UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ciencias

Sección de Post-grado y Segunda Especialización Profesional

Tesis para Optar el Grado de Maestro en Ciencias, Mención : Matemática Aplicada

Titulada:

Teorema de Escisión de Wodzicki para *Pro*–Álgebras

Presentado Por:

José Augusto Molina Garay

Lima - Perú

2004

A los maestros y profesores del Perú

que ven en su trabajo el verdadero camino hacia el desarrollo.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradecer a mis padres y hermana que siempre me apoyaron en toda mi educación, creando un ambiente apropiado para mis estudios y mi desarrollo personal. Agradezco también a los profesores de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería por sus enseñanzas y formación académica. A mis amigos, compañeros de clase y colegas que hicieron de la universidad mi segundo hogar. A los miembros del IMCA, profesores Christian Valqui, Félix Escalante, Roger Metzger, Julio Alcántara, Percy Fernández, Renato Benazic y Wilfredo Sosa y la señora secretaria Ingrid Chumpitaz por darme una sólida formación matemática y por apoyar a aquellos que se esfuerzan por ser parte del desarrollo de la matemática peruana. Por último agradecer a Guillermo Cortiñas, Jorge Alberto Guccione y Viorel Costenau por sus importantes sugerencias para el desarrollo del presente trabajo por medio del correo electrónico.

Índice general

Índice general

1. Introducción

Los *pro*−objetos de una categoría dada son clases de equivalencia de sistemas directos en dicha categoría. Constituyen una categoría con morfismos dados por clases de equivalencias de flechas (sec. 2.2).

Esta categoría hereda muchas propiedades de la categoría de la cual proviene, como por ejemplo el poseer límite, el ser aditiva y abeliana, poseer núcleo y co-núcleo (sec. 2.3).

Para esta categoría entonces se definen conceptos como los de objeto graduado de homología (sec. 2.6).

En el caso de ser abelianas se tienen resultados como el lema de los 3, de los 5 y el lema de la serpiente que es de importancia capital en el álgebra homológica.

La última parte de la sección 2 trata de las categorías monoidales que son una generalización de la categoría de módulo que está provista del producto tensorial. Aquí se muestra cómo es que la *pro*−categoría de los módulos sobre un anillo conmutativo con unidad es monoidal con un producto inducido por el producto tensorial.

En la sección 3 empezamos por generalizar la homología de Hochschild para el caso en que las álgebras no tengan unidad, para que tenga sentido el plantearse la siguiente pregunta: ¿si

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es exacta se induce un triángulo exacto:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HH}(A) \arrow[rr, "\alpha_*"] & & \mathrm{HH}(B) \arrow[dl, "\beta_*"] \\ & \mathrm{HH}(C) \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd} \text{ ?}$$

para lo cual se le extiende para un álgebra I (que no tiene unidad necesariamente) de manera estándar:

$$\mathrm{H\,H}(I) := \mathrm{Conu}(\mathrm{H\,H}(\Lambda) \to \mathrm{H\,H}(I_+))$$

que coincide con la definición clásica de Hochschild en el caso en que las álgebras tengan unidad, debido a que si A es un ideal propio de B, A no tiene a la unidad como elemento. Más adelante conseguimos una fórmula explícita de la homología de Hochschild:

$$\mathrm{H\,H}(I) = \mathrm{H}(\mathrm{Tot}(CC(I)^{\{2\}}))$$

donde $CC(I)^{\{2\}}$ son las dos primeras columnas del bicomplejo que define a la homología de Hochschild.

Junto con esta fórmula se obtiene una sucesión exacta corta que relaciona las teorías $\mathrm{H\,H}^{\text{naïve}}$ y H^{bar}:

$$0 \longrightarrow C(I) \longrightarrow \mathrm{Tot}(CC(I)^{\{2\}}) \longrightarrow (C^{\text{bar}})^{[-1]}(I) \longrightarrow 0$$

la cual implica que:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H\,H}^{\text{bar}}(I) \arrow[rr] & & \mathrm{H\,H}^{\text{naïve}}(I) \arrow[dl] \\
& \mathrm{H\,H}(I) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

es un triángulo exacto.

En la sección 3.2 definimos el problema de escisión para la homología de Hochschild para una extensión pura de álgebras $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$: Diremos que I satisface escisión para la homología de Hochschild si el morfismo $CC(I)^{\{2\}} \otimes X \hookrightarrow \mathrm{Nu}(\pi \otimes X)$ es un cuasi-isomorfismo, para cualquier módulo X, donde $\pi : CC(A)^{\{2\}} \to CC(B)^{\{2\}}$ es la proyección canónica. Aquí la inyectividad de $CC(I)^{\{2\}} \otimes X \to \mathrm{Nu}(\pi \otimes X)$ está garantizada por tratarse de una extensión pura de álgebras. De forma similar se definen los problemas de escisión para la teorías $HH^{\text{naïve}}$, H^{bar} y HC.

En la definición 3.2.2 es la de I-módulo H$-$unitario: M es homológicamente unitario o H $-$unitario si para todo $\Lambda-$módulo X se tiene que el complejo $(M \otimes I^{n\otimes}, b')_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ es exacto.

Finalmente se tiene la prueba del teorema de Wodzicki que establece la equivalencia de la condición de H$-$unitario con la de satisfacer el problema de escisión en cualquiera de la teorías estudiadas.

En el capítulo 4 se enuncian las definiciones de las teorías HH, $HH^{\text{naïve}}$, H^{bar} y HC para el caso de *pro*$-$álgebras, las cuales están inspiradas en las correspondientes para álgebras. Para probar el teorema de Wodzicki para *pro*$-$álgebras establecemos que la condición necesaria y suficiente para que una *pro*$-$álgebra cumpla escisión de alguna de las teorías es que se cumpla en cada nivel la escisión para álgebras respectiva. Usando el teorema de Wodzicki para álgebras tenemos demostrado el teorema.

2. Pro-Categorías

2.1. Sistemas Directos e Inversos

Definición 2.1.1. *Decimos que un conjunto $(P, \prec)$ parcialmente ordenado es dirigido si para $a, b \in P$ existe $c \in P$ tal que $a \prec c$ y $b \prec c$.*

Definición 2.1.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $(P, \prec)$ un conjunto dirigido. Llamaremos un sistema directo en $\mathcal{C}$ a una familia de objetos de $\mathcal{C}$ $(S_i)_{i\in P}$ provista de morfismos $\kappa_{i,j} : S_i \to S_j$, para cada $i \prec j$ tales que existe la siguiente regla de compatibilidad:*
Si $i \prec k \prec j$, entonces:

$$\begin{tikzcd} & S_k \arrow[dr, "\kappa_{k,j}"] & \\ S_i \arrow[ur, "\kappa_{i,k}"] \arrow[rr, "\kappa_{i,j}"] & & S_j \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.1.3 (Límite de un Sistema Directo). *Sea $(S_i, \kappa_{i,j})_{i,j\in P,\, i\prec j}$ un sistema directo. Llamaremos límite directo a un objeto S con morfismos $\phi_i : S_i \to S$ para cada $i \in P$ compatibles con el sistema directo, es decir:*

$$\begin{tikzcd} & S \\ S_i \arrow[ur, "\phi_i"] \arrow[r, "\kappa_{i,j}"] & S_j \arrow[u, "\phi_j"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo para todos los $i, j \in P$, $i \prec j$, tales que cumplen la siguiente propiedad universal:
Para todo objeto X y toda sucesión de morfismos $(f_i : S_i \to X)_{i\in P}$ compatible con el sistema directo existe un único $f : S \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & X \\ & S \arrow[u, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

Proposición 2.1.1 (Unicidad del Límite). *Dos límites de un mismo sistema directo son isomorfos*

Demostración: Sean $(S,\phi_i)_{i\in P}$ y $(R,\psi_i)_{i\in P}$ dos límites para el sistema directo $(S_i,\kappa_i)_{i\in P}$. Por la propiedad universal, existen $f : S \to X$ y $g : R \to X$ tales que conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & R \\ & S \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_i \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & S \\ & R \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Combinando ambos diagramas tenemos:

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"] \arrow[dd, "\phi_i"'] & & S \\ & R \arrow[ur, "g"] & \\ S \arrow[ur, "f"] \arrow[uurr, dashed, bend right, "id_S"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[dd, "\psi_i"'] & & R \\ & S \arrow[ur, "f"] & \\ R \arrow[ur, "g"] \arrow[uurr, dashed, bend right, "id_R"'] & & \end{tikzcd}$$

Por la unicidad $g\circ f = id_S$ y $f \circ g = id_R$. $\square$

Denotaremos $\varinjlim_{i\in P} S_i$ a cualquiera de los elementos de la clase de isomorfismo de límites directos de $(S_i, \kappa_{i,j} : S_i \to S_j)_{i\in P,\, i\prec j}$. Por ejemplo si G es un grupo y tenemos una cadena ascendente de subgrupos: $S_1 \subset \cdots \subset S_i \subset S_{i+1} \subset \cdots$. Denotemos j_i a las inclusiones $S_i \hookrightarrow S_{i+1}$, entonces $\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} S_i$ es la unión de los grupos con $\phi_i : S_i \to \varinjlim_{i\in\mathbb{N}} S_i$ la inclusión. Éste es justamente el límite natural de muchas estructuras familiares, como por ejemplo: Una cadena ascendente de ideales de algún anillo, o una cadena de espacios topológicos ascendente, al límite se le da la topología *inducida* por la cadena.

El dual a este concepto es el límite *inverso.*

Definición 2.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $(P,\prec)$ un conjunto dirigido . Llamaremos sistema inverso en $\mathcal{C}$ a una familia de objetos de $\mathcal{C}$ $(S_i)_{i\in P}$ provista de morfismos $\sigma_{i,j} : S_i \to S_j$, para cada $i \succ j$ tales que existe la siguiente regla de compatibilidad:*

Si $i \succ k \succ j$, entonces:

$$\begin{tikzcd} & S_k \arrow[dr, "\sigma_{k,j}"] & \\ S_i \arrow[ur, "\sigma_{i,k}"] \arrow[rr, "\sigma_{i,j}"] & & S_j \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.1.5 (Límite de un Sistema Inverso). *Sea $(L_i, \sigma_{i,j})_{i,j \in P,\, i \succ j}$ un sistema inverso. Llamaremos límite inverso a un objeto L con morfismos $\pi_i : L \to L_i$ para cada $i \in P$, que son compatibles con el sistema inverso, es decir:*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[d, "\pi_j"] \\ L_i \arrow[r, "\sigma_{i,j}"] & L_j \end{tikzcd}$$

es conmutativo para todos los $i, j \in P$, $i \succ j$, tales que cumplen la siguiente propiedad universal:
Para todo objeto Y y toda sucesión de morfismos $(g_i : Y \to L_i)_{i \in P}$ compatible con el sistema inverso existe un único $g : Y \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi_i"] & L_i \\ Y \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 2.1.2 (Unicidad del Límite Inverso). *Dos límites de un mismo sistema inverso son isomorfos.*

<u>Demostración</u>: Es similar a la del límite directo $\square$.

Denotaremos $\varprojlim_{i \in P} L_i$ a cualquiera de los elementos de la clase de isomorfismo de límites inversos de $(L_i, \sigma_{i,j} : L_i \to L_j)_{i \in P,\, i \succ j}$.

Definición 2.1.6 (Categorías con Límites). *A una categoría $\mathcal{C}$ la llamaremos Categoría con Límite Directo(Inverso) sobre el conjunto dirigido $(P, \prec)$ si todo sistema directo (inverso) sobre $(P, \prec)$ posee límite.*

Veremos ahora que la categoría de módulos sobre un anillo k es una categoría con límites directo e inverso con índices en $\mathbb{N}$.

Proposición 2.1.3 (Existencia de Límites Directos en la Categoría de k-Módulos). *La categoría de módulos sobre un anillo posee límite directo, con índices en* $\mathbb{N}$.

<u>Demostración</u>: Sea $(M_n, \kappa_{n,n+1} : M_n \to M_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema directo. Consideremos el submódulo S de la suma directa $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$ generado por los elementos de la forma $m_n - \kappa_{n,n+1}(m_n)$, donde $m_n \in M_n$. Y con morfismos $\iota_n = \pi \circ i_n$, donde i_n es la inyección canónica de la suma directa y π es la aplicación de paso al cociente. Veremos que

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} M_n \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n/S$$

Primero veamos la compatibilidad con los $\kappa_{n,n+1}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $x_n \in M_n$ entonces $\iota_n(x_n) - \iota_{n+1}(\kappa_{n,n+1}(x_n)) = \pi(x_n - \kappa_{n,n+1}(x_n)) = 0$, pues $x_n - \kappa_{n,n+1}(x_n) \in S$, entonces $\iota_n = \iota_{n+1} \circ \kappa_{n,n+1}$.

Sea X un $k-$módulo y, $(f_n : M_n \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ compatible con el sistema directo. Debemos encontrar un morfismo $f : \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n/S \to X$ que haga conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "\iota_n"'] & & X \\
& \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n \arrow[ur, "\oplus f_n"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& & \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n/S \arrow[uu, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

Para esto probaremos que $S \subset Nu(\oplus f_n)$, esto nos permitiría definir de forma única: $f : [x] \mapsto (\oplus f_n)(x)$. Si $x_n \in M_n$ entonces

$$\oplus f_n(x_n - \kappa_{n,n+1}(x)) = \oplus f_n(x_n) - \oplus f_n(\kappa_{n,n+1}(x)) = \oplus f_n(i_n(x_n)) - \oplus f_n(i_{n+1}(\kappa_{n,n+1}(x)))$$

$$= f_n(x_n) - f_{n+1}(\kappa_{n,n+1}(x)) = 0$$

por la condición de compatibilidad. La unicidad de f se da por la propiedad universal de la suma directa pues para todo $n \in \mathbb{N}$ se da la conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[d, "\iota_n"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\ \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n \arrow[r, "\tilde{f}\circ\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

entonces $\tilde{f} \circ \pi = \oplus f_n$ de lo que se deduce que $\tilde{f} = f$. $\square$

Ahora también daremos una caracterización del límite inverso:

Proposición 2.1.4 (Existencia de Límites Inversos en la Categoría de k-Módulos). *La categoría de módulos sobre un anillo posee límite inverso, con índices en* $\mathbb{N}$.

Demostración: Sea $(M_n, \sigma_{n+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema inverso. Consideremos la aplicación $\delta : \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n \rightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ definida por $\delta(\ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \mapsto (\ldots, (-1)^n(x_n - \sigma_{n+1,n}(x_{n+1}), \ldots)$. Denotemos $R = Nu(\delta)$. Veremos que R con $p_n = \pi_n \circ \iota$, donde ι es la inclusión canónica de $Nu(\delta)$ en $\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$, cumple la propiedad universal,es decir:

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M_n \cong Nu(\delta)$$

Verifiquemos primero la compatibilidad con los $\sigma_{n+1,n}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in Nu(\delta)$, $x = (\ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$, entonces

$\sigma_{n+1,n}(p_{n+1}(x)) - p_n(x) = \sigma_{n+1,n}(x_{n+1}) - x_n = \pm\pi_n(\delta(x)) = 0$, pues $x \in Nu(\delta)$, por lo tanto $\sigma_{n+1,n} \circ p_{n+1} = p_n$.

Sea Y un $k-$módulo y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ compatible con el sistema inverso. Debemos encontrar un morfismo

$$g : Y \rightarrow Nu(\delta)$$

que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "g_n"] \arrow[dr, "\prod_n g_n"] \arrow[dd, dashed, "g"'] & & M_n \\
& \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n \arrow[ur, "\pi_n"'] & \\
Nu(\delta) \arrow[ur, "\iota"'] & &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\mathrm{Im}(\prod_n g_n) \subset Nu(\delta)$, lo que nos permitiría definir de manera única: $g : y \mapsto \prod_n g_n(y)$. Sea $y \in Y$, entonces

$$\pi_n((\delta \circ \prod_n g_n)(y)) = \pm(\, \sigma_{n+1,n}(g_{n+1}(y)) - g_n(y)\,) = \pm(\, g_n(y) - g_n(y)\,) = 0$$

por la condición de compatibilidad de las g_n's. Esto se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $(\delta \circ \prod_n g_n)(y) = 0$. La unicidad de g se da por la propiedad universal del producto directo, pues si $\tilde{g} : Y \to Nu(\delta)$ también cumple la condición entonces:

$$\begin{tikzcd}
& & M_n \\
Y \arrow[urr, "g_n"] \arrow[r, "\iota\circ\tilde{g}"'] & \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n \arrow[ur, "\pi_n"'] &
\end{tikzcd}$$

tenemos que $\iota \circ \tilde{g} = \prod_n g_n$ de lo que se deduce que $\tilde{g} = g$. $\square$

2.2. Categorías de Sistemas Directos e Inversos

Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un conjunto parcialmente ordenado $(P, \prec)$ la clase de sistemas directos (e inversos) en $\mathcal{C}$ e índices en P constituyen una categoría para lo cual definimos sus morfismos: Sean $(S_i, \kappa_{i,j})_{i\in P,\, i\prec j}$ y $(R_i, \lambda_{i,j})_{i\in P,\, i\prec j}$ sistemas directos (inversos)en $\mathcal{C}$. Un morfismo $f : (S_i, \kappa_{i,j})_{i\in P,\, i\prec j} \to (R_i, \lambda_{i,j})_{i\in P,\, i\prec j}$ es una familia de morfismos $(f_i : S_i \to R_i)_{i\in P}$ tal que cumple la siguiente condición de compatibilidad:

Si $i \prec j$ entonces:

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\kappa_{i,j}"'] & R_i \arrow[d, "\lambda_{i,j}"] \\
S_j \arrow[r, "f_j"] & R_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Se puede probar fácilmente que los sistemas directos (inversos) con estos morfismos definen una categoría.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría con límites directos (inversos) con índices en $(P, \prec)$, se puede definir la aplicación:

$$\varinjlim : \begin{matrix}\text{Sistemas}\\ \text{Directos en } \mathcal{C}\end{matrix} \longrightarrow \mathcal{C}$$

Proposición 2.2.1. $\varinjlim : \begin{matrix}\textit{Sistemas}\\ \textit{Directos en } \mathcal{C}\end{matrix} \longrightarrow \mathcal{C}$ *es un funtor*

<u>Demostración</u>: Sean $(S_i, \kappa_{i,j})_{i\in P, i\prec j}$ y $(R_i, \lambda_{i,j})_{i\in P, i\prec j}$ sistemas directos en $\mathcal{C}$, y $f : (S_i, \kappa_{i,j})_{i\in P, i\prec j} \to (R_i, \lambda_{i,j})_{i\in P, i\prec j}$ un morfismo. Consideremos $S = \varinjlim_i S_i$ y $R = \varinjlim_i R_i$ con sus respectivas familias de morfismos $(\phi_i : S_i \to S)$ y $(\psi_i : R_i \to R)$. Entonces como

$$\begin{tikzcd}
 & & R \\
 & R_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[r, "\lambda_{i,j}"'] & R_j \arrow[u, "\psi_j"'] \\
S_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[rr, "\kappa_{i,j}"] \arrow[uurr, bend left, "\psi_i \circ f_i"] & & S_j \arrow[u, "f_j"'] \arrow[uu, bend right, "\psi_j \circ f_j"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo tenemos que R con la familia de morfismos $(\psi_i \circ f_i)$ es compatible con el sistema directo $(S_i, \kappa_{i,j})$, entonces tenemos que existe un único $f_* : S \to R$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[rr, bend left, "\psi_i \circ f_i"] \arrow[drr, "\phi_i"'] & R_i \arrow[r, "\psi_i"] & R \\
 & & S \arrow[u, dashed, "f_*"']
\end{tikzcd}$$

por la propiedad universal del límite directo. Definimos $\varinjlim_i((f_i)) := f_*$. Se puede probar fácilmente que es compatible con la composición. $\square$

De forma análoga se puede probar:

Proposición 2.2.2. $\varprojlim : \genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{Sistemas}}{\textit{Inversos en } \mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ *es un funtor*

$\square$

2.3. Pro-Categorías

Aquí veremos el tipo de categoría que se usarán en el presente trabajo. Sea (C) una categoría. La categoría que vamos a construir es llamada *Pro-Categoría de* $\mathcal{C}$ y denotada por $Pro-\mathcal{C}$. Los objetos de esta categoría son los sistemas inversos de (C) indexada por un conjunto dirigido $(P,\prec)$, a los que llamaremos de ahora en adelante *Pro-Objetos de* $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos definiremos después de algunos resultados.

Definición 2.3.1. *Sean $A, B \in Pro-\mathcal{C}$, llamaremos flecha entre A y B a un par ordenado $f = (I,(f_i)_{i\in P})$, donde $I : P \to P$ es tal que preserva las desigualdades estrictas en P, y los $f_i : A_{I(i)} \to B_i$, $i \in P$ son compatibles con el sistema directo, es decir, que para todo $i \succ j$, conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} A_{I(i)} & \xrightarrow{f_i} & B_i \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_{I(i),I(j)}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{i,j}} \\ A_{I(j)} & \xrightarrow{f_j} & B_j \end{array}$$

Por comodidad denotaremos simplemente σ a cualquiera de las aplicaciones que están definidas en el sistema inverso. A estas aplicaciones se les llama *mapeos estructurales*.

Sean $A, B, C \in Pro-\mathcal{C}$ y las flechas $f = (I,(f_i)_{i\in P})$, $g = (J,(g_i)_{i\in P})$ entre A y B; y B y C respectivamente. Se define la composición de g con f:

$$g \circ f = (I \circ J, (g_i \circ f_{J(i)})_{i\in P})$$

En diagramas:

$$A_{(I\circ J)(i)} \xrightarrow[f_{J(i)}]{} B_{J(i)} \xrightarrow[g_i]{} C_i$$

Esta composición es asociativa: Sean $A, B, C, D \in Pro-\mathcal{C}$ y las flechas $f = (I,(f_i)_{i\in P})$, $g = (J,(g_i)_{i\in P})$ y $h = (K,(k_i)_{i\in P})$ entre A y B, B y C; y C y D respectivamente, entonces

$$h \circ (g \circ f) = ((I \circ J) \circ K, (h_i \circ (g \circ f)_{K(i)})_{i\in P})$$

$$= ((I \circ J) \circ K, (h_i \circ (g_{K(i)} \circ f_{J(K(i))}))_{i\in P})$$

$$= (I \circ (J \circ K), ((h_i \circ g_{K(i)}) \circ f_{J(K(i))})_{i \in P})$$

$$= (I \circ (J \circ K), ((h_i \circ g_{K(i)}) \circ f_{J(K(i))})_{i \in P})$$

$$= (I \circ (J \circ K), ((h \circ g)_i \circ f_{J(K(i))})_{i \in P})$$

$$= (I \circ (J \circ K), ((h \circ g)_i \circ f_{J(K(i))})_{i \in P})$$

$$= (h \circ g) \circ f$$

En diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A_{I(J(K(i)))} \arrow[r, "f_{J(K(i))}"'] \arrow[rr, bend left, "(g \circ f)_{K(i)}"] & B_{J(K(i))} \arrow[r, "g_{K(i)}"'] \arrow[rr, bend right, "(h \circ g)_i"'] & C_{K(i)} \arrow[r, "h_i"] & D_i
\end{tikzcd}$$

Definiremos ahora una relación entre flechas de dos Pro-objetos. Sean $A, B \in Pro-\mathcal{C}$, diremos que dos flechas $f = (I, (f_i)_{i \in P})$ y $g = (J, (g_i)_{i \in P})$ entre A, B están relacionadas, $f \sim g$, si para cada $i \in P$, existe un $k \in P$, con $k \succ I(i)$ y $k \succ J(i)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma"'] & A_{I(i)} \arrow[d, "f_i"] \\
A_{J(i)} \arrow[r, "g_i"] & B_i
\end{tikzcd}$$

Se puede verificar que esta relación es de equivalencia. La clase de equivalencia de una flecha f será denotada por $[f]$. Veamos que esta relación es compatible con la composición:

Proposición 2.3.1. *Sean $A, B, C \in Pro-\mathcal{C}$, si f, f_1, f_2 son flechas de A hacia B y g, g_1, g_2 de B hacia C, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $g_1 \sim g_2$ entonces $g_1 \circ f \sim g_2 \circ f$.*

2. *Si $f_1 \sim f_2$ entonces $g \circ f_1 \sim g \circ f_2$.*

3. Si $g_1 \sim g_2$ y $f_1 \sim f_2$ entonces $g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$.

<u>Demostración</u>: Claramente *3.* se deduce de *1.* y *2.*. Sean $f = (I, (f_i)_{i\in P})$, $f_1 = (I_1, (f_{1i})_{i\in P})$, $f_2 = (I_2, (f_{2i})_{i\in P})$, $g = (J, (g_i)_{i\in P})$, $g_1 = (J_1, (g_{1i})_{i\in P})$ y $g_2 = (J_2, (g_{2i})_{i\in P})$.

1. Si $f_1 \sim f_2$, sea $i \in P$,

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[drr, "\sigma"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & & & & \\
& & A_{I_1(J(i))} \arrow[dr, "f_{1J(i)}"] \arrow[drr, bend left, "(g\circ f_1)_i"] & & \\
& A_{I_2(J(i))} \arrow[rr, "f_{2J(i)}"] \arrow[rrr, bend right, "(g\circ f_2)_i"'] & & B_{J(i)} \arrow[r, "g_i"] & C_i
\end{tikzcd}$$

el cuadrado más grande es conmutativo de donde $g \circ f_1 \sim g \circ f_2$

2. Tenemos que $g_1 \sim g_2$, sea $j \in P$.

$$\begin{tikzcd}
A_{I(k)} \arrow[rr, "f_k"] \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & & B_k \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[ddr, "\sigma"] & & \\
& A_{I(J_1(i))} \arrow[rr, "f_{J_1(i)}"'] & & B_{J_1(i)} \arrow[dr, "g_{1j}"] & \\
& A_{I(J_2(i))} \arrow[rr, "f_{J_2(i)}"'] & & B_{J_2(i)} \arrow[r, "g_{2j}"] & C_j
\end{tikzcd}$$

Como todos los cuadrados conmutan tenemos que:

$$\begin{tikzcd}
A_{I(k)} \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & & & & \\
& A_{I(J_1(i))} \arrow[rr, "f_{J_1(i)}"'] \arrow[drrr, bend left=60, "(g_1\circ f)_j"] & & B_{J_1(i)} \arrow[dr, "g_{1j}"] & \\
& A_{I(J_2(i))} \arrow[rr, "f_{J_2(i)}"'] \arrow[rrr, bend right, "(g_2\circ f)_j"'] & & B_{J_2(i)} \arrow[r, "g_{2j}"] & C_j
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que $g_1 \circ f \sim g_2 \circ f$. □

Podemos construir flechas equivalentes a la identidad a partir de los mapeos estructurales $(\sigma_{i,j})$. Sea $I : P \to P$ una función que preserva las desigualdades estrictas. Consideremos la flecha $\sigma := (I, (\sigma_{P(i),i})_{i \in P})$

Proposición 2.3.2. $\sigma \sim id_A = (id_P, (id_{A_i})_{i \in P})$

Demostración: Basta observar que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_{I(i)} \arrow[r, "\sigma_{I(i),i}"] \arrow[d, "id_{A_{I(i)}}"'] & A_i \arrow[d, "id_{A_i}"] \\ A_I(i) \arrow[r, "\sigma_{I(i),i}"] & A_i \end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada $i \in P$. $\square$

Definición 2.3.2 (Pro-Categoría). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $(P, \prec)$ un conjunto dirigido. Llamaremos Pro-categoría de $\mathcal{C}$ a la categoría cuyos objetos son los sistemas directos de $\mathcal{C}$ sobre $(P, \prec)$ y para $A, B \in Pro - \mathcal{C}$ definimos:*

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \{[f]/f \textit{ es una flecha entre } A \textit{ y } B\}$$

la composición por:

$$[g] \circ [f] := [g \circ f], \textit{ donde } [f] \in \mathrm{Hom}(A, B) \textit{ y } [g] \in \mathrm{Hom}(B, C)$$

y la identidad por $Id_A := [id_A]$, donde $A \in Pro - \mathcal{C}$

Si bien en un morfismo $[f] \in \mathrm{Hom}(A, B)$ no siempre se encuentra una flecha cuya función entre índices sea la identidad (nivel a nivel), podemos encontrar un $Pro-$objeto isomorfo a A tal que se induzca de forma única una flecha que cuya función entre índices sea la identidad. Con esto podremos mostrar después que muchas propiedades de las categorías son heredadas por sus respectivas $Pro-$categorías.

Proposición 2.3.3. *Sean $A, B \in Pro - \mathcal{C}$, y $f = (I, (f_i)_{i \in P})$ una flecha entre A y B, entonces existe un único $Pro-$objeto $\tilde{A}$ y una única flecha $\tilde{f} = (id_P, (\tilde{f}_i)_{i \in P})$, tal*

1. *$\tilde{A} \cong A$ (isomorfos en $Pro-\mathcal{C}$).*

2. *Conmuta el siguiente diagrama de flechas:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, "\sigma"'] & & B \\ & & \tilde{A} \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

donde σ es el mapeo estructural inducido por I:

$\sigma := (I, \sigma_i = \sigma_{I(i),I(i)} : A_{I(i)} \to \tilde{A}_i)_{i\in P}$

<u>Demostración</u>: Veamos primero la unicidad de $\tilde{f}$. Como conmuta el diagrama, entonces $f = \tilde{f}\circ\sigma = (I \circ id_P, (\tilde{f}_i \circ \sigma_{id_P(i)})_{i\in P}) = (I, (\tilde{f}_i)_{i\in P})$, luego $f = (I, (f_i : A_{I(i)} \to B_i)_{i\in P}) = (I, (\tilde{f}_i)_{i\in P})$ de lo que se deduce: $\tilde{f}_i = f_i : A_{I(i)} \to B_i$, la existencia es clara. Veamos ahora que el isomorfismo entre A y $\tilde{A}$ es justamente la clase de equivalencia de σ. Definamos $\iota = (id_P, (\sigma_{I(i),i})_{i\in P})$. Mostraremos que ésta es la inversa de σ.

$$(\sigma\circ\iota) = (id_P \circ I, (\sigma_i \circ \iota_{I(i)})_{i\in P}) = (I, (\sigma_{I(i),I(i)} \circ \iota_{I(i)})_{i\in P})$$

$$= (I, (\sigma_{I(i),I(i)} \circ \sigma_{I(I(i)),I(i)})_{i\in P}) = (I, (\sigma_{I(I(i)),I(i)})_{i\in P}) \sim id_{\tilde{A}}$$

$\Longrightarrow (\sigma\circ\iota) \sim id_{\tilde{A}}$

$$(\iota\circ\sigma) = (I \circ id_p, (\iota_i \circ \sigma_i)_{i\in P}) = (I, (\sigma_{I(i),(i)} \circ \sigma_{I(i),I(i)})_{i\in P})$$

$$= (I, (\sigma_{I(i),(i)})_{i\in P}) \sim id_A$$

$\Longrightarrow (\iota\circ\sigma) \sim id_A$. $\square$

En el caso de que el conjunto de índices sea $\mathbb{N}$ se puede dar la siguiente caracterización:

$$\mathrm{Hom}(A, B) \cong \varprojlim_m \varinjlim_n \mathrm{hom}(A_n, B_m)$$

2.4. Categorías con Objeto Nulo

Sea $\mathcal{C}$ una categoría

Definición 2.4.1. *Un objeto $I \in \mathcal{C}$ es llamado Objeto inicial si para cada objeto $B \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $f : I \to B$*

Definición 2.4.2. *Un objeto $F \in \mathcal{C}$ es llamado Objeto Final si para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $f : A \to F$*

Definición 2.4.3. *Un objeto $0 \in \mathcal{C}$ es llamado Objeto Nulo si es inicial y final a la*

Si una categoría posee objeto nulo, éste es único, salvo isomorfismo: Sea $0' \in \mathcal{C}$ otro objeto nulo, entonces: $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\delta'"'] \arrow[rr, bend left, "id_0"] & 0' \arrow[r, "\delta"'] & 0 \end{tikzcd}$ y $\begin{tikzcd} 0' \arrow[r, "\delta"'] \arrow[rr, bend left, "id_{0'}"] & 0 \arrow[r, "\delta'"'] & 0' \end{tikzcd}$, donde δ y δ' son los morfismos dados por la definición de objeto nulo.

Los únicos morfismos $0 \longrightarrow A$ y $A \longrightarrow 0$ se les denota también por 0.

Definición 2.4.4 (Núcleo Categórico). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo, $A, B \in \mathcal{C}$ y $f : A \to B$, diremos que $(K, \kappa : K \to A)$ es un núcleo de f si $f \circ \kappa = 0$ y se cumple la siguiente propiedad universal:*

Para todo objeto $C \in \mathcal{C}$ y todo $g : C \to A$ tal que $f \circ g = 0$ existe un único morfismo $h : C \to K$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\kappa"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ C \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Definición 2.4.5 (Co-Núcleo Categórico). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo, $A, B \in \mathcal{C}$ y $f : A \to B$, diremos que $(\Xi, \xi : B \to \Xi)$ es un co-núcleo de f si $\xi \circ f = 0$ y se cumple la siguiente propiedad universal:*

Para todo objeto $D \in \mathcal{C}$ y todo $g : B \to D$ tal que $g \circ f = 0$ existe un único morfismo $k : \Xi \to B$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "g"'] & \Xi \arrow[d, dashed, "k"] \\ & & D \end{tikzcd}$$

Diremos que una categoría posee núcleo (co-núcleo) si todo morfismo entre sus objetos posee núcleo(co-núcleo). Muchas categorías familiares poseen estos objetos como los grupos abelianos, módulos sobre un anillo, complejos de cadena, etc. Las propiedades universales usadas en sus definiciones hacen que estos objetos únicos cada categoría salvo isomorfismos.

Proposición 2.4.1 (Unicidad del Núcleo de un Morfismo). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo, $A, B \in \mathcal{C}$ y $f : A \to B$. Si (K_1, κ_1) y (K_2, κ_2) son núcleo de f entonces K_1 y K_2 son isomorfos.*

Demostración: Como ambos pares cumplen la propiedad, existen $h_1 : K_2 \to K_1$ y $h_2 : K_1 \to K_2$ tales que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[r, "\kappa_1"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
K_2 \arrow[u, dashed, "h_1"] \arrow[ur, "\kappa_2"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_2 \arrow[r, "\kappa_2"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
K_1 \arrow[u, dashed, "h_2"] \arrow[ur, "\kappa_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Combinando ambos diagramas obtenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[r, "\kappa_1"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
K_2 \arrow[u, "h_1"] \arrow[ur, "\kappa_2"] & & \\
K_1 \arrow[u, "h_2"] \arrow[uur, "\kappa_1"'] \arrow[uu, dashed, bend left=60, "id_{K_1}"] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_2 \arrow[r, "\kappa_2"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
K_1 \arrow[u, "h_2"] \arrow[ur, "\kappa_1"] & & \\
K_2 \arrow[u, "h_1"] \arrow[uur, "\kappa_2"'] \arrow[uu, dashed, bend left=60, "id_{K_2}"] & &
\end{tikzcd}
$$

Por la propiedad universal $h_1 \circ h_2 = id_{K_1}$ y $h_2 \circ h_1 = id_{K_2}$. □

Proposición 2.4.2 (Unicidad del Co-Núcleo de un Morfismo). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo, $A, B \in \mathcal{C}$ y $f : A \to B$. Si (Ξ_1, ξ_1) y (Ξ_2, ξ_2) son co-núcleo de f entonces Ξ_1 y Ξ_2 son isomorfos.*

Demostración: Es análoga a la de la proposición anterior. □

Denotaremos $(\mathrm{Nu}(f), \mathrm{nu}(f))$ y $(\mathrm{Conu}(f), \mathrm{conu}(f))$ a pares cualquiera que sean núcleo y co-núcleo de un morfismo f respectivamente

En categorías algebraicas familiares se tiene núcleo y co-núcleo canónico. En la siguiente proposición se da la forma de estos objetos en la categoría de $\Lambda-$módulos, donde Λ es un anillo.

Proposición 2.4.3 (Núcleo y Co-núcleo de un morfismos de $\Lambda-$módulos). *Sea $f : M \to N$ un morfismo de $\Lambda-$módulos, entonces:*

$$Ker(f) := f^{-1}(0) \text{ y } ker(f) : Ker(f) \hookrightarrow N$$

$$Coker(f) := \frac{N}{f(M)} \text{ y } coker(f) := m \mapsto m + f(M)$$

□

Una propiedad que hereda de forma natural una $Pro-$categoría de la categoría de la cual proviene es la existencia del objeto nulo:

Proposición 2.4.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo 0 y $(P, \prec)$ un conjunto dirigido, entonces $Pro - \mathcal{C}$ tiene como objeto nulo al $Pro-$objeto:* $0 := (0)_{i \in P}$

Demostración: Probaremos que 0 es un objeto inicial: Sea $f = (I, (f_i)_{i \in P}) : 0 \to A$ una flecha en $Pro - \mathcal{C}$. Pero por definición de objeto nulo de $\mathcal{C}$ cada $f_i = 0$, por lo que $f \sim (id_p, (0)_{i \in P})$ de lo que se tiene que cualquier flecha que proviene del $Pro-$objeto 0 es equivalente a $(id_p, (0)_{i \in P})$. La prueba de que 0 es un objeto final es similar. □

Ahora que hemos visto que si una categoría posee objeto nulo entonces también lo posee su $Pro-$categoría sobre un conjunto dirigido $(P, \prec)$, es natural preguntarse si también hereda la propiedades de tener núcleo o co-núcleo. La respuesta es afirmativa:

Proposición 2.4.5 ($Pro-$Categorías de Categorías con Núcleo). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con núcleo y $(P, \prec)$ un conjunto dirigido, entonces la $Pro-$categoría de $\mathcal{C}$ sobre $(P, \prec)$ también posee núcleo*

Lo mismo para el co-núcleo:

Proposición 2.4.6 (*Pro*−**Categorías de Categorías con Co-Núcleo).** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con co-núcleo y $(P, \prec)$ un conjunto dirigido, entonces la Pro−categoría de $\mathcal{C}$ sobre $(P, \prec)$ también posee co-núcleo*

2.5. Categorías Aditivas

La noción de categoría aditiva nace inspirada en las propiedades universales de la suma directa y producto directo en las categorías de módulos sobre un anillo. Para estas categorías en cada uno de sus objetos hay una estructura de grupo abeliano que otorga a sus conjuntos de morfismos una estructura natural de grupo abeliano. Ésta es la propiedad que caracterizará a un tipo de categoría previa a la de categoría aditiva.

Definición 2.5.1. *Decimos que una categoría $\mathcal{C}$, es Pre-Aditiva si para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, $\hom(A, B)$ es un grupo abeliano, y la composición $\circ : \hom(A, B) \times \hom(B, C) \to \hom(A, C)$ es bilineal.*

A un morfismo entre dos objetos de una categoría pre-aditiva se le llama *homomorfismo*. Dados dos objetos $A, B \in \mathcal{C}$, al elemento neutro de $\hom(A, B)$ lo denotamos por 0. Diremos que un objeto M es un *objeto cero* si $id_M = 0$. En esta categoría los conceptos de objeto inicial y final son equivalentes entre sí y a la vez equivalentes cada uno al de objeto cero.

Proposición 2.5.1. *En una categoría $\mathcal{C}$ pre-aditiva, un objeto es cero si y sólo si es final.*

Demostración: Sea $M \in \mathcal{C}$ un objeto cero y $A \in \mathcal{C}$. Es inmediato que $\hom(A, M)$ tiene un sólo elemento, es decir que $\hom(A, M)$ es el grupo nulo, pues para cualquier $f : A \to M$ tenemos $f = f \circ id_M = 0$, por la bilinealidad de la composición. Por lo tanto M es un objeto final. La otra implicación es obvia, pues si $F \in \mathcal{C}$ es objeto final entonces $\hom(F, F)$ tiene un solo objeto lo cual quiere decir que $id_F = 0$. $\square$
Análogamente se tiene:

Proposición 2.5.2. *En una categoría $\mathcal{C}$ pre-aditiva, un objeto es cero si y sólo si es inicial.*

Por lo tanto en una categoría pre-aditiva los conceptos de objeto nulo y objeto cero son equivalentes.

Definición 2.5.2 (Biproducto). *Dados dos objetos $A, B \in \mathcal{C}$ de una categoría aditiva. Decimos que S es biproducto de A y B si existen $i_A : A \to S$, $i_B : B \to S$, $p_A : S \to A$ y $p_B : B \to S$ tales que:*

1. $p_A \circ i_A = id_A$, $p_B \circ i_B = id_B$.

2. $i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = id_S$.

Proposición 2.5.3. $p_B \circ i_A = 0$ *y* $p_A \circ i_B = 0$.

Demostración:

$$p_A \circ (i_A \circ p_A) + p_A \circ (i_B \circ p_B) = p_A \circ (id_S)$$

$$(p_A \circ i_A) \circ p_A + (p_A \circ i_B) \circ p_B = p_A$$

$$id_A \circ p_A + (p_A \circ i_B) \circ p_B = p_A$$

$$p_A + (p_A \circ i_B) \circ p_B = p_A$$

$$(p_A \circ i_B) \circ p_B = 0$$

$$(p_A \circ i_B) \circ (p_B \circ i_B) = 0$$

$$(p_A \circ i_B) \circ id_B = 0$$

$$p_A \circ i_B = 0$$

Análogamente $p_B \circ i_A = 0$. $\square$

Proposición 2.5.4 (Propiedades Universales del Biproducto). *Sean $A, B, S \in \mathcal{C}$.*

1. *Si S es biproducto de A y B, entonces para todo objeto M y para todo par de homomorfismos $f_A : A \to M$ y $f_B : B \to M$ existe un único homomorfismo $f : S \to M$ tal que conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f_A"] & & \\ & S \arrow[r, dashed, "f"'] & M \\ B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & & \end{tikzcd}$$

2. *Si S es biproducto de A y B, entonces para todo objeto N y para todo par de homomorfismos $g_A : N \to A$ y $g_B : N \to B$ existe un único homomorfismo $g : N \to S$ tal que conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & & A \\ M \arrow[urr, "g_A"] \arrow[r, dashed, "g"'] \arrow[drr, "g_B"'] & S \arrow[ur, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

Demostración: Definamos $f = f_A \circ p_A + f_B \circ p_B$, por la proposición anterior: $p_B \circ i_A = 0$ y por la definición de biproducto: $p_A \circ i_A = id_A$, luego $f \circ i_A = f_A$, similarmente $f \circ i_B = f_B$. Veamos ahora la unicidad. Si $g : S \to M$ hace conmutar el diagrama, entonces:

$$g = g \circ id_S = g \circ (i_A \circ p_A + i_B \circ p_B)$$

$$g = (g \circ i_A) \circ p_A + (g \circ i_B) \circ p_B$$

$$g = f_A \circ p_A + f_B \circ p_B = f$$

Corolario 2.5.1. *Si S y S' son biproductos de A y B entonces son isomorfos.*

Aplicando el funtor $\mathbf{F}$ a las ecuaciones que definen el biproducto:

1. $\mathbf{F}(p_A \circ i_A) = \mathbf{F}(id_A)$

   $\mathbf{F}(p_A) \circ \mathbf{F}(i_A) = id_{\mathbf{F}(A)}$. Similarmente $\mathbf{F}(p_B) \circ \mathbf{F}(i_B) = id_{\mathbf{F}(B)}$

2. $\mathbf{F}(i_A \circ p_A + i_B \circ p_B) = \mathbf{F}(id_{A\oplus B})$

   $\mathbf{F}(i_A) \circ \mathbf{F}(p_A) + \mathbf{F}(i_B) \circ \mathbf{F}(p_B) = \mathbf{F}(id_{A\oplus B})$

   $\mathbf{F}(i_A) \circ \mathbf{F}(p_A) + \mathbf{F}(i_B) \circ \mathbf{F}(p_B) = id_{\mathbf{F}(A\oplus B)}$.

Se ve, entonces, que los morfismos $\mathbf{F}(i_A), \mathbf{F}(i_B), \mathbf{F}(p_A), \mathbf{F}(p_B)$ hacen de $\mathbf{F}(A \oplus B)$ un biproducto de $\mathbf{F}(A)$ y $\mathbf{F}(B)$ por el corolario anterior $\mathbf{F}(A \oplus B) \cong \mathbf{F}(A) \oplus \mathbf{F}(B)$. $\square$

Como ejemplos importantes de funtores aditivos, estudiaremos los que provienen de los morfismos de una categoría pre-aditiva

Proposición 2.5.6 (El Funtor $\mathrm{Hom}(A, -)$**).** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría pre-aditiva. Si $A \in \mathcal{C}$, la aplicación $\mathrm{Hom}(A, -) : X \mapsto \mathrm{hom}(A, X)$ y a cada $\alpha : X \to Y$ le asigna $\alpha_* : f \in \mathrm{hom}(A, X) \mapsto \alpha \circ f$ es un funtor aditivo entre $\mathcal{C}$ y $\mathfrak{Ab}$ (categoría de grupos abelianos y sus homomorfismos).*

Proposición 2.5.7 (El Co-Funtor $\mathrm{Hom}(-, B)$**).** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría pre-aditiva. Si $A \in \mathcal{C}$, la aplicación $\mathrm{Hom}(-, B) : X \mapsto \mathrm{hom}(X, B)$ y a cada $\alpha : X \to Y$ le asigna $\alpha^* : f \in \mathrm{hom}(Y, B) \mapsto f \circ \alpha$ es un co-funtor aditivo entre $\mathcal{C}$ y $\mathfrak{Ab}$ (categoría de grupos abelianos y sus homomorfismos).*

La prueba de ambas proposiciones son inmediatas usando que $\circ$ es una bilineal. La propiedad de aditividad (pre-aditividad) es también heredada por la $Pro-$categoría:

Proposición 2.5.8. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva y $(P, \prec)$ es un conjunto dirigido, entonces la $Pro - \mathcal{C}$ con índices en P es aditiva.*

2.6. Categorías Graduadas

Definición 2.6.1 (Categoría Graduada). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea Γ un grupo abeliano, llamaremos* categoría Γ-graduada *de $\mathcal{C}$, denotada por $\mathfrak{grad}_\Gamma(\mathcal{C})$ a la categoría* tal que:

1. *Sus objetos son sucesiones de objetos de $\mathcal{C}$ con índices en* Γ.

2. *Si* $A = (A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *y* $B = (B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *son objetos de* $\mathfrak{grad}_\Gamma(\mathcal{C})$, *entonces un morfismo entre* A *y* B *es una sucesión* $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, *donde* $f_\gamma \in \hom(A_\gamma, B_{\gamma+\kappa})$, *para algún* $\kappa \in \Gamma$ *fijo. Dicho número* κ *es llamado* grado del morfismo.

3. *Si* $f = (f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *es un morfismo de grado* κ *y* $g = (g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *es un morfismo de grado* λ, *entonces definimos su composición como:* $g \circ f = (g_{\gamma+\kappa} \circ f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, *que es de grado* $\kappa + \lambda$.

4. *Para un objeto* $A \in \mathfrak{grad}_\Gamma(\mathcal{C})$ *el morfismo identidad es* $id_A = (id_{A_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$

Para $\mathfrak{grad}_\Gamma(\mathcal{C})$, el conjunto de morfismos entre dos objetos $A = (A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ y $B = (B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \bigcup_{\kappa\in\Gamma} \mathrm{Hom}^\kappa(A, B)$$

donde $\mathrm{Hom}^\kappa(A, B)$ es el conjunto de morfismos de grado κ.

Cuando la categoría es pre-aditiva, los objetos de su categoría graduada con los morfismos grado común κ, es pre-aditiva también con la suma de grupos término a término, para cada $\kappa \in \Gamma$. Veremos ahora que la condición de aditividad también se hereda. Denotemos por $\mathfrak{grad}^\kappa_\Gamma(\mathcal{C})$ a la categoría, cuyos objetos son los mismos de $\mathfrak{grad}_\Gamma(\mathcal{C})$ pero sólo con morfismos de grado κ.

Proposición 2.6.1. *Si* $\mathcal{C}$ *es aditiva entonces* $\mathfrak{grad}^\kappa_\Gamma(\mathcal{C})$ *también es aditiva.*

<u>Demostración</u>: Sean $A = (A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}, B = (B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathfrak{grad}^\kappa_\Gamma(\mathcal{C})$. Sea $S = (S_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, donde $S_\gamma = A_\gamma \oplus B_\gamma$, con morfismos $i_{A_\gamma}, i_{B_\gamma}, p_{A_\gamma}$ y p_{B_γ}, para cada $\gamma \in \Gamma$. Es inmediato verificar que $i_A := (i_{A_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$, $i_B := (i_{B_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$, $p_A := (p_{A_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ y $p_B := (p_{B_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$, hacen de $S = (S_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ un biproducto de A y B. $\square$

El hecho de tener núcleo y co-núcleo también se transfieren a las categorías graduadas.

Proposición 2.6.2. *Sea $\mathcal{C}$ con objeto nulo. Si $\mathcal{C}$ es una categoría con núcleo entonces $\mathfrak{grad}_\Gamma(\mathcal{C})$, que tiene por objeto nulo a la sucesión constante del objeto nulo, también es con núcleo.*

Demostración: Sean $A = (A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}, B = (B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathfrak{grad}_\Gamma(\mathcal{C})$, y $g = (g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} : C \to A$. Supongamos que ambas son de grado 0. En otro caso la prueba es análoga. Sea $g = (g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} : C \to A$ tal que $f \circ g = 0$, entonces para cada $\gamma \in \Gamma$ $f_\gamma \circ g_\gamma = 0$. Luego existen únicos $h_\gamma : C \to \mathrm{Nu}(f_\gamma)$ tal que $g_\gamma = \mathrm{nu}(f_\gamma) \circ h_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. De esto vemos que si definimos $K = (\mathrm{Nu}(f_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ y $k = (\mathrm{nu}(f_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$, el par (K, k) es un núcleo para f. □

La demostración del siguiente hecho es completamente similar:

Proposición 2.6.3. *Sea $\mathcal{C}$ con objeto nulo. Si $\mathcal{C}$ es una categoría con co-núcleo entonces $\mathfrak{grad}_\Gamma(\mathcal{C})$, que tiene por objeto nulo a la sucesión constante del objeto nulo, también es con co-núcleo.*

2.7. Homología

Definición 2.7.1 (Categoría de Complejos). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría que posee núcleo y co-núcleo, Δ un grupo cíclico y $\varepsilon \in \Delta$, un generador. Llamaremos* categoría de complejos sobre (Δ, ε), *que denotaremos por $\mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$, a la categoría con las siguientes características:*

1. *Los objetos son pares, llamados complejos, (C, ∂), donde $C \in \mathfrak{grad}_\Delta(C, C)$ y $\partial \in \mathrm{Hom}^{-\varepsilon}_{\mathfrak{grad}_\Delta}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ tal que $\partial \circ \partial = 0$*
2. *Un morfismo f entre dos objetos $(C, \partial_C), (D, \partial_D)$, es un elemento de $\mathrm{Hom}^{0}_{\mathfrak{grad}_\Delta}(C, D)$, tal que $f \circ \partial_C = \partial_D \circ f$*
3. *La composición de morfismos y la identidad de un objeto de $\mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$ son las mismas de las categorías graduadas.*

Definición 2.7.2 (Objeto Graduado de Homología). *Sea $\mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$ una categoría de complejos sobre $\mathcal{C}$ y $(C, \partial) \in \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$. Definimos $H(C)$ de la siguiente forma: Tenemos* *que* $\partial \circ \partial = 0$, *entonces existe un único* $h_C : \mathrm{Conu}(\partial) \to C$, *de grado* $-\varepsilon$, *tal que* $h_C \circ \mathrm{conu}(\partial) = \partial$, *entonces*

$$H(C) := \mathrm{Nu}(h_C)$$

será llamado objeto graduado de homología de C

Hemos asignado a cada complejo $C \in \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$ un objeto graduado $H(C)$, en la siguiente proposición veremos que esa asignación es funtorial.

Proposición 2.7.1. $H : \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon} \to \mathfrak{grad}_\Delta(\mathcal{C})$ *es un funtor.*

Demostración: Establezcamos primero cómo actúa sobre los morfismos de complejos. Sean $C, D \in \mathfrak{grad}_\Delta(\mathcal{C})$. Si $f : C \to D$.

$$(\mathrm{conu}(\partial_D) \circ f) \circ \partial_C = \mathrm{conu}(\partial_D) \circ (f \circ \partial_C) = \mathrm{conu}(\partial_D) \circ (\partial_D \circ f) = 0$$

Por la propiedad universal del co-núcleo, existe un único morfismo $j_f : \mathrm{Conu}(\partial_C) \to \mathrm{Conu}(\partial_D)$ tal que: $\mathrm{conu}(\partial_D) \circ f = j_f \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$. Por otro lado tenemos que $f \circ \partial_C$ cumple $(f \circ \partial_C) \circ \partial_C = 0$, por la propiedad universal del co-núcleo hay una única forma de descomponer $f \circ \partial_C$ con el co-núcleo.

Ahora, $f \circ \partial_C = f \circ (h_C \circ \mathrm{conu}(\partial_C)) = (f \circ h_C) \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$, lo que sería una descomposición de $f \circ \partial_C$.

Pero $(h_D \circ j_f) \circ \mathrm{conu}(\partial_C) = h_D \circ (j_f \circ \mathrm{conu}(\partial_C)) = h_D \circ (\mathrm{conu}(\partial_D) \circ f) = (h_D \circ \mathrm{conu}(\partial_D)) \circ f = \partial_D \circ f = f \circ \partial_C$, lo que sería otra descomposición de $f \circ \partial_C$. Por la unicidad se tiene que: $f \circ h_C = h_D \circ j_f$. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nu}(h_C) \arrow[r, "\mathrm{nu}(h_C)"] & \mathrm{Conu}(\partial_C) \arrow[r, "h_C"] \arrow[d, "j_f"] & C \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Nu}(h_D) \arrow[r, "\mathrm{nu}(h_D)"] & \mathrm{Conu}(\partial_D) \arrow[r, "h_D"] & D
\end{tikzcd}$$

Mostraremos que existe un único $\phi : \mathrm{Nu}(h_C) \to \mathrm{Nu}(h_D)$ que cierra el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nu}(h_C) \arrow[r, "\mathrm{nu}(h_C)"] \arrow[d, dashed, "\phi"] & \mathrm{Conu}(\partial_C) \arrow[r, "h_C"] \arrow[d, "j_f"] & C \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Nu}(h_D) \arrow[r, "\mathrm{nu}(h_D)"] & \mathrm{Conu}(\partial_D) \arrow[r, "h_D"] & D
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $h_D \circ (j_f \circ \mathrm{nu}(h_C)) = (h_D \circ j_f) \circ \mathrm{nu}(h_C) = (f \circ h_C) \circ \mathrm{nu}(h_C) = f \circ (h_C \circ \mathrm{nu}(h_C)) = 0$. Entonces existe un único $\phi : \mathrm{Nu}(h_C) \to \mathrm{Nu}(h_D)$ tal que $j_f \circ \mathrm{nu}(h_C) = \mathrm{nu}(h_D) \circ \phi$. Definimos entonces: $H(f) : H(C) \to H(D) := \phi$.

Recapitulando, para un morfismo $f : C \to D$, definimos $H(f) = H(C) \to H(D)$ el único morfismo tal que

$$j_f \circ \mathrm{nu}(h_C) = \mathrm{nu}(h_D) \circ H(f)$$

donde $j_f : \mathrm{Conu}(h_C) \to \mathrm{Conu}(h_D)$ es el único morfismo tal que

$$\mathrm{conu}(\partial_D) \circ f = j_f \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

Fácilmente se verifica que $H(id_C) = id_{H(C)}$.

Veamos ahora cómo se comporta con la composición. Sean $f : C \to D$ y $g : D \to F$, morfismos de complejos. Tenemos

$$j_f \circ \mathrm{nu}(h_C) = \mathrm{nu}(h_D) \circ H(f), j_g \circ \mathrm{nu}(h_D) = \mathrm{nu}(h_F) \circ H(g)$$

donde:

$$\mathrm{conu}(\partial_D) \circ f = j_f \circ \mathrm{conu}(\partial_C), \mathrm{conu}(\partial_F) \circ g = j_g \circ \mathrm{conu}(\partial_D)$$

entonces

$$(\mathrm{conu}(\partial_F) \circ g) \circ f = j_g \circ (\mathrm{conu}(\partial_D) \circ f) = j_g \circ (j_f \circ \mathrm{conu}(\partial_C))$$

$$\mathrm{conu}(\partial_F) \circ (g \circ f) = (j_g \circ j_f) \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

Por unicidad $j_{g\circ f} = j_g \circ j_f$. De la definición

$$\mathrm{nu}(h_F) \circ H(g \circ f) = j_{g\circ f} \circ \mathrm{nu}(h_C)$$

$$(j_g \circ j_f) \circ \mathrm{nu}(h_C) = j_g \circ (j_f \circ \mathrm{nu}(h_C))$$

$$= j_g \circ (\mathrm{nu}(h_D) \circ H(f)) = (j_g \circ \mathrm{nu}(h_D)) \circ H(f)$$

$$= (\mathrm{nu}(h_F) \circ H(g)) \circ H(f) = \mathrm{nu}(h_F) \circ (H(g) \circ H(f))$$

Por unicidad $H(g \circ f) = H(g) \circ H(f)$, con lo que queda demostrado que H es un funtor. □

2.8. Homología sobre Categorías Aditivas

La propiedad de pre-aditividad y aditividad es transmitida de una categoría a sus respectivas categorías graduadas:

Proposición 2.8.1. *Si $\mathcal{C}$ es aditiva entonces $\mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$ es aditiva, donde Δ un grupo cíclico y $\varepsilon \in \Delta$ un generador.*

Demostración: Ya se ha visto que $\mathfrak{grad}^0_\Delta(\mathcal{C})$ es aditiva. Sean (C, ∂_C) y (D, ∂_D) dos complejos. Definimos $(C, \partial_C) \oplus (D, \partial_D) := (C \oplus D, \partial_C \oplus \partial_D)$, se trata de un complejo pues $(\partial_C \oplus \partial_D) \circ (\partial_C \oplus \partial_D) = (\partial_C \circ \partial_C) \oplus (\partial_D \circ \partial_D) = 0 \oplus 0 = 0$.
También la categoría de complejos sobre una categoría con núcleo tiene núcleo.

Proposición 2.8.2. *Sea $\mathcal{C}$ con objeto nulo. Si $\mathcal{C}$ es una categoría que tiene núcleo entonces $\mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$, que tiene por objeto nulo a la sucesión constante del objeto nulo, también tiene núcleo.*

Demostración: Sean (C, ∂_C) y (D, ∂_D) dos complejos, y $f : (C, \partial_C \to (D, \partial_D)$ un morfismo de complejos. Sea $k := \mathrm{nu}(f : C \to D)$ y $K := \mathrm{Nu}(f : C \to D)$. Se mostrará que (K, k) es un núcleo de f como morfismo de objetos graduados. Le daremos una estructura de complejo. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nu}(f_i) \arrow[r, "\mathrm{nu}(f_i)"] & C \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\partial_C"] & D \arrow[d, "\partial_D"] \\
\mathrm{Nu}(f_{i-\varepsilon}) \arrow[r, "\mathrm{nu}(f_{i-\varepsilon})"] & C \arrow[r, "f_{i-\varepsilon}"] & D
\end{tikzcd}$$

Como $f_{i-\varepsilon} \circ (\partial_C \circ \mathrm{nu}(f_i)) = (f_{i-\varepsilon} \circ \partial_C) \circ \mathrm{nu}(f_i) = (\partial_D \circ f_i) \circ \mathrm{nu}(f_i) = 0$ entonces existe un único $\tilde{\partial}_f : \mathrm{Nu}(f_i) \to \mathrm{Nu}(f_{i-\varepsilon})$ que completa el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nu}(f_i) \arrow[r, "\mathrm{nu}(f_i)"] \arrow[d, dashed, "\tilde{\partial}_f"'] & C \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\partial_C"] & D \arrow[d, "\partial_D"] \\
\mathrm{Nu}(f_{i-\varepsilon}) \arrow[r, "\mathrm{nu}(f_{i-\varepsilon})"] & C \arrow[r, "f_{i-\varepsilon}"] & D
\end{tikzcd}$$

usando un argumento similar para el siguiente diagrama, se puede mostrar que $\tilde{\partial}_f \circ \tilde{\partial}_f = 0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nu}(f_{i+\varepsilon}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\partial}_f"] \arrow[dd, dashed, bend right=60, "0"'] & C_{i+\varepsilon} \arrow[r, "f_{i+\varepsilon}"] \arrow[d, "\partial_C"] \arrow[dd, bend right=40] & D_{i+\varepsilon} \arrow[d, "\partial_D"] \\
\mathrm{Nu}(f_i) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\tilde{\partial}_f"] & C_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\partial_C"] & D_i \arrow[d, "\partial_D"] \\
\mathrm{Nu}(f_{i-\varepsilon}) \arrow[r] & C_{i-\varepsilon} \arrow[r, "f_{i-\varepsilon}"] & D_{i-\varepsilon}
\end{tikzcd}$$

Con lo que $((\mathrm{Nu}(f), \tilde{\partial}_f), \mathrm{nu}(f))$ es un núcleo para $f : (C, \partial_C) \to (D, \partial_D)$. $\square$

Cuando la categoría es pre-aditiva, el funtor H es aditivo:

Proposición 2.8.3. *El funtor $H : \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon} \to \mathfrak{grad}^0_\Delta(\mathcal{C})$ es aditivo, si $\mathcal{C}$ es pre-aditiva.*

Demostración: Como ya se ha visto, $\mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$ y $\mathfrak{grad}^0_\Delta(\mathcal{C})$ son aditivas cuando $\mathcal{C}$ lo es. Sean $C, D \in \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$. Si $f_1, f_2 : C \to D$, entonces para cada $i = 1, 2$, $H(f_i)$ es el único morfismo tal que

$$j_i \circ \mathrm{nu}(h_C) = \mathrm{nu}(h_D) \circ H(f_i)$$

donde $j_i : \mathrm{Conu}(h_C) \to \mathrm{Conu}(h_D)$ es el único morfismo tal que

$$\mathrm{conu}(\partial_D) \circ f_i = j_i \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

Como $\mathfrak{grad}^0_\Delta(\mathcal{C})$ es pre-aditiva, por la bilinealidad de la composición, $H(f_1) + H(f_2)$ es un morfismo que cumple:

$$(j_1 + j_2) \circ \mathrm{nu}(h_C) = \mathrm{nu}(h_D) \circ (H(f_1) + H(f_2))$$

donde $j_1 + j_2$ cumple:

$$\mathrm{conu}(\partial_D) \circ (f_1 + f_2) = (j_1 + j_2) \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

Por la definición de H, $H(f_1 + f_2) = H(f_1) + H(f_2)$. $\square$

Para una categoría pre-aditiva, si $(C, \partial_C), (D, \partial_D) \in \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$, existe una relación de equivalencia muy importante en $\mathrm{Hom}(C, D)$:

Definición 2.8.1. *Diremos que dos morfismos $f, g : (C, \partial_C) \to (D, \partial_D)$, son homotópicos, que denotaremos $f \simeq g$ si existe un morfismo de objetos graduados $h : C \to D$ de grado ε tal que: $h \circ \partial_C + \partial_D \circ h = f - g$*

Es fácil verificar que la relación de homotopía es de equivalencia. Se puede mostrar que al aplicar el funtor H a dos morfismos homotópicos se obtienen imágenes iguales.

Proposición 2.8.4. *Sean $f, g : C \to D$, morfismos de complejos. Si $f \simeq g$ entonces $H(f) = H(g)$.*

Demostración: $H(f - g)$ es el único morfismo tal que

$$j \circ \mathrm{nu}(h_C) = \mathrm{nu}(h_D) \circ H(f - g)$$

donde $j : \mathrm{Conu}(h_C) \to \mathrm{Conu}(h_D)$ es el único morfismo tal que

$$\mathrm{conu}(\partial_D) \circ (f - g) = j \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

Como $f \simeq g$ existe un morfismo D de grado ε tal que:

$f - g = h \circ \partial_C + \partial_D \circ h$, entonces

$$\mathrm{conu}(\partial_D) \circ (h \circ \partial_C + \partial_D \circ h) = j \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

$$\mathrm{conu}(\partial_D) \circ (h \circ \partial_C) = j \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

$$\mathrm{conu}(\partial_D) \circ (h \circ (h_C \circ \mathrm{conu}(\partial_C))) = j \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

$$((\mathrm{conu}(\partial_D) \circ h) \circ h_C) \circ \mathrm{conu}(\partial_C) = j \circ \mathrm{conu}(\partial_C)$$

luego

$$(\mathrm{conu}(\partial_D) \circ h) \circ h_C = j$$

Reemplazando en la ecuación de $H(f-g)$

$$((\mathrm{conu}(\partial_D) \circ h) \circ h_C) \circ \mathrm{nu}(h_C) = \mathrm{nu}(h_D) \circ H(f-g)$$

$$0 = \mathrm{nu}(h_D) \circ H(f-g)$$

es decir $j \circ \mathrm{nu}(h_C) = 0 = \mathrm{nu}(h_D) \circ 0 = \mathrm{nu}(h_D) \circ H(f-g)$.

Se tiene por unicidad que $H(f-g) = 0$. Por la aditividad de H tenemos el resultado.

□

Este resultado nos permite tener una condición suficiente para que dos complejos tengan el mismo grupo graduado de homología.

Definición 2.8.2. *Diremos que dos complejos $(C, \partial_C), (D, \partial_D) \in \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$ son homotópicamente equivalentes si existen $f : (C, \partial_C) \to (D, \partial_D)$ y $g : (D, \partial_D) \to (C, \partial_C)$ tales que $f \circ g \simeq id_D$ y $g \circ f \simeq id_C$.*

Cuando dos complejos son homotópicamente equivalentes se suele decir que tienen *el mismo tipo de homotopía*. Es fácil comprobar que esta relación es de equivalencia. La homología sólo depende del tipo de homología de un complejo, por la proposición anterior.

Proposición 2.9.1. *En una categoría abeliana un morfismo es isomorfismo si y sólo si es monomorfismo y epimorfismo.*

Demostración: Supongamos que $f : A \to B$ es monomorfismo y epimorfismo. Como es monomorfismo existe un morfismo $g : B \to C$ tal que $f = \mathrm{nu}(g)$, entonces $g \circ f = 0 = 0 \circ f$, como f es epimorfismo $g = 0$, entonces, por unicidad del núcleo, existe un isomorfismo α tal que $f = \alpha \circ \mathrm{nu}(0) = \alpha \circ id_B = \alpha$. Así f es un isomorfismo. $\square$

En las categorías abelianas todo morfismo tiene un factorización canónica.

Proposición 2.9.2. *Para todo morfismo $f : A \to B$ entre objetos de un categoría abeliana existe una factorización $f = \mathrm{nu}(\mathrm{conu}(f)) \circ \theta_f \circ (\mathrm{conu}(\mathrm{nu}(f)))$, donde θ_f es un isomorfismo.*

Demostración: Ver [M]. $\square$

Para un morfismo $f : A \to B$ entre objetos de una categoría abeliana, definimos: $\mathrm{im}(f) := \mathrm{nu}(\mathrm{conu}(f))$, $\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Nu}(\mathrm{conu}(f))$, $\mathrm{coim}(f) := \mathrm{conu}(\mathrm{nu}(f))$ y $\mathrm{Coim}(f) := \mathrm{Conu}(\mathrm{nu}(f))$. Nótese que si f morfismo de módulos, estas coinciden con las definiciones clásicas.

Corolario 2.9.1. *Sea f un morfismo entre objetos de una categoría abeliana, entonces:*

1. *Si f es monomorfismo entonces $f \equiv \mathrm{nu}(\mathrm{conu}(f))$*
2. *Si f es epimorfismo entonces $f \equiv \mathrm{conu}(\mathrm{nu}(f))$*

Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Diremos que la sucesión de objetos y morfismos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

1. Es *semi-exacta*, si $g \circ f = 0$
2. Es *exacta*, si es semi-exacta e $\mathrm{im}(f) \equiv \mathrm{nu}(g)$.

3. Decimos que una sucesión arbitraria de objetos y morfismos $\cdots \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i-1} \longrightarrow \cdots$ es exacta (semi-exacta), si para cada $i \in \mathbb{Z}$ $A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_i \xrightarrow{f_i} C_{i-1}$ es exacta (semi-exacta).

Obsérvese que si se trata de categoría de módulos sobre un anillo, significa que $\mathrm{Im}(f) = f(A) = g^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Nu}(g)$.

Por ejemplo, sean $C \in \mathfrak{grad}_\Delta(\mathcal{C})$ y $\delta \in \hom^{-\varepsilon}_{\mathfrak{grad}_\Delta(C)}(C, C)$, donde Δ es un grupo cíclico y $\varepsilon \in \Delta$ un generador, entonces $(C, \delta) \in \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$ si y sólo si $C_{i+\varepsilon} \xrightarrow{\delta_{i+\varepsilon}} C_i \xrightarrow{\delta_i} C_{i-\varepsilon}$ es semi-exacta, para todo $i \in \Delta$.

Proposición 2.9.3. *La sucesión de objetos y morfismos en una categoría abeliana:* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *es exacta es equivalente a cada una de las siguiente proposiciones:*

1. *f es monomorfismo y $f \equiv \mathrm{nu}(g)$*

2. *g es epimorfismo y $g \equiv \mathrm{conu}(f)$*

A una sucesión del tipo anterior se le llamará "sucesión exacta corta".

Demostración: Probaremos la primera equivalencia, la prueba de la segunda es análoga. Antes necesitamos un lema:

Lema 2.9.1. *Sea r un morfismo entre objetos de una categoría pre-aditiva, con núcleo y co-núcleo, entonces:*

1. *r es un monomorfismo si y sólo si* $\mathrm{nu}(r) = 0$.

2. *r es un epimorfismo si y sólo si* $\mathrm{conu}(r) = 0$.

Demostración: Probaremos la primera equivalencia. La prueba de la segunda es completamente análoga. Si r es monomorfismo, como $r \circ \mathrm{nu}(r) = 0 = r \circ 0$ entonces $\mathrm{nu}(r) = 0$. Recíprocamente, si $\mathrm{nu}(r) = 0$ entonces si $r \circ \phi = r \circ \psi$, entonces $r \circ (\phi - \psi) = 0$ entonces existe un morfismo ρ tal que $\phi - \psi = 0 \circ \rho = 0$ luego $\phi = \psi$, con lo que se tiene que r es un monomorfismo. •

Si la sucesión es exacta, entonces $\mathrm{nu}(f) \equiv \mathrm{im}(0) = \mathrm{conu}(id_A) \equiv 0$, entonces f es un monomorfismo. Similarmente se puede probar que g es epimorfismo.

Veamos que f equivalente a $\mathrm{nu}(g)$. Como $\mathrm{nu}(f) = 0$, entonces $f = \mathrm{im}(f) \circ \theta_f$. Entonces $f \equiv \mathrm{im}(f)$ como la sucesión es exacta, entonces $\mathrm{im}(f) \equiv \mathrm{nu}(g)$, por transitividad $f \equiv \mathrm{nu}(g)$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $f \equiv \mathrm{nu}(g)$ y que f es un monomorfismo, entonces como f es monomorfismo tenemos que $\mathrm{nu}(f) = 0 \equiv \mathrm{conu}(ker(0) = \mathrm{im}(0)$.

Como f es un monomorfismo, tenemos la siguiente descomposición: $f = \mathrm{im}(f) \circ \theta_f$, por lo tanto $f \equiv \mathrm{im}(f)$ además por hipótesis $\mathrm{nu}(g) \equiv f$, por lo que $\mathrm{im}(f) \equiv \mathrm{nu}(g)$. $\square$.

Corolario 2.9.2. *Sea $r : A \to B$ un morfismo en una categoría abeliana. Entonces*

1. *r es monomorfismo si y sólo si la sucesión* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{r} B$ *es exacta*

2. *r es epimorfismo si y sólo si la sucesión* $A \xrightarrow{r} B \longrightarrow 0$ *es exacta*

<u>Demostración</u>:

1. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{r} B$ es exacta si y sólo si

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{r} B \xrightarrow{\mathrm{conu}(r)} \mathrm{Conu}(r) \longrightarrow 0$$

es exacta pues por definición $\mathrm{im}(r) = \mathrm{nu}(\mathrm{conu}(r))$, por la proposición, se tiene la equivalencia.

2. Se prueba aplicando un razonamiento análogo al anterior en la sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nu}(r) \xrightarrow{\mathrm{nu}(r)} A \xrightarrow{r} B \longrightarrow 0\,. \square$$

Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías abelianas, un funtor (co-funtor) $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva la semi-exactitud es decir: Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es semi-exacta entonces $\mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C)$ ($\mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A)$) también es semi-exacta. Sin embargo no todo funtor preserva la exactitud.

Definición 2.9.6. *Sea* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *exacta, donde* $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *y* $g \in \hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, *y sea* $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un funtor.*

1. *Decimos que es* $\boldsymbol{F}$ exacto a derecha *si* $\boldsymbol{F}(A) \xrightarrow{\boldsymbol{F}(f)} \boldsymbol{F}(B) \xrightarrow{\boldsymbol{F}(g)} \boldsymbol{F}(C) \longrightarrow 0$ *es exacta.*

2. *Decimos que es* $\boldsymbol{F}$ exacto a izquierda *si* $0 \longrightarrow \boldsymbol{F}(A) \xrightarrow{\boldsymbol{F}(f)} \boldsymbol{F}(B) \xrightarrow{\boldsymbol{F}(g)} \boldsymbol{F}(C)$ *es exacta.*

3. *Decimos que es* $\boldsymbol{F}$ exacto *si es exacta por derecha e izquierda al mismo tiempo.*

Veamos ahora que el funtor $\mathrm{Hom}(A, -)$ es exacto por izquierda.

Proposición 2.9.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $X \in \mathcal{C}$. Entonces* $\mathrm{Hom}(X, -)$ *es exacto por izquierda.*

Demostración: Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ exacta. Mostraremos que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(X, C)$$

es exacta.

1. f_* es inyectiva, pues si $f_*(\alpha) = f \circ \alpha = 0$ implica que $\alpha = 0$ dado que f es un monomorfismo.

2. $\mathrm{Im}(f_*) = \mathrm{Nu}(g_*)$, pues $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$ y si $\alpha \in \mathrm{Nu}(g_*)$, entonces $g_*(\alpha) = g \circ \alpha = 0$, luego como $f \equiv \mathrm{nu}(g)$ existe un morfismo $\mu : X \to A$ tal que $\alpha = f \circ \mu$, lo que significa que $f_*(\mu) = \alpha$.

□

De forma análoga tenemos una proposición sobre el co-funtor $\mathrm{Hom}(-, X)$:

Proposición 2.9.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $X \in \mathcal{C}$. Entonces* $\mathrm{Hom}(-, X)$ *es exacto por izquierda.*

Ahora mostraremos un resultado que será útil en las siguientes secciones. Diremos que una sucesión exacta corta:

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ se parte, si existe un morfismo $\mu : C \to B$ tal que $g \circ \mu = id_C$.

2.10. Homología en Categorías Abelianas

A continuación se presentan algunos lemas importantes en la teoría de homología.

Lema 2.10.1. *Consideremos el siguiente diagrama de objetos y morfismos de una categoría abeliana:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha'"] & A' \arrow[r, "\beta'"] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

el cual tiene filas exactas y todos sus cuadrados conmutativos, entonces si f es un monomorfismo, g también lo es.

Este es el *dual* del teorema precedente:

Lema 2.10.2. *Consideremos el siguiente diagrama de objetos y morfismos de una categoría abeliana:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

el cual tiene filas exactas y todos sus cuadrados conmutativos, entonces si g es un epimorfismo, f también lo es.

Lema 2.10.3 (Lema de los 5). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideremos el siguiente objetos y morfismos de $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\phi_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\phi_4"] & A_5 \arrow[d, "\phi_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

con filas exactas y cuadrados conmutativas. Si ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4, ϕ_5 son isomorfismos, entonces ϕ_3 también lo es.

Lema 2.10.4 (Lema de la Serpiente). *Si el siguiente diagrama de objetos y morfismos de una categoría abeliana tiene filas exactas y sus cuadrados son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 &
\end{tikzcd}$$

entonces existe un morfismo $\omega : \mathrm{Nu}(f_3) \to \mathrm{Conu}(f_1)$ tal que:

$$\mathrm{Nu}(f_1) \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{Nu}(f_2) \xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{Nu}(f_3) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Conu}(f_1) \xrightarrow{\tilde{\beta}_1} \mathrm{Conu}(f_2) \xrightarrow{\tilde{\beta}_2} \mathrm{Conu}(f_3)$$

es exacta.

En el caso de categorías abelianas, los objetos de homología se pueden caracterizar de otra manera, que nos proporcionará en el futuro propiedades importantes del funtor de homología. Consideremos la siguiente sucesión semi-exacta de objetos y morfismos de una categoría abeliana:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Como $\mathrm{im}(g) \circ (\theta_g \circ \mathrm{coim}(g) \circ f) = g \circ f = 0$, denotemos entonces $\mathrm{coim}(g) \circ f = 0$, por lo que existe un morfismo r tal que $\mathrm{coim}(g) = r \circ \mathrm{conu}(f)$. Denotemos $H = \mathrm{Nu}(r)$. Por otro lado, como $g \circ (\mathrm{im}(f) \circ \theta_f \circ \mathrm{coim}(f)) = g \circ f = 0$, entonces $g \circ \mathrm{im}(f) = 0$, por lo que existe un morfismo s tal que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{nu}(g) \circ s$. Tenemos el siguiente diagrama cuyos triángulos son conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nu}(r) \arrow[r, "\mathrm{nu}(r)"] & \mathrm{Conu}(f) \arrow[r, "r"] & \mathrm{Coim}(g) \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[u, "\mathrm{conu}(f)"] \arrow[ur, "\mathrm{coim}(g)"'] & C \\
\mathrm{Im}(f) \arrow[r, "s"] \arrow[ur, "\mathrm{im}(f)"] & \mathrm{Nu}(g) \arrow[r, "\mathrm{conu}(s)"] \arrow[u, "\mathrm{nu}(g)"'] & \mathrm{Conu}(s)
\end{tikzcd}
$$

Proposición 2.10.1. $H \cong H'$

<u>Demostración</u>: Del diagrama anterior,

$$(\mathrm{conu}(f) \circ \mathrm{nu}(g)) \circ s = \mathrm{conu}(f) \circ (\mathrm{nu}(g) \circ s) = \mathrm{conu}(f) \circ (\mathrm{im}(f)) = 0$$

entonces existe un único morfismo α tal que $\mathrm{conu}(f) \circ \mathrm{nu}(g) = \alpha \circ \mathrm{conu}(s)$, similarmente, existe un único morfismo β tal que $\mathrm{conu}(f) \circ \mathrm{nu}(g) = \mathrm{nu}(r) \circ \beta$. En diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nu}(r) \arrow[r, "\mathrm{nu}(r)"] & \mathrm{Conu}(f) \arrow[r, "r"] & \mathrm{Coim}(g) \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[u, "\mathrm{conu}(f)"] \arrow[ur, "\mathrm{coim}(g)"'] & C \\
\mathrm{Im}(f) \arrow[r, "s"] \arrow[ur, "\mathrm{im}(f)"] & \mathrm{Nu}(g) \arrow[r, "\mathrm{conu}(s)"] \arrow[u, "\mathrm{nu}(g)"'] \arrow[uul, dashed, "\beta"] & \mathrm{Conu}(s) \arrow[uul, dashed, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

Del diagrama

$$(r \circ \alpha) \circ \mathrm{conu}(s) = r \circ (\alpha \circ \mathrm{conu}(s)) = r \circ (\mathrm{conu}(f) \circ \mathrm{nu}(g))$$

$$= (r \circ \mathrm{conu}(f)) \circ \mathrm{nu}(g) = \mathrm{coim}(g) \circ \mathrm{nu}(g) = 0$$

luego, como $\mathrm{conu}(s)$ es epimorfismo, $r \circ \alpha = 0$, entonces existe un único σ tal que

$\alpha = \mathrm{nu}(r) \circ \sigma$. De manera análoga, se prueba que existe un único morfismo τ tal que $\beta = \tau \circ \mathrm{conu}(r)$. Como tenemos que $\mathrm{nu}(r) \circ \sigma \circ \mathrm{conu}(s) = \mathrm{conu}(f) \circ \mathrm{nu}(g) = \mathrm{nu}(r) \circ \tau \circ \mathrm{conu}(s)$, entonces $\sigma = \tau$, pues $\mathrm{nu}(r)$ es monomorfismo y $\mathrm{conu}(s)$ es un epimorfismo. Ahora probaremos que σ es un monomorfismo y que τ es un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nu}(r) \arrow[r, "\mathrm{nu}(r)"] & \mathrm{Conu}(f) \arrow[r, "r"] & \mathrm{Coim}(g) \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[u, "\mathrm{conu}(f)"'] \arrow[ur, "\mathrm{coim}(g)"] & C \\
\mathrm{Im}(f) \arrow[r, "s"] \arrow[ur, "\mathrm{im}(f)"] & \mathrm{Nu}(g) \arrow[r, "\mathrm{conu}(s)"] \arrow[u, "\mathrm{nu}(g)"'] \arrow[uul, dashed, "\beta"] & \mathrm{Conu}(s) \arrow[uul, dashed, "\alpha"'] \arrow[uull, dotted]
\end{tikzcd}$$

La flecha punteada representa a: $\sigma = \tau$.

Veamos ahora que σ es un monomorfismo, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(f) \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Nu}(g) \arrow[r, "\mathrm{conu}(s)"] \arrow[d, "\mathrm{nu}(g)"] & \mathrm{Conu}(s) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(f) \arrow[r, "\mathrm{im}(f)"] & B \arrow[r, "\mathrm{conu}(f)"] & \mathrm{Conu}(f) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por un lema anterior, como $\mathrm{nu}(g)$ es un monomorfismo, entonces α también lo es. Tenemos que $\alpha = \mathrm{nu}(r) \circ \sigma$, luego si $\sigma \circ \mu = 0$, entonces $\alpha \circ \mu = \mathrm{nu}(r) \circ \sigma \circ \mu = 0$, como α es monomorfismo, tenemos que $\mu = 0$, con lo que σ es un monomorfismo. Aplicando un razonamiento dual, obtenemos que τ es un epimorfismo, con lo que obtenemos finalmente que $\sigma = \tau : \mathrm{Conu}(s) \cong \mathrm{Nu}(r)$. $\square$

El siguiente teorema es muy útil para relacionar las homologías de complejos que están en sucesión exacta corta

Teorema 2.10.1 (Sucesión larga en Homología). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, Δ un grupo cíclico y $\varepsilon \in \Delta$ un generador. Sean $(A, \partial_A), (B, \partial_B), (C, \partial_C) \in \mathcal{C}_{\Delta_\varepsilon}$ Si* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *es exacta, entonces existe un morfismo $\omega \in$*

$\mathrm{Hom}^{-\varepsilon}_{\mathbf{gra}\partial_\Delta}(H(C), H(A))$, *tal que el siguiente triángulo:*

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[rr, "f_*"] & & H(B) \arrow[dl, "g_*"] \\
& H(C) \arrow[ul, "\omega"] &
\end{tikzcd}$$

es exacto.

<u>Demostración</u>: Tenemos el siguiente diagrama conmutativos con las filas exactas, para cada $i \in \Delta$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{i+\varepsilon} \arrow[r, "f_{i+\varepsilon}"] \arrow[d, "\partial_{i+\varepsilon}"'] & B_{i+\varepsilon} \arrow[r, "g_{i+\varepsilon}"] \arrow[d, "\partial_{i+\varepsilon}"'] & C_{i+\varepsilon} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{i+\varepsilon}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\partial_i"'] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\partial_i"'] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "\partial_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{i-\varepsilon} \arrow[r, "f_{i-\varepsilon}"] & B_{i-\varepsilon} \arrow[r, "g_{i-\varepsilon}"] & C_{i-\varepsilon} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De las dos últimas filas podemos obtener el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\partial_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Nu}(\partial_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Nu}(\partial_i) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\partial_i"'] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\partial_i"'] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "\partial_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{i-\varepsilon} \arrow[r, "f_{i-\varepsilon}"] \arrow[d] & B_{i-\varepsilon} \arrow[r, "g_{i-\varepsilon}"] \arrow[d] & C_{i-\varepsilon} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \mathrm{Conu}(\partial_i) \arrow[r] & \mathrm{Conu}(\partial_i) \arrow[r] & \mathrm{Conu}(\partial_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Las primera y última filas son exactas por el Lema de la Serpiente. Por otro lado tenemos el siguiente diagrama conmutativo que proviene de la proposición anterior:

$$\begin{tikzcd}
H_i(A) \arrow[r, "\mathrm{nu}(r_i)"] & \mathrm{Conu}(\partial_{i+\varepsilon}) \arrow[r, "r_i"] & \mathrm{Coim}(\partial_i) \arrow[r, "\theta_{\partial_i}", "\cong"'] & \mathrm{Im}(\partial_i) \arrow[r, "s_{i-\varepsilon}"] \arrow[d, "\mathrm{im}(\partial_i)"] & \mathrm{Nu}(\partial_{i-\varepsilon}) \arrow[r, "\mathrm{conu}(s_{i-\varepsilon})"] \arrow[dl, "\mathrm{nu}(\partial_{i-\varepsilon})"] & H'_{i-\varepsilon}(A) \\
A_{i+\varepsilon} \arrow[r, "\partial_{i+\varepsilon}"] & A_i \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[ul, "\mathrm{conu}(\partial_{i+\varepsilon})"] \arrow[u, "\mathrm{coim}(\partial_i)"'] & A_{i-\varepsilon} \arrow[r, "\partial_{i-\varepsilon}"] & A_{i-2\varepsilon} & &
\end{tikzcd}$$

Definimos el siguiente morfismo: $h_i := s_{i-\varepsilon} \circ \theta_{\partial_i} \circ r_i$, como r_i es monomorfismo, $s_{i-\varepsilon}$ es un epimorfismo y θ_{∂_i} es un isomorfismo, entonces $\mathrm{Nu}(h_i) = H_i(A)$ y $\mathrm{Conu}(h_i) = H'_{i-\varepsilon}(A)$. Si se usa un razonamiento análogo para los complejos B y C, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Conu}(\partial_{i+\varepsilon}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Conu}(\partial_{i+\varepsilon}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Conu}(\partial_{i+\varepsilon}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\partial_{i-\varepsilon}) \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\partial_{i-\varepsilon}) \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\partial_{i-\varepsilon}) &
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son las inducidas por f y g Aplicando el Lema de la Serpiente tenemos que existe un morfismo ω_i tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$H_i(A) \longrightarrow H_i(B) \longrightarrow H_i(C) \xrightarrow{\omega_i} H_{i-\varepsilon}(A) \longrightarrow H_{i-\varepsilon}(B) \longrightarrow H_{i-\varepsilon}(C)$$

Definimos entonces $\omega \in \mathrm{Hom}^{-\varepsilon}_{\mathfrak{grad}_\Delta}(H(C), H(A))$ como: $\omega = (\omega_i)_{i\in\Delta}$

2.11. Categorías Monoidales

Definición 2.11.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sean $X, Y \in \mathcal{C}$, y $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : X \to Y$ funtores, diremos que λ una colección de flechas $\lambda_X : \boldsymbol{F}(X) \to \boldsymbol{G}(Y)$, para todo $X \in \mathcal{C}$, es una transformación natural si para todo morfismo $f : X \to Y$ entre objetos de $\mathcal{C}$, conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{F}(X) \arrow[r, "\boldsymbol{F}(f)"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & \boldsymbol{F}(Y) \arrow[d, "\lambda_Y"] \\
\boldsymbol{G}(X) \arrow[r, dashed, "\boldsymbol{G}(f)"'] & \boldsymbol{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

Diremos que una transformación natural es una *equivalencia natural*, si cada elemento de la transformación natural es un isomorfismo.

Definición 2.11.2. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría. Diremos que un bifuntor $\Box : \mathcal{M}\times\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es un producto tensorial sobre $\mathcal{M}$ si:*

1. *Para todos los $A, B, C \in \mathcal{M}$, existe una equivalencia natural:*

$$\alpha : A\Box(B\Box C) \cong (A\Box B)\Box C$$

2. *Existe un objeto $E \in \mathcal{M}$ que es una identidad salvo isomorfismo, es decir que para todo objeto $A \in \mathcal{M}$ existen equivalencias naturales:*

$$\lambda : A\Box E \cong A,\ \mu : E\Box A \cong A$$

Las equivalencias naturales mencionadas anteriormente deben hacer conmutativos los siguiente diagramas:

3.

$$\begin{tikzcd}
 & (A\Box B)\Box(C\Box D) \arrow[dr, "\alpha"] & \\
A\Box(B\Box(C\Box D)) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "id_A\Box\alpha"'] & & ((A\Box B)\Box C)\Box D \arrow[d, "\alpha\Box id_D"] \\
A\Box((B\Box C)\Box D) \arrow[rr, "\alpha"] & & (A\Box(B\Box C))\Box D
\end{tikzcd}$$

Para todos $A, B, C, D \in \mathcal{M}$

4.

$$\begin{tikzcd}
A\Box(E\Box C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id_A\Box(E\Box C)"'] & (A\Box E)\Box C \arrow[d, "(id_A\Box E)\Box C"'] \\
A\Box E \arrow[r, equal] & A\Box E
\end{tikzcd}$$

$\lambda = \mu : E\square E \to E$, *para todos* $A, C \in \mathcal{M}$

El concepto de categoría Monoidales es una abstracción del concepto del *producto tensorial* de las categorías familiares: grupos abelianos, módulos sobre un anillo con unidad, complejos y co-complejos sobre un módulo, etc.
Veamos qué sucede ahora con la pro-categoría de $\Lambda-$módulos, con índices sobre los naturales, donde Λ es un anillo, que por comodidad denotaremos por $Pro-Mod$ conmutativo con unidad:

Definición 2.11.3. *Sean* $A, B \in Pro - Mod$ *definimos como el producto tensorial* $A \otimes B$ *al siguiente pro-módulo definido por:*

$$(A \otimes B)_n := A_n \otimes B_n$$

con mapeos estructurales: $\sigma \otimes \sigma$. *Y para una flecha* $f = (I, f_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \to A'$*:*

$$(f \otimes B)_n = f_{I(n)} \otimes id_{B_n}$$

Veamos que este producto es un bifuntor. Primero debe probarse que respeta la relación de equivalencia de flechas. Sean $A, A', B \in Pro - Mod$, y $f = (I, f_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \to A'$ y $g = (J, g_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \to A'$ dos flechas equivalentes. Mostraremos que $f \otimes B \sim g \otimes B$.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $f \sim g$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq I(n)$, $k \geq J(n)$ y que conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & A_{I(n)} \arrow[dr, "f_n"] & \\
& A_{J(n)} \arrow[rr, "g_n"] & & A'_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B_k \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & B_{I(n)} \arrow[dr, "\sigma"] & \\
& B_{J(n)} \arrow[rr, "\sigma"] & & B_n
\end{tikzcd}$$

ahora al multiplicar tensorialmente ambos diagramas tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_k \otimes B_k \arrow[drr, "\sigma\otimes\sigma"] \arrow[ddr, "\sigma\otimes\sigma"'] & & & \\
& & A_{I(n)} \otimes B_{I(n)} \arrow[dr, "f_n\otimes\sigma"] & \\
& A_{J(n)} \otimes B_{J(n)} \arrow[rr, "g_n\otimes\sigma"] & & A'_n \otimes B_n
\end{tikzcd}$$

de lo que se tiene que $f\otimes B \sim g\otimes B$, similarmente se puede ver que si $f\sim g$ entonces $A\otimes f \sim A\otimes g$.

A continuación mostraremos que el producto tensorial es un bifuntor. Sean $A, A', A'' \in Pro\!-\!Mod$, y $f=(I,f_n)_{n\in\mathbb{N}}: A\to A'$, $g=(J,g_n)_{n\in\mathbb{N}}: A'\to A''$, tenemos el siguiente diagrama para la composición de flechas:

$$\begin{tikzcd}
A_{(I\circ J)(n)} \arrow[r, "f_{J(n)}"'] \arrow[rr, bend left, "(g\circ f)_n"] & A'_{J(n)} \arrow[r, "g_n"'] & A''_n
\end{tikzcd}$$

también es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B_{(I\circ J)(n)} \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[rr, bend left, "\sigma"] & B_{J(n)} \arrow[r, "\sigma"'] & B_n
\end{tikzcd}$$

Multiplicando ambos diagramas se tiene que: $((g\circ f)\otimes B)_n = (g\otimes B)_n \circ (f\otimes B)_{J(n)}$. De lo que se puede concluir que $-\otimes-$ es un funtor en la primera variable. De forma similar se puede probar para la segunda.

Como el producto tensorial respeta la equivalencia de flechas y la composición es un bifuntor de $Pro-$módulos. Es fácil probar que este bifuntor es aditivo en ambas variables.

3. Homología de Álgebras

En esta parte describiremos las teorías homológicas que serán luego generalizadas para el caso de $Pro-$álgebras. En todo este capítulo fijaremos un anillo Λ conmutativo con unidad.

Definición 3.0.4 (Complejo y Homología Barra). *Sea A un $\Lambda-$álgebra. sean, para $n \geq 1$: $b'_n : A^{(n+1)\otimes} \to A^{n\otimes}$ definidos por*

$$b'_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots a_n) := \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots a_n$$

Se cumple que $b'_{n+1} \circ b'_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual nos permite definir el siguiente complejo:

$$C^{bar}(A): \; \cdots \longrightarrow A^{(n+1)\otimes} \xrightarrow{b'_{n+1}} A^{n\otimes} \xrightarrow{b'_n} A^{(n-1)\otimes} \longrightarrow \cdots$$

Al grupo graduado de homología de $C^{bar}(A)$ será llamado Homología Barra de A, que se denotará por $\mathrm{H}^{bar}(A)$.

Definición 3.0.5 (Complejo y Homología de Hochschild). *Sea A un $\Lambda-$álgebra y M un $k-$módulo que también es un bimódulo sobre A. Consideremos los siguientes morfismos, para $n \geq 1$: $b_n : M \otimes A^{n\otimes} \to M \otimes A^{n-1\otimes}$ definidos por*

$$b_n(m \otimes a_1 \otimes \dots a_n) := ma_1 \otimes \dots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}$$

Se puede verificar que $b_{n+1} \circ b_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual nos permite definir el siguiente complejo:

$$C(M;A): \; \cdots \longrightarrow M \otimes A^{n\otimes} \xrightarrow{b_{n+1}} M \otimes A^{n-1\otimes} \xrightarrow{b_n} M \otimes A^{n-2\otimes} \longrightarrow \cdots$$

y a su grupo de homología lo denotaremos $\mathrm{H\,H}(M;A)$. *Definimos*

$$C(A) := C(A;A):\ \cdots \longrightarrow A^{n+1\otimes} \xrightarrow{b_{n+1}} A^{n\otimes} \xrightarrow{b_n} A^{n-1\otimes} \longrightarrow \cdots$$

Cuando A tenga unidad, al grupo graduado de homología de $C(A)$ será llamado Homología de Hochschild *de A, que es denotado por* $\mathrm{H\,H}(A)$. *Si el álgebra no tiene unidad, al grupo graduado de homología de $C(A)$ será llamado* Homología Intuitiva de Hochschild *que se denota por* $\mathrm{H\,H}^{naïve}(A)$. *Luego daremos una extensión de la definición de la homología de Hochschild para álgebras sin unidad que tendrá casi las mismas propiedades que para las que tienen unidad.*

Definición 3.0.6 (Bi-complejo). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Una familia de objetos $(C_{(i,j)})_{m,n\in\mathbb{Z}}$, y morfismos $(d_h : C_{(i,j)} \to C_{(i,j-1)}, d_v : C_{(i,j)} \to C_{(i-1,j)})$, para todo $i,j \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, es un bi-complejo si:*

1. $d_v \circ d_v = 0$ *y* $d_h \circ d_h = 0$

2. $d_v \circ d_h + d_h \circ d_v = 0$

En resumen podríamos decir que un bi-complejo es un diagrama cuadriculado de morfismos y objetos tal que las filas y las columnas son semiexactas y los cuadrados "anticonmutan".

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d_v"'] & \vdots \arrow[d, "d_v"'] & \\
\cdots & C_{(i+1,j)} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"'] & C_{(i+1,j+1)} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"'] & \cdots \arrow[l, "d_h"'] \\
\cdots & C_{(i,j)} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"'] & C_{(i,j+1)} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"'] & \cdots \arrow[l, "d_h"'] \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

A cada bi-complejo $C = (C_{(i,j)})$ se le asocia un complejo:

$$(\mathrm{Tot}(C))_n := \bigoplus_{i+j=n} C_{(i,j)}$$

con morfismos: $\partial_n = \bigoplus_{i+j=n} (d_v + d_h)$, justamente es un complejo pues:

$$(d_v + d_h) \circ (d_v + d_h) = d_v \circ d_v + d_v \circ d_h + d_h \circ d_v + d_v \circ d_v = 0$$

Definición 3.0.7 (Homología Cíclica). *Para cada n definimos el operador cíclico:*

$$t_n : A^{(n+1)\otimes} \to A^{(n+1)\otimes}$$

tal que $t_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots a_n) = (-1)^n(a_n \otimes a_0 \otimes \dots a_{n-1})$, para todos $a_0, \dots, a_n \in A$ y definimos el operador norma como:

$$N := 1 + t + \dots t^n$$

Lema 3.0.1. *Los operadores t, N, b y b' satisfacen las siguientes identidades:*

$$(1-t)b' = b(1-t), \quad b'N = Nb$$

Con estas identidades es posible definir un bicomplejo:

$$
CC(A) := \begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
A^{4\otimes} \arrow[d, "b"'] & A^{4\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{4\otimes} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & A^{4\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
A^{3\otimes} \arrow[d, "b"'] & A^{3\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{3\otimes} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & A^{3\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
A^{2\otimes} \arrow[d, "b"'] & A^{2\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{2\otimes} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & A^{2\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
A^{1\otimes} & A^{1\otimes} \arrow[l, "1-t"'] & A^{1\otimes} \arrow[l, "N"'] & A^{1\otimes} \arrow[l, "1-t"'] & \cdots \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}
$$

El módulo de la esquina inferior izquierda está en la posición $(0,0)$, y los módulos que tienen algún índice negativo son nulos.

Definición 3.0.8. *Sea A un $\Lambda-$álgebra. Definimos el grupo graduado de Homología Cíclica como el grupo graduado*

$$\mathrm{H}\,C(A) := \mathrm{H}(\mathrm{Tot}(CC(A)))$$

Sea A un álgebra con unidad, consideremos el módulo $D_n \subset A \otimes A^{n\otimes}$, generado por los elementos $(a_0 \otimes a_1 \cdots \otimes a_n)$, tal que por lo menos alguno de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es igual a 1.

Si tomamos un generador de $A \otimes A^{n\otimes}$, $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{1}_{j} \otimes \ldots a_n$:

$$b_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{1}_{j} \otimes \dots a_n) :=$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j \\ i\neq j-1}}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n & \\ \qquad\qquad & \text{Si } 1 \leq j < n \\ +(-1)a_n a_0 \otimes \cdots \otimes \underbrace{1}_{j} \otimes \dots a_{n-1} & \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n & \text{Si } j = n \end{cases}$$

En todos los casos $b_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{1}_{j} \otimes \dots a_n) \in D_{n-1}$. Entonces de la siguiente sucesión exacta corta, para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow D_n \xrightarrow{\iota_n} A \otimes A^{n\otimes} \xrightarrow{\pi_n} \frac{A \otimes A^{n\otimes}}{D_n} \longrightarrow 0$$

donde ι_n es la inclusión y π_n es la aplicación canónica de paso al cociente, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
D_{n+1} \arrow[r, "b_{n+1}"] \arrow[d, "\iota_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "b_n"] \arrow[d, "\iota_n"'] & D_{n-1} \arrow[d, "\iota_{n-1}"'] \\
A \otimes A^{(n+1)\otimes} \arrow[r, "b_{n+1}"] \arrow[d, "\pi_{n+1}"'] & A \otimes A^{n\otimes} \arrow[r, "b_n"] \arrow[d, "\pi_n"'] & A \otimes A^{(n-1)\otimes} \arrow[d, "\pi_{n-1}"'] \\
\dfrac{A \otimes A^{(n+1)\otimes}}{D_{(n+1)}} \arrow[r, dashed, "\tilde{b}_{n+1}"] \arrow[d] & \dfrac{A \otimes A^{n\otimes}}{D_n} \arrow[r, dashed, "\tilde{b}_n"] \arrow[d] & \dfrac{A \otimes A^{(n-1)\otimes}}{D_{(n-1)}} \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos y $\tilde{b}_n$ son los únicos morfismos que hacen conmutar los cuadrados, por la propiedad universal del co-kernel, además por esta misma razón las filas son y usando la sucesión larga en homología tenemos que el siguiente triángulo es exacto:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}(\Lambda[0]) \arrow[rr] & & \mathrm{H\,H}(A) \arrow[dl] \\ & \overline{\mathrm{H\,H}}(A) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

pues por lo mencionado anteriormente hay un cuasi-isomorfismo entre $C(A)$ y $\overline{C}(A)$. De aquí se desprende que

$$0 \longrightarrow \mathrm{H\,H}_1(A) \longrightarrow \overline{\mathrm{H\,H}}_1(A) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathrm{H\,H}_0(A) \longrightarrow \overline{\mathrm{H\,H}}_0(A) \longrightarrow 0$$

y que $\overline{\mathrm{H\,H}}_n(A) = \mathrm{H\,H}_n(A)$ si $n \neq 0$.

Definición 3.0.12 (Homología Relativa de Hochschild). *Sea A una $\Lambda-$álgebra con unidad e $I \subset A$ un ideal bilateral. Definimos el grupo graduado de Homología de Hochschild, el grupo graduado* $\mathrm{Nu}(C(A) \to C(A/I))$

De la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nu}(C(A) \to C(A/I)) \longrightarrow C(A) \longrightarrow C(A/I) \longrightarrow 0$$

tenemos el siguiente triángulo exacto:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H\,H}(A,I) \arrow[rr] & & \mathrm{H\,H}(A) \arrow[dl] \\ & \mathrm{H\,H}(A/I) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

3.1. Álgebras sin unidad

La idea es ahora extender el concepto de homología de Hochschild para las álgebras sin unidad, pero tiene que ser de una manera que se comporte bien respecto a las sucesiones cortas exactas.

Sean A un $\Lambda-$álgebra con unidad e $I \subset A$ un ideal bilateral, consideremos el siguiente diagrama de extensión de álgebras:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

Solamente cuando $I = A$ se tiene que I tiene unidad, pero se trata de un caso trivial. Nos gustaría poder aplicar la sucesión exacta larga en homología para calcular las homologías de alguna de las tres álgebras a partir de las otras dos. Es decir queremos extender el concepto de homología de Hochschild a álgebras sin unidad tal que:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{HH}(I) \arrow[rr] & & \mathrm{HH}(A) \arrow[dl] \\
& \mathrm{HH}(A/I) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

sea exacto. Para extender estas nociones a $Pro-$álgebras es necesario tener conceptos que sólo dependan de morfismos entre $Pro-$álgebras. No existe por ejemplo el concepto de "unidad de una $Pro-$álgebra". Sin embargo luego se dará una definición un poco más débil que tener unidad que es meramente categórica.

Veamos como se extiende un funtor $\mathbf{F}$ definido en las álgebras con unidad con valores en grupos abelianos, a las álgebras sin unidad.

Sea I un álgebra sin unidad, sea I_+ el $\Lambda-$módulo $\Lambda \oplus I$, dotemos ahora a I_+ de un producto: $(\lambda, x)(\eta, y) = (\lambda\eta, \lambda y + x\eta + xy)$, con esto damos una estructura de $\Lambda-$álgebra a I_+ con unidad $(1, 0)$, vemos que hay una inclusión natural: $\Lambda \hookrightarrow I_+$ entre $\Lambda-$álgebras con unidad $\lambda \mapsto (\lambda, 0)$.

Definimos entonces

$$\mathbf{F}(I) := \mathrm{Conu}(\mathbf{F}(\Lambda) \to \mathbf{F}(I_+))$$

Lema 3.1.1. *Si $\boldsymbol{F}(A) \oplus \boldsymbol{F}(A') \to \boldsymbol{F}(A \oplus A')$ para cualesquiera A, A' $\Lambda-$álgebras con unidad, es un isomorfismo, entonces la imagen de un $\Lambda-$álgebra mediante $\boldsymbol{F}$ como álgebra con unidad y sin unidad coinciden*

Demostración: Si $\iota_\Lambda : \Lambda \to \Lambda \oplus A$ y $\iota_A : A \to \Lambda \oplus A$ son las inclusiones canónicas, tenemos por hipótesis que: $\phi := \mathbf{F}(\iota_\Lambda) \oplus \mathbf{F}(\iota_A)$ es un isomorfismo, donde $\mathbf{F}(\iota_\Lambda) \oplus \mathbf{F}(\iota_A)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\Lambda) \arrow[dr, "\iota_{\mathbf{F}(\Lambda)}"'] \arrow[drr, "\mathbf{F}(\iota_\Lambda)"] & & \\
& \mathbf{F}(\Lambda) \oplus \mathbf{F}(A) \arrow[r, dashed, "\phi"'] & \mathbf{F}(\Lambda \oplus A) \\
\mathbf{F}(A) \arrow[ur, "\iota_{\mathbf{F}(A)}"] \arrow[urr, "\mathbf{F}(\iota_A)"'] & &
\end{tikzcd}$$

de lo que podemos obtener el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\Lambda) \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_{\mathbf{F}(\Lambda)}"'] & \mathbf{F}(\Lambda) \arrow[d, "\mathbf{F}(\iota_\Lambda)"] \\
\mathbf{F}(\Lambda) \oplus \mathbf{F}(A) \arrow[r, "\cong", "\phi"'] & \mathbf{F}(\Lambda \oplus A)
\end{tikzcd}$$

del que finalmente se obtiene:

$$\mathrm{Conu}(\mathbf{F}(\Lambda) \to \mathbf{F}(A_+)) \cong \mathrm{Conu}(\mathbf{F}(\Lambda) \to \mathbf{F}(\Lambda) \oplus \mathbf{F}(A)) \cong \mathbf{F}(A)$$

□

Usando el lema podemos extender nuestra definición de Homología de Hochschild a las $\Lambda-$álgebras con unidad. Antes probaremos que $\mathrm{H\,H}$ cumple las hipótesis para ser extendido a las $\Lambda-$álgebras con unidad:

Lema 3.1.2. *Sean A y A' dos álgebras con unidad, entonces*

$$\mathrm{H\,H}(A \oplus A') \cong \mathrm{H\,H}(A) \oplus \mathrm{H\,H}(A')$$

Entonces definimos la homología de Hochschild de un álgebra arbitraria como:

$$\mathrm{Conu}(\mathrm{H\,H}(\Lambda) \to \mathrm{H\,H}(A_+))$$

Hemos definido la homología de Hochschild sobre $\Lambda-$álgebras sin unidad como extensión del funtor $\mathrm{H\,H}$ definido sobre las álgebras con unidad. A continuación mostraremos Otras formas equivalente de definir la homología de Hochschild para álgebras sin unidad.

Proposición 3.1.1. *Sea I un $\Lambda-$anillo, y considerémoslo con un ideal bilateral de I_+ entonces:*

$$\mathrm{H\,H}_n(I) = \overline{\mathrm{H\,H}_n}(I_+) = \mathrm{H\,H}_n(I_+, I) = \begin{cases} \mathrm{H\,H}_0(I; I_+)/\Lambda & si\ n = 0 \\ \mathrm{H\,H}_n(I; I_+) & si\ n \neq 0 \end{cases}$$

Demostración: Analicemos primero $\overline{\mathrm{H\,H}}(I_+)$. Por la definición de homología reducida tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Lambda[0] \longrightarrow \overline{C}(I_+) \longrightarrow (C(I_+))_{red} \longrightarrow 0$$

y además debido a que $I_+ = \Lambda \oplus I$, se tiene que $I = I_+/\Lambda$, lo que implica que $\overline{C}_n(I_+) = I_+ \oplus (I_+/\Lambda)^n \otimes = I_+ \otimes I^n = C(I; I_+)$, con los mismos bordes, además identificando I con $\{0\} \times I$ se le puede considerar como un ideal bilateral de I_+ y por lo tanto un bimódulo sobre I_+, entonces se tiene que:

$$0 \longrightarrow \Lambda[0] \xrightarrow{\iota} C(I; I_+) \longrightarrow (C(I_+))_{red} \longrightarrow 0$$

pero como la aplicación $\iota : n \mapsto (n, 0)$ tiene inversa por izquierda $(n, x) \mapsto n$, entonces ι_* sigue siendo inyectiva. Luego en el triángulo exacto:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H\,H}(\Lambda) \arrow[rr, "\iota_*"] & & \mathrm{H\,H}(I_+) \arrow[dl] \\ & \mathrm{H\,H}(A/I) \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

$\omega = 0$, lo que quiere decir que

$$0 \longrightarrow \mathrm{H\,H}(\Lambda) \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{H\,H}(I_+) \longrightarrow \overline{\mathrm{H\,H}}(I_+) \longrightarrow 0$$

es exacta, de lo que tenemos que $\overline{\mathrm{H\,H}}(I_+) = \mathrm{Conu}(\mathrm{H\,H}(\Lambda) \to \mathrm{H\,H}(I_+)) = \mathrm{H\,H}(I)$ del triángulo se tiene que $\overline{\mathrm{H\,H}}_n(I_+) = \mathrm{H\,H}_n(I_+) = \mathrm{H\,H}_n(I; I_+)$ si $n \neq 0$. Y en el caso $n = 0$.

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathrm{H\,H}_0(I_+) \longrightarrow \overline{\mathrm{H\,H}}_0(I_+) \longrightarrow 0$$

lo que implica que $\overline{\mathrm{H\,H}}_0(I_+) = \mathrm{H\,H}_0(I_+)/\Lambda = \mathrm{H\,H}_0(I; I_+)/\Lambda$.

Ahora probaremos que $\mathrm{H\,H}(I_+, I) = \begin{cases} \mathrm{H\,H}_0(I; I_+)/\Lambda & \text{si } n = 0 \\ \mathrm{H\,H}_n(I; I_+) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

Por definición se tiene que $C(I_+, I) = \mathrm{Nu}(C(I_+) \to C(I_+/I)) = \mathrm{Nu}(C(I_+) \to \Lambda)$, es decir $0 \longrightarrow C(I_+, I) \longrightarrow C(I_+) \longrightarrow C(\Lambda) \longrightarrow 0$ es exacto, donde $C(I_+) \to \Lambda$ es el inducido por $p : (n, x) \mapsto n$, ya vimos que tiene inversa derecha $\iota : n \mapsto (n, 0)$. Entonces se tiene el siguiente triángulo exacto:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H\,H}(I_+, I) \arrow[rr] & & \mathrm{H\,H}(I_+) = \mathrm{H\,H}(I; I_+) \arrow[dl, shift left, "p_*"] \\ & \mathrm{H\,H}(\Lambda) \arrow[ul, "\omega=0"] \arrow[ur, shift left, "\iota_*"] & \end{tikzcd}$$

lo que implica que para cada n la siguiente sucesión corta es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{H\,H}_n(I_+, I) \longrightarrow \mathrm{H\,H}_n(I; I_+) \xrightarrow{p_*} \mathrm{H\,H}_n(\Lambda) \longrightarrow 0$$

y además se parte, pues $p_* \circ \iota_* = (p \circ \iota)_* = id_{\mathrm{H\,H}(\Lambda)}$ del cual se deduce que existe una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{H\,H}_n(\Lambda) \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{H\,H}_n(I; I_+) \longrightarrow \mathrm{H\,H}_n(I_+, I) \longrightarrow 0$$

Por un razonamiento análogo al anterior se tiene el resultado. □

Si A es una $\Lambda-$álgebra, denotaremos $CC(A)^{\{2\}}$ al complejo total de:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A^{3\otimes} \arrow[d, "b"'] & A^{3\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] \\
A^{2\otimes} \arrow[d, "b"'] & A^{2\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] \\
A^{1\otimes} & A^{1\otimes} \arrow[l, "1-t"']
\end{tikzcd}$$

que justamente son las dos primeras columnas de $CC(A)$.

Con este bicomplejo obtenemos otra fórmula para la homología de Hochschild:

Proposición 3.1.2. *Para I un $\Lambda-$álgebra se tiene que :*

$$(\overline{C}(I))_{\text{red}} = \mathrm{Tot}(CC(I)^{\{2\}})$$

<u>Demostración</u>: Tenemos que la homología de Hochschild de un $\Lambda-$álgebra es la homología del complejo: $(\overline{C}(I))_{\text{red}}$ que tiene en la posición n a $I_+ \otimes I^{n\otimes}$, si $n \neq 0$ y $I_+/\Lambda = I$, si $n = 0$. Si $n \neq 0$ entonces tenemos: $I_+ \otimes I^{n\otimes} \cong I^{n+1\otimes} \oplus (\Lambda \otimes I^{n\otimes})$, sobre $I^{n+1\otimes}$ el borde es simplemente b_{n+1}. Sobre $\Lambda \otimes I^{n\otimes}$, al tomar un generador $1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$, se tiene que su imagen es:

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - 1 \otimes a_1a_2 \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^n a_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$$

es decir

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} + 1 \otimes \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \ldots a_i a_{i+1} \cdots \otimes a_n$$

que se puede escribir en término de los operadores usados en la definición de homología

Demostración: En el diagrama de $CC(I)^{\{2\}}$

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A^{3\otimes} \arrow[d, "b"'] & A^{3\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] \\
A^{2\otimes} \arrow[d, "b"'] & A^{2\otimes} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] \\
A^{1\otimes} & A^{1\otimes} \arrow[l, "1-t"']
\end{tikzcd}$$

se ve que la primera columna es el complejo intuitivo de Hochschild de I, la segunda es el complejo barra de I. Entonces tenemos la siguiente sucesión de complejos:

$$0 \longrightarrow C(I) \longrightarrow \mathrm{Tot}(CC(I)^{\{2\}}) \longrightarrow (C^{\mathrm{bar}})^{[-1]}(I) \longrightarrow 0$$

Al formar la sucesión larga de homología se obtiene el resultado. □

3.2. El problema de la Escisión

Antes de plantear el problema de escisión necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.2.1. *Dada la siguiente sucesión exacta corta de $\Lambda-$módulos* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ *, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un morfismo $\mu : C \to B$ tal que $\beta \circ \mu = id_C$ (es decir la sucesión se parte).*

2. *Existe un morfismo $\varepsilon : A \to B$ tal que $\varepsilon \circ \alpha = id_A$*

Demostración: 1. $\Rightarrow$ 2. Como α es inyectivo, entonces posee inversa sobre su imagen. Veamos que $\mathrm{Im}(id_A - \mu \circ \beta) \subset \mathrm{Im}(\alpha)$. Como la sucesión es exacta tenemos que $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Nu}(\beta)$. De $\beta \circ (id_A - \mu \circ \beta) = \beta - (\beta \circ \mu) \circ \beta = \beta - (id_C) \circ \beta = \beta - \beta = 0$, se deduce que $\mathrm{Im}(id_A - \mu \circ \beta) \subset \mathrm{Nu}(\beta)$. Definimos entonces $\varepsilon := \alpha^{-1} \circ (id_A - \mu \circ \beta)$.

Se puede verificar fácilmente que $\varepsilon \circ \alpha = id_A$.

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $c \in C$, como β es sobreyectivo, existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$. Se probará que si $b' \in B$ también cumple que $\beta(b') = c$, entonces $b - (\alpha \circ \varepsilon)(b) = b' - (\alpha \circ \varepsilon)(b')$. Sea $u = (b - b') - (\alpha \circ \varepsilon)(b - b')$. Entonces $\beta(u) = \beta(b - b') - (\beta \circ (\alpha \circ \varepsilon))(b - b') = c - c - ((\beta \circ \alpha) \circ \varepsilon)(b - b') = 0$, es decir $u \in \mathrm{Nu}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$, sea $a \in A$ tal que $\alpha(a) = u$, entonces $\alpha(a) = (b - b') - (\alpha \circ \varepsilon)(b - b')$, luego $a = (\varepsilon \circ \alpha)(a) = \varepsilon(b - b') - ((\varepsilon \circ \alpha) \circ \varepsilon)(b - b') = \varepsilon(b - b') - \varepsilon(b - b') = 0$ de lo que se tiene que $a = 0$ y por lo tanto $u = 0$. Con esto podemos definir una aplicación $\mu : C \to B$, definida por $\mu(c) = b - (\alpha \circ \varepsilon)(b)$, si $\beta(b) = c$. Es fácil verificar que μ es un morfismo y que cumple que $\mu \circ \beta = id_C$. $\square$

Una *extensión de* $\Lambda-$*álgebras* es una sucesión exacta corta en la categoría de $\Lambda-$álgebras. Diremos que una extensión de álgebras $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ es *pura* si para todo $\Lambda-$módulo X, $I \otimes X \hookrightarrow A \otimes X$. Esto se cumple por ejemplo si la sucesión se parte, ya que también tendríamos que $I \to A$ tiene inversa por la izquierda, y por lo tanto $I \otimes X \to A \otimes X$ también tiene inversa por la izquierda lo cual implica que es inyectiva.

Definición 3.2.1. *Sea* $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *una extensión pura de* $\Lambda-$*álgebras, y sea* $\pi : CC(A)^{\{2\}} \to CC(B)^{\{2\}}$ *la proyección canónica inducida por la extensión. Diremos que* I *satisface escisión para la homología de Hochschild si para todo* $\Lambda-$*módulo* X*, el morfismo* $CC(I)^{\{2\}} \otimes X \hookrightarrow \mathrm{Nu}(\pi \otimes X)$ *es un cuasi-isomorfismo.*

De manera análoga podemos definir la escisión para la homología intuitiva de Hochschild, la homología barra y homología cíclica usando los bicomplejos respectivos: $C(I) \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots$, $C^{\mathrm{bar}}(I) \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots$ y $CC(I)$. Buscaremos qué condición debe satisfacer un $\Lambda-$álgebra para que cumpla escisión en la homología de Hochschild. Para esto necesitamos la siguiente definición:

Definición 3.2.2. *Sea* I *una* $\Lambda-$*álgebra y* M *un* $I-$*bimódulo. Decimos que* M *es homológicamente unitario o* H$-$*unitario si para todo* $\Lambda-$*módulo* X *se tiene que el* *complejo* $(M \otimes I^{n\otimes}, b')_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ *es exacto.*

En [W] Wodzicki probó que la para que un $\Lambda-$álgebra cumpla escisión es necesario y suficiente que se H $-$unitario. Para probar esto necesitamos algunos resultados previos:

Proposición 3.2.1. *Sea* $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *una extensión pura de* $\Lambda-$*álgebras, sea* M *un* $A-$*bimódulo y* X *un* $\Lambda-$*módulo. Si* M *es* H $-$*unitario como* $I-$*bimódulo, entonces las siguientes inclusiones canónicas son cuasi-isomorfismos:*

$$i : (M \otimes I^{n\otimes}, b)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \hookrightarrow (M \otimes A^{n\otimes}, b)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$$
$$i' : (M \otimes I^{n\otimes}, b')_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \hookrightarrow (M \otimes A^{n\otimes}, b')_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$$

<u>Demostración</u>: Veamos la demostración para i, la prueba para i' es análoga. Consideremos la sucesión formada por los complejos

$$F^n := \cdots \xrightarrow{b_{n+3}} M \otimes I^{2\otimes} \otimes A^{n\otimes} \xrightarrow{b_{n+2}} M \otimes I \otimes A^{n\otimes} \xrightarrow{b_{n+1}} M \otimes A^{n\otimes}$$
$$\xrightarrow{b_n} M \otimes A^{n-1\otimes} \xrightarrow{b_{n-1}} \cdots \longrightarrow M \otimes A \xrightarrow{b_1} M$$

para $n \geq 0$. Consideremos

$$F^{n+1} := \cdots \xrightarrow{b_{n+3}} M \otimes I \otimes A \otimes A^{n\otimes} \xrightarrow{b_{n+2}} M \otimes A \otimes A^{n\otimes} \xrightarrow{b_{n+1}} M \otimes A^{n\otimes}$$
$$\xrightarrow{b_n} M \otimes A^{n-1\otimes} \xrightarrow{b_{n-1}} \cdots \longrightarrow M \otimes A \xrightarrow{b_1} M$$

entonces tenemos que F^n es un subcomplejo de F^{n+1} y

$$\frac{F^{n+1} \otimes X}{F^n \otimes X} := \cdots \xrightarrow{\tilde{b}_{n+3}} M \otimes I \otimes \tfrac{A}{I} \otimes A^{n\otimes} \otimes X \xrightarrow{\tilde{b}_{n+2}} M \otimes \tfrac{A}{I} \otimes A^{n\otimes} \otimes X \xrightarrow{\tilde{b}_{n+1}} 0$$
$$\xrightarrow{\tilde{b}_n} 0 \xrightarrow{\tilde{b}_{n-1}} \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\tilde{b}_1} 0$$

De la extensión pura tenemos que $B \cong \dfrac{A}{I}$. Las aplicaciones $\tilde{b}_n$ son los morfismos imagen de aplicaciones inducidas por el cociente vía el funtor $- \otimes X$.

Veamos quién es $\tilde{b}_{n+p}$, donde $p \in \mathbb{N}$.

Sea $m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p-1} \otimes [a_0] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x \in M \otimes I^{p-1\otimes} \otimes B \otimes A^{n\otimes} \otimes X$ entonces

$\tilde{b}_{n+p}(m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p-1} \otimes [a_0] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x) =$

$(mx_1 \otimes \cdots \otimes x_{p-1} \otimes [a_0] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - m \otimes x_1x_2 \otimes \cdots \otimes x_{p-1} \otimes [a_0] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes$

$a_n + \cdots + (-1)^{p-2} m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p-2}x_{p-1} \otimes [a_0] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes x =$

$b'_{p-1}(m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p-1}) \otimes [a_0] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x$

es decir

$$\tilde{b}_{n+p} = b'_{p-1} \otimes (B \otimes A^{n\otimes} \otimes X)$$

Lo que quiere decir que

$$\left(\frac{F^{n+1} \otimes X}{F^n \otimes X}\right)_r := (M \otimes I^{r-(n+1)}, b'_{r-(n+1)}) \otimes (B \otimes A^{n\otimes} \otimes X)$$

para cada $r \in \mathbb{Z}$, como M es H $-$unitario entonces $\dfrac{F^{n+1} \otimes X}{F^n \otimes X}$ es exacta. Luego tomando la sucesión exacta larga en homología de:

$$0 \longrightarrow F^n \otimes X \longrightarrow F^{n+1} \otimes X \longrightarrow \frac{F^{n+1} \otimes X}{F^n \otimes X} \longrightarrow 0$$

tenemos que la inclusión $F^0 \otimes X \hookrightarrow F^n \otimes X$ es un cuasi-isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$ por lo que $i : (M \otimes I^{n\otimes})_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \hookrightarrow (M \otimes A^{n\otimes})_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ también es un cuasi-isomorfismo, pues $F^0 \otimes X = (M \otimes I^{n\otimes})_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$. $\square$

Corolario 3.2.1. *Sea* $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *una extensión pura de* $\Lambda-$*álgebras. Entonces las aplicaciones canónicas* $\pi : (B \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \to (B \otimes B^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ *y* $\pi' : (B \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \to (B \otimes B^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ *son cuasi-isomorfismos.*

<u>Demostración</u>: Consideremos la sucesión de complejos, cuyo término $n-$ésimo es:

$$C_n := \cdots \longrightarrow B \otimes B^{n\otimes} \otimes A^{2\otimes} \longrightarrow B \otimes B^{n\otimes} \otimes A \longrightarrow B \otimes B^{n\otimes}$$

$$\longrightarrow B \otimes B^{n-1\otimes} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B \otimes B^{2\otimes} \longrightarrow B \otimes B \longrightarrow B$$

entonces

$$C_{n+1} := \cdots \longrightarrow B \otimes B^{n\otimes} \otimes B \otimes A \longrightarrow B \otimes B^{n\otimes} \otimes B \longrightarrow B \otimes B^{n\otimes}$$

$$\longrightarrow B \otimes B^{n-1\otimes} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B \otimes B^{2\otimes} \longrightarrow B \otimes B \longrightarrow B$$

Se usará un argumento análogo a la prueba del teorema anterior. Tenemos que probar que $\pi_n : C_n \otimes X \to C_{n+1} \otimes X$ es un cuasi-isomorfismo. Como $B \cong A/I$, $\mathrm{Nu}(\pi_n) = ((B \otimes B^{n\otimes} \otimes I) \otimes A^{p-(n+1)}, b_p)_{p\in\mathbb{Z}} \otimes X$ pues

$$\frac{C_n \otimes X}{((B\otimes B^{n\otimes}\otimes I)\otimes A^{p-(n+1)}, b_p)_{p\in\mathbb{Z}}\otimes X} = \cdots \longrightarrow \frac{B\otimes B^{n\otimes}\otimes A^{2\otimes}}{B\otimes B^{n\otimes}\otimes I\otimes A} \longrightarrow \frac{B\otimes B^{n\otimes}\otimes A}{B\otimes B^{n\otimes}\otimes I} \longrightarrow \frac{B\otimes B^{n\otimes}}{B\otimes B^{n\otimes}\otimes 0}$$

$$\longrightarrow \frac{B\otimes B^{n-1\otimes}}{B\otimes B^{n-1\otimes}\otimes 0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{B\otimes B^{2\otimes}}{B\otimes B^{2\otimes}\otimes 0} \longrightarrow \frac{B\otimes B}{B\otimes B\otimes 0} \longrightarrow \frac{B}{B\otimes 0}$$

$$= \cdots \longrightarrow B \otimes B^{n\otimes} \otimes B \otimes A \longrightarrow B \otimes B^{n\otimes} \otimes B \longrightarrow B \otimes B^{n}$$

$$\longrightarrow B \otimes B^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B \otimes B^{2} \longrightarrow B \otimes B \longrightarrow B \; = C_{n+1}$$

y la aplicación π_n es justamente la aplicación canónica del paso al cociente. Por el teorema anterior $\mathrm{Nu}(\pi_n) = ((B \otimes B^{n\otimes} \otimes I) \otimes A^{p-(n+1)}, b_p)_{p\in\mathbb{Z}} \otimes X$ es cuasi-isomorfo a $((B \otimes B^{n\otimes} \otimes I) \otimes I^{p-(n+1)}, b_p)_{p\in\mathbb{Z}} \otimes X = ((B \otimes B^{n\otimes} \otimes I) \otimes I^{p-(n+1)}, b'_{p-n-1})_{p\in\mathbb{Z}} \otimes X$ el cual es un complejo exacto por ser I H$-$unitario. Tomando la sucesión larga en homología a la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nu}(\pi_n) \longrightarrow C_n \otimes X \xrightarrow{\pi_n} C_{n+1} \otimes X \longrightarrow 0$$

tenemos que $C_0 \otimes X$ es cuasi-isomorfo a $C_n \otimes X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de lo que se infiere que $\pi : (B \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \to (B \otimes B^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ Una prueba similar para π' se puede hacer. □

Con estos resultados podemos demostrar el teorema de Wodzicki.

Teorema 3.2.1. *Para un $\Lambda-$álgebra I, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *I es* H $-$*unitaria.*

2. *I cumple escisión para la homología intuitiva de Hochschild.*

3. *I cumple escisión para la homología barra.*

4. *I cumple escisión para la homología Hochschild.*

5. *I cumple escisión para la homología cíclica.*

Demostración: Sea $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ una extensión pura de $\Lambda-$álgebras y X un $\Lambda-$módulo. Probemos *1.* $\Longrightarrow$ *2.*, consideremos $p : (A \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \to (B \otimes B^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ la proyección canónica. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (I \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "j"] & (A \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, equal] & (B \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(p) \arrow[r] & (A \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r, "p"] & (B \otimes B^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces como I es H $-$unitaria tenemos por el corolario que π es un cuasi-isomorfismo. De lo que se deduce que j es también un cuasi-isomorfismo, luego por la proposición anterior tenemos que $i : (I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \hookrightarrow (I \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ es un cuasi-isomorfismo con lo que se concluye que la aplicación $(I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \hookrightarrow \mathrm{Nu}(p)$ es un cuasi-isomorfismo, por lo tanto I satisface escisión para la homología intuitiva de Hochschild.

Para *1.* $\Longrightarrow$ *3.* aplicamos el razonamiento anterior a:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (I \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "j'"] & (A \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, equal] & (B \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(p) \arrow[r] & (A \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r, "p"] & (B \otimes B^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Veremos que *2.* y *3.* $\Longrightarrow$ *4.* Sea Tenemos la siguientes sucesiones de bicomplejos:

$$0 \longrightarrow CC(I)^{\{2\}} \longrightarrow CC(I) \longrightarrow CC(I)^{\{2\}}(-1,0) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow CC(A)^{\{2\}} \longrightarrow CC(A) \longrightarrow CC(A)^{\{2\}}(-1,0) \longrightarrow 0$$

1. *I es* H *−unitaria.*

2. *I cumple escisión para la homología intuitiva de Hochschild.*

3. *I cumple escisión para la homología barra.*

4. *I cumple escisión para la homología Hochschild.*

5. *I cumple escisión para la homología cíclica.*

Demostración: Sea $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ una extensión pura de $\Lambda-$álgebras y X un $\Lambda-$módulo. Probemos *1.* $\Longrightarrow$ *2.*, consideremos $p : (A \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \to (B \otimes B^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ la proyección canónica. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (I \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "j"] & (A \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, equal] & (B \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(p) \arrow[r] & (A \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r, "p"] & (B \otimes B^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces como I es H −unitaria tenemos por el corolario que π es un cuasi-isomorfismo. De lo que se deduce que j es también un cuasi-isomorfismo, luego por la proposición anterior tenemos que $i : (I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \hookrightarrow (I \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X$ es un cuasi-isomorfismo con lo que se concluye que la aplicación $(I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \hookrightarrow \mathrm{Nu}(p)$ es un cuasi-isomorfismo, por lo tanto I satisface escisión para la homología intuitiva de Hochschild.

Para *1.* $\Longrightarrow$ *3.* aplicamos el razonamiento anterior a:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (I \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "j'"] & (A \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, equal] & (B \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(p) \arrow[r] & (A \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r, "p"] & (B \otimes B^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \otimes X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Veremos que *2.* y *3.* $\Longrightarrow$ *4.* Sea Tenemos la siguientes sucesiones de bicomplejos:

$$0 \longrightarrow CC(I)^{\{2\}} \longrightarrow CC(I) \longrightarrow CC(I)^{\{2\}}(-1,0) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow CC(A)^{\{2\}} \longrightarrow CC(A) \longrightarrow CC(A)^{\{2\}}(-1,0) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow CC(B)^{\{2\}} \longrightarrow CC(B) \longrightarrow CC(B)^{\{2\}}(-1,0) \longrightarrow 0$$

si les aplicamos el funtor $-\otimes X$, se conserva aún la exactitud.

Como $0 \longrightarrow \mathrm{Nu}(\pi_1 \otimes X) \longrightarrow \mathrm{Nu}(\pi_2 \otimes X) \longrightarrow \mathrm{Nu}(\pi_3 \otimes X) \longrightarrow 0$ es el Kernel de la aplicación de morfismos:

$$\pi := \Big\downarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & CC(A)^{\{1\}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1 \otimes X"] & CC(A)^{\{2\}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2 \otimes X"] & CC(A)^{\{2\}}(-1,0) \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3 \otimes X"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & CC(B)^{\{1\}} \otimes X \arrow[r] & CC(B)^{\{2\}} \arrow[r] & CC(B)^{\{2\}}(-1,0) \otimes X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & CC(I)^{\{1\}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, hook] & CC(I)^{\{2\}} \otimes X \arrow[r] \arrow[d, hook] & CC(I)^{\{2\}}(-1,0) \otimes X \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\pi_1 \otimes X) \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\pi_2 \otimes X) \arrow[r] & \mathrm{Nu}(\pi_3 \otimes X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde los morfismos de los lados izquierdo y derecho son cuasi-isomorfismos por hipótesis al aplicar Tot y la sucesión larga en homología se tiene que:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{n+1}(CC(I)^{\{2\}}(-1,0) \otimes X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_n(CC(I)^{\{1\}} \otimes X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_n(CC(I)^{\{2\}} \otimes X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_n(CC(I)^{\{2\}}(-1,0) \otimes X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_{n-1}(CC(I)^{\{1\}} \otimes X) \arrow[d] \\ \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{Nu}(\pi_3 \otimes X)) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(\mathrm{Nu}(\pi_1 \otimes X)) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(\mathrm{Nu}(\pi_2 \otimes X)) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(\mathrm{Nu}(\pi_3 \otimes X)) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{Nu}(\pi_1 \otimes X)) \end{tikzcd}$$

es conmutativo y de filas exactas. Las dos morfismos de la izquierda y los dos de la derecha son isomorfismos por provenir de cuasi-isomorfismos. Entonces aplicando el Lema de los 5 se tiene que el morfismo del medio es un isomorfismo, lo que quiere decir que $CC(I)^{\{2\}} \hookrightarrow \mathrm{Nu}(\pi_2 \otimes X)$ es un cuasi-isomorfismo y por lo tanto I cumple escisión para la homología de Hochschild.

Para probar *4.* $\Leftrightarrow$ *5.* se utiliza un razonamiento análogo al anterior aplicado a las sucesiones:

$$0 \longrightarrow CC(I)^{\{2\}} \longrightarrow CC(I) \longrightarrow CC(I)[2,0] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow CC(A)^{\{2\}} \longrightarrow CC(A) \longrightarrow CC(A)[2,0] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow CC(B)^{\{2\}} \longrightarrow CC(B) \longrightarrow CC(B)[2,0] \longrightarrow 0$$

2. $\Longrightarrow$ *1.* Sea X un $\Lambda-$módulo y consideremos el $\Lambda-$álgebra $A = I \oplus X$ con el producto $(n,m) \cdot (x,y) = (nx, 0)$ y la proyección canónica $\pi : (A \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (X \otimes X^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Sea $L_n := (I \oplus X) \otimes (I \oplus 0)^{n\otimes} = ((I \oplus 0) \otimes (I \oplus 0)^{n\otimes}) \oplus ((0 \oplus X) \otimes (I \oplus 0)^{n\otimes})$, es fácil ver que $L_n \subset \mathrm{Nu}(\pi_n)$ y además L_n es sumando directo de $A \otimes A^{n\otimes}$ y por lo tanto es sumando directo de $\mathrm{Nu}(\pi_n)$. Calculemos $b_n|_{L_n}$, sea $(a_0, x) \otimes (a_1, 0) \otimes \cdots \otimes (a_n, 0) \in L_n$ un generador $b_n((a_0,x)\otimes(a_1,0)\otimes\cdots\otimes(a_n,0)) = b_n((a_0,0)\otimes\cdots\otimes(a_n,0)) + b_n((0,x)\otimes(a_1,0)\otimes\cdots\otimes(a_n,0)) = b_n((a_0,0)\otimes\cdots\otimes(a_n,0)) + (0,x)\otimes\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(a_1\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots a_n, 0) = b_n((a_0,0)\otimes\cdots\otimes(a_n,0)) + (0,x)\otimes b'_{n-1}((a_1,0)\otimes\cdots\otimes(a_n,0))$. De esto se puede concluir que $(L_n, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \cong (I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \oplus (X \otimes (I \otimes I^{n-1\otimes}, b'_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}})$ de forma natural. Tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
(I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \oplus (X \otimes (I \otimes I^{n-1\otimes}, b'_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}) \arrow[r, hook, "i"] & \mathrm{Nu}(\pi) \arrow[r, hook] & (A \otimes A^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \arrow[r, "\pi"] & (X \otimes X^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \\
 & (I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \arrow[ul, hook, "id\oplus 0"] \arrow[u, hook, dashed] \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}
$$

la inclusión vertical es la única que hace conmutar el triángulo de la derecha por propiedad universal del kernel. Las inclusiones i e $id \oplus 0$ son de sumas directas. Al aplicar el funtor de homología se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}((I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \oplus \mathrm{H}((X \otimes (I \otimes I^{n-1\otimes}, b'_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}})) \arrow[r, hook, "i_*"] & \mathrm{H}(\mathrm{Nu}(\pi)) \\
 & \mathrm{H}((I \otimes I^{n\otimes}, b_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \arrow[ul, "id\oplus 0"] \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

pues I satisface escisión para la homología intuitiva de Hochschild. De lo que se deduce que $id \oplus 0$ es sobreyectiva y por lo tanto $0 : 0 \to (X \otimes \mathrm{H}((I \otimes I^{n-1\otimes}, b'_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}})$ es sobreyectiva lo que quiere decir que $X \otimes (I \otimes I^{n-1\otimes}, b'_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ es exacta, lo cual es equivalente a decir que I es $\mathrm{H}-$unitario.

Para probar *3.* $\Longrightarrow$ *1.* se usa el razonamiento anterior considerando la aplicación $\pi : (A \otimes A^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (X \otimes X^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y se puede probar luego que $(L_n, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (I \oplus X) \otimes (I \oplus 0)^{n\otimes} \cong (I \otimes I^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \oplus (X \otimes (I \otimes I^{n-1\otimes}, b'_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}})$.

4. $\Longrightarrow$ *1.* sea X una $\Lambda-$álgebra, y $A = I \oplus X$ como en la prueba de *2.* $\Longrightarrow$ *1.* y consideremos la aplicación canónica $\pi : CC(I \oplus X)^{\{2\}} \to CC(X)^{\{2\}}$ y el sub-bicomplejo $\mathcal{L}$ tal que su entrada (n, m) esté conformada por elementos de $\mathrm{Nu}(\pi)$ que estén generadas por elementos de la forma $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$ con $a_i \in A$ y con al menos uno de los factores en X. Con esto tenemos que $\mathrm{Nu}(\pi) = CC(I)^{\{2\}} \oplus \mathcal{L}$. Debido a que la inclusión canónica $CC(I)^{\{2\}} \hookrightarrow \mathrm{Nu}(\pi)$ es un cuasi-isomorfismo, entonces $\mathrm{H}(\mathrm{Tot}(\mathcal{L})) = 0$.

Supongamos por contradicción que $X \otimes (I \otimes I^{n\otimes}, b'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ no es exacta. Sea $x \in X \otimes I \otimes I^{n\otimes}$, es decir $x = \sum_i \lambda_i(0, x_i) \otimes a_{(0,i)} \otimes \cdots \otimes a_{(n,i)}$ tal que es un ciclo pero no un borde. Sea $y = (0, N(x)) \in \mathrm{Tot}(\mathcal{L})_n$, donde N es el operador norma definido anteriormente. $\partial(y) = (0+(1-t)(N(x)), -b'(N(x))) = (0, N(b(x))) = (0, N(-b'(x)+(-1)^n(a_{(n,i)}.(0, x_i)) \otimes a_{(0,i)} \otimes \cdots \otimes a_{(n-1,i)})) = (0, 0)$. Entonces y es un ciclo. Como $\mathcal{L}$ es exacto existe $y' = (r, s) \in \mathrm{Tot}(\mathcal{L})_{n+1}$ tal que $\partial(y') = y$. Es decir que $(b_{n+2}(r) + (1-t)(s), -b'_{n+1}(s)) = y$ entonces existiría s en el submódulo de $(I \oplus X) \otimes (I \oplus X)^{n+1\otimes}$ generado por elementos de la forma $a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$ que tienen algún a_i en X, tal que $b'_{n+1}(s) = N(x)$. Llamemos $\mathfrak{L}^{n+1}$ al submódulo generado por elementos del tipo descrito y denotemos con $\mathfrak{L}_1^{n+1}$ al submódulo de $\mathfrak{L}^{n+1}$ generado por los elementos de la forma $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$ que tienen algún a_i con $i \neq 0$ en X. Así, $\mathfrak{L}^{n+1} = (0 \oplus X) \otimes (I \oplus X)^{n+1\otimes} \oplus \mathfrak{L}_1^{n+1}$. Definamos similarmente $\mathfrak{L}^n$, y $\mathfrak{L}_1^n$. Escribamos $s = s' + s_1$, con $s' \in I \oplus X \otimes (I \oplus 0)^{n+1\otimes}$ y $s_1 \in \mathfrak{L}_1^{n+1}$. Es fácil ver que $b'_{n+1}(s') \in (0 \oplus X) \otimes (I \oplus X)^{n\otimes}$ y $b'_{n+1}(s_1) \in \mathfrak{L}_1^n$. Como por definición $x \in (0 \oplus X) \otimes (I \oplus X)^{n\otimes}$ y $N(x) - x \in \mathfrak{L}_1^n$, la igualdad

$$b'_{n+1}(s') + b'_{n+1}(s_1) = b'_{n+1}(s) = N(x) = x + (N(x) - x)$$

implica que $b'_{n+1}(s') = x$ lo cual contradice la suposición de que x no es un borde. $\square$

4. Homología de Pro-Álgebras

En esta sección definiremos las teorías homológicas para pro-álgebras en base a las definidas en el capítulo precedente.

Sea $A \in Pro - Alg$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_n)$ y $\mathfrak{b}' = (\mathfrak{b}'_n)$ donde $\mathfrak{b}_n : A \otimes A^{n\otimes} \to A \otimes A^{n-1\otimes} := (b_n : A_k \otimes A_k^{n\otimes} \to A_k \otimes A_k^{n-1\otimes})_k$ y $\mathfrak{b}'_n : A \otimes A^{n\otimes} \to A \otimes A^{n-1\otimes} := (b'_n : A_k \otimes A_k^{n\otimes} \to A_k \otimes A_k^{n-1\otimes})_k$, donde los mapeos estructurales de $A \otimes A^{n\otimes}$ son $\sigma_{k+1,k} \otimes {\sigma_{k+1,k}}^{n\otimes} : A_{k+1} \otimes {A_{k+1}}^{n\otimes} \to A_k \otimes {A_k}^{n\otimes}$. Usando las propiedades del producto tensorial se puede ver que $\mathfrak{b}_n$ y $\mathfrak{b}'_n$ son morfismos de *pro*−módulos. Como $\mathfrak{b} \circ \mathfrak{b} = 0$ y $\mathfrak{b}' \circ \mathfrak{b}' = 0$, se pueden definir dos complejos de *pro*−módulos: $C(A) = (A \otimes A^{n\otimes}, \mathfrak{b}_n)$ y $C^{\text{bar}}(A) = (A \otimes A^{n\otimes}, \mathfrak{b}'_n)$ a los que llamaremos *complejo intuitivo de Hochschild* y *complejo barra* de la *pro*−álgebra A respectivamente.

Definamos $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_n)$ donde $\mathfrak{t}_n : A \otimes A^{n\otimes} \to A \otimes A^{n\otimes} := (t_n : A_k \otimes A_k^{n\otimes} \to A_k \otimes A_k^{n\otimes})_k$ y $\mathfrak{N}_n : A \otimes A^{n\otimes} \to A \otimes A^{n\otimes} := (N_n : A_k \otimes A_k^{n\otimes} \to A_k \otimes A_k^{n\otimes})_k$, usando las propiedades de t_n y N_n tenemos los siguientes bicomplejos:

$$CC(A) := \begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
A^{4\otimes} \arrow[d, "\mathfrak{b}"'] & A^{4\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] \arrow[d, "-\mathfrak{b}'"] & A^{4\otimes} \arrow[l, "\mathfrak{N}"] \arrow[d, "\mathfrak{b}"'] & A^{4\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] \arrow[d, "-\mathfrak{b}'"] & \cdots \arrow[l, "\mathfrak{N}"] \\
A^{3\otimes} \arrow[d, "\mathfrak{b}"'] & A^{3\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] \arrow[d, "-\mathfrak{b}'"] & A^{3\otimes} \arrow[l, "\mathfrak{N}"] \arrow[d, "\mathfrak{b}"'] & A^{3\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] \arrow[d, "-\mathfrak{b}'"] & \cdots \arrow[l, "\mathfrak{N}"] \\
A^{2\otimes} \arrow[d, "\mathfrak{b}"'] & A^{2\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] \arrow[d, "-\mathfrak{b}'"] & A^{2\otimes} \arrow[l, "\mathfrak{N}"] \arrow[d, "\mathfrak{b}"'] & A^{2\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] \arrow[d, "-\mathfrak{b}'"] & \cdots \arrow[l, "\mathfrak{N}"] \\
A^{1\otimes} & A^{1\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] & A^{1\otimes} \arrow[l, "\mathfrak{N}"] & A^{1\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] & \cdots \arrow[l, "\mathfrak{N}"]
\end{tikzcd}
\qquad
CC(A)^{\{2\}} := \begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A^{3\otimes} \arrow[d, "\mathfrak{b}"'] & A^{3\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] \arrow[d, "-\mathfrak{b}'"] \\
A^{2\otimes} \arrow[d, "\mathfrak{b}"'] & A^{2\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"] \arrow[d, "-\mathfrak{b}'"] \\
A^{1\otimes} & A^{1\otimes} \arrow[l, "1-\mathfrak{t}"]
\end{tikzcd}$$

luego definimos $\mathrm{H}\,C(A) = \mathrm{H}(\mathrm{Tot}(CC(A)))$ y $\mathrm{H}\,\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}(\mathrm{Tot}(CC(A)^{\{2\}}))$ como los grupos graduados homología cíclica y de Hochschild respectivamente. También se tienen las siguientes sucesiones exactas cortas de complejos:

$$0 \longrightarrow C(I) \longrightarrow \mathrm{Tot}(CC(I)^{\{2\}}) \longrightarrow (C^{\text{bar}})^{[-1]}(I) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow CC(I)^{\{2\}} \longrightarrow CC(I) \longrightarrow CC(I)[2,0] \longrightarrow 0$$

pues dependen sólo de la forma de los bicomplejos y no de sus entradas. Se definen análogamente los conceptos de extensión pura de *pro*−álgebras, escisión en las homologías de Hochschild, intuitiva de Hochschild, barra y cíclica y *pro*−módulo H −*unitario.*

Proposición 4.0.2. *Sea $A = (A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una pro−álgebra. Entonces A satisface escisión para la homología de Hochschild si y sólo es isomorfa a una pro−álgebra tal que en cada uno de sus términos se satisface la escisión para la homología de Hochschild.*

Demostración: Sea I una *pro*−álgebra y $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ una extensión pura de *pro*−álgebras. Supongamos que I satisface la homología de Hochschild. Sea X una λ−álgebra y $j \in \mathbb{N}$, usemos la escisión con el *pro*−módulo Ξ definido por:

$$\Xi_k := \begin{cases} 0 & , k \neq j \\ X & , k = j \end{cases}$$

Entonces para la aplicación $\overline{\pi} : CC(A)^{\{2\}} \to CC(B)^{\{2\}}$ se cumple que $CC(\Xi)^{\{2\}} \otimes X \hookrightarrow \mathrm{Nu}(\pi \otimes \Xi)$ es un cuasi-isomorfismo. Pero como todas las entradas de Ξ son ceros excepto en la posición j, donde está X, entonces se tiene que $CC(I_j)^{\{2\}} \otimes X \hookrightarrow \mathrm{Nu}(\overline{\pi}_j \otimes X)$ es un cuasi-isomorfismo, con lo podemos concluir que I_k cumple escisión para la homología de Hochschild.

Para probar la implicación contraria basta notar que si tomamos una *pro*−álgebra X, como las entradas $CC(I_k)^{\{2\}} \hookrightarrow \mathrm{Nu}(\pi_k \otimes X_k)$ son cuasi-isomorfismos, entonces $CC(I)^{\{2\}} \hookrightarrow \mathrm{Nu}(\pi \otimes X)$ también es un cuasi-isomorfismo. □

De manera similar se dan los siguientes resultados:

Proposición 4.0.3. *Sea $A = (A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una pro−álgebra. Entonces A satisface escisión para la homología de barra si y sólo en cada uno de sus términos se satisface la escisión para la homología de barra.*

Proposición 4.0.4. *Sea $A = (A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una pro−álgebra. Entonces A satisface escisión para la homología de Hochschild si y sólo en cada uno de sus términos se*

REFERENCIAS

[CV] CORTIÑAS, Guillermo; VALQUI. Christian: *Excision in Bivariant Periodic Cyclic Cohomology: A Categorial Approach* Preprint ICTP IC2002096 Miramare-Trieste (2002).

[GG] GUCCIONE, Jorge A.; GUCCIONE, Juan J.: *The theorem of excision for Hochschild and cyclic homology,* Journal of Pure and Applied Algebra 106 (1996) 57-60

[G] GRØNBÆK, Christian: *Bivariant Periodic Cyclic Homology* CHAPMAN & HALL/CRC Research Notes in Mathematics S., Taylor & Francis Ltd.

[L] LODAY, Jean-Louis: *Cyclic Homology,* Second edition, vol. 301 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1998)

[M] MAC LANE, Saunders: *Categories for the working mathematician,* Second edition, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag, New York, (1998)

[V1] VALQUI, Christian: *Pro Vektorräume, Pro-Algebren und bivariante periodische zyklische Homologie.*(Tesis, alemán) Preprint 29, SFB 478 at Universität Münster (1998)

[V2] VALQUI, Christian: *Triangulated categories and Cuntz-Quillen theory* K-theory Preprint Archives (2001)

[W] Wodzicki, Mariusz:*Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory,* Ann. Math. 129 (1989) 591-639.