UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

Métodos Topológicos en Superficies de Riemann

Por

Ruben Edwin Lizarbe Monje

Tesis para obtener el grado de

Maestro en Matemática Aplicada

Dr. Jesús Zapata Samanez

Asesor

Noviembre 2009

El esfuerzo y dedicación que he puesto en esta tesis, va con mucho cariño a mis padres Agustin y María cuyo afecto y comprensión ha sido mi inspiración, a mis hermanos Olinda y Rafael quienes han sido mi aliciente, pero en especial a mi hermanita querida Olinda quien me apoyo y acompaño en cada locura mía, y a mis más queridos amigos, pues su consejo, ha sido parte de este esfuerzo.

"Tu talento es un regalo de Dios. Lo que haces con ello es tu regalo para Dios."
"La vida es una búsqueda de momentos de felicidad."

Agradecimientos

Agradezco a todos quienes han colaborado, ya sea directa o indirectamente en la elaboración de ésta tesis en especial a Jesús Zapata quien ha sido, para mí, un gran maestro, un profesor y un amigo, a quien considero como modelo a seguir en el sentido profesional y humano, a mi amigo y compañero de estudios Percy Abanto quien en muchas veces me ayudado con sus ideas y observaciones en la pruebas de los teoremas, y a todos los que con el apoyo confiaron en mí.

Tabla de Símbolos

A continuación enunciaremos las notaciones y símbolos que utilizaremos en este trabajo, algunos son utilizados con frecuencia en el algebra, pero otros seran introducidos para fines específicos.

Símbolo	Significado	Página
$\mathbb{R}^n$	el espacio euclidiano real n-dimensional	2
$\mathbb{C}$	el conjunto de números complejos	2
$\bigcup$	unión de conjuntos	2
$\bigcap$	intersección de conjuntos	2
$f \circ g$	composición de las funciones f y g	2
$\varphi_{\|U}$	la restricción de la función φ al conjunto U	3
$\sim$	relación de equivalencia	3
$\overline{\mathbb{C}}$	la compactificación del conjunto de números complejos	4
$\subseteq$	inclusión de conjuntos	4
$A \backslash B$	la diferencia de los conjuntos A y B	4
$\mathbb{C}^*$	el conjunto de números complejos no nulos	4
S^2	la esfera 2-dimensional	4
$Re(z)$	la parte real del número complejo z	4
$Im(z)$	la parte imaginaria del número complejo z	4
$\|z\|$	norma del número complejo z	4
$\mathbb{CP}^1$	el espacio proyectivo lineal	5
S^1	círculo unitario	7
$\mathcal{O}(M)$	el espacio de las funciones holomorfas sobre la superficie de Riemann M	7
$\overline{U}$	clausura topológica del conjunto U	9
$\square$	demostración terminada	9
$\lim$	límite	9
$\mathcal{M}(X)$	el espacio de las funciones meromorfas sobre la superficie de Riemann X	9
$\mathbb{Z}$	elconjunto de los números enteros	10
$\sum$	símbolo de sumatoria	11
$\sup X$	el supremo del conjunto X	13

Símbolo	Significado	Página
$\mathbb{N}$	el conjunto de números naturales	15
$C^\infty(M)$	el espacio de las funciones diferenciables sobre la variedad M	18
$C^k(M)$	el espacio de las funciones diferenciables de orden k sobre la variedad M	22
$\sqcup$	unión disjunta de conjuntos	31
$\subsetneq$	inclusión estricta de conjuntos	34
$\exp$	la aplicación exponencial	42
$\mathbb{R}_+$	el conjunto de los números reales positivos	73
$\mathbb{R}_-$	el conjunto de los números reales negativos	73
$\mathbb{Z}^n$	el producto cartesiano de n-copias del conjunto $\mathbb{Z}$	73
$GL_n(\mathbb{C})$	el grupo de matrices invertibles de orden n con entradas en $\mathbb{C}$	76
$GL_n(\mathbb{R})$	el grupo de matrices invertibles de orden n con entradas en $\mathbb{R}$	77
$C(M,\mathbb{R}^n)$	espacio de la aplicaciones diferenciables sobre la variedad M	78
	con valores en $\mathbb{R}^n$	
$\mathcal{L}(V,W)$	el espacio de la aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales V y W	79
$\prod$	el producto cartesiano de conjuntos	98
$\bigoplus$	suma directa de espacios vectoriales	98
$C_c^\infty(M)$	el espacio de las funciones diferenciables sobre la variedad M	109
	con soporte compacto	
máx	el máximo	116
log	la aplicación logaritmo	122

Índice general

Introducción

Esta tesis desarrollará técnicas para el estudio de las supeficies de Riemann pasando primero por el estudio de formas diferenciales sobre una superficie, segundo pasando por el estudio de grupos de cohomología de haces y finalmente por el estudio de fibrados vectoriales, que a partir del estudio de formas con valores en un fibrado nos darán origen a la coholomogía de Dolbeault con valores en un fibrado y la cohomología de Dolbeault con soporte compacto, que juegan un papel muy importante en esta tesis.

El objetivo primordial será probar los Teoremas de Dualidad de Serre y Riemann-Roch en su versión en fibrados lineales.

Un punto que vamos a resaltar en esta tesis se verá en la demostración original del teorema de Dualidad de Serre la cual se diferencia de las demostraciones clásicas:

En la cual involucra definir distribuciones para luego definir el haz de germenes de distruciones.

Otra de las demostraciones se basa primero em probar el teorema de finitud.

Capítulo 1

Nociones de Superficie de Riemann

En este primer capítulo definiremos y daremos ejemplos de superficies de Riemann. Daremos algunas propiedades de funciones holomorfas en superficies de Riemann como una extensión del caso de funciones holomorfas definidas en el plano complejo.

1.1. Definición de superficie de Riemann

Definición 1.1.1 .- Sea M un espacio topológico de Hausdorff. Se dice que M es una **variedad n-dimensional** si es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, i.e., para cada $x \in M$ existe una vecindad abierta U de x y un homeomorfismo $\varphi : U \to V$, donde $V = \varphi(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.2 .- Sea M una variedad 2-dimensional.

1. Si $\varphi : U \to V$ es un homeomorfismo, con U abierto de M y $V = \varphi(U)$ abierto de $\mathbb{C}$. Llamaremos al par (φ, U) una **carta compleja** ó simplemente una carta sobre M.

2. Dos cartas complejas $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)$ se dicen **holomorficamente compatibles** ó simplemente compatibles si $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$ ó $U_1 \bigcap U_2 \neq \emptyset$ y la aplicación

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

es un biholomorfismo.

3. Se denomina **atlas complejo** ó simplemente atlas sobre X a la familia $\mathcal{U} = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in \Lambda}$ de cartas complejas de M que son compatibles y que cubren M, i.e., $\bigcup_{i\in \Lambda} U_i = M$.

4. Dos atlas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ se dicen **analiticamente compatibles** ó simplemente compatibles si cada carta de $\mathcal{U}$ es compatible con cada carta de $\mathcal{U}'$.

Observación 1.1

1. Si (φ, U) es una carta de M y U_1 es un subconjunto abierto de U entonces $(\varphi|_{U_1}, U_1)$ es una carta de M compatible con la carta (φ, U).

2. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son atlas de M, es fácil ver que la siguente relación:

$$\mathcal{U} \sim \mathcal{U}' \Leftrightarrow \mathcal{U} \text{ y } \mathcal{U}' \text{ son compatibles}$$

   es una relación de equivalencia ya que la composición de biholomorfismos es un biholomorfismo.

Definición 1.1.3 .- Sea M una variedad 2-dimensional. Un atlas $\mathcal{U}$ sobre M es llamado **maximal** si no es posible obtener un atlas que contenga propiamente a éste, i.e., si $\mathcal{U}'$ es un atlas sobre M y $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.

Observación 1.2

1. Si $\mathcal{U}$ es un atlas sobre M entonces existe un único atlas maximal denotado por $\mathcal{U}_m$ que contiene a $\mathcal{U}$ y que consiste de la colección de todas las cartas de X que son compatibles con cada carta de $\mathcal{U}$.

2. Si dos atlas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son compatibles entonces $\mathcal{U}_m = \mathcal{U}'_m$.

Definición 1.1.4 .-Se denomina **Superficie de Riemann** al par $(M,\mathcal{U})$, donde M es una variedad 2-dimensional conexa y $\mathcal{U}$ es un atlas maximal sobre M ($\mathcal{U}$ es llamado una estructura compleja sobre M).

Observación 1.3

1. Un atlas $\mathcal{U}$ sobre M determina de manera única una estructura compleja sobre M (por la Observación 1.2). Por abuso de lenguaje el par $(M,\mathcal{U})$ también será llamado superficie de Riemann, aunque en realidad nos estemos refiriendo a $(M,\mathcal{U}_m)$.

1.2. Ejemplos de superficies de Riemann

1. **El Plano Complejo** $(\mathbb{C},\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}=\{(Id,\mathbb{C}) : \text{donde } Id:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \text{ es la identidad}\}$ es una superficie de Riemann.

2. **Dominios**: Si $(M,\mathcal{U})$ es una superficie de Riemann, donde $\mathcal{U}=\{(\varphi_i\,,U_i)\}_{i\in\Lambda}$ e $Y\subseteq M$ un dominio, i.e., abierto y conexo; entonces $(Y,\mathcal{V})$ es una superficie de Riemann, donde $\mathcal{V}=\{(\varphi_i|_{U_i\cap Y}\,,U_i\cap Y)\}_{i\in\Lambda}$. En particular, los dominios en $\mathbb{C}$ son supeficies de Riemann.

3. **La Esfera de Riemann** $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ con la siguiente topología: Los abiertos de $\overline{\mathbb{C}}$ son abiertos usuales de $\mathbb{C}$ ó de la forma $V\cup\{\infty\}$ donde $V\subseteq\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}\backslash V$ es compacto. Con esta topología $\overline{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico de Hausdorff compacto.
   Sea
   $$U_1 := \overline{\mathbb{C}}\backslash\{\infty\}=\mathbb{C},$$
   $$U_2 := \overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\}=\mathbb{C}^*\cup\{\infty\}.$$
   donde $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
   Definimos las aplicaciones $\varphi_i : U_i\to\mathbb{C},$ para $i=1,2$, como sigue. $\varphi_1=id_{\mathbb{C}}$ la aplicación identidad y
   $$\varphi_2(z) := \begin{cases} 1/z, & z\in\mathbb{C}^*, \\ 0, & z=\infty. \end{cases}$$
   Estas aplicaciones son homeomorfismos.
   Como U_1 y U_2 son conexos y tiene intersección no vacía entonces $\overline{\mathbb{C}}$ es conexo.
   Veamos que las cartas φ_1 y φ_2 son holomorficamente compatibles. En efecto, como $\varphi_1(U_1\cap U_2)=\varphi_2(U_1\cap U_2)=\mathbb{C}^*$ y
   $$\begin{array}{rccc} \varphi_2\circ\varphi_1^{-1}: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & 1/z, \end{array}$$
   entonces es un biholomorfismo.
   Observemos que existe un homeomorfismo entre $\overline{\mathbb{C}}$ y la esfera $S^2=\{(x,y,w)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+w^2=1\}$ dado por:
   $$\begin{array}{rccl} \phi: & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & S^2 \\ & z & \longmapsto & \begin{cases} \left(\dfrac{2Re(z)}{|z|^2+1},\dfrac{2Im(z)}{|z|^2+1},\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), & z\neq\infty, \\ \\ (0,0,1), & z=\infty, \end{cases} \end{array}$$

cuya inversa es:

$$\begin{array}{cccc} \phi^{-1}: & S^2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} \\ & (x,y,w) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{1-w} + i\dfrac{y}{1-w}, & (x,y,w) \neq (0,0,1), \\ \\ \infty, & (x,y,w) = (0,0,1). \end{cases} \end{array}$$

4. **El Proyectivo Lineal**. Denotamos por $\mathbb{CP}^1$ al proyectivo lineal complejo, que es, el espacio cociente $(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})/_{\sim}$, donde $\sim$ es una relación de equivalencia dada por:

$$(z,w) \sim (z_1,w_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \,/\, (z_1,w_1) = \lambda(z,w).$$

La clase de (z,w) la denotaremos por $[z:w]$.
$\mathbb{CP}^1$ tiene un estructura compleja dado por el siguiente atlas:
Sean $U_0 = \{[z:w]\,/\,z \neq 0\}$ y $U_1 = \{[z:w]\,/\,w \neq 0\}$ abiertos de $\mathbb{CP}^1$. Notemos que U_0 y U_1 cubren $\mathbb{CP}^1$. Definimos $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ por $\varphi_0([z:w]) = w/z$, similarmente definimos $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ por $\varphi_1([z:w]) = z/w$. Notemos que φ_0, φ_1 son homeomorfismos y $\varphi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$, luego $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = z$. Desde que U_0 y U_1 son conexos y tienen intersección no vacía entonces la unión $\mathbb{CP}^1$ es conexa.

Veamos que $\mathbb{CP}^1$ es Hausdorff. Tomamos dos puntos p y q distintos en $\mathbb{CP}^1$. Si ambos puntos p y q están en U_0 ó U_1, podemos separarlos desde que los U_i son Hausdorff. En caso contrario podemos asumir que $p \in U_0\backslash U_1$ y $q \in U_1\backslash U_0$ entonces $p = [1:0]$ y $q = [0:1]$. Luego $\varphi^{-1}(D) \cap \varphi^{-1}(D) \neq \emptyset$, donde D es el disco unitario abierto en $\mathbb{C}$.

Usualmente denotamos $\mathbb{CP}^1$ por $\mathbb{P}^1$. Notemos que existe un homeomorfismo entre $\mathbb{CP}^1$ y $\overline{\mathbb{C}}$ dado por

$$\begin{array}{cccc} F: & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{CP}^1 \\ & z & \longmapsto & \begin{cases} [z,1], & z \in \mathbb{C}, \\ [1,0], & z = \infty. \end{cases} \end{array}$$

Más aún F es un biholomorfismo, pero basta ver que F es un homeomorfismo para concluir que $\mathbb{CP}^1$ es compacto.

5. **Toro Complejo**: Sean w_1, $w_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes en $\mathbb{R}$. Definimos el retículo:

$$\Gamma := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2 : \ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Luego se define la siguiente relación de equivalencia sobre $\mathbb{C}$:

$$z \sim z' \Leftrightarrow z - z' \in \Gamma.$$

El conjunto de clases de equivalencia será denotado por $\mathbb{C}/\Gamma$.

Sea

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma \\ z &\longmapsto \pi(z), \end{aligned}$$

la proyección canónica. A partir de esta aplicación cociente, $\mathbb{C}/\Gamma$ es un espacio topológico con la siguiente topología:

$U \subseteq \mathbb{C}/\Gamma$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Con esta definición π es continua y como $\mathbb{C}$ es conexo tenemos que $\mathbb{C}/\Gamma$ también lo es.

La aplicación π es abierta, i.e., la imagen de cada abierto $V \subset \mathbb{C}$ es abierto. Si $V \subset \mathbb{C}$ es abierto, entonces mostremos que $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto en $\mathbb{C}$. En efecto, como $w + V$ es abierto, $\forall\, w \in \Gamma$ y

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in \Gamma} (w + V),$$

entonces $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto.

La estructura compleja sobre $\mathbb{C}/\Gamma$ es definida de la siguiente manera. Sea $V \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que dos puntos cualesquiera en V no son equivalentes sobre Γ. Entonces $U := \pi(V)$ es abierto y $\pi\mid_V : V \to U$ es un homeomorfismo. Su inversa $\varphi : U \to V$ es un carta compleja sobre $\mathbb{C}/\Gamma$. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de cartas obtenidas de esta manera. Mostremos que cualquier par de cartas complejas $\varphi_i : U_i \to V_i$, para $i = 1, 2$, son holomorficamente compatibles. Considere la aplicación

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Para cada $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ se tiene que $\pi(\psi(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$ entonces $\psi(z) - z \in \Gamma$. Ya que Γ es discreto y ψ es continua, esto implica que $\psi(z) - z$ es constante sobre cada componente conexa de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$, entonces ψ es holomorfa. Analogamente ψ^{-1} es holomorfa.

Así, $(\mathbb{C}/\Gamma, \mathcal{U})$ es una superficie de Riemann llamada el toro complejo.

Por último, sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ el circulo unitario. Observemos que existe un homeomorfismo entre $\mathbb{C}/\Gamma$ y el toro $S^1 \times S^1$ dado por:

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{C}/\Gamma & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ & \pi(\lambda w_1 + \mu w_2) & \longmapsto & (e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu}), \end{array}$$

donde λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

6. **Gráficos de funciones holomorfas.** Sea $V \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto conexo del plano complejo y f una función holomorfa definida sobre V. Considere el gráfico X de f, como el subconjunto de $\mathbb{C}^2$:

$$X = \{(z, f(z)) \,:\, z \in V)\},$$

con X la topología relativa, y sea $\pi_1 : X \to \mathbb{C}$ la proyección a la primera coordenada, notar que π_1 es un homeomorfismo, entonces π_1 es una carta sobre X. Luego X tiene un atlas compuesto de una sola carta, esto nos dice que X tiene estructura de superficie de Riemann.

Generalizando, si tenemos una colección finita de funciones holomorfas $f_1, ..., f_n$ definidas sobre V, simplemente tomamos X como el gráfico en $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$X = \{(z, f_1(z), ..., f_n(z)) \,:\, z \in V\}.$$

1.3. Aplicaciones holomorfas

Definición 1.3.1 .- Sea $(M, \mathcal{U})$ superficie de Riemann, $Y \subseteq M$ abierto y $f : Y \to \mathbb{C}$ una función continua.

1. Se dice que $f : Y \to \mathbb{C}$ es una **aplicación holomorfa** si $\forall\, (\psi, U)$ carta de M, la aplicación $f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap Y) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en el sentido usual.

2. $\mathcal{O}(Y) = \{f : Y \to \mathbb{C}\,$, es una aplicación holomorfa$\}$.

Observación 1.4

1. $\mathcal{O}(Y)$ es un $\mathbb{C}$-álgebra, i.e., si $c \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow c \in \mathcal{O}(Y)$, $f + g \in \mathcal{O}(Y)$ y $f.g \in \mathcal{O}(Y)$.

2. Cada (φ, U) carta de M es en particular una aplicación holomorfa debido a la compatibilidad entre las cartas.

Teorema 1.3.1 *(Teorema de Singularidades Removibles de Riemann).* Sea M una superficie de Riemann, $U \subseteq M$ abierto y $x \in U$. Si $f \in \mathcal{O}(U \backslash \{x\})$ y es acotada en alguna vecindad de x entonces existe $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ extensión única de f.

Prueba. Inmediato por el teorema de singularidades removibles en el plano. $\square$

Definición 1.3.2 .- Sean $(M,\mathcal{U})$, $(N,\mathcal{V})$ superficies de Riemann y $f : M \to N$ continua.

1. Se dice que $f : (M,\mathcal{U}) \to (N,\mathcal{V})$ es **holomorfa** si para cualquier par de cartas (ψ_1, U_1) de M y (ψ_2, U_2) de N con $f(U_1) \subseteq U_2$, se tiene que

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1) \longrightarrow \psi_2(U_2),$$

   es holomorfa en el sentido usual.

2. Se dice que $f : M \to N$ es un **biholomorfismo** si f es un homeomorfismo tal que f y f^{-1} son holomorfas.

3. Se dice que M e N son **isomorfos** si existe un biholomorfismo $f : M \to N$.

Observación 1.5

1. Si $N = \mathbb{C}$, las aplicaciones holomorfas $f : M \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas.

2. Si $(M,\mathcal{U})$, $(N,\mathcal{V})$ y $(P,\mathcal{W})$ son superficies de Riemann y $f : M \to N$, $g : N \to P$ son funciones holomorfas entonces $f \circ g : M \to P$ es también holomorfa.

3. Si $f : M \to N$ es continua, M y N superficies de Riemann entonces f es holomorfa si y sólo si $\forall\, V \subseteq N$ abierto si $\psi \in \mathcal{O}(V)$ entonces $\psi \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$.

4. De lo anterior podemos definir el **Pull Back** f^*. Si $f : M \to N$ es holomorfa y $V \subseteq N$ es abierto, entonces

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{O}(V) &\longrightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V)) \\ \psi &\longmapsto f^*(\psi) = \psi \circ f. \end{aligned}$$

Además:

a) f^* es un homomorfismo de anillos ,i.e.,

$$\begin{aligned} f^*(\psi_1 + \psi_2) &= f^*(\psi_1) + f^*(\psi_2), \\ f^*(\psi_1.\psi_2) &= f^*(\psi_1).f^*(\psi_2). \end{aligned}$$

b) Si $g : N \to P$ holomorfa, P superficie de Riemann, $W \subseteq P$ abierto, $V = g^{-1}(W)$ y $U = f^{-1}(V)$ entonces $(g \circ f)^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(U)$ es un homomorfismo de anillos y se tiene $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Teorema 1.3.2 *(Teorema de Identidad).* Sean M, N superficies de Riemann y f_1, $f_2 : M \to N$ holomorfas tal que existe un subconjunto $A \subseteq M$ donde $f_1 = f_2$ en A y $a \in M$ un punto de acumulación de A entonces $f_1 = f_2$ en M.

Prueba. Sea $G = \{x \in M \,:\, \exists\, W_x \subset M$ vecindad de x tal que $f_1 |_{W_x} = f_2 |_{W_x}\}$.

Por definición G es abierto. Veamos que G es cerrado. En efecto, sea $b \in \overline{G}$ entonces $f_1(b) = f_2(b)$, por ser f_1, f_2 continuas en M. Sean $\varphi : U \to V$ cartas en M y $\psi : U' \to V'$ en N con $b \in U$ y $f_i(U) \subset U'$, para $i = 1, 2$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar U conexo, luego como $g_i = \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1} : V \to V'$ son holomorfas y $U \cap G \neq \emptyset$ podemos aplicar el Teorema de la Identidad en el plano complejo, así tenemos que $g_1 = g_2$ en V, entonces $f_1 = f_2$ en U, i.e., $b \in G$. Por lo anterior $G \neq \emptyset$, ya que $a \in G$. Luego como M es conexo, se concluye que $G = M$. $\square$

Definición 1.3.3 .- Sea M superficie de Riemann y $Y \subseteq M$ abierto.

1. Una función $f : Y' \to \mathbb{C}$ holomorfa con $Y' \subseteq Y$, se dice que f es **función meromorfa** sobre Y si:

   a) $Y \backslash Y'$ contiene solo puntos aislados.

   b) $\forall\, x \in Y \backslash Y'$ se tiene $\lim_{y \to x} |f(y)| = \infty$, i.e., ($\forall\, R > 0$, $\exists\, V_x$ vecindad de x tal que $|f(y)| > R$, $\forall y \in V_x$)

2. Un punto x es llamado **polo** de f si $x \in Y \backslash Y'$.

3. Denotaremos $\mathcal{M}(Y)$ el espacio de funciones meromorfas sobre Y.

Observación 1.6

1. El espacio $\mathcal{M}(Y)$ es un $\mathbb{C}$-álgebra.

2. Si x es un polo de f y (φ, U) es una carta sobre M, con $x \in U$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k g(z)$ donde g es una función holomorfa alrededor de $\varphi(x)$, y $g(\varphi(x)) \neq 0$. Definimos k como el **orden de f en x** y lo denotamos por $ord_x(f)$.

Ejemplo 1.1

1. Sea $n \geq 1$,
$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n, \end{array}$$
$c_k \in \mathbb{C}$, para $k = 1, 2, .., n$.
es holomorfa en $\mathbb{C}$, como $\mathbb{C} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ y $\lim_{z\to\infty} |F(z)| = \infty$, entonces $F \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ con un polo en el ∞.

Teorema 1.3.3 .- Sea M una superficie de Riemann.

1. Si $f \in \mathcal{M}(M)$, definimos la función
$$\begin{array}{rcl} F:\ M & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & , \text{si } x \text{ no es polo de } f, \\ \infty & , \text{si } x \text{ es polo de } f, \end{cases} \end{array}$$
entonces $F : M \to \overline{\mathbb{C}}$ es holomorfa.

2. Si $F : M \to \overline{\mathbb{C}}$ es holomorfa entonces $F = \infty$ en M ó $F^{-1}(\infty)$ consiste de puntos aislados y $F : M \backslash F^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ es holomorfa, i.e., F es meromorfa en M.
Entonces la construcción induce una correpondecia 1-1 entre
$$\left\{ \begin{array}{c} f \text{ funciones meromorfas} \\ \text{sobre } M \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} F : M \to \overline{\mathbb{C}} \text{ aplicaciones holomorfas} \\ \text{no identicamente nula} \end{array} \right\}$$

Prueba.

1. Sea $P = \{x \in M \ : \ x \text{ es un polo de } f\}$, como $f \in \mathcal{M}(M)$ entonces $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$ es continua.

Veamos que es holomorfa en $x \in P$. En efecto, considere $\psi : U \to V$ carta de M en $x \in U$ con $\overline{U}$ compacta y

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1/z & , z \neq \infty, \\ 0 & , z = \infty. \end{array} \right. \end{array}$$

Por la continuidad de f podemos asumir que $f(\overline{U}) \subset \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$. Luego $\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : V \to \mathbb{C}$ es acotada, luego por el Teorema de Singularidades Removibles es holomorfa en $\psi(x)$.

2. Si $f = \infty$ no hay nada que probar. Si $f \neq \infty$ entonces por el Teorema de Identidad $f^{-1}(\infty)$ consiste de puntos aislados. Luego se tiene que $f_{|_{M \backslash f^{-1}(\infty)}} : M \backslash f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

$\square$

El teorema de identidad se puede extender a funciones meromorfas sobre superficies de Riemann.

1.4. Teoremas fundamentales. Forma local de las aplicaciones holomorfas.

Teorema 1.4.1 *(Comportamiento local de las aplicaciones holomorfas).* Sean M, N superficies de Riemann, $f : M \to N$ holomorfa no constante, $a \in M$ y $b = f(a)$. Entonces existen un entero $k \geq 1$, cartas $\varphi : U \to V$ en M y $\psi : U' \to V'$ en N tales que:

1. $a \in U$, $\varphi(a) = 0$; $b \in U'$, $\psi(b) = 0$,
2. $f(U) \subseteq U'$,
3. $$\begin{array}{rcl} F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V & \longrightarrow & V' \\ z & \longmapsto & F(z) = z^k. \end{array}$$

Prueba. Tomemos cartas $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ en M y $\psi : U' \to V'$ en N que cumplen 1. y 2. Entonces la serie de Taylor para la función $f_1(w) := \psi \circ f \varphi_1^{-1}(w)$ debe ser de la forma

$$f_1(w) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i w^i,$$

donde $c_k \neq 0$, y $k \geq 1$ ya que $f_1(0) = 0$. Luego tenemos que $f_1(w) = w^k h(w)$ donde h es una función holomorfa en $w = 0$, y $h(0) \neq 0$. En este caso existe una función h_1 holomorfa cerca a 0 tal que $h_1^k(w) = h(w)$, por lo tanto $f_1(w) = (wh_1(w))^k$. Sea $g(w) = wh_1(w)$; como $g'(0) \neq 0$, tenemos que alrecedor de 0 la función g es un biholomorfismo. Defino $\varphi := g \circ \varphi_1$ es también una carta definida alrededor de a. Si $z = g(w) = wh_1(w)$. Entonces

$$\begin{aligned}\psi(f(\varphi^{-1}(z))) &= \psi(f(\varphi_1^1(g^{-1}(z)))) \\ &= f_1(g^{-1}(z)) \\ &= f_1(w) \\ &= (wh_1(w))^k \\ &= z^k.\end{aligned}$$

luego con esto se concluye la prueba. □

Para cada vecindad U_0 de a existen vecindades $U \subseteq U_0$ de a y W de $b = f(a)$ tales que $f^{-1}(y) \cap U$ contiene exactamente k elementos, para todo $y \in W$, $y \neq b$, de ahí la unicidad de k. Luego se dice que f tiene **multiplicidad** k en el punto a que denotaremos con $mult_a(f) := k$.

Ejemplo 1.2

1. Sea $f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \cdots + c_k$ polinomio de grado $k \geq 1$.
   Luego $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, con $f(\infty) = \infty$ es holomorfa. Usando una carta cerca de ∞ se puede ver que $mult_\infty(f) = k$.

Corolario 1.4.1 .- Sean M, N superficies de Riemann y $f : M \to N$ holomorfa no constante entonces f es abierta i.e., U es abierto en M entonces $f(U)$ es abierto en N.

Prueba. Sea $a \in M$ entonces por el Teorema 1.4.1 y del hecho que z^k es abierta entonces f es abierta en alguna vecindad de a. □

Corolario 1.4.2 .- Sean M, N superficies de Riemann y $f : M \to N$ una aplicación holomorfa e inyectiva entonces $f(M)$ es una superficie de Riemann y $f : M \to f(M)$ es un bioholomorfismo.

Prueba. Por el Corolario 1.4.1 se tiene que f es abierta. Entonces $f(M)$ es abierta en N. Además $f(M)$ es conexo ya que f es continua y M es conexo. Luego $f : M \to f(M)$ es biyectiva.

Veamos que $f^{-1} : f(M) \to M$ es holomorfa. En efecto, sea $a \in M$ por el Teorema 1.4.1 tenemos que $k = 1$ ya que f es inyectiva, luego se concluye que f^{-1} es holomorfa en $f(a)$. $\square$

Corolario 1.4.3 *(Principio del Máximo).* Sea M superficie de Riemann y $f : M \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa no constante entonces $|f|$ no alcanza un máximo en M.

Prueba. Supongamos que existe un $a \in M$ tal que

$$R = |f(a)| = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in M\}$$

entonces $f(M) \subseteq K = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq R\}$. Por el Corolario 1.4.1 se tiene que f es abierta, entonces $f(M)$ es abierto en $\mathbb{C}$, pero $f(a) \in f(M)$ y $f(a) \in \partial K$ lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 1.4.2 .- Sean M, N superficies de Riemann, M compacto y $f : M \to N$ una aplicación holomorfa no constante entonces N es compacto y f es sobreyectiva.

Prueba. Por el Corolario 1.4.1 f es abierta entonces $f(M)$ es abierta en N. Como M es compacto y f es continua entonces $f(M)$ es compacto. Luego $f(M)$ es cerrado ya que N es Hausdorff. Como N es conexo se concluye que $f(M) = N$. $\square$

Corolario 1.4.4 .- Sea M una supeficie de Riemann compacta y $f \in \mathcal{O}(M)$, entonces f es constante.

Prueba. Supongamos lo contrario que f no es constante entonces por Teorema 1.4.2 $\mathbb{C}$ es compacto, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 1.4.5 .- Si $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ entonces f es racional ,i.e., $f = p/q$ donde p, q son polinomios.

Prueba. Como $f^{-1}(\infty)$ es discreto y $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto se tiene que $f^{-1}(\infty)$ es finito. Sea $f^{-1}(\infty) = \{a_j \,:\, j = 1, .., n\}$ y

$$h_j(z) = \sum_{i=-k_j}^{-1} c_{j\,i}(z - a_j)^i,$$

es la parte principal de f en el polo a_j, para $j = 1, ..., n$.

Podemos asumir que ∞ no es polo de f cambiando $1/f$ por f. Considere la función

$$g := f - \left(\sum_{j=1}^{n} h_j\right),$$

la cual es holomorfa en $\overline{\mathbb{C}}$, por el Corolario 1.4.4 se concluye que esta función es constante.

$\square$

Teorema 1.4.3 .- Sean M, N superficies de Riemann y $f : M \to N$ una aplicación holomorfa no constante. Entonces existe un entero positivo m tal que para cada $y \in N$, f toma exactamente m valores sobre M contando multiplicidad, i.e., $m = \sum_{x \in f^{-1}(y)} mult_x(f)$.

Prueba. Ver [2] página 12. $\square$

Una aplicación homomofa no constante entre superficies de Riemann compactas será llamado un **cubrimiento holomorfo con** m **hojas**, donde m es el entero positivo visto en el Teorema anterior.

1.4.1. Aplicaciones

Teorema 1.4.4 *(Teorema de Liouville).* Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una aplicación holomorfa acotada entonces f es constante.

Prueba. Como $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}} \backslash \{\infty\})$ y acotada, entonces por el Teorema de Singularidad Removible $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}})$ y como $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto, por el Corolario 1.4.4 se concluye que f es constante.

$\square$

Teorema 1.4.5 *(Teorema Fundamental del Algebra).* Dado un polinomio

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n, \text{ con } n \geq 1,$$

entonces existe un $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$.

Prueba. Se puede extender $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ con $f(\infty) = \infty$, de manera holomorfa entonces por el Teorema 1.4.2 f es sobreyectiva, luego existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$. $\square$

Capítulo 2

Formas Diferenciales e Integración

En este capítulo definiremos las formas diferenciales sobre una superficie de Riemann y las formas de tipo (1,0) y (0,1), que nos permitira definir los operadores ∂ y $\overline{\partial}$. Luego definiremos la integración de 1-formas diferencial y 2-formas diferencial y mencionaremos dos teoremas de suma importancia como son el teorema de Stokes y del Residuo que nos ayudarán en la prueba de otros teoremas que veremos en los siguientes capítulos.

2.1. Preliminares

Definición 2.1.1 .- Sea V un espacio vectorial real de dimensión 2.

1. Una k-**forma alternada** sobre V $(k \in \mathbb{N})$ es una aplicación k-lineal

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\text{veces}} \longrightarrow \mathbb{C},$$

antisimétrica, es decir,

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k), \quad \forall\, 1 \leq i < k.$$

2. El espacio de las k-formas alternadas sobre V es denotado por $\Lambda^k(V)$.

Observación 2.1

1. $\Lambda^0(V) = \mathbb{C}$ (convención)

2. Para $\{x, y\}$ base de V, consideramos $\{dx, dy\}$ base de $\Lambda^1(V)$. Si $\omega \in \Lambda^1(V)$ entonces

$$\omega = \omega(x)dx + \omega(y)dy, \tag{2.1}$$

definimos $dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy$, así reemplazando en (2.1) tenemos que

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega(x) - i\omega(y))dz + \frac{1}{2}(\omega(x) + i\omega(y))d\overline{z}.$$

Dados $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Lambda^1(V)$, definimos el **producto exterior** $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \in \Lambda^k(V)$ como

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k(v_1, \ldots, v_k) := det(\omega_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k}.$$

Observación 2.2

1. Por la anterior observación $\{dx, dy\}$ es una base de $\Lambda^1(V)$, entonces $\{dx \wedge dy\}$ es una base de $\Lambda^2(V)$.

2. $\Lambda^k(V) = 0 \ , \forall\, k \geq 3$.

Sean V, W espacios vectoriales reales de dimensión 2 y $T : V \to W$ una aplicación lineal. Esto induce una aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} T^* : \Lambda^k(W) & \longrightarrow & \Lambda^k(V) \\ \omega & \longmapsto & T^*\omega, \end{array}$$

definida por $T^*\omega(v_1, ..., v_k) = \omega(Tv_1, ..., Tv_k)$.

Propiedades 2.1 Sean V_1, V_2, V_3 espacios vectoriales reales de dimensión 2 y $T_1 : V_1 \to V_2$, $T_2 : V_2 \to V_3$ aplicaciones lineales. Entonces:

1. $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.

2. $Id^* = Id$.

3. $T^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = T^*\omega_1 \wedge T^*\omega_2 \ \ , \forall\, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(V_1)$.

Prueba. Inmediato de la definición. $\square$

Definición 2.1.2 .- Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión 1 y denotemos por $V_{\mathbb{R}}$ a su espacio vectorial real asociado, $dim\, V_{\mathbb{R}} = 2$.

En este caso:

$$\Lambda^1(V_{\mathbb{R}}) = \Lambda^{1,0}(V) \bigoplus \Lambda^{0,1}(V),$$

donde

$$\Lambda^{1,0}(V) = \{\omega : V \to \mathbb{C} \,|\, \omega \text{ es lineal } \wedge\ \omega(\lambda v) = \lambda\omega(v), \forall\, \lambda \in \mathbb{C},\, v \in V\},$$

$$\Lambda^{0,1}(V) = \{\omega : V \to \mathbb{C} \,|\, \omega \text{ es lineal } \wedge\ \omega(\lambda v) = \overline{\lambda}\omega(v), \forall\, \lambda \in \mathbb{C},\, v \in V\}.$$

Observación 2.3 .

1. Sea $\{z\}$ una base compleja de V, consideremos $\{x = z, y = iz\}$ una base real de $V_{\mathbb{R}}$, de ahí tenemos que $\{dx, dy\}$ es una base dual real de $V_{\mathbb{R}}$ y $\{dz\}$ una base dual complejo de V, observemos que en este caso la definición $dz = dx + idy$ acaba siendo una igualdad, en este caso resulta que $\{dz\}$ es una base de $\Lambda^{1,0}(V)$ y $\{d\overline{z}\}$ es una base de $\Lambda^{0,1}(V)$.

2.2. Formas diferenciales en superficies de Riemann.

Definición 2.2.1 .- Sea M una superficie de Riemann y TM su fibrado tangente real.

1. Una k**-forma diferencial** sobre M es una correspondecia ω del tipo

$$x \longrightarrow \omega_x \in \Lambda^k(T_xM).$$

2. Una $(1,0)$**-forma diferencial** sobre M es una correspondecia ω del tipo

$$x \longrightarrow \omega_x \in \Lambda^{1,0}(T_xM).$$

3. Una $(0,1)$**-forma diferencial** sobre M es una correspondecia ω del tipo

$$x \longrightarrow \omega_x \in \Lambda^{0,1}(T_xM).$$

Observación 2.4 .

1. Sean ω una 1-forma sobre M y (U, z) una carta con $z = x + iy$, entonces ω sobre U es de la forma

$$(z^{-1})^*\omega = fdx + gdy = \varphi dz + \psi d\overline{z}.$$

Si (V,u) es otra carta, entonces el cambio de cartas $h : u(U \cap V) \to z(U \cap V)$ donde $h = z \circ u^{-1}$ es holomorfa, de ahí tenemos que

$$(u^{-1})^*\omega = (\varphi \circ h)h'du + (\phi \circ h)\overline{h'}d\overline{u}.$$

Luego, observamos que si φ es diferenciable sobre (U,z) entonces también lo es en la carta (V,u).

2. Sean ω una 2-forma sobre M y (U,z) una carta con $z = x + iy$, entonces ω sobre U es de la forma
$$(z^{-1})^*\omega = f dx \wedge dy = \frac{i}{2} f dz \wedge d\overline{z}.$$
Si (V,u) es otra carta, entonces el cambio de cartas $h : u(U \cap V) \to z(U \cap V)$, donde $h = z \circ u^{-1}$ es holomorfa, de ahí tenemos que
$$(u^{-1})^*\omega = \frac{i}{2}\,(f \circ h)|h'|^2 du \wedge d\overline{u}.$$
Luego, observamos que si f es diferenciable sobre (U,z) entonces también lo es en la carta (V,u).

Como observamos independencia en las carta en los dos casos anteriores, para simplificar notación denotaremos $(z^{-1})^*\omega$ por ω sobre U, i.e. $\omega = (z^{-1})^*\omega$ sobre U. Así tenemos las siguientes definiciones.

Definición 2.2.2 .- Sea M una superficie de Riemann.

1. Decimos que ω una 1-forma diferencial es **diferenciable** si para cada carta (U,z) es de la forma
$$\omega = f dz + g d\overline{z}, \qquad \text{con } f, g \in C^\infty(U).$$

2. Decimos que ω una 2-forma diferencial es **diferenciable** si para cada carta (U,z) es de la forma
$$\omega = f\, dz \wedge d\overline{z}, \qquad \text{con } f \in C^\infty(U).$$

3. El espacio de las k-formas diferenciables será denotado por $\Omega^k(M)$.

4. El espacio de las $(1,0)$-formas diferenciables será denotado por $\Omega^{1,0}(M)$.

5. El espacio de $(0,1)$-formas diferenciables será denotado por $\Omega^{0,1}(M)$.

Observación 2.5 .

1. $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ y $\Omega^k(M) = 0$, $\forall\, k \geq 3$.

2. Sean ω una 1-forma diferenciable sobre M y (U,z) una carta, entonces ω sobre U es de la forma
$$\omega = \varphi dz + \psi d\overline{z} \quad \text{sobre } U.$$
donde $\varphi, \psi \in C^\infty(U)$.
Si (V,u) es otra carta, entonces el cambio de cartas $h : u(U\cap V) \to z(U \cap V)$ donde $h = z \circ u^{-1}$ es holomorfa, de ahí tenemos
$$\omega = (\varphi \circ h)h' du + (\phi \circ h)\overline{h'} d\overline{u} \quad \text{sobre } V \cap U.$$
Luego, observamos que si $\phi = 0$ la forma no cambia y si φ es holomorfa en la carta (U,z) entonces también lo es en la intersección con la carta (V,u) ya que $(\varphi \circ h)h'$ es holomorfa, es independiente de la carta. Así tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.3 .- Una ω 1-forma diferencial sobre M se dice **1-forma holomorfa** si es una $(1,0)$-forma diferencial y si para cada carta (U,z) se tiene que $\omega = f dz$ con $f \in \mathcal{O}(U)$.

El espacio de las 1-formas holomorfas sobre M será denotado por $\mathcal{O}^{1,0}(M)$.

Observación 2.6 .

1. Sean ω una 1-forma holomorfa sobre $M\backslash\{x_0\}$ y (U,z) una carta de x_0 tal que $z(x_0) = 0$, entonces ω sobre $U\backslash\{x_0\}$ es de la forma
$$\omega = f dz,$$
donde $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{x_0\})$.
Si (V,u) es otra carta, entonces el cambio de cartas $h : u(U\cap V) \to z(U \cap V)$ donde $h = z \circ u^{-1}$ es holomorfa, de ahí tenemos
$$\omega = (f \circ h)h' du.$$
Luego, observamos que si f tiene un polo en x_0 en la carta (U,z) entonces $(f \circ h)h'$ también tiene un polo en x_0 en la carta (V,u), es decir el polo es independiente de la carta. Así tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.4 .- Una ω 1-forma diferencial sobre $M\backslash M'$ se dice **1-forma meromorfa** sobre M si:

1. M' es un conjunto discreto de M.

2. ω es una 1-forma holomorfa sobre $M\backslash M'$.

3. ω tiene un polo en cada $x \in M'$.

2.2.1. El pull-back y producto exterior

Definición 2.2.5 .- Sean M, N superficies de Riemann y $F : M \to N$ una aplicación holomorfa.

1. El **pull-back** de una ω k-forma diferencial sobre N denotado por $F^*\omega$ es una k-forma diferencial sobre M, definida por

$$(F^*\omega)_x = (F'(x))^*\omega_{f(x)},$$

donde $F'(x)$ es la derivada de f en el punto x.

2.2.2. La derivada exterior

A partir de la derivada

$$\begin{array}{rcl} d : \Omega^0(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ f & \longmapsto & df, \end{array}$$

definida localmente en una carta (U, z)

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z},$$

y del hecho que $\Omega^1(M) = \Omega^{1,0}(M) \bigoplus \Omega^{0,1}(M)$ nos permite definir los operadores

$$\begin{array}{rcl} \partial : \Omega^0(M) & \longrightarrow & \Omega^{1,0}(M) \\ f & \longmapsto & \partial f, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\partial} : \Omega^0(M) & \longrightarrow & \Omega^{0,1}(M) \\ f & \longmapsto & \overline{\partial} f. \end{array}$$

Así podemos extender la derivada

$$\begin{array}{rcl} d : \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^2(M) \\ \omega & \longmapsto & d\omega, \end{array}$$

en una carta (U, z) se puede expresar

$$\omega = f dz + g d\overline{z},$$

entonces

$$d\omega = (\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}) dz \wedge d\overline{z}.$$

Propiedades 2.2 *: Sean M, N superficies de Riemann, $F : M \to N$ una aplicación holomorfa, $f \in C^{\infty}(M)$ y $\omega \in \Omega^1(M)$. Entonces*

1. $dd = \partial\partial = \overline{\partial\partial} = 0.$
2. $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0.$
3. $d = \partial + \overline{\partial}.$
4. $dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\overline{z}.$
5. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$
6. $F^*(df) = d(F^*f), \quad F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$
7. $F^*(\partial f) = \partial(F^*f), \quad F^*(\partial\omega) = \partial(F^*\omega).$
8. $F^*(\overline{\partial} f) = \overline{\partial}(F^*f), \quad F^*(\overline{\partial}\omega) = \overline{\partial}(F^*\omega).$

2.2.3. Formas cerradas y formas exactas

Definición 2.2.6 .- Sea M una superficie de Riemann.

1. Se dice que ω una k-forma diferencial sobre M es **cerrada** si $d\omega = 0$.
2. Se dice que ω una k-forma diferencial sobre M es **exacta** si existe η una $(k-1)$-forma diferencial tal que $\omega = d\eta$.

Observación 2.7 .

1. Si ω es una 1-forma holomorfa sobre M entonces ω es cerrada.
2. Si ω es una (1,0)-forma diferencial cerrada entonces ω es 1-forma holomorfa.

2.3. Integración de formas diferenciales.

2.3.1. Integración de 1-forma diferencial

Sean M una superfice de Riemann y ω una 1-forma diferencial sobre M. Dado una curva $\alpha : [0,1] \to M$, C^1 por partes, consideremos una partición sobre el intervalo $[0,1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1,$$

y cartas (U_k, z_k), $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, ..., n$, tal que $\alpha([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ y las funciones

$$z_k \circ \alpha : [t_{k-1}, t_k] \longrightarrow \mathbb{C},$$

son de clase C^1.

Definimos la **integral de ω a lo largo de la curva** α de la siguiente manera. Sobre U_k, se puede escribir ω como $\omega = f_k dz_k + g_k d\overline{z}_k$, donde f_k, g_k son diferenciables sobre U_k.

$$\int_\alpha \omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(\alpha(t)) \frac{dz_k(t)}{dt} + g_k(\alpha(t)) \frac{d\overline{z}_k(t)}{dt} \right) dt,$$

donde $\dfrac{d\overline{z}_k(t)}{dt} = \dfrac{dx_k(t)}{dt} - i\dfrac{dy_k(t)}{dt}$.

Observación 2.8 .

Esta definición es independiente de la partición y las cartas, primero es fácil de ver que si refinamos la partición la integral sigue siendo la misma, y para ver que es independiente de las cartas solo tenemos que usar el Teorema de cambio de variables para integrales reales, para ello veamos el caso de que $\alpha : [0,1] \to M$ es C^∞ tal que $\alpha([0,1]) \subset U, U'$ donde (U, z), (V, u) son cartas $\omega = f dz + g d\overline{z}$ en U

$\omega = \varphi du + \phi d\overline{u}$ en V, donde $\varphi = (f \circ h)h'$ y $\phi = (g \circ h)h'$.

$$\int_0^1 (f z' + g\overline{z'})dt = \int_0^1 (f h' u' + g\overline{h'}\,\overline{u'})dt = \int_0^1 (\varphi u' + \phi\overline{u'})dt.$$

Luego es inmediato ver que la integral es independiente de la partición y de la cobertura.

Propiedades 2.3 Sean M, N superficies de Riemann y $\alpha : [0,1] \to M$, C^1 por partes.

1. $\int_\alpha (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 \int_\alpha \omega_1 + c_2 \int_\alpha \omega_2 \quad \forall\, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(M), \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

2. (Teorema fundamental del calculo). Si $f \in C^{\infty}(M)$ entonces

$$\int_{\alpha} df = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)).$$

3. Si $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t)$ entonces

$$\int_{\alpha^{-1}} \omega = -\int_{\alpha} \omega \quad , \forall\, \omega \in \Omega^1(M).$$

4. Si $F : M \to N$ es una aplicación holomorfa y $\eta \in \Omega^1(N)$ entonces

$$\int_{F\circ\alpha} \eta = \int_{\alpha} F^* \eta.$$

Prueba. 1. y 3. Se verifican de la definición.

2. Consideremos una partición sobre el intervalo $[0,1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1,$$

y cartas (U_k, z_k) tal que $\alpha([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$,$k = 1, ..., n$. Sobre U_k se tiene

$$df = \frac{\partial f}{dz_k} dz_k + \frac{\partial f}{d\overline{z}_k} d\overline{z}_k.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} \omega &= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k}(\alpha(t)) \frac{dz_k(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}(\alpha(t)) \frac{d\overline{z}_k(t)}{dt}\right) dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{d}{dt} f(\alpha(t))\right) dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} (f(\alpha(t_k)) - f(\alpha(t_{k-1}))) dt \\
&= f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)).
\end{aligned}$$

4. Consideremos una partición sobre el intervalo $[0,1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1,$$

y cartas (U_k, z_k) sobre N tal que $F \circ \alpha([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$, $k = 1, ..., n$. Sobre U_k se tiene

$$\eta = f_k\, dz_k + g_k\, d\overline{z}_k.$$

Entonces

$$\int_{F\circ\alpha} \eta = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(F \circ \alpha(t)) \frac{dz_k(t)}{dt} + g_k(F \circ \alpha(t)) \frac{d\overline{z}_k(t)}{dt} \right) dt. \tag{2.2}$$

Además

$$\begin{aligned} F^*\eta &= F^*(f_k\, dz_k + g_k\, d\overline{z}_k) \\ &= (f_k \circ F)dF^*z + (g_k \circ F)dF^*\overline{z}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_\alpha F^*\eta = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k \circ F(\alpha(t)) \frac{dz_k(t)}{dt} + g_k \circ F(\alpha(t)) \frac{d\overline{z}_k(t)}{dt} \right) dt. \tag{2.3}$$

De (2.2) y (2.3) se tiene la igualdad. □

2.3.2. Integración de 2-forma diferenciables

Sea ω una 2-forma diferenciable. Definimos el soporte de ω como

$$sop(\omega) = \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}}.$$

1. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\omega \in \Omega^2(U)$ con $sop(\omega)$ compacto entonces ω se puede expresar como

$$\omega = f dx \wedge dy = \frac{i}{2} f dz \wedge d\overline{z}, \quad \text{donde } f \in C^\infty(U).$$

Definimos la integral de ω sobre U

$$\iint_U \omega := \iint_U f dx\, dy,$$

Si U' es otro abierto en $\mathbb{C}$ y $\varphi : U' \to U$ es un biholomorfismo

$$\iint_U \omega \quad = \quad \iint_{U'} (f \circ \varphi)|\varphi'|^2 dx\, dy.$$

es decir, $\displaystyle\iint_U \omega = \iint_{U'} \varphi^*\omega.$

Sean M una superficie de Riemann y ω una 2-forma diferencial con $sop(\omega)$ es compacto.
Primer caso: $sop(\omega) \subset U$ y (U, z) es una carta.
Definimos la integral de ω sobre M

$$\int_M \omega := \int_U \omega := \iint_{z(U)} (z^{-1})^*\omega.$$

Esta definición es independiente del cambio de carta. En efecto sea (U', z') otra carta tal que $sop(\omega) \subset U'$, tenemos que

$$(z^{-1})^*\omega = (z'^{-1} \circ (z' \circ z^{-1}))^*\omega = (z' \circ z^{-1})^*((z'^{-1})^*\omega),$$

por lo anterior

$$\iint_U (z^{-1})^*\omega = \iint_{U'} (z'^{-1})^*\omega.$$

Así, $\iint_M \omega$ es independiente del cambio de carta.

Caso general: Como $sop(\omega)$ es compacto, entonces existe una cobertura $\{(\varphi_k, U_k)\}_{k=1}^n$ tal que $sop(\omega) \subset \cup_{k=1}^n U_k$. Además, consideremos $\{r_k\}$ una partición de la unidad subordinada sobre $\{U_k\}$ i.e.,

a) $sop(r_k) \subset U_k$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^n r_k(x) = 1$.

Entonces $r_k\omega$ es una 2-forma diferencial con $sop(r_k\omega) \subset U_k$ y $\omega = \sum_{k=1}^n r_k\omega$.

Definimos la integral de ω sobre M como

$$\iint_M \omega := \sum_{k=1}^n \iint_M r_k\omega.$$

Observemos que esta definición es independiente de la partición y de la cobertura. En efecto, sea $\{(\varphi_j, V_j)\}_{j=1}^m$ otra cobertura tal que $sop(\omega) \subset \cup_{j=1}^m V_j$ y $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ partición dela unidad subordinada a esta cobertura.

Tomemos la cobertura $\{U_k \cap V_j\}$ y $\{r_k\lambda_j\}$ una partición de la unidad subordinada a esta cobetura. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_k \int_M r_k\omega &= \sum_k \int_M r_k(\sum_j \lambda_j)\omega \\
&= \sum_{k,j} \int_M r_k\lambda_j\omega \\
&= \sum_j \int_M \lambda_j(\sum_k r_k)\omega \\
&= \sum_j \int_M \lambda_j\omega.
\end{aligned}$$

2.3.3. El Teorema de Stokes

Por necesidad, solo veremos el teorema de Stokes en el caso de un disco o un anillo.

Teorema 2.3.1 *(Teorema de Stokes).* Sean D un disco ó un anillo en el plano

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \leq z \leq R\}, \quad 0 < \epsilon < R.$$

con borde ∂D que consiste del circulo orientado positivamente $|z| = R$ y del circulo orientado negativamente $|z| = \epsilon$, y $\omega = f\,dx + g\,dy$ Entonces

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

esto es,

$$\iint_{\epsilon \le z \le R} (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dx\,dy = \int_{|z|=R} (f dx + g dy) - \int_{|z|=\epsilon} (f dx + g dy).$$

2.4. Formas diferenciales meromorfas. Residuos de 1-formas meromorfas.

Sea ω una 1-forma meromorfa sobre M una superficie de Riemann y $x \in M$. Sea (U, z) una carta de x con $z(x) = 0$. Entonce sobre $U \setminus \{x\}$ se tiene que ω es de la forma

$$\omega = f(z)dz = \left(\sum_{k=-n}^{\infty} c_k z^k \right) dz.$$

Este número c_{-1} no depende de la carta elegida, para ello veamos el siguiente lema.

Lema 2.4.1 .- Si α es una curva de clase C^1 sobre U. Entonces

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \omega.$$

Prueba. Es inmediato la prueba. □

Definición 2.4.1 .- El residuo de ω en x denotado por $Res_x(\omega)$ es el coeficiente c_{-1}.

2.4.1. El Teorema del Residuo.

Teorema 2.4.1 *(Teorema del Residuo).* Sea ω una 1-forma meromorfa sobre M una superficie de Riemann compacta. Entonces

$$\sum_{x \in M} Res_x(\omega) = 0.$$

Prueba. Sean $x_1, ..., x_k$ los polos de ω. Considere (U_j, z_j) cartas alrededor de x_j tales que $z_j(x_j) = 0$, $j = 1, .., k$ y sean $D_j = \{x \in U_j \,|\, |z_j(x)| < \epsilon\}$ con ϵ suficientemente pequeño.

Definimos $U = M - \cup_{j=1}^k D_j$ entonces por Teorema de Stokes, tenemos

$$\int_U d\omega = - \sum_{j=1}^k \int_{\partial D_i} \omega = -2\pi i \sum_{j=1}^k Res_{x_j}(\omega).$$

Pero como ω es una forma holomorfa sobre U entonces es una forma cerrada. □

Capítulo 3

Teoría de Haces

Originalmente la idea de haces fue introducida por Leray en Comptes Rendus (1946) p. 1366 y la definión modificada de haces usada ahora es dado por Lazard, apareció por primera vez en el Cartan Sem. 1950-51, Expoxé 14. A partir de esta definición y la definición de prehaces daremos una relación entre haces y prehaces. También daremos ejemplos de haces y definiremos homomorfismos de haces y secuencias exactas de haces. Este capítulo es un previo para poder definir la cohomología de haces que se verá en el siguiente capítulo.

3.1. Haces y prehaces, definiciones básicas y ejemplos.

Definición 3.1.1 .- Sea M un espacio topológico. Un **haz** (de grupos abelianos) sobre M es un espacio topológico $\mathcal{S}$, junto con una aplicación $\pi : \mathcal{S} \to M$ tal que:

1. π es un homeomorfismo local.
2. Para cada $x \in M$ el conjunto $\mathcal{S}_x := \pi^{-1}(x) \subseteq \mathcal{S}$ tiene una estructura de grupo abeliano.
3. Las operaciones del grupo son continuas en la topología de $\mathcal{S}$, i.e., si definimos el conjunto $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \{(s_1, s_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} / \pi(s_1) = \pi(s_2)\}$ entonces las siguientes aplicaciones,

$$\begin{array}{rcl} + : \mathcal{S} \circ \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ (s_1, s_2) & \longmapsto & +(s_1, s_2) = s_1 + s_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} op : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ s & \longmapsto & op(s) = -s \end{array}$$

son continuas.

Observación 3.1

1. Un haz lo denotamos con la terna $(\mathcal{S}, M, \pi)$, en el caso de que este claro esta definión simplemente diremos haz S.

2. En el haz $(\mathcal{S}, M, \pi)$, la aplicación $\pi : \mathcal{S} \to M$ es llamada **proyección**, la cual es sobreyectiva por su segunda condición.

3. El conjunto $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ es llamado el **tallo** sobre x, luego cada tallo es un grupo abeliano.

Ejemplo 3.1

1. Si M es un espacio topólogico y G es un grupo abeliano con la topología discreta, definimos $(M \times G, \pi, M)$, donde

$$\pi(x, g) = x, \quad +((x, g_1), (x, g_2)) = (x, g_1 + g_2).$$

   Cada tallo $\mathcal{S}_x$ es isomorfo a G. Entonces $(\mathcal{S}, M, \pi)$ es un haz sobre M, llamado **haz constante** asociado con G.

Definición 3.1.2 .- Sea $(\mathcal{S}, M, \pi)$ un haz sobre M y $U \subseteq M$ un subconjunto abierto de M.

1. Una **sección** del haz S sobre U es una aplicación continua $f : U \to \mathcal{S}$ tal que $\pi \circ f : U \to U$ es la aplicación identidad, i.e., el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "id_U"'] & M \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. El conjunto de todas las secciones de $\mathcal{S}$ sobre U será denotado por $\Gamma(U, \mathcal{S})$.

Observación 3.2

1. Notar que si f es una sección de $\mathcal{S}$ sobre U entonces $f(x) \in \mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$, para todo $x \in U$.

2. Para cualquier $s \in \mathcal{S}$ existe una vecindad abierta V de s en $\mathcal{S}$ tal que $\pi|_V : V \to U$ es un homeomorfismo entre V y un subconjunto abierto U en M. Entonces $(\pi|_V)^{-1} : U \to V$ es también un homeomorfismo luego $(\pi|_V)^{-1}$ es una sección de $\mathcal{S}$ sobre U, i.e., para cada $s \in \mathcal{S}$ esta contenida en la imagen de alguna sección y la imagen de todas esas secciones forma una base para la vecindad abierta de s.

3. Si $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ y $f(x_0) = g(x_0)$ para algún $x_0 \in U$ entonces existe una vecindad abierta $W \subseteq U$ de x_0 tal que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in W$.

Proposición 3.1.1 .- *Sea* $(\mathcal{S}, M, \pi)$ *es un haz sobre* M *y* $U \subseteq M$ *un abierto sobre* M*. Entonces* $\Gamma(U, \mathcal{S})$ *es un grupo (abeliano).*

Prueba. Si $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f \times g : U & \longrightarrow & \mathcal{S} \times \mathcal{S} \\ x & \longmapsto & (f \times g)(x) = (f(x), g(x)), \end{array}$$

es continua en U y la composición de $f \times g$ con $+ : \mathcal{S} \circ \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es continua definida por

$$\begin{array}{rcl} f + g : U & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ x & \longmapsto & (f + g)(x) = f(x) + g(x), \end{array}$$

entonces $f + g \in \Gamma(U, \mathcal{S})$. □

Definimos la **sección cero** como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} O : U & \to & \mathcal{S} \\ x & \to & O(x) = 0_x, \end{array}$$

donde 0_x es el elemento neutro del grupo $\mathcal{S}_x$. Veamos que O es una sección de $\mathcal{S}$ sobre U. En efecto, como $0_x \in \mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ entonces $\pi(0_x) = x$,$\forall\, x \in U$, i.e., $\pi \circ O = id_U$. Veamos que $O : U \to \mathcal{S}$ es continua. Sea $x \in U$, como $0_x \in \mathcal{S}$ entonces existe una vecindad abierta V de 0_x sobre $\mathcal{S}$ y una vecindad abierta $U' \subseteq U$ de x tal que $\pi_{|_V} : V \to U$ es una homeormosfismo.

Luego componemos las siguientes aplicaciones continuas

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathcal{S} \circ \mathcal{S} \\ y & \to & ((\pi_{|_V})^{-1}(y), (\pi_{|_V})^{-1}(y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} \circ \mathcal{S} & \to & \mathcal{S} \circ \mathcal{S} \\ ((\pi_{|_V})^{-1}(y), (\pi_{|_V})^{-1}(y)) & \to & ((\pi_{|_V})^{-1}(y), op((\pi_{|_V})^{-1}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} \circ \mathcal{S} & \to & \mathcal{S} \\ ((\pi_{|_V})^{-1}(y), op((\pi_{|_V})^{-1}(y))) & \to & +((\pi_{|_V})^{-1}(y), op((\pi_{|_V})^{-1}(y))) = 0_y \end{array}$$

se tiene que $O : U \to \mathcal{S}$ es continua en $x \in U$ entonces es continua en U.

Observación 3.3 .

1. Las secciones de $\mathcal{S}$ sobre U son homeomorfismos sobre su imagen entonces son aplicaciones abiertas. En particular $O(U)$ es un abierto sobre $\mathcal{S}$ donde O es la sección cero.

Definición 3.1.3 .- Un **prehaz** (de grupos abelianos) sobre un espacio topológico M consiste de:

1. Una base $\{U_\alpha\}$ de abiertos para la topología de M.
2. Un grupo abeliano $\mathcal{S}_\alpha$ asociado a cada conjunto abierto U_α de la base.
3. Un homomorfismo $\rho_\alpha^\beta : \mathcal{S}_\beta \to \mathcal{S}_\alpha$ asociado a cada relación de inclusión $U_\alpha \subseteq U_\beta$, tal que $\rho_\beta^\gamma \circ \rho_\alpha^\beta = \rho_\alpha^\gamma$, cuando $U_\gamma \subseteq U_\beta \subseteq U_\alpha$.

Notación:

1. Considerando el homomorfismo $\rho_\alpha^\beta : \mathcal{S}_\beta \to \mathcal{S}_\alpha$ con $U_\alpha \subseteq U_\beta$. Si $s_\beta \in \mathcal{S}_\beta$ entonces vamos a denotar $\rho_\alpha^\beta(s_\beta) := s_{\beta_{|_{U_\alpha}}} \in \mathcal{S}_\alpha$. Así las siguientes propiedades se traducen como:

$$(s_\beta^1 + s_\beta^2)_{|_{U_\alpha}} = s^1{}_{|_{U_\alpha}} + s^2{}_{|_{U_\alpha}} \ \text{ y } \ (s_{\gamma_{|_{U_\beta}}})_{|_{U_\alpha}} = s_{\gamma_{|_{U_\alpha}}}, \text{ cuando } U_\alpha \subseteq U_\beta \subseteq U_\gamma.$$

2. Denotaremos un prehaz sobre M con la terna $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho_\alpha^\beta\}$.

Observación 3.4

1. Si $(\mathcal{S}, M, \pi)$ es un haz sobre M y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una base de abiertos para la topología de M. Luego existe un prehaz natural asociado al haz $\mathcal{S}$, que llamaremos el **prehaz de secciones del haz** $\mathcal{S}$; este es el prehaz que asigna al conjunto U_α el grupo abeliano $\mathcal{S}_\alpha = \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$, y asigna la inclusión $U_\alpha \subseteq U_\beta$ la aplicación restricción

$$\begin{aligned} \rho_\alpha^\beta : \Gamma(U_\beta, \mathcal{S}) &\longrightarrow \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S}) \\ f &\longmapsto \rho_\alpha^\beta(f) = f_{|U_\alpha}, \end{aligned}$$

de secciones sobre U_β para el conjunto U_α.

2. Si $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho_\alpha^\beta\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un prehaz sobre M entonces podemos asociar un haz a este prehaz de la siguiente manera. Para $x \in M$, tomamos la unión disjunta

$$\bigsqcup_{x\in U_\alpha} \mathcal{S}_\alpha,$$

sobre este conjunto definimos la siguiente relación de equivalencia, para $s_\alpha \in U_\alpha$, $s_\beta \in U_\beta$, decimos que $s_\alpha \sim s_\beta$ si existe U_γ con $x \in U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ tal que ${s_\alpha}_{|U_\gamma} = {s_\beta}_{|U_\gamma}$. El conjunto de todas las clases de equivalencia será denota por $\mathcal{S}_x$, el cual tiene estructura de grupo abeliano inducido por la aplicación natural

$$\begin{aligned} \rho_{x\alpha} : \mathcal{S}_\alpha &\longrightarrow \mathcal{S}_x \\ s_\alpha &\longmapsto [s_\alpha]_x \,. \end{aligned}$$

Así el haz asociado a este prehaz es definido como el conjunto

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{x\in M} \mathcal{S}_x,$$

con la proyección natural $\pi : \mathcal{S} \to M$.

La pregunta que nos hacemos ahora es si los procesos anteriores son inversos. En el caso de un haz $\mathcal{S}$ y su haz asociado al prehaz de secciones del haz $\mathcal{S}$ la respuesta es afirmativa la cual la veremos mas adelante ya que necesitamos definir isomorfismos entre haces. En el otro caso la respuesta es negativa ya que en general no es cierto que el prehaz de secciones del haz asociado a un prehaz dado es isomorfo a este. Para ello veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2

1. El prehaz $(\mathcal{S}_\alpha, U_\alpha, \rho^\alpha_\beta)$, donde $\mathcal{S}_\alpha \cong \mathbb{Z}$, $\forall \alpha$ y

$$\begin{array}{rcl} \rho^\alpha_\beta : \mathcal{S}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{S}_\beta \\ s_\alpha & \longmapsto & \rho^\alpha_\beta(s_\alpha) = 0, \end{array}$$

   es el homomorfismo cero.

Entonces el haz $\mathcal{S}$ asociado a dicho prehaz es el haz cero, i.e.,

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{x \in M} \mathcal{S}_x = \bigsqcup_{x \in M} \{0_x\}.$$

Además si $f \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$ entonces f es la sección cero del haz $\mathcal{S}$ sobre U_α, i.e., $f(x) = 0_x$ $\forall\, x \in U_\alpha$. Luego se tiene que $\mathcal{S}_\alpha \cong \mathbb{Z} \ncong \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$.

Esto nos induce la siguiente definición.

3.2. Los haces como prehaces completos.

Definición 3.2.1 .- Un prehaz $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho^\alpha_\beta\}_{\alpha \in \Lambda}$ sobre un espacio topológico M es llamado **prehaz completo** si, cuando $U_0 = \bigcup_\beta U_\beta$ es una subcolección de la base $\{U_\alpha\}$ de la topología de M, satisface las siguientes condiciones (llamados **axiomas de haz**):

1. Si $s_0, s_1 \in \mathcal{S}_0$ tal que $s_{0|_{U_\beta}} = s_{1|_{U_\beta}}$, para todo U_β entonces $s_0 = s_1$.
2. Dados los elementos $s_\beta \in \mathcal{S}_\beta$ tal que $s_{\beta_1|_{U_\gamma}} = s_{\beta_2|_{U_\gamma}}$, donde $U_\gamma \subseteq U_{\beta_1} \bigcap U_{\beta_2}$, para cualquier U_γ de la base, entonces existe un $s_0 \in \mathcal{S}_0$ tal que $s_\beta = s_{0|_{U_\beta}}$, para todo U_β.

Proposición 3.2.1 .- Un prehaz $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho^\alpha_\beta\}_{\alpha \in \Lambda}$ sobre un espacio topológico M es el prehaz de secciones para algún haz sobre M si y sólo si este prehaz es completo.

Prueba. Es claro que si $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho^\alpha_\beta\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un prehaz de secciones de algún haz entonces el prehaz es completo.

Supongamos que el prehaz $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho^\alpha_\beta\}_{\alpha \in \Lambda}$ es completo y sea $\mathcal{S}$ el haz asociado a dicho prehaz, a partir de la construción del haz se tiene una aplicación natural

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{S}_\alpha & \longrightarrow & \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S}) \\ s & \longmapsto & \varphi(s) : U_\alpha \longrightarrow \mathcal{S} \\ & & \qquad\quad x \longmapsto \rho_{x\alpha}(s), \end{array}$$

es claro que φ es un homomorfismo, veremos que es un isomorfismo para cada $\alpha \in \Lambda$.

- φ es inyectiva. En efecto, sea $s \in \mathcal{S}_\alpha$ tal que $\varphi(s) = 0$, i.e., $\rho_{x\alpha}(s) = 0$, $\forall\, x \in U_\alpha$, luego existe una cobertura $\{U_\beta\}_\beta$ sobre U_α tal que $s_{|_{U_\beta}} = 0$, $\forall\, \gamma$, entonces por la primera condición de prehaz completo $s = 0$.

- φ es sobreyectiva. En efecto, sea $f \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$, luego como $f(x) \in \mathcal{S}_x$ existen U_β con $x \in U_\beta \subseteq U_\alpha$, y $s_\beta \in U_\beta$ tal que $f(x) = \rho_{x\beta}(s_\beta)$. Como estas secciones son iguales en un punto entonces son iguales en una vecindad, sin perdida de generalidad podemos asumir que son iguales en U_β. Luego por la segunda condición de prehaz completo se tiene que existe $s_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$ tal que $s_{\alpha|_{U_\beta}} = s_\beta$, $\forall\, \beta$. Finalmente se concluye que $f = \varphi(s_\alpha)$.

$\square$

Ejemplo 3.3 *Prehaces y haces:*

1. Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Definimos el prehaz G^X de la siguiente manera: Sea $\{U_\alpha\}$ una base para la topología de X y un prehaz $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho^\alpha_\beta\}$ sobre un espacio topológico M, donde $\mathcal{S}_\alpha = G^X(U_\alpha) = \{f : U_\alpha \to G\}$, dado $f_\alpha, g_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$,
$$(f_\alpha + g_\alpha)(x) = f_\alpha(x) + g_\alpha(x),\ \forall\, x \in U_\alpha,$$
así $\mathcal{S}_\alpha$ hereda la estrucura de G y ρ^α_β es la aplicación restricción. Cuando este claro el espacio X se denotará $G^X(U_\alpha) = G(U_\alpha)$.

2. Sea M una superficie de Riemann y $\{U_\alpha\}$ una base para la topología de M. Definimos $\mathcal{O}(U_\alpha) = \{f : U_\alpha \to \mathbb{C}\,;\ \text{holomorfa en } U_\alpha\}$ y
$$\begin{array}{rcl} \rho^\alpha_\beta : \mathcal{O}_{U_\alpha} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U_\beta} \\ f & \longmapsto & f_{|_{U_\alpha}}, \end{array}$$
la aplicación restricción, es claro que $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho^\alpha_\beta\}$ es un prehaz completo sobre M; el haz asociado es llamado el **haz de germenes de las funciones holomorfas** sobre M, y será denotado por $\mathcal{O}$.
También uno puede darle estructura de anillo a $\mathcal{O}_{U_\alpha}$, luego $\mathcal{O}$ es un haz de anillos sobre el espacio M.

3. Al igual que el anterior ejemplo con la multiplicación de grupo sobre $\mathcal{O}^*_U = \{f : U \to \mathbb{C}^*\,;\ \text{holomorfa en } U\}$. Así tenemos el haz $\mathcal{O}^*$ de germenes de las funciones holomorfas no nulas.

4. Sea $U \subseteq M$ un abierto. Definimos $\mathcal{M}(U) = \{f \,:\, f$ es meromorfa en $U\}$. Así tenemos el **haz $\mathcal{M}$ de germenes de las funciones meromorfas** sobre M. También se puede obtener dándole estructura de anillo el haz cuerpo.

5. Sea $U \subseteq M$ un abierto. Definimos

$$\mathcal{M}^*(U) = \{f \,:\, f \text{ es meromorfa en } U \text{ y } f \neq 0 \text{ en cada componete conexa de } U\ \}.$$

   Así tenemos el haz $\mathcal{M}^*$ de germenes de las funciones meromorfas no identicamente cero sobre M.

6. Si consideramos la estructura diferenciable de M y $U \subseteq M$ un abierto. Dados los conjuntos $\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciable sobre $U\}$, y $\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{C}$ continua sobre $U\}$. Definen el haz $\mathcal{C}^\infty$ de germenes de funciones C^∞ sobre M y el haz $\mathcal{C}$ de germenes de funciones continuas sobre M respectivamente.

Observación 3.5

1. Notemos que existe una relación de inclusión natural estricta:

$$\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{C}^\infty \subsetneq \mathcal{C}$$

Teorema 3.2.1 .- Sea M un espacio topológico de Hausdorff localmente conexo y $(\mathcal{S}, M, \pi)$ un haz sobre M. Entonces $\mathcal{S}$ es de Hausdorff si y solo si $\forall U \subseteq M$ dominio, si $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ y $f(x_0) = g(x_0)$ para algún $x_0 \in U$ entonces $f = g$ en U.

Prueba. Ver [3] página 43. $\square$

Corolario 3.2.1 .- Sea M una superficie de Riemann. Entonces el haz $\mathcal{O}$ de germenes de funciones holomorfas sobre M y el haz $\mathcal{M}$ de germenes de funciones meromorfas sobre M es un espacio topológico de Hausdorff.

3.3. Subhaces y haces cocientes.

Definición 3.3.1 .- Sea $\mathcal{S}$ un haz sobre M un espacio topológico y $E \subseteq M$ un subconjunto arbitrario de M. La **restricción** del haz $\mathcal{S}$ a E es el subconjunto $\pi^{-1}(E) \subseteq \mathcal{S}$, donde $\pi : \mathcal{S} \to M$, la aplicación proyección. La restricción será denotada por $\mathcal{S}/E$.

Observación 3.6

1. $(\mathcal{S}/E, \pi|_{\pi^{-1}(E)}, E)$ es un haz sobre E.
2. En particular, para cada $x \in M$, $\mathcal{S}/x = \mathcal{S}_x$ es justamente el tallo de $\mathcal{S}$ sobre x.
3. En realidad si $E \subseteq M$, entonces $\mathcal{S}/E = \bigsqcup_{x \in E} \mathcal{S}_x = \bigsqcup_{x \in M} \mathcal{S}/x$.
   Cuando $E = M$ se tiene $\mathcal{S} = \mathcal{S}/M = \bigsqcup_{x \in M} \mathcal{S}_x$.

Ejemplo 3.4

1. Si M es una superficie de Riemann, entonces $U \subseteq M$ abierto es una superficie de Riemann y este haz de germenes de funciones holomorfas es $\mathcal{O}/U$, la restricción del haz $\mathcal{O}$ sobre el subconjunto U.

Si $E \subseteq M$ es un subconjunto abierto, el haz $\mathcal{O}/E$ no puede ser interpretado generalmente como un subhaz del haz de germenes de funciones continuas sobre el espacio E, como se puede ver en el caso cuando E es un solo punto de M. Es decir, si $U \subseteq M$ abierto entonces $\mathcal{O}_U$ es isomorfo a $\mathcal{O}/U$, dado por el isomorfismo entre tallos

$$\begin{array}{rcl} F_x : (\mathcal{O}_U)_x & \longrightarrow & (\mathcal{O}/U)_x \\ \rho_{x\alpha}(f_\alpha) & \longmapsto & \rho_{x\alpha}(f_\alpha) \end{array}$$

donde $x \in U_\alpha \subseteq U,\ f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$.

En el caso de que $U = x$ no se puede definir $\mathcal{O}_x$ para ello recurrimos a $\mathcal{O}/x$.

Definición 3.3.2 .- Sea $\mathcal{S}$ es un haz de grupos abelianos sobre M un espacio topológico y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ un subconjunto de $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{R}$ es llamado un **subhaz** de $\mathcal{S}$ si:

1. $\mathcal{R}$ es un subconjunto de abierto de $\mathcal{S}$.
2. Para cada $x \in M$, el conjunto $\mathcal{R}_x := \mathcal{R} \cap \mathcal{S}_x$ es un subgrupo de S_x.

Observación 3.7

$(\mathcal{R}, \pi_{|_{\mathcal{R}}}, M)$ es un subhaz de grupos abelianos sobre M.

Definición 3.3.3 .- Sea M un espacio topológico, $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre M y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ un subhaz de $\mathcal{S}$. Se define el **haz cociente** $\mathcal{T} = \mathcal{S}/\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

1. Para cada $x \in M$, el conjunto $\mathcal{T}_x = \mathcal{S}_x/\mathcal{R}_x$ es el cociente natural de grupos.

2. $\mathcal{T} = \bigsqcup_{x \in M} \mathcal{T}_x$ con la aplicación proyección

$$\begin{array}{rccl} \pi_{\mathcal{T}}: & \mathcal{T} & \longrightarrow & M \\ & t \in \mathcal{T}_x & \longmapsto & \pi_{\mathcal{T}}(t) = x. \end{array}$$

La topología asociada a $\mathcal{T}$ es dado por la aplicación natural

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ & s \in \mathcal{S}_x & \longmapsto & \varphi(s) \in \mathcal{T} = \mathcal{S}/\mathcal{R}, \end{array}$$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\pi_{\mathcal{T}}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., $\pi_{\mathcal{T}} \circ \varphi = \pi$.

Definimos $U \subseteq \mathcal{T}$ es abierto si y sólo si $\varphi^{-1}(U)$ es abierto de $\mathcal{S}$.

Observación 3.8

$(\mathcal{T} = \mathcal{S}/\mathcal{R}, \pi_{\mathcal{T}}, M)$ es un haz sobre M.

3.4. Homomorfismos de haces. Haz núcleo y haz imagen. Secuencias exactas.

Definición 3.4.1 .- Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos haces de grupos abelianos sobre M un espacio topológico, con sus aplicaciones proyecciones $\sigma : \mathcal{S} \to M$ y $\tau : \mathcal{T} \to M$ respectivamente.

Se dice que $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ es una **aplicación de haces** si:

1. φ es continua.

2. $\tau \circ \varphi = \sigma$; i.e., el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\tau"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Observación 3.9

1. De la segunda condición de la Definición 3.4.1 se tiene que la aplicación φ preserva tallos, i.e., $\forall\, x \in M,\ \ \varphi(\mathcal{S}_x) \subseteq \mathcal{T}_x$.

2. Si $U \subseteq M$ abierto y $f \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ entonces $\varphi \circ f \in \Gamma(U, \mathcal{T})$.

3. De esta última observación se tiene que la aplicación de haces induce la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : \Gamma(U, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{T}) \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f\,, \end{array}$$

   el cual es un homomorfismo entre grupos de secciones.

4. Como σ y τ son homeomorfismos locales entonces φ es homeomorfismo local. En particular φ es una aplicación abierta, i.e., cualquier aplicación de haces es necesariamente un homeomorfismo local entre los espacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$.

5. Ya que $\{f(U_\alpha)\}_\alpha$ con $U_\alpha \subseteq M$ abierto y $f \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$ es una base para la topología de $\mathcal{S}$ y una aplicación de haces φ es abierta entonces $\{\varphi(f(U_\alpha))\}_\alpha$ es una base para la topología de $\mathcal{T}$.

Definición 3.4.2 .- Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos haces de grupos abelianos sobre M un espacio topológico y $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ una aplicación de haces.

1. Se dice que $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ es un **homomorfismo de haces** si es un homomorfismo de grupos en cada tallo , i.e., $\varphi_{|\mathcal{S}_x} : \mathcal{S}_x \to \mathcal{T}_x$ es un homomorfismo de grupos $\forall\, x \in M$.
2. Se dice que $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ es un **isomorfismo de haces** si es un homomorfismo de haces y un homeomorfismo entre entre espacios topológicos.
3. Dos haces $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ se dicen que son **isomorfos** si existe un isomorfismo de haces entre ellos que denotaremos por $\mathcal{S} \cong \mathcal{T}$.

Notación: $\varphi_x := \varphi_{|\mathcal{S}_x}$.

La siguiente proposición nos mostrará como construir homomorfismos entre haces inducidos por prehaces completos.

Proposición 3.4.1 .- Sean $\{U_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \rho^\alpha_\beta\}$ y $\{U_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, \varrho^\alpha_\beta\}$ prehaces completos sobre M un espacio topológico y sean $(\mathcal{S}, \sigma, M)$ y $(\mathcal{T}, \tau, M)$ sus haces inducidos respectivamente. Si existe $\{\varphi_\alpha : \mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de homomorfismo de grupos abelianos tal que si $U_\beta \subseteq U_\alpha$ se tiene que $\varphi_\alpha(f_\alpha)_{|_{U_\beta}} = \varphi_\beta(f_{\alpha|_{U_\beta}})$. Entonces existe un homomorfismo de haces $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$.

Reciprocamente si existe un homomorfismo de haces $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ entonces existe $\{\varphi_\alpha : \mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de homomorfismo de grupos abelianos tal que

$$\varphi_\alpha(f_\alpha)_{|_{U_\beta}} = \varphi_\beta(f_{\alpha|_{U_\beta}}) \quad \text{cuando } U_\beta \subseteq U_\alpha.$$

Prueba. $(\Rightarrow)$ Definimos $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ en cada tallo, dado $x \in M$

$$\begin{array}{rccl} \varphi_x : & \mathcal{S}_x & \longrightarrow & \mathcal{T}_x \\ & \rho_{x\alpha}(f_\alpha) & \longmapsto & \varphi_x(\rho_{x\alpha}(f_\alpha)) = \varrho_{x\alpha}(\varphi_\alpha(f_\alpha)). \end{array}$$

$(\Leftarrow)$ Definimos los siguientes homomorfismos de secciones.

Para cada α,

$$\begin{array}{rccl} \varphi^*_\alpha : & \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \Gamma(U_\alpha, \mathcal{T}) \\ & f_\alpha & \longmapsto & \varphi^*_\alpha(f_\alpha) = \varphi \circ f_\alpha, \end{array}$$

los cuales inducen los homomorfismo $\varphi_\alpha : \mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{T}_\alpha$ de tal manera que el siguiente diagrama conmute,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{T}_\alpha \arrow[d, "\varrho"] \\
\Gamma(U_\alpha, \mathcal{S}) \arrow[r, "\varphi_\alpha^*"] & \Gamma(U_\alpha, \mathcal{T}).
\end{tikzcd}$$

$\square$

Teorema 3.4.1 .- Sea $(\mathcal{S}, M, \pi)$ un haz sobre M y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una base para la tolología de M. Entonces existe un isomorfismo de haces entre el haz asociado al prehaz de secciones de $\mathcal{S}$ y el haz $\mathcal{S}$.

Prueba. En efecto, denotemos por $\widetilde{\mathcal{S}}$ la haz asociado al prehaz de secciones de S y definimos $\varphi : \mathcal{S} \to \widetilde{\mathcal{S}}$ en cada tallo, dado $x \in M$,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_x : & \mathcal{S}_x & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{S}}_x \\ & s & \longmapsto & [f_\alpha]_x = \rho_{x\alpha}(f_\alpha)\,, \end{array}$$

donde $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$, $x \in U_\alpha$ y $f_\alpha(x) = s$.

Se deja de ejercicio probar que efectivamente es un isomorfismo entre los haces $\mathcal{S}$ y $\widetilde{\mathcal{S}}$. $\square$

Definición 3.4.3 .- Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos haces sobre M un espacio topológico y $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ un homomorfismo de haces.

1. El **haz Núcleo** de φ que se denota por $Ker(\varphi)$ se define como:

$$Ker(\varphi) = \bigsqcup_{x\in M} \varphi_x^{-1}(0_x) \subseteq \mathcal{S},\ 0_x \in \mathcal{T}_x\,.$$

2. El **haz Imagen** de φ que se denota por $Im(\varphi)$ se define como:

$$Im(\varphi) = \bigsqcup_{x\in M} \varphi_x(\mathcal{S}_x) = \varphi(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}.$$

Proposición 3.4.2 .- Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos haces sobre M un espacio topológico y $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ un homomorfismo de haces.

1. El $Ker(\varphi) \subseteq \mathcal{S}$ y $Im(\varphi) \subseteq \mathcal{T}$ son subhaces de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ respectivamente.

2. $Im(\varphi) \cong \mathcal{S}/Ker(\varphi)$.

Prueba.

1. Como φ es continua y 0 es abierto en $\mathcal{T}$ entonces $Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0)$ es abierto en $\mathcal{S}$. Además $(Ker(\varphi))_x = Ker(\varphi) \cap \mathcal{S}_x = Ker(\varphi_x) = \varphi_x^{-1}(0)$ es un subgrupo de $\mathcal{S}_x$, luego se tiene que $Ker(\varphi)$ es un subhaz de $\mathcal{S}$.

   Como φ es abierta entonces $Im(\varphi) = \varphi(\mathcal{S})$ es abierto en $\mathcal{T}$ y también tenemos que $(Im(\varphi))_x = Im(\varphi) \cap \mathcal{T}_x = Im(\varphi_x) = \varphi_x(\mathcal{S}_x)$ es un subgrupo de $\mathcal{T}_x$, entonces $Im(\varphi)$ es un subhaz de $\mathcal{T}$.

2. Basta observar el siguiente isomorfismo de grupos: Para cada $x \in M$

   $$\tilde{\varphi}_x : \mathcal{S}_x/Ker(\varphi_x) \to Im(\varphi_x),$$

   y el siguiente diagrama conmutativo

   $$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{S}/Ker(\varphi) \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ & Im(\varphi) \end{tikzcd}$$

   De ahí se concluye que $Im(\varphi) \cong \mathcal{S}/Ker(\varphi)$.

$\square$

Definición 3.4.4 .- Sean $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ haces sobre M un espacio topológico y $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$, $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ homomorfismos de haces.

El diagrama

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} ,$$

será llamado **secuencia exacta** de haces si $Im(\varphi) = Ker(\psi)$.

Observación 3.10 .

1. Similarmente, en una cadena de haces y homomorfismos de haces será llamado secuencia exacta si para culaquier par consecutivo de homomorfismos, la imagen de uno es precisamente el núcleo del otro. i.e.,

   $$\mathcal{S}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{S}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{S}_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \longrightarrow \mathcal{S}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{S}_n$$

   $$Im(\varphi_i) = Ker(\varphi_{i+1}), \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-2$$

2. Si O denota el haz trivial con tallo el grupo cero en cada punto de M.

   La siguiente secuencia

$$O \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} \longrightarrow O$$

   es exacta si y sólo si φ es inyectiva (un isomorfismo de $\mathcal{R}$ a un subhaz de $\mathcal{S}$), ψ es sobreyectiva y el $Ker(\psi) = Im(\varphi)$.

   En particular, si $\mathcal{R}$ es un subhaz de $\mathcal{S}$ sobre M, $i : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ (la aplicación inclusión) y $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}/\mathcal{R}$ la aplicación proyección, entonces la siguiente secuencia de haces

$$O \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{i} \mathcal{S} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}/\mathcal{R} \longrightarrow O$$

   es exacta.

3.5. Los haces $\mathcal{C}^\infty$, $\Omega^{p,q}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^{1,0}$. La secuencia $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{C}^\infty \to \Omega^{0,1} \to 0$

Ejemplo 3.5 . Sea M una superficie de Riemann, $\{U_\alpha\}_\alpha$ una base para la topología de M.

1. El haz $\Omega^{p,\,q}$

   Sea

$$\Omega^{p,\,q}(U_\alpha) = \{\omega \text{ es una } (p,q)\text{-forma diferenciable en } U_\alpha\} \quad \text{y}$$

$$\begin{array}{rccl} \rho^\alpha_\beta : & \Omega^{p,\,q}(U_\alpha) & \longrightarrow & \Omega^{p,\,q}(U_\beta), \quad \text{con } U_\beta \subseteq U_\alpha \\ & \omega & \longmapsto & \omega\,|_{U_\beta}\,. \end{array}$$

   Luego $\mathcal{O}^{p,\,q}$ es el haz generado por el prehaz completo $\{U_\alpha, \Omega^{p,\,q}(U_\alpha), \rho^\alpha_\beta\}$.

2. El haz $\mathcal{O}^{1,\,0}$

   Sea

$$\mathcal{O}^{1,\,0}(U_\alpha) = \{\omega \text{ es una } (1,0)\text{-forma holomorfa en } U_\alpha\} \quad \text{y}$$

$$\begin{array}{rccl} \rho^\alpha_\beta : & \mathcal{O}^{1,\,0}(U_\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{1,\,0}(U_\beta), \quad \text{con } U_\beta \subseteq U_\alpha \\ & \omega & \longmapsto & \omega\,|_{U_\beta}\,. \end{array}$$

   Luego $\mathcal{O}^{1,\,0}$ es el haz generado por el prehaz completo $\{U_\alpha, \mathcal{O}^{1,\,0}(U_\alpha), \rho^\alpha_\beta\}$.

3. A partir del operador $\overline{\partial} : C^{\infty}(U) \to \Omega^{0,1}(U)$, donde U es un abierto de M, inducimos de manera natural el homomorfismo de haces

$$\overline{\partial} : \mathcal{C}^{\infty} \longrightarrow \Omega^{0,1},$$

donde el $Ker(\overline{\partial}) \cong \mathcal{O}$ y es sobreyectiva ya que toda 1-foma cerrada es localmente exacta. Así tenemos la siguiente secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty} \longrightarrow \Omega^{0,1} \longrightarrow 0.$$

3.6. El haz $\mathcal{O}^*$. La secuencia $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$.

Sea M una superficie de Riemann y $\{U_\alpha\}_\alpha$ una base para la topología de M.

El haz $\mathbb{Z}$:

Sea

$$\mathbb{Z}(U_\alpha) = \{f : U_\alpha \to \mathbb{Z} \,:\, f \text{ es localmente constante}\} \quad \text{y}$$

$$\begin{array}{rccl} \rho^\alpha_\beta : & \mathbb{Z}(U_\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(U_\beta), \quad \text{con } U_\beta \subseteq U_\alpha \\ & f & \longmapsto & f\,|_{U_\beta}\,. \end{array}$$

Luego $\mathbb{Z}$ es el haz constante generado por el prehaz completo $\{U_\alpha, \mathbb{Z}(U_\alpha), \rho^\alpha_\beta\}$.

A partir del operador $exp : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^*(U)$, donde U es un abierto de M, inducimos de manera natural el homomorfismo de haces

$$\exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*.$$

Similarmente, se define

$$\exp : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*.$$

Además, $\overline{\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{O}$, donde $\overline{\mathbb{Z}}$ es el subconjunto de germenes de funciones holomorfas que toman solo valores enteros, $\overline{\mathbb{Z}}$ es claramente un subhaz de $\mathcal{O}$ isomorfo al haz constante $\mathbb{Z}$ y es precisamente el haz núcleo de $\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$. Este homomorfismo es una proyección, ya que para cualquier germen $f_p \in \mathcal{O}^*_p$ tiene un logaritmo holomorfo cerca de p. Así, tenemos la siguiente secuencia exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0\,.$$

Análogamente, si consideramos los haces de germenes de funciones continuas, la siguiente secuencia

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\exp} \mathcal{C}^* \longrightarrow 0 \,,$$

es exacta.

3.7. Divisores, los haces $\mathcal{D}$, $\mathcal{M}^*$. La secuencia $0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{D} \to 0$

Sea M una superficie de Riemann. Definimos el haz de divisores $\mathcal{D}$ como $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, A partir del homomorfismo inclusión $i : \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^*$ y del homomorfismo cociente $\pi : \mathcal{M}^* \to \mathcal{D}$ nos indice la secuencia exacta de haces

$$O \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{i} \mathcal{M}^* \xrightarrow{D} \mathcal{D} \longrightarrow O \,.$$

Más adelante estudiaremos en detalle el haz de divisores. Ahora pasamos a definir las grupos de cohomología de haces.

Capítulo 4

Cohomología de Ĉech

Teniendo la idea precisa de haces podremos ahora definir los grupos de cohomología de haces los cuales ayudan a resolver muchos problemas topólogicos en nuestro caso sobre superficies de Riemann, uno de sus origenes es el problema de Mittag-Leffler el cual se puede resolver usando esta cohomología ó también se puede usar la cohomología de Dolbeault que veremos en este capítulo y por medio del Teorema de Resolución veremos que son isomorfos, lo mismo sucede con la cohomología de DeRham.

4.1. Preliminares

Definición 4.1.1 .- Sean M un espacio topólogico, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\wedge}$ una cobertura abierta de M y $q \geq 0$ un entero.

1. Se dice que $\sigma = (U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_q})$ es un q-**simplex** de $\mathcal{U}$ si $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \neq \emptyset$.
2. El conjunto $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} =: |\,\sigma|$ será llamado el **soporte** de σ.

4.2. Grupos de cocadenas con coeficientes en un haz. Cociclos y cobordes.

Definición 4.2.1 .- Sean M un espacio topólogico, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\wedge}$ un cobertura abierta de M, $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre M y $q \geq 0$ un entero.

1. Una **q-cocadena** de $\mathcal{U}$ con coeficientes en el haz $\mathcal{S}$ es una función f que asocia cada σ q-simplex una sección $f(\sigma) \in \Gamma(|\,\sigma|, \mathcal{S})$.

2. Denotaremos por $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ el conjunto de conjunto de todas las q-cocadenas de $\mathcal{U}$ con coeficientes en el haz $\mathcal{S}$.

Observación 4.1

1. $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ posee una estructura de grupo abeliano, i.e., si $f, g \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, la suma $f + g \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ y se define como sigue $(f + g)(\sigma) := f(\sigma) + g(\sigma)$, para todo q-simplex.

2. También se puede ver al grupo de q-cocadenas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) &= \left\{ f : \Lambda^{q+1} \to \bigcup_{\alpha_0, \ldots, \alpha_q} \Gamma(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_q}, \mathcal{S})\,;\, f(\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \in \Gamma(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_q}, \mathcal{S}) \right\} \\ &= \prod_{\alpha_0, \ldots, \alpha_q \in \Lambda} \Gamma(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_q}, \mathcal{S}) \end{aligned}$$

donde $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_q} = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}$.

A partir de esta última observación se puede definir un subgrupo muy importante del grupo de q-cocadenas, ya que más adelante probaremos que nos inducen la misma cohomología en ciertos espacios topológicos como por ejemplo los espacios de Hausdorff paracompactos.

Definición 4.2.2 .- El **grupo de q-cocadenas alternadas de $\mathcal{U}$ con coeficientes en el haz $\mathcal{S}$** denotado por $C^q_s(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ se define como el conjunto de elementos de $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ que satisfacen dos condiciones:

1. $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_q) = 0$ si un par de $\alpha_0, \ldots, \alpha_q$ son iguales.

2. $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_q) = -f(\alpha_0, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_q)$ para cualquier $\alpha_i, \alpha_j \in \Lambda$.

Observemos que en general el item 2 no implica el item 1, por ejemplo en cuerpos de característica 2. Además $C^q_s(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ es un subgrupo de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

A continuación definiremos el operador coborde que no permitirá definir los grupos de cohomología asociada a una cobertura.

Operador Coborde: Se define a continuación.

$$\begin{array}{rcl} \delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \longrightarrow & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \\ f & \longmapsto & \delta f\,, \end{array}$$

$$\delta f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{q+1})_{|U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{q+1}}},$$

donde $f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{q+1}) = f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{q+1})$.

Propiedades 4.1

1. δ es un homomorfismo de grupos.

2. $\delta\delta = 0$.

3. $\delta(C_s^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subseteq C_s^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$

Prueba.

1. Inmediato del hecho que la restricción conmuta con la suma.

2. Si $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ entonces

$$\begin{aligned} \delta(\delta f)(\alpha_0, \ldots, \alpha_{q+2}) &= \sum_{j=0}^{q+2} (-1)^j \delta f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_{q+2}) \\ &= \sum_{j=0}^{q+2} (-1)^j \Bigg[\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_{q+2}) + \\ &\qquad \sum_{i=j}^{q+1} (-1)^i f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \hat{\alpha}_{i+1}, \ldots, \alpha_{q+2}) \Bigg] \\ &= \sum_{j=0}^{q+2} (-1)^j \Bigg[\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_{q+2}) + \\ &\qquad \sum_{i=j+1}^{q+2} (-1)^{i-1} f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{q+2}) \Bigg] \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_{q+2}) + \\ &\qquad \sum_{j<i} (-1)^{i+j-1} f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{q+2}) \\ &= \sum_{i<j} [(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}] f(\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_{q+2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. Si $f \in C^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S})$ entonces

$$\begin{aligned}
\delta f(\alpha_0,\ldots,\alpha_j,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{q+1}) &= \sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i f(\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\alpha_j,\alpha_{j+1},\alpha_{q+1})+ \\
&\quad (-1)^j f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{q+1})+ \\
&\quad (-1)^{j+1} f(\alpha_0,\ldots,\alpha_j,\alpha_{j+2},\ldots,\alpha_{q+1})+ \\
&\quad \sum_{i=j+1}^{q+1}(-1)^i f(\alpha_0,\ldots,\alpha_j,\alpha_{j+2},\ldots,\alpha_{q+1}) \\
&= -\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i f(\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\alpha_{j+1},\alpha_j,\alpha_{q+1}) \\
&\quad -(-1)^j f(\alpha_0,\ldots,\alpha_j,\alpha_{j+2},\ldots,\alpha_{q+1}) \\
&\quad -(-1)^{j+1} f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{q+1}) \\
&\quad -\sum_{i=j+2}^{q+1}(-1)^i f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{j+1},\alpha_j,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\alpha_{q+1}) \\
&= -\delta f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{j+1},\alpha_j,\ldots,\alpha_{q+1}).
\end{aligned}$$

En el caso de $\alpha_j = \alpha_{j+1}$ usamos el desarrolo de arriba y llegamos a la conclusión de que $\delta f(\alpha_0,\ldots,\alpha_j,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{q+1}) = 0$. Luego se tiene probado las propiedades. □

4.3. Cohomología de una cobertura con coeficientes en un haz.

Definición 4.3.1 .- El conjunto $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = \{f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) : \delta f = 0\}$ es un subgrupo de $C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$, llamado el grupo de **q-cociclos**; la imagen $\delta C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \subseteq C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ es llamado el grupo de **q-cobordes** denotado por $B^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$.

De igual manera definimos $Z^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) = \{f \in C^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) : \delta f = 0\}$ llamado el grupo de **q-cociclos alternados** y $B^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) = \delta C^{q-1}_s(\mathcal{U},\mathcal{S})$ llamado el grupo de **q-cobordes alternados**.

A partir de las siguientes secuencias

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{S}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \longrightarrow \cdots$$

$$0 \longrightarrow C^0_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} C^1_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) \longrightarrow \cdots$$

y del hecho que $B^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \subseteq Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ es un subgrupo de $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ y $B^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) \subseteq Z^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S})$ es un subgrupo de $Z^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S})$, podemos definir los grupos de cohomología asociado a una cobertura.

Definición 4.3.2 .- El **q-ésimo grupo de cohomología de $\mathcal{U}$ con coeficientes en el haz $\mathcal{S}$** es el grupo cociente:

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = \begin{cases} Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S})/B^q(\mathcal{U},\mathcal{S})\,, & \text{si } q>0, \\ Z^0(\mathcal{U},\mathcal{S})\,, & \text{si } q=0. \end{cases}$$

El **q-ésimo grupo de cohomología alternada de $\mathcal{U}$ con coeficientes en el haz $\mathcal{S}$** es el grupo cociente:

$$H^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) = \begin{cases} Z^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S})/B^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S})\,, & \text{si } q>0, \\ Z^0_s(\mathcal{U},\mathcal{S})\,, & \text{si } q=0. \end{cases}$$

A continuación veamos el siguiente Lema que nos caracteriza los grupos de cohomología cero.

Lema 4.3.1 . Para cualquier cobertura abierta $\mathcal{U}$ de M, el 0-ésimo grupo de cohomología y cohomología alternada de $\mathcal{U}$ con coeficientes en el haz $\mathcal{S}$ son iguales e isomorfos al grupo de las secciones globales de $\mathcal{S}$, i.e., $H^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) = H^0_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) \cong \Gamma(M,\mathcal{S})$.

Prueba. De la definición, $H^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) = Z^0_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) = H^0_s(\mathcal{U},\mathcal{S})$. Si $f \in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{S})$ entonces $\delta f(U_\alpha, U_\beta) = 0$ luego $f(U_\beta) - f(U_\alpha) = 0$ en $U_\alpha \cap U_\beta$, por lo tanto $f(U_\alpha) = f(U_\beta)$ en $U_\alpha \cap U_\beta$ $\forall\, \alpha,\, \beta$. Así podemos definir el siguiente isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \longrightarrow & \Gamma(M,\mathcal{S}) \\ f & \longmapsto & F, \end{array}$$

donde $F_{|U_\alpha} = f(U_\alpha)$. □

4.3.1. Refinamientos

Nos gustaría asociar a cada haz $\mathcal{S}$, un grupo de cohomología que no dependa del cambio de cualquier cobertura abierta. Para ello vamos a comparar los grupos de cohomología asociados a diferentes cobeturas abiertas.

Definición 4.3.3 .- Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in\Omega}$ dos coberturas abiertas de M. Se dice que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ denotado por $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ si existe una aplicación $r : \Omega \to \Lambda$ con $V_\beta \subseteq U_{r(\beta)}$. La aplicación r es llamado aplicación de refinamiento.

Observación 4.2

1. La aplicación de refinamiento no es único, i.e., $\mathcal{V}$ puede ser un refinamiento de $\mathcal{U}$ por varios mapeos de refinamiento.

2. Un subcobertura abierta de una cobertura abierta es un refinamiento.

3. Si M es una variedad. Entonces cualquier cobertura abierta tiene un refinamiento que consiste enteramente de los dominios de sus cartas.

4. Dos coberturas abiertas cualesquiera tienen un refinamiento común.

Notar que la aplicación de refinamiento induce una aplicación sobre q-cocadenas

$$\begin{array}{rcl} r : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \longrightarrow & C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \\ f & \longmapsto & rf, \end{array}$$

donde $rf(\beta_0, \ldots, \beta_q) = f(r(\beta_0), \ldots, r(\beta_q))_{|V_{\beta_0 \cdots \beta_q}}$.

Propiedades 4.2 .

1. *r es un homomorfismo de grupos.*

2. *r conmuta con el operador coborde, i.e., $r\delta = \delta r$.*

3. *$r(C^q_s(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subseteq C^q_s(\mathcal{V}, \mathcal{S})$.*

Prueba. 1. y 3. inmediatos.

2. Basta verificar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "r"] & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \arrow[d, "r"] \\ C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \arrow[r, "\delta"] & C^{q+1}(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \delta rf(\beta_0, \ldots, \beta_{q+1}) &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i rf(\beta_0, \ldots, \hat{\beta}_i, \ldots, \beta_{q+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i f(r(\beta_0), \ldots, r(\hat{\beta}_i), \ldots, r(\beta_{q+1})) \\ &= \delta f(r(\beta_0), \ldots, r(\beta_{q+1})) \\ &= r\delta f(\beta_0, \ldots, \beta_{q+1}). \end{aligned}$$

□

A partir de estas propiedades se inducen homomorfismos de grupos de cohomología

$$\begin{array}{rccc} r^* : & H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \longrightarrow & H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}), \\ & [f] & \longmapsto & [rf] \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} r^*_s : & H^q_s(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \longrightarrow & H^q_s(\mathcal{V}, \mathcal{S}). \\ & [f] & \longmapsto & [rf] \end{array}$$

Si $r:\mathcal{V}\to\mathcal{U}$ y $r':\mathcal{V}\to\mathcal{U}$ son dos aplicaciones de refinamientos asociados a estas coberturas. Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} K: C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \longrightarrow & C^{q-1}(\mathcal{V},\mathcal{S}) \\ f & \longmapsto & Kf\,, \end{array}$$

donde $Kf(\beta_0,\dots,\,\beta_{q-1})=\sum_{i=0}^{q-1} f(r(\beta_0),\dots,r(\beta_i),r'(\beta_i),\dots,r'(\beta_{q-1}))_{|V_{\beta_0\cdots\beta_{q-1}}}$.

Propiedades 4.3 .

1. *K es un homomorfismo de grupos.*
2. *$\delta K+K\delta=r'-r$.*

Prueba.

1. Es fácil de verificar.
2. Sea $f\in C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ entonces

$$\begin{aligned}
\delta Kf(\beta_0,\dots,\beta_q) &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i Kf(\beta_0,\dots,\hat{\beta}_i,\dots,\beta_q)\\
&= \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j} f(r(\beta_0),\dots,r(\hat{\beta}_i),\dots,r(\beta_{j+1}),r'(\beta_{j+1}),\dots,r'(\beta_q))+\\
&\qquad \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{i=j+1}^{q}(-1)^{i+j} f(r(\beta_0),\dots,r(\beta_j),r'(\beta_j),\dots,r'(\hat{\beta}_{i+1}),,\dots,r'(\beta_q))\\
&= \sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j-1} f(r(\beta_0),\dots,r(\hat{\beta}_i),\dots,r(\beta_j),r'(\beta_j),\dots,r'(\beta_q))+\\
&\qquad \sum_{j=0}^{q}\sum_{i=j+2}^{q+1}(-1)^{i+j-1} f(r(\beta_0),\dots,r(\beta_j),r'(\beta_j),\dots,r(\hat{\beta}_i),\dots,r'(\beta_q))\\
&= -\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\,\delta f(r(\beta_0),\dots,r(\beta_j),r'(\beta_j),\dots,r'(\beta_q))\\
&\qquad -\sum_{j=0}^{q}(-1)^{2j-1} f(r(\beta_0),\dots,r(\beta_{j-1}),r'(\beta_j),\dots,r'(\beta_q))\\
&\qquad -\sum_{j=0}^{q}(-1)^{2j-2} f(r(\beta_0),\dots,r(\beta_j),r'(\beta_{j+1}),\dots,r'(\beta_q))\\
&= -K\delta f(\beta_0,\dots,\beta_q)+\sum_{j=0}^{q} f(r(\beta_0),\dots,r(\beta_{j-1}),r'(\beta_j),\dots,r'(\beta_q))\\
&\qquad -\sum_{j=0}^{q} f(r(\beta_0),\dots,r(\beta_j),r'(\beta_{j+1}),\dots,r'(\beta_q))
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned}
\delta K f(\beta_0,\ldots,\beta_q) + K\delta f(\beta_0,\ldots,\beta_q) &= f(r'(\beta_0),\ldots,r'(\beta_q)) - f(r(\beta_0),\ldots,r(\beta_q)) \\
&= r'f(\beta_0,\ldots,\beta_q) - rf(\beta_0,\ldots,\beta_q).
\end{aligned}$$

□

Observación 4.3

En general no se tiene que $K(C_s^q(\mathcal{U},\mathcal{S})) \subseteq C_s^{q-1}(\mathcal{V},\mathcal{S})$, por ejemplo para $q=2$, tomamos el haz $\mathbb{Z}$ sobre M, una cobertura $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ sobre M, $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ refinamiento de $\mathcal{U}$, donde $V_1 = U_1$, $V_2 = U_2 \cap U_3$, $V_3 = U_3$, $V_4 = U_2$ y aplicaciones de refinamiento

$$\begin{array}{rcl}
r : \{1,2,3,4\} & \longrightarrow & \{1,2,3\}, \\
1 & \longmapsto & 1 \\
2 & \longmapsto & 2 \\
3 & \longmapsto & 3 \\
4 & \longmapsto & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
r' : \{1,2,3,4\} & \longrightarrow & \{1,2,3\}. \\
1 & \longmapsto & 1 \\
2 & \longmapsto & 3 \\
3 & \longmapsto & 3 \\
4 & \longmapsto & 2
\end{array}$$

Es fácil ver que para $\{f_{ijk}\} \in C_s^2(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ con $f_{123} = 1$ se tiene que $Kf_{12} = f_{123} = 1$ y $Kf_{21} = f_{231} = 1$, i.e., $Kf \in C_s^1(\mathcal{U},\mathbb{Z})$.

Proposición 4.3.1 .- Si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, y si $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ y $r' : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ son dos aplicaciones de refinamientos asociados a estas coberturas, entonces $r^* = r'^*$ y $r_s^* = r'^*_s$.

Prueba. Si $f \in Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ entonces de la relación $\delta Kf + K\delta f = r'f - rf$ y del hecho que K es un homomorfismo tenemos que $\delta Kf = r'f - rf$,i.e., $r^*[f] = r'^*[f]$.

Primero Ω es un conjunto de índices con un orden lineal dado. En el caso de las alternadas no podemos definir directamente a partir de la restricción de K a $C_s^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ debido a la observación, por ello definimos:

$$\begin{array}{rcl}
K_s : C_s^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \longrightarrow & C_s^q(\mathcal{V},\mathcal{S}) \\
f & \longmapsto & K_s f
\end{array}$$

$K_s f(\beta_0,\ldots,\beta_{q-1}) = Kf(\beta_0,\ldots,\beta_{q-1})$ cuando $\beta_0 < \cdots < \beta_{q-1}$ y lo extendemos de manera que K_s sea alternada, ya que la relación $\delta K + K\delta = r' - r$ vale en particular para elementos en $C_s^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$. Finalmente se tiene $r_s^* = r'^*_s$. □

Para cualquier par de coberturas abiertas $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, la relación $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ es un orden parcial sobre el conjunto de todos las coberturas abiertas, y por la Proposición 4.3.1 si $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ existe un único homomorfismo $H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{V},\mathcal{S})$ que denotaremos por $r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$. Análogamente para el caso de las alternadas definimos $r_s{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to H^q_s(\mathcal{V},\mathcal{S})$.

Observación 4.4

1. Si $\mathcal{W} \prec \mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ son tres coberturas abiertas, entonces
$$r^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \circ r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} \quad \text{y} \quad r_s{}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \circ r_s{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = r_s{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}.$$

2. Si $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ son bases topológicas de M. Entonces
$$H^q(\mathcal{B},\mathcal{S}) \simeq H^q(\mathcal{B}',\mathcal{S}) \text{ y } H^q_s(\mathcal{B},\mathcal{S}) \simeq H^q_s(\mathcal{B}',\mathcal{S}), \quad \forall\, q \geq 0.$$
En efecto, ya que $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}' \prec \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}' \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$ entonces por 1. $id = r^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = r^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \circ r^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ y $id = r^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = r^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \circ r^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$.

Sea $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ un homomorfismo de haces.

Definimos para todo $q \geq 0$, la aplicación
$$\begin{array}{rcl} \varphi : C^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) & \longrightarrow & C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \\ f & \longmapsto & \varphi f\,, \end{array}$$
donde $\varphi f(\alpha_0,\ldots,\alpha_q) = \varphi \circ f(\alpha_0,\ldots,\alpha_q)$.

Propiedades 4.4 .

1. φ es un homomorfismo de grupos de q-cocadenas.

2. φ conmuta con el operador coborde, i.e., $\varphi\delta = \delta\varphi$.

3. Si $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ y r una aplicación de refinamiento asociado a estas coberturas entonces $\varphi \circ r = r \circ \varphi$.

4. $\varphi(C^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S})) \subseteq C^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S})$.

Prueba. 1. y 4. son fáciles de verificar.

2. Sea $f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ entonces
$$\begin{array}{rcl} \varphi\delta f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{q+1}) & = & \varphi\Big(\displaystyle\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^q f(\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\alpha_{q+1})_{|U_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}}}\Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\varphi f(\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\alpha_{q+1})_{|U_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}}} \\ & = & \delta\varphi f(\alpha_0,\ldots,\alpha_{q+1}). \end{array}$$

3. Sea $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi r f(\beta_0, \ldots, \beta_q) &= \varphi f(r(\beta_0, \ldots, r(\beta_q))) \\ &= r\varphi f(\beta_0, \ldots, \beta_q).\end{aligned}$$

□

A partir de φ inducimos las aplicaciones en cohomología

$$\begin{aligned}\varphi^+ : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{R}) &\longrightarrow H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \\ [f] &\longmapsto [\varphi f],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_s^+ : H_s^q(\mathcal{U}, \mathcal{R}) &\longrightarrow H_s^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \\ [f] &\longmapsto [\varphi f].\end{aligned}$$

Están bien definidos por las propiedades anteriores.

Propiedades 4.5 .

1. *φ^+ y φ_s^+ son homomorfismos.*

2. *Si $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$. Entonces $r_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \circ \varphi^+ = \varphi^+ \circ r_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ y $r_{s\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \circ \varphi_s^+ = \varphi_s^+ \circ r_{s\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$.*

3. *Si $\mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T}$ es una secuencia de homomorfismos de haces. Entonces $(\psi \circ \varphi)^+ = \psi^+ \circ \varphi^+$ y $(\psi \circ \varphi)_s^+ = \psi_s^+ \circ \varphi_s^+$.*

A partir de todos estos resultados pasaremos a definir el límite directo que nos permitirá definir de manera intrínseca la cohomología sobre el espacio topológico M.

Sobre la unión disjunta $\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$; definimos la siguiente relación. Para clases cohomologas
$s \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, $t \in H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ diremos que $s \sim t$ si existe un refinamiento $\mathcal{M} \prec \mathcal{U}$ y $\mathcal{M} \prec \mathcal{V}$, tal que s y t tienen las mismas imagenes sobre los homomorfismos $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ y $H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{W}, \mathcal{S})$, i.e., $r_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}(s) = r_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(t)$. Esta relación es una relación de equivalencia, y el conjunto de clases de equivalencia será llamado límite directo denotado por $dir.lim._{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$. Análogamente para las alternadas tenemos $dir.lim._{\mathcal{U}} H_s^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

Observación 4.5

Los $dir.lim._{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ y $dir.lim._{\mathcal{U}} H_s^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ tienen estructura de grupo.

4.4. Cohomología de un espacio topológico con coeficientes en un haz.

Definición 4.4.1 .- Sea $\mathcal{S}$ un haz sobre M un espacio topológico y $q \geq 0$ un entero . El **q-ésimo grupo de cohomología de Čech y cohomología alternada sobre M con coeficientes en el haz $\mathcal{S}$** se definen respectivamente como los grupos:

$$H^q(M,\mathcal{S}) = dir.lim._{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \quad \text{y} \quad H^q_s(M,\mathcal{S}) = dir.lim._{\mathcal{U}} H^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}).$$

Observación 4.6 .

1. Si $\mathcal{U}$ es una cobertura abierta de M, entonces inducen homomorfismos naturales

$$r_{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \longrightarrow H^q(M,\mathcal{S}) \qquad \text{y} \qquad r_{s\mathcal{U}} : H^q_s(\mathcal{U},\mathcal{S}) \longrightarrow H^q_s(M,\mathcal{S}).$$

2. Si $\mathcal{B}$ es una base topológica de M. Entonces

$$H^q(M,\mathcal{S}) \simeq H^q(\mathcal{B},\mathcal{S}) \quad \text{y} \quad H^q_s(M,\mathcal{S}) \simeq H^q_s(\mathcal{B},\mathcal{S}) \quad , \forall\, q \geq 0.$$

   En efecto, ya que si definimos

$$\begin{aligned} \phi : H^q(M,\mathcal{S}) &\longrightarrow H^q(\mathcal{B},\mathcal{S}) \\ \eta = \bar{t} &\longmapsto r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}(t) \\ t \in H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \end{aligned}$$

   Esta bien definido por la Observación 4.4 y es un isomorfismo con inversa $r_{\mathcal{B}}$. Análogamente para las alternadas.

3. Si $H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = 0$, $\forall\, \mathcal{U}$ cobertura abierta de M entonces $H^q(M,\mathcal{S}) = 0$.

Veamos algunas propiedades de los grupos de cohomología.

Propiedades 4.6 .

1. $H^0(M,\mathcal{S}) = H^0_s(M,\mathcal{S}) \cong \Gamma(M,\mathcal{S})$.

2. Si $\mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}$ es un homomorfismo de haces entonces inducen homomorfismos de grupos de cohomología

$$H^q(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H^q(M,\mathcal{S}) \quad \text{y} \quad H^q_s(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*_s} H^q_s(M,\mathcal{S}) \quad \forall\, q \geq 0.$$

   En el caso $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ y $\varphi = id_{\mathcal{S}}$ entonces $\varphi^* = id_{H^q(M,\mathcal{S})}$ y $\varphi^*_s = id_{H^q_s(M,\mathcal{S})}$.
   Además, en el caso de una secuencia $\mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T}$ se tiene que:

$$(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \quad \text{y} \quad (\varphi \circ \psi)^*_s = \varphi^*_s \circ \psi^*_s.$$

Prueba. Sea $\mathcal{B}$ es una base topológica de M.
1. Por el Lema 4.3.1 y por la Observación 4.6 se sigue que

$$H^0(M,\mathcal{S}) = H^0_s(M,\mathcal{S}) \cong H^0(\mathcal{B},\mathcal{S}) \cong \Gamma(M,\mathcal{S}).$$

2. Del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^q(M,\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "r_{\mathcal{B}}^{-1}"] & H^q(M,\mathcal{S}) \\
H^q(\mathcal{B},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi^+"] & H^q(\mathcal{B},\mathcal{S}) \arrow[u, "r_{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\varphi^* = r_{\mathcal{B}} \circ \varphi^+ \circ r_{\mathcal{B}}^{-1}$. Análogamente para las alternadas se tiene que $\varphi^*_s = r_{s\mathcal{B}} \circ \varphi^+_s \circ r_{s\mathcal{B}}^{-1}$. Luego fácilmente se prueba dicha propiedad. □

Para el cálculo de grupos de cohomología primero pasaremos por algunos resultados previos que veremos a continuación.

4.5. Secuencia exacta de cohomología asociada a una secuencia exacta corta.

Considere una secuencia corta exacta de haces sobre el espacio topológico M:

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} \longrightarrow 0\,.$$

Para cualquier abierto $U \subseteq M$, los homomorfismos de haces φ, ψ inducen los homomorfismos φ^*, ψ^* entre los correspondientes grupos de secciones:

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} \Gamma(U, \mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} \Gamma(U, \mathcal{T}),$$

la cual es una secuencia exacta de grupos.

En general ψ^* no es inyectiva. Para ello veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1

Considere

$$M = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < \|z\| < 2\},$$

y la siguiente secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0.$$

Es claro que la aplicación $\mathcal{O}(M) \xrightarrow{e} \mathcal{O}^*(M)$ no es sobreyectiva ya que si tomamos la $id_M \in \mathcal{O}^*(M)$ el logaritmo de la id_M no esta definido en M.

4.5.1. Espacios Paracompactos

Definición 4.5.1 .- Sea M espacio topológico.

1. Una familia $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ en M se dice que es localmente finita en M si todo punto de M tiene un entorno que intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

2. Se dice que M es **paracompacto** si toda cobertura abierta en M tiene un refinamiento abierto localmente finito que recubre a M.

Observación 4.7

1. Todo espacio compacto es paracompacto.

2. Todo espacio de Hausdorff paracompacto es normal, i.e., separa cerrados disjuntos por abiertos disjuntos que los contienen. En particular es regular, i.e., separa un punto y un cerrado disjunto por abiertos disjuntos que los contienen.

3. Todo espacio de Hausdorff localmente compacto con base numerable es paracompacto. En particular las variedades son paracompactas.

4. Todo espacio regular con base numerable es paracompacto.

Lema 4.5.1 . Sea M un espacio de Hausdorff paracompacto y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cobertura abierta de M. Entonces existe $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cobetura abierta de M localmente finita tal que $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada α.

Prueba. Ver [12] página 294. $\square$

Teorema 4.5.1 .- Sea M un espacio topológico de Hausdorff paracompacto y $0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} \longrightarrow 0$ una secuencia exacta de haces de grupos abelianos sobre M. Entonces existen secuencias exactas de grupos de cohomología y cohomología alternada respectivamente de la forma:

$$0 \longrightarrow H^0(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} H^0(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^1(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} H^1(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^2(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H^2(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} H^2(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*} \cdots$$

y

$$0 \longrightarrow H_s^0(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H_s^0(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} H_s^0(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H_s^1(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H_s^1(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} H_s^1(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H_s^2(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H_s^2(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} H_s^2(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*} \cdots$$

Prueba. Será probado para el caso de cohomología el caso de la alternada se sigue por analogía. Veamos, sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cobertura abierta localmente finito de M.

Para cada $\sigma = (U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_q})$ q-simplex induce una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma(|\sigma|,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(|\sigma|,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi} \Gamma(|\sigma|,\mathcal{T}) \ ,$$

así, tenemos la siguiente secuencia exacta de grupos de cocadenas

$$0 \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi} C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi} C^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) \ .$$

A partir de ello, definimos

$$\overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) = \Psi C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = Im(\ C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi} C^q(\mathcal{U},\mathcal{T})\ ) \subset C^q(\mathcal{U},\mathcal{T}),$$

entonces las secuencias pueden se extendidas a la secuencia exacta de la forma

$$0 \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi} C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi} \overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) \longrightarrow 0.$$

Obsevar que los homomorfismo φ y ψ conmutan con el operador coborde, en el sentido que $\varphi\delta = \delta\varphi$ y $\psi\delta = \delta\psi$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo, en el cual las filas son secuencias exactas de grupos de cocadenas.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"] & C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"] & \overline{C}^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{T}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{q}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"] & C^{q}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"] & \overline{C}^{q}(\mathcal{U},\mathcal{T}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \overline{C}^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{T}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Es decir $Ker\varphi = 0$, $Im\varphi = Ker\psi$ e $Im\psi = \overline{C}^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{T})$.

Para cada indice q se tiene la siguiente secuencia exacta de grupos de cohomología:

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^+} H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^+} \overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}),$$

donde

$$\overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) = \overline{Z}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})/\delta\overline{C}^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{T})\ ,$$

$$\overline{Z}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) = \{f \in \overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})\ :\ \delta f = 0\}.$$

Ahora, definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \delta^+ : & \overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) & \longrightarrow & H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \\ & [f] & \longmapsto & [h], \end{array}$$

de la siguiente manera: Si $f \in \overline{Z}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$ entonces $\delta f = 0$, $f \in \overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$ entonces existe $g \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ tal que $\psi g = f$

luego $\psi\delta g = \delta\psi g = \delta f = 0$

entonces $\delta g \in Ker(\psi) = Im\varphi$ por lo tanto $\delta g = \varphi h$, donde $h \in C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R})$.

Además, $\varphi\delta h = \delta\varphi h = \delta\delta g = 0$ y de la inyectividad de φ se tiene que $\delta h = 0$ entonces $h \in Z^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S})$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"] & C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"] & \overline{C}^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{T}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & O \\
O \arrow[r] & C^{q}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"] & C^{q}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"] & \overline{C}^{q}(\mathcal{U},\mathcal{T}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & O \\
O \arrow[r] & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi"] & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi"] & \overline{C}^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{T}) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

Se puede probar que δ^+ es un homomorfismo.

Finalmente se tiene la siguiente secuencia exacta de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^+} H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^+} \overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^+}$$

$$\xrightarrow{\delta^+} H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^+} H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^+} \overline{H}^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^+} \cdots$$

Si consideramos $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in\Omega} \prec \mathcal{U}$ un refinamiento y $r : \Omega \to \Lambda$ una aplicación de refinamiento asociados a estos cubrimentos.

De las Propiedades 4.4 tenemos que $r\varphi = \varphi r$ y $r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\delta^* = \delta^* r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$.

entonces $r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(\overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})) \subseteq \overline{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{T})$.

Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi^+"] \arrow[d, "r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}"] & H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi^+"] \arrow[d, "r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}"] & \overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) \arrow[r, "\delta^+"] \arrow[d, "r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}"] & H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \arrow[d, "r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}"] \\
H^q(\mathcal{V},\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi^+"] & H^q(\mathcal{V},\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi^+"] & \overline{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{T}) \arrow[r, "\delta^+"] & H^{q+1}(\mathcal{V},\mathcal{R})
\end{tikzcd}$$

Pasando al límite directo de tiene la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^0(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} \overline{H}^0(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^1(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} \overline{H}^1(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^2(M,\mathcal{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H^2(M,\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi^*} \overline{H}^2(M,\mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*} \cdots$$

Afirmación: $\overline{H}^q(M,\mathcal{T}) = H^q(M,\mathcal{T})$.

Basta probar que dado $f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$ existen un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in\Omega} \prec \mathcal{U}$ con aplicación de refinamiento $r : \Omega \to \Lambda$ y $g \in C^q(\mathcal{V},\mathcal{S})$ tal que $rf = \psi g$.

En efecto, como M es Hausdorff y paracompacto entonces es normal y por el Lema 4.5.1 existe una cobertura abierta localmente finita $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\wedge}$ tal que $\overline{W}_\alpha \subseteq U_\alpha$.

Para cada $p \in M$, existe una vecindad abierta V_p de p (suficientemente pequeña) que satisface las siguientes condiciones:

1. $V_p \subseteq W_\alpha$ para al menos un W_α.

2. Si $V_p \cap W_\alpha \neq \emptyset$ entonces $V_p \subseteq U_\alpha$.

3. Si $\sigma = (\alpha_0,\ldots,\alpha_q)$ q-simplex y $p \in |\,\sigma|$, (necesariamente $V_p \subseteq |\,\sigma|$) entonces $f(\sigma)_{|V_p}$ es la imagen sobre ψ de una sección de S sobre V_p.

Por la condición 1. tenemos para cada V_p, sea $r(p) = \alpha$ tal que $V_p \subseteq W_{r(p)} \subseteq U_{r(p)}$, luego se tiene que $\mathcal{V} := \{V_p\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

Notar que si $\emptyset \neq V_{p_0\ldots p_q} \subset W_{r(p_0)\ldots r(p_q)}$, y como $V_{p_0} \cap W_{r(p_i)} \neq \emptyset$ por la condición 2. se tiene que $V_{p_0} \subseteq U_{p_i}$, $\forall\, i = 1,\ldots,q$. Entonces $V_{p_0\ldots p_q} \subseteq V_{p_0} \subseteq U_{r(p_0)\ldots r(p_q)}$. Además

$$rf(p_0\ldots p_q) = f(r(p_0)\ldots r(p_q))_{|_{|\sigma|}} = \left(f(r(p_0)\ldots r(p_q))_{|V_{p_0}}\right)_{|_{|\sigma|}},$$

y de la condición 3. la restricción de la sección $rf(\sigma)$ a V_{p_0} es la imagen sobre ψ de alguna sección. $\square$

4.6. Haces finos, particiones de la unidad. Nulidad de la cohomología.

Definición 4.6.1 .- Sea $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre el espacio topológico M, y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cobertura abierta localmente finita de M.

1. Una **partición de la unidad para el haz $\mathcal{S}$ subordinada** a la cobertura $\mathcal{U}$ es una familia de homomorfismos de haces $\eta_\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ tal que :

   a) $\eta_\alpha(\mathcal{S}_p) = 0$, $\forall\, p \in M \backslash U_\alpha$,

   b) $\displaystyle\sum_\alpha \eta_\alpha(s) = s$, $\forall\, s \in \mathcal{S}$.

2. Un haz $\mathcal{S}$ es llamado **fino** si para cualquier cobertura abierta localmente finita existe una partición de la unidad subordinada.

Ejemplo 4.2 .

1. Sea M un superficie de Riemann, los haces $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^\infty$ son haces finos. Dado $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cobertura abierta localmente finita, existe una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$, i.e., existe $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq C^\infty(M)$ tal que

   a) $sop(r_\alpha) \subseteq U_\alpha$,

   b) $\{sopp(r_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia localmente finita,

   c) $\displaystyle\sum_\alpha r_\alpha = 1$.

   Definimos

$$\begin{array}{rccclc} \eta_\alpha : & \mathcal{C}^\infty & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty & , & p \in M \\ & [f]_p & \longmapsto & [r_\alpha . f]_p & & \end{array}$$

   Análogamente si M es una variedad diferenciable.

Teorema 4.6.1 .- Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cobertura abierta localmente finita de un espacio topológico Hausdorff paracompacto M, y $\mathcal{S}$ un haz fino sobre M entonces $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = 0$ y $H^q_s(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = 0$, para todo $q > 0$. En particular, para cualquier haz fino $\mathcal{S}$ sobre un espacio topológico de Hausdorff paracompacto M se tiene que $H^q(M, \mathcal{S}) = H^q_s(M, \mathcal{S}) = 0$, para todo $q > 0$.

Prueba. Sea $\{\eta_\alpha\}_\alpha$ una partición de la unidad para el haz $\mathcal{S}$ subordinada a la cobetura $\mathcal{U}$.

Afirmación. Si $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ entonces $f \in B^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

En efecto. Fijo $\alpha \in \Lambda$ podemos tomar una cobertura localmente finita $\{W_\alpha\}_\alpha$ tal que $W_\alpha \subset \overline{W}_\alpha \subset U_\alpha$.

Sea $\sigma(U_0, \ldots, U_{q-1})$ un q-simplex, de $U_\alpha \cap |\sigma| \xrightarrow{f(U_\alpha,\sigma)} \mathcal{S} \xrightarrow{\eta_\alpha} \mathcal{S}$ $\eta_\alpha f(U_\alpha, U_0, \ldots, U_{q-1})$, ya que η_α es nula en $|\sigma| \setminus U_\alpha \cap |\sigma|$

Así, definimos $g_\alpha(\sigma) \in \Gamma(|\sigma|, \mathcal{S})$ como

$$g_\alpha(\sigma) = \begin{cases} \eta_\alpha f(U_\alpha, |\sigma|)\,, & |\sigma| \cap U_\alpha, \\ 0\,, & |\sigma| \setminus U_\alpha, \end{cases}$$

entonces $g_\alpha \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

Además para un $\sigma = (U_0, \ldots, U_q)$ q-simplex

$$\begin{aligned} \delta g_\alpha(\sigma) = {} & \sum_{i=0}^{q} (-1)^i g_\alpha(\sigma_i) \mid_{|\sigma|} \quad \text{donde } \sigma_i = (U_0, \ldots, \widehat{U}_i, \ldots, U_q) \\ = {} & \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \eta_\alpha f(U_\alpha, U_0, \ldots, \widehat{U}_i, \ldots, U_q) + \eta_\alpha f(U_0, \ldots, U_q) - \eta_\alpha f(U_0, \ldots, U_q) \\ = {} & \eta_\alpha f(\sigma) - \delta \eta_\alpha f \\ = {} & \eta_\alpha f(\sigma) - \eta_\alpha \delta f \\ = {} & \eta_\alpha f(\sigma), \end{aligned}$$

entonces $\delta g_\alpha = \eta_\alpha f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

Defino $g = \sum_\alpha g_\alpha$, como $\mathcal{U}$ es localmente finita y

$$\delta g = \delta \sum_\alpha g_\alpha = \sum \delta g_\alpha = \sum_\alpha \eta_\alpha f = f$$

se concluye que $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = 0$. □

4.7. Resoluciones finas. Isomorfismos de de Rham y de Dolbeault

Definición 4.7.1 .- Sea $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre el espacio topológico M. Una **resolución fina** del haz $\mathcal{S}$ es una secuencia exacta de haces de grupos abelianos de la forma:

$$O \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

donde los haces $\mathcal{R}_i$ para $i = 0, 1, \ldots$ son haces finos.

Observación 4.8 .

1. Para cada homomorfismo d_i, tenemos un homomorfismo inducido de grupos de secciones sobre un abierto $U \subseteq M$,

$$d_i^* : \Gamma(U, \mathcal{R}_i) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{R}_{i+1}),$$

pero en general la secuencia de secciones inducida no es exacta.

2. Para todo haz posee una resolución fina.

Teorema 4.7.1 *(Teorema de Resolución).-* Sea M un espacio topológico de Hausdorf paracompacto. Si tenemos una resolución fina del haz $\mathcal{S}$ sobre M como en la Definición 4.7.1, entonces

$$H^q(M, \mathcal{S}) \cong H_s^q(M, \mathcal{S}) \cong Kerd_q^*/Imd_{q-1}^* \, , \forall \, q > 0 \, .$$

Prueba. $\mathcal{K}_i = Kerd_i \subseteq \mathcal{R}_i$, para $i = 0, 1, \ldots$, entonces de la definición anterior tenemos la siguiente secuencia exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{K}_1 \longrightarrow 0 \, , \tag{4.1}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{R}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{K}_{i+1} \longrightarrow 0 \, , \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{4.2}$$

Aplicando el Teorema 4.5.1 a (4.1), tenemos la siguiente secuencia exacta.

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(M, \mathcal{R}_0) \xrightarrow{d_0^*} H^{q-1}(M, \mathcal{K}_1) \xrightarrow{\delta^*} H^q(M, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(M, \mathcal{R}_0) \longrightarrow \cdots \tag{4.3}$$

Como $\mathcal{R}_0$ es fino y $q > 0$, entonces por el Teorema 4.6.1 se tiene que $H^q(M, \mathcal{R}_0) = 0$, $\forall \, q > 0$, en particular de la ecuación (4.3) para $q = 1$ tenemos que δ^* induce el isomorfismo $\dfrac{H^0(M, \mathcal{K}_1)}{Imd_0^*} \cong H^1(M, \mathcal{S})$ y además $H^0(M, \mathcal{K}_1) = Kerd_1^*$, entonces

$$\frac{Kerd_1^*}{Imd_1^*} \cong H^1(M, \mathcal{S}).$$

Si $q > 1$ entonces

$$H^{q-1}(M, \mathcal{K}_1) = H^q(M, \mathcal{S}). \tag{4.4}$$

Aplicando el Teorema 4.5.1 a (4.2), tenemos la siguiente secuencia exacta

$$\cdots \longrightarrow H^q(M, \mathcal{R}_i) \xrightarrow{d_i^*} H^q(M, \mathcal{K}_i) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(M, \mathcal{K}_i) \longrightarrow H^{q+1}(M, \mathcal{R}_i) \longrightarrow \cdots \tag{4.5}$$

Como $\mathcal{R}_i$ es fino, tenemos Si $q=0$, entonces

$$\frac{Ker\, d^*_{i+1}}{Im\, d^*_i} \cong H^1(M,\mathcal{K}_i),\ i=0,1,\ldots \tag{4.6}$$

Si $q>0$, entonces

$$H^q(M,\mathcal{K}_{i+1}) \cong H^{q+1}(M,\mathcal{K}_i),\ i=0,1,\ldots, \tag{4.7}$$

Aplicando sucecivamente la ecuación (4.7) tenemos

$$\begin{aligned} H^{q-1}(M,\mathcal{K}_1) &= H^{q-2}(M,\mathcal{K}_2), \quad q>2,\\ &= H^{q-3}(M,\mathcal{K}_3), \quad q>3,\\ &= \quad \vdots \\ &= H^1(M,\mathcal{K}_{q-1}), \quad q>q-1. \end{aligned}$$

Finalmente usando la ecuación (4.4) y la ecuación (4.6) para $i=q-1$ se tiene el resultado. De modo análogo se tiene para las alternadas, luego se concluye la prueba. □

Corolario 4.7.1 .- Sea M un espacio topológico de Hausdoff paracompacto y

$$O \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} \longrightarrow O$$

una secuencia exacta de haces sobre M.

Si $H^1(M,\mathcal{S})=0$, entonces $H^1(M,\mathcal{R}) \cong \Gamma(M,\mathcal{T})/\psi(\Gamma(M,\mathcal{S}))$.

Teorema 4.7.2 .- Si M es una variedad topológica de dimensión n y $\mathcal{S}$ es un haz de grupos abelianos entonces $H^q(M,\mathcal{S})=0$,$\forall\, q \geq n+1$.

Veamos el siguiente resultado topológico.

Proposición 4.7.1 .- Sea M una variedad topológica de dimensión n. Si $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cobertura abierta de M entonces existe un refinamiento $\mathcal{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in\Omega}$ de $\mathcal{U}$ tal que cada punto de $p\in M$ pertenece a $n+1$ elementos de $\mathcal{V}$ como máximo, i.e., $V_{\beta_0,\ldots,\beta_q}=\emptyset$, para todo $q\geq n+1$.

Prueba. Ver [11] página 24.

Prueba del Teorema 4.7.2. De la Proposición 4.7.1 se tiene que $H^q_s(M,\mathcal{S})=0\ \forall\, q\geq n+1$ pero sabemos que $H^q(M,\mathcal{S})\cong H^q_s(M,\mathcal{S})$ para todo q. Luego se concluye el Teorema. □

4.7.1. Cohomología de de Rham

Definición 4.7.2 .- Sea M^m una variedad compleja. El **q-ésimo grupo de Cohomología de DeRham** es definido como:

$$H^q_{dR}(M) := \frac{Ker(\ \Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M)\ )}{Im(\ \Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M)\ )}\,,$$

donde $\Omega^q(M)$ es el espacio de q-formas diferenciables y d es el operador derivada exterior.

Teorema 4.7.3 *(Teorema de de Rham).- $H^q(M,\mathbb{C}) \cong H^q_{dR}(M)$.*

Prueba. De la siguiente secuencia de haces

$$O \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Omega^0_M \xrightarrow{d} \Omega^1_M \xrightarrow{d} \Omega^2_M \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^m_M \longrightarrow O,$$

por el Lema de Poincaré, ver [8], página 70 (nos dice que una forma cerrada es localmente exacta), resulta que esta secuencia es exacta. Luego por el Teorema de Resolución

$$H^q(M,\mathbb{C}) \cong \frac{Ker(\ \Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M)\ )}{Im(\ \Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M)\ )} = H^q_{dR}(M)\,.$$

$\square$

4.7.2. Cohomología de Dolbeault

Definición 4.7.3 .- Sea M^m una variedad compleja. El (p,q)-ésimo grupo de Cohomología de Dolbeault es definido como:

$$H^{p,q}_{Dolb}(M) := \frac{Ker(\ \Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q+1}(M)\ )}{Im(\ \Omega^{p,q-1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q}(M)\ )}\,,$$

donde $\Omega^{p,q}(M)$ es el espacio de (p,q)-formas diferenciables y $\overline{\partial}$ es el operador diferencial conjugado.

Teorema 4.7.4 *(Teorema de Dolbeault).- $H^q(M,\mathcal{O}^{p,0}) \cong H^{p,q}_{Dolb}(M)$.*

Prueba. De la siguiente secuencia de haces

$$O \longrightarrow \mathcal{O}^{p,0} \longrightarrow \Omega^{p,0}_M \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1}_M \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,2}_M \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{p,m}_M \longrightarrow O$$

Por el Lema de Dolbeault, ver [8] página 74 (nos dice que toda $(p,\, q)$-forma $\overline{\partial}$-cerrada es localmente $\overline{\partial}$-exacta), resulta que esta secuencia es exacta. Luego por el Teorema de Resolución

$$H^q(M, \mathcal{O}^{p,\,0}) \cong \frac{Ker(\ \Omega^{p,\,q}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,\,q+1}(M)\ )}{Im(\ \Omega^{p,\,q-1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,\,q}(M)\ )} = H^{p,\,q}_{Dolb}(M)\,.$$

□

4.7.3. Teorema de Mittag-Leffler

Considere D un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Introducimos sobre el espacio $C^\infty(D)$ los operadores diferenciales parciales de primer orden

$$\frac{\partial}{\partial\, z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\, x} - i\frac{\partial}{\partial\, y})\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\, \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\, x} + i\frac{\partial}{\partial\, y})\,.$$

Notar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann para una función compleja valorada f puede ser escrita como $\partial\, f/\partial\, \overline{z} = 0$; esto quiere decir que, dada una función $f \in C^\infty(D)$, entonces $f \in \mathcal{O}(D)$ si y sólo si $\partial\, f/\partial\, \overline{z} = 0$. La aplicación $f \to \partial\, f/\partial\, \overline{z}$ es un homomorfismo del anillo $C^\infty(D)$ sobre sí mismo, y así, esta aplicación induce el homomorfismo de haces

$$\overline{\partial} : \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}^\infty.$$

La condición de Cauchy-Riemann nos dice que el Kernel de este homomorfismo es precisamente el haz $\mathcal{O}$ de germenes de funciones holomorfas sobre D; así tenemos la siguente secuencia exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{C}^\infty\,.$$

Proposición 4.7.2 .- Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f \in C^\infty(D)$. Entonces existe $g \in C^\infty(D)$ tal que $\partial\, g/\partial\, \overline{z} = f$.

Prueba. Primer caso. Supongamos que f tiene soporte compacto en D, luego definimos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(z+w)}{w}\, dw \wedge d\overline{w}.$$

Entonces $g \in C^\infty(\mathbb{C})$ y $\partial\, g/\partial\overline{z} = f$. Primero, para ver que $g \in C^\infty(\mathbb{C})$, observemos que $1/|w|$ es integrable sobre cualquier compacto de $\mathbb{C}$, (basta expresar en coordenadas polares en 0), así la existencia y continuidad de $\partial\, g/\partial\, x$ se sigue del hecho que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{f(z+h+w) - f(z+w)}{h}\right)\frac{1}{w}\, dw \wedge d\overline{w} = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\, f}{\partial\, x}(z+w)\frac{1}{w}\, dw \wedge d\overline{w}$$

como f tiene soporte compacto, entonces $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$. Iterando tenemos este argumento. Si $\epsilon > 0$

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|w|\geq \epsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z+w) \frac{1}{w}\, dw \wedge d\overline{w}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \int_{|w|\geq \epsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z+w)\frac{1}{w}\, dw \wedge d\overline{w} &= \int_{|w|\geq \epsilon} \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\left(\frac{f(z+w)}{w}\right) dw \wedge d\overline{w} \\ &= -\int_{|w|\geq \epsilon} d\left(\frac{f(z+w)}{w}\right) \end{aligned}$$

Por el Teorema de Stokes, tenemos que

$$= \int_{|w|=\epsilon} \frac{f(z+w)}{w}\, dw = 2\pi i f(z) + \int_{|w|=\epsilon} \frac{f(z+w)-f(z)}{w}\, dw.$$

ya que $(f(z+w)-f(z))/w$ es acotado como función de w, esta última integral $\to 0$ cuando tienda a 0, y se tiene el resultado. Si ahora $f \in C^\infty(D)$, si aplicamos este caso especial a la función rf con $r \in C^\infty(\mathbb{C})$ tal que $r = 1$ en K, $r = 0$ en $\mathbb{C}\backslash D$ donde $K \subseteq D$ un compacto, obtenemos lo siguiente:

Si $f \in C^\infty(D)$ y $K \subseteq D$ es compacto, entonces existe $g \in C^\infty(D)$ tal que $\partial g/\partial \overline{z} = f$ sobre K.

Caso general. Considere una secuencia de dominios $D_n \subseteq D$ con las siguientes propiedades:

1. $\overline{D}_n$ es compacto, y $\overline{D}_n \subseteq D_{n+1}$,
2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$,
3. Cualquier función holomorfa sobre D_{n-1} puede ser aproximada uniformemente sobre $\overline{D}_{n-2} \subseteq D_{n-1}$ por funciones holomorfas sobre D_n.

(La última condición se sigue del Teorema de Aproximación de Runge, Ver [13], página 104).

Ahora, por inducción sobre n, se tiene que existe una secuencia de funciones g_n con las siguientes propiedades:

I. g_n es $C^\infty(D)$,

II. $\dfrac{\partial g_n}{\partial \overline{z}}(z) = f$, $\forall\, z \in D_n$,

III. $|g_n(z) - g_{n-1}(z)| < 2^{-n}$, $\forall\, z \in \overline{D}_{n-2}$.

En efecto, supongamos que tenemos $g_1, ..., g_{n-1}$. Por el caso anterior, existe $h_n \in C^\infty(D)$ tal que $\frac{\partial h_n}{\partial \bar{z}}(z) = f(z)$, $\forall\, z \in D_n$. En caso $n = 0$ ó $n = 1$, no hay nada que probar. En caso $n \geq 2$, las funciones h_n y g_{n-1} son $C^\infty(D_{n-1})$, y $\frac{\partial(h_n - g_{n-1})}{\partial \bar{z}}(z) = 0$, $\forall\, z \in D_{n-1}$; es decir, $h_n(z) - g_{n-1}(z)$ es holomorfa en D_{n-1}. Entonces existe $h(z)$ holomorfa en D_n tal que $|h_n(z) - g_{n-1}(z) - h(z)| < 2^{-n}$, $\forall\, z \in \overline{D}_{n-2}$, por la propiedad (3). La función $g_n = h_n - h$ satisface las condiciones deseadas.

Ahora, para cualquier $z \in D$, la secuencia $\{g_n(z)\}_n$ es convergente y converge a la función $g(z)$. A su vez, para $z \in D_n$,

$$g(z) = g_{n+2}(z) + \sum_{m=n+2}^{\infty} (g_{m+1}(z) - g_m(z)).$$

ya que $|g_{m+1}(z) - g_m| < 2^{-m}$, $\forall\, z \in D_n \subseteq D_{m-2}$, $m \geq n+2$, por (III) la serie converge uniformemente y absolutamente en D_n; y desde que los terminos de la serie son holomorfas en D_n por (II), la suma es también holomorfa. De ahí $g(z)$ es $C^\infty(D_n)$; y $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial g_{n+2}}{\partial \bar{z}} = f(z)$ en D_n. Esto concluye la prueba. $\square$

Corolario 4.7.2 .- Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. La siguiente secuencia de haces de grupos abelianos sobre D

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{C}^\infty \longrightarrow 0$$

es exacta.

Corolario 4.7.3 .- Sea M una superficie de Riemann. Entonces la siguiente secuencia de haces sobre M

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,1} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Corolario 4.7.4 .- Sea M una superficie de Riemann. Entonces

$$H^1(M, \mathcal{O}) \simeq H^0(M, \Omega^{0,1})/\partial\, H^0(M, \mathcal{C}^\infty) \quad \text{y} \quad H^q(M, \mathcal{O}) \simeq 0, \quad \forall\, q \geq 2.$$

Prueba. Del Corolario 4.7.3 tenemos la siguiente secuencia exacta sobre M

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,1} \longrightarrow 0.$$

Luego, aplicando el Teorema de Resolución y del hecho que $\mathcal{C}^\infty$ y $\Omega^{0,1}$ son hace finos, tenemos que:

$$\begin{cases} H^1(M,\mathcal{O}) & \simeq & H^0(M,\Omega^{0,1})/\partial\, H^0(M,\mathcal{C}^\infty)\ , \text{ y} \\ H^q(M,\mathcal{O}) & \simeq & 0, \quad \forall\, q \geq 2. \end{cases}$$

□

Teorema 4.7.5 *(Teorema de Mittag-Leffler).*- Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. Entonces

$$H^1(D,\mathcal{O}) = 0.$$

Prueba. Aplicando el Corolario 4.7.4 y la Proposición 4.7.2 tenemos que:

$$H^1(D,\mathcal{O}) = 0.$$

□

4.8. Coberturas acíclicas. Teorema de Leray.

Definición 4.8.1 .- Sea $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre M un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ una cobertura abierta sobre M.

1. Decimos que $\mathcal{U}$ es una cobertura de **Leray** ó **acíclica** para el haz $\mathcal{S}$ si $H^q(|\,\sigma|,\mathcal{S}) = 0$, $\forall\,\sigma$ n-simplex, $\forall\, q \geq 1$,$\forall\, n \geq 0$.

2. Decimos que $\mathcal{U}$ es una cobertura de **Leray de orden** q para el haz $\mathcal{S}$ si $H^q(|\sigma|,\mathcal{S}) = 0$, $\forall\,\sigma$ $(q-1)$-simplex.

Teorema 4.8.1 *(Teorema de Leray).*- Sea $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre M un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ una cobertura abierta de Leray sobre M. Entonces

$$H^q(M,\mathcal{S}) \cong H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}),\ \forall q \geq 0.$$

Prueba. Es claro el homomorfismo $H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to H^q(M,\mathcal{S})$

De la Observación 4.8 se tiene que existe una resolución fina

$$O \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{R}_2 \longrightarrow \cdots$$

del haz $\mathcal{S}$ sobre M.

Del Teorema de Resolución se tiene que

$$H^q(M, \mathcal{S}) \cong \frac{Kerd_q^*}{Imd_{q-1}^*} \quad , \forall\, q \geq 0\,, \tag{4.8}$$

donde $d_i^* : \Gamma(M, \mathcal{R}_i) \to \Gamma(M, \mathcal{R}_{i+1}) \quad \forall\, i \geq 0.$

Pero $H^q(|\sigma|, \mathcal{S}) = 0$, $\forall q \geq 1$ entonces

$$O \longrightarrow \Gamma(|\sigma|, \mathcal{S}) \xrightarrow{\varphi^*} \Gamma(|\sigma|, \mathcal{R}_0) \xrightarrow{d_0^*} \Gamma(|\sigma|, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{d_1^*} \cdots$$

es exacta por (4.8): $Kerd_i^* = Imd_{i-1}^*$, $\forall i \geq 1$ y φ^* es inyectiva. Luego pasando a q-cocadenas tenemos

$$0 \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\varphi^*} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{R}_0) \xrightarrow{d_0^*} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{d_1^*} \cdots \tag{4.9}$$

una secuencia exacta de grupos de cocadenas. Finalmente tenemos el siguiente diagrama y teniendo en cuenta que el operador coborde conmuta con los homomorfismos de grupos de cocadenas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(M, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(M, \mathcal{R}_0) & \xrightarrow{d_0} & \Gamma(M, \mathcal{R}_1) & \xrightarrow{d_1} & \Gamma(M, \mathcal{R}_2) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\
0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\varphi} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{R}_0) & \xrightarrow{d_0} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{R}_1) & \xrightarrow{d_1} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{R}_2) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \\
0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\varphi} & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{R}_0) & \xrightarrow{d_0} & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{R}_1) & \xrightarrow{d_1} & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{R}_2) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \\
0 & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\varphi} & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{R}_0) & \xrightarrow{d_0} & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{R}_1) & \xrightarrow{d_1} & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{R}_2) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \tag{4.10}$$

De la exactitud de (4.9), todas las flechas excepto la primera son exactas. Como todos los haces $\mathcal{S}_i$ son finos, todas las columnas excepto la primera son secuencias exactas, por el Teorema de Resolución .

Afirmación.

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = \frac{Ker(\ C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S})\ )}{Im(\ C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})\ )} \cong \frac{Ker(\ \Gamma(M,\mathcal{S}_q) \xrightarrow{d_q} \Gamma(M,\mathcal{S}_{q+1})\ )}{Im(\ \Gamma(M,\mathcal{S}_{q-1}) \xrightarrow{d_{q-1}} \Gamma(M,\mathcal{S}_q)\ )}$$

y aplicando el Teorema de Resolución concluimos $H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \cong H^q(M,\mathcal{S}) \quad \forall\, q \geq 1$.

Probemos la afirmación, para $q = 1$, si $f \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{S})$, como $\delta\varphi f = 0$, de la exactitud de la segunda columna tenemos que existe un $g \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{S})$ tal que $\delta g = \varphi f$.

Como $\delta d_0 g = d_0\delta g = d_0\varphi f = 0$, por la exactitud de la tercera columna existe un $h \in \Gamma(M,\mathcal{S}_1)$ tal que $ih = d_0 g$.

De la inyectividad de i y $id_1h = d_1ih = d_1d_0g = 0$ se tiene que $d_1h = 0$, i.e., $h \in Kerd_q$. Luego tenemos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \longrightarrow & \dfrac{Kerd_q}{Imd_{q-1}} \\ [f] & \longmapsto & [h] \end{array}$$

La aplicación esta bien definida, ya que si $g' \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{S})$ tal que $\delta g' = \varphi f = \delta g$. Como $\delta(g-g') = 0$ entonces existe un $h_0 \in \Gamma(M,\mathcal{S}_0)$ tal que $ih_0 = g - g'$. Sea $h' \in \Gamma(M,\mathcal{S}_1)$ tal que $ih' = d_0g'$. Observemos que

$$i(h - h' - d_0h_0) = d_0g - d_0g' - d_0ih_0 = d_0g - d_0g' - d_0(g-g') = 0.$$

De la inyectividad de i se tiene que $h = h' + d_0h_0$, i.e., $[h] = [h']$. Sea $f \in B^1(\mathcal{U},\mathcal{S})$ entonces existe un $f_0 \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{S})$ tal que $f = \delta f_0$. Como $\delta(d_0\varphi f_0) = \delta(0) = 0$ entonces de la exactitud de la secuencia de la tercera columna se tiene que i(h=0)=0. Luego se prueba que es un homomorfismo y de la misma manera un isomorfismo. Para terminar observar que este isomorfismo es en realidad el homomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \longrightarrow & H^q(M,\mathcal{S}) \\ [f] & \longmapsto & \overline{[f]} \end{array}$$

Si (4.10) es visto de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (1,1) & \xrightarrow{\varphi} & (1,2) & \xrightarrow{d_0} & (1,3) & \xrightarrow{d_1} & (1,4) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\
0 & \longrightarrow & (2,1) & \xrightarrow{\varphi} & (2,2) & \xrightarrow{d_0} & (2,3) & \xrightarrow{d_1} & (2,4) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \\
0 & \longrightarrow & (3,1) & \xrightarrow{\varphi} & (3,2) & \xrightarrow{d_0} & (3,3) & \xrightarrow{d_1} & (3,4) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \\
0 & \longrightarrow & (4,1) & \xrightarrow{\varphi} & (4,2) & \xrightarrow{d_0} & (4,3) & \xrightarrow{d_1} & (4,4) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

entonces para $q = 1$ el homomorfismo es obtenido de la secuencia

$$(3,1) \to (3,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (1,3).$$

Para $q = 2$ tenemos la secuencia

$$(4,1) \to (4,2) \to (3,2) \to (3,3) \to (2,3) \to (2,4) \to (1,4).$$

En el caso general para q la secuencia es

$$(q+2,1) \to (q+2,2) \to (q+1,2) \to (q+1,3) \to (q,3) \to (q,4) \to \cdots$$

$$\cdots \to (4,q) \to (3,q) \to (3,q+1) \to (2,q+1) \to (2,q+2) \to (1,q+2).$$

□

Corolario 4.8.1 .- Sea $\mathcal{S}$ un haz de grupos abelianos sobre M un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ una cobertura abierta de Leray de orden q sobre M.

Entonces

$$H^q(M, \mathcal{S}) \cong H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}).$$

Prueba. Se sigue de la prueba del Teorema 4.8.1. □

Corolario 4.8.2 .- Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son coberturas de Leray de un espacio topológico Hausdorff paracompacto M para el haz $\mathcal{S}$, y $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es un aplicación de refinamiento entonces la aplicación inducida $\mu^* : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ es un isomorfismo.

Prueba. Por el Teorema 4.8.1 las homomorfismos naturales $r_{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^q(M, \mathcal{S})$, $r_{\mathcal{V}} : H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \to H^q(M, \mathcal{S})$ son isomorfismos y como $r_{\mathcal{V}} \circ \mu^* = r_{\mathcal{U}}$ tenemos que μ^* es un isomorfismo. $\square$

Corolario 4.8.3 .- Si $\mathcal{U}$ es una cobertura abierta para el espacio topológico de Hausdorff paracompacto M, la aplicación $\mu : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^1(M, \mathcal{S})$ es inyectiva.

Ejemplo 4.3

1. $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

   Sea $U_1 := \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}_-$ y $U_2 := \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}_+$, donde $\mathbb{R}_-$ y $\mathbb{R}_+$ denotan los ejes reales negativo y positivo respectivamente. Entonces $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ es una cobertura de Leray de orden 1 ya que $H^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0$ como U_i es un conjunto estrellado y por tanto simplemente conexo. Entonces por Corolario 4.8.1 $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) = H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. Ya que cualquier cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ cumple que $f_{ii} = 0$ y $f_{ij} = -f_{ji}$, i.e., está determinado solo por f_{12}, entonces $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}(U_1, U_2)$. Pero la intersección de $U_1 \cap U_2$ tiene dos componentes conexas, entonces $\mathbb{Z}(U_1 \cup U_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Como U_i es conexo, $\mathbb{Z}(U_i) \cong \mathbb{Z}$ y $C^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El operador coborde

   $$\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \longrightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

   es dado con respecto a estos isomorfismos por

   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & (a_2 - a_1, a_2 - a_1) \end{array}$$

   Entonces los cobordes son exactamente el subgrupo $B \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de estos elementos (a_1, a_2) con $a_1 = a_2$. Entonces $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/B \cong \mathbb{Z}$.

2. Análogamente $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

3. Siguiendo la misma idea se tiene que $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$, donde $X = \mathbb{C} \backslash \{p_1, ..., p_n\}$ y $p_1, ..., p_n$ son puntos distintos de $\mathbb{C}$.

4. $H^1(\overline{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$

Sea $U_1 := \overline{\mathbb{C}} \backslash \{\infty\}$ y $U_2 := \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$. Ya que $U_1 = \mathbb{C}$ y U_2 es biholomorfo a $\mathbb{C}$, se sigue que $H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$. Entonces $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ es una cobertura de Leray de primer orden de $\overline{\mathbb{C}}$, luego por Corolario 4.8.1 se tiene que $H^1(M, \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Entonces la prueba es mostrar que cada cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ es un coborde. En otras palabras es encontrar funciones $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tal que $f_{12} = f_1 - f_2$ en $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$.

Sea $f_{12}(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ por la expansión de Laurent de f_{12} sobre $\mathbb{C}^*$. Luego si definimos $f_1(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ y $f_2)(z) := -\sum\limits_{-\infty}^{-1} c_n z^n$. Entonces $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ y $f_1 - f_2 = f_{12}$.

4.8.1. El Haz Rascacielo $\mathbb{C}_{x_0}$

Definición 4.8.2 .- Sea M una superficie de Riemann y x_0 un punto de M. Definimos el haz $\mathbb{C}_{x_0}$ sobre M como

$$(\mathbb{C}_{x_0})_x := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } x = x_0, \\ 0 & \text{si } x \neq x_0. \end{cases}$$

Propiedades 4.7 .

1. $H^0(M, \mathbb{C}_{x_0}) \cong \mathbb{C}$,

2. $H^1(M, \mathbb{C}_{x_0}) = 0$.

Prueba.

1. Es inmediato del isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, \mathbb{C}_{x_0}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(x_0). \end{array}$$

2. Considere un elemento $\xi \in H^1(M, \mathbb{C}_{x_0})$ el cual es representado por un cociclo en $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_p)$. Si tomamos un refinamiento $\mathcal{V}$ de la cobertura $\mathcal{U}$ tal que el punto x_0 esta contenido en solo un elemento de $\mathcal{V}$. Entonces $Z^1(\mathcal{V}, \mathbb{C}_{x_0}) = 0$ y de ahí se tiene que $\xi = 0$, i.e., $H^1(M, \mathbb{C}_{x_0}) = 0$.

□

Pasamos al siguiente capítulo para definir fibrados vectoriales necesario para nuestra versión en fibrados del Teorema de Rieman-Roch.

Capítulo 5

Fibrados Vectoriales

En este capítulo definiremos fibrados vectoriales, secciones de fibrados, isomorfimos de fibrados, luego con la finalidad de probar el Teorema de Riemann- Roch nos centraremos en fibrados lineales holomorfos, volveremos a retomar el haz de divisores sobre una superficie de Riemann y por último probaremos un isomorfismo entre grupo de isomorfismos de fibrados lineales holomorfos sobre una superficie de Riemann y el primer grupo de cohomología del haz $\mathcal{O}^*$.

5.1. Definiciones Básicas

Definición 5.1.1 .- Un **fibrado vectorial complejo (o diferenciable)** de rango n sobre M es un objeto diferenciable compuesto de:

1. Una variedad compleja (diferenciable) E, llamado el **espacio total**.
2. Una variedad compleja (diferenciable) M, llamado el **espacio base**.
3. Una aplicación holomorfa (diferenciable) sobreyectiva $p : E \to M$, llamada la **proyección**.
4. Una cobertura abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\wedge}$ sobre M, donde los abiertos son llamados **vecindades coordenadas del fibrado**, los cuales "trivializan.[el] fibrado a través de biholomorfismos (difeomorfismos) $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ (ó $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$) en el sentido de que el siguiente

diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & U_\alpha \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd}$$

Las aplicaciones $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \to U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n$ donde $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ son llamados **funciones de transición** del fibrado. En vista de la condición de arriba sobre φ_α, la aplicación $\varphi_{\alpha\beta}$ tiene la forma

$$\varphi_{\alpha\beta}(x, y) = (x, g_{\alpha\beta}(x)y).$$

Además se requiere que $g_{\alpha\beta} \in GL_n(\mathbb{C})$.

En el caso que el fibrado vectorial sea de rango uno será llamado simplemente **fibrado lineal**. En el caso que los $g_{\alpha\beta}$ son holomorfas $\forall\, \alpha, \beta$ el fibrado es llamado **fibrado vectorial holomorfo**.

Observación 5.1

1. Cada fibra $E_x = p^{-1}(x)$ tiene estructura de espacio vectorial complejo (ó real) de dimensión n inducido por sus trivializaciones locales y esta bien definido porque los cambios son isomorfos.

2. En resumen un fibrado vectorial complejo (ó diferenciable) de rango n consta de $(E, M, p, \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n\}_{\alpha\in\Lambda})$, para simplificar la notación simplemente diremos fibrado vectorial a la aplicación $p : E \to M$.

3. De la Definición 5.1.1 se tiene que las funciones transiciones cumplen las siguientes propiedades (condiciones de cociclo):

$$\begin{cases} (g_{\alpha\beta}(x))^{-1} = g_{\beta\alpha}(x)\,, & \forall x \in U_{\alpha\beta}, \\ g_{\alpha\beta}(x).g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)\,, & \forall x \in U_{\alpha\beta\gamma}. \end{cases}$$

Ejemplo 5.1 .

1. El **Fibrado Trivial**. $E = M \times \mathbb{C}^n$ junto con la proyección a la primera coordenada es un fibrado con una sola trivialización.

2. El **Fibrado Tangente** de una variedad.

a) M^n variedad diferenciable.

b) TM fibrado tangente de M.

c) $p : TM \to M$ proyección natural ($p^{-1}(x) = T_xM \simeq \mathbb{R}^n$).

d) $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in\wedge}$ atlas de M.

e) $T\mathcal{A} = \{T\varphi_\alpha, p^{-1}(U_\alpha, V_\alpha \times \mathbb{R}^n)\}_{\alpha\in\wedge}$ atlas de TM donde

$$\begin{array}{rcl} T\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & V_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) & \longmapsto & (\varphi_\alpha(x), d(\varphi_\alpha)_x.v), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \quad \text{difeomorfismo} \\ (x, v) & \longmapsto & (x, d(\varphi_\alpha)_x.v), \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd}$$

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, y) = (x, d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_{\varphi_\beta(x)}.y) \quad \text{en } U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n,$$

con cociclo:

$$\begin{array}{rcl} g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} & \to & GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{(diferenciable)} \\ x & \mapsto & g_{\alpha\beta}(x) := d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_{\varphi_\beta(x)}. \end{array}$$

Así $p : M \to TM$ es un fibrado vectorial diferenciable con rango n.

5.2. Secciones de un fibrado

Definición 5.2.1 .- Sea $p : E \to M$ un fibrado vectorial.

1. Una aplicación diferenciable $\sigma : M \to E$ es llamada **sección** del fibrado si $\sigma(x) \in E_x = p^{-1}(x)$, $\forall x \in M$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "id"'] & M \end{tikzcd}$$

2. El espacio de secciones del fibrado sobre M será denotado por $\Gamma(M, E)$.

Ejemplo 5.2 .

1. La sección nula de un fibrado vectorial definido como:
$$\begin{aligned} O_M : M &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto 0_x \in E_x. \end{aligned}$$

2. **Campo vectorial**. Una sección del fibrado tangente TM es llamado campo vectorial.

Observación 5.2

1. Toda sección $\sigma : M \to E$ es un encaje por ser localmente el gráfico de una función.

2. Localmente en cada vecindad coordenada del fibrado se tiene la siguiente correspondencia:
$$\begin{aligned} \Gamma(U_\alpha, E) &\longrightarrow C(U_\alpha, \mathbb{C}^n) \;\; (\text{ó } C(U_\alpha, \mathbb{R}^n)) \\ \sigma &\longmapsto \pi_2 \circ \varphi_\alpha \circ \sigma. \end{aligned}$$
Es decir, $\varphi_\alpha \circ \sigma(x) = (x, \sigma_\alpha(x))$ donde $\sigma_\alpha = \pi_2 \circ \varphi_\alpha \circ \sigma$. Si $x \in U_{\alpha\beta}$ entonces
$$(x, \sigma_\alpha(x)) = \varphi_\alpha \circ \sigma(x) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \sigma)(x) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \sigma_\beta(x)) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\sigma_\beta(x))$$
de ahí tenemos la siguiente relación que determina una sección
$$\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\sigma_\beta \quad \text{en } U_{\alpha\beta}.$$

3. Recíprocamente, en caso exista una familia $\{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\sigma_\beta$ en $U_{\alpha\beta}$ $\forall\, \alpha, \beta \in \Lambda$, podemos construir una sección global $\sigma : M \to E$ definido como:
$$\sigma_{|U_\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}(x, \sigma_\alpha(x)),$$
pues $\varphi_\beta^{-1}(x, \sigma_\beta(x)) = \varphi_\alpha^{-1}(x, \sigma_\alpha(x))$ en $U_{\alpha\beta}$, ya que
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \sigma_\beta(x)) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\sigma_\beta(x)) = (x, \sigma_\alpha(x)).$$

Definición 5.2.2 .- Sea M una superficie de Riemann y $p : E \to M$ un fibrado lineal holomorfo.

1. Una sección $\sigma : M \to E$ se dice **holomorfa** si para cada trivialización local $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ la aplicación $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

2. Una sección holomorfa $\sigma : M \backslash M' \to E$ se dice **sección meromorfa** sobre M si:

   a) M' es un subconjunto discreto de M.

   b) σ tiene un polo en cada $x \in M'$.

5.3. Equivalencia entre fibrados vectoriales

Definición 5.3.1 .- Sean $p : E \to M$ y $p' : E' \to M$ fibrados vectoriales sobre M.

1. Decimos que $h : E \to E'$ es una **aplicación fibrada** si:

   a) El diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

   conmuta.

   b) $h : E_x \to E'_x$ es una aplicación lineal para todo $x \in M$.

2. Decimos que $h : E \to E'$ es un **isomorfismo fibrado** si:

   a) El diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

   conmuta.

   b) $h : E_x \to E'_x$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in M$.

Observación 5.3

1. Si $h : E \to E'$ es una aplicación fibrada y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cobertura abierta de M que trivializan E y E' a la vez. Luego tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\psi_\alpha \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}"'] & p^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "h"] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\psi_\beta \circ h \circ \varphi_\beta^{-1}"] \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^m & p'^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\psi_\alpha"'] \arrow[r, "\psi_\beta"] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

   entonces existe una familia $\{f_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que

$$\psi_\alpha \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, f_\alpha(x).y),\, ,\ \forall\, x \in U_\alpha, \forall\, y \in \mathbb{C}^n,$$

   entonces

$$\begin{aligned} (\psi_\alpha \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, y) &= (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ h \circ \varphi_\beta^{-1})(x, y) \\ \psi_\alpha \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, g_{\alpha\beta}(x)y) &= (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, f_\beta(x)y) \\ (x, f_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)y) &= (x, g'_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x)y), \end{aligned}$$

$$\therefore\ f_\alpha\, g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta}\, f_\beta \quad \text{ en } U_{\alpha\beta}\ \forall\, \alpha, \beta.$$

2. Recíprocamente, en caso exista una familia $\{f_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $f_\alpha g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta} f_\beta$ en $U_{\alpha\beta}$ podemos construir una aplicación fibrada $h : E \to E'$ definiendo como $h_{|U_\alpha} = \psi_\alpha^{-1} \circ h_\alpha \circ \varphi_\alpha$ donde $h_\alpha(x, y) = (x, f_\alpha(x)y)$, la cual esta bien definido pues en $U_{\alpha\beta}$ tenemos la identidad $\psi_\alpha^{-1} \circ h_\alpha \circ \varphi_\alpha = \psi_\beta^{-1} \circ h_\beta \circ \varphi_\beta$ ya que

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} \circ h_\beta(x, y) = (x, g'_{\alpha\beta}(x) f_\beta(x) y) = (x, f_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x)) = h_\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, y).$$

Definición 5.3.2 .- Decimos que $p : E \to M$ un fibrado vectorial de rango n es **trivial** si es isomorfo a $M \times \mathbb{C}^n$.

Así, un fibrado vectorial es trivial si existen una cobertura abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y una familia $f = \{f_\alpha : U_\alpha \to GL_n(\mathbb{R})\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que el cociclo $g = \{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ es de la forma

$$g_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1}\, f_\beta\,, \quad \text{ en } U_{\alpha\beta}, \quad \forall \alpha,\, \beta \in \Lambda \quad \text{(Condición de coborde)}.$$

Proposición 5.3.1 .- Sea $p : E \to M$ un fibrado vectorial de rango n. Son equivalentes:

1. $p : E \to M$ es trivial.
2. $p : E \to M$ admite n-secciones globales $\sigma^1, \ldots, \sigma^n : M \to E$ linealmente independientes. (i.e., $\{\sigma^1(x), \ldots, \sigma^n(x)\}$ son l.i. $\forall\, x \in M$.)

Prueba.

1. $\Rightarrow$ 2. Tomamos $\varphi : E \to M \times \mathbb{R}^n$ un isomorfismo de fibrados, entonces definimos las secciones globales $\sigma^i(x) = \varphi^{-1}(x, e_i)$, $\forall\, 1 \le i \le n$, que claramente son l.i..

2. $\Rightarrow$ 1. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} M \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x, (y_1, ..., y_n)) & \longmapsto & \Sigma_{k=1}^n y_k \sigma^k(x), \end{array}$$

el cual es el isomorfismo buscado. □

Corolario 5.3.1 .- Sea $p : E \to M$ un fibrado lineal. Entonces el fibrado lineal es trivial si y sólo si existe una sección $\sigma : M \to E$ tal que $\sigma(x) \neq 0\ \forall x \in M$.

Corolario 5.3.2 .- TS^1 y TS^3 fibrados tangente de S^1 (círculo) y S^3 (3-esfera) respectivamente son fibrados vectoriales triviales.

5.4. Algunas construcciones de fibrados

Sean V, W $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensión finita. La suma directa $V \oplus W$ y el producto tensorial $V \otimes W$ son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensión finita, $dim\,(V \oplus W) = dim\,V + dim\,W$ y $dim\,(V \otimes W) = dim\,V\,dim\,W$. Los vectores $v \in V$ y $w \in W$ definen los vectores $v \oplus w \in V \oplus W$ y $v \otimes w \in V \otimes W$. El producto $v \otimes w$ es lineal en cada factor, y el espacio vectorial $V \otimes W$ es generado por elementos de la forma $v \otimes w$. También tenemos el espacio vectorial $Hom\,(V, W)$, cuyos elementos son las aplicaciones lineales(homomorfismos) de V en W. Para cada V $\mathbb{C}$-espacio vectorial se define el espacio vectorial dual de V denotado por V^*, cuyos elementos son las formas lineales, i.e., $V^* = Hom\,(V, \mathbb{C})$, así $dim\,V^* = dim\,V$. El $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\Lambda^k(V)$ es el espacio de las k-formas lineales alternadas. Si $dim\,V = n$ entonces $dim\,\Lambda^k(V) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Observar que $V^* \otimes W \simeq Hom(V, W)$, $(V^*)^* \simeq V$ y $\Lambda^k(V) \otimes W \simeq \Lambda^k(V, W)$ donde $\Lambda^k(V, W)$ esta formado por $\omega : \underbrace{V \times ... \times V}_{k-veces} \to W$ k-lineales alternadas.

Sean $p : E \to M$ y $p' : E' \to M$ dos fibrados vectoriales de rango n y m respectivamente, y sean $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ y $\varphi'_\alpha : p'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^m$ trivializaciones de E y E' respectivamente con sus cociclos respectivos:

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

$$g'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$$

Pasamos a definir los siguientes fibrados:

1. $E \oplus E'$, suma de Whitney ó suma de fibrados. La fibra de este fibrado vectorial sobre el punto $x \in M$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $E_x \oplus E'_x$, de ahí se tiene que la aplicación proyección $p \oplus p' : E \oplus E' \to M$. Definimos las trivializaciones para el fibrado $E \oplus E'$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha \oplus \varphi'_\alpha : (p \oplus p')^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \\ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) \oplus {\varphi'_\alpha}^{-1}(x, z) & \longleftarrow & (x, y \oplus z), \end{array}$$

además

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_\alpha \oplus \varphi'_\alpha) \circ (\varphi_\beta \oplus \varphi'_\beta)^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m & \longrightarrow & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \\ (x, y \oplus z) & \longmapsto & (x, (g_{\alpha\beta} \oplus g'_{\alpha\beta})(x) y \oplus z), \end{array}$$

donde, $(g_{\alpha\beta} \oplus g'_{\alpha\beta})(x) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix}.$

2. E^*, el dual del fibrado vectorial E. La fibra de este fibrado vectorial sobre el punto $x \in M$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $(E_x)^*$, de ahí se tiene definido la aplicación proyección $p^* : E^* \to M$. Definimos las trivializaciones para el fibrado E^*

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*_\alpha : (p^*)^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^{n*} \\ (\varphi_{\alpha|_{E_x}})^*(y) & \longleftarrow & (x,y), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_\alpha)^* \circ (\varphi^*_\beta)^{-1} : U_{\alpha\beta} \times (\mathbb{C}^n)^* & \longrightarrow & U_{\alpha\beta} \times (\mathbb{C}^n)^* \\ (x,y) & \longmapsto & (x, g^*_{\alpha\beta}(x)y), \end{array}$$

además

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_\alpha)^* \circ (\varphi^*_\beta)^{-1}(x,y) & = & ((\varphi_{\alpha|_{E_x}})^*)^{-1} \circ (\varphi_{\beta|_{E_x}})^*(y) \\ & = & ((\varphi_{\beta}{}^*_{|_{E_x}})^{-1} \circ \varphi_{\alpha}{}^*_{|_{E_x}})^{-1}(y) \\ & = & ((\varphi_{\alpha|_{E_x}} \circ \varphi_{\alpha}{}^{-1}_{|_{E_x}})^*)^{-1}(y) \\ & = & (g^T_{\alpha\beta}(x))^{-1}y, \end{array}$$

así $\quad g^*_{\alpha\beta}(x) = (g^T_{\alpha\beta}(x))^{-1}$.

Notemos que si E es de rango 1, entonces los cociclos de transición de E^* son $g^{-1}_{\alpha\beta}$.

3. $E \otimes E'$, el producto tensorial de fibrados. La fibra de este fibrado vectorial sobre el punto $x \in M$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $E_x \otimes E'_x$, de ahí se tiene definido la aplicación proyección. Definimos las trivializaciones para el fibrado $E \otimes E'$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha \otimes \varphi'_\alpha : (p \otimes p')^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \\ \varphi^{-1}_\alpha(x,y) \otimes \varphi'_\alpha{}^{-1}(x,z) & \longleftarrow & (x, y \otimes z), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_\alpha \otimes \varphi'_\alpha) \circ (\varphi_\beta \otimes \varphi'_\beta)^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m & \longrightarrow & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \\ (x, y \otimes z) & \longmapsto & (x, (g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta})(x) y \otimes z), \end{array}$$

donde $\otimes$ denota el producto KRONECKER de matrices.

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_\alpha \otimes \varphi'_\alpha) \circ (\varphi_\beta \otimes \varphi'_\beta)^{-1}(x, y \otimes z) & = & (\varphi_\alpha \otimes \varphi'_\alpha)(\varphi^{-1}_\beta(x,y) \otimes \varphi'^{-1}_\beta(x,z)) \\ & = & (\varphi_\alpha \otimes \varphi'_\alpha)(\varphi^{-1}_\alpha(x, g_{\alpha\beta}(x)y) \otimes \varphi'_\alpha{}^{-1}(x, g'_{\alpha\beta}(x)z)) \\ & = & (x, g_{\alpha\beta}(x)y \otimes g'_{\alpha\beta}(x)z), \end{array}$$

así $\quad (g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta})(x) y \otimes z = g_{\alpha\beta}(x) y \otimes g'_{\alpha\beta}(x) z$.

Notemos que si E y E' son de rango 1, entonces el fibrado $E \otimes E'$ es de rango 1 con cociclo $g_{\alpha\beta}g'_{\alpha\beta}$.

4. $Hom(E, E')$, homomorfismo de fibrados. La fibra de este fibrado vectorial sobre el punto $x \in M$ es el $\mathbb{C}$-espacio vetorial $Hom(E_x, E'_x)$, de ahí la aplicación proyección $hom(p, p') : Hom(E, E') \to M$ definida de manera natural. Definimos las trivializaciones para el fibrado $Hom(E, E')$

$$\begin{array}{rcl} hom(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha) : (hom(p, p'))^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times Hom(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \\ \varphi'^{-1}_{\alpha|_{E_x}} \circ T \circ \varphi_{\alpha|_{E_x}} & \longleftarrow & (x, T), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (hom(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha)) \circ (hom(\varphi_\beta, \varphi'_\beta))^{-1} : U_{\alpha\beta} \times Hom(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) & \longrightarrow & U_{\alpha\beta} \times Hom(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \\ (x, T) & \longmapsto & (x, hom(g_{\alpha\beta}, g'_{\alpha\beta})(x)T). \end{array}$$

Además

$$\begin{array}{rcl} (hom(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha)) \circ (hom(\varphi_\beta, \varphi'_\beta))^{-1}(x, T) & = & (hom(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha))(\varphi'^{-1}_{\beta|_{E_x}} \circ T \circ \varphi_{\beta|_{E_x}}) \\ & = & (hom(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha))(\varphi'^{-1}_{\alpha|_{E_x}} \circ (g'_{\alpha\beta}(x) \circ T \circ g^{-1}_{\alpha\beta}(x)) \circ \varphi_{\alpha|_{E_x}}) \\ & = & (x, g'_{\alpha\beta}(x) \circ T \circ g^{-1}_{\alpha\beta}(x)), \end{array}$$

así $\quad hom(g_{\alpha\beta}, g'_{\alpha\beta})(x)T = g'_{\alpha\beta}(x) \circ T \circ g^{-1}_{\alpha\beta}(x).$

5. $\Lambda^k(E)$, fibrado de k-formas sobre E. La fibra de este fibrado vectorial sobre el punto $x \in M$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\Lambda^k(E_x)$, de ahí se tiene definido la aplicación proyección $\wedge^k p : \Lambda^k(E) \to M$. Definimos las trivializaciones para el fibrado $\Lambda^k(E)$

$$\begin{array}{rcl} \wedge^k \varphi_\alpha : (\wedge^k p)^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \Lambda^k(\mathbb{C}^n) \\ \varphi_\alpha^{-1}(x, y_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_\alpha^{-1}(x, y_k) & \longrightarrow & (x, y_1 \wedge ... \wedge y_k) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\wedge^k \varphi_\alpha) \circ (\wedge^k \varphi_\beta)^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \Lambda^k(\mathbb{C}^n) & \longleftarrow & U_{\alpha\beta} \times \Lambda^k(\mathbb{C}^n) \\ (x, y_1 \wedge ... \wedge y_k) & \longmapsto & (x, \wedge^k g_{\alpha\beta}(x) y_1 \wedge ... \wedge y_k). \end{array}$$

Además

$$\begin{array}{rcl} (\wedge^k \varphi_\alpha) \circ (\wedge^k \varphi_\beta)^{-1}(x, y_1 \wedge \ldots \wedge y_k) & = & (\wedge^k \varphi_\alpha)(\varphi_\beta^{-1}(x, y_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_\beta^{-1}(x, y_k)) \\ & = & (\wedge^k \varphi_\alpha)(\varphi_\alpha^{-1}(x, g_{\alpha\beta}(x)y_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_\alpha^{-1}(x, g_{\alpha\beta}(x)y_k)) \\ & = & (x, g_{\alpha\beta}(x)y_1 \wedge \ldots \wedge g_{\alpha\beta}(x)y_k), \end{array}$$

así $\quad \wedge^k g_{\alpha\beta}(x) y_1 \wedge \ldots \wedge y_k = g_{\alpha\beta}(x)y_1 \wedge \ldots \wedge g_{\alpha\beta}(x)y_k.$

Notemos que en el caso $k = n$, el fibrado $\wedge^n(E)$ es un fibrado lineal, llamado **determinante** de E y denotado por $det(E)$, los cociclos de este fibrado son $\wedge^n g_{\alpha\beta}(x) = det(g_{\alpha\beta}(x))$.

6. $\Lambda^k(E, E')$, fibrado de k-formas sobre E con valores E'. La fibra de este fibrado vectorial sobre el punto $x \in M$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\wedge^k(E_x, E'_x)$, de ahí se tiene definido la aplicación proyección $\wedge^k(p, p') : \Lambda^k(E) \to M$. Definimos las trivializaciones para el fibrado $\Lambda^k(E, E')$

$$\begin{array}{rcl} \wedge^k(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha) : (\wedge^k(p, p'))^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \Lambda^k(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \\ {\varphi'}^{-1}_{\alpha|_{E_x}} \circ \omega(\varphi_{\alpha|_{E_x}}, \ldots, \varphi_{\alpha|_{E_x}}) & \longleftarrow & (x, \omega), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\wedge^k(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha)) \circ (\wedge(\varphi_\beta, \varphi'_\beta))^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \Lambda^k(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) & \longrightarrow & U_{\alpha\beta} \times \Lambda^k(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \\ (x, \omega) & \longmapsto & (x, \wedge^k(g_{\alpha\beta}, g'_{\alpha\beta})(x)\omega). \end{array}$$

Además

$$\begin{array}{rcl} (\wedge^k(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha)) \circ (\wedge^k(\varphi_\beta, \varphi'_\beta))^{-1}(x, \omega) & = & (\wedge^k(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha))({\varphi'}^{-1}_{\beta|_{E_x}} \circ \omega(\varphi_{\beta|_{E_x}}, \ldots, \varphi_{\beta|_{E_x}})) \\ & = & (\wedge^k(\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha))({\varphi'}^{-1}_{\alpha|_{E_x}} g'_{\alpha\beta}(x) \circ \omega(\varphi_{\alpha|_{E_x}} g^{-1}_{\alpha\beta}(x), \ldots, \varphi_{\alpha|_{E_x}} g^{-1}_{\alpha\beta}(x))) \\ & = & (x, g'_{\alpha\beta}(x) \circ \omega(g^{-1}_{\alpha\beta}(x), \ldots, g^{-1}_{\alpha\beta}(x))), \end{array}$$

así $\quad \wedge^k(g_{\alpha\beta}, g'_{\alpha\beta})(x)\omega = g'_{\alpha\beta}(x) \circ \omega(g^{-1}_{\alpha\beta}(x), \ldots, g^{-1}_{\alpha\beta}(x))$.

Teorema 5.4.1 .- Sean E, E', E'' fibrados vectoriales sobre M. Entonces

$$\begin{array}{ll} (E \oplus E') \oplus E'' = E \oplus (E' \oplus E''), & E \oplus E' = E' \oplus E, \\ (E \otimes E') \otimes E'' = E \otimes (E' \otimes E''), & E \otimes E' = E' \otimes E, \\ (E \oplus E') \otimes E'' = (E \otimes E') \oplus (E' \otimes E''), & \\ (E \oplus E')^* = E^* \oplus E'^*, & (E \otimes E')^* = E^* \otimes E^*, \\ Hom(E, E') = E^* \otimes E', & (E^*)^* = E, \\ \Lambda^k(E, E') = \Lambda^k(E) \otimes E'. & \end{array}$$

Ahora pasamos a retomar el haz de divisores y su relación con los fibrados lineales holomorfos.

5.5. Divisores y fibrados lineales

Sea M una superficie de Riemann. Considere el haz $\mathcal{O}^*$ de germenes de funciones holomorfas no nulas y $\mathcal{M}^*$ el haz de germenes de funciones meromorfas no identicamente nula, en ambos casos la estructura de grupo es multiplicativa, es claro que $\mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{M}^*$.

Definición 5.5.1 .- El haz cociente $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ es llamado el **haz de germenes de divisores** sobre la superficie de Riemann M.

Una sección del haz $\mathcal{D}$ sobre un abierto $U \subseteq M$ será llamado **divisor** sobre el abierto U.

Observación 5.4

1. Notar que un germen de un divisor en un punto $p \in M$, que es, un elemento del tallo $\mathcal{D}_p$, es una clase de equivalencia de funciones meromorfas, donde dos funciones meromorfas son consideradas equivalentes cuando su cociente es holomorfo no nulo entonces una clase de equivalencia consiste de todos los germenes de funciones meromorfas que tienen el mismo orden (el mismo cero ó polo) en el punto $p \in M$.

2. Para cualquier germen $f \in \mathcal{M}_p^*$, la clase de equivalencia de f en $\mathcal{D}_p$ es descrito unicamente por el orden $ord_p(f)$ de la función f en el punto p, i.e., $\mathcal{D}_p$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

3. $\mathcal{D}$ es un haz fino sobre M.

Teorema 5.5.1 *(Teorema de Weierstrass).*- Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es un dominio. Entonces la siguiente secuencia de grupos:

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{i^*} \Gamma(U, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{D^*} \Gamma(U, \mathcal{D}) \longrightarrow 0\ .$$

es exacta.

Prueba. De la secuencia exacta de haces sobre U

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{i} \mathcal{M}^* \xrightarrow{D^*} \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

se tiene asociado una secuencia exacta en cohomología

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{i^*} \Gamma(U, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{D^*} \Gamma(U, \mathcal{D}) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{O}^*) \longrightarrow \cdots$$

De ahí, es suficiente probar que $H^1(U, \mathcal{O}^*) = 0$.

En efecto, de la secuencia exacta de haces sobre U

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \ ,$$

se tiene asociado una secuencia exacta en cohomología

$$H^1(U, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(U, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(U, \mathcal{O}) \ ,$$

Pero como $H^1(U, \mathcal{O}) = H^2(U, \mathcal{O}) = 0$, ya que $U \subseteq \mathbb{C}$ es un dominio, de ahí

$$H^1(U, \mathcal{O}^*) \simeq H^2(U, \mathbb{Z}).$$

Además, usando el hecho que la cohomología del haz $\mathbb{Z}$ es isomorfa a la homología, i.e., $H^2(U, \mathbb{Z}) \simeq H^2(U)$ (Ver [15], página 103) pero $H^2(U) = 0$ (Ver [17], página 147). □

Observación 5.5 .

1. En general, para M una superficie de Riemann no compacta aún se verifica el Teorema de Weierstrass, ya que observando la prueba solo basta que $H^1(M, \mathcal{O}) = 0$ (Ver [3], página 202) y $H^2(M) = 0$ (Ver [17], página 152).

2. En el caso de M una superficie de Riemann compacta y de la secuencia exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{i^*} \mathcal{M}^* \xrightarrow{D} \mathcal{D} \longrightarrow 0 \ ,$$

teniendo en cuenta que $\mathcal{D}$ el haz de germenes de divisores es fino, de ahí $H^1(M, \mathcal{D}) = 0$, tenemos asociado la secuencia exacta en cohomología

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{i^*} \Gamma(U, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{D^*} \Gamma(U, \mathcal{D}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{M}^*) \longrightarrow 0.$$

Definimos el grupo cociente

$$Div(M) = \Gamma(M, \mathcal{D})/\mathcal{D}^*\Gamma(M, \mathcal{M}^*).$$

De ahí, tenemos la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow Div(M) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{M}^*) \longrightarrow 0 \qquad (5.1)$$

Antes de describir esta secuencia, tenemos las siguientes definiciones.

Definición 5.5.2 .- Sea M una supeficie de Riemann.

1. El grupo $\Gamma(M, \mathcal{D})$ es llamado el grupo de divisores sobre M.

2. Dos divisores $D_1, D_2 \in \Gamma(M, \mathcal{D})$ se dicen linealmente equivalentes denotado por $D_1 \approx D_2$ si existe $f \in \Gamma(M, \mathcal{M}^*)$ tal que $D_1 - D_2 = (f)$, donde (f) denota el divisor asociado a una sección meromorfa.

3. El grupo $Div(M)$ es llamado el grupo de clase de divisores linealmente equivalentes sobre M.

4. Si D es un divisor denotamos por $[D]$ el fibrado lineal homomorfo asociado al divisor D a partir de la identificación con elementos de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$.

Descripción de la secuencia (5.1): Dado $D \in \Gamma(M, \mathcal{D})$, se sigue que existe una cobertura abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ sobre M y funciones meromorfas s_α sobre U_α, tal que $(s_\alpha) = D_{|U_\alpha}$. Entonces en cada $U_{\alpha\beta}$ la función $g_{\alpha\beta} = s_\beta/s_\alpha$ es holomorfa no nula, i.e., $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$, y verifica la condición de cociclo, así define el fibrado $[D]$, indicada en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*) \arrow[r, "D"] & \overline{C^0}(\mathcal{U}, \mathcal{D}) \arrow[r] & 0 \\
 & & (s_\alpha)_\alpha \arrow[d, "\delta"] & (D_{|U_\alpha})_\alpha \arrow[l, mapsto] & \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) \arrow[r] & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*) & & \\
 & (g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta} & (g_{\alpha\beta} = s_\beta/s_\alpha)_{\alpha,\beta} \arrow[l, mapsto] & &
\end{tikzcd}$$

Observación 5.6 .

Además de que $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ define el fibrado lineal holomorfo $[D]$, por la relación $1/s_\alpha = g_{\alpha\beta}1/s_\beta$ las funciones meromorfas $\{1/s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ definen una sección meromorfa que denotaremos por σ_D. A partir de (5.1), primero probaremos que el primer grupo de cohomología del haz $\mathcal{O}^*$ es isomorfo a la clase de isomorfismos de fibrados lineales holomorfos el cual se probará en la siguiente sección. Luego el objetivo es probar que $H^1(M, \mathcal{M}^*) = 0$, así identificamos fibrados lineales holomorfos con clases de divisores, esto será probado en el siguiente capítulo.

Veamos algunas definiciones previas.

Definición 5.5.3 .- Sean M una superficie de Riemann y $p : L \to M$ un fibrado lineal holomorfo sobre M.

- $\mathcal{C}_L$ es el haz de germenes de secciones continuas del fibrado L, i.e., es el haz generado por el prehaz que asocia cada abierto U de M el $\mathbb{C}$-módulo de todas las secciones continuas de U sobre L.
- Similarmente $\mathcal{C}_L^\infty$ es el haz de germenes de secciones C^∞ del fibrado L.
- $\mathcal{O}_L$ es el haz de germenes de secciones holomorfas del fibrado L.
- $\mathcal{M}_L$ es el haz de germenes de secciones meromorfas del fibrado L.
- $\mathcal{C}_E^*$ es el haz de germenes de secciones continuas no nulas del fibrado L, i.e., es el haz generado por el prehaz que asocia cada abierto U de M el $\mathbb{C}$-módulo de todas las secciones continuas de U sobre L que no se anulan en U.
- Similarmente ${\mathcal{C}^\infty}_L^*$ es el haz de germenes de secciones C^∞ no nulas del fibrado L.
- $\mathcal{O}_L^*$ es el haz de germenes de secciones holomorfas no nulas del fibrado L.
- $\mathcal{M}_L^*$ es el haz de germenes de secciones meromorfas no nulas del fibrado L.

Si $\sigma \in \mathcal{M}_L^*(M)$, $x \in M$ y $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ es una trivialización definimos el **divisor de σ en el punto x**

$$ord_x(\sigma) = ord_x(\sigma_\alpha),$$

donde $\varphi_\alpha \circ \sigma(x) = (x, \sigma_\alpha(x))$, i.e, $\sigma_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ con $x \in U_\alpha$.

Esta bien definido, ya que si $x \in U_{\alpha\beta}$ entonces

$$\sigma_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)\sigma_\beta(x),$$

de ahí se tiene que $ord_x(\sigma_\beta) = ord_x(\sigma_\alpha)$.

Así, definimos el **divisor de la sección** σ denotado por (σ) como

$$(\sigma) := \sum_{x \in M} ord_x(\sigma).x.$$

Observación 5.7 .

1. Si L es trivial $\mathcal{O}_L(M) = \mathcal{O}(M)$.

2. $\mathcal{O}_L(M) \subseteq \mathcal{M}_L(M)$.

3. $\mathcal{O}_L(M) = \{\sigma \in \mathcal{M}_L(M) \,:\, (\sigma) \geq 0\}$.

4. Si D es un divisor sobre M entonces $(\sigma_D) = -D$.

5. Si L un fibrado lineal holomorfo sobre M tiene una sección meromorfa no trivial entonces el fibrado lineal holomorfo L es el fibrado lineal holomorfo de un divisor sobre la superficie M. En efecto, sea σ la sección meromorfa no trivial, entonces denotando por $D = (\sigma)$, la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & [-D] \\ \lambda\sigma & \longmapsto & \lambda\sigma_{-D} \end{array}$$

se extiende a un isomorfismo entre L y $[D]$ ya que $(\sigma)(x) = (\sigma_{-D})(x)\ \forall\, x \in\ M$.

6. Si D es un divisor sobre M entonces $[D]^* = [-D]$.

7. $L \otimes\ L^*$ es fibrado lineal trivial, dado por la aplicación

$$\begin{array}{ccc} L \otimes\ L^* & \longrightarrow & M \times \mathbb{C} \\ \sigma_x \otimes\ f_x & \longmapsto & (x,\, f_x(\sigma_x)). \end{array}$$

8. $H^1(M, \mathcal{M}^*) = 0$ si y sólo si, para cada fibrado E sobre M existe una sección meromorfa no nula de L sobre M.

Sea D un divisor y $[D]$ su fibrado lineal holomorfo asociado a dicho divisor, ahora pasamos a dar una interpretación del haz $\mathcal{O}_{[D]}$. Para ello definimos el subhaz $\mathcal{O}_D \subseteq \mathcal{M}$ del siguiente modo, para cada $x \in\ M$, sea

$$(\mathcal{O}_D)_x = \{f \in\ \mathcal{M}_x \,:\, f = 0 \text{ ó } (f) \geq -D \text{ en una vecindad de } x\ \}$$

y así $\mathcal{O}_D = \sqcup_{x \in M}(\mathcal{O}_D)_x$. Es claro que $(\mathcal{O}_D)_x \subseteq \mathcal{M}_x$ es un subgrupo y que $\mathcal{O}_D \subseteq \mathcal{M}$ es abierto; de ahí que $\mathcal{O}_D$ es un subhaz de $\mathcal{M}$.

Acontinuación pasamos a probar una proposición que será muy útil en la prueba del Teorema de Riemann-Roch.

Proposición 5.5.1 . $\mathcal{O}_{[D]} \simeq \mathcal{O}_D$.

Prueba. En efecto, dado $D \in \Gamma(M, \mathcal{D})$, existe una cobertura abierta $\{U_\alpha\}_\alpha$ sobre M y funciones meromorfas d_α sobre U_α, tal que $(d_\alpha) = D_{|U_\alpha}$. Entonces en cada $U_{\alpha\beta}$ la función $g_{\alpha\beta} = d_\beta/d_\alpha$ es holomorfa no nula, i.e., $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$, y verifica la condición de cociclo, así define el fibrado $[D]$. Para cada germen $f \in (\mathcal{O}_D)_x \subseteq \mathcal{M}_x$ y para cada abierto U_α conteniendo a x asociamos el germen $f_\alpha = fd_\alpha \in \mathcal{M}_x$. Desde que $(f_\alpha) = (f)+(d_\alpha) \geq 0$ en una vecindad de x; de ahí f_α es holomorfa en x y si $x \in U_{\alpha\beta}$, entonces $f_\beta = fd_\beta = fg_{\alpha\beta}d_\alpha = g_{\alpha\beta}f_\alpha$. Así las funciones (f_α) definen el germen de un elemento en $\mathcal{O}_{[D]}$. Análogamente se tiene el recíproco. Esto define una aplicación de $\mathcal{O}_D$ a $\mathcal{O}_{[D]}$ el cual es un isomorfismo. □

Pasamos a probar el siguiente isomorfimo que nos relaciona el primer grupo de cohomología del haz $\mathcal{O}^*$ y las clases de isomorfismos de fibrados lineales holomorfos.

5.6. Isomorfismo entre $Pic(M)$ y $H^1(M, \mathcal{O}^*)$

Sea M una variedad compleja.

Definición 5.6.1 .- El grupo de isomorfismos de fibrados lineales holomorfos sobre M con la operación $\otimes$ es denominado el grupo de Picard de M denotado por $Pic(M)$.

Observación 5.8 .

Si L es un fibrado lineal holomorfo sobre M entonces determina una cobertura abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ sobre M, y cociclo $(g_{\alpha\beta})$, donde $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$, i.e., $(g_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ a su vez define un elemento de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Esta correspondencia, independe de la cobertura escogida y de la clase de isomorfismo. En efecto, sea $L' \cong L$ con cociclo $(g'_{\alpha\beta})$, entonces existen $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$,$\forall\, \alpha$ tal que $f_\alpha = (g'_{\alpha\beta}/g_{\alpha\beta})f_\beta$ en $U_{\alpha\beta}$, i.e., $(g_{\alpha\beta}) - (g'_{\alpha\beta}) = \delta(f_\alpha)$ por lo tanto definen el mismo elemento de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Así, definimos un homomorfismo

$$Pic(M) \to H^1(M, \mathcal{O}^*).$$

Proposición 5.6.1 .- Sea M una variedad compleja con $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cobertura abierta de M y una familia

$$g = \{g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{C}) \text{ holomorfo } \}_{\alpha,\,\beta\in\,\Lambda}$$

que satisfacen la condición de cociclo, i.e., $g \in Z^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathcal{O}))$. Entonces existe un fibrado vectorial holomorfo $(E, M, p, \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ de rango n tal que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, y) = (x, g_{\alpha\beta}(x)y).$$

Además, este fibrado vectorial holomorfo es único salvo isomorfismos.

Prueba.

1. Existencia: Definimos

$$E = \{(x, y, \alpha) \in M \times \mathbb{C}^n \times \Lambda \mid x \in U_\alpha\} \Big/ \sim$$

donde $\quad (x_0, y_0, \alpha) \sim (x_1, y_1, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = x_1 \ \wedge \ y_1 = g_{\alpha\beta}(x_0)y_0$
es una relación de equivalencia por la condición de cociclo. Así, tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} p: & E & \longrightarrow & M \\ & [(x, y, \alpha)] & \longmapsto & x \end{array}$$

es continua.
Atlas para E: Tomamos: $\{(z_i, V_i, W_i)\}_{i\in I}$ atlas complejo sobre M, entonces

$$\begin{array}{rcl} \psi_{i\alpha} : [(V_i \cap U_\alpha) \times \mathbb{C}^n \times \{\alpha\}] & \longrightarrow & z_i(V_i \cap U_\alpha) \times \mathbb{C}^n \\ [(x, y, \alpha)] & \longmapsto & (z_i(x), y) \end{array}$$

definen el atlas complejo $\{\psi_{i\alpha}\}_{i\in I,\ \alpha\in\Lambda}$ sobre E, luego E es una variedad compleja de $dim\, E = dim\, M + n$ y $p : E \to M$ es una aplicación diferenciable.

Estructura de fibrado para E: Tomamos $\{[U_\alpha \times \mathbb{C}^n \times \{\alpha\}]\}_{\alpha\in\wedge}$ una cobertura abierta sobre E, donde $p^{-1}(U_\alpha) = [U_\alpha \times \mathbb{C}^n \times \{\alpha\}]$
y definimos trivializaciones

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\alpha : & p^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^n \\ & [(x, y, \alpha)] & \longmapsto & (x, y), \end{array}$$

que verifican

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \\ (x, y) & \longmapsto & (x, g_{\alpha\beta}(x)y). \end{array}$$

2. Unicidad salvo isomorfismos: Supongamos que existe otro fibrado con el mismo cociclo. Basta tomar $f_\alpha : U_\alpha \to GL_n(\mathbb{C})$, donde $f_\alpha(x)$ es la matriz identidad de orden $n \times n$ para todo α. Luego tenemos que $f_\alpha g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}$, por las observaciones de aplicación fibrada se tiene que los fibrados son isomorfos.

□

Teorema 5.6.1 .- Sea M una superficie de Riemann. Entonces el homomorfismo de arriba es un isomorfismo, i.e.,

$$Pic(M) \cong H^1(M, \mathcal{O}^*).$$

Prueba. Se sigue inmediatamente de la Proposición 5.6.1 y de la Obsevación 5.8. □

Ahora si pasamos a los dos últimos capítulos en los cuales se probará dos teoremas muy importantes que son el Teorema de Dualidad de Serre con el cual probaremos que el primer grupo de cohomología del haz $\mathcal{M}^*$ y el Teorema de Riemann-Roch.

Capítulo 6

Dualidad de Serre y Aplicaciones

Es este capítulo se desarrollará la cohomología de Dolbeault con valores en un fibrado y la cohomología de Dolbeault con soporte compacto, luego usando la secuencia de Mayer-Vietoris y el Lema de Weyl se probará el Teorema de Dualidad de Serre.

A partir del Isomorfismo de Dolbeault y del Teorema de Dualidad de Serre se probará que el primer grupo de cohomología del haz $\mathcal{M}^*$ en una superficie de Riemann compacta es nula.

6.1. Preliminares

Sean V,W espacios vectoriales complejos de dimensión finita con $dim_{\mathbb{C}}V = 1$. Considerando V como un espacio vectorial real de $dim_{\mathbb{R}}V = 2$, definimos

$$\Lambda^k(V,W) = \{\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-veces} \to W \ : \ \omega \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal antisimétrica}\},$$

llamado el **espacio de las k-formas alternadas de V en W.**

Podemos entonces definir los subespacios

$$\Lambda^{k,\,0}(V,W) = \left\{ \ \omega \in \Lambda^k(V,W) \ : \ \omega(\lambda v_1,\ldots,\lambda v_k) = \lambda^k\,\omega(v_1,\ldots,v_k), \quad \forall v_1,\ldots,v_k \in V, \forall\lambda \in \mathbb{C} \ \right\},$$

llamado el **espacio de las $(k,\,0)$-formas alternadas de V en W.**

$$\Lambda^{0,\,k}(V,W) = \left\{ \ \omega \in \Lambda^k(V,W) \ : \ \omega(\lambda v_1,\ldots,\lambda v_k) = \overline{\lambda}^k\,\omega(v_1,\ldots,v_k) \quad \forall v_1,\ldots,v_k \in V, \forall\lambda \in \mathbb{C} \ \right\},$$

llamado el **espacio de las $(0,\,k)$-formas alternadas de V en W.**

Observación 6.1 .

1. $\Lambda^1(V;W) = \mathcal{L}(V,W) = \{\omega : V \to W \ : \ \omega \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal}\}$.

2. $\Lambda^k(V,W) = 0, \forall\, k \geq 3$.

3. $\Lambda^1(V,W) = \Lambda^{1,0}(V,W) \bigoplus \Lambda^{0,1}(V,W)$, donde

$$\Lambda^{1,0}(V,W) = \{\omega : V \to W \ : \ \omega \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal} \wedge \omega(\lambda v) = \lambda v, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \forall\, v \in V\},$$

$$\Lambda^{0,1}(V,W) = \{\omega : V \to W \ : \ \omega \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal} \wedge \omega(\lambda v) = \overline{\lambda} v, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \forall\, v \in V\}.$$

4. $\Lambda^{k,0}(V,W) = \Lambda^{0,k}(V,W) = 0, \forall\, k \geq 2$.

Definición 6.1.1 .- Sea M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. Definimos los siguientes fibrados vectoriales

1. $\Lambda^k(M,E) := \sqcup_{x \in M} \Lambda^k(T_xM, E_x)$ llamado el **fibrado de las k-formas diferenciales con valores en el fibrado E.**

2. $\Lambda^{k,0}(M,E) := \sqcup_{x \in M} \Lambda^{k,0}(T_xM, E_x)$ llamado el **fibrado de las $(k, 0)$-formas diferenciales con valores en el fibrado E.**

3. $\Lambda^{0,k}(M,E) := \sqcup_{x \in M} \Lambda^{0,k}(T_xM, E_x)$ llamado el **fibrado de las $(0, k)$-formas diferenciales con valores en el fibrado E.**

Observación 6.2 .

1. Por convención $\Lambda^0(M,E) = E$.

2. $\Lambda^k(M,E) = 0, \forall\, k \geq 3$.

3. $\Lambda^{k,0}(M,E) = \Lambda^{0,k}(M,E) = 0, \forall k \geq 2$.

Definición 6.1.2 .- Sea M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M.

1. $\Omega^k(M,E) := \Gamma(M, \Lambda^k(M,E))$llamado el **espacio de las k-formas diferenciales con valores en el fibrado E.**

2. $\Omega^{k,0}(M,E) := \Gamma(M, \Lambda^{k,0}(M,E))$ llamado el **espacio de las** $(k, 0)$**-formas diferenciales con valores en el fibrado** E.

3. $\Omega^{0,k}(M,E) := \Gamma(M, \Lambda^{0,k}(M,E))$ llamado el **espacio de las** $(0, k)$**-formas diferenciales con valores en el fibrado** E.

Observación 6.3 .

1. $\Omega^k(M,\mathbb{C}) := \Omega^k(M), \forall\, k \geq 0$

2. $\Omega^0(M,E) = \Gamma(M,E)$.

3. $\Omega^k(M,E) = 0, \;\forall\, k \geq 3$.

4. $\Omega^{k,0}(M,E) = \Omega^{0,k}(M,E) = 0, \;\forall\, k \geq 2$.

El operador diferencial conjugado: Sea M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. A partir del operador

$$\overline{\partial} : \Omega^0(M,\mathbb{C}) \to \Omega^{0,1}(M,\mathbb{C}),$$

inducimos de manera natural el operador

$$\begin{array}{rcl} \overline{\partial} : \Omega^0(M,\mathbb{C}^n) & \longrightarrow & \Omega^{0,1}(M,\mathbb{C}^n) \\ (f_1, \ldots, f_n) & \longmapsto & (\overline{\partial} f_1, \ldots, \overline{\partial} f_n). \end{array}$$

Luego podemos extender este operador como

$$\overline{\partial} : \Omega^0(M,E) \;\longrightarrow\; \Omega^{0,1}(M,E),$$

de la siguiente manera: Sea $f \in \Omega^0(M,E)$ y $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ una trivialización de E, luego $f_{|U_\alpha}$ puede ser identificado por $f_\alpha \in \Omega^0(U_\alpha, \mathbb{C}^n)$ denotando de esta manera $f_{|U_\alpha} = [f_\alpha]$.

Definimos

$$\overline{\partial} f_{|U_\alpha} = [\overline{\partial} f_\alpha].$$

Veamos que define un elemento en $\Omega^{0,1}(M,E)$.

$\varphi_\alpha \circ f(x) = (x, f_\alpha(x))\ \forall\, x \in U_\alpha$.

$\varphi_\beta \circ f(x) = (x, f_\beta(x))\ \forall\, x \in U_\beta$.

entonces

$$f_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) f_\beta(x), \quad \forall\, x \in U_{\alpha\beta}$$

Aplicando el operador $\overline{\partial}$ y usando que el cocico es holomorfo, tenemos que

$$\overline{\partial} f_(x) = g_{\alpha\beta}(x)\overline{\partial} f_\beta(x), \quad \forall\, x \in U_{\alpha\beta}$$

Así, podemos definir una (0,1)-forma diferencial con valor en E denotado por $\overline{\partial} f$.

$$\begin{array}{rcl} \overline{\partial} : \Omega^0(M,E) & \longrightarrow & \Omega^{0,1}(M,E) \\ [f_\alpha] & \longmapsto & [\overline{\partial} f_\alpha]. \end{array}$$

Análogamente se puede definir una aplicación

$$\overline{\partial} : \Omega^1(M,E) \longrightarrow \Omega^2(M,E).$$

Para los siguientes casos la aplicación $\overline{\partial}$ es la aplicación nula.

Observación 6.4 .

1. $\overline{\partial\partial} = 0$.
2. $\mathcal{O}^{1,0}(M,E) = \{\omega \in \Omega^{1,0}(M,E) \mid \overline{\partial}\omega = 0\}$ llamado el **espacio de 1-formas holomorfas con valores en** E.

A partir de esas preliminares podemos definir los grupos de Cohomología de Dolbeault con valores en un fibrado vectorial holomorfo.

6.2. Cohomología de Dolbeault con valores en un fibrado y Cohomología de Dolbeault con soporte compacto

Sean M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. Considere la siguiente secuencia:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M,E) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,1}(M,E) \xrightarrow{\overline{\partial}} 0\,.$$

A partir de esta secuencia vamos a generar una cohomología, pero antes veamos unas definiciones previas.

Definición 6.2.1 .- Sean M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M.

1. Decimos que una k-forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M,E)$ tiene soporte compacto si el conjunto:
$$sop(\omega) := \overline{\{x \in M\, :\, \omega_x \neq 0\}},$$
es compacto.

2. El espacio de las $(0,k)$-formas diferenciales sobre M con soporte compacto será denotado por $\Omega_c^{0,\,k}(M,E)$.

Observación 6.5 .

1. $\Omega^{0,\,0}(M;E) = \Omega^0(M,E)$ y $\Omega_c^{0,\,0}(M;E) = \Omega_c^0(M,E)$.

2. $\Omega^{0,\,k}(M,E) = 0\ \ ,\forall\, k \geq 2$ y $\Omega_c^{0,\,k}(M,E) = 0\ \ ,\forall\, k \geq 2$.

3. $\Omega^{0,\,k}(M,E)$ y $\Omega_c^{0,\,k}(M,E)$ son espacios vectoriales complejo.

4. Si M es compacto entonces $\Omega_c^{0,\,k}(M,E) = \Omega^{0,\,k}(M,E)$.

5. Si $\omega \in \Omega_c^{0,\,k}(M,E)$ entonces $\overline{\partial}\omega \in \Omega_c^{0,\,k+1}(M,E)$.

Definición 6.2.2

$$\begin{array}{rcl} Z^k(M,E) & := & \{\omega \in \Omega^{0,\,k}(M,E)\, :\, \overline{\partial}\omega = 0\}, \\ B^k(M,E) & := & \{\omega \in \Omega^{0,\,k}(M,E)\, :\, \exists\, \eta \in \Omega^{0,\,k-1}(M,E)\ \text{ tal que } \overline{\partial}\eta = \omega\}, \\ Z_c^k(M,E) & := & \{\omega \in \Omega_c^{0,\,k}(M,E)\, :\, \overline{\partial}\omega = 0\}, \\ B_c^k(M,E) & := & \{\omega \in \Omega_c^{0,\,k}(M,E)\, :\, \exists\, \eta \in \Omega_c^{0,\,k-1}(M,E)\ \text{ tal que } \overline{\partial}\eta = \omega\}. \end{array}$$

Claramente $B^k(M,E) \subset Z^k(M,E)$ y $B^k_c(M,E) \subset Z^k_c(M,E)$, luego definimos

$$H^{0,k}(M,E) := \frac{Z^k(M,E)}{B^k(M,E)},$$

llamado el **k-ésimo grupo de cohomología de Dolbeault de E sobre M**.

$$H^{0,k}_c(M,E) := \frac{Z^k_c(M,E)}{B^k_c(M,E)},$$

llamado el **k-ésimo grupo de cohomología de Dolbeault de E sobre M con soporte compacto**.

Observación 6.6

1. $H^{0,k}(M,E)$ y $H^{0,k}_c(M,E)$ son espacios vectoriales complejos.

2. Si M es compacto entonces $H^{0,k}_c(M,E) = H^{k,0}(M,E), \forall\, k \geq 0$.

3. $H^{0,k}_c(M,E) = 0$,$\forall\, k \geq 2$.

4. $H^{0,0}(M,E) = Z^0(M,E) = \mathcal{O}(M,E)$ y $H^{0,0}_c(M,E) = Z^0_c(M,E)$.

5. Si M es no compacta entonces $H^{0,0}_c(M,E) = 0$.

6. $H^{0,1}(M,E) = \dfrac{\Omega^{0,1}(M,E)}{\bar\partial\, \Omega^0(M,E)}$ y $H^{0,1}_c(M,E) = \dfrac{\Omega^{0,1}_c(M,E)}{\bar\partial\, \Omega^0_c(M,E)}$.

7. Si $M = \sqcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ entonces

$$H^{0,k}(M,E) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda} H^{0,k}(M_\lambda,E) \quad \text{y} \quad H^{0,k}_c(M,E) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H^{0,k}_c(M_\lambda,E),$$

dada por la aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} H^{0,k}(M,E) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} H^{0,k}(M_\lambda,E), \\ [\omega] & \longmapsto & \Pi_{\lambda\in\Lambda}([\omega_{|M_\lambda}]) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^{0,k}_c(M,E) & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H^{0,k}_c(M_\lambda,E). \\ [\omega] & \longmapsto & \oplus_{\lambda\in\Lambda}[\omega_{|M_\lambda}] \end{array}$$

6.2.1. La Secuencia de Mayer-Vietoris de la cohomología de Dolbeault

Sea M una superficie de Riemann y U,V abiertos de M tal que $M = U \cup V$. Considere la siguiente secuencia corta:

$$0 \longrightarrow \Omega^{0,k}_c(U\cap V,E) \xrightarrow{e} \Omega^{0,k}_c(U,E) \oplus \Omega^{0,k}_c(V,E) \xrightarrow{r} \Omega^{0,k}_c(M,E) \longrightarrow 0$$

$$\omega \longmapsto (\widetilde{\omega}^U, \widetilde{\omega}^V)$$

$$(\omega_U, \omega_V) \longmapsto \widetilde{\omega_U}^M - \widetilde{\omega_V}^M$$

donde $\widetilde{\omega}^U(x) := \begin{cases} \omega(x) & \text{si } x \in U \cap V, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

i.e., $\widetilde{\omega}^U$ es una extensión de ω sobre U.

Análogamente se define $\widetilde{\omega}^V$ extensión de ω sobre V, $\widetilde{\omega_U}^M$ extensión de ω_U sobre M , $\widetilde{\omega_V}^M$ extensión de ω_V sobre M.

Proposición 6.2.1 .- La secuencia corta de arriba es exacta.

Prueba.

- Claramente e es inyectiva.
- $Im(e) = Ker(r)$. Es claro que $Im(e) \subset Ker(r)$. Veamos que $Ker(r) \subset Im(e)$. En efecto, sea $(\omega_U, \omega_V) \in Ker(r)$ entonces $\widetilde{\omega_U}^M - \widetilde{\omega_V}^M = 0$, es decir $\widetilde{\omega_U}^M = \widetilde{\omega_V}^M =: \omega$, de ahí tenemos que $sop(\omega) \subset U \cap V$, entonces $\omega_{|U\cap V} \in \Omega_c^{0,k}(U \cap V, E)$ tal que
$$e(\omega_{|U\cap V}) = (\omega_U, \omega_V).$$
- r es sobreyectiva. En efecto, sea $\omega \in \Omega_c^{0,k}(M, E)$, como $\{U, V\}$ es una cobertura sobre M, tomemos $\{\rho_U, \rho_V\}$ partición de la unidad subordinada a esta cobertura, luego definimos
$\omega_U := \rho_U \omega_{|U}$ y $\omega_V := -\rho_V \omega_{|V}$, es claro que $\omega_U \in \Omega_c^{0,k}(U, E)$, $\omega_V \in \Omega_c^{0,k}(V, E)$ y $\widetilde{\omega_U}^M - \widetilde{\omega_V}^M = \rho_U\omega - (-\rho_V\omega) = \omega$.

$\square$

Del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Omega_c^{0,0}(U \cap V, E) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\bar{\partial}"] & \Omega_c^{0,0}(U, E) \oplus \Omega_c^{0,0}(V, E) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\bar{\partial}\oplus\bar{\partial}"] & \Omega_c^{0,0}(M, E) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_c^{0,1}(U \cap V, E) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\bar{\partial}"] & \Omega_c^{0,1}(U, E) \oplus \Omega_c^{0,1}(V, E) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\bar{\partial}\oplus\bar{\partial}"] & \Omega_c^{0,1}(M, E) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}"] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6.2.1 *(Mayer-Vietoris para cohomogía de Dolbeault con soporte compacto).*- Existe una aplicación canónica $\delta : H_c^{0,0}(M,E) \to H_c^{0,1}(U \cap V, E)$ tal que la siguiente secuencia larga es exacta:

$$0 \longrightarrow H_c^{0,0}(U \cap V, E) \xrightarrow{\widehat{e}} H_c^{0,0}(U,E) \oplus H_c^{0,0}(V,E) \xrightarrow{\widehat{r}} H_c^{0,0}(M,E) \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} H_c^{0,1}(U \cap V, E) \xrightarrow{\widehat{e}} H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E) \xrightarrow{\widehat{r}} H_c^{0,1}(M,E) \longrightarrow 0.$$

6.3. Dualidad de Serre

Antes de enunciar el teorema de Dualidad de Serre veamos un isomorfismo entre el primer grupo de cohomología del haz de germenes de secciones holomorfas y el primer grupo de cohomología de Dolbeault con valores en un fibrado. Luego con la necesidad de hablar de aplicaciones continuas sobre los grupos de cohomología de Dolbeault daremos una topología natural a los grupos de cohomología de Dolbeault con valores en un fibrado.

6.3.1. El isomorfismo de Dolbeault

Sea M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. A partir de la aplicación

$$\overline{\partial} : \Omega^0(M,E) \longrightarrow \Omega^{0,1}(M,E),$$

inducimos la secuencia corta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \xrightarrow{i} \mathcal{C}_E^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega_E^{0,1} \longrightarrow 0. \tag{6.1}$$

Observación 6.7

$C_E^\infty,\ \Omega_E^k, \forall\, k \geq 1,\ \Omega_E^{1,0}$ y $\Omega_E^{0,1}$ son haces finos.

Proposición 6.3.1 .- La secuencia anterior es exacta.

Prueba.

- Es claro que i la inclusión es inyectiva.
- $Im(i) = Ker(\overline{\partial})$. Para ello, considere $U \subset M$ abierto, $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ una trivialización y $\sigma \in C^\infty(M,E)$, entonces $\overline{\partial}\sigma = 0 \Leftrightarrow \overline{\partial} f = 0$, donde $(x, f(x)) = \varphi(\sigma(x)), \forall\, x \in U$. i.e., $\sigma \in \mathcal{O}(U,E) \Leftrightarrow \overline{\partial}\sigma = 0$.

- $\overline{\partial}$ es sobreyectiva. En efecto, considere $U \subset M$ abierto, $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ una trivialización y $z : U \to D$ una carta ,donde D disco abierto en $\mathbb{C}$ y $\omega \in \Omega^{0,1}(U, E)$, entonces ω puede ser identificado por

$$(g_1, \ldots, g_n)d\overline{z}, \quad g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(D),$$

aplicando la Proposición 4.7.2 n-veces existen $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(D)$ tal que $\overline{\partial} f_1 = g_1, \ldots,$ $\overline{\partial} f_n = g_n$. Entonces $f_1, ..., f_n \in C^\infty(D)$ inducen una aplicación $f \in C^\infty(U, E)$ tal que $\overline{\partial} f = \omega$.

$\square$

Teorema 6.3.1 *(Isomorfismo de Dolbeault).- $H^1(M, \mathcal{O}_E) \simeq H^{0,1}(M, E)$.*

Prueba. La secuencia exacta de haces (6.1) induce una secuencia larga en cohomología:

$$0 \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}_E) \xrightarrow{i^*} H^0(M, \mathcal{C}_E^\infty) \xrightarrow{\overline{\partial}^*} H^0(M, \Omega_E^{0,1}) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^1(M, \mathcal{O}_E) \xrightarrow{i^*} H^1(M, \mathcal{C}_E^\infty) \longrightarrow \cdots$$

Como $H^1(M, \mathcal{C}_E^\infty) = 0$, ya que C_E^∞ es un haz fino, entonces tenemos

$$H^0(M, \mathcal{C}_E^\infty) \xrightarrow{\overline{\partial}^*} H^0(M, \Omega_E^{0,1}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(M, \mathcal{O}_E) \longrightarrow 0 \ ,$$

así δ^* induce un isomorfismo

$$\frac{\Omega^{0,1}(M, E)}{\overline{\partial}\, \Omega^0(M, E)} \xrightarrow{\sim} H^1(M, \mathcal{O}_E) \ ,$$

i.e.,

$$H^{0,1}(M, E) \simeq H^1(M, \mathcal{O}_E).$$

$\square$

Corolario 6.3.1 . *$H^q(M, \mathcal{O}_E) = 0, \ \forall\, q \geq 2.$*

6.3.2. La Topología sobre $\Omega^0(M,E)$, $\Omega^{0,1}(M,E)$ y $H^{0,1}(M,E)$

Sea M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. Primero definiremos topologías sobre $\Omega^0(M,E)$ y $\Omega^{0,1}(M,E)$.

Considere $U \subset M$ abierto, $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ una trivialización, $z : U \to D$ una carta, donde D es un disco abierto en $\mathbb{C}$, y $\omega \in \Omega^{0,1}(M,E)$, entonces $\omega_{|_U} \in \Omega^{0,1}(U,E)$ puede ser identificado por

$$(f_1,\dots,f_n)d\overline{z}, \quad f_1,\dots,f_n \in C^\infty(U).$$

Introducimos la siguiente topología sobre $\Omega^{0,1}(M,E)$: Una secuencia $\{\omega^k\}_{k\geq 1} \subset \Omega^{0,1}(M,E)$ converge a $\omega \in \Omega^{0,1}(M,E)$ si y sólo si para cualquier abierto U de M como arriba, las correspondientes secuencias $(f_1^k,\dots,f_n^k)$

$$[(f_1^k,\dots,f_n^k)d\overline{z} = \omega^k_{|_U}].$$

converge a $(f_1,\dots,f_n)$ $[(f_1,\dots,f_n)d\overline{z} = \omega_{|_U}]$ en $\Pi_{n \text{ copias}} C^\infty(U)$, i.e., para cualquier derivada D^l de orden l ($D^l = \dfrac{\partial^l}{\partial x^r \partial y^s}$, $r+s=l$), la secuencia $\{D^l f_i^k\}_{k\geq 1}$ converge uniformemente a $D^l f_i$ sobre subconjuntos compactos de U.

Analogamente, introducimos una topología sobre $\Omega^0(M,E)$.

Notación: Denotaremos $\omega^k \to \omega$ en $\Omega^{0,1}(M,E)$ por ω^k converge a ω en $\Omega^{0,1}(M,E)$.

Observación 6.8 .

1. Las operaciones de adición

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(M,E)\times\Omega^0(M,E) & \longrightarrow & \Omega^0(M,E), \\ (\sigma,\rho) & \longmapsto & \omega+\eta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega^{0,1}(M,E)\times\Omega^{0,1}(M,E) & \longrightarrow & \Omega^{0,1}(M,E), \\ (\omega,\eta) & \longmapsto & \omega+\eta \end{array}$$

   y la multiplicación por un escalar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\Omega^0(M,E) & \longrightarrow & \Omega^0(M,E), \\ (z,\sigma) & \longmapsto & z\sigma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\Omega^{0,1}(M,E) & \longrightarrow & \Omega^{0,1}(M,E), \\ (z,\omega) & \longmapsto & z\omega \end{array}$$

   son aplicaciones continuas. Entonces $\Omega^0(M,E)$ y $\Omega^{0,1}(M,E)$ son espacios vectoriales topológicos.

2. La aplicación lineal $\overline{\partial} : \Omega^0(M,E) \to \Omega^{0,1}(M,E)$ es continua.

3. Del hecho que $\overline{\partial}\,\Omega^0(M,E) \subset \Omega^{0,1}(M,E)$ es un subespacio vectorial inducimos la topología cociente al espacio vectorial $H^{0,1}(M,E) = \dfrac{\Omega^{0,1}(M,E)}{\overline{\partial}\,\Omega^0(M,E)}$, dada por la aplicación cociente

$$\begin{array}{rcl} \pi : \Omega^{0,1}(M,E) & \longrightarrow & H^{0,1}(M,E). \\ \omega & \longmapsto & [\omega] \end{array}$$

4. Recordar que dado F un espacio topológico y $T : H^{0,1}(M,E) \to F$ una aplicación, entonces T es continua si y sólo si $T \circ \pi$ es continua.

$$\begin{tikzcd} \Omega^{0,1}(M,E) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "T\circ\pi"] & \\ H^{0,1}(M,E) \arrow[r, "T"] & F \end{tikzcd}$$

5. De los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \Omega^{0,1}(M,E) \times \Omega^{0,1}(M,E) \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\pi\oplus\pi"'] & \Omega^{0,1}(M,E) \arrow[d, "\pi"] \\ H^{0,1}(M,E) \times H^{0,1}(M,E) \arrow[r, "+"] & H^{0,1}(M,E) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \times \Omega^{0,1}(M,E) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "id\oplus\pi"'] & \Omega^{0,1}(M,E) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C} \times H^{0,1}(M,E) \arrow[r, "*"] & H^{0,1}(M,E) \end{tikzcd}$$

Las operaciones de adición

$$\begin{array}{ccc} H^{0,1}(M,E) \times H^{0,1}(M,E) & \longrightarrow & H^{0,1}(M,E) \\ ([\omega],[\eta]) & \longmapsto & [\omega]+[\eta], \end{array}$$

y la multiplicación por un escalar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times H^{0,1}(M,E) & \longrightarrow & H^{0,1}(M,E) \\ (z,[\omega]) & \longmapsto & z[\omega], \end{array}$$

son aplicaciones continuas. Entonces $H^{0,1}(M,E)$ es un espacio vectorial topológico.

Pasamos a definir una topología sobre $\Omega^0_c(M,E)$ y $\Omega^{0,1}_c(M,E)$.

6.3.3. Topología sobre $\Omega^0_c(M,E)$ $\Omega^{0,1}_c(M,E)$ y $H^{0,1}_c(M,E)$

Introducimos la siguiente topología sobre $\Omega^{0,1}_c(M,E)$: Una secuencia $\{\omega^k\}_{k\geq 1} \subset \Omega^{0,1}_c(M,E)$ con $sop(\omega^k) \subset K$ (compacto), $\forall\, k \geq 1$, converge a $\omega \in \Omega^{0,1}_c(M,E)$ si y sólo si $\omega^k \to \omega$ en $\Omega^{0,1}(M,E)$. Denotaremos esta convergencia $\omega^k \to \omega$ en $\Omega^{0,1}_c(M,E)$.

Análogamente definimos una topología sobre $\Omega^0_c(M,E)$.

Observación 6.9 .

1. Las operaciones de adición y la multiplicación por un escalar sobre $\Omega^0_c(M,E)$ y $\Omega^{0,1}_c(M,E)$ son aplicaciones continuas con esta topología. Entonces $\Omega^0_c(M,E)$ y $\Omega^{0,1}_c(M,E)$ son espacios vectoriales topológicos.

2. La aplicación lineal $\overline{\partial} : \Omega^0_c(M,E) \to \Omega^{0,1}_c(M,E)$ es continua.

3. Inducimos la topología cociente al espacio vectorial $H^{0,1}_c(M,E) = \dfrac{\Omega^{0,1}_c(M,E)}{\overline{\partial}\Omega^0_c(M,E)}$, dada por la aplicación cociente

$$\begin{array}{rcl} \pi : \Omega^{0,1}_c(M,E) & \longrightarrow & H^{0,1}_c(M,E) \\ \omega & \longmapsto & [\omega]. \end{array}$$

4. De los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{0,1}_c(M,E) \times \Omega^{0,1}_c(M,E) & \xrightarrow{+} & \Omega^{0,1}_c(M,E) \\ {\scriptstyle \pi\oplus\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ H^{0,1}_c(M,E) \times H^{0,1}_c(M,E) & \xrightarrow{+} & H^{0,1}_c(M,E) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \Omega^{0,1}_c(M,E) & \xrightarrow{*} & \Omega^{0,1}_c(M,E) \\ {\scriptstyle id\oplus\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{C} \times H^{0,1}_c(M,E) & \xrightarrow{*} & H^{0,1}_c(M,E) \end{array}$$

Las operaciones de adición y la multiplicación por un escalar son aplicaciones continuas sobre $H^{0,1}_c(M,E)$. Entonces $H^{0,1}_c(M,E)$ es un espacio vectorial topológico.

5. Una aplicación $f \in C^\infty(M)$ induce una aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} I_f : \Omega^{0,1}_c(M,E) & \longrightarrow & \Omega^{0,1}_c(M,E) \\ \omega & \longmapsto & f\omega, \end{array}$$

continua. En efecto, sea $\{\omega^k\}_{k\geq 1}$, ω en $\Omega_c^{0,1}(M,E)$ con $sop(\omega^k) \subset K$ compacto $\forall k \geq 1$ tal que $\omega^k \to \omega$ en $\Omega_c^{0,1}(M,E)$, como $sop(f\omega^k) \subset K \cap sop(f)$ compacto $\forall k \geq 1$, entonces tenemos que $f\omega^k \to f\omega$ en $\Omega_c^{0,1}(M,E)$ i.e., $I_f(\omega^k) \to I_f(\omega)$.

Proposición 6.3.2 .- Sea M una superficie de Riemann y U, V abiertos de M tal que $M = U \cup V$. Las aplicaciones de la siguiente secuencia

$$H_c^{0,1}(U\cap V,E) \xrightarrow{\widehat{e}} H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E) \xrightarrow{\widehat{r}} H_c^{0,1}(M,E) \longrightarrow 0$$

$$[\omega] \longmapsto ([\widetilde{\omega}^U],[\widetilde{\omega}^V])$$

$$([\omega_U],[\omega_V]) \longmapsto [\widetilde{\omega_U}^M] - [\widetilde{\omega_V}^M].$$

son continuas.

Prueba. Como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega_c^{0,1}(U\cap V,E) & \xrightarrow{e} & \Omega_c^{0,1}(U,E)\oplus\Omega_c^{0,1}(V,E) & \xrightarrow{r} & \Omega_c^{0,1}(M,E) & \longrightarrow & 0 \\
\big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi\oplus\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \\
H_c^{0,1}(U\cap V,E) & \xrightarrow{\widehat{e}} & H_c^{0,1}(U,E)\oplus H_c^{0,1}(V,E) & \xrightarrow{\widehat{r}} & H_c^{0,1}(M,E) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

es suficiente probar que e, r son continuas.

- e es continua. En efecto, tomemos $\{\omega^k\}_{k\geq 1}$, ω en $\Omega_c^{0,1}(U\cap V,E)$ con $sop(\omega^k) \subset K$ compacto $\forall\, k \geq 1$ tal que $\omega^k \to \omega$ en $\Omega_c^{0,1}(U\cap V,E)$, del hecho que
$$sop(\widetilde{\omega^k}^U) = sop(\widetilde{\omega^k}^V) = sop(\omega^k) \subset K,\ \forall k \geq 1,$$
entonces tenemos que $\widetilde{\omega^k}^U \to \widetilde{\omega}^U$ en $\Omega_c^{0,1}(U,E)$ y $\widetilde{\omega^k}^V \to \widetilde{\omega}^U$ en $\Omega_c^{0,1}(V,E)$, i.e.,
$$e(\omega^k) \to e(\omega).$$

- r es continua. Tomemos $\{(\omega_U^k,\omega_V^k)\}_{k\geq 1}$, (ω_U,ω_V) en $\Omega_c^{0,1}(U,E) \times \Omega_c^{0,1}(V,E)$ con $sop(\omega_U^k), sop(\omega_V^k) \subset K$ compacto $\forall k \geq 1$ tal que
$$(\omega_U^k,\omega_V^k) \to (\omega_U,\omega_V) \text{ en } \Omega_U^{0,1} \times \Omega_c^{0,1}(V,E).$$
Es fácil ver que $sop(r(\omega_U^k,\omega_V^k)) \subset K$, $\forall k \geq 1$, entonces tenemos que
$$r(\omega_U^k,\omega_V^k) \to r(\omega_U,\omega_V) \text{ en } \Omega_c^{0,1}(M,E).$$

$\square$

Definimos $(H_c^{0,1}(M,E))^*$ **el dual topológico** de $H_c^{0,1}(M,E)$, i.e.,

$$(H_c^{0,1}(M,E))^* = \{T : H_c^{0,1}(M,E) \to \mathbb{C} \mid T \text{ es lineal y continua}\}.$$

Por la Proposición 6.3.2, podemos tomar el dual topológico a la anterior secuencia, esto nos induce la secuencia

$$0 \longrightarrow (H_c^{0,1}(M,E))^* \xrightarrow{r^*} (H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E))^* \xrightarrow{e^*} (H_c^{0,1}(U\cap V,E))^* \, .$$

Proposición 6.3.3 .- La anterior secuencia es exacta.

Prueba.

- r^* es inyectiva. En efecto, sea $T \in (H_c^{0,1}(M,E))^*$ tal que $r^*(T) = 0$, entonces $T \circ \widehat{r} = 0$, como $\widehat{r}$ es sobreyectiva se tiene que $T = 0$.

- $Im(r^*) \subset Ker(e^*)$. Veamos, sea $R \in Im(r^*)$ entonces $\exists T \in (H_c^{0,1}(M,E))^*$ tal que $r^* \circ T = R$, i.e., $T \circ \widehat{r} = R$. Como $e^*(R) = R \circ \widehat{e} = T \circ \underbrace{\widehat{r} \circ \widehat{e}}_{0} = 0$, entonces $R \in Ker(e^*)$.

- $Ker(e^*) \subset Im(r^*)$. Veamos, sea $R \in Ker(r^*)$, entonces $e^*(R) = 0$, i.e.,

  $$R \circ \widehat{e} = 0. \tag{6.2}$$

  Como $\widehat{r}$ es sobreyectiva, definimos $T : H_c^{0,1}(M,E) \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera $T \circ \widehat{r} = R$.

  • Primero, T está bien definido. Sea $[\omega_M] \in H_c^{0,1}(M,E)$ tal que $\widehat{r}([\omega_U],[\omega_V]) = [\omega_M] = \widehat{r}([\eta_U],[\eta_V])$, entonces $\widehat{r}([\omega_U - \eta_U],[\omega_V - \eta_V]) = 0$, es decir $([\omega_U - \eta_U],[\omega_V - \eta_V]) \in Ker(\widehat{r}) = Im(\widehat{e})$, entonces existe $[\omega_{U\cap V}] \in H_c^{0,1}(M,E)$ tal que $\widehat{e}([\omega_{U\cap V}]) = ([\omega_U - \eta_U],[\omega_V - \eta_V])$. Usando (6.2) tenemos que

  $$0 = R \circ \widehat{e}([\omega_{U\cap V}]) = R([\omega_U - \eta_U],[\omega_V - \eta_V]),$$

  entonces $R([\omega_U],[\omega_V]) = R([\eta_U],[\eta_V])$.

  • T es lineal. Es fácil de verificar del hecho que $\widehat{r}$ y R son lineales.

  • T es continua. De la relación $T \circ \widehat{r} = R$ y de los siguientes diagramas nos inducen aplicaciones $\widetilde{T}$ y $\widetilde{R}$

$$\begin{tikzcd}
\Omega_c^{0,1}(U,E) \oplus \Omega_c^{0,1}(V,E) \arrow[d, "\pi\oplus\pi"'] \arrow[dr, "\widetilde{R}"] \arrow[rr, "r"] & & \Omega_c^{0,1}(M,E) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\widetilde{T}"] & \\
H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E) \arrow[r, "R"'] & \mathbb{C} & H_c^{0,1}(M,E) \arrow[r, "T"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

que satifacen $\widetilde{T}\circ r=\widetilde{R}$ con r y $\widetilde{R}$ aplicaciones continuas. Para ver que T es continua, es suficiente probar que $\widetilde{T}$ es continua. En efecto, sea $\omega^k\to\omega$ en $\Omega_c^{0,1}(M,E)$ y $\{\rho_U,\rho_V\}$ una partición de la unidad sobre la cobertura $\{U,V\}$, entonces $I_{\rho_U}(\omega^k)\to I_{\rho_U}(\omega)$ en $\Omega_c^{0,1}(U,E)$ y $I_{\rho_V}(\omega^k)\to I_{\rho_V}(\omega)$ en $\Omega_c^{0,1}(V,E)$, i.e.,

$$\rho_U\omega^k\to\rho_U\omega \text{ en } \Omega_c^{0,1}(U,E) \text{ y } \rho_V\omega^k\to\rho_V\omega \text{ en } \Omega_c^{0,1}(V,E) \tag{6.3}$$

Como $r(\rho_U\omega^k,\rho_V\omega^k)=\omega^k$ entonces $\widetilde{T}(\omega^k)=\widetilde{T}\circ r(\rho_U\omega^k,\rho_V\omega^k)=\widetilde{R}(\rho_U\omega^k,\rho_V\omega^k)$. De (6.3) y como $\widetilde{R}$ es continua se tiene que $\widetilde{T}(\omega^k)\to\widetilde{T}(\omega)$.

$\square$

Observación 6.10

1.
$$(H_c^{0,1}(U,E)\oplus H_c^{0,1}(V,E))^*\simeq(H_c^{0,1}(U,E))^*\oplus(H_c^{0,1}(V,E))^*.$$

En efecto, desde que las proyecciones

$$H_c^{0,1}(U,E)\oplus H_c^{0,1}(V,E)\xrightarrow{\pi_1}H_c^{0,1}(U,E),$$

$$H_c^{0,1}(U,E)\oplus H_c^{0,1}(V,E)\xrightarrow{\pi_2}H_c^{0,1}(V,E),$$

son aplicaciones continuas, inducen aplicaciones

$$(H_c^{0,1}(U,E))^*\xrightarrow{\pi_1^*}(H_c^{0,1}(U,E)\oplus H_c^{0,1}(V,E))^*,$$

$$(H_c^{0,1}(V,E))^*\xrightarrow{\pi_2^*}(H_c^{0,1}(U,E)\oplus H_c^{0,1}(V,E))^*,$$

así definimos el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc}(H_c^{0,1}(U,E))^*\oplus(H_c^{0,1}(V,E))^* & \longrightarrow & (H_c^{0,1}(U,E)\oplus H_c^{0,1}(V,E))^*\\ (T,R) & \longmapsto & \pi_1^*(T)-\pi_2^*(R),\end{array}$$

cuya inversa es

$$\begin{array}{ccc}(H_c^{0,1}(U,E)\oplus H_c^{0,1}(V,E))^* & \longrightarrow & (H_c^{0,1}(U,E))^*\oplus(H_c^{0,1}(V,E))^*\\ T & \longmapsto & i_1^*(T)\oplus -i_2^*(T),\end{array}$$

donde

$$
\begin{array}{rcl}
i_1 : H_c^{0,1}(U,E) & \longrightarrow & H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E) \\
{[\omega]} & \longmapsto & ([\omega],0),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
i_2 : H_c^{0,1}(V,E) & \longrightarrow & H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E) \\
{[\omega]} & \longmapsto & (0,[\omega]),
\end{array}
$$

son las inclusiones.

2. Si $M = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ entonces

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda, E) \right)^* \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} (H_c^{0,1}(M_\lambda, E))^*.$$

Como las inclusiones

$$H_c^{0,1}(M_\gamma, E) \xrightarrow{i_\gamma} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda, E) \ ,$$

son aplicaciones inyectivas continuas, inducen aplicaciones

$$(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda, E))^* \xrightarrow{i_\gamma^*} (H_c^{0,1}(M_\gamma, E))^* \ ,$$

de ahí tenemos el isomorfismo

$$(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda, E))^* \xrightarrow{\Pi_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda^*} \prod_{\lambda \in \Lambda} (H_c^{0,1}(M_\lambda, E))^* \ ,$$

cuya inversa es

$$
\begin{array}{rcl}
\prod_{\lambda \in \Lambda} (H_c^{0,1}(M_\lambda, E))^* & \longrightarrow & (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda, E))^* \\
(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} & \longmapsto & \sum_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda^*(T_\lambda),
\end{array}
$$

donde

$$
\begin{array}{rcl}
\pi_\gamma : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda, E) & \longrightarrow & H_c^{0,1}(M_\gamma, E) \\
{[\omega]} & \longmapsto & [\omega_{|M_\gamma}],
\end{array}
$$

son las aplicaciones proyeciones.

6.3.4. Lema de Weyl

Lema 6.3.1 *(Lema de Weyl).-* Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Si $T : C_c^\infty(U) \to \mathbb{C}$ es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal con las siguientes propiedades:

1. T continua sobre $C_c^\infty(U)$.

2. $T(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}) = 0$ si $h \in C_c^\infty(U)$.

Entonces, existe $\lambda \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$T(h) = \int_U \lambda h dz \wedge d\overline{z}, \quad \forall\, h \in C_c^\infty(U).$$

Prueba. Sea $\epsilon > 0$ y definimos $U_\epsilon = \{z \in U \ : \ \text{distancia de } z \text{ a } \mathbb{C} - U \text{ es} > \epsilon\}$. Tomamos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\varphi(z) = 1$ para $|z| < \frac{\epsilon}{2}$, $\varphi(z) = 0$ para $|z| \geq \epsilon$, $0 \leq \varphi \leq 1$.

Entonces para cualquier $f \in C_c^\infty(U_\epsilon)$, definimos la función

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{\mathbb{C}} f(z+w) \frac{\varphi(w)}{w} dw \wedge d\overline{w}.$$

Es claro que $\widetilde{f} \in C_c^\infty(U)$ y afirmamos que

$$f(z) = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\mathbb{C}} f(z+w) \rho(w) dw \wedge d\overline{w}, \ \ z \in U,$$

donde $\rho(w) = \frac{\partial}{\partial \overline{w}}(\frac{\varphi(w)}{w})$, $w \neq 0$, $\rho(0) = 0$; ρ es C_c^∞ con soporte en el disco $|w| \leq \epsilon$.

En efecto, fijo $z \in U$ y sea $D_\delta(z)$ un disco de radio δ centrado en z, entonces

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\, f}{\partial \overline{z}}(z+w) \frac{\varphi(w)}{w} dw \wedge\, d\overline{w} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\mathbb{C} - D_\delta(z)} \frac{\partial\, f}{\partial \overline{w}}(z+w) \frac{\varphi(w)}{w} dw \wedge\, d\overline{w},$$

La última integral es igual a

$$-\int_{\mathbb{C} - D_\delta(z)} d(f(z+w) \frac{\varphi(w)}{w} dw) - \int_{\mathbb{C} - D_\delta(z)} f(z+w) \frac{\partial}{\partial \overline{w}} (\frac{\varphi(w)}{w}) dw \wedge\, d\overline{w},$$

por el Teorema de Stokes el primer término es igual a $\displaystyle\int_{|w|=\delta} \frac{f(z+w)\varphi(w)}{w}\, dw$ el cual converge a $2\pi\, i\, f(z) \varphi(0) = 2\pi\, i\, f(z)$, cuando $\delta \to 0$, de ahí tenemos la afirmación.

De la continuidad de T y del hecho que la integral se puede ver como sumas de Riemann tenemos que

$$T(f) = T(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \overline{z}}) + \frac{1}{2\pi\, i}\int_U f(w)\lambda(w)dw \wedge\, d\overline{w},$$

donde $\lambda(w) = T(z \mapsto \rho(z-w))$. Más aún $\lambda \in\, C^\infty(U_\epsilon)$ y como $T(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \overline{z}}) = 0$, tenemos

$$T(f) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_U f(w)\lambda(w)dw \wedge\, d\overline{w}, \quad \forall\, f \in\, C_c^\infty(U).$$

Además, si $g \in\, C_c^\infty(U_\epsilon)$, entonces

$$0 = T(\frac{\partial\, g}{\partial \overline{z}}) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_U \frac{\partial\, g}{\partial \overline{z}}(w)\lambda(w)dw \wedge\, d\overline{w} = -\frac{1}{2\pi\, i}\int_U g\frac{\partial \lambda}{\partial \overline{w}}dw \wedge\, d\overline{w},$$

ya que $g \in\, C_c^\infty(U_\epsilon)$ es arbitrario se tiene que $\frac{\partial\lambda}{\partial\overline{w}} = 0$ en U_ϵ, i.e., $\lambda \in\, \mathcal{O}(U_\epsilon)$. Esto concluye el Lema. $\square$

Tenemos la siguiente correspondecia:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(U) & \longrightarrow & (H_c^{0,1}(U))^* & & \\
\lambda & \longmapsto & T_\lambda : H_c^{0,1}(U) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & & [\omega] & \longmapsto & \displaystyle\int_U \lambda\omega dz \wedge d\overline{z}
\end{array}$$

Por el Lema 6.3.1 es un isomorfismo.

6.3.5. Teorema de Dualidad de Serre

Sean V, W espacios vectoriales complejos de dimensión finita con $dim_{\mathbb{C}}V = 1$. Vamos a construir de manera natural una aplicación

$$B : \Lambda^1(V, W^*) \times \Lambda^1(V, W) \longrightarrow \Lambda^2(V),$$

de la siguiente manera:

Sean $\eta \in \Lambda^1(V, W^*)$ y $\omega \in \Lambda^1(V, W)$, como $dim_{\mathbb{R}}V = 2$, dados $v_1, v_2 \in\, V$ definimos

$$B(\eta, \omega)(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\,[\eta(v_1)(\omega(v_2)) - \eta(v_1)(\omega(v_2))].$$

Propiedades 6.1 . B es bilineal, i.e.,

$$B(c_1\eta_1 + c_2\eta_2, \omega) = c_1 B(\eta_1, \omega) + c_2 B(\eta_2, \omega),$$

$$B(\eta, c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 B(\eta, \omega_1) + c_2 B(\eta, \omega_1),$$

$$\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C},\ \forall\, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^1(V, W^*),\ \forall \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(V, W).$$

Prueba. Inmediato de la linealidad de η_1, η_2 y ω_1, ω_2. $\square$

Sea M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. Por lo anterior, para cada $x \in M$ tenemos la aplicación bilineal

$$B_x : \Lambda^1(T_x M, E_x^*) \times \Lambda^1(T_x M, E_x) \longrightarrow \Lambda^2(T_x M),$$

así, tenemos la aplicación bilineal

$$B : \Omega^1(M, E^*) \times \Omega^1(M, E) \longrightarrow \Omega^2(M).$$

A partir de esta bilineal consideremos la siguiente forma bilineal

$$B : \Omega^{1,0}(M, E^*) \times \Omega_c^{0,1}(M, E) \longrightarrow \Omega_c^2(M).$$

Finalmente como $\mathcal{O}^{1,0}(M, E^*) \subseteq \Omega^{1,0}(M, E^*)$ definimos la aplicación bilineal

$$\begin{array}{rcl} \langle\, , \,\rangle : \mathcal{O}^{1,0}(M, E^*) \times \Omega_c^{0,1}(M, E) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (s \ , \ \omega) & \longmapsto & \langle s, \omega \rangle := \int_M B(s, \omega). \end{array}$$

Observación 6.11

En el caso que consideremos $U \subset M$ abierto, $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ una trivialización de E, $\varphi^* : p^{*-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ una trivialización de E^*, $z : U \to D$ una carta, $s \in \mathcal{O}^{1,0}(M, E^*)$ y $\omega \in \Omega_c^{0,1}(M, E)$ tal que $sop(\omega) \subset U$ entonces

$$\varphi^*(s(x)) = (x, \lambda_i(x)dz, ..., \lambda_n(x)dz) \text{ y } \varphi(\omega(x)) = (x, g_1(x)d\overline{z}, ..., g_n(x)d\overline{z}),$$

donde $\lambda_i \in \mathcal{O}(U)$, $g_i \in C_c^\infty(U)$, $i = 1, .., n$. Así tenemos que:

$$\langle s, \omega \rangle = \int_U \sum_{i=1}^n \lambda_i \, g_i \, dz \wedge d\overline{z}.$$

A partir de esta observación pasamos a verificar algunas propiedades de esta bilineal.

Propiedades 6.2

1. $\langle s, \overline{\partial} f \rangle = 0$, $\forall\, f \in C_c^\infty(M, E)$.

2. Si $\omega^k \to \omega$ en $\Omega_c^{0,1}(M, E)$ entonces $\langle s, \omega^k \rangle \to \langle s, \omega \rangle$, $\forall\, s \in \mathcal{O}^{1,0}(M, E^*)$.

3. Si $sop(\omega) \subset U$ entonces $\langle s, \omega \rangle = \langle s_{|_U}, \omega_{|_U} \rangle$, $\forall\, s \in \mathcal{O}^{1,0}(M, E^*)$.

Prueba. 3. Es inmediato.

2. Se verifica inmediato por la Observación 6.11.

1. Sin perdida de generalidad podemos suponer *sop*$(\omega) \subset U$ considerando U como la observación anterior, luego tenemos que $\omega = \overline{\partial} f$ entonces $\varphi(\omega(x)) = (x, \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}} d\overline{z}, ..., \frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}} d\overline{z})$ donde *sop*$(f_i) \subset U,\ i = 1, .., n$.

Así tenemos que

$$\langle s, \omega \rangle = \int_U \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}} \, dz \wedge d\overline{z} = -\int_U \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \overline{z}} f_i \, dz \wedge d\overline{z} = 0.$$

□

Por las propiedades anteriores de $\langle , \rangle$ se puede definir a nivel de cohomología:

$$\begin{array}{rcl} \langle\ ,\ \rangle_M : \mathcal{O}^{1,0}(M, E^*) \times H_c^{0,1}(M, E) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (s, [\omega]) & \longmapsto & \langle s, \omega \rangle. \end{array}$$

A partir de esta aplicación bilineal definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rclcrcl} D_M : H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) & \longrightarrow & (H_c^{0,1}(M, E))^* & & & & \\ s & \longmapsto & D_M(s) : & & H_c^{0,1}(M, E) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & [\omega] & \longmapsto & \langle s, \omega \rangle, \end{array}$$

donde $\mathcal{O}^{1,0}(E^*)$ es el haz generado por las aplicaciones $s \in \mathcal{O}^{1,0}(U, E^*)$, $U \subset M$ abierto.

Teorema 6.3.2 *(Dualidad de Serre).-* Sean M una superficie de Riemann y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. La aplicación

$$D_M : H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \longrightarrow (H_c^{0,1}(M, E))^*,$$

es un isomorfismo llamado el **Isomorfismo de Serre**.

Prueba. Para ello veamos paso a paso.

1. Tome $M = U \cup V$, donde U y V son abiertos de M tales que D_U, D_V y $D_{U \cap V}$ son isomorfismos. Considere entonces las siguientes secuencias de Mayer-Vietoris para la cohomología de haces y la cohomología de Dolbeault de soporte compacto:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "D_M"] & H^0(U, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \oplus H^0(V, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[r, "-^*"] \arrow[d, "D_U \oplus D_V"] & H^0(U \cap V, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[d, "D_{U \cap V}"] \\ 0 \arrow[r] & (H_c^{0,1}(M, E))^* \arrow[r, "\widehat{r}^*"] & (H_c^{0,1}(U, E))^* \oplus (H_c^{0,1}(V, E))^* \arrow[r, "\widehat{e}^*"] & (H_c^{0,1}(U \cap V, E))^* . \end{tikzcd}$$

Afirmamos que el diagrama de arriba es conmutativo. Así, como D_U, D_V y $D_{U\cap V}$ son isomorfismos se tiene que D_M es un isomorfismo. En efecto, sean $\pi_1 : H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E) \to H_c^{0,1}(U,E)$ y $\pi_2 : H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E) \to H_c^{0,1}(V,E)$ las proyecciones canónicas a la primera y segunda coordenada respectivamente, luego tenemos sus respectivos duales $\pi_1^* : (H_c^{0,1}(U,E))^* \to (H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E))^*$ y $\pi_2^* : (H_c^{0,1}(V,E))^* \to (H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E))^*$, esto nos permite definir un isomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \pi_1^* - \pi_2^* : & (H_c^{0,1}(U,E))^* \oplus (H_c^{0,1}(V,E))^* & \longrightarrow & (H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E))^* \\ & (f,g) & \longmapsto & \pi_1^*(f) - \pi_2^*(g). \end{array}$$

En el primer diagrama tenemos:

$$\begin{tikzcd} H^0(M,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "D_M"] & H^0(U,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \oplus H^0(V,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[d, "D_U \oplus D_V"] \\ (H_c^{0,1}(M,E))^* \arrow[r, "\widehat{r}^*"] \arrow[dr, "\widehat{r}^*"'] & (H_c^{0,1}(U,E))^* \oplus (H_c^{0,1}(V,E))^* \arrow[d, "\pi_1^* - \pi_2^*"] \\ & (H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E))^* \end{tikzcd}$$

Veamos que $\widehat{r}^* \circ D_M = (\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V) \circ i^*$.
Sea $s \in H^0(M,\mathcal{O}^{1,0}(E^*))$ y $(\omega_U, \omega_V) \in H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} (\widehat{r}^* \circ D_M(s))(\omega_U,\omega_V) & = & D_M(s)(\widehat{r}(\omega_U,\omega_V)) \\ & = & D_M(s)(\widetilde{\omega_U}^M - \widetilde{\omega_V}^M) \\ & = & \langle s, \widetilde{\omega_U}^M - \widetilde{\omega_V}^M \rangle \\ & = & \langle s, \widetilde{\omega_U}^M \rangle - \langle s, \widetilde{\omega_V}^M \rangle, \end{array}$$

luego por que el $sop(\widetilde{\omega_U}^M) \subset U$ y el $sop(\widetilde{\omega_V}^M) \subset V$ tenemos

$$(\widehat{r}^* \circ D_M(s))(\omega_U,\omega_V) = \langle s_{|_U}, \omega_U \rangle - \langle s_{|_V}, \omega_V \rangle. \tag{6.4}$$

$$\begin{array}{rcl} ((\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V) \circ i^*(s))(\omega_U,\omega_V) & = & (\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V)(s_{|_U}, s_{|_V})(\omega_U,\omega_V) \\ & = & (\pi_1^* - \pi_2^*)(D_U(s_{|_U}), D_V(s_{|_V}))(\omega_U,\omega_V) \\ & = & (\pi_1^*(D_U(s_{|_U})) - \pi_2^*(D_V(s_{|_V})))(\omega_U,\omega_V) \\ & = & \pi_1^*(D_U(s_{|_U}))(\omega_U,\omega_V) - \pi_2^*(D_V(s_{|_V}))(\omega_U,\omega_V) \\ & = & D_U(s_{|_U})(\omega_U) - D_V(s_{|_V})(\omega_V), \end{array}$$

y por lo tanto tenemos

$$((\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V) \circ i^*(s))(\omega_U,\omega_V) = \langle s_{|_U}, \omega_U \rangle - \langle s_{|_V}, \omega_V \rangle. \tag{6.5}$$

De la igualdad (6.4) y la igualdad (6.5) se tiene la igualdad

$$\widehat{r}^* \circ D_M = (\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V) \circ i^*.$$

En el segundo diagrama tenemos:

$$\begin{tikzcd}
H^0(U,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \oplus H^0(V,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[r, "-^*"] \arrow[d, "D_U \oplus D_V"] & H^0(U\cap V,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[d, "D_{U\cap V}"] \\
(H_c^{0,1}(U,E))^* \oplus (H_c^{0,1}(V,E))^* \arrow[r, "\widehat{e}^*"] \arrow[d, "\pi_1^*-\pi_2^*"] & (H_c^{0,1}(U\cap V,E))^* \\
(H_c^{0,1}(U,E) \oplus H_c^{0,1}(V,E))^* \arrow[ur, "\widehat{e}^*"] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $D_{U\cap V} \circ -^* = \widehat{e}^* \circ (\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V)$.
Sea $(s_U, s_V) \in H^0(U,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \oplus H^0(V,\mathcal{O}^{1,0}(E^*))$ y $\omega \in H_c^{0,1}(U\cap V, E)$ entonces

$$\begin{aligned}
(D_{U\cap V} \circ -^*(s_U, s_V))(\omega) &= D_{U\cap V}(s_{U|_{U\cap V}} - s_{V|_{U\cap V}})(\omega) \\
&= \langle s_{U|_{U\cap V}} - s_{V|_{U\cap V}}, \omega\rangle,
\end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos

$$(D_{U\cap V} \circ -^*(s_U, s_V))(\omega) = \langle s_{U|_{U\cap V}}, \omega\rangle - \langle s_{V|_{U\cap V}}, \omega\rangle. \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
(\widehat{e}^* \circ (\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V)(s_U, s_V))(\omega) &= (\widehat{e}^* \circ (\pi_1^* - \pi_2^*)(D_U(s_U), D_V(s_V)))(\omega) \\
&= \widehat{e}^*(\pi_1^*(D_U(s_U)) - \pi_2^*(D_V(s_V)))(\omega) \\
&= (\pi_1^*(D_U(s_U)) - \pi_2^*(D_V(s_V)))(\widehat{e}(\omega)) \\
&= (\pi_1^*(D_U(s_U)) - \pi_2^*(D_V(s_V)))(\widetilde{\omega}^U, \widetilde{\omega}^V) \\
&= D_U(s_U)(\widetilde{\omega}^U) - D_V(s_V)(\widetilde{\omega}^V) \\
&= \langle s_U, \widetilde{\omega}^U\rangle - \langle s_V, \widetilde{\omega}^V\rangle,
\end{aligned}$$

como el $sop(\widetilde{\omega}^U) \subset U \cap V$ y el $sop(\widetilde{\omega}^V) \subset U \cap V$ tenemos

$$(\widehat{e}^* \circ (\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V)(s_U, s_V))(\omega) = \langle s_{U|_{U\cap V}}, \omega\rangle - \langle s_{V|_{U\cap V}}, \omega\rangle. \tag{6.7}$$

De la igualdad (6.6) y la igualdad (6.7) obtenemos esto

$$D_{U\cap V} \circ -^* = \widehat{e}^* \circ (\pi_1^* - \pi_2^*) \circ (D_U \oplus D_V).$$

2. Si $M = \sqcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ y D_{M_λ} es un isomorfismo $\forall\, \lambda \in \Lambda$, entonces D_M es un isomorfismo.

En efecto, para ello veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
H^0(M,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "D_M"] & \Pi_{\lambda\in\Lambda} H^0(M_\lambda,\mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \arrow[d, "\Pi_{\lambda\in\Lambda} D_{M_\lambda}"] \\
(H_c^{0,1}(M,E))^* \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "r^*"] & \Pi_{\lambda\in\Lambda}(H_c^{0,1}(M_\lambda,E))^* \\
 & (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda,E))^* \arrow[u, "\Pi_{\lambda\in\Lambda} i_\lambda^*"]
\end{tikzcd}$$

donde $r^*:(H_c^{0,1}(M,E))^*\to(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda,E))^*$ es inducido de la aplicación

$$\begin{array}{rcl} r:\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_c^{0,1}(M_\lambda,E) & \longrightarrow & H_c^{0,1}(M,E) \\ \oplus_{\lambda\in\Lambda}[\omega_\lambda] & \longmapsto & [\omega], \end{array}$$

donde $\omega_{|M_\lambda}=\omega_\lambda$.

Sea $s\in H^0(M,\mathcal{O}^{1,0}(E^*))$ y $(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\Pi_{\lambda\in\Lambda}H_c^{0,1}(M_\lambda,E)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} ((\Pi_{\lambda\in\Lambda}D_{M_\lambda})\circ\pi(s))(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} & = & ((\Pi_{\lambda\in\Lambda}D_{M_\lambda})\circ(s_{|M_\lambda})_{\lambda\in\Lambda})(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \\ & = & ((D_{M_\lambda}(s_{|M_\lambda}))(\omega_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}, \end{array}$$

y por lo tanto tenemos

$$((\Pi_{\lambda\in\Lambda}D_{M_\lambda})\circ\pi(s))(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}=(\langle s_{|M_\lambda},\,\omega_\lambda\rangle)_{\lambda\in\Lambda}. \tag{6.8}$$

$$\begin{array}{rcl} ((\Pi_{\lambda\in\Lambda}i_\lambda^*)\circ r^*\circ D_M(s))(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} & = & ((r^*\circ D_M(s))(i_\lambda(\omega_\lambda)))_{\lambda\in\Lambda} \\ & = & ((D_M(s))(r(i_\lambda(\omega_\lambda))))_{\lambda\in\Lambda} \\ & = & ((D_M(s))(\widetilde{\omega}_\lambda^M))_{\lambda\in\Lambda} \\ & = & (\langle s,\,\widetilde{\omega}_\lambda^M\rangle)_{\lambda\in\Lambda}, \end{array}$$

y por lo tanto tenemos

$$((\Pi_{\lambda\in\Lambda}i_\lambda^*)\circ r^*\circ D_M(s))(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}=(\langle s_{|M_\lambda},\,\omega_\lambda\rangle)_{\lambda\in\Lambda}. \tag{6.9}$$

De la igualdad (6.8) y la igualdad (6.9) obtenemos

$$(\Pi_{\lambda\in\Lambda}D_{M_\lambda})\circ\pi=(\Pi_{\lambda\in\Lambda}i_\lambda^*)\circ r^*\circ D_M.$$

Como π, r^*, $\Pi_{\lambda\in\Lambda}D_{M_\lambda}$ y $\Pi_{\lambda\in\Lambda}i_\lambda^*$ son isomorfismos entonces D_M es un isomorfismo.

3. Sea $M=\cup_{B\in\mathcal{B}}B$ una cobertura abierta de M tal que $D_{B_1\cap\ldots\cap B_j}$ es un isomorfismo $\forall\, B_1,...,B_j\in\mathcal{B}$.

   Si $\mathcal{B}$ es finito entonces D_M es un isomorfismo.

4. Suponiendo $\mathcal{B}$ una base de abiertos de M tal que si $U, V \in \mathcal{B}$ entonces $U \cap V \in \mathcal{B}$.

   Si D_U es un isomorfismo para todo $U \in \mathcal{B}$, entonces D_M es un isomorfismo.

   En efecto, tomemos $\overline{U}_1 \Subset \overline{U}_2 \Subset ... \Subset \overline{U}_j \Subset ...$ exhausión de M.

   Primero cubrimos $\overline{U}_1$ por un número finito de abiertos de $\mathcal{B}$ contenidos en U_2 y lo denotamos por U_1', hacemos lo mismo con $\overline{U}_3 - U_2$ cubriendolo por un número finito de abiertos de $\mathcal{B}$ contenidos en $U_4 - \overline{U}_1$ que no intersectan a U_1' y lo denotamos por U_3' y así sucesivamente. Luego usando 4. y 3. tenemos que $D_{U_1'}$, $D_{U_3'}$, $\ldots$ son isomorfimos, llamando a su unión U y usando 2. tenemos que D_U es un isomorfismo.

   Análogamente podemos definir los abiertos U_2', U_4', $\ldots$ y usando 4. y 3. tenemos que $D_{U_2'}$, $D_{U_4'}$, $\ldots$ son isomorfimos y denotando a su unión V y usando 2. tenemos que D_V es un isomorfismo.

   Análogamente se tiene que $D_{U \cap V}$ es un isomorfismo. Luego por 1. se tiene que D_M es un isomorfismo.

5. D_M es un isomorfismo para todo M abierto de $\mathbb{C}$. $M = \cup \mathrm{B}$ donde B es rectángulo abierto trivilizador. Luego por Lema de Weyl D_B es un isomorfismo entonces por 4. D_M es un isomorfismo.

6. En el caso general de M superficie de Riemann se toma una base formada por abiertos de M biholomorfos a abiertos de $\mathbb{C}$. Así tenemos que D_M es un isomorfismo.

$\square$

6.4. Aplicaciones

6.4.1. Teorema de Finitud de Serre

Teorema 6.4.1 .- Sea M una superficie de Riemann compacta y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. Entonces el espacio $H^0(M, \mathcal{O}_E)$ de secciones globales de E sobre M es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

Prueba. Considere vecindades coordenadas $\{U_i, z_i\}_{i=1}^N$ con las siguientes propiedades:

1. $z_i : U_i \to \triangle = \{z \in \mathbb{C} / \, |z| < 1\}$ es una carta compleja.

2. Si $V_i = z_i^{-1}\{z \in \mathbb{C} / \, |z| < 1/2\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^N V_i = M$.

3. Existen vecindades W_i de $\overline{U}_i$ y trivializaciones $\varphi_i : p^{-1}(W_i) \to W_i \times \mathbb{C}^n$ con sus correspondientes funciones transiciones $g_{ij} : W_{ij} \to GL_n(\mathbb{C})$.

Sea $s \in H^0(M, \mathcal{O}_E)$; entonces s es representado por una familia $\{s_i\}_{i=1}^N$ de aplicaciones holomorfas $s_i : W_i \to \mathbb{C}^n$ tal que $s_i(x) = g_{ji}(x)s_j(x)\ \forall\, x \in W_{ij}$.

Defino

$$\|s\|^U = \max_{1\leq i\leq n} \sup_{x\in U_i} |s_i(x)|,$$
$$\|s\|^V = \max_{1\leq i\leq n} \sup_{x\in V_i} |s_i(x)|.$$

Afirmación: Existe $C > 0$ tal que, $\forall\, s \in H^0(M, \mathcal{O}_E)$ se tiene que $\|s\|^U \leq C\|s\|^V$.

En efecto, se $x_0 \in \overline{U}_i$, tal que $|s_i(x_0)| = \|s\|^U$. Tomamos j tal que $x_0 \in Vj$, tenemos que

$$|s_i(x_o)| = |g_{ji}(x_0)s_j(x_0)| \leq C|s_j(x_0)| \leq C\|s\|^V,$$

donde $C = \max_{1\leq i,j\leq n} \sup_{x\in U_{ij}} \|g_{ji}(x)\|$, $\|g\|$ denota la norma del operador $g \in GL_n(\mathbb{C})$.

Sea $a_i \in U_i$ con $z_i(a_i) = 0$. Probaremos lo siguiente (Lema de Schwarz). Sea $s \in H^0(M, \mathcal{O}_E)$ y supongamos que $ord_{a_i}(s) \geq k$ ($k \geq 0$ un entero), $i = 1, \ldots, N$. Entonces $\|s\|^V \leq 2^{-k}\|s\|^U$. En efecto, $\dfrac{s_i}{z_i^k}$ es holomorfa en U_i, por lo tanto

$$\sup_{V_i} \left|\frac{s_i}{z_i^k}\right| \leq \sup_{\partial U_i} \left|\frac{s_i}{z_i^k}\right| = \sup_{\partial U_i} |s_i| \leq \|s\|^U.$$

De ahí, si $x \in V_i$, $|s_i(x)| \leq \sup_{z_i\in V_i}(|z_i^k| \left|\dfrac{s_i}{z_i^k}\right|) \leq 2^{-k}\|s\|^U$.

Además, si $s \in H^0(M, \mathcal{O}_E)$ y $ord_{a_i}(s) \geq k$, tenemos que

$$\|s\|^U \leq C\|s\|^V \leq 2^{-k}C\|s\|^U.$$

Entonces, si $2^k > C$, se sigue que $s = 0$.

Si $\mathcal{O}_{a_i}$ es el anillo de germenes de funciones holomorfas en a_i y m_i^k es el ideal en $\mathcal{O}_{a_i}$, generado por z_i^k, entonces $\mathcal{O}_{a_i}/m_i^k$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión k. Más aún, si $2^k > C$ la aplicación

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, \mathcal{O}_E) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{C}^n \otimes (\mathcal{O}_{a_i}/m_i^k) \\ \\ s & \longmapsto & \oplus_{i=1}^N (s_i \, mod \, z_i^k), \end{array}$$

es inyectiva, porque el Kernel consiste exactamente de secciones s con $ord_{a_i}(s) \geq k,\ \ \forall\, i$. Esto prueba el teorema. $\square$

Teorema 6.4.2 *(Teorema de Finitud).-* Sea M una superficie de Riemann compacta y E un fibrado vectorial holomorfo sobre M. Entonces $H^1(M, \mathcal{O}_E)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

Prueba. Como M es compacta aplicamos Dualidad de Serre, entonces

$$H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \simeq (H^{0,1}(M, E))^*$$

Por el Teorema 6.4.1 $H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*))$ tiene dimensión finita, entonces $(H^{0,1}(M, E))^*$ tiene dimensión finita.

Observando que la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} ev : H^{0,1}(M, E) & \longrightarrow & ((H^{0,1}(M, E))^*)^* \\ [\omega] & \longmapsto & ev([\omega]) : \quad \begin{array}{rcl} (H^{0,1}(M, E))^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ T & \longmapsto & T([\omega]) \end{array} \end{array}$$

es inyectiva (Por el Teorema de Hahn-Banach).

Entonces $H^{0,1}(M, E)$ tiene dimensión finita. Finalmente por el Isomorfismo de Dolbeault tenemos que $H^1(M, \mathcal{O}_E)$ tiene dimensión finita. $\square$

Corolario 6.4.1 . Sea M una superficie de Riemann compacta y E es un fibrado vectorial holomorfo sobre M. Entonces

$$H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) \simeq (H^1(M, \mathcal{O}_E))^*.$$

En particular tienen la misma dimensión, i.e., $dim\, H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)) = dim\, H^1(M, \mathcal{O}_E)$.

Del Corolario anterior, pasando a la forma tensorial tenemos que

$$H^0(M, \mathcal{O}_M^{1,0} \otimes E^*) \simeq (H^1(M, \mathcal{O}_E))^*,$$

donde $\mathcal{O}_M^{1,0}$ es el fibrado de las $(1,0)$-formas holomorfas sobre M llamado el **fibrado canónico**.

Tomamos F un fibrado vectorial holomorfo sobre M y hacemos que $E = \mathcal{O}_M^{1,0} \otimes F^*$, entonces $\mathcal{O}_M^{1,0} \otimes E^* = \mathcal{O}_M^{1,0} \otimes (\mathcal{O}_M^{1,0})^* \otimes F = F$, ya que para cualquier fibrado lineal L, $L \otimes L^*$ es trivial. De ahí tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.4.2 . Sea M una superficie de Riemann compacta y E es un fibrado vectorial holomorfo sobre M. Entonces

$$H^0(M, \mathcal{O}_E) \simeq (H^1(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*)))^*.$$

En particular tienen la misma dimensión, i.e., $dim\, H^0(M, \mathcal{O}_E) = dim\, H^1(M, \mathcal{O}^{1,0}(E^*))$.

Teorema 6.4.3 . Sea M una superficie de Riemann compacta. Entonces

$$\mathfrak{g} = dim\, H^1(M, \mathcal{O}),$$

donde $\mathfrak{g}$ denota el género topológico de M.

Prueba. En efecto, a partir de la siguiente secuencia exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \mathcal{O}^{1,0} \longrightarrow 0\,,$$

inducimos la secuencia exacta en coholomogía

$$0 \longrightarrow H^0(M, \mathbb{C}) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}) \longrightarrow H^1(M, \mathbb{C})$$

$$\longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}) \xrightarrow{d} H^1(M, \mathcal{O}^{1,0}) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(M, \mathcal{O})\,,$$

Del hecho que $H^2(M, \mathcal{O}) = 0$ Corolario 4.7.4, tenemos que

$$\begin{aligned} &dim\, H^0(M, \mathbb{C}) - dim\, H^0(M, \mathcal{O}) + dim\, H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}) - dim\, H^1(M, \mathbb{C}) + \\ &dim\, H^1(M, \mathcal{O}) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}^{1,0}) + dim\, H^2(M, \mathbb{C}) = 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Aplicando los Corolarios 6.4.1 y 6.4.2 al fibrado lineal holomorfo trivial tenemos que

$$dim\, H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}) = \dim\ H^1(M, \mathcal{O}) \text{ y } dim\, H^0(M, \mathcal{O}) = dim\, H^1(M, \mathcal{O}^{1,0}).$$

Además tenemos que $H^0(M, \mathcal{O}) \simeq \mathbb{C}$, reemplazndo en la ecuación 6.10 tenemos que

$$2 - 2\, dim\, H^1(M, \mathcal{O}^*) = dim\, H^0(M, \mathbb{C}) - dim\, H^1(M, \mathbb{C}) + dim\, H^2(M, \mathbb{C}),$$

pero se sabe que la igualdad de la izquierda es igual a la suma alternada de los números de Betti, .i.e., igual a la característica de Euler de M para ello Ver [15] y [17] página página 73, luego aplicando el Teorema de Poincaré-Hopf (Ver [17], página 206) y a su vez el Teorema de Clasificación de Superficies (Ver [1]) es igual a $2 - 2\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ es el género topológico de M. De ahí se concluye que $\mathfrak{g} = dim\, H^1(M, \mathcal{O})$. $\square$

6.4.2. Nulidad de $H^1(M, \mathcal{M}^*)$

Teorema 6.4.4 .- Sea M una superficie de Riemann compacta y L un fibrado lineal holomorfo sobre M. Entonces L tiene una sección meromorfa no nula que no es holomorfa.

Prueba. Sean $a \in M$ y (U, z) una carta de a con $z(a) = 0$; asumamos también que existe una trivialización holomorfa $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$. Tomamos $k \geq 1$ un entero y s_k una sección meromorfa de L sobre U tal que $\varphi_U(s_k(x)) = (x, \frac{1}{(z(x))^k})$, $x \in U \backslash \{a\}$.

Considere la cobertura abierta $\mathcal{U} = \{U, M\backslash\{a\}\}$ y los conjuntos $f_{12}^k = s_k|_{U\backslash\{a\}}$, $f_{21}^k = -f_{12}^k$ y $f_{11}^k = f_{22}^k = 0$. Esto define elementos $f^k \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$. Desde que $H^1(M, \mathcal{O}_L)$ tiene dimensión finita y $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L) \to H^1(M, \mathcal{O}_L)$ es inyectiva, si $d = dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \mathcal{O}_L)$, entonces existen constantes $c_1, ..., c_{d+1}$ no todos nulos tal que $c_1 f^1 + ... + c_{d+1} f^{d+1} \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$, i.e. existen secciones holomorfas u_1, u_2 de L sobre U, $M\backslash\{a\}$ respectivamente tal que

$c_1 s_1 + ... + c_r s_r + ... + c_{d+1} s_{d+1} = u_2 - u_1$ en $U\backslash\{a\}$, $c_r \neq 0$ para algún $r \in \{1, ..., d+1\}$.

La sección $s = u_2$ de L sobre $M\backslash\{a\}$ es meromorfa (no holomorfa) sobre M ya que

$$s = \sum_{i=1}^{d+1} c_i s_i + u_1 \text{ en } U\backslash\{a\}, \text{ con } c_r \neq 0.$$

□

Corolario 6.4.3 . *Sea M una superficie de Riemann compacta. Entonces $H^1(M, \mathcal{M}^*) = 0$.*

Corolario 6.4.4 . *Sea M una superficie de Riemann compacta. Entonces*

$$Div(M) \simeq H^1(M, \mathcal{O}^*) \text{ y } Div(M) \simeq Pic(M).$$

Observación 6.12 . Este argumento muestra que si $g = dim\, H^1(M, \mathcal{O})$ y $a \in M$, existe una función holomorfa sobre $M\backslash\{a\}$ (función meromorfa no constante sobre M) con polo de orden $\leq g + 1$ en a.

Finalmente pasamos al último capítulo donde probaremos el Teorema de Riemann-Roch.

Capítulo 7

Teorema de Riemann-Roch y Aplicaciones.

En este capítulo comenzaremos desarrollando la primera clase de Chern y probaremos algunas propiedades de esta clase. A partir de esta clase enunciaremos y probaremos el Teorema de Riemann-Roch. Para finalizar esta tesis daremos algunas aplicaciones de este teorema.

7.1. Primera clase de Chern

Sea M una superficie de Riemann compacta. Considere la siguiente secuencia exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 ,$$

donde el homomorfismo e es definido como $e(f) = exp\,(2\pi\, if)$.

Esta secuencia induce una secuencia exacta larga en cohomología

$$H^1(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M,\mathcal{O}) .$$

Por el Corolario 4.7.4, $H^2(M,\mathcal{O})$=0, luego obtenemos la siguiente secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^1(M,\mathcal{O})/H^1(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \tag{7.1}$$

A partir de esta secuencia tenemos definido el siguiente homomorfismo.

El homomorfismo característico:

$$c : H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Como $H^1(M, \mathcal{O}^*) \simeq Pic(M)$ induce la aplicación

$$c : Pic(M) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}),$$

es decir, para L un fibrado lineal holomorfo asociamos un elemento $c(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ que será llamado la **clase característica ó clase de Chern del fibrado lineal** L.

De la misma manera podemos tomar la secuencia exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty *} \longrightarrow 0\ ,$$

y del hecho que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{O} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{O}^* \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathcal{C}^\infty \arrow[r, "e"] & \mathcal{C}^{\infty *} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tenemos el siguiente diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^1(M, \mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & H^1(M, \mathcal{O}^*) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "i^*"] & H^2(M, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
H^1(M, \mathcal{C}^\infty) \arrow[r] & H^1(M, \mathcal{C}^{\infty *}) \arrow[r, "c"] & H^2(M, \mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(M, \mathcal{C}^\infty)
\end{tikzcd}$$

El homomorfismo c en la segunda línea es un isomorfismo ya que $\mathcal{C}^\infty$ es un haz fino. A partir de que $c\, i^* = c$, y que c es un isomorfismo en la segundo línea tenemos que dos fibrados lineales holomofos que son isomorfos C^∞ en el sentido de ser isomorfos como fibrados diferenciables son también isomorfos en el sentido de fibrados holomorfos.

Proposición 7.1.1 .- Sean M una superficie de Riemann compacta y L un fibrado lineal holomorfo sobre M. Sean $g = \{g_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ una representación del fibrado lineal, y $\{r_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}_+\}$ una familia de funciones C^∞ que satisfacen $r_\alpha = r_\beta |g_{\alpha\beta}|^2$ en $U_{\alpha\beta}$. Entonces

$$\omega = \frac{1}{2\pi i}\, \partial\overline{\partial} \log r_\alpha \in \Gamma(M, \Omega^2) \quad \text{y} \quad c(L) = \iint_M \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_M \partial\overline{\partial} \log r_\alpha.$$

Prueba. Considere la siguiente secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \,.$$

Teniendo en cuenta la aplicación

$$\delta^* : H^1(M, \mathcal{O}^*) \to H^2(M, \mathbb{Z})$$

Esta aplicación es construida del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \arrow[r, "e"] & \overline{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) \arrow[r] & 0 \\
 & & (\frac{1}{2\pi i} \log g_{\alpha\beta}) \arrow[d, "\delta"] & (g_{\alpha\beta}) \arrow[l, mapsto] & \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \arrow[r] & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}) & & \\
 & (c_{\alpha\beta\gamma}) & (c_{\alpha\beta\gamma}) \arrow[l, mapsto] & &
\end{tikzcd}$$

Podemos tomar U_α simplemente conexos, de forma que, podemos calcular $\log g_{\alpha\beta}$, asimismo

$$(\sigma_{\alpha\beta}) = \left(\frac{1}{2\pi i} \log g_{\alpha\beta} \right) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}),$$

i.e., es preimagen de $(g_{\alpha\beta})$ por e.

Así, la clase característica $c(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ es representado por el cociclo $(c_{\alpha\beta\gamma}) \in Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$, donde $c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi i}(\log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma} + \log g_{\alpha\beta})$, entonces $(c_{\alpha\beta\gamma}) \in Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Por el Teorema de DeRham, $H^2(M, \mathbb{C}) \cong H^2_{dR}(M, \mathbb{C})$, esto se sigue de la siguiente secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} 0 \,.$$

Introduciendo el subhaz $\Omega^1_c \subseteq \Omega^1$ de formas diferenciables cerradas, considere la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1_c \longrightarrow 0 \,.$$

El 2-cociclo $(c_{\alpha\beta\gamma})$ puede ser considerado como un elemento de $Z^2(\mathcal{U}, \Omega^0)$ el cual será el coborde de alguna 1-cocadena $(\sigma_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega^0)$. Entonces $(d\sigma_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega^1_c)$. Dicho de otro modo del diagrama

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & C^1(\mathcal{U},\Omega^0) & \xrightarrow{d} & \overline{C}^1(\mathcal{U},\Omega^1_c) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \\
 & & (\sigma_{\alpha\beta}) & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & (d\sigma_{\alpha\beta}) \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
0 \longrightarrow C^2(\mathcal{U},\mathbb{C}) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U},\Omega^0) & & \\
 & & & & \\
(c_{\alpha\beta\gamma}) & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & (c_{\alpha\beta\gamma}) & &
\end{array}
$$

Ahora de la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \Omega^1_c \longrightarrow \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \longrightarrow 0\ ,$$

el elemento $(d\sigma_{\alpha\beta})$ se considera como un elemento de $Z^1(\mathcal{U},\Omega^1)$ el cual será el coborde de alguna 0-cocadena $(\tau_\alpha) \in C^0(\mathcal{U},\Omega^1)$, con la condición que $d\sigma_{\alpha\beta} = \tau_\beta - \tau_\alpha$. Entonces $d\tau_\alpha = d\tau_\beta$, así $(d\tau_\alpha)$ define una forma diferencial global, así tenemos que

$$\tau_\alpha = \tau_\beta - \frac{1}{2\pi i} d\log g_{\alpha\beta} \quad \text{en } U_{\alpha\beta}.$$

Esto se observa del siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & C^0(\mathcal{U},\Omega^1) & \xrightarrow{d} & \overline{C}^0(\mathcal{U},\Omega^2) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \\
 & & (\tau_\alpha) & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & (d\tau_\alpha) \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
0 \longrightarrow C^1(\mathcal{U},\Omega^1_c) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U},\Omega^1) & & \\
 & & & & \\
(d\sigma_{\alpha\beta}) & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & (d\sigma_{\alpha\beta}) & &
\end{array}
$$

La forma diferencial $\varphi \in \Gamma(M,\Omega^2) = \Omega^2(M)$ definido por $\varphi = d\tau_\alpha$ en U_α, luego la clase de Chern es dado por $c(L) = \iint_M \varphi$. Para finalizar determinemos τ_α. De la relación de r_α y tomando logaritmo tenemos

$$\log r_\alpha = \log r_\beta + \log g_{\alpha\beta} + \log \overline{g}_{\alpha\beta} \quad \text{en } U_{\alpha\beta}.$$

Ya que $g_{\alpha\beta}$ son holomorfos, $\partial \log g_{\alpha\beta} = d \log g_{\alpha\beta}$ y $\partial \log \overline{g}_{\alpha\beta} = 0$; así la forma diferencial $\tau_\alpha = \frac{i}{2\pi} \partial \log r_\alpha$. Así tenemos

$$c(L) = \frac{1}{2\pi i} \iint_M \partial\overline{\partial} \log r_\alpha .$$

Además, observar que si existe $\{r'_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}_+\}$ otra familia de funciones C^∞ que satisfacen $r'_\alpha = r'_\beta |g_{\alpha\beta}|^2$ en $U_{\alpha\beta}$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_M \partial\overline{\partial} \log r'_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \iint_M \partial\overline{\partial} \log r_\alpha .$$

En efecto, siguiendo la misma notación y denotando por $\tau'_\alpha = \frac{i}{2\pi i} \partial \log r'_\alpha$ tenemos que $\tau'_\alpha - \tau_\alpha = \tau'_\beta - \tau_\beta$ en $U_{\alpha\beta}$, así definimos una 1-forma global f sobre M tal que $f|_{U_\alpha} = \tau_\alpha - \tau'_\alpha$ entonces $df = d\tau_\alpha - d\tau'_\alpha$. Aplicando el Teorema de Stokes se concluye la afirmación. Finalmente se concluye que no depende de la cobertura si es refinada. $\square$

Observación 7.1 .

Existencia de la familia $\{r_\alpha\}$, sea $\mathcal{R}^*$ el haz de germenes de funciones C^∞ con valores positivas, la colección de $\{|g_{\alpha\beta}|\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{R}^*)$, y las funciones $\{r_\alpha\}$ forman una 0-cadena teniendo como cociclo a éste, es suficiente mostrar que $H^1(M, \mathcal{R}^*) = 0$. Ahora el subhaz $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}^\infty$ de funciones con valores reales es claramente fino, el homomorfismo exponencial $e : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^*$ resulta ser un isomorfismo, de ahí

$$H^1(M, \mathcal{R}^*) \cong H^1(M, \mathcal{R}) = 0,$$

como deseamos.

Corolario 7.1.1 .- Si $L \simeq L'$ entonces $c(L) = c(L')$.

Prueba. De la Proposición 7.1.1 y siguiendo las mismas notaciones $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} f_\beta / f_\alpha$, además $\tau'_\alpha = \frac{1}{2\pi i} d \log g'_{\alpha\beta} + \tau'_\beta$, de ahí se tiene que $\tau'_\alpha - \tau_\alpha + dg_\alpha = \tau'_\beta - \tau_\beta + dg_\beta$ en $U_{\alpha\beta}$, donde $g_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log f_\alpha$, así definimos una 1-forma global f sobre M tal que $f|_{U_\alpha} = \tau'_\alpha - \tau_\alpha + dg_\alpha$ entonces $df = d\tau'_\alpha - d\tau_\alpha$. Concluimos por el Teorema de Stoke que $\iint_M d\tau'_\alpha = \iint_M d\tau_\alpha$ i.e. $c(L) = c(L')$. $\square$

Corolario 7.1.2 .- Si L y L' son fibrados lineales holomorfos sobre M. Entonces

$$c(L \otimes L') = c(L) + c(L').$$

Prueba. Primero tomamos una cobertura abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ que trivializa ambos fibrados, sus cociclos asociados son $\{g_{\alpha\beta}\}$ y $\{g'_{\alpha\beta}\}$ respectivamente a L y L', como en la Proposición 7.1.1 sean
$\{r_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}_+\}$ y $\{r'_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}_+\}$ que satisfacen

$$r_\alpha = r_\beta |g_{\alpha\beta}|^2 \quad \text{y} \quad r'_\alpha = r'_\beta |g'_{\alpha\beta}|^2 \qquad \text{en } U_{\alpha\beta},$$

entonces

$$r_\alpha\, r'_\alpha = r_\beta\, r'_\beta |g_{\alpha\beta}\, g'_{\alpha\beta}|^2,$$

luego por la Proposición 7.1.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
c(L \otimes L') &= \frac{1}{2\pi i} \iint_M \partial\overline{\partial} \log(r_\alpha r'_\alpha) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint_M \partial\overline{\partial} (\log r_\alpha + \log r'_\alpha) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint_M \partial\overline{\partial} \log r_\alpha + \frac{1}{2\pi i} \iint_M \partial\overline{\partial} \log r'_\alpha \\
&= c(L) + c(L').
\end{aligned}$$

□

Teorema 7.1.1 .- Sean M una superficie de Riemann compacta y L un fibrado lineal holomorfo sobre M. Si $\sigma \in \Gamma(M, \mathcal{M}^*_L)$ entonces

$$c(L) = \sum_{x \in M} ord_x(\sigma).$$

Prueba. Desde que M es compacta existe sólo un número finito de puntos $x \in M$ tales que $ord_x(\sigma) \neq 0$, denotando dichos puntos por x_i, el Teorema afirma que $c(L) = \sum_i ord_{x_i}(\sigma)$. En efecto, considere $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cobertura abierta de M tal que el fibrado es representado por el cociclo $\{g_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$, y supongamos que la cobertura es tomada de forma que cada punto x_i posee una vecindad V_i con $V_i \subseteq U_{\alpha_i}$ para algún índice α_i y $V_i \cap U_\alpha = \emptyset \;\forall\, \alpha \neq \alpha_i$. La representación de $\sigma \in \Gamma(M, \mathcal{M}^*_L)$ son funciones σ_α meromorfas sobre U_α que satisfacen $\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\, \sigma_\beta$ en $U_{\alpha\beta}$. Ahora, las funciones $|\sigma_\alpha|^2$ son C^∞ y no nulas en $U_\alpha - (\cup_i p_i) \cap U_\alpha$, y satisfacen $|\sigma_\alpha|^2 = |g_{\alpha\beta}|^2 |\sigma_\beta|^2$. Es evidente que existen funciones $g_\alpha \in C^\infty$ con valores positivos definidos en U_α, tal que

$$\begin{aligned}
g_\alpha &= |g_{\alpha\beta}|^2 g_\beta \quad \text{en } U_{\alpha\beta}, \\
g_\alpha &= |\sigma_\alpha|^2 \quad \text{en } U_\alpha - U_\alpha \cap (\cup_i V_i).
\end{aligned}$$

Por la Proposición 7.1.1, la clase de Chern del fibrado L es dado por

$$c(L) = \frac{1}{2\pi i}\iint_M \partial\overline{\partial}\log g_\alpha,$$

como $g_\alpha = |\sigma_\alpha|^2$ en $M - \cup_i V_i$, y $\partial\overline{\partial}\log g_\alpha = \partial\overline{\partial}(\log\sigma_\alpha + \log\overline{\sigma}_\alpha) = 0$, por que σ_α es holomorfa en $U_\alpha - U_\alpha \cap (\cup_i V_i)$ entonces

$$\begin{aligned} c(L) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_i \iint_{V_i} \partial\overline{\partial}\log g_\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_i \iint_{V_i} \overline{\partial}\partial\log g_\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_i \iint_{V_i} d(\partial\log g_\alpha), \end{aligned}$$

Por el Teorema de Stokes, tenemos que

$$\begin{aligned} c(L) &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_i \int_{\partial V_i} \partial\log g_\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_i \int_{\partial V_i} \partial\log|\sigma_\alpha|^2 \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_i \int_{\partial V_i} \partial(\log\sigma_\alpha + \log\overline{\sigma}_\alpha) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_i \int_{\partial V_i} \partial\log\sigma_\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_i \int_{\partial V_i} d\log\sigma_\alpha. \end{aligned}$$

Por el Teorema del Residuo, finalmente tenemos

$$c(L) = \sum_i ord_{x_i}(\sigma).$$

Esto concluye la prueba. $\square$

Corolario 7.1.3 .- Sean M una superficie de Riemann compacta y L un fibrado lineal holomorfo sobre M. Si $c(L) < 0$ entonces no existen secciones no triviales para el fibrado lineal, i.e., $\Gamma(M, \mathcal{O}_L) = 0$.

Prueba. Supongamos lo contrario que existe $\sigma \in \Gamma(M, \mathcal{O}_L)$ con $\sigma \neq 0$ entonces

$$\sum_{x\in M} ord_x(\sigma) \geq 0,$$

lo cual es una contradicción por el Teorema 7.1.1

$$c(L) = \sum_{x\in M} ord_x(\sigma) < 0.$$

Esto concluye la prueba. $\square$

7.2. Teorema de Riemann-Roch

Sea M una superficie de Riemann compacta y L un fibrado lineal holomorfo sobre M. Introducimos la siguiente expresión

$$\chi(L) = dim\, H^0(M, \mathcal{O}_L) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}_L) - c(L).$$

Aplicando dualidad de Serre se tiene

$$\chi(L) = dim\, H^0(M, \mathcal{O}_L) - dim\, H^0(M, \mathcal{O}^{1,0}(L)) - c(L).$$

Los resultado obtenidos hasta el momento nos dice que esta expresión independe de la clase de isomorfismos del fibrado. El enunciado del Teorema de Riemann-Roch nos dice que esta expresión independe del cambio de fibrado lineal holomorfo. Para ello veamos antes una proposición que nos ayudará con la prueba del teorema.

Proposición 7.2.1 .- Sea D un divisor sobre una superficie de Riemann, y $[D]$ el fibrado lineal holomorfo asociado al divisor D. Entonces para cualquier L fibrado lineal holomorfo,

$$\chi(L \otimes [D]) = \chi(L).$$

Prueba. Probaremos el caso particular que el divisor es un punto $D = 1.x_0$. El caso general se sigue por inducción. En efecto, consideramos el subhaz $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(D, L) \subseteq \mathcal{M}_L$ definido por

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(D, L)_x = \{f \in (\mathcal{M}_L)_x \mid f = 0 \text{ ó } (f) \geq D \text{ cerca de } x\}.$$

Ya que $D = 1.x > 0$, tenemos que $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(D, L) \subseteq \mathcal{O}_L$.

El cociente $\mathcal{S} = \mathcal{O}_L / \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(D, L)$ es de la forma

$$\mathcal{S}_x = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \neq x_0, \\ \mathbb{C} & , \text{ si } x = x_0. \end{cases}$$

Como en el Proposición 5.5.1, se sigue que

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(D, L) \simeq \mathcal{O}_{L \otimes [D]}.$$

De ahí se tiene la secuencia exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{L \otimes [D]} \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0\ ,$$

luego se tiene asociado la siguiente secuencia exacta larga de cohomología

$$0 \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}_{L\otimes[D]}) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}_L) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{S}) \longrightarrow \;.$$

$$H^1(M, \mathcal{O}_{L\otimes[D]}) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}_L) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{S})$$

Ya que $\mathcal{S}$ es un haz rascacielo, entonces $H^0(M, \mathcal{S}) = \mathbb{C}$ y $H^1(M, \mathcal{S}) = 0$. Luego tenemos que

$$dim\, H^0(M, \mathcal{O}_{L\otimes[D]}) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}_{L\otimes[D]}) + 1 = dim\, H^0(M, \mathcal{O}_L) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}_L). \quad (7.2)$$

Notar que $c([D]) = -1$ y además $c(L \otimes [D]) = c(L) + c([D])$. Reemplazando en la ecuación 7.2 tenemos

$$\begin{gathered} dim\, H^0(M, \mathcal{O}_{L\otimes[D]}) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}_{L\otimes[D]}) - c(L \otimes [D]) = \\ dim\, H^0(M, \mathcal{O}_L) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}_L) - c(L), \end{gathered}$$

i.e., $\chi(L \otimes [D]) = \chi(L)$. $\square$

Corolario 7.2.1 .- Sea M una superficie de Riemann compacta, la característica

$$\chi(L) = dim\, H^0(M, \mathcal{O}_L) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}_L) - c(L),$$

es una constante, independiente del cambio del fibrado lineal holomorfo L sobre M.

Prueba. En efecto, sea L un fibrado lineal holomorfo sobre M, por el Corolario 6.4.4, existe D divisor tal que $L^* = [D]$. Aplicando la Proposición 7.2.1 tenemos que

$$\chi(L) = \chi(L \otimes [D]) = \chi(L \otimes\, L^*]) = \chi(M \times \mathbb{C}),$$

lo cual prueba el resultado. $\square$

Teorema 7.2.1 *(Teorema de Riemann-Roch)*.- Si M es una superficie de Riemann compacta de género $\mathfrak{g}$ y L un fibrado lineal holomorfo sobre M. Entonces

$$dim\, H^0(M, \mathcal{O}_L) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}_L) - c(L) = 1 - \mathfrak{g}.$$

Prueba. Aplicando el Corolario 7.2.1 tenemos que $\chi(L) = \chi(M \times \mathbb{C})$, pero $M \times \mathbb{C}$ es el fibrado lineal trivial entonces $\chi(L) = dim\, H^0(M, \mathcal{O}) - dim\, H^1(M, \mathcal{O}) - c(M \times \mathbb{C})$, además $H^0(M, \mathcal{O}) = 0$, $c(M \times \mathbb{C}) = 0$ y por el Teorema 6.4.3 tenemos que $dim\, H^1(M, \mathcal{O}) = \mathfrak{g}$, de ahí se concluye el teorema. $\square$

7.3. Aplicaciones

Teorema 7.3.1 .- Sea M una superficie de Riemann compacta de género $\mathfrak{g}$ y $x_0 \in M$. Entonces existe una función meromorfa f no-constante sobre M con $ord_{x_0}(f) \leq \mathfrak{g}+1$ y holomorfa en $M \backslash \{x_0\}$.

Prueba. De la Observación 6.12. □

Corolario 7.3.1 .- Sea M una superficie de Riemann compacta de género $\mathfrak{g}$. Entonces existe un cubrimiento holomorfo $f : M \to \mathbb{P}^1$ con a lo más $\mathfrak{g}+1$ hojas.

Prueba. Inmediato del Teorema 7.3.1. □

Corolario 7.3.2 .- Toda superficie de Riemann de género cero es isomorfo a la esfera de Riemann.

Prueba. Inmediato del Corolario 7.3.1 y del hecho que un cubrimiento holomorfo inyectivo es un biholomorfismo. □

Teorema 7.3.2 .- Toda superficie de Riemann M simplemente conexa y compacta es biholomorfa a la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$.

Prueba. Basta observar que su género es cero y aplicar el Corolario 7.3.2. En efecto, como la superficie de Riemann es simplemente conexa entonces toda 1-forma holomorfa tiene una primitiva holomorfa y como toda función holomorfa definida sobre una superficie de Riemann compacta es constante entonces la 1-forma es nula, de ahí por Dualidad de Serre $g = dim\, \mathcal{O}^{1,0}(M) = 0$ □

Teorema 7.3.3 .- Toda superficie de Riemann compacta admite un encaje en $\mathbb{CP}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$.

Prueba. Ver [3], página 144. □

Teorema 7.3.4 .- Toda superficie de Riemann compacta M admite una triangulación.

Prueba. Por el Corolario 7.3.1 existe un cubrimiento holomorfo $f : M \to \mathbb{P}^1$ con a lo más $\mathfrak{g}+1$ hojas y ver [2], página 51. □

Bibliografía

[1] Abanto Silva, D. Percy *Acerca de la Clasificación Topológica y Diferenciable de Superficies Compactas* Tesis de Maestría. UNI-2009.

[2] Farkas, H. M. y Kra, I. *Riemann Surfaces.* Springer-Verlag, 1980.

[3] Forster, Otto. *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer, 1999.

[4] Griffiths, P. y Harris J. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley, 1978.

[5] Gunning, R. C. y Hugo Rossi *Analytic Functions of Several Complex Variables.* Prentice Hall, 1965.

[6] Gunning, R.C.*Lectures on Riemann Surfaces.* Princeton University, 1966.

[7] Huybrechts, Daniel. *Complex Geometry: An Introduction.* Springer, 2000.

[8] Morrow, J. y Kodaira, K. *Complex Manifolds.* Holt, Rinehart y Winston, 1971.

[9] Milnor, J. y Stasheff J. *Characteristic classes.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.

[10] Miranda,R. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* American Mathematical Society, 1991.

[11] Munkres, J. R. *Elementary Differential Topology.* Princeton University, 1966.

[12] Munkres, J. R. *Topología, 2a. Edición.* Prentice Hall, 2002.

[13] Narasimham, R. *Complex Analysis in one Variable.* Birkhauser, 1985.

[14] Narasimham, R. *Compact Riemann Surfaces.* Birkhauser, 1991.

[15] Saravia Molina, Nancy E. *Cohomología de Haces y algunas aplicaciones a Varias Variables Complejas*, Tesis de Maestría. PUCP-2008.

[16] Soares, Marcio G. y Mol, Rogerio S. *Índices de Campos Holomorfos e Apicações.* n, 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2001.

[17] Vick, J. M. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology, 2a. Edición.* Springer, 1994.