UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

Sección de Posgrado y Segunda Especialización Profesional

Tesis para Optar el Grado Académico de
Maestro en Ciencias con mención en Matemática Aplicada

"Teorema de la Función Inversa para Aplicaciones Multivaluadas"

Presentada por:

Félix Ricardo Villanueva Santos

Asesor

Dr. Pedro Canales García

LIMA – PERÚ

2010

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

Alumno:	Félix Ricardo Villanueva Santos
Código de estudiante:	19876202I
Título de la tesis:	Teorema de la Función Inversa para Aplicaciones Multivaluadas

RESUMEN

En este trabajo extendemos el Teorema de la Función Inversa para funciones entre espacios de Banach al caso de aplicaciones Multivaluadas. En el inicio se define el concepto de aplicación multivaluada y se muestran algunos ejemplos. Luego, se estudia el concepto de semicontinuidad superior de aplicaciones multivaluadas. Para definir la derivada de una aplicación multivaluada se necesita los conceptos de cono contingente y cono tangente. Estos conceptos se definen y se caracterizan los elementos de estos conjuntos. Además se muestran algunas relaciones entre estos conjuntos en casos particulares. El estudio de estos conos se hace para definir la derivada de una aplicación multivaluada en la forma más semejante a la derivada de funciones. Luego, se enuncia y demuestra el Teorema de la Función Inversa para aplicaciones multivaluadas que es el tema central de este trabajo. Finalmente vemos la relación entre el Teorema de la Función Inversa para aplicaciones multivaluadas y el Teorema de la Aplicación Abierta uniforme y otras versiones más del teorema central.

Bach. Félix Ricardo Villanueva Santos	Dr. Pedro Canales García
Tesista	Asesor

Contenido

Introducción

En esta tesis se hace una extensión del Teorema de la Función Inversa en espacios de Banach a las Aplicaciones multivaluadas, con el uso de herramientas del Análisis Funcional lineal y de conceptos nuevos que se definirán conforme se avance en el trabajo.

En el Capítulo 1 se muestran las definiciones de conceptos sobre Espacios métricos y espacios de Banach. También se enuncia y demuestra el Teorema de la Función Inversa para funciones entre espacios de Banach.

En el Capítulo 2 se definen las aplicaciones multivaluadas (que también llamaremos correpsondencias); mostraremos algunos ejemplos de estas aplicaciones. Este capítulo concluye definiendo el concepto de semicontinuidad superior.

En el Capítulo 3 se inicia el estudio de los conos contingente y tangente para conjuntos que no son necesariamente convexos. Estableceremos caracterizaciones de los elementos de estos conjuntos y de las relaciones entre ellos en ciertos casos.

En el Capítulo 4 se enuncia y demuestra el Teorma de la función Inversa para aplicaciones multivaluadas, que es el tema de la tesis. La demostración se hace en detalle y en algunas partes se establecen afirmaciones que se demuestran ahí mismo.

Finalmente, en el Capítulo 5 se muestra la relación entre el Teorema de la función Inversa para aplicaciones multivaluadas y el Principio de la Aplicación Abierta Uniforme; luego veremos dos versiones más del Teorema de función Inversa.

Capítulo 1

Conceptos y resultados preliminares

En este capítulo estableceremos algunos conceptos y resultados sobre espacios métricos, de Banach y espacios de Hilbert. que usaremos en los capítulos posteriores.

1.1Espacios métricos

<u>Definición 1.1.1</u> Sea X un conjunto no vacío. Una métrica (o distancia) en X es una función $d : X \times X \to IR$ que satisface las siguientes condiciones:

$$M1: \forall x, y \in X : d(x; y) \geq 0$$
$$M2: \forall x, y \in X : d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$M3: \forall x, y \in X : d(x; y) = d(y; x)$$
$$M4: \forall x, y, z \in X : d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$$

En este caso, el par $(X ; d)$ suele llamarse un espacio métrico.

<u>Definición 1.1.2</u> Sean $(X ; d)$ un espacio métrico y (x_n) una sucesión en X.

a) Se dice que (x_n) es una sucesión convergente en X si existe $x_0 \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que

$$\forall n \geq IN : d(x_n ; x_0) < \varepsilon$$

El punto x_0 se llama el límite de la sucesión (x_n) y se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} x_n = x_0$.

b) Se dice que (x_n) es una sucesión de Cauchy en X si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que

$$\forall m , n \geq N : d(x_m ; x_n) < \varepsilon$$

<u>Proposición 1.1.1</u> Toda sucesión convergente es de Cauchy.
Lo recíproco no es cierto. Esto genera el concepto de espacio métrico completo.

<u>Definición 1.1.3</u> Un espacio métrico es llamado completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición1.1.4 Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico X. El diámetro de A se denota por $diam(A)$ y se define como

$$diam(A) = \sup\{d(x;y) \,/\, x \in A; y \in A\}$$

Definición 1.1.5. Sean $x_0 \in X$ y A un subconjunto no vacío de X. La distancia de x_0 a A se denota por $d(x_0\,;A)$ y se define como

$$d(x_0\,;A) = \inf \;\{\; d\,(x_0;a) \;/\; a \in A\}$$

Definición 1.1.6 Sean $x_0 \in X$ y $r > 0$. La bola abierta de centro x_0 y radio r se denota por $B(x_0\,;r)$ y se define como

$$B(x_0\,;r) = \{\; x \in X \;/\; d(x\,;x_0) < r \;\}$$

Definición 1.1.7 Sea A un subconjunto de X.

i) Si $A = \phi$, diremos que A es abierto.
ii) Si $A \neq \phi$, diremos que A es abierto si para cada $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a\,;r) \subset A$.

Proposición 1.1.2 La familia Γ formada por el conjunto ϕ y todos los conjuntos abiertos forman una topología para X.

1.2 Espacios de Banach

Definición 1.2.1 Sea X es un espacio vectorial sobre R. Una norma en X es una función $\|\;\|:\; X \to IR$ que satisface las siguientes condiciones:

$$N1: \forall\, x \in X: \|\, x\,\| \geq 0$$

$$N2:\; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N3: \forall\, x \in X,\; \forall\, \alpha \in IR: \|\alpha\, x\| = |\,\alpha\,|\;\|\,x\|$$

$$N4: \forall\, x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

En este caso, el par $(X\,;\|\;\|)$ se llama un espacio vectorial normado.

La función $d: X \times X \to IR$ definida por $d(x\,;y) = \|\,x - y\,\|$ es una métrica en X.

Cuando X es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma $\|\;\|$ se dice que X es una espacio de Banach.

La bola cerrada unitaria de centro x_0 y radio r la denotaremos por $\overline{B}(x_0\,;r)$ y está dada por

$$\overline{B}(x_0\,;r)=\{x\in X \;/\; \| x-x_0 \| \le r\}$$

Luego, la bola cerrada de centro x_0 y radio r es el conjunto

$$x_0+r\,\overline{B}(0,1)=\{x\in X \;/\; \| x-x_0 \| \le r\}$$

La bola abierta de centro x_0 y radio r es el conjunto

$$B(x_0\,;r)=\{x\in X \;/\; \| x-x_0 \| < r\}$$

Una vecindad de un punto x_0 es un conjunto U que contiene a x_0 tal que existe $r>0$ tal que $B(x_0\,;r)\subset U$.

<u>Definición 1.2.2</u> Sea X un espacio vectorial normado. El espacio dual de X se denota por X^* y se define como el conjunto formado por todas las funcionales lineales y continuas $p: X \to IR$.

El conjunto X^* es un espacio vectorial normado, donde la norma está dada por

$$\| p \| = \sup\{ |\langle p;x\rangle| \;/\; x\in X,\; \| x \| \le 1\}$$

Ahora vamos a definir los conceptos de semicontinuidad inferior y superior para una función real definida sobre un espacio vectorial normado.

Proposición 1.2.1 Sean X un espacio vectorial normado
$f: X \to IR$ una función y $x_0 \in X$

Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) $\forall\, \varepsilon>0, \exists\; r>0 \;/\; \forall\, x\in B(x_0\,;r): f(x)>f(x_0)-\varepsilon$
b) $\forall\; \langle a\,;\infty\rangle \; con \;\; f(x)\in \langle a\,;\infty\rangle \;\exists\; r>0 \;/\; \forall\; x\in B(x_0\,;r): f(x)\in\langle a\,;\infty\rangle$

<u>Definición 1.2.3</u> Sean X un espacio vectorial normado
$f: X \to IR$ una función y $x_0 \in X$

i) Se dice que f es semicontinua inferiormente en x_0 si se cumple una de las condiciones (a) o (b) de la Proposición 1.2.1.

ii) Se dice que f es semicontinua inferiormente en X si f es semicontinua inferiormente en cada $x\in X$.

Proposición 1.2.2 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es semicontinua inferiormente en X.
b) $\forall \lambda \in IR : \{x \in X / f(x) > \lambda\}$ es abierto.

Proposición 1.2.3 Sean X un espacio vectorial normado
$f : X \to IR$ una función y $x_0 \in X$

Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, r > 0 \,/\, \forall x \in B(x_0\,;r) : f(x) < f(x_0) + \varepsilon$
b) $-f$ es semicontinua inferiormente en x_0.

<u>Definición 1.2.4</u> Sean X un espacio vectorial normado
$f : X \to IR$ una función y $x_0 \in X$

i) Se dice que f es semicontinua superiormente en x_0 si se cumple una de las condiciones (a) o (b) de la Proposición 1.2.3.

ii) Se dice que f es semicontinua superiormente en X si f es semicontinua superiormente en cada $x \in X$.

Proposición 1.2.4 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es semicontinua superiormente en X.
b) $\forall \lambda \in IR : \{x \in X / f(x) \geq \lambda\}$ es cerrado.

<u>Definición 1.2.5</u> Sean X un espacio vectorial normado
$f : X \to IR$ una función y $x_0 \in X$

i) Se dice que f es continua en x_0 si f es continua inferior y superiormente en x_0.
ii) Se dice que f es continua en X si f es continua en cada $x \in X$.

<u>Definición 1.2.6</u> Sea X un espacio vectorial normado. La topología débil en X se denota por T_d y se define como la menor topología para la cual todas las funcionales de X^* son continuas. La convergencia de sucesiones en T_d se caracteriza así:

(x_n) converge débilmente a x_0 sí, y solo si para cada $p \in X^*$ $\lim\limits_{x \to x_0} \langle p, x_n \rangle = \langle p, x_0 \rangle$.

Proposición 1.2.5 Sean X e Y espacios vectoriales normados.

a) El conjunto $\mathscr{L}(X;Y)$ formado por todas las aplicaciones lineales y acotadas $L: X \to Y$ es un espacio vectorial.

b) La función $\| \; \| : \mathscr{L}(X;Y) \to IR$ definida por

$$\|L\| = \sup\left\{ \frac{\|Lx\|}{\|x\|} \;/\; x \in X, x \neq 0 \right\}$$

es una norma en $\mathscr{L}(X;Y)$.

c) Si Y es de Banach, entonces $\mathscr{L}(X;Y)$ también es de Banach con la norma $\|L\|$.

Definición 1.2.7. Sean X e Y espacios vectoriales normados sobre IR, U un subconjunto abierto no vacío de X, $f : U \subset X \to Y$ una función y $x_0 \in U$. Se dice que f es diferenciable en x_0 si existe una aplicación lineal $T : X \to Y$ que satisface la siguiente condición:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ /\ \forall\ x \in U\ con\ \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\| \leq \varepsilon \|x - x_0\|$$

Se dice que f es diferenciable en U si f es diferenciable en cada $x \in U$.

Si f es diferenciable en x_0, entonces la aplicación lineal $T : X \to Y$ es única y no necesariamente es acotada. La aplicación lineal $T : X \to Y$ es llamada la derivada de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

Teorema 1.2.6 Sea $f : U \subset X \to Y$ una función diferenciable en $x_0 \in U$. Luego, $f'(x_0)$ es acotada sí, y solo si f es continua en x_0.

Corolario 1.2.7 Suponga que X es de dimensión finita. Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Definición 1.2.8 Sea $f : U \subset X \to Y$ una función continua y diferenciable en U. La derivada de f es la aplicación $f' : U \to \mathscr{L}(X;Y)$ que asocia a cada $x \in U$ la derivada $f'(x)$.

Definición 1.2.9 Sea $f : U \subset X \to Y$ una función continua y diferenciable en U. Se dice que f es de clase $C^1(U)$ (continuamente diferenciable en U) si $f' : U \to \mathscr{L}(X;Y)$ es continua en U.

1.3 Teorema de la Función Inversa en espacios de Banach

Teorema 1.3.1 Suponga que: E y F son espacios de Banach.
$\phi \neq U \subset E$ es un conjunto abierto.
$f : U \subset E \to F$ es una función de clase C^1
$a \in U$, $f'(a) \in \mathcal{L}(E;F)$ tiene inversa $[f'(a)]^{-1} \in \mathcal{L}(F;E)$

Luego, existe una vecindad $V \subset U$ de a y $W \subset F$ tales que:

1. $f(V)$ es una vecindad de $f(a)$.
2. La función $f_V = f|_V : V \to W$ tiene inversa de clase C^1: $f_V^{-1} : W \to V$
3. La derivada de f_V^{-1} está dada por

$$\forall\, y \in W : \left[f_V^{-1}\right]' = \left[f'\left(f_V^{-1}(y)\right)\right]^{-1}$$

Demostración. En lo que sigue la aplicación lineal $f'(a)$ será denotada por A.

Sean $k, \alpha \in \langle 0;1 \rangle$ cualesquiera.

Afirmación 1. Existe un número positivo δ tal que para cada $x \in \overline{B}(a;\delta)$ se cumplen:

1. $\| I - A^{-1} f'(x) \| \leq k$
2. $\| A^{-1}[f(x) - f(a) - A(x-a)] \| \leq \alpha \| x - a \|$

En efecto, definamos la función $H : U \to L(E;E)$ de la manera siguiente:

$$\forall x \in U : H(x) = I - A^{-1} f'(x)$$

Como f es de clase C^1 es claro que $f' : U \to \mathcal{L}(E;F)$ es continua, lo cual que implica que H también es continua. De la continuidad de H en a se tiene que existe un número positivo δ tal que para cada $x \in \overline{B}(a;\delta)$ se cumple que $\| H(x) - H(a) \| \leq k$. De la definición de H y observando que $H(a) = 0$ se tiene que

$$\forall x \in \overline{B}(a;\delta) : \| I - A^{-1} f'(x) \| \leq k$$

Así queda probada la Afirmación 1.

Ahora tomemos $r = \dfrac{(1-\alpha)\delta}{\| A^{-1} \|}$ y definamos los conjuntos W y V de la manera siguiente:

$$W = \overline{B}(f(a);r) \qquad V = f^{-1}(W) \cap B(a;\delta)$$

Sea $f_V = f|_V : V \to W$ la restricción de f a V .

Afirmación 2. Para cada $y \in W$ la función $g : \overline{B}(a;\delta) \to \overline{B}(a;\delta)$ definida por

$$\forall x \in \overline{B}(a;\delta) : g(x) = x + A^{-1}\big(y - f(x)\big)$$

es una contracción.

En efecto, primero veamos que para cada $x \in \overline{B}(a;\delta) : g(x) \in \overline{B}(a;\delta)$. Como

$$g(x) - a \;=\; x + A^{-1}\big(y - f(x)\big) - a = A^{-1} f(a) + (x-a) - A^{-1} f(x) + A^{-1} y - A^{-1} f(a) \;=$$
$$A^{-1}\big[f(a) + A(x-a) - f(x)\big] + A^{-1}\big(y - f(a)\big)$$

tomando norma en los extremos y usando el lema 1 se tiene que

$$\| g(x) - a \| \le \| A^{-1}\big[f(a) + A(x-a) - f(x)\big] \| + \| A^{-1}\big(y - f(a)\big) \|$$

$$\le \alpha \| x - a \| + \| A^{-1} \| \| y - f(a) \| \le \alpha \| x - a \| + \| A^{-1} \| r \le \alpha\delta + (1-\alpha)\delta = \delta$$

Esto muestra que la función g va de $\overline{B}(a;\delta)$ a $\overline{B}(a;\delta)$.

De la definición de g es claro que para cada $x \in \overline{B}(a;\delta)$: $g'(x) = I + A^{-1} f'(x)$, de lo cual usando el Lema 1 se sigue que

$$\forall x \in \overline{B}(a;\delta) : \| g'(x) \| = \| I + A^{-1} f'(x) \| \le k < 1$$

Así, g es $k-$Lipschitz sobre la bola $\overline{B}(a;\delta)$ con $0 < k < 1$. Por lo tanto, g es una contracción. Así queda probada la Afirmación 2.

Afirmación 3. Para cada $y \in W$ la sucesión (x_n) definida por

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n + A^{-1}\big(y - f(x_n)\big) \end{cases}$$

converge a la solución única de la ecuación $\begin{cases} f(x) = y \\ x \in \overline{B}(a;\delta) \end{cases}$ y además $\| x_n - a \| \le (cte)\, k^n$.

La Afirmación 3 se demuestra aplicando el Principio de contracción de Banach a la contracción g sobre la bola $\overline{B}(a;\delta)$.

<u>Afirmación 4.</u> La función f_V es biyectiva.

En efecto, primero veamos que f_V es sobreyectiva. Sea $y \in W$ cualquiera. Por la Afirmación 2 se tiene que la función $g : \overline{B}(a;\delta) \to \overline{B}(a;\delta)$ definida por

$$\forall x \in \overline{B}(a;\delta) : g(x) = x + A^{-1}(y - f(x))$$

es una contracción y por lo tanto tiene un único punto fijo el cual lo denotaremos por $\hat{x}$. Esto significa que $g(\hat{x}) = \hat{x}$ lo cual, usando la definición de g implica que $y = f(\hat{x})$.Esto muestra que f es sobreyectiva.
Ahora veamos que f_V es inyectiva. Sean x_1 y x_2 en $\overline{B}(a;\delta)$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = z$. Considere la función $g : \overline{B}(a;\delta) \to \overline{B}(a;\delta)$ definida por

$$\forall x \in \overline{B}(a;\delta) : g(x) = x + A^{-1}(z - f(x))$$

Como $g(x_1) = x_1 + A^{-1}(z - f(x_1)) = x_1$ y $g(x_2) = x_2 + A^{-1}(z - f(x_2)) = x_2$ se tiene que x_1 y x_2 son puntos fijos de g. Debido a la unicidad del punto fijo se tiene que $x_1 = x_2$. Esto muestra que f_V es inyectiva. Así queda probada la Afirmación 4.
<u>Afirmación 5</u>. La función f_V^{-1} es continua.

En efecto, sean y_1 y y_2 elementos cualesquiera de $\overline{B}(a;\delta)$.Como f_V es biyectiva existen x_1 y x_2 en $\overline{B}(a;\delta)$ de manera única tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$ lo cual es equivalente a $f_V^{-1}(y_1) = x_1$ y $f_V^{-1}(y_2) = x_2$.Definamos las funciones $g_1 : \overline{B}(a;\delta) \to \overline{B}(a;\delta)$ y $g_2 : \overline{B}(a;\delta) \to \overline{B}(a;\delta)$ de la manera siguiente:

$$g_1(x) = x + A^{-1}(y_1 - f(x)) \qquad\qquad g_2(x) = x + A^{-1}(y_2 - f(x))$$

De estas definiciones es claro que $g_1(x_1) = x_1$ y $g_2(x_2) = x_2$. Ahora, en lo que sigue estimaremos $\left\| f_V^{-1}(y_1) - f_V^{-1}(y_2) \right\|$. En efecto, a partir de

$$\left\| f_V^{-1}(y_1) - f_V^{-1}(y_2) \right\| = \| x_1 - x_2 \| = \| g_1(x_1) - g_2(x_2) \| \le \| g_1(x_1) - g_2(x_1) \| + \| g_2(x_1) - g_2(x_2) \|$$

se sigue que

$$\left\| f_V^{-1}(y_1) - f_V^{-1}(y_2) \right\| \le \| g_1(x_1) - g_2(x_1) \| + \| g_2(x_1) - g_2(x_2) \| ......(*)$$

De las definiciones de g_1 y g_2 se tiene que

$$g_1(x_1) = x_1 + A^{-1}(y_1 - f(x_1)) \qquad g_2(x_1) = x_1 + A^{-1}(y_2 - f(x_1))$$

de donde se sigue que

$$\| g_1(x_1) - g_2(x_1) \| = \| A^{-1}[y_1 - y_2] \| \leq \| A^{-1} \| \| y_1 - y_2 \| ....(**)$$

Por otro lado, de la Afirmación 2 se tiene que g_2 es una contracción y entonces

$$\| g_2(x_1) - g_2(x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \| ....(***)$$

Reemplazando (**) y (***) en (*) se tiene que

$$\| f_V^{-1}(y_1) - f_V^{-1}(y_2) \| \leq \| A^{-1} \| \| y_1 - y_2 \| + k \| x_1 - x_2 \| = \| A^{-1} \| \| y_1 - y_2 \| + k \| f_V^{-1}(y_1) - f_V^{-1}(y_2) \|$$

de donde se sigue que

$$\| f_V^{-1}(y_1) - f_V^{-1}(y_2) \| \leq \left[\frac{\| A^{-1} \|}{1-k} \right] \| y_1 - y_2 \|$$

Esto muestra que f_V^{-1} es continua. Así queda probada la Afirmación 5.

<u>Afirmación 6</u>. Para cada $x \in V = f^{-1}(W) \cap B(a;\delta)$ la aplicación lineal $f'(x)$ tiene inversa.

*En efecto,*sea $x \in V = f^{-1}(W) \cap B(a;\delta)$ cualquiera. De la parte (a) de la Afirmación 1 se tiene que $\| I - A^{-1} f'(x) \| \leq k < 1$. Luego, la aplicación $I - \{I - A^{-1} f'(x)\} = A^{-1} f'(x)$ es invertible y

$$[A^{-1} f'(x)]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [I - A^{-1} f'(x)]^j = S(x)$$

La última igualdad implica que

$$\begin{cases} A^{-1} f'(x) S(x) = I \\ S(x) A^{-1} f'(x) = I \end{cases}$$

de donde se obtiene que $[f'(x)]^{-1} = S(x) A^{-1}$. Así queda probada la Afirmación 6.

<u>Afirmación 7</u>. f_V^{-1} es de clase C^1.

En efecto, sean $y, \, y_0 \in \overline{B}(f(a);r)$ cualesquiera y tomemos $x = f_V^{-1}(y)$, $x_0 = f_V^{-1}(y_0)$. Como f es diferenciable según Fréchet en x_0 se tiene que

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x) \| x - x_0 \|$$

donde $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = 0$ (en F, cuando x tiende a x_0 en E).

La última igualdad se puede escribir como

$$y - y_0 = f'(x_0)\left[f_V^{-1}(y) - f_V^{-1}(y_0)\right] + \phi\left(f_V^{-1}(y)\right)\left\| f_V^{-1}(y) - f_V^{-1}(y_0)\right\|$$

Notemos que $\lim_{y \to y_0} \phi\left(f_V^{-1}(y)\right) = 0$ y que la Afirmación 5 garantiza la continuidad de f_V^{-1}. Por lo tanto, si hacemos $\psi(y) = \phi\left(f_V^{-1}(y)\right)$ tenemos que

$$y - y_0 = f'(x_0)\left[f_V^{-1}(y) - f_V^{-1}(y_0)\right] + \psi(y)\left\| y - y_0 \right\|$$

donde $\lim_{y \to y_0} \psi(y) = 0$. De la última igualdad se sigue que

$$f_V^{-1}(y) - f_V^{-1}(y_0) = \left[f'(x_0)\right]^{-1}(y - y_0) + \left[f'(x_0)\right]^{-1}\psi(y)\left\| y - y_0 \right\|$$

Esta última igualdad significa que f_V^{-1} es diferenciable según Fréchet en y_0 y su derivada está dada por

$$\left[f_V^{-1}(y_0)\right]' = \left[f'(x_0)\right]' = \left[f'\left(f_V^{-1}(y_0)\right)\right]^{-1}$$

El término $\left[f'\left(f_V^{-1}(y_0)\right)\right]^{-1}$ depende continuamente de y_0, pues f_V^{-1} es continua y f es de clase C^1 en V. Así queda probada la Afirmación 7. ∎

Capítulo 2

Aplicaciones multivaluadas

Sean X e Y dos espacios vectoriales normados. Si $f: X \to Y$ es una función (se suele decir que f es una función punto a punto) sabemos que a cada $x \in X$ le corresponde un único elemento $f(x) \in Y$. En este capítulo extendemos el concepto de función punto a punto a aplicaciones multivaluadas que asocian a cada $x \in X$ un único subconjunto de Y. Para este nuevo tipo de aplicaciones definiremos los conceptos de dominio, rango, gráfica, semicontinuidad superior e inferior.

2.1 Aplicaciones multivaluadas

Definición 2.1.1 Sean X e Y dos conjuntos. Una aplicación multivaluada (aplicación punto-conjunto o correspondencia) F de X a Y es una aplicación que asocia a cada $x \in X$ un único subconjunto de Y denotado por $F(x)$. El conjunto $F(x)$ se llama la imagen de x bajo F.

Definición 2.1.2 Sea F una correspondencia de X en Y.

a) Se dice que F es propia si existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $F(x) \neq \phi$; es decir, si F no es la aplicación constante ϕ.
b) Si F una correspondencia propia de X en Y, el dominio de F se denota por $Dom(F)$ y se define como
$$Dom(F) = \{x \in X \,/\, F(x) \neq \phi\}$$
c) El gráfico de F es el subconjunto de $X \times Y$ denotado por $Graf(F)$ definido como
$$Graf(F) = \{(x;y) \in X \times Y \,/\; y \in F(x)\}$$

Proposición 2.1.1 Cada subconjunto no vacío G de $X \times Y$ es el gráfico de alguna aplicación multivaluada de X en Y.

Demostración. Sea G cualquier subconjunto no vacío de $X \times Y$. Si para cada $x \in X$ definimos $F(x) = \{y \in F \,/\, (x;y) \in G\}$, es claro que F es una correspondencia de X en Y cuyo gráfico es el conjunto G. ■

Definición 2.1.3 Sea F una correspondencia de X en Y.La imagen o rango de F se denota por $Im(F)$ y se define como

$$Im(F)=\bigcup_{x\in X}F(x)$$

Definición 2.1.4 Sea F una correspondencia de X en Y. La correspondencia inversa de F se denota por F^{-1} y se define como

$$\forall\, y\in Y:\ F^{-1}(y)=\{x\in X\ /\ y\in F(x)\}$$

O equivalentemente

$$\forall\, y\in Y:\ F^{-1}(y)=\{\ x\in X\ /\ (x;y)\in Graf(F)\ \}$$

Proposición 2.1.2 Sea F una correspondencia de X en Y. Luego se cumple:

a) $Dom(F^{-1})=Im(F)$
b) $Im(F^{-1})=Dom(F)$
c) $Graf(F^{-1})=\{(y;x)\in Y\times X\ /\ (x;y)\in Graf(F)\}$

Demostración. La prueba es un buen ejercicio sobre igualdad de conjuntos. ■

Definición 2.1.5 Sea F una correspondencia de X en Y. Se dice que F es estricta si $Dom(F)=X$; es decir, si para cada $x\in X$, $F(x)\neq\phi$.

Definición 2.1.6 Sean X e Y dos conjuntos cualesquiera, K un subconjunto no vacío de X y $F:K\rightrightarrows Y$ una correspondencia estricta de K en Y. Definimos la correspondencia $F_K:X\rightrightarrows Y$ de la siguiente manera

$$F_K(x)=\begin{cases}F(x)\ ,\ si\ x\in K\\ \phi\quad ,si\ x\notin K\end{cases}$$

Es claro que $Dom(F_K)=K$.

Observación. Si $F:X\rightrightarrows Y$ es una correspondencia y K es un subconjunto no vacío de X, la restricción de F a K es denotada por $F|_K$.

Definición 2.1.7 Sean $F:X\rightrightarrows Y$ una correspondencia y (P) una propiedad de conjuntos (por ejemplo, conjunto cerrado, convexo, monótono, maximal monótono, etc.). Se dice que F satisface la propiedad (P) si el gráfico de F tiene esa propiedad.

<u>Definición 2.1.8</u> Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia. Se dice que F es cerrada, convexa, compacta y así sucesivamente, si para cada $x \in X$, el conjunto $F(x)$ es cerrado, convexo, acotado, compacto y así sucesivamente.

<u>Definición 2.1.9</u> Sean $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Y$ dos correspondencias. Definamos la unión, intersección, diferencia y suma de F y G como

a) $(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$ b) $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$

c) $(F / G)(x) = F(x) / G(x)$ d) $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$ **(Y es un espacio vectorial)**

2.2 Ejemplos de aplicaciones multivaluadas

<u>Ejemplo 2.2.1</u> El primer ejemplo natural donde aparecen las aplicaciones multivaluadas es la inversa de una función $f : X \to Y$:

$$f^{-1}(y) = \{ x \in X / \ f(x) = y \}$$

El dominio de esta correspondencia es $Im(X)$ y es estricta cuando f es sobreyectiva y es una función punto a punto cuando f es inyectiva.

<u>Ejemplo 2.2.2</u> Sea $V : X \to IR \cup \{+\infty\}$ una función. Definamos $V_1 : X \rightrightarrows IR \cup \{+\infty\}$ de la siguiente manera

$$V_1(x) = \begin{cases} V(x) + \langle 0 ; +\infty \rangle & , si \ V(x) < +\infty \\ \phi & , si \ V(x) = +\infty \end{cases}$$

El dominio de V_1 es el conjunto $Dom(V_1) = \{ x \in X \ / \ V(x) < +\infty \}$ y el gráfico de V_1 es el epígrafo de V

$$Graf(V_1) = \{(x; y) \ / \ y \in V_1(x)\} = \{(x; y) \ / \ y \in V(x) + \langle 0 ; +\infty \rangle\} =$$
$$= \{ (x ; V(x) + \lambda) \ / \ \lambda > 0 \} = \{ (x; y) / \ y > V(x)\} = Epi(V)$$

<u>Ejemplo 2.2.3</u> Sea $f(\bullet ; u) : X \to Y$ una familia de funciones donde u recorre un conjunto U de parámetros. Definamos la correspondencia $F : X \rightrightarrows Y$ mediante

$$\forall x \in X : F(x) = \{ f(x;u) \ / \ u \in U \}$$

Este tipo de correspondencia aparece en la Teoría de Control.

<u>Ejemplo 2.2.4</u> Sean H un espacio de Hilbert y $V : H \to IR \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente. Definamos $\partial V : H \rightrightarrows H'$ la correspondencia definida por

$$\forall x \in V : \partial V(x) = \left\{ x' \in H' / \max_{y \in X} \{ \langle x'; y \rangle - V(y) \} = \langle x'; x \rangle - V(x) \right\}$$

Luego,

a) $\partial V(x)$ es llamado el subdiferencial de V en x.
b) $\partial V(x)$ es un subconjunto convexo y cerrado de H'. $\partial V(x)$ puede ser vacío.
d) $\partial V(x)$ generaliza el concepto de gradiente, en el sentido de que si V tiene gradiente $\nabla V(x)$, entonces $\partial V(x) = \{\nabla f(x)\}$.
e) Otro hecho importante es que la inversa de ∂V es también el subdiferencial de una función convexa semicontinua inferiormente V^*,llamada la conjugada, definida sobre el dual H' de H mediante

$$V^*(x') = \underset{y \in H}{Sup}\{\langle x'; y\rangle - V(y)\}$$

2.3 Conceptos de continuidad de correspondencias

En esta sección asumiremos que X e Y son espacios vectoriales normados y que $F : X \rightrightarrows Y$ es una correspondencia estricta.

<u>Definición 2.3.1</u> Se dice que F es semicontinua superiormente en $x_0 \in X$ si para cualquier conjunto abierto V que contenga a $F(x_0)$, existe una vecindad U de x_0 tal que $F(U) \subset V$.
Diremos que F es semicontinua superiormente si lo es en cada $x_0 \in X$.

Proposición 2.3.1 Sean $F : X \rightrightarrows Y$, $G : Y \rightrightarrows Z$.Si F y G son semicontinuas superiormente, entonces GF también lo es.

Demostración. Sea $x_0 \in X$ cualquiera. Sea W cualquier conjunto abierto que contiene a $GF(x_0)$. Es decir,

$$\bigcup_{y \in F(x_0)} G(y) \subset W$$

Definamos $V = \{ y \in Y \ / \ G(y) \subset W \}$. Veamos que $F(x_0) \subset V$.
En efecto: Sea $y \in F(x_0)$. Luego, a partir de

$$G(y) \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} G(y) \subset W$$

se sigue que $G(y) \subset W$; es decir, $y \in V$.

Veamos que V es abierto.

En efecto, sea $y_0 \in V$ cualquiera. Como $G(y_0) \subset W$ es claro que W es una vecindad de $G(y_0)$. Como G es semicontinua superiormente, entonces existe un subconjunto abierto A que contiene a y_0 tal que $G(A) \subset W$. Esto quiere decir que para cada $y \in A$ se cumple que $G(y) \subset W$; es decir, $A \subset V$. Esto muestra que V es abierto.

Como $F(x_0) \subset V$ y V es abierto se sigue que V es una vecindad de $F(x_0)$ y como F es semicontinua superiormente en x_0, entonces existe una vecindad U de x_0 tal que $F(U) \subset V$. Luego, de

$$G(F(U)) \subset G(V) \subset W$$

se sigue que $(GF)(U) \subset W$. Así, queda probado que GF es semicontinua superiormente en x_0. Como x_0 fue tomado arbitrariamente, GF es semicontinua superiormente. ∎

Proposición 2.3.2 Sea $F : X \rightrightarrows Y$, una correspondencia semicontinua superiormente tal que para cada $x \in X$, $F(x)$ es cerrado. Luego, el gráfico de F es cerrado.

Demostración. Recordemos que

$$Graf(F) = \{ (x; y) \,/\, y \in F(x) \}$$

Sea $(x_n; y_n)$ una sucesión cualquiera en $Graf(F)$ que converge a $(x; y) \in X \times Y$. Sea V cualquier conjunto abierto que contiene a $F(x)$.Como F es semicontinua superiormente en x, existe una vecindad U de x tal que $F(U) \subset V$. Como $x_n \to x$ y $x \in U$, entonces existe un número natural N tal que para cada $n \geq N$, $x_n \in U$.

Como $y_n \in F(x_n) \subset F(U) \subset V$ se sigue que para cada $n \geq N$, $y_n \in V$. Esto implica que $y \in \overline{V}$ y por lo tanto, $y \in \overline{F(x)}$. Como $F(x)$ es cerrado se tiene que $y \in F(x)$, de lo cual se sigue que $(x; y) \in Graf(F)$. Así, $Graf(F)$ es cerrado. ∎

Proposición 2.3.3 Sean $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Y$ dos correspondencias tales que

- Para cada $x \in X : F(x) \cap G(x) \neq \phi$.
- F es semicontinua superiormente en x_0.
- $F(x_0)$ es compacto.
- El $Graf(G)$ es cerrado.

Luego, la correspondencia $F \cap G : X \rightrightarrows Y$ definida por

$$\forall x \in X : (F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$$

es semicontinua superiormente en x_0.

Demostración. Sea $V = V(F(x_0) \cap G(x_0))$ una vecindad abierta de $F(x_0) \cap G(x_0)$. Debemos hallar una vecindad $U(x_0)$ de x_0 tal que

$$\forall x \in U : F(x) \cap G(x) \subset U$$

Supongamos que $F(x_0) \subset V$:

Como F es semicontinua superiormente en x_0, entonces existe una vecindad $U(x_0)$ de x_0 tal que

$$\forall\, x \in U(x_0) : F(x) \subset U$$

lo cual implica que

$$\forall\, x \in U(x_0) : F(x) \cap G(x) \subset U$$

Supongamos que $F(x_0) \not\subset V$:

Definamos el conjunto K como $K = F(x_0) \setminus \mathrm{V}$ el cual es compacto pues $F(x_0)$ lo es.

Veamos que para cada $y \in K$, $(x_0; y) \notin Graf(G)$.

En efecto, Sea $y \in K$ cualquiera, entonces $y \notin G(x_0)$.Procedamos por contradicción. Si y perteneciera a $G(x_0)$, entonces y estaría en $F(x_0) \cap G(x_0)$ se tendría que y estaría en V, lo cual es una contradicción pues $y \in K$.
Como $y \notin G(x_0)$, es claro que $(x_0; y) \notin Graf(G)$.

Sea $y \in K$ cualquiera. Como $(x_0; y) \notin Graf(G)$, entonces $(x_0; y) \in Graf(G)^C$ el cual es abierto. Luego, existen vecindades abiertas $V_y(x_0)$ y $V(y)$ tales que

$$Graf(G) \cap \{V_y(x_0) \times V(y)\} = \phi \text{ ....(*)}$$

Veamos que para cada $x \in V_y(x_0)$, $G(x) \cap V(y) = \phi$

En efecto, procedamos por contradicción. Supongamos que existe $x \in V_y(x_0)$ tal que $G(x) \cap V(y) \neq \phi$. Sea $z \in G(x) \cap V(y)$. Luego se tendría que $(x; z) \in Graf(g)$ y $(x; z) \in V_y(x_0) \cap V(y)$, lo cual sería una contradicción con (*).

Como $K = \bigcup_{y \in K} V(y)$ y K es compacto, existe $\{y_1, \ldots\ldots, y_N \subset K\}$ tal que $K \subset \bigcup_{j=1} V(y_j)$.

Es claro que la unión $M = \bigcup_{j=1} V(y_j)$ es una vecindad de K y por lo tanto, $M \cup V$ es una vecindad de $F(x_0)$.

Como F es semicontinua superiormente en x_0, entonces existe una vecindad $U_0(x_0)$ tal que

$$\forall\, x \in U_0(x_0) : F(x) \subset M \cup V \text{ ....(**)}$$

Sea $U(x_0) = U_0(x_0) \cap \left\{ \bigcap_{j=1}^{N} V_{y_j}(x_0) \right\}$ el cual es claramente una vecindad de x_0.

Veamos que $\forall x \in U(x_0)$: $G(x) \cap M = \phi$, $F(x) \subset M \cup V$.

En efecto, sea $x \in U(x_0)$ cualquiera. De la definición de $U(x_0)$ es claro que $x \in U_0(x_0)$ y por (**) se sigue que $F(x) \subset M \cup V$.

Usando nuevamente la definición de $U(x_0)$ se tiene que $x \in \bigcap_{j=1}^{N} V_{y_j}(x_0)$. Es decir, para cada $j \in \{1,....., N\}$: $x \in V_{y_j}(x_0)$ lo cual junto con (**) se sigue que $G(x) \cap V(y_j) = \phi$. Esto implica que

$G(x) \cap \left\{ \bigcup_{j=1}^{N} V(y_j) \right\} = \phi$ de lo cual se sigue que $G(x) \cap M = \phi$.

Finalmente, para cada $x \in U(x_0)$ se tiene que

$$F(x) \cap G(x) \subset (M \cup V) \cap G(x) = \{M \cap G(x)\} \cup \{V \cap G(x)\} \subset \phi \cup V = V$$

Por lo tanto, $F \cap G$ es semicontinua superiormente en x_0 . ■

Corolario 2.3.4 Sean X e Y espacios de Hausdorff con Y compacto.Si $G: X \rightrightarrows Y$, es una correspondencia cerrada, entonces G es superiormente continua.

Demostración. Sea $F: X \rightrightarrows Y$, la correspondencia definida por $\forall x \in X: F(x) = Y$.

Se puede probar que F y G satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.3.3, de lo cual se sigue que $F \cap G$ es semicontinua superiormente. Como $F \cap G = G$ se concluye que G es semicontinua superiormente. ■

Observación. El corolario 2.3.4 da una herramienta muy útil para probar que una correspondencia es semicontinua superiormente. Sin embargo, la condición de la compacidad de Y es esencial como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1 Sea $F: IR \rightrightarrows IR^2$ (IR^2 no es compacto) la correspondencia definida por

$$\forall t \in IR: \ F(t) = \left\{ (x; y) \in IR^2 \ / \ y = t\,x \right\}$$

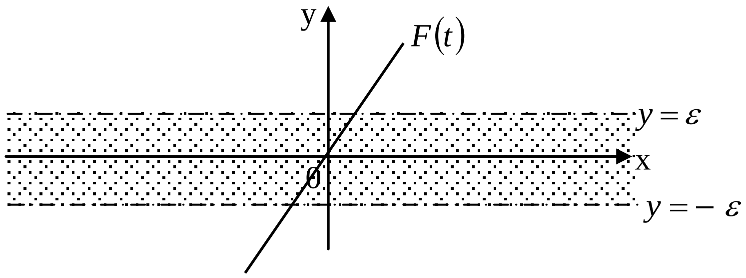
Para cada $t \in IR$, $F(t)$ es la recta que pasa por el origen de coordenadas de pendiente t .

Veamos que $Graf(F)$ es cerrado.

En efecto: Sea $(t_n;(x_n;y_n))$ una sucesión en el $Graf(F)$ que converge a $(t,(x;y))$. Luego, $t_n \to t$, $x_n \to x$ e $y_n \to y$ .Como $(x_n;y_n)\in F(t_n)$, entonces $y_n = t_n\, x_n$. Así, $(x;y)\in F(t)$ lo cual implica que $(t;(x;y))\in Graf(F)$.

Veamos que F no es semicontinua superiormente en 0 .

Es claro que $F(0)=\{(x;y)\,/\, y=0.x\}=\{(x;y)\,/\, y=0\}=Eje\ X$.



Sea $V=\{(x;y)/\, -\varepsilon < y < \varepsilon\}$. Es claro que V es una vecindad de $F(0)$. Ahora, para cualquier $t\in IR$, el conjunto $F(t)$ no está contenido en V , lo cual muestra que F no es semicontinua superiormente en 0 .

Proposición 2.3.5 Sean X e Y espacios de Hausdorff con X compacto. Si $F: X \rightrightarrows Y$, es una correspondencia semicontinua superiormente tal que para cada $x\in X$, el conjunto $F(x)$ es compacto, entonces $F(X)$ es compacto.

Demostración. Sea $\{U_\alpha \,/\, \alpha\in I\}$ cualquier cubrimiento abierto de $F(X)$. Luego, para cada $x\in X$, $\{U_\alpha \,/\, \alpha\in I\}$ es un cubrimiento abierto de $F(x)$. Como $F(x)$ es compacto, entonces existe un número natural $N(x)$ tal que

$$F(x) \subset \bigcup_{k=1}^{N(x)} U_{\alpha_k}$$

Como $\bigcup_{k=1}^{N(x)} U_{\alpha_k}$ es una vecindad de $F(x)$ y F es semicontinua superiormente en x ,

entonces existe una vecindad $U(x)$ de x tal que $F(U(x))\subset \bigcup_{k=1}^{N(x)} U_{\alpha_k}$.

A partir de que $X\subset \bigcup_{x\in X} U(x)$ y del hecho de que X es compacto, se sigue que existe

$\{x_1,....,x_m\}$ tal que $X\subset \bigcup_{j=1}^{m} U(x_j)$. Luego, de

$$F(X) \subset F\left(\bigcup_{j=1}^{m} U(x_j)\right) = \bigcup_{j=1}^{m} F(U(x_j)) \subset \bigcup_{j=1}^{m}\left[\bigcup_{k=1}^{N(x_j)} U_{\alpha_k}\right]$$

se sigue que $\{U_{\alpha_k} \,/\, 1 \le k \le N(x_j), 1 \le j \le m\}$ es un cubrimiento finito de $F(X)$. Así queda probado que $F(X)$ es compacto. ■

Supongamos que X e Y son espacios vectoriales normados y que $F: X \rightrightarrows Y$ es una correspondencia estricta.

Definición 2.3.2 Se dice que F es semicontinua inferiormente en $x_0 \in X$ si para cualquier $y \in F(x_0)$ y cualquier vecindad V de y, existe una vecindad U de x_0 tal que $\forall\, x \in U:\ F(x) \cap V \neq \phi$.
Diremos que F es semicontinua inferiormente si lo es en cada $x_0 \in X$.

Capítulo 3

Conos contingente y tangente

Sean X e Y dos espacios de Banach. En este capítulo definimos tres conjuntos que se encuentran contenidos en X y que forman el soporte geométrico del estudio de la derivada de una aplicación multivaluada de X en Y, el cono contingente, el límite inferior de una aplicación multivaluada y cono tangente. Estableceremos algunas propiedades de estos conjuntos y alguna relaciones entre ellos.

3.1 Cono contingente

En esta parte asumiremos que K es un subconjunto no vacío de un espacio de Banach X.

<u>Notación</u>: $B = \{x \in X \ / \ \|x\| \le 1\}$

$\varepsilon B = \{x \in B \ / \ \|x\| \le \varepsilon\}$

$B_K(x_0;\varepsilon) = K \cap (x_0 + B) = \{x \in K \ / \ \|x - x_0\| < \varepsilon\}$

$x \xrightarrow{K} x_0$ significa que x se aproxima a x_0 en K

<u>Definición 3.1.1</u> Sea $x \in X$. El cono contingente a K en x se denota por $T_K(x)$ y se define como

$$T_K(x) := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{r>0} \bigcup_{h \in \langle 0;r]} \left[\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B \right]$$

Proposición 3.1.1 Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) $v \in T_K(x)$

b) $\forall \varepsilon > 0, \forall r > 0, \exists\, u \in (v + \varepsilon B), \exists\, h \in \langle 0;r] \ / \ (x + hu) \in K$

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que $v \in T_K(x)$; es decir,

$$v \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{r>0} \bigcup_{h \in \langle 0;r]} \left[\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B \right]$$

Esto implica que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $r > 0$, $v \in \bigcup_{h \in \langle 0;r]} \left[\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B \right]$. Luego, existe $h \in \langle 0;r]$ tal que $v \in \frac{1}{h}(K-x) + \varepsilon B$, de lo cual se sigue que existen $a \in K$ y $b \in \varepsilon B$ de manera que $v = \frac{1}{h}(a-x) + b$. Si hacemos $c = -b$, entonces tenemos que $c \in \varepsilon B$ y $v = \frac{1}{h}(a-x) - c$, lo cual muestra que $v + c = \frac{1}{h}(a-x)$. Si tomamos $u = v + c$, es claro que $u \in v + \varepsilon B$ y $hu = h(v+c) = a - x$; es decir, $x + hu = a \in K$. Así, queda probado (b).

$(b) \Rightarrow (a)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ cualesquiera. Por hipótesis, existen $u \in (v + \varepsilon B)$ y $h \in \langle 0, r]$ tales que $(x + hu) \in K$. Si hacemos $z = x + hu$, entonces tenemos que

$$z \in K \quad \text{y} \quad u = \frac{z - x}{h} \in \frac{1}{h}(K - x)$$

Luego, de

$$v = u + (v - u) = \frac{1}{h}(z - x) + (v - u) \qquad \text{y} \qquad \| v - u \| \le \varepsilon$$

se sigue que

$$v \in \frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B$$

lo cual muestra que $v \in \bigcup_{h \in \langle 0;r]} \left[\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B \right]$. Como ε y r fueron tomados en forma arbitraria se tiene que

$$v \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{r > 0} \bigcup_{h \in \langle 0;r]} \left[\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B \right]$$

es decir, $v \in T_K(x)$. ■

Proposición 3.1.2 Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) $v \in T_K(x)$

b) Existen sucesiones $(h_n) \subset \langle 0;\infty\rangle$ y $(u_n) \subset X$ tales que

i) $\lim_{n \to \infty} u_n = v$

ii) $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$

iii) $\forall\, n \in N : (x + h_n u_n) \in K$

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$. Sean $v \in T_K(x)$ y $n \in IN$ cualesquiera. Como $\frac{1}{n} > 0$, usando la Proposición 3.1.1 se sigue que existen $u_n \in \left(v + \frac{1}{n} B\right)$ y $h_n \in \left\langle 0; \frac{1}{n} \right]$ tales que $(x + h_n u_n) \in K$ y así se cumple iii). A partir de que para cada $n \in IN$, $h_n \in \left\langle 0; \frac{1}{n} \right]$, es claro que $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$ lo cual muestra que se cumple ii). También, como para cada $n \in IN : u_n \in \left(v + \frac{1}{n} B\right)$ se sigue que

$$\forall\ n \in IN : \| u_n - v \| \leq \frac{1}{n}$$

lo cual implica que $\lim_{n \to \infty} u_n = v$. Así, se cumple i).

$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que existen sucesiones $(h_n) \subset \langle 0; \infty \rangle$ y $(u_n) \subset X$ tales que se cumplen i) , ii) y iii). Sean $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ cualesquiera. Como $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$, existe un número natural N_1 tal que

$$\forall n \geq N_1 : 0 < h_n < r$$

Además, como $\lim_{n \to \infty} u_n = v$, existe un número natural N_2 tal que

$$\forall n \geq N_2 : \| u_n - v \| < \varepsilon \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \forall n \geq N_2 : u_n \in (v + \varepsilon B)$$

Si tomamos $N = \max\{N_1; N_2\}$, entonces tenemos que

$$0 < h_N < r \qquad \text{y} \qquad [u_n - v] < \varepsilon$$

Así, tenemos que existen $u_N \in (v + \varepsilon B)$ y $h_N \in \langle 0; r]$ tales que $(x + h_N u_N) \in K$. De la Proposición 3.1.1 se sigue que $v \in T_K(x)$. ∎

Proposición 3.1.3. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) $v \in T_K(x)$

b) $\lim_{h \to 0^+} \inf \left[\frac{d_K(x + hv)}{h} \right] = 0$

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que $v \in T_K(x)$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Usando la Proposición 3.1.1 se tiene que existen $u \in (v + \varepsilon B)$ y $h \in \langle 0, \varepsilon]$ (tomando $r = \varepsilon$) tales que $(x + hu) \in K$. Sea $\delta > 0$ cualquiera. Como para cualquier $h \in \langle 0, \delta]$ se cumple que

$$d(x + hv, K) \leq d(x + hv; x + hu) \leq h \| u - v \| \leq h\varepsilon$$

es claro que

$$\forall h \in \langle 0;\delta] : \quad \frac{d_K(x+hv)}{h} = \frac{d(x+hv\,;K)}{h} \leq \varepsilon$$

lo cual implica

$$\inf_{h\in\langle 0;\delta]} \frac{d_K(x+hv)}{h} \leq \varepsilon$$

Si en la última desigualdad tomamos límite cuando $\delta \to 0^+$ tenemos

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{h\in\langle 0;\delta]} \frac{d_K(x+hv)}{h} = 0$$

lo cual es equivalente a $\lim_{h\to 0^+}\inf\left[\frac{d_K(x+hv)}{h}\right] = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que $\lim_{h\to 0^+}\inf\left[\frac{d_K(x+hv)}{h}\right] = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera.. Como $\lim_{h\to 0^+}\inf\left[\frac{d_K(x+hv)}{h}\right] = 0$, se tiene que

$$\lim_{r\to 0}\left[\inf_{h\in\langle 0;r]} \frac{d_K(x+hv)}{h}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

De (1) se sigue que existe $R > 0$ tal que

$$\forall\, r \in \langle 0,R] : \inf_{h\in\langle 0,r]} \frac{d_K(x+hv)}{h} < \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

De (2) se tiene que $\quad \forall\, r > 0\ \exists\, h \in \langle 0;r] : \ \frac{d_K(x+hv)}{h} < \varepsilon$

O equivalentemente:

$$\forall\, r > 0\ \exists\, h \in \langle 0;r] : \quad d_K(x+hv) < \varepsilon h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Utilizando la definición de d_K, de (3) se sigue que

$$\forall\, r > 0\ \exists\, h \in \langle 0;r], \exists\, a \in K : \ d_K(x+hv) < \varepsilon h$$

Hagamos $u = \frac{a-x}{h}$.

Es claro que $x + hu = a \in K$. Además, a partir de

$$\|u-v\| = \left\| \frac{a-x}{h} - v \right\| = \left\| \frac{a-x-hv}{h} \right\| = \frac{d(x+hv;a)}{h} < \varepsilon$$

se tiene que $u \in (v+\varepsilon B)$. Así, tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall\ r > 0,\ \exists\ h \in \langle 0;r],\ \exists\ u \in (v + \varepsilon B)\ /\ (x+hu) \in K$$

De la Proposición 3.1.1 se sigue que $v \in T_K(x)$. ■

Proposición 3.1.4 $T_K(x)$ es un cono cerrado.

Demostración. Primero probaremos que $T_K(x)$ es un cono.

¿Si $v \in T_K(x)$ y $t > 0$, entonces $(tv) \in T_K(x)$?

Sean $v \in T_K(x)$ y $t > 0$ cualesquiera. Sean $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ cualesquiera. De la Proposición 3.1.1 se sigue que existen $u \in (v + \frac{\varepsilon}{t} B)$ y $h \in \langle 0;tr]$ tales que $(x+hu) \in K$.

Como $u \in (v + \frac{\varepsilon}{t} B)$ es claro que $tu \in (tv + \varepsilon B)$ y como $h \in \langle 0;tr]$ se tiene que $\frac{h}{t} \in \langle 0;r]$. Además, $x + (\frac{h}{t})(tu) = (x+hu) \in K$. Así, hemos probado que

`` $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall$ r $> 0$, $\exists\ \bar{h}\ (= \frac{h}{t}) \in \langle 0;r]$, $\exists\ \bar{u}\ (= tu) \in (tv + \varepsilon B)$ tal que $(x + \bar{h}\bar{u}) \in K$ ``

Usando la Proposición 3.1.1 se sigue que $(tv) \in T_K(x)$.

Ahora veamos que $T_K(x)$ es un conjunto cerrado. Sea $v \in \overline{T_K(x)}$ cualquiera. Usaremos la Proposición 3.1.3 para probar que $v \in T_K(x)$.

Como $v \in \overline{T_K(x)}$, entonces existe una sucesión $(v_n) \subset T_K(x)$ tal que $\lim_{n\to\infty} v_n = v$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Luego, existe un número natural N tal que $\|v_N - v\| < \varepsilon$. Sean $a \in K$, $r > 0$ y $h \in \langle 0;\ r]$ cualesquiera. A partir de

$$d_K(x+hv) = d(x+hv;K) \le d(x+hv;a) = \|x+hv-a\|$$

$$\|(x+hv_N - a) + h(v - v_N)\| \le \|x+hv_N - a\| + h\|v - v_N\|$$

y tomando ínfimo sobre los $a \in K$ se tiene que

$$d_K(x+hv) \le d_K(x+hv_N) + h\varepsilon$$

lo cual implica que

$$\forall h \in \langle 0;r],\ \frac{d_K(x+hv)}{h} \leq \frac{d_K(x+hv_N)}{h} + \varepsilon \ldots\ldots\ldots(4)$$

Si en (4) tomamos ínfimo sobre los $h \in \langle 0;r]$ tenemos que

$$\inf_{h\in\langle 0;r]}\left[\frac{d_K(x+hv)}{h}\right] \leq \inf_{h\in\langle 0;r]}\left[\frac{d_K(x+hv_N)}{h}\right] + \varepsilon \ldots\ldots\ldots(5)$$

Si en (5) hacemos que $r \to 0^+$ se obtiene

$$\lim_{h\to 0^+}\inf\left[\frac{d_K(x+hv)}{h}\right] \leq \lim_{h\to 0^+}\inf\left[\frac{d_K(x+hv_N)}{h}\right] + \varepsilon \ldots..(6)$$

Como $v_N \in T_K(x)$, de la Proposición 3.1.3 se tiene que $\lim_{h\to 0^+}\inf\left[\frac{d_K(x+hv_N)}{h}\right] = 0$, lo cual junto con (6) y considerando que $\varepsilon > 0$ fue tomado arbitrariamente se tiene que

$$\lim_{h\to 0^+}\inf\left[\frac{d_K(x+hv)}{h}\right] = 0$$

Usando nuevamente la Proposición 3.1.3 se concluye que $v \in T_K(x)$. ∎

Proposición 3.1.5 Si $x \in \text{int}(K)$, entonces $T_K(x) = X$.

Demostración. Como $x \in \text{int}(K)$, entonces existe $R>0$ tal que $x + RB \subset K$. Probaremos que $X \subset T_K(x)$.

Sea $v \in X$ cualquiera. Sean $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ cualesquiera. Si hacemos $u = v$ es claro que $u \in (v + \varepsilon B)$. Tomemos $\bar{h} \in \langle 0;r]$ con $\bar{h}\|v\| < R$. Luego, si $z = x + \bar{h}u = x + \bar{h}v$, se tiene que $\|z - x\| = \bar{h}\,\|v\| < R$, lo cual implica que $z \in x + RB$ y así $z \in K$.

Por lo tanto, hemos probado que

$$``\ \forall\, \varepsilon > 0, \forall r > 0,\ \exists\, u \in (v + \varepsilon B),\ \exists\, \bar{h} \in \langle 0;r] : z = x + \bar{h}u\ ``$$

Usando la Proposición 3.1.1 se tiene que $v \in T_K(x)$ y así concluimos que $X \subset T_K(x)$. ∎

Observaciones.

- $\forall\ x \in X : T_X(x) = X$.
- Se conviene escribir $T_\phi(x) := \phi$.

3.2 Límite inferior de una aplicación multivaluada

Definición 3.2.1. Sean U un espacio métrico, $u_0 \in U$.

$F : U \rightrightarrows X$ una correspondencia de U en X.

El límite inferior de F cuando u tiende a u_0 se denota por $\liminf\limits_{u \to u_0} F(u)$ y se define como

$$\liminf_{u \to u_0} F(u) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{r > 0} \bigcap_{u \in B(u_0; r)} [F(u) + \varepsilon B]$$

Proposición 3.2.1 Si para cada $u \in U$, el conjunto $F(u)$ es cerrado, entonces

$$\liminf_{u \to u_0} F(u) \subset F(u_0) \text{...........}(7)$$

Demostración. Sean $v \in \liminf\limits_{u \to u_0} F(u)$ y $\varepsilon > 0$ cualesquiera.

Como $v \in \bigcup\limits_{r > 0} \bigcap\limits_{u \in B(u_0; r)} [F(u) + \varepsilon B]$ se tiene que existe un número positivo r tal que

$$v \in \bigcap_{u \in B(u_0; r)} [F(u) + \varepsilon B] \subset F(u_0) + \varepsilon B$$

Así, tenemos que

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ v \in F(u_0) + \varepsilon B$$

es decir, $v \in \overline{F(u_0)}$ y como este conjunto es cerrado se concluye que $v \in F(u_0)$. Con esto queda demostrado (7). ■

Proposición 3.2.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) F es semicontinua inferiormente en u_0.

b) $F(u_0) \subset \liminf\limits_{u \to u_0} F(u)$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que F es semicontinua inferiormente en u_0. Sean $v \in F(u_0)$ y $\varepsilon > 0$ cualesquiera. Si consideramos $B(v; \varepsilon)$ es claro que $v \in F(u_0) \cap \overset{o}{B}(v; \varepsilon)$. Como F es semicontinua inferiormente en u_0, existe un número positivo r tal que

$$\forall\ z \in B(u_0; r) : F(z) \cap B(v; \varepsilon) \neq \phi$$

es decir,

$$\forall z \in B(u_0;r): v \in [F(z)+\varepsilon B] \ldots\ldots\ldots(8)$$

De (8) se sigue que $v \in \bigcap_{z \in B(u_0;r)} [F(z)+\varepsilon B]$, lo cual implica que

$v \in \bigcup_{r>0} \bigcap_{z \in B(u_0;r)} [F(z)+\varepsilon B]$.

Así, hemos probado que

$$\forall \ \varepsilon > 0 : v \in \bigcup_{r>0} \bigcap_{z \in B(u_0;r)} [F(z)+\varepsilon B]$$

lo cual significa que $\qquad v \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{r>0} \bigcap_{z \in B(u_0;r)} [F(z)+\varepsilon B]$

es decir, $v \in \liminf_{u \to u_0} F(u)$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que $F(u_0) \subset \liminf_{u \to u_0} F(u)$.

Sea $V \subset X$ cualquier conjunto abierto con $V \cap F(u_0) \neq \phi$. Como $F(u_0) \subset \liminf_{u \to u_0} F(u)$ se tiene que $V \cap \liminf_{u \to u_0} F(u) \neq \phi$. Sea v tal que $v \in V$ y $v \in \liminf_{u \to u_0} F(u)$.

Como $v \in V$ y V es un conjunto abierto, entonces existe un número positivo r_1 tal que $B(v;r_1) \subset V$. Como $v \in \liminf_{u \to u_0} F(u)$, tomando $\varepsilon = r_1 > 0$, existe $r > 0$ tal que $v \in \bigcap_{x \in B(u_0;r)} [F(x)+r_1 B]$. Luego,

$$\forall \ x \in B(u_0;r): v \in [F(x)+r_1 B]$$

$$\exists \ z \in F(x) \,/\, \|v - z\| \le r_1$$

$$z \in F(x) \quad y \quad z \in B(v;r_1) \subset V$$

$$z \in F(x) \cap V$$

$$F(x) \cap V \neq \phi$$

Usando la definición se tiene que F es semicontinua en u_0. ■

<u>Observación</u>. Si para cada $x \in Dom(F)$, $F(x)$ es cerrado se tiene que

$$\begin{pmatrix} F \ \textit{es semicontinua} \\ \textit{inferiormente en } u_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\liminf_{u \to u_0} F(u) = F(u_0) \right) \ldots\ldots\ldots.(9)$$

Proposición 3.2.3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $v \in \liminf_{u \to u_0} F(u)$

b) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ r > 0 : \sup_{u \in B(u_0;r)} d(v; F(u)) \leq \varepsilon$

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $v \in \liminf_{u \to u_0} F(u)$; es decir, $v \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{r>0} \bigcap_{u \in B(u_0;r)} [F(u) + \varepsilon B]$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Luego, es claro que $v \in \bigcup_{r>0} \bigcap_{u \in B(u_0;r)} [F(u) + \varepsilon B]$ lo cual implica que existe un número positivo r tal que $v \in \bigcap_{u \in B(u_0;r)} [F(u) + \varepsilon B]$. La última inclusión significa que

$$\forall\ u \in B(u_0; r) : v \in [F(u) + \varepsilon\ B]$$

$$\forall\ u \in B(u_0; r) : d(v; F(u)) \leq \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Si en (10) tomamos supremo sobre todos los $u \in B(u_0; \varepsilon)$ se obtiene $\sup_{u \in B(u_0;r)} d(v; F(u)) \leq \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Por hipótesis, existe un número positivo r tal que

$$\sup_{u \in B(u_0;r)} d(v; F(u)) \leq \varepsilon$$

lo cual implica que

$$\forall\ u \in B(u_0; r) : d(v; F(u)) \leq \varepsilon$$

Así, tenemos

$$\forall\ u \in B(u_0; r) : v \in [F(u) + \varepsilon\ B]$$

La última afirmación significa que $v \in \bigcap_{u \in B(u_0;r)} [F(u) + \varepsilon B]$ y esto implica que $v \in \bigcup_{r>0} \bigcap_{u \in B(u_0;r)} [F(u) + \varepsilon B]$.

Como la última inclusión se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$v \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{r>0} \bigcap_{u \in B(u_0;r)} [F(u) + \varepsilon B]$$

es decir, $v \in \liminf_{u \to u_0} F(u)$. ■

3.3 Cono tangente

Definición 3.3.1. Sea $x_0 \in X$. El cono tangente a K en x_0 se denota por $C_K(x_0)$ y se define como

$$C_K(x_0) := \liminf_{\substack{x \to x_0 \\ h \to 0^+}} \tfrac{1}{h}(K - x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\substack{r>0 \\ \delta>0}} \bigcap_{\substack{x \in B_K(x_0;\delta) \\ h \in \langle 0;\delta]}} \left[\tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right]$$

Proposición 3.3.1 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $v \in C_K(x_0)$

b) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists r > 0, \exists\ \delta > 0 : \forall x \in B_K(x_0; r), \forall h \in \langle 0;\delta]\ \exists u \in (v + \varepsilon B) : x + hu \in K$

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $v \in C_K(x_0)$. Luego,

$$v \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\substack{r>0 \\ \delta>0}} \bigcap_{\substack{x \in B_K(x_0;\delta) \\ h \in \langle 0;\delta]}} \left[\tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right] \ldots\ldots\ldots(11)$$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. De (11) se sigue que existen números positivos r y δ tales que

$$v \in \bigcap_{\substack{x \in B_K(x_0;\delta) \\ h \in \langle 0;\delta]}} \left[\tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right]$$

lo cual implica que

$$\forall\ x \in B_K(x_0; r), \forall h \in \langle 0, \delta] : v \in \left[\tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right] \ldots\ldots\ldots(12)$$

De (12) se tiene que existen $z \in K$ y $w \in \varepsilon B$ tales que $v = \frac{1}{h}(z - w) + x$ o también $v + (-w) = \frac{1}{h}(z - x)$. Si hacemos $u = v + (-w)$ se tiene que $u \in (v + \varepsilon B)$ y como $u = \frac{1}{h}(z - x)$ se muestra que $z = x + hu \in K$. Así, hemos probado que

´´ $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ r > 0,\ \exists\ \delta > 0 : \forall x \in B_K(x_0; r),\ \forall\ h \in \langle 0;\delta]\ \exists\ u(v + \varepsilon B) : (x + hu) \in K$ ´´

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Por hipótesis existen $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\forall x \in B_K(x_0; r),\ \forall\ h \in \langle 0;\delta]\ \exists\ u(v + \varepsilon B) : (x + hu) \in K$$

Si $z = x + hu$, entonces $z \in K$ y $u = \frac{1}{h}(z - x) \in \frac{1}{h}(K - x)$. Como

$$v = u + (v - u) = \tfrac{1}{h}(z - x) + (v - u) \in \tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B$$

se tiene que

$$\forall\, x \in B_K(x_0;r),\ \forall\, h \in \langle 0;\delta] : v \in \left[\tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right]$$

lo cual implica que

$$v \in \bigcap_{\substack{x \in B_K(x_0;\delta) \\ h \in \langle 0;\delta]}} \left[\tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right].$$

Así tenemos que

$$v \in \bigcup_{\substack{r>0 \\ \delta>0}} \bigcap_{\substack{x \in B_K(x_0;\delta) \\ h \in \langle 0;\delta]}} \left[\tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right]$$

y como $\varepsilon > 0$ fue tomado arbitrariamente se tiene que

$$v \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\substack{r>0 \\ \delta>0}} \bigcap_{\substack{x \in B_K(x_0;\delta) \\ h \in \langle 0;\delta]}} \left[\tfrac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right]$$

es decir, $v \in C_K(x_0)$. ∎

Proposición 3.3.2 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $v \in C_K(x_0)$

b) $\forall\, (x_n) \in K,\ x_n \to x_0, \forall (h_n) \subset \langle 0;\infty\rangle$ con $h_n \to 0$, $\exists\, (u_n) \subset X$, con $(u_n) \to v$, $\exists\, N \in IN / \forall n \geq N : (x_n + h_n u_n) \in K$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $v \in C_K(x_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. De la Proposición 3.3.1 se sigue que existen números positivos r y δ tales que

$$\forall\, x \in B_K(x_0;r), \forall\, h \in \langle 0;\delta]\ \exists\, u \in (v + \varepsilon B) : (x + h u) \in K \text{ ………...(13)}$$

Sean $(x_n) \subset K$ y $(h_n) \subset \langle 0,\infty\rangle$ sucesiones cualesquiera tales que $x_n \to x_0$ y $h_n \to 0$. Luego, existen números naturales N_1 y N_2 tales que

$$\forall n \geq N_1 : x_n \in (x_0 + rB)$$

$$\forall n \geq N_2 : 0 < h_n \leq \delta$$

Si $N = \max\{N_1;N_2\}$, entonces

$$\forall n \geq N : x_n \in B_K(x_0;r),\ \ h_n \in \langle 0;\delta] \text{ ………………(14)}$$

De (13) y (14) se sigue que

$$\forall n \geq N : \exists\, u_n \in (v + \varepsilon B) : (x_n + h_n u_n) \in K \quad y \quad u_n \to v$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Procedamos por contradicción. Supongamos que $v \notin C_K(x_0)$. Usando la Proposición 3.3.1 se tiene que existe un número positivo ε tal que

$$\forall r>0, \forall \delta>0, \exists\, x_r \in B_K(x_0;r),\ \exists\, h_\delta \in \langle 0;\delta],\ \forall u \in (v+\varepsilon B): (x_r + h_\delta u) \notin K \ldots\ldots.(15)$$

Sea $n \in IN$ cualquiera. Tomando $r = \frac{1}{n}$ y $\delta = \frac{1}{n}$. De (15) se sigue que existen $x_n \in B_K(x_0;\frac{1}{n})$ y $h_n \in \langle 0;\frac{1}{n}]$ tales que

$$\forall\, u \in (v+\varepsilon B): (x_n + h_n u) \notin K \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(16)$$

Es decir, tenemos sucesiones $(x_n) \subset K$ y $(h_n) \subset \langle 0,\infty\rangle$ con $x_n \to x_0$ y $h_n \to 0$ tales que se cumple (16) lo cual contradice (b). Por lo tanto, $v \in C_K(x_0)$.

■

Proposición 3.3.3 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $v \in C_K(x_0)$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ h \to 0^+}} \left[\dfrac{d_K(x+hv)}{h}\right] = 0$

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $v \in C_K(x_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. De la Proposición 4.3.1 se sigue que existen números positivos r y δ tales que

$$\forall x \in B_K(x_0;r), \forall h \in \langle 0;\delta]\ \exists\, u \in (v+\varepsilon B): (x+hu) \in K \ldots\ldots\ldots\ldots......(17)$$

Si $z = x + hu$, entonces $z \in K$ y a partir de

$$d_K(x+hv) \le d(x+hv;z) = d(x+hv;x+hu) = \| hv - hu \| = h\| v-u \| \le h\varepsilon$$

se sigue que

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists r>0,\ \exists\, \delta>0 : \forall x \in B_K(x_0;r),\ \forall\, h \in \langle 0;\delta]:\ \frac{d_K(x+hv)}{h} \le \varepsilon$$

lo cual muestra (b).

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ h \to 0^+}} \left[\dfrac{d_K(x+hv)}{h}\right] = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Por hipótesis existen $r>0$ y $\delta>0$ tales que

$$\forall x \in B_K(x_0;r),\ \forall\, h \in \langle 0;\delta]:\ \frac{d_K(x+hv)}{h} < \varepsilon$$

lo cual es equivalente a decir que

$$\forall x \in B_K(x_0;r), \forall h \in \langle 0;\delta]:\ d_K(x+hv) < \varepsilon h$$

Como $d_K(x+hv) < \varepsilon h$, existe $z \in K$ tal que $d(x+hv;z) < \varepsilon h$, lo cual implica que

$$\left\| v - \frac{z-x}{h} \right\| < \varepsilon$$

Si tomamos $u = \dfrac{z-x}{h}$ tenemos que $\| v-u \| < \varepsilon$; es decir, $u \in (v+\varepsilon B)$ y $z = x+hu \in K$. De la Proposición 3.3.1 se sigue que $v \in C_K(x_0)$. ▬

Proposición 3.3.4 Si $x_0 \in \operatorname{int}(K)$, entonces $C_K(x_0) = X$

Demostración.

Como $x_0 \in \operatorname{int}(K)$, existe $R>0$ tal que $x_0 + RB \subset K$. Es claro que $C_K(x_0) \subset X$. Probaremos que $X \subset C_K(x_0)$. Sea $v \in X$ cualquiera. Para demostrar que $v \in C_K(x_0)$ usaremos la Proposición 3.3.1. Si $v=0$ es claro que $v \in X$ así asumiremos que $v \neq 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tomemos $r = \frac{R}{2}$ y $\delta = \frac{R}{2\|v\|}$. Luego, si para cada $x \in B_K\left(x_0;\frac{R}{2}\right)$ y para cada $h \in \left\langle 0;\frac{R}{2\|v\|}\right]$ tomamos $u=v$ se tiene que $u \in (v+\varepsilon B)$.
Si $z = x+hu$, entonces a partir de

$$\| z-x_0 \| = \| x+hu-x_0 \| \leq \| x-x_0 \| + h\| u \| \leq \tfrac{R}{2} + \left(\tfrac{R}{2\|v\|}\right)\| v \| = R$$

se sigue que $\| z-x_0 \| < R$; es decir, $z \in B(x_0;R) \subset K$ y así $z \in K$. De la Proposición 3.3.1 se sigue que $v \in C_K(x_0)$. ▬

Observaciones.

- Para cada $x \in X: C_X = X$.
- Se define $C_\phi = \phi$.

Proposición 3.3.5 El cono tangente $C_K(x_0)$ es cerrado y convexo.

Demostración. Veamos que $C_K(x_0)$ es un cono.

En efecto, Sean $v \in C_K(x_0)$ y $t > 0$ cualesquiera. Probaremos que $tv \in C_K(x_0)$, para lo cual usaremos la Proposición 3.3.1.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $v \in C_K(x_0)$, de la Proposición 3.3.1 se sigue que existen $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\forall x \in B_K(x_0; r),\ \forall h \in \langle 0; \delta],\ \exists\, u \in \left(v + \tfrac{\varepsilon}{t} B\right) : (x + hu) \in K$$

lo cual implica que

$$\forall x \in B_K(x_0; r),\ \forall s \in \left\langle 0; \frac{\delta}{t}\right] \left(st \in \langle 0; \delta\,]\right),\ tu \in (tv + \varepsilon B) \wedge\ (x + stu) \in K$$

Así, tenemos que

$$\forall x \in B_K(x_0; r),\ \forall s \in \langle 0; \tfrac{\delta}{t}],\ \exists\ (tu) \in (tv + \varepsilon B):\ [x + s(tu)] \in K$$

De la proposición 3.3.1 se sigue que $tv \in C_K(x_0)$.

Veamos ahora que $C_K(x_0)$ es cerrado.

En efecto, Sea $v \in \overline{C_K(x_0)}$ cualquiera. Luego, existe una sucesión $(v_n) \subset C_K(x_0)$ que converge a v. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Luego, existe un número natural N tal que

$$\| v_N - v \| < \frac{\varepsilon}{2} \ldots\ldots\ldots(1)$$

Como $v_N \in C_K(x_0)$, de la proposición 4.3.3 se sigue que

$$\lim_{\substack{x \xrightarrow[K]{} x_0 \\ h \to 0^+}} \frac{d_K(x + hv_N)}{h} = 0$$

lo cual implica que existen números positivos r y δ tales que

$$\forall x \in B_K(x_0; r), \forall h \in \langle 0; \delta] :\ \frac{d_K(x + hv_N)}{h} < \frac{\varepsilon}{2} \ldots\ldots.(2)$$

Sea $a \in K$ cualquiera. A partir de

$$d_K(x + hv) = d(x + hv; K) \leq d(x + hv; a) = \|x + hv - a\| = \|x + hv_N + hv - a - hv_N\| =$$

$$\|(x + hv_N - a) + h(v - v_N)\| \leq \|x + hv_N - a\| + h\|v_N - v\|$$

se sigue que

$$\forall\ a \in K : d_K(x + hv) \leq \|x + hv_N - a\| + h\|v_N - v\|$$

Si en la última desigualdad tomamos ínfimo sobre los $a \in K$ se obtiene

$$d_K(x+hv) \leq d_K(x+hv_N)+h\| v_N - v \|$$

lo cual, junto con (1) y (2), implica que

$$\frac{d_K(x+hv)}{h} \leq \frac{d_K(x+hv_N)}{h} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así, tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \exists \delta > 0 / \ \forall x \in B_K(x_0; r), \forall h \in \langle 0; \delta]: \ \frac{d_K(x+hv)}{h} < \varepsilon$$

lo cual significa que $\lim\limits_{\substack{x \xrightarrow[K]{} x_0 \\ h \to 0^+}} \frac{d_K(x+hv)}{h} = 0$.De la Proposición 3.3.3 se concluye que

$v \in C_K(x_0)$ y así $C_K(x_0)$ es cerrado.

Veamos que $C_K(x_0)$ es convexo.

En efecto, como $C_K(x_0)$ es un cono es suficiente probar que si $v_1, v_2 \in C_K(x_0)$, entonces $(v_1+v_2) \in C_K(x_0)$.

Sean $v_1, v_2 \in C_K(x_0)$ cualesquiera. Para probar que $(v_1+v_2) \in C_K(x_0)$ usaremos la Proposición 3.3.2.

Sean $(x_n) \subset K$, $(h_n) \subset \langle 0; +\infty \rangle$ sucesiones cualesquiera tales que $x_n \to x_0$ y $h_n \to 0$.
Como $v_1 \in C_K(x_0)$, existe una sucesión $(u_n) \subset X$ con $u_n \to v_1$ tal que

$$\forall \ n \in IN: y_n = (x_n + h_n u_n) \in K$$

La sucesión (y_n) está contenida en K y converge a x_0. Como $v_2 \in C_K(x_0)$, usando nuevamente la Proposición 3.3.2, se tiene que existe una sucesión $(w_n) \subset X$ con $w_n \to v_2$ y existe un número natural N_1 tal que

$$\forall n \geq N_1: y_n + h_n w_n = x_n + h_n(u_n + w_n) \in K$$

Como $(u_n + w_n) \subset X$ es una sucesión que converge a $v_1 + v_2$ tenemos que

$\forall (x_n) \subset K \ con \ x_n \to x_0, \forall (h_n) \subset \langle 0; +\infty \rangle \ con \ h_n \to 0, \exists (u_n + w_n) \subset X \ tal \ que$

$(u_n + w_n) \to v_1 + v_2$ y existe un número natural N_1 tal que

$$\forall \ n \geq N_1: x_n + h_n(u_n + w_n) \in K$$

De la Proposición 3.3.2 se sigue que $(v_1+v_2) \in C_K(x_0)$.

■

3.4 Relaciones entre los conos contingente y tangente.

Proposición 3.4.1 $C_K(x_0) \subset T_K(x_0) \subset CL\left(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)\right)$

Demostración.

Es claro que $C_K(x_0) \subset T(x_0)$

Veamos que $T_K(x_0) \subset CL\left(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)\right)$

En efecto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ es claro que

$$\bigcup_{h \in \langle 0;\delta]} \left[\frac{1}{h}(K - x_0) + \varepsilon B\right] \subset \bigcup_{h>0} \left[\frac{1}{h}(K - x_0) + \varepsilon B\right]$$

lo cual implica que

$$\bigcap_{\delta>0} \bigcup_{h \in \langle 0;\delta]} \left[\frac{1}{h}(K - x_0) + \varepsilon B\right] \subset \bigcup_{h>0} \left[\frac{1}{h}(K - x_0) + \varepsilon B\right]$$

Como la última inclusión se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{h \in \langle 0;\delta]} \left[\frac{1}{h}(K - x_0) + \varepsilon B\right] \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \left\{\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0) + \varepsilon B\right\}$$

es decir,

$$T_K(x_0) \subset CL\left(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)\right) \qquad \blacksquare$$

Proposición 3.4.2 Si K es un subconjunto convexo, los tres conos coinciden:

$$C_K(x_0) \subset T_K(x_0) \subset CL\left(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)\right)$$

Demostración. Probaremos que $CL\left(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)\right) \subset C_K(x_0)$.

Sea $v \in CL\left(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)\right)$ cualquiera. Para probar que $v \in C_K(x_0)$ usaremos la Proposición 3.3.1.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $v \in CL\left(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)\right)$ existe $w \in \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)$ tal que

$$\| v - w \| < \frac{\varepsilon}{2} \text{……..(*)}$$

Como $w \in \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x_0)$ existen $\delta > 0$ y $y \in K$ tales que $w = \frac{1}{h}(y - x_0)$ lo cual

junto con (*) implica que

$$\left\| v - \frac{1}{h}(y - x_0) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{........(**)}$$

Definamos $r = \frac{\delta\,\varepsilon}{2}$. Sean $x \in B_K(x_0 ; r)$ y $h \in \langle 0;\delta]$ cualesquiera. Sea $u = \frac{y - x}{\delta}$.

Veamos que $u \in (v + \in B)$.

$$\| u - v \| = \left\| \frac{y - x}{\delta} - v \right\| = \left\| \frac{y + x_0 - x - x_0}{\delta} - v \right\| = \left\| \frac{x_0 - x}{\delta} + \frac{y - x_0}{\delta} - v \right\|$$

$$\leq \frac{\| x_0 - x \|}{\delta} + \left\| \frac{y - x_0}{\delta} - v \right\| < \frac{r}{\delta} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Veamos que $(x + hu) \in K$.

Como $x \in K, y \in K, K$ es convexo y $\frac{h}{\delta} \in \langle 0;1]$ a partir de

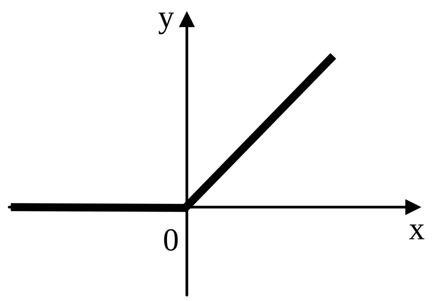
$$x + hu = x + h\left(\frac{y - x}{\delta}\right) = x + \frac{hy}{\delta} - \frac{hx}{\delta} = \left(1 - \frac{h}{\delta}\right) x + \left(\frac{h}{\delta}\right) y$$

se sigue que $(x + hu) \in K$.

De la Proposición 3.3.1 se tiene que $v \in C_K(x_0)$. ■

Ejemplo 3.4.1 Los conos contingente y tangente pueden ser diferentes. En efecto, sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0 \ , \ x<0 \\ x \ , \ x\geq 0 \end{cases}$$



Sea K la gráfica de f; es decir, $K=\{(x;f(x))\ /\ x\in IR\}$

Si $x<0$: $C_K(x;0)=T(x;0)=IR\times\{0\}=\{(t\ ;0)\ /\ t\in IR\}=Eje\ X$

Si $x=0$: $C_K(0;0)=\{(0\ ;\ 0)\}$

$$T_K(0;0)=-IR_+\times\{0\}\ \cup\{(t;t)\ /\ t\in\langle 0;+\infty\rangle\}$$

Si $x>0$: $C_K(x;x)=T_K(x;x)=\{(t,t)\ /\ t\in IR\}$

Véase que el cono tangente $C_K(0;0)$ es convexo, pero trivial; mientras el cono contingente $T_K(0;0)$ no es convexo y tiene infinitos elementos.

Proposición 3.4.3 Si X es un espacio de Banach finito dimensional, entonces

$$\forall\ x_0\in K: C_K(x_0)\ \subset\ \liminf_{x\xrightarrow{K}x_0}\ T_K(x)$$

Demostración. Por definición sabemos que

$$C_K(x_0)=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{r>0}\bigcup_{\delta>0}\bigcap_{x\in B_K(x_0;r)}\bigcap_{h\in\langle 0;\delta]}\left[\frac{K-x}{h}+\varepsilon B\right]$$

<u>Afirmación 1</u>.

$$\bigcup_{\delta>0}\bigcap_{x\in B_K(x_0;r)}\bigcap_{h\in\langle 0;\delta]}\left[\frac{K-x}{h}+\varepsilon B\right]\subset\bigcap_{x\in B_K(x_0;r)}\bigcup_{\delta>0}\bigcap_{h\in\langle 0;\delta]}\left[\frac{K-x}{h}+\varepsilon B\right]$$

En efecto, si $z \in \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{x\in B_K(x_0;r)} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon\ B\right]$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in \bigcap_{x\in B_K(x_0;r)} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon\ B\right]$$

Esto implica que

$$\forall\, x \in B_K(x_0\,;r) : z \in \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon\ B\right] \subset \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon\ B\right]$$

De aquí se tiene que $z \in \bigcap_{x\in B_K(x_0;r)} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon B\right]$. Esto prueba la Afirmación1.

Sea $v \in C_K(x_0)$ cualquiera. Luego,

$$\forall\, \varepsilon>0 : \quad v \in \bigcup_{r>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{x\in B(x_0;r)} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon\ B\right]$$

$$\exists\, r>0 : \quad v \in \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{x\in B(x_0\,;r)} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon\ B\right] \quad \text{(usando la Afirmación1)}$$

$$\forall\, x\in B_K(x_0;r) : \quad v \in \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon B\right] \ldots\ldots\ldots(*)$$

<u>Afirmación 2</u>. $\bigcup_{\delta>0} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon B\right] \subset T_K(x) + \varepsilon\ B$

En efecto, sea $z \in \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon\ B\right]$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $z \in \bigcap_{h\in\langle 0;\delta]} \left[\frac{K-x}{h} + \varepsilon B\right]$.

Sea N un número natural tal que $\frac{1}{N} < \delta$: Luego, para cada $n \geq N$ se cumple que $\frac{1}{n} \in \langle 0;\delta]$. Así, podemos construir una sucesión $(x_n) \subset K$ tal que

$$z \in \left[\frac{x_n - x}{\left(\frac{1}{n}\right)} + \varepsilon B \right]$$

Si $u_n = \frac{x_n - x}{\left(\frac{1}{n}\right)}$, entonces (u_n) es una sucesión acotada y como X es de dimensión finita, entonces (u_n) tiene una subsucesión (que la seguiremos denotando por (u_n)) que converge, digamos a w. Así, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = w \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Además, para cada $n \in IN$, $x + \left(\frac{1}{n}\right) u_n = x_n \in K$ .Usando la Proposición 3.1.2 se sigue que $w \in T_K(x)$. Por lo tanto, $z \in T_K(x) + \varepsilon B$. Esto prueba la Afirmación 2.

Siguiendo de (*) y usando la Afirmación 2 se tiene que $v \in T_K(x) + \varepsilon B$. Así, hasta aquí hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in B_K(x_0; r) : v \in T_K(x) + \varepsilon B$$

es decir, $v \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{r>0} \bigcap_{x \in B(x_0;r)} \left[T_K(x) + \varepsilon B \right] := \liminf_{x \xrightarrow{K} x_0} T_k(x)$.

Así, ya probamos que $C_K(x_0) \subset \liminf_{x \xrightarrow{K} x_0} T_K(x)$. ■

Sean X un espacio de Hilbert y K un subconjunto no vacío de X débilmente cerrado.

Lema 3.4.4 Para cada $y \in X$, defina el conjunto

$$\Pi_K(y) := \left\{ x \in K \;/\; d_K(y) = \| x - y \| \right\}$$

Luego,

$$\forall y \notin K, \forall x \in \Pi_K(y), \forall v \in \overline{co}\, T_K(x) : \langle y - x; v \rangle \le 0$$

Lema 3.4.5 Para cada $y \in X$:

$$\liminf_{h\to 0^+} \left[\frac{(d_K(y+hv))^2 - (d_K(y))^2}{2h} \right] \le d_K(y)\, d\left(v \,;\, \overline{co}\, T_K(\Pi_K(y))\right)$$

Lema 3.4.6 Sea $f:[0;\infty\rangle \to IR$ la función definida por $f(t)=\frac{1}{2}\left[d_K(x+tv)\right]^2$

Luego, para casi todo $t\geq 0$: $f'(t)\leq d_K(x+t\,v)\, d\left(v\,;\,\overline{co}\;T_K\left(\Pi_K(x+t\,v)\right)\right)$

Teorema 3.4.7 Sea K un subconjunto no vacío débilmente cerrado de un espacio de Hilbert X. Luego,

$$\liminf_{x\xrightarrow{K}x_0} T_K(x) \subset \liminf_{x\xrightarrow{K}x_0} \overline{co}\;T_K(x) \subset C_K(x_0)$$

Demostración. Probaremos que

$$\liminf_{x\xrightarrow{K}x_0} \overline{co}\;T_K(x) \subset C_K(x_0)$$

Sea $v\in \liminf\limits_{x\xrightarrow{K}x_0} \overline{co}\;T_K(x)$ cualquiera. Luego,

$$v\in \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{r>0}\bigcap_{x\in B(x_0;r)}\left[\overline{co}\;T_K(x)+\varepsilon\; B\right]$$

es decir,

$$\forall\;\varepsilon>0,\exists\rho>0\,/\;\forall\,x\in B(x_0\,;\rho): v\in\left[\overline{co}T_K(x)+\varepsilon\,B\right]$$

<u>Afirmación 1</u>. Si $r=\frac{\rho}{2}$ y $\delta=\frac{\rho}{4\|v\|}$, entonces

$$\forall\;x\in B_K(x_0;r)\,,\;\forall t\in\langle 0;\delta\rangle : \Pi_K(x+t\,v)\subset B_K(x_0\,;\rho)\text{.......(*)}$$

<u>En efecto</u>, sean $x\in B_K(x_0\,;r)$ y $t\in\langle 0;\delta\rangle$ cualesquiera. Sea $z\in\Pi_K(x+t\,v)$ cualquiera. Luego,

$$d_K(x+t\,v)=\|\,x+t\,v-z\,\|\leq\|\,t\,v\,\|\quad\text{,(pues } x\in K\text{)}$$

A partir de

$$\|\,z-x_0\,\|=\|\,z-x-t\,v+x+t\,v-x_0\,\|\;\leq\|\,z-x-t\,v\,\|+\|\,x-x_0\,\|+\|\,t\,v\,\|$$

$$\leq\|\,t\,v\,\|+r+\|\,t\,v\,\|\leq 2\delta\;\|\,v\,\|+r=2\left(\frac{\rho}{4\|\,v\,\|}\right)\|\,v\,\|+\frac{\rho}{2}\;=\rho$$

se sigue que $z\in B_K(x_0;\rho)$. (Fin de la prueba de la Afirmación 1)

Definamos la función

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[d_K(x+tv)\right]^2$$

Del Lema 3.4.6 se sigue que

$$f'(t)\le d_K(x+t\,v)\ d\left(v\ ;\ \overline{co}\ T_K\left(\Pi_K(x+t\,v)\right)\right)\le \varepsilon\, d_K(x+tv)\le \varepsilon\, t\,\|\,v\,\|$$

Ahora, para cada $x\in B_K(x_0;r)$ y cada $t\in\langle 0;\delta\rangle$:

$$\frac{\left[d_K(x+hv)\right]^2}{h} = f(h)-f(0)=\int_0^h f'(t)dt \le \varepsilon\|\,v\,\|\int_0^h t\,dt = \frac{\varepsilon\|\,v\,\|h^2}{2}$$

de lo cual se sigue que

$$\frac{d_K(x+h\,v)}{h}\le\sqrt{\frac{\varepsilon\|\,v\,\|\,h}{2}}\,.$$

La última desigualdad implica que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ h\to 0^+}}\frac{d_K(x+h\,v)}{h}=0$

Por la Proposición 3.3.3 se tiene que $v\in C_K(x_0)$.Luego, obtenemos que

$$\liminf_{x\xrightarrow{K}x_0}\ T_K(x)\ \subset\ \liminf_{x\xrightarrow{K}x_0}\ \overline{co}\ T_K(x)\subset C_K(x_0)$$ ■

<u>Observación</u>. Si X es de dimensión finita, de la Proposición 3.4.3 se sigue que

$$\liminf_{x\xrightarrow{K}x_0}\ T_K(x)\ =\ \liminf_{x\xrightarrow{K}x_0}\ \overline{co}\ T_K(x)\ =C_K(x_0)$$

Capítulo 4

Teorema de la Función Inversa para correspondencias

El Teorema 1.3.1 establece el Teorema de la Función Inversa para una función $f: U \subset X \to Y$ donde X e Y espacios de Banach. En este capítulo definimos la derivada contingente de una aplicación multivaluada $F: X \rightrightarrows Y$ y establecemos el teorema central de este trabajo: El teorema de la Función Inversa para aplicaciones multivaluadas.

4.1 Derivada contingente

Adaptaremos la definición intuitiva de derivada de una función en términos de la tangente a su gráfica al caso de una correspondencia.

Definición 4.1.1. Sean X e Y espacios de Banach
$F: X \rightrightarrows Y$ una correspondencia propia.
$(x_0; y_0) \in Graf(F)$

La derivada contingente de F en $(x_0; y_0)$ se denota por $DF(x_0; y_0)$ y se define como la correspondencia $DF(x_0; y_0): X \rightrightarrows Y$ cuyo gráfico el cono contingente $T_{graf(F)}(x_0; y_0)$ del gráfico de F en $(x_0; y_0)$.

Observaciones.

- Sea $u_0 \in X$ cualquiera. Es claro que $DF(x_0; y_0)(u_0) \subset Y$ y

$$v_0 \in DF(x_0; y_0)(u_0) \Leftrightarrow (u_0; v_0) \in T_{graf(F)}(x_0; y_0)$$

- $v_0 \in DF(x_0; y_0)(u_0)$ sí, y solo si existen sucesiones $h_n \to 0^+, u_n \to u_0$, $v_n \to v_0$ tales que

$$\forall n \in IN : v_n \in \left(\frac{F(x_0 + h_n u_n) - y_0}{h_n} \right)$$

En efecto,

$v_0 \in DF(x_0;y_0)(u_0) \Leftrightarrow (u_0;v_0) \in T_{graf(F)}(x_0;y_0)$

$\Leftrightarrow$ Existen sucesiones $(h_n) \subset \langle 0;\infty \rangle$, $(u_n;v_n) \subset X \times Y$ tales que

- $(u_n;v_n) \to (u_0;v_0)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$
- $\forall n \in IN : (x_0;y_0) + h_n(u_n;v_n) \in graf(F) \Leftrightarrow$

$(x_0 + h_n u_n ; y_0 + h_n v_n) \in graf(F) \quad \Leftrightarrow$

$$y_0 + h_n v_n \in F(x_0 + h_n u_n) \Leftrightarrow v_n \in \left[\frac{F(x_0 + h_n v_n) - y_0}{h_n}\right]$$

Proposición 4.1.1 $v_0 \in DF(x_0;y_0)(u_0) \Leftrightarrow \liminf\limits_{\substack{h\to 0^+\\ u\to u_0}} d\left(v_0; \dfrac{F(x_0+hu)-y_0}{h}\right) = 0$

Demostración. Supongamos que $v_0 \in DF(x_0;y_0)(u_0)$. Luego, $(u_0;v_0) \in T_{graf(F)}(x_0;y_0)$ lo cual significa (según la Definición 1 de la sección 4.1) que

$$(u_0;v_0) \in \bigcap_{\substack{\varepsilon_1>0\\ \varepsilon_2>0}} \bigcap_{r>0} \bigcup_{h\in\langle 0;r]} \left(\frac{graf(F)-(x_0;y_0)}{h} + \varepsilon_1 B \times \varepsilon_2 B\right)$$

es decir, $\forall \varepsilon_1 > 0, \forall \varepsilon_2 > 0, \forall r > 0, \exists h \in \langle 0;r]$ tal que

$$(u_0;v_0) \in \left[\frac{graf(F)-(x_0;y_0)}{h} + \varepsilon_1 B \times \varepsilon_2 B\right] \ldots\ldots..(1)$$

De (1) se sigue que existe $(u;v) \in \left[\dfrac{graf(F)-(x_0;y_0)}{h}\right]$ tal que

$$(u_0;v_0) \in (u;v) + \varepsilon_1 B \times \varepsilon_2 B \ldots\ldots\ldots(2)$$

De (2) es claro que $u \in (u_0 + \varepsilon_1 B)$ y $v \in (v_0 + \varepsilon_2 B)$.

Como $(u;v) \in \left[\dfrac{graf(F)-(x_0;y_0)}{h}\right]$ se tiene que $(x_0;y_0) + h(u;v) \in graf(F)$ o lo que es lo mismo $(x_0 + hu; y_0 + hv) \in graf(F)$ lo cual significa que

$$v \in \left[\frac{F(x_0+hu)-y_0}{h}\right] \ldots\ldots\ldots(3)$$

Como $d(v_0 ; v) \leq \varepsilon_2$, de (3) se sigue que

$$d\left(v_0 ; \frac{F(x_0 + hu) - y_0)}{h}\right) \leq \varepsilon_2$$

Esto implica que $\liminf\limits_{\substack{h \to 0^+ \\ u \to u_0}} d\left(v_0 ; \dfrac{F(x_0 + hu) - y_0}{h}\right) = 0$. $\blacksquare$

<u>Observación</u>. Si $F : X \to Y$ es una función simple, entonces $DF(x_0) = DF(x_0 ; F(x_0))$.
Esta fórmula implica que

$$v_0 \in DF(x_0)(u_0) \Leftrightarrow \liminf_{\substack{h \to 0^+ \\ u \to u_0}} \left\| \frac{F(x_0 + hu) - F(x_0)}{h} - v_0 \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \liminf_{\substack{h \to 0^+ \\ u \to u_0}} \frac{\| F(x_0 + hu) - F(x_0) - h v_0 \|}{h} = 0$$

4.2 El Teorema de la Función Inversa para correspondencias

Teorema 4.2.1 Sean X e Y espacios de Banach.
$F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia propia.
$(x_0 ; y_0) \in graf(F)$

Supongamos que existen constantes $\alpha \in [0;1\rangle$, $\eta > 0$, $c > 0$ tales que

$\forall (x; y) \in graf(F)$ con $\| x - x_0 \| + \| y - y_0 \| \leq \eta$, $\forall v \in Y$, $\exists\, u \in X$, $\exists\, w \in Y$ tales que

$$v \in DF(x; y)(u) + w \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\| u \| \leq c \, \| v \| \quad \text{y} \quad \| w \| \leq \alpha \| v \| \ldots\ldots(5)$$

Luego, F^{-1} es seudo Lipschitziana alrededor en $(y_0 ; x_0)$.

Demostración. Definamos $r := \dfrac{\eta(1 - \alpha)}{3(1 + \alpha + c)}$

$$F_0^{-1}(y) := F^{-1}(y) \cap \left[x_0 + \left(\frac{c + 2\alpha}{1 - \alpha} \right) r\, B \right] \qquad F_1^{-1}(y) := F^{-1}(y) \cap \left[x_0 + 3\left(\frac{c + 2\alpha}{1 - \alpha} \right) r\, B \right]$$

Para establecer que F^{-1} es seudo Lipschitziana en $(y_0\,;x_0)$ debemos probar lo siguiente: Para alguna constante L

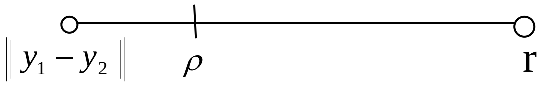
$$\forall\ y \in (y_0 + rB) : F_0^{-1}(y) \neq \phi \ldots..(6)$$

$$\forall\ y_1, y_2 \in \left(y_0 + r\,\overset{0}{B} \right) : d\left(F_0^{-1}(y_1); F_1^{-1}(y_2) \right) \leq L \| \, y_1 - y_2 \, \| \ldots\ldots(7)$$

Sea $L = \dfrac{c+2\alpha}{1-\alpha}$ .Se puede probar que

$$\frac{1}{1+L} = \frac{1-\alpha}{1+c+\alpha} \ldots\ldots(8) \qquad\qquad (L+1)\, r = \frac{\eta}{3} \ldots\ldots.(9)$$

Sean $y_1, y_2 \in W = y_0 + r\,\overset{0}{B}$ cualesquiera. Como $\| \, y_1 - y_0 \, \| < r$ y $\| \, y_2 - y_0 \, \| < r$ se tiene que $\| \, y_1 - y_2 \, \| < 2r$ .Sea ρ cualquier número del intervalo $\langle \, \| \, y_1 - y_2 \, \| \,;\, r \rangle$ cualquiera.



Definamos $\varepsilon := \dfrac{\| \, y_1 - y_2 \, \|}{\| \, y_1 - y_2 \, \| + L\rho}$ Se puede probar que

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \| \, y_1 - y_2 \, \| = L\,\rho \ldots\ldots\ldots..(10) \qquad\qquad \frac{3 \| \, y_1 - y_2 \|}{2\,\eta} \leq \varepsilon < \frac{1-\alpha}{1+c+\alpha} \ldots\ldots..(11)$$

Definamos la función $V : graf(F) \to IR$ mediante

$$\forall\ (x, y)\ graf(F) : V(x; y) = \| \, y_2 - y \, \|$$

Sea $(a\,; y_1) \in graf(F)$ cualquiera. Por el Principio variacional de Ekeland existe $(\bar{x}; \bar{y}) \in graf(F)$ tal que

$$V(\bar{x}; \bar{y}) + \varepsilon\ d\left((a; y_1)\ ; (\bar{x}; \bar{y})\ \right) \leq\ V(a\,; y_1)$$

$$\forall\ (x; y) \neq (\bar{x}; \bar{y}) \in graf(F) : V(\bar{x}; \bar{y}) < V(x; y) + \varepsilon\ d\left((x; y)\ ; (\bar{x}; \bar{y})\ \right)$$

Las desigualdades anteriores se traducen en

$$\| \, y_2 - \bar{y} \, \| + \varepsilon \left\{ \| \, a - \bar{x} \, \| + \| \, y_1 - \bar{y} \, \| \right\} \leq \| \, y_2 - y_1 \, \| \ldots\ldots\ldots.(12)$$

$\forall (x;y) \in graf(F),\ (x;y) \neq (\bar{x};\bar{y})$:

$$\| y_2 - \bar{y} \| < \| y_2 - y \| + \varepsilon \left[\| x - \bar{x} \| + \| y - \bar{y} \| \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

De (12) se tiene que

$$\varepsilon \left[\| a - \bar{x} \| + \| y_1 - \bar{y} \| \right] \leq \| y_2 - \bar{y} \| + \varepsilon \left[\| a - \bar{x} \| + \| y_1 - \bar{y} \| \right] \leq \| y_2 - y_1 \|$$

Lo cual implica que

$$\| a - \bar{x} \| + \| y_1 - \bar{y} \| \leq \frac{\| y_2 - y_1 \|}{\varepsilon} \leq \frac{2\eta}{3} \ldots\ldots(14)$$

<u>Afirmación 1</u>. $\| \bar{x} - x_0 \| + \| \bar{y} - y_0 \| \leq \eta$

En efecto: A partir de

$$\| \bar{x} - x_0 \| + \| \bar{y} - y_0 \| \leq \| \bar{x} - a \| + \| a - x_0 \| + \| \bar{y} - y_1 \| + \| y_1 - y_0 \|$$

$$= \| \bar{x} - a \| + \| \bar{y} - y_1 \| + \| a - x_0 \| + \| y_1 - y_0 \| \leq \frac{2\eta}{3} + (L+1)r = \eta$$

se sigue que $\| \bar{x} - x_0 \| + \| \bar{y} - y_0 \| \leq \eta$.

Usemos ahora la hipótesis del teorema:

Sea $v = y_2 - \bar{y}$. Luego, existen $u \in X$, $w \in Y$ tales que

$$(y_2 - \bar{y}) \in DF(\bar{x};\bar{y})(u) + w \ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

$$\| u \| \leq c \| y_2 - \bar{y} \| \quad \wedge \quad \| w \| \leq \alpha \| y_2 - \bar{y} \| \ \ldots\ldots..(16)$$

<u>Afirmación 2</u>. $\bar{y} = y_2$

En efecto: De (15) se sigue que $(y_2 - \bar{y} - w) \in DF(\bar{x};\bar{y})(u)$, lo cual es equivalente a

$$(u\ ;\ y_2 - \bar{y} - w) \in T_{graf(F)}(\bar{x}\ ;\bar{y})$$

Usando la Proposición 3.1.1 se tiene

$\forall\ \delta > 0$ (Tomar $\varepsilon = r = \delta$) $\exists\ h \in \langle 0;\delta],\ \exists\ (p;q) \in (u; y_2 - \bar{y} - w) + (\delta B \times \delta B)$ tal que

$$(\bar{x};\bar{y}) + h\,(p;q) \in graf(F)$$

Es decir, existen $u_\delta \in \delta B$, $v_\delta \in \delta B$ tales que

$$\begin{cases} p = u + u_\delta \\ q = y_2 - \overline{y} - w - v_\delta \end{cases}$$

y además

$$\left(\overline{x}\,;\overline{y}\right) + \left(u + u_\delta\ ;\ y_2 - \overline{y} - w - v_\delta\right) \in graf(F)$$

es decir,

$$\left(\overline{x} + hu + hu_\delta\ ;\ \overline{y} + h y_2 - h\overline{y} - hw - hv_\delta\right) \in graf(F)$$

Usando (13) se tiene

$$\left\| y_2 - \overline{y} \right\| < \left\| y_2 - \overline{y} - h(y_2 - \overline{y}) + hw + h\,v_\delta \right\| +$$

$$\varepsilon \left\lfloor \left\| hu + hu_\delta \right\| + \left| \left| h(y_2 - \overline{y}) - hw - hv_\delta \right| \right| \right\rfloor =$$

$$\left\| (1-h)\left(y_2 - \overline{y}\right) + hw + hv_\delta \right\| +$$

$$\varepsilon \left\lfloor \left\| hu + hu_\delta \right\| + \left| \left| h(y_2 - \overline{y}) - hw - hv_\delta \right| \right| \right\rfloor \leq$$

$$(1-h)\left\| y_2 - \overline{y} \right\| + h\left\| w \right\| + h\left\| v_\delta \right\| +$$

$$\varepsilon h\left\| u \right\| + \varepsilon h\left\| u_\delta \right\| + \varepsilon h\left\| y_2 - \overline{y} \right\| + \varepsilon h\left\| w \right\| + \varepsilon h\left\| v_\delta \right\|$$

lo cual implica que

$$h\left\| y_2 - \overline{y} \right\| \leq h\left\| w \right\| + h\,\varepsilon \left\lfloor \left\| u \right\| + \left\| y_2 - \overline{y} \right\| + \left\| w \right\| \right\rfloor +$$

$$h\left[\ \varepsilon\left\| u_\delta \right\| + (1+\varepsilon)\left\| v_\delta \right\|\ \right]$$

Dividiendo por h se tiene

$$\left\| y_2 - \overline{y} \right\| \leq \left\| w \right\| + \varepsilon \left\lfloor \left\| u \right\| + \left\| y_2 - \overline{y} \right\| + \left\| w \right\| \right\rfloor + \varepsilon\left\| u_\delta \right\| + (1+\varepsilon)\left\| v_\delta \right\| \text{ (por 16)}$$

$$\leq \alpha\left\| y_2 - \overline{y} \right\| + \varepsilon\left\lfloor c\left\| y_2 - \overline{y} \right\| + \left\| y_2 - \overline{y} \right\| + \alpha\left\| y_2 - \overline{y} \right\| \right\rfloor + \varepsilon\left\| u_\delta \right\| + (1+\varepsilon)\left\| v_\delta \right\|$$

lo cual implica que

$$\left\| y_2 - \overline{y} \right\| \leq \left(\alpha + \varepsilon(c + \alpha + 1)\right)\left\| y_2 - \overline{y} \right\| + \varepsilon\left\| u_\delta \right\| + (1+\varepsilon)\left\| v_\delta \right\| \ \ldots\ldots(17)$$

Como $\delta > 0$ fue tomado arbitrariamente, en (17) tomamos límite cuando $\delta \to 0^+$:

$$\left\| y_2 - \overline{y} \right\| \leq \left(\alpha + \varepsilon(c + \alpha + 1)\right)\left\| y_2 - \overline{y} \right\|$$

lo cual muestra que

$$0 \leq \left(\alpha+\varepsilon(c+\alpha+1)-1\right)\left\| y_2-\bar{y}\right\| \quad \ldots\ldots\ldots(18)$$

De la segunda desigualdad de (11) se obtiene que $\alpha+\varepsilon(c+\alpha+1)-1<0$, lo cual junto con (18) implican que $\bar{y} = y_2$.

<u>Afirmación 3</u>. $\bar{x} \in F^{-1}(y_2) \cap (a+2Lr\,B) = F_1^{-1}(y_2)$

En efecto, Si en (12) reemplazamos y_2 por $\bar{y}$ obtenemos

$$\varepsilon\left\{\left\| a-\bar{x}\right\| + \left\| y_1-y_2\right\|\right\} \leq \left\| y_2-y_1\right\|$$

de lo cual se sigue que

$$\left\| a-\bar{x}\right\| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\left\| y_2-y_1\right\| = L\rho < 2Lr$$

Así, tenemos que $\bar{x} \in (a+2Lr\,B)$. Además, como $(\bar{x}\,;\bar{y}) = (\bar{x};y_2) \in graf(F)$ se tiene que $y_2 \in F(\bar{x})$; es decir, $\bar{x} \in F^{-1}(y_2)$. Por lo tanto, hemos probado que $\bar{x} \in F^{-1}(y_2) \cap (a+2Lr\,B) = F_1^{-1}(y_2)$.

Luego,

$$d\left(a;F_1^{-1}(y_2)\right) \leq \left\| a-\bar{x}\right\| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\left\| y_2-y_1\right\| = L\rho \ldots\ldots.(19)$$

Si hacemos que $\rho \to \left\| y_2-y_1\right\|$, de (19) y (10) se obtiene

$$d\left(a;\,F_1^{-1}(y_2)\right) \leq L\left\| y_1-y_2\right\| \ldots\ldots.(20)$$

Si tomamos $(a;y_1) = (x_0\,;y_0)$ hemos probado que

$$\forall\ y_2 \in \left(y_0+r\,\overset{\circ}{B}\right) : \bar{x} \in F^{-1}(y_2) \cap (x_0+Lr\,B) = F_0^{-1}(y_2)$$

En otras palabras

$$\forall\ y \in \left(y_0+r\,\overset{\circ}{B}\right) : F_0^{-1}(y) \neq \phi$$

De (20) se sigue que

$$d\left(F_0^{-1}(y_1)\,;F_1^{-1}(y_2)\right) \leq L\left\| y_1-y_2\right\| \qquad \blacksquare$$

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo veremos algunas aplicaciones del Teorema de la Función Inversa para aplicaciones multivaluadas y su relación con el Principio de la Aplicación Abierta Uniforme. También veremos los Teoremas de Función Inversa de primer orden y de orden superior.

5.1 Otra versión del Teorema de la Función Inversa para aplicaciones multivaluadas

Definición 5.1.1 Sean X e Y espacios de Banach
$F: X \rightrightarrows Y$ una correspondencia propia.
$(x_0; y_0) \in Graf(F)$

La derivada de F en $(x_0; y_0)$ se denota por $CF(x_0; y_0)$ y se define como la aplicación multivaluada $CF(x_0; y_0): X \rightrightarrows Y$ cuyo gráfico es el cono tangente $C_{graf(F)}(x_0; y_0)$ del gráfico de F en $(x_0; y_0)$.

Es claro de la definición que

$$v_0 \in CF(x_0; y_0)(u_0) \Leftrightarrow (u_0; v_0) \in C_{graf(F)}(x_0; y_0)$$

En esta parte usaremos dos teoremas que se encuentran en $[1]$ J.P. Aubin and I. Ekeland.

Proposición 5.1.1 (Teorema del gráfico cerrado)

Sean X e Y espacios de Banach
$F: X \rightrightarrows Y$ una aplicación multivaluada propia convexa y cerrada tal que $\mathrm{Im}(F)$ tiene interior no vacío.
$y_0 \in Int(\mathrm{Im}(F))$, $x_0 \in F^{-1}(y_0)$
B es la bola cerrada unitaria de X.

Luego, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\forall x \in Dom(F), \forall y \in y_0 + \gamma B : d(x; F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\gamma} d(y; F(x))[1 + \| x - x_0 \|]$$

Proposición 5.1.2 Sean X e Y espacios de Banach

$F : X \rightrightarrows Y$ una aplicación multivaluada propia convexa y cerrada tal que $\mathrm{Im}(F)$ tiene interior no vacío.

$y_0 \in Int(\mathrm{Im}(F))$, $x_0 \in F^{-1}(y_0)$

B es la bola cerrada unitaria de X .

Luego, $y_0 \in Int\left(F\left[Dom(F) \cap (x_0 + B) \right] \right)$

Proposición 5.1.3 Sean X e Y espacios de Banach de dimensión finita.

$F : X \rightrightarrows Y$ una aplicación multivaluada con gráfico cerrado.

$(x_0; y_0) \in Graf(F)$

Si la derivada $CF(x_0; y_0): X \rightrightarrows Y$ es sobreyectiva, entonces

$\forall \alpha > 0$, $\exists\, c > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tales que

$\forall (x; y) \in graf(F)$ con $\| x - x_0 \| + \| y - y_0 \| \le \eta$, $\forall v \in Y$, $\exists\, u \in X$, $\exists\, w \in Y$ tales que

$$v \in DF(x; y)(u) + w$$

$$\| u \| \le c \| v \| \quad \text{y} \quad \| w \| \le \alpha \| v \|$$

Demostración. Como la aplicación multivaluada $CF(x_0; y_0): X \rightrightarrows Y$ es convexa y cerrada, entonces de la Proposición 5.1.2 con $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ tenemos que $0 \in Int\ CF(x_0; y_0)[B]$.Luego existe $\gamma > 0$ tal que

$$\lambda\, B \subset CF(x_0; y_0)[B] \ldots\ldots (*)$$

Definamos el conjunto

$$H := (B \times \gamma B) \cap C_{graf(F)}(x_0; y_0) = (B \times \gamma B) \cap graf\left(CF(x_0; y_0) \right) \ldots..(**)$$

Como X e Y son de dimensión finita, entonces H es un subconjunto compacto del cono tangente $C_{graf(F)}(x_0; y_0)$. Por la Proposición 3.4.3 se tiene que $C_{graf(F)}(x_0; y_0)$ es el límite inferior de conos contingentes $T_{graf(F)}(x; y)$ con $(x; y) \in graf(F)$ y $(x; y) \to (x_0; y_0)$.Luego, para cada $\alpha > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\forall (u_0; v_0) \in H\ ,\ \forall (x; y) \in B_{graf(F)}\left((x_0; y_0)\, ; \eta \right) : (u_0; v_0) \in T_{graf(F)}(x; y) + \alpha (B \times B) \ldots..(***)$$

Sea $v \in Y$ cualquiera con $v \neq 0$. Si $v_0 = \dfrac{\gamma v}{\|v\|} \in \gamma B$ de (*) se tiene que existe $u_0 \in B$ tal que $v_0 \in CF(x_0 ; y_0)(u_0)$; es decir,

$$u_0 \in B \,,\; v_0 \in \gamma B \,,\; (u_0 ; v_0) \in graf\; CF(x_0 ; y_0) = C_{graf(F)}(x_0 ; y_0)$$

Luego, de (***) se tiene que

$$\forall\, (x;y) \in B_{graf(F)}((x_0;y_0)\,;\eta) : (u_0 ; v_0) \in T_{graf(F)}(x;y) + \alpha(B \times B)$$

Es decir, existen $u_\alpha \in \alpha B$, $v_\alpha \in \alpha B$ tales que $(u_0 - u_\alpha \,;\, v_0 - v_\alpha) \in T_{graf(F)}(x;y)$, lo cual implica que

$$v_0 \in DF(x;y)(u_0 - u_\alpha) + v_\alpha$$

Sean $u := \left(\dfrac{\|v\|}{\gamma}\right)(u_0 - u_\alpha)$ y $w := \left(\dfrac{\|v\|}{\gamma}\right)(v_\alpha)$. Luego, es claro que $v \in DF(x;y)u + w$ con $\|u\| \leq \left(\dfrac{1+\alpha}{\gamma}\right)\|v\|$ y $\|w\| \leq \dfrac{\alpha}{\eta}\|v\|$. ■

Teorema 5.1.4 Sean X e Y espacios de Banach de dimensión finita.
$F : X \rightrightarrows Y$ una aplicación multivaluada con gráfico cerrado.
$(x_0; y_0) \in Graf(F)$

Si la derivada $CF(x_0; y_0) : X \rightrightarrows Y$ es sobreyectiva, entonces F^{-1} es seudo Lipschitziana alrededor de $(y_0; x_0)$.

Demostración. La prueba se obtiene de la Proposición 5.1.3 y del Teorema 4.2.1. ■

5.2 El Teorema de la Función Inversa y el Principio de la Aplicación Abierta Uniforme.

Sean : X un espacio métrico completo, Y un espacio métrico.
$F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia.

En $X \times Y$ usaremos la métrica $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to IR$ definida por

$$\forall (x;y),(x';y') \in (X \times Y) \;:\; d((x;y;(x';y')) = d_X(x;x') + d_Y(y;y')$$

Asumiremos que el gráfico de F es cerrado.

Para cada $x \in X$ y para cada $h > 0$:

$\overset{o}{B}_h(x)$: Bola abierta de centro x y radio h.
$B_h(x)$: Bola cerrada de centro x y radio h.

En esta parte estudiaremos una relación entre el Principio de la Aplicación Abierta Uniforme y el Teorema de la Función Inversa para correspondencias.

Teorema 5.2.1 Sean $k>0$, $\rho>0$, $x_0 \in X$, $y_0 \in F(x_0)$.
Si $\forall(x;y) \in graf(F)$ cerca de $(x_0;y_0)$ y todo $z \in Y$ cerca de y_0:

$$d_X\left(x;F^{-1}(x)\right) \le \rho^{-1/k}\left[d_Y(y;z)\right]^{1/k} \ldots\ldots(1)$$

entonces

$$\forall(x;y) \in graf(F) \text{ cerca de } (x_0;y_0),\ \forall h>0 \text{ pequeño: } \overset{o}{B}\left(y;\rho h^k\right) \subset F\left(B(x;h)\right) \ \ldots..(2)$$

Demostración. Sea $z \in \overset{o}{B}\left(y;\rho h^k\right)$ cualquiera. Luego z está cerca de y con $d_Y(y;z) < \rho h^k$ y como y está cerca de y_0, entonces z está cerca de y_0.

A partir de (1) se tiene que

$$d_X\left(x;F^{-1}(z)\right) \le \rho^{-1/k}\left[d_y(y;z)\right]^{1/k} < \rho^{-1/k}\left(\rho h^k\right)^{1/k} = h$$

Es decir, la distancia entre x y $F^{-1}(x)$ es menor que h; lo cual implica que existe $w \in F^{-1}(z)$ tal que $d_X(x;w) < h$.

Así, $w \in B(x;h)$ y $z \in F(w)$, de lo cual se sigue que $z \in F\left(B(x;h)\right)$ y por lo tanto $\overset{o}{B}\left(y;\rho h^k\right) \subset F\left(B(x;h)\right)$. ∎

Teorema 5.2.2 Supongamos que:

$y_0 \in F(x_0)$, existen $K>0$, $\varepsilon>0$, $\rho>0$, $\beta \in \langle 0,1\rangle$ tales que

$\forall(x;y) \in graf(F) \cap \left[B(x_0;\varepsilon) \times B(y_0;\varepsilon)\right]$, $\forall h \in [0;\varepsilon]$:

$$\sup_{b \in B\left(y;\rho h^K\right)} d_y\left(b;F\left(B(x;h)\right)\right) \le \beta\rho h^K \ldots\ldots\ldots(3)$$

Luego, $\forall(x;y) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0;\frac{\varepsilon}{2}\right) \times B\left(y_0;\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$,

$$\forall\, h \geq 0 \text{ con } \max\left\{\frac{h}{1-\beta^{1/k}}\,;\,2\rho h^k\right\} < \frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\, z \in B\left(y;\rho h^k\right):\quad d_X\left(x;F^{-1}(z)\right) \leq \frac{h}{1-\beta^{1/k}}$$

Demostración. Sea $\alpha \in \langle \beta;1\rangle$ tal que $\dfrac{h}{1-\alpha^{1/k}} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, lo cual es equivalente a

$$\beta < \alpha \leq \left(1-\frac{2h}{\varepsilon}\right)^k < 1.$$

<u>Afirmación 1</u>.
$\forall (x;y) \in graf(F) \cap \left[B(x_0;\varepsilon)\times B(y_0;\varepsilon)\right], \forall\, h \in \langle 0;\varepsilon], \; \forall b \in B\left(y;\rho h^k\right), \exists (u;v) \in graf(F) /$

$$d_X(x;u) < h \quad \wedge \; d_Y(b;v) < \alpha\,\rho h^k \;\text{........(4)}$$

En efecto, sean $(x;y) \in graf(F) \cap \left[B(x_0;\varepsilon)\times B(y_0;\varepsilon)\right]$, $h \in \langle 0;\varepsilon]$ y $b \in B\left(y;\rho h^k\right)$ cualesquiera. De (3) se sigue que

$$\sup_{b\, \in B\left(y;\rho h^K\right)} d_y\left(b;F\left(B(x;h)\right)\right) \leq \beta\,\rho h^K < \alpha\,\rho h^k$$

lo cual implica que

$$d_Y\left(b;F\left(B(x;h)\right)\right) < \alpha\,\rho h^k$$

Luego, existen $u \in B(x;h)$ y $v \in F(u)$ tales que $d_Y(b;v) < \alpha\,\rho h^k$

(Fin de la prueba de la Afirmación 1)

Sean $(x;y) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0;\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\times B\left(y_0;\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right]$, $h \geq 0$ con $\max\left\{\dfrac{h}{1-\beta^{1/k}}\,;2\rho h^k\right\} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $z \in B\left(y;\rho h^k\right)$ cualesquiera.

<u>Afirmación 2</u>.
Existe una sucesión $\{(u_n;v_n)\} \subset graf(F)$ tal que

- $d_X\left(u_{i-1};u_i\right) \leq \alpha^{\left(\frac{i-1}{k}\right)} h$ ....(5)
- $d_Y(v_i;z) < \rho\alpha^{\,i} h^k = \rho\left(\alpha^{\left(\frac{i}{k}\right)} h\right)^k$ ....(6)

En efecto, Tomemos $u_0 = x$. De (4) se sigue que existe $(u_1;v_1) \in graf(F)$ tal que $d_X(u_0;u_1) < h \;\wedge\; d_Y(z;v_1) < \alpha\,\rho h^k$ .Supongamos que tenemos $\{(u_i;v_i) / i = 1,...,n\}$ que satisfacen (5) y (6).

Veamos que $d_X(x;u_i) \le \dfrac{h}{1-\alpha^{1/k}}$ ....(7)

$$d_X(x;u_i) = d_X(u_0;u_i) \le d_X(u_0;u_1) + d_X(u_1;u_2) + ... + d_X(u_{i-1};u_i) =$$
$$\sum_{j=1}^{i} d_X(u_{j-1};u_j) \le \sum_{j=1}^{i} \alpha^{\left(\frac{j-1}{k}\right)} h = h \sum_{j=1}^{i} \alpha^{\left(\frac{j-1}{k}\right)} = h \sum_{j=1}^{i-1} \alpha^{\left(\frac{j}{k}\right)} = h \sum_{j=1}^{i-1} \left(\alpha^{\frac{1}{k}}\right)^j \le$$
$$\frac{h}{1-\alpha^{1/k}}.$$

Veamos que $\forall i = 1,...,n : d_X(x_0;u_i) \le \varepsilon$ .....(8)

$$d_X(x_0;u_i) \le d_X(x_0;x) + d_X(x;u_i) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{h}{1-\alpha^{1/k}} \le \varepsilon$$

Veamos que $\forall i = 1,...,n : d_Y(y_0;v_i) \le \varepsilon$ ......(9)

$$d_Y(y_0;v_i) \le d_Y(y_0;y) + d_Y(y;z) d_Y(z;v_i) \le \frac{\varepsilon}{2} + \rho h^k + \rho\alpha^i h^k \le \frac{\varepsilon}{2} + 2\rho h^k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

De (8) y (9) se sigue que

$\forall i = 1,...,n : (u_i \; ; v_i) \in graf(F) \cap [B(x_0;\varepsilon) \times B(x_0;\varepsilon)]$ ....(10)

En particular, cuando $i = n$ se tiene que $(u_n \; ; v_n) \in graf(F) \cap [B(x_0;\varepsilon) \times B(x_0;\varepsilon)]$

Como $\bar{h} = \alpha^{n/k} h \in \langle 0;\varepsilon]$, de (4), existe $(u_{n+1}; v_{n+1}) \in graf(F)$ tal que

$$d_X(u_n;u_{n+1}) < \alpha^{n/k} h \qquad \text{y} \qquad d_Y(v_{n+1};z) < \alpha \, \rho \left(\alpha^{n/k} h\right)^k = \rho\alpha^{n+1} h^k$$

(Fin de la prueba de la Afirmación 2)

<u>Afirmación 3</u>. (u_n) es una sucesión de Cauchy en X.

En efecto, sean $m \in IN$, $n \in IN$ cualesquiera y supongamos que $m < n$. Usando (5) se tiene que

$$d_X(u_m;u_n) \le d_X(u_m;u_{m+1}) + d_X(u_{m+1};u_{m+2}) + ... + d_X(u_{n-1};u_n)$$

$$= \sum_{j=m}^{n-1} d_X(u_j;u_{j+1}) \le \sum_{j=m}^{n-1} \alpha^{j/k} h = h \sum_{j=m}^{n-1} \left(\alpha^{1/k}\right)^j \le h \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha^{1/k}\right)^j = \frac{h}{1-\alpha^{1/k}} < \varepsilon$$

lo cual muestra que (u_n) es una sucesión de Cauchy en X . (Fin de la prueba de la Afirmación 3).

Como (u_n) es de Cauchy y X es completo, entonces existe $w = \lim_{n\to\infty} u_n$. De (6) es claro que $\lim_{n\to\infty} v_n = z$, lo cual implica que $(u_n ; v_n) \in graf(F)$ y $(u_n ; v_n) \to (w ; z)$. Como el gráfico de F es cerrado se tiene que $(w; z) \in graf(F)$ y así $z \in F(w)$ o equivalentemente $w \in F^{-1}(z)$.

Si en (7) tomamos límite cuando $i \to \infty$ se obtiene

$$d_X(x; w) \le \frac{h}{1-\alpha^{1/k}} \quad \text{lo cual implica que} \quad d_X\left(x; F^{-1}(z)\right) \le \frac{h}{1-\alpha^{1/k}} \quad \text{……..(11)}$$

Como α fue tomado en forma arbitraria cerca de β, de (11) se concluye que

$$d_X\left(x; F^{-1}(z)\right) \le \frac{h}{1-\beta^{1/k}}$$

5.3 El Teorema de la Función Inversa de Primer orden.

<u>Definición 5.3.1</u> Sean : X un espacio métrico e Y espacios de Banach.
$\{Ax \,/\, x \in X\}$ una familia de subconjuntos de Y.

El límite superior de Kuratowski cuando x tiene a x_0 de la familia $\{Ax \,/\, x \in X\}$ se denota por $\limsup_{x\to x_0} A_x := \left\{ v \in Y \;/\; \liminf_{x\to x_0} dist(v; A_x) = 0 \right\}$

<u>Definición 5.3.2</u> Sean : X un espacio métrico e Y espacios de Banach.
$F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia.
$(x; y) \in graf(F)$

La variación contingente de F en $(x; y)$ se denota por $F^{(1)}(x; y)$ y se define como

$$F^{(1)}(x; y) := \limsup_{h\to 0^+} \left[\frac{F(B_h(x)) - y}{h} \right]$$

Observaciones.

- $F^{(1)}(x; y)$ es un subconjunto cerrado de Y.
- $v \in F^{(1)}(x; y) \quad \Leftrightarrow$ Existen sucesiones $(h_n) \to 0^+$, $(v_n) \to v$ tales que $(y + h_n v_n) \in F(B_{h_n}(x))$.

Teorema 5.3.1 Sean : $(X; d)$ un espacio métrico completo.
$(Y; \| \ \|)$ un espacio de Banach.
$F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia con gráfico cerrado.
$(x_0; y_0) \in graf(F)$.

Si existen $\varepsilon > 0$ y $\rho > 0$ tales que $\rho\ B \subset \bigcap\limits_{\substack{(x;y) \in graf(F) \\ d(x;x_0) \leq \varepsilon \\ \| y - y_0 \| \leq \varepsilon}} F^{(1)}(x; y)$ ....(12)

entonces,

$\forall (x; y) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0; \frac{\varepsilon}{4} \right) \times B\left(y_0; \frac{\varepsilon}{4} \right) \right]$:

$$dist_X\left(x; F^{-1}(z)\right) \leq \frac{\| y - z \|}{\rho}$$

Demostración.

Afirmación 1. $\forall\ \lambda > 0, \forall (x; y) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0; \frac{\varepsilon}{2} \right) \times B\left(y_0; \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]$

$$\forall h \in \left\langle 0; \frac{\varepsilon}{2} \right] : \left(\frac{\rho}{1 + \lambda} \right) \overset{o}{B} \subset \frac{F(B(x; h)) - y}{h} \text{.........(13)}$$

En efecto, procedamos por contradicción.

Supongamos que existen $\lambda > 0$, $(t; z) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0; \frac{\varepsilon}{2} \right) \times B\left(y_0; \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]$, $\bar{h} \in \left\langle 0; \frac{\varepsilon}{2} \right]$

tales que

$$\left(\frac{\rho}{1 + \lambda} \right) \overset{o}{B} \not\subset \frac{F\left(B\left(t; \bar{h}\right)\right) - z}{\bar{h}}$$

Esto significa que existe $\bar{y} \in z + \left(\frac{\rho \bar{h}}{1 + \lambda} \right) \overset{o}{B}$ con $\bar{y} \notin F\left(B\left(t; \bar{h}\right)\right)$.........(14)

Si $\theta = \sqrt{\dfrac{\| z-\bar{y} \| (1+\lambda)}{\rho \bar{h}}}$, entonces $0<\theta<1$. Definamos el espacio métrico $(K;\, d_K)$ de la siguiente manera

$$K := graf(F) \cap \left[B\left(t;\theta \bar{h}\right) \times B\left(z;\theta \bar{h}\right) \right]$$

donde la métrica $d_K : K \times K \to IR$ se define mediante

$$\forall (u;v),\, (u';v') \in K : d_K\left((u;v);(u';v') \right) := d(u;u') + \frac{\lambda}{\rho} \| v-v' \|$$

Es claro que $(K;\, d_K)$ es un espacio métrico completo. Consideremos la función $f : K \to IR$ definida por

$$\forall (x;y) \in K : f(x;y) = \| y-\bar{y} \|$$

la cual es claramente continua.

Aplicando el Principio Variacional de Ekeland a la función f con $\varepsilon = \dfrac{\theta \rho}{1+\lambda}$ se sigue que existe $(x;\; y) \in K$ tal que

$$\forall (u;v) \in K : f(x;y) \leq f(u;v) + \left(\frac{\theta \rho}{1+\lambda} \right) d_K\left((u;v);(x;y) \right)$$

es decir,

$$\forall (u;v) \in K : \| y-\bar{y} \| \leq \| v-\bar{y} \| + \left(\frac{\theta \rho}{1+\lambda} \right) \left[d(u;x) + \frac{\lambda}{\rho} \| v-y \| \right] \ldots\ldots\ldots(15)$$

Veamos que $y \neq \bar{y}$. En efecto, si $y \neq \bar{y}$ de (14) se tendría que $y \notin F\left(B(t;\bar{h})\right)$. Por otro lado, como $(x;y) \in K = graf(F) \cap \left[B(t;\theta \bar{h}) \times B(z;\theta \bar{h}) \right]$ entonces $y \in F(x)$, $x \in B\left(t;\theta\bar{h}\right) \subset B\left(t;\bar{h}\right)$. Así, tendríamos que $y \in F\left(B(t;\bar{h})\right)$ lo cual sería una contradicción.

Si definimos $w = -\dfrac{\rho\left(y-\bar{y}\right)}{\| y-\bar{y} \|}$, entonces. De (12) $w \in \rho B$ se tiene que $w \in F^{(1)}(x;y)$.

Así, existen sucesiones $(h_n) \to 0^+$, $(w_n) \to w$ tales que

$$y + h_n w_n \in F\left(B(x;h_n)\right)$$

lo cual implica que existe $u_n \in B(x;h_n)$ tal que $y + h_n w_n \in F(u_n)$. Como $(u_n; y + h_n w_n) \in K$, de (15) se tiene que

$$\| y-\bar{y} \| \leq \| y + h_n w_n - \bar{y} \| + \left(\frac{\theta \rho}{1+\lambda} \right) \left[d(u_n;x) + \frac{\lambda}{\rho} \| y + h_n w_n - y \| \right]$$

$$= \left\| y + h_n w \;\; - \bar{y} + h_n w_n - h_n w \right\| + \left(\frac{\theta\, \rho}{1+\lambda}\right)\left[d(u_n ; x) + \frac{\lambda}{\rho} h_n \left\| w_n \right\|\right]$$

$$\leq \left\| y + h_n w - \bar{y} \right\| + h_n \left\| w_n - w \right\| + \left(\frac{\theta\, \rho}{1+\lambda}\right)\left[h_n + \frac{\lambda}{\rho} h_n \left\| w_n \right\|\right]$$

Como $w = -\dfrac{\rho\left(y - \bar{y}\right)}{\left\| y - \bar{y} \right\|}$, entonces

$$\left\| y - \bar{y} \right\| \leq \left\| \left(y - \bar{y}\right) - \frac{\rho\, h_n\left(y - \bar{y}\right)}{\left\| y - \bar{y} \right\|} \right\| + h_n \left\| w_n - w \right\| + \left(\frac{\theta \rho h_n}{1+\lambda}\right)\left[1 + \frac{\lambda}{\rho} \left\| w_n \right\|\right]$$

$$= \left(1 - \frac{\rho h_n}{\left\| y - \bar{y} \right\|}\right) \left\| y - \bar{y} \right\| + h_n \left\| w_n - w \right\| + \left(\frac{\theta \rho h_n}{1+\lambda}\right)\left[1 + \frac{\lambda}{\rho} \left\| w_n \right\|\right]$$

lo cual implica que

$$\rho h_n \leq h_n \left\| w_n - w \right\| + \left(\frac{\theta \rho h_n}{1+\lambda}\right)\left[1 + \frac{\lambda}{\rho} \left\| w_n \right\|\right]$$

O también

$$\rho \leq \left\| w_n - w \right\| + \left(\frac{\theta \rho}{1+\lambda}\right)\left[1 + \frac{\lambda}{\rho} \left\| w_n \right\|\right]$$

Si en la última desigualdad tomamos límite cuando $n \to \infty$ obtenemos:

$$\rho \leq \left(\frac{\theta \rho}{1+\lambda}\right)\left[1 + \frac{\lambda}{\rho} \left\| w \right\|\right] = \frac{\theta \rho}{1+\lambda}\left[1 + \frac{\lambda}{\rho} \rho\right] = \theta\, \rho$$

de donde se tendría que $1 \leq \theta$ lo cual sería una contradicción, pues $\theta \in \langle 0;1 \rangle$.

(Fin de la prueba de la Afirmación 1)

<u>Afirmación 2</u>. $\underset{b \in B(y;\rho h)}{Sup}\; dist_Y\; \left(b ; F\left(B(x;h)\right)\right) = 0$ ………….……..(16)

En efecto, de la Afirmación 1 se sigue que $\rho B \subset \dfrac{F\left(B(x;h)\right) - y}{h}$, lo cual implica que $y + \rho h B \subset F\left(B(x;h)\right)$; es decir, $B(y;\rho h) \subset F\left(B(x;h)\right)$.Esto muestra (16).

(Fin de la prueba de la Afirmación 2)

A partir de la Afirmación 2 tenemos que

$$\forall \beta \in \langle 0;1 \rangle\ ,\ \forall (x;y) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0; \frac{\varepsilon}{2} \right) \times B\left(y_0; \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]\ ,\ \forall h \in \left[0; \frac{\varepsilon}{2} \right]:$$

$$\sup_{b \in B(y;\rho h)} dist\big(b; F(B(x;h))\big) = 0 \leq \beta \rho h$$

Por el Teorema 5.2.2 se tiene

$$\forall \beta \in \langle 0;1 \rangle\ ,\ \forall (x;y) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0; \frac{\varepsilon}{2} \right) \times B\left(y_0; \frac{\varepsilon}{2} \right) \right],$$

$$\forall h \geq 0\ \ con\ \max\left\{ \frac{h}{1-\beta}; 2\rho h \right\} < \frac{\varepsilon}{4} \text{.............(17)}$$

$$\forall z \in B(y;\rho h) : dist\left(x; F^{-1}(z)\right) \leq \frac{h}{1-\beta} \text{........(18)}$$

<u>Afirmación 3</u>. $\forall (x;y) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0; \frac{\varepsilon}{4} \right) \times B\left(y_0; \frac{\varepsilon}{4} \right) \right]$

$$\forall h \geq 0\ \ con\ \ \max\{h; 2\rho h\} < \frac{\varepsilon}{4} \text{.........(19)}$$

$$\forall\ z \in B(y;\rho h) : dist\left(x; F^{-1}(z)\right) \leq h \text{..............(20)}$$

En efecto, sea $h \geq 0$ como en (19). Como $h < \frac{\varepsilon}{4}$ se sigue que para cada $\beta \in \left\langle 0; 1 - \frac{4h}{\varepsilon} \right\rangle$ se cumple que $\frac{h}{1-\beta} < \frac{\varepsilon}{4}$. Por lo tanto, para cada $\beta \in \left\langle 0; 1 - \frac{4h}{\varepsilon} \right\rangle$ se cumple (17) lo cual implica que

$$\forall \beta \in \left\langle 0; 1 - \frac{4h}{\varepsilon} \right\rangle, \forall\, z \in B(y;\rho h) : dist\left(x; F^{-1}(z)\right) \leq \frac{h}{1-\beta}$$

Si en la última desigualdad tomamos límite cuando $\beta \to 0$ obtenemos (20).

(Fin de la prueba de la Afirmación 3)

Ahora ya estamos listos para establecer la conclusión del Teorema 5.2.1.

Sean $(x;y) \in graf(F) \cap \left[B\left(x_0; \frac{\varepsilon}{4} \right) \times B\left(y_0; \frac{\varepsilon}{4} \right) \right]$ y $z \in Y$ con $\| z - y \| < \min\left\{ \frac{\varepsilon}{8}; \frac{\varepsilon\rho}{4} \right\}$.

Tomemos $h = \frac{\| z - y \|}{\rho}$. Luego,

$$h = \frac{\| z - y \|}{\rho} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad 2\rho h = 2\| z - y \| < 2\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) = \frac{\varepsilon}{4}$$

lo cual muestra que se cumple (19). Como $z \in B(y;\rho h)$, de (20) se tiene que

$$dist_X\left(x; F^{-1}(z)\right) \leq \frac{\| y - z \|}{\rho}$$

■

5.4 El Teorema de la Función Inversa de orden superior.

Definición 5.4.1 Sean : X un espacio métrico e Y espacio de Banach.
$\{ Ax / x \in X \}$ una familia de subconjuntos de Y.

El límite inferior de Kuratowski cuando x tiene a x_0 de la familia $\{ Ax / x \in X \}$ se denota por $\liminf\limits_{x \to x_0} A_x$ y se define como

$$\liminf_{x \to x_0} A_x := \left\{ v \in Y \;/\; \lim_{x \to x_0} dist(v; A_x) = 0 \right\}$$

Definición 5.4.2 Sean : X un espacio métrico e Y espacios de Banach.
$F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia.
$(x; y) \in graf(F)$, $k > 0$.

La variación de F en $(x_0; y_0)$ de orden k se denota por $F^k(x_0; y_0)$ y se define como

$$F^k(x_0; y_0) := \liminf_{\substack{(x;y) \to (x_0;y_0) \\ (x;y) \in graf(F) \\ h \to 0^+}} \left[\frac{F(B_h(x)) - y}{h^k} \right]$$

Observaciones.

- $F^K(x_0; y_0)$ es un subconjunto cerrado de Y.
- $v \in F^K(x_0; y_0)$ sí, y solo si $\forall (h_n) \to 0^+$, $\forall (x_n; y_n) \in graf(F)$ que converge a $(x_0; y_0)$, existe una sucesión $(v_n) \to v$ tal que $\left(y_n + h_n^k v_n\right) \in F(B(x_n; h_n))$.

Definición 5.4.3 Sea Y un espacio de Banach. Se dice que Y es uniformemente suave si su norma $\| \ \|$ es uniformemente diferenciable según Fréchet; es decir, si para cualquier función $O:\langle 0,\infty\rangle \to \langle 0;\infty\rangle$ con $\lim\limits_{t\to o^+} \frac{O(t)}{t} = 0$ y para cualquier $y \in Y$ con $0 < \| y \| \leq 1$, existe $J(y) \in Y'$ con $\| J(y) \|_{Y'} = 1$ tal que

$$\forall t \in IR : \sup_{\| v \| \leq 1} \Big| \| y + tv \| - \| y \| - t \langle J(y); v \rangle \Big| \leq O\big(|t|\big)$$

Observación. Todo espacio de Banach uniformemente suave es un espacio reflexivo.

Teorema 5.4.1 Sean: $(X; d)$ un espacio métrico completo.
$(Y; \| \ \|)$ un espacio de Banach uniformemente suave.
$F : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia con gráfico cerrado.
$(x_0; y_0) \in graf(F)$.

Si existen $\varepsilon > 0, M > 0$ y un conjunto compacto $Q \subset Y$ tales que

$$Int \left\{ \bigcap_{\substack{(x;y)\in graf(F) \\ (x;y)\in B_\varepsilon(x_0)\times B_\varepsilon(y_0)}} \left[\overline{co}\left(F^{(1)}(x;y) \cap MB \right) + Q \right] \right\} \neq \phi$$

Si para algún $k \geq 1$, $0 \in Int \left\{ \overline{co}\, F^K(x_0; y_0) \right\}$, entonces existe $L > 0$ tal que

$\forall (x; y) \in graf(F)$ cerca de $(x_0; y_0)$, $\forall z \in Y$ cerca de y_0:

$$dist\left(x; F^{-1}(z)\right) \leq L \, \| y - z \|^{1/k}$$

Demostración.

Por el Teorema 5.2.1 es suficiente probar que existe $\rho > 0$ tal que

$\forall (x; y) \in graf(F)$ cerca de $(x_0; y_0)$, $\forall h > 0$ pequeño :

$$y + \rho h^k \overset{o}{B} \subset F\big(B(x; h)\big) \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Procedamos por contradicción. Supongamos que

$\forall \rho > 0 \, \exists (t; z) \in graf(F)$ cerca de $(x_0; y_0)$, $\exists h > 0$ pequeño, $\exists \, \overline{y} \in \left(z + \rho h^k \overset{o}{B} \right)$ con $\overline{y} \notin F\big(B(t; h)\big)$.

Para cada $n \in IN$ sea $\rho_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k}$. Luego, existe $(t_n; z_n) \in graf(F)$ que converge a $(x_0; y_0)$, existe $(h_n) \to o^+$, existe $\overline{y_n} \in z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k} h_n^k \overset{0}{B}$ con

$$\overline{y_n} \notin F(B(t_n; h_n)) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots....(22)$$

Para cada $n \in IN$ considere el espacio métrico $(E_n; d_n)$ dado por

$$\begin{cases} E_n := graf(F) \cap [B(t_n; h_n) \times Y] \\ d_n\left((u; v); (u'; v')\right) := d(u, u') + \| v - v' \| \end{cases}$$

Es claro que cada $(E_n; d_n)$ es un espacio métrico completo. Sea $f_n : E_n \to IR$ la función definida por

$$\forall (x; y) \in E_n : \; f_n(x; y) = \| y - \overline{y_n} \|^{1/k}$$

la cual es claramente continua. Por el Principio Variacional de Ekeland existe $(x_n; y_n) \in E_n$ que satisface las siguientes condiciones:

- $d(x_n; t_n) + \| y_n - z_n \| \leq \dfrac{h_n}{2n}$
- $\| y_n - \overline{y_n} \|^{1/k} \leq \dfrac{h_n}{2n^2}$ ………………(23)
- $\forall (x; y) \in E_n : \| y_n - \overline{y_n} \|^{1/k} \leq \| y - \overline{y_n} \|^{1/k} + \dfrac{1}{h}\left[d(x; x_n) + \| y - y_n \|\right]$……..(24)

Veamos que $y_n \neq \overline{y_n}$.

Procedamos por contradicción. Supongamos que $y_n = \overline{y_n}$. De (22) se tendría que $y_n \notin F(B(t_n; h_n))$. Por otro lado, como $(x_n; y_n) \in E_n$, se tendría que

$$(x_n; y_n) \in graf(F) \quad \wedge \; (x_n; y_n) \in B(t_n; h_n) \times Y$$

Es decir, $y_n \in F(x_n)$ y $x_n \in B(t_n; h_n)$, lo cual implicaría que $y_n \in F(B(t_n; h_n))$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $y_n \neq \overline{y_n}$.

De (23) se sigue que $0 < \| y_n - \overline{y_n} \| \leq 1$. Como Y es uniformemente suave existe $p_n \in Y'$ con $\| p_n \|_{Y'} = 1$ tal que

$$\forall t \in IR: \sup_{\|v\|\leq 1} \left| \, \| y_n - \overline{y_n} + t\,v \| - \| y_n - \overline{y_n} \| - \langle p_n\,; t\,v \rangle \right| \leq O(|t|) \ldots\ldots\ldots(25)$$

donde $O : \langle 0;\infty\rangle \to \langle 0;\infty\rangle$ es una función tal que $\lim_{t\to o^+} \frac{O(t)}{t} = 0$. De (25) se sigue que

$$\forall\, t \in IR,\ \forall\, v\ con\ \|v\| \leq 1: \| y_n - \overline{y_n} + t\,v \| + \langle p_n; t\,v\rangle + O(|t|) \ldots\ldots\ldots(26)$$

Veamos que

$$\forall\, y \in Y: \| y - \overline{y_n} \| \leq \| y_n - \overline{y_n} \| + \langle p_n; y - y_n \rangle + O(\| y - y_n \|) \ldots\ldots\ldots.(27)$$

En efecto, sea $y \in Y$ cualquiera. Si elegimos

$$t = \| y - y_n \|, \quad v = \frac{y - y_n}{\| y - y_n \|}$$

Usando (26) obtenemos

$$\| y - \overline{y_n} \| = \| y_n - \overline{y_n} + y - y_n \| = \left\| (y_n - \overline{y_n}) + \| y - y_n \| \left(\frac{y - y_n}{\| y - y_n \|} \right) \right\|$$

$$\leq \| y_n - \overline{y_n} \| + \langle p_n\,; y - y_n \rangle + O(\| y - y_n \|)$$

lo cual prueba (27).

Veamos que

$$\| y - \overline{y_n} \|^{1/k} \leq \| y_n - \overline{y_n} \|^{1/k} \left[1 + \frac{1}{k} \left\langle p_n\,; \frac{y - y_n}{\| y - y_n \|} \right\rangle + \overline{O}\left(\frac{\| y - y_n \|}{\| y_n - \overline{y_n} \|} \right) \right] \ldots\ldots\ldots..(28)$$

donde $\overline{O} : \langle 0;\infty\rangle \to \langle 0;\infty\rangle$ es una función tal que $\lim_{t\to o^+} \frac{\overline{O(t)}}{t} = 0$.

En efecto, de (27) se sigue que

$$\| y - \overline{y_n} \|^{1/k} \leq \left\{ \| y_n - \overline{y_n} \| + \langle p_n; y - y_n \rangle + O(\| y - y_n \|) \right\}^{1/k}$$

$$=\left\{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|\left[1+\left\langle p_n;\frac{y-y_n}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right\rangle+\frac{O\left(\left\| y-y_n\right\|\right)}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right]\right\}^{1/k}$$

$$=\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{1/k}\left\{1+\left\langle p_n;\frac{y-y_n}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right\rangle+\frac{O\left(\left\| y-y_n\right\|\right)}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right\}^{1/k}$$

$$=\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{1/k}\left\{1+\frac{1}{k}\left\langle p_n;\frac{y-y_n}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right\rangle+\overline{O}\left(\frac{\left\| y-y_n\right\|}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right)\right\}$$

donde $\overline{O}:\langle 0;\infty\rangle\to\langle 0;\infty\rangle$ es una función tal que $\lim\limits_{t\to o^+}\frac{\overline{O(t)}}{t}=0$. Esto prueba (28).

Veamos que $\forall(x;y)\in E_n$:

$$0\leq\frac{1}{k}\langle p_n;y-y_n\rangle+\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|\overline{O}\left(\frac{\left\| y-y_n\right\|}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right)+\frac{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{\frac{k-1}{k}}}{n}\left[d(x;x_n)+\left\| y-y_n\right\|\right]\ldots(29)$$

En efecto, para cada $(x;y)\in E_n$, de (24) y (28) se tiene que

$$\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{1/k}\leq\left\| y-\overline{y_n}\right\|^{1/k}+\frac{1}{n}\left[d(x;x_n)+\left\| y-y_n\right\|\right]$$

$$\leq\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{1/k}\left[1+\frac{1}{k}\left\langle p_n;\frac{y-y_n}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right\rangle+\overline{O}\left(\frac{\left\| y-y_n\right\|}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right)\right]+\frac{\left[d(x;x_n)+\left\| y-y_n\right\|\right]}{n}$$

$$=\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{1/k}+\frac{1}{k}\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{\frac{1}{k}-1}\langle p_n;y-y_n\rangle+\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{1/k}\overline{O}\left(\frac{\left\| y-y_n\right\|}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right)$$

$$+\frac{1}{n}\left[d(x;x_n)+\left\| y-y_n\right\|\right]$$

lo cual implica que

$$0\leq\frac{1}{k}\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{\frac{1}{k}-1}\langle p_n;y-y_n\rangle+\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|^{1/k}\overline{O}\left(\frac{\left\| y-y_n\right\|}{\left\| y_n-\overline{y_n}\right\|}\right)+\frac{\left[d(x;x_n)+\left\| y-y_n\right\|\right]}{n}$$

y de aquí se sigue que

$$0 \le \frac{1}{k}\langle p_n ; y - y_n \rangle + \| y_n - \overline{y_n} \| \overline{O}\left(\frac{\| y - y_n \|}{\| y_n - \overline{y_n} \|} \right) + \frac{\| y_n - \overline{y_n} \|^{\frac{k-1}{k}} \left[d(x; x_n) + \| y - y_n \| \right]}{n}$$

lo cual muestra (29).

Si definimos

$$\overline{h_n} := \frac{\| y_n - \overline{y_n} \|^{1/k}}{n^{1/2k}} \qquad A_n := \frac{F\left(B(x_n ; \overline{h_n})\right) - y_n}{\overline{h_n}^k}$$

entonces

$$\| y_n - \overline{y_n} \| = \sqrt{n}\, \overline{h_n}^k \quad \text{y} \quad \| y_n - \overline{y_n} \|^{1/k} = n^{1/2k}\, \overline{h_n}$$

Veamos que $B\left(x_n ; \overline{h_n}\right) \subset B\left(t_n ; h_n\right)$……….(30)

En efecto, si $w \in B\left(x_n ; \overline{h_n}\right)$, entonces $d\left(w; x_n\right) \le \overline{h_n}$. Luego, a partir de

$$d\left(w; t_n\right) \le d\left(w; x_n\right) + d\left(x_n ; t_n\right) \le \overline{h_n} + d\left(x_n; t_n\right) \le \frac{\| y_n - \overline{y_n} \|^{1/k}}{n^{1/2k}} + \frac{h_n}{2n} \le \frac{h_n}{2n} + \frac{h_n}{2n} \le h_n$$

se sigue que $w \in B\left(t_n ; h_n\right)$.Así, hemos probado (30).

Ahora veamos que $\forall\ w \in A_n : \frac{F\left(B\left(x_n ; \overline{h_n}\right)\right) - y_n}{\overline{h_n}^k}$

$$0 \le \frac{1}{k}\langle p_n ; w \rangle + \sqrt{n}\, \overline{O}\left(\frac{\| w \|}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{n^{\frac{k+1}{2k}}} \left[1 + \overline{h_n}^{k-1} \| w \| \right] \text{……….(31)}$$

En efecto, sea $w \in A_n = \frac{F\left(B\left(x_n ; \overline{h_n}\right)\right) - y_n}{\overline{h_n}^k}$ cualquiera. Si hacemos $y = w + y_n$ se tiene que

$$\left(y - y_n\right) \in \frac{F\left(B\left(x_n ; \overline{h_n}\right)\right) - y_n}{\overline{h_n}^k} \Rightarrow y_n + \overline{h_n}^k \left(y - y_n\right) \in F\left(B\left(x_n ; \overline{h_n}\right)\right)$$

Usando (30) se tiene que $y_n + \overline{h_n}^k \left(y - y_n\right) \in F\left(B\left(t_n ; h_n\right)\right)$. Reemplazando en (29):

$$0 \leq \frac{1}{k}\langle p_n ; w\rangle + \left\| y_n - \overline{y_n} \right\| \overline{O}\left(\frac{\| w \|}{\left\| y_n - \overline{y_n} \right\|} \right) + \frac{\left\| y_n - \overline{y_n} \right\|^{\frac{k-1}{k}}}{n} \left[\; d(x;x_n) + \| y - y_n \| \;\right]$$

$$\leq \frac{1}{k}\langle p_n ; w\rangle + \sqrt{n}\, \overline{h_n}^{\,k}\, \overline{O}\left(\frac{\| w \|}{\left\| y_n - \overline{y_n} \right\|} \right) + \frac{\left(\sqrt{n}\; \overline{h_n}^{\,k} \right)^{\frac{k-1}{k}}}{n} \left[\overline{h_n} + \| w \| \right]$$

$$= \frac{1}{k}\langle p_n ; w\rangle + \sqrt{n}\; \overline{h_n}^{\,k}\, \overline{O}\left(\frac{\| w \|}{\left\| y_n - \overline{y_n} \right\|} \right) + \frac{\left(\sqrt{n} \right)^{\frac{k-1}{k}} \left(\overline{h_n} \right)^{k-1}}{n} \left[\overline{h_n} + \| w \| \right]$$

$$= \frac{1}{k}\langle p_n ; w\rangle + \sqrt{n}\;\; \overline{O}\left(\frac{\| w \|}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{n^{\frac{k+1}{2k}}} \left[\overline{h_n}^{\,k} + \overline{h_n}^{\,k-1}\; \| w \| \right]$$

$$\leq \;\; \frac{1}{k}\langle p_n ; w\rangle + \sqrt{n}\;\; \overline{O}\left(\frac{\| w \|}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{n^{\frac{k+1}{2k}}} \left[1 + \overline{h_n}^{\,k-1}\; \| w \| \right]$$

se obtiene (31).

Sea $v \in F^k(x_0; y_0)$ cualquiera. Para las sucesiones $\left(\overline{h_n}\right)$ y $(x_n ; y_n) \subset graf\,(F)$ que converge a (x_0 , y_0) que hemos obtenido anteriormente, existe una sucesión $(v_n) \to v$ tal que

$$\forall\; n \in IN : \left(y_n + \overline{h_n}^{\,k}\; v_n \right) \in F\left(B\left(x_n ; \overline{h_n}\right)\right) \ldots\ldots\ldots(32)$$

De (32) es claro que $v_n \in A_n$. Usando (31) tenemos que

$$0 \leq \frac{1}{k}\langle p_n ; v_n\rangle + \sqrt{n}\, \overline{O}\left(\frac{\| v_n \|}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{n^{\frac{k+1}{2k}}} \left[1 + \overline{h_n}^{\,k-1} \| v_n \| \right] \ldots\ldots\ldots(33)$$

Sea p cualquier elemento de la clausura débil de $\{\, p_n \;/\; n \in IN \,\}$ (este p existe pues Y es un espacio reflexivo). Si en (33) tomamos límite cuando $n \to \infty$ obtenemos $0 \leq \frac{1}{k}\langle p ; v\rangle$. Así, hemos probado que

$$\forall\, v \in F^k(x_0 ; y_0) : \langle p ; v\rangle \geq 0$$

lo cual implica que

$$p \in \left[F^k(x_0; y_0)\right]^+ = \left[\overline{co}\, F^k(x_0 ; y_0)\right]^+ = \{\, 0 \,\} \;\Rightarrow\; p = 0 \ldots\ldots\ldots(34)$$

Veamos ahora que $p = 0$.

En efecto, sea $v \in F^{(1)}(x_n; y_n)$ cualquiera. Luego, existen $(h_i) \to 0^+$, $(v_i) \to v$ tales que

$$(y_n + h_i v_i) \in F(B(x_n; h_i))$$

Sea $y = y_n + h_i v_i$. Reemplazando en (29):

$$0 \leq \frac{1}{k}\langle p_n ; h_i v_i \rangle + \| y_n - \overline{y_n} \| \overline{O}\left(\frac{\| h_i v_i \|}{\| y_n - \overline{y_n} \|} \right) + \frac{\| y_n - \overline{y_n} \|^{\frac{k-1}{k}}}{n} \left[d(x, x_n) + h_i \| v_i \| \right]$$

$$\leq \frac{h_i}{k}\langle p_n ; v_i \rangle + h_i \| y_n - \overline{y_n} \| \overline{O}\left(\frac{\| v_i \|}{\| y_n - \overline{y_n} \|} \right) + \frac{\| y_n - \overline{y_n} \|^{\frac{k-1}{k}}}{n} \left[h_i + h_i \| v_i \| \right]$$

Dividiendo por h_i:

$$\leq \frac{1}{k}\langle p_n ; v_i \rangle + \| y_n - \overline{y_n} \| \overline{O}\left(\frac{\| v_i \|}{\| y_n - \overline{y_n} \|} \right) + \frac{\| y_n - \overline{y_n} \|^{\frac{k-1}{k}}}{n} \left[1 + \| v_i \| \right]$$

Tomando límite cuando $i \to \infty$:

$$0 \leq \frac{1}{k}\langle p_n ; v \rangle + \frac{\| y_n - \overline{y_n} \|^{\frac{k-1}{k}}}{n} \left[1 + \| v \| \right] \text{.........(35)}$$

Sea $\varepsilon_n = \frac{k}{n} \| y_n - \overline{y_n} \|^{\frac{k-1}{k}} \left[1 + \| v \| \right]$. Luego,

$$\forall v \in \overline{co}\left(F^{(1)}(x_n; y_n)\, MB \right):\ 0 \leq \langle p_n ; v \rangle + \varepsilon_n \quad \Rightarrow \langle p_n ; v \rangle \geq -\varepsilon_n$$

Sean $z \in Y$ y $r > 0$ tales que

$$z + rB \subset Int \left\{ \bigcap_{\substack{(x;y) \in graf(F) \\ (x;y) \in B(x_0;\varepsilon) \times B(y_0;\varepsilon)}} \left[\overline{co}\left(F^{(1)}(x;y) \cap MB \right) + Q \right] \right\}$$

Sea $w_n \in B$ tal que $\langle p_n ; w_n \rangle \geq 1 - \frac{1}{n}$. Sean $a_n \in \overline{co}\left(F^{(1)}(x_n; y_n) \right)$, $q_n \in Q$ tales que

$$z - r w_n = a_n + q_n$$

Luego, a partir de

$$\langle p_n ; z - q_n \rangle = \langle p_n ; a_n + r\, w_n \rangle = \langle p_n ; r\, w_n \rangle + \langle p_n ; a_n \rangle = r\ \langle p_n ; w_n \rangle + \langle p_n ; a_n \rangle$$

$$\geq r\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \varepsilon_n$$

se tiene que

$$\langle p_n ; z - q_n \rangle \geq r\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \varepsilon_n \ldots\ldots\ldots(36)$$

Sean $\{ p_{n_i} \}$, $\{ q_{n_i} \}$ sucesiones tales que $\{ p_{n_i} \}$ converge débilmente a p y $\{ q_{n_i} \}$ converge a $q \in Q$. Si en (36) tomamos límite cuando $n \to \infty$ obtenemos $\langle p ; z - q \rangle \geq r$ lo cual muestra que $p \neq 0$.
Es claro que la última conclusión contradice (34). ∎

Referencias

[1] J.P. Aubin and I. Ekeland. Applied Nonlinear Analysis. Dover Publications, Inc. Mineola,New York (1984).

[2] J.P. Aubin and H. Frankowska. Set Valued Analysis. Birkháuser, Boston (1990)

[3] J.P. Aubin and H. Frankowska. On inverse function theorems for set valued maps, J.Math. Pure Appl. Vol. 66,1987,pp. 71-89.

[4] H. Bréziz. Analyse Functionalle. Masson Editeur, de París. (1983).

[5] Frank H. Clarke. Optimización and Nonsmooth Analysis. John Wiley &Sons. (1983).

[6] A.L. Dontchev and W:W: Hager . An Inverse Mapping Theorem for Set-Valued maps

[7] I. Ekeland, On the Variational Principle, J. Math. Anal. Appl.,Vol 47, 1974,pp. 324-358.

[8] H. Frankowska. Some Inverse mapping theorems. Annales de LÍ.P. section C, tome 7, N° 3 (1990), p. 183-234.

[9] Eladio Ocaña. Correspondencias y Aplicaciones. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Ingeniería. Lima 2002.