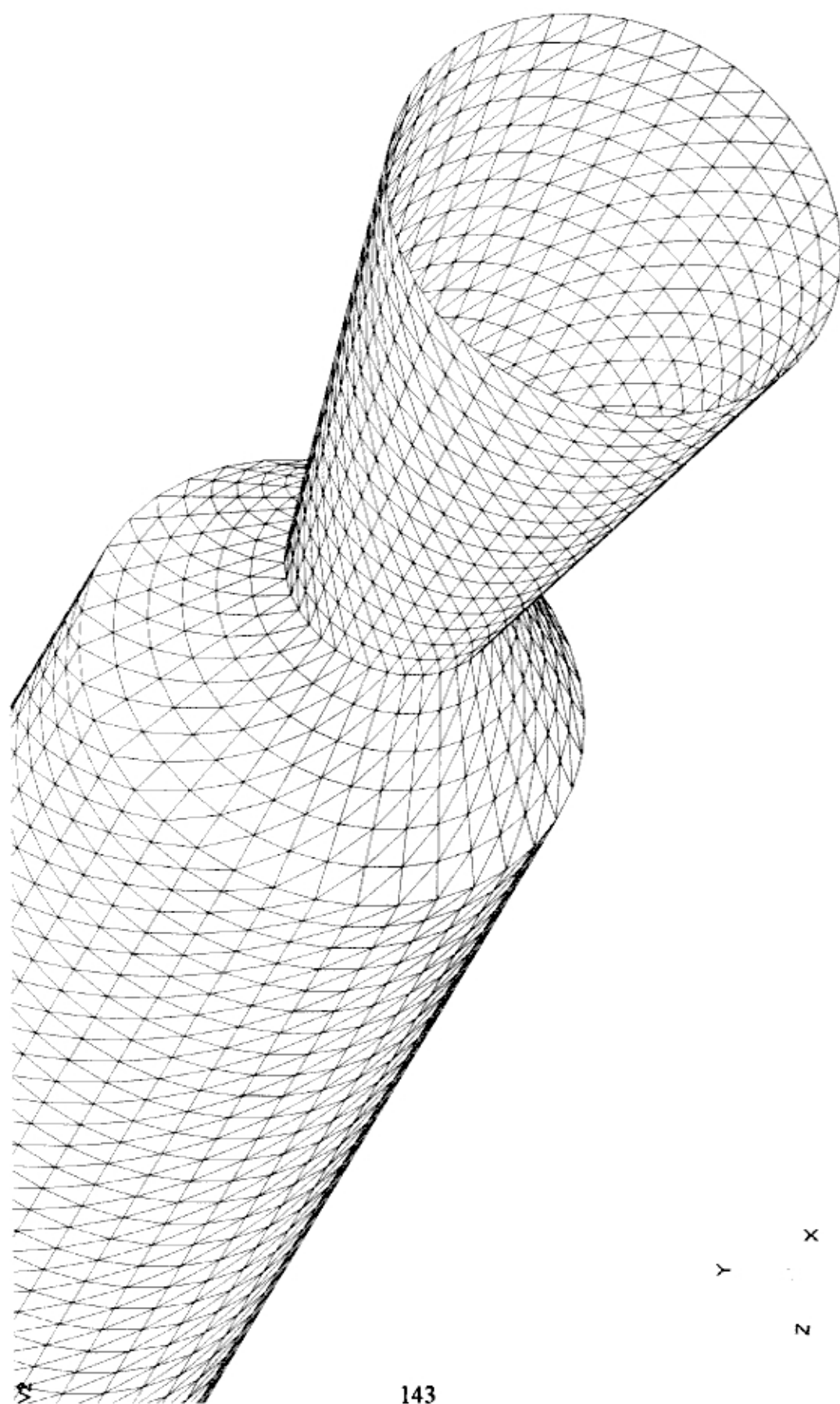


Fig. 6.27 Mallado de la tobera del Cohete

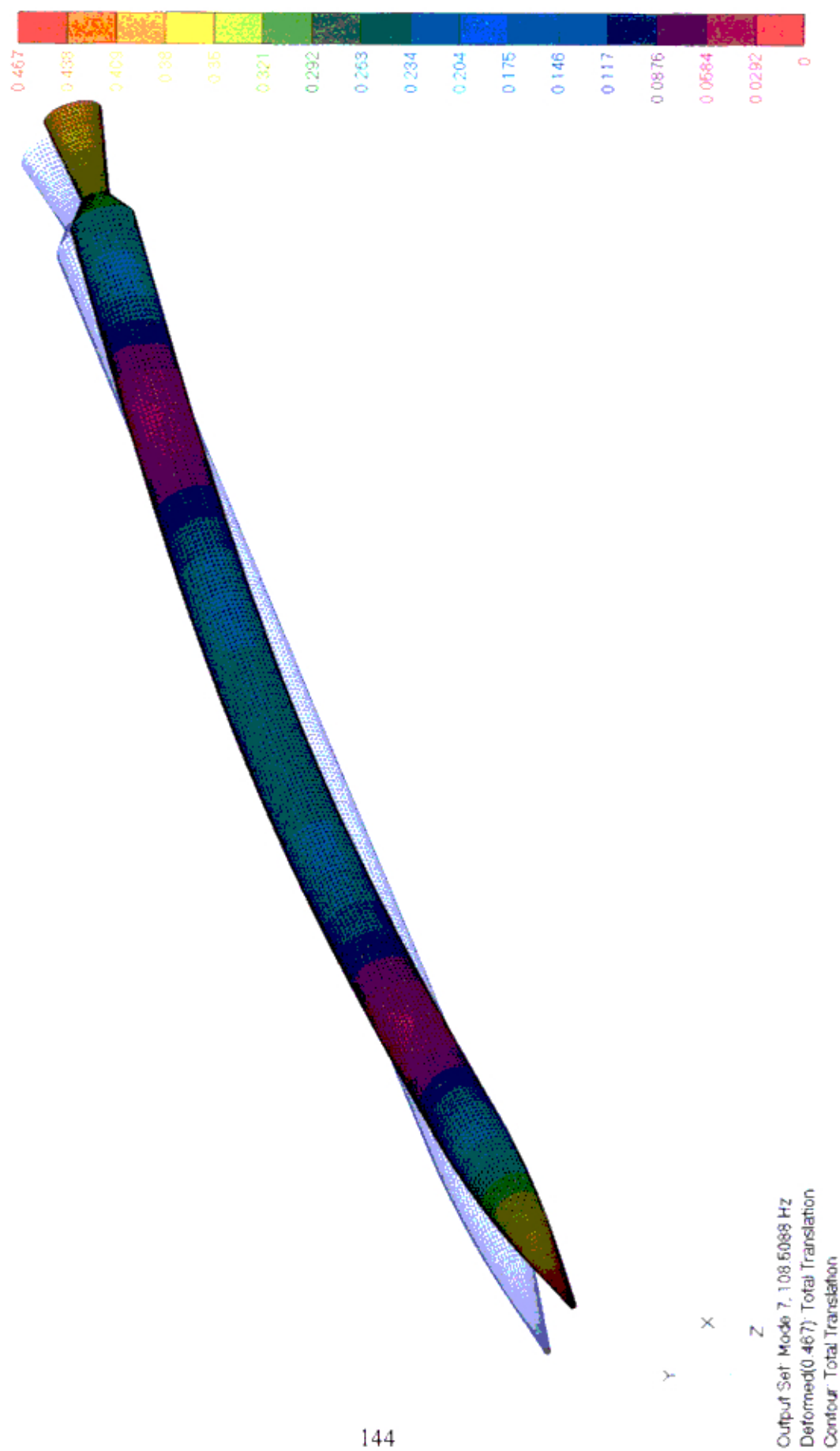


Fig. 6.28 Primer modo de oscilación del Cohete



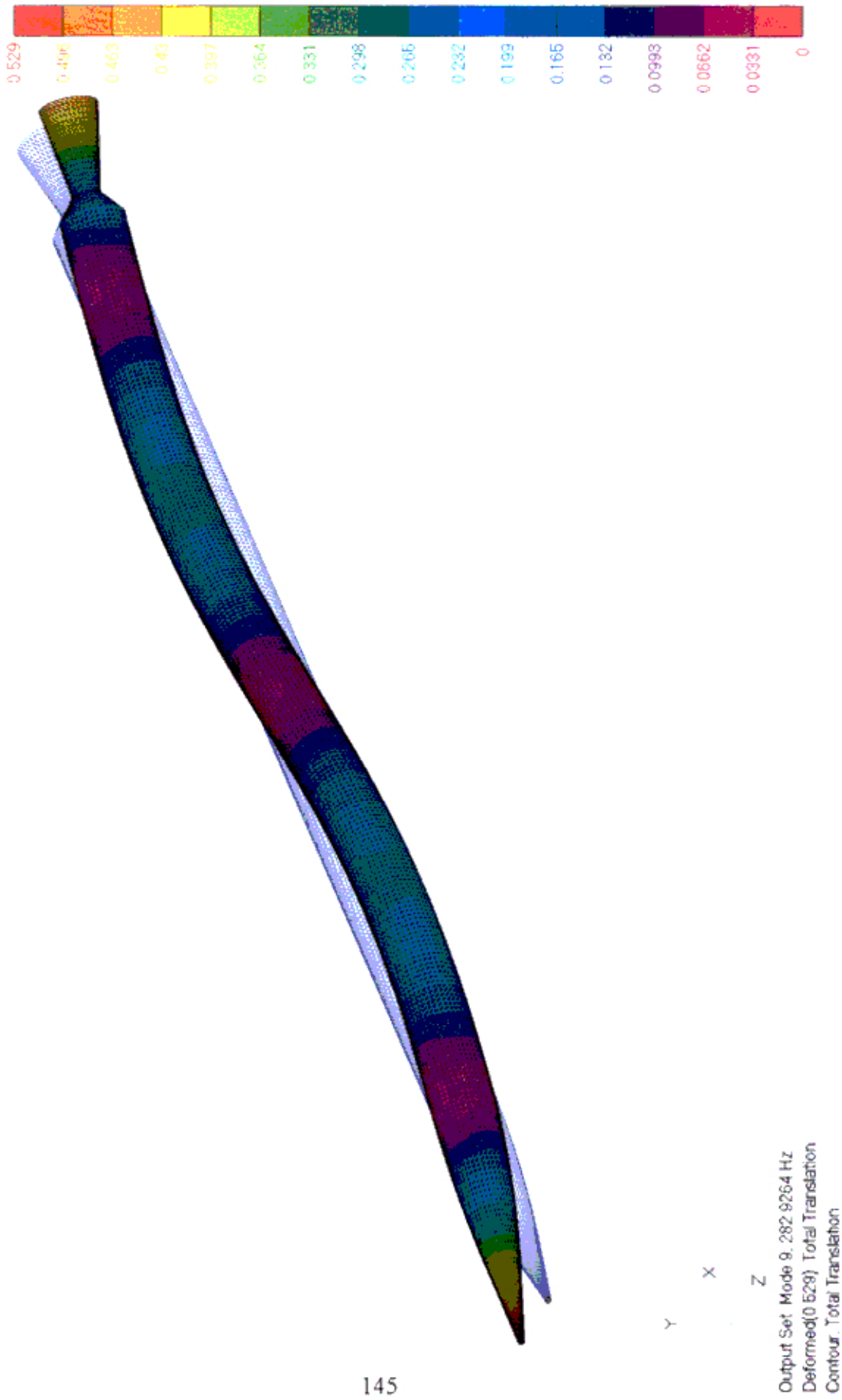


Fig. 6.29 Segundo modo de oscilación del Cohete

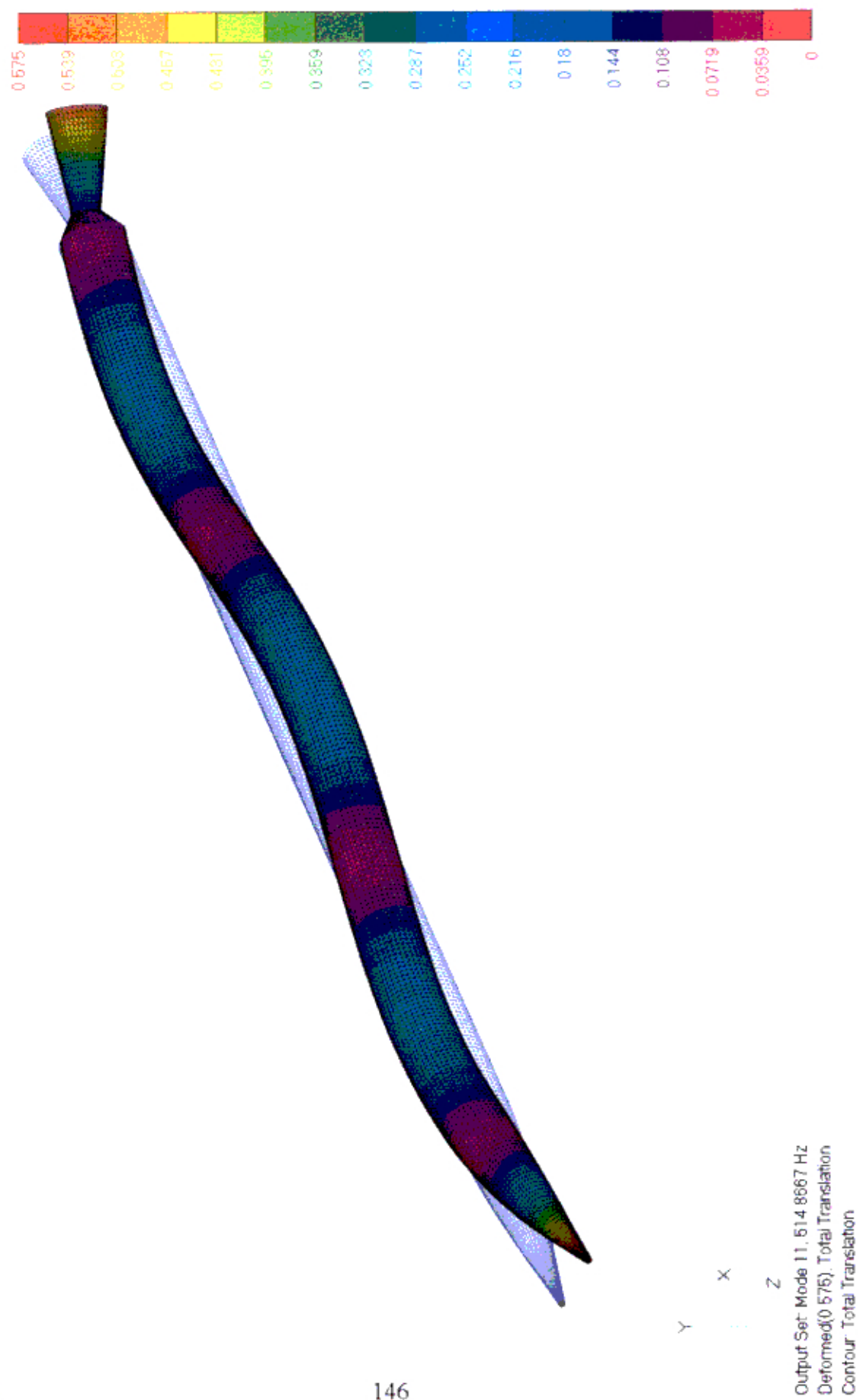


Fig. 6.30 Tercer modo de oscilación del Cohete

## 7 CONCLUSIONES

Un cohete es un vehículo aéreo muy complejo y para analizar su estructura es necesario conocer el funcionamiento del vehículo en forma integral. Es así que hemos determinado las diferentes fuerzas que actúan sobre la estructura del cohete, estas pueden ser externas, internas e inerciales.

Tomando las consideraciones del caso de cálculo se determinaron los esfuerzos internos que se originan en la estructura por acción de las diferentes fuerzas mencionadas, posteriormente se determinó la resistencia de la estructura en las zonas más crítica es decir donde existe mayor concentración de esfuerzos.

Para el análisis de resistencia de los elementos de la estructura en el presente trabajo se utilizó el método de los elementos Finitos, que conjuntamente con el método tradicional de cálculo nos permite evaluar objetivamente la deformación y la resistencia de los elementos de la estructura.

En el presente trabajo se obtuvo la distribución de la tensión y de la deformación en los elementos más importantes del cohete, tales como tapón, cámara de combustión y cono convergente de la tobera por acción de la presión interna, también se realizó un análisis de resistencia del herraje central del cohete, y se mostró que el diseño presentado garantiza el funcionamiento de estos elementos.

Los resultados obtenidos por el método de los elementos finitos pueden servir de base para una optimización de la estructura, particularmente para el caso del tapón se podría disminuir el espesor de la pared del tapón en la parte periférica de tal manera que obtengamos una estructura de tensión uniforme.

De los cálculos efectuados se obtuvo que la deformación radial de la parte de la cámara de combustión alcanza un valor de 0.1 mm, este valor esta dentro de los valores permitidos por la condición de disparo y desplazamiento del cohete a través del tubo vector.

En la última parte del trabajo se desarrolló un análisis de determinación de las frecuencias propias y modos de oscilación de toda la estructura del cohete que a la vez servirá para análisis dinámicos más complejos incluyendo las diferentes cargas aplicadas.

Durante el modelamiento hemos hecho uso de programas especializados en generación de geometrías y modelos tales como AutoCad y Mechanical Desktop. Estos programas también permiten el intercambio de información con el programa FEM.

## 9 BIBLIOGRAFÍA

1. MOSSAKOVSKIY V. I. Resistencia de Estructuras de Cohetes. Byisshaya Shkola, Moscú, 1969.
2. AKHMEDIANOV I. C. SAVELIEV L. M. Esfuerzos en los Vehículos Aeroespaciales. Editorial de la Universidad Estatal Aeroespacial de Samara, Samara, 1991.
3. LEONOV V. I. Determinación de los Esfuerzos Internos en los Vehículos aeroespaciales. Editorial de la Universidad Estatal Aeroespacial de Samara, Samara, 1994.
4. BRUHN E. F. Analysis and Design of Missile Structures. Tree State Offset Company, 1973
5. SHAPIRO Ya. M. MAZING G Yu. PRUDNIKOV N. E. Fundamentos de Diseño de Misiles de Combustible Sólido. Editorial del Ministerio de Defensa de la URSS. Moscú 1968
6. AVDONIN A. C. FIGUROVSKIY V. I. Calculo Estructural de Vehículos Volantes Mashinostroenie, Moscú, 1985.
7. SUTTON George P. Rocket Propulsion Element Fourth Edition John Wile and Sons New York, 1976
8. FEODOSIEV I. F. Resistencia de Materiales. Editorial Mir, Moscú, 1980.
9. OÑATE Eugenio Calculo de Estructuras por el método de Elementos Finitos. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona, España 1992

10. PRZEMIENIECKI J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw Hill. 1968.
11. WILLEMS Frans R. Cálculo de resistencia de estructuras por métodos matriciales y de elementos finitos. Curso UNI 1998.
12. SEGERLIND, Larry J. Applied Finite Element Analysis. Edit. John Wiley & Sons Inc. U.S.A. 1976.
13. WRIGHT E. W. Structural Design by Computer. Van Nostrand Reinhold Company Ltd. London. 1976
14. SPYRAKOS CONSTANTINE C. Finite Element Modeling in engineering practice. West Virginia University press. Morgantown, WV 1990.
15. OBRAZTZOV I. F, SAVELIEV L.M. KHASANOV. Método de los elementos Finitos. Byisshaya Shkola, Moscú, 1985.
16. DEN HARTOG J. P. Mechanical Vibrations, McGraw Hill Book Co. 1956.
17. MSC/NASTRAN for Windows User's Guide, MacNeal Schwendler Corporation. U.S.A. 2000.
18. MSC/NASTRAN for Windows Reference Manual, MacNeal Schwendler Corporation. U.S.A. 2000.
19. TEQ WORK Reference Manual, U.S.A. 1988.